SITUACIONES PROBLEMA PARA ACERCAR A LOS ALUMNOS DE CUARTO GRADO AL CONCEPTO DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR

ALDERMAN LÓPEZ JAIMES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

SITUACIONES PROBLEMA PARA ACERCAR A LOS ALUMNOS DE CUARTO GRADO AL CONCEPTO DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR

ALDERMAN LÓPEZ JAIMES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el Título de Licenciado de Matemáticas

Director
LUIS CARLOS OÑATE FERNÁNDEZ
Ingeniero Químico
Ps Pedagogía Informática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

“¿Cuáles son los números que pueden mejorar el país? Los números que establecen una buena economía y aquellos que validan o descartan el beneficio o el perjuicio de las leyes que nos gobiernan”.

Alderman López

DEDICATORIA

A los eruditos de la matemática, aún profanos ante la vida.

AGRADECIMIENTOS

El autor de este proyecto expresa sus agradecimientos a:

A la **UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER - UIS** por la oportunidad de formarme como profesional.

A **LUIS CARLOS OÑATE FERNÁNDEZ**, quien con su talento y conocimiento hizo posible el buen desarrollo de este proyecto.

A mi **FAMILIA** por su ayuda incondicional y por sus aportes económicos.

A **CARMEN VARGAS DIAZ** por el buen desarrollo de su trabajo para con este proyecto.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN 12

JUSTIFICACIÓN 13

1. OBJETIVOS 14

1.1 OBJETIVO GENERAL 14

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 14

2. METODOLOGÍA 15

3. MARCO TEÓRICO 20

3.1 SITUACIONES PROBLEMA 20

3.2 DENOMINACIÓN DEL CONCEPTO DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR 20

3.3 DIVISOR 20

3.4 NÚMEROS COMUNES 20

3.5 MÁXIMO DE UN CONJUNTO DADO DE NÚMEROS 20

3.6 MÁXIMO COMÚN DIVISOR 21

3.7 DEFINICIÓN DE PRIMOS RELATIVOS 21

4. SITUACIONES PROBLEMA 22

4.1 SITUACION PROBLEMA N°1 22

4.3 SITUACION PROBLEMA N°3 29

4.4 SITUACION PROBLEMA N°4 32

4.5 SITUACION PROBLEMA N°5 35

4.6 SITUACION PROBLEMA N°6 40

4.7 SITUACION PROBLEMA N°7 42

5. ANALISIS DE SITUACIONES PROBLEMA 48

6. MÉTODOS PARA HALLAR EL M.C.D. 49

6.1 POR INSPECCIÓN 49

6.2 POR DIVISIONES SUCESIVAS 49
6.3 POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS 50
7. ALGUNAS PROPIEDADES DEL M.C.D. 54
7.1 PROPIEDAD N°1 54
7.2 PROPIEDAD N°2 54
7.3 PROPIEDAD N°3 54
7.4 PROPIEDAD N°4 54
7.5 PROPIEDAD N°5 55
7.6 PROPIEDAD N°6 55
8. EJEMPLOS DE M.C.D. 56
8.1 HALLAR EL M.C.D. (8, 5) 56
8.2 HALLAR EL M.C.D. (7, 4, 6) 56
8.3 HALLAR EL M.C.D (20, 40) 57
8.4 HALLAR EL M.C.D. (15, 45, 30, 60) 58
8.5 HALLAR EL M.C.D. (21, 27, 36) 59
9. EJERCICIOS DE M.C.D. 60
10. SITUACIONES PROBLEMA CON BASE AL M.C.D. 61
CONCLUSIONES 62
RECOMENDACIONES 63
BIBLIOGRAFIA 64

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Situación problema N°1. 23

Tabla 2. Situación problema N°2. 26

Tabla 3. Situación problema N°3. 30

Tabla 5. Situación problema N°5 35

Tabla 6. Situación problema N°6. 40

Tabla 7. Situación problema Nº7 44

RESUMEN

Titulo: SITUACIONES PROBLEMA PARA ACERCAR A LOS ALUMNOS DE CUARTO GRADO AL CONCEPTO DE MAXIMO COMUN DIVISOR.*

Autor: López Jaimes Alderman**

Palabras claves: situaciones problema, Denominación, Máximo Común Divisor.

Descripción: El trabajo SITUACIONES PROBLEMA PARA ACERCAR A LOS ALUMNOS DE CUARTO GRADO AL CONCEPTO DE MAXIMO COMUN DIVISOR, para este propósito se establecen siete (7) problemas distribuidos en tres grupos, el primero y el segundo cada uno con tres problemas y el tercer grupo con un problema. En el primer problema (del primer grupo) se buscan unos datos por medio de la información preliminar, el segundo (del primer grupo) por medio de la información del problema anterior y otra operación se buscan otros datos, de la misma forma el tercer problema del mismo grupo basándose en la información en los dos problemas anteriores se encuentran otros datos; de tal manera que el siguiente grupo de tres problemas se plantea un caso diferente, pero bajo pautas similares. En el tercer grupo las situaciones problema encadenan una serie de experiencias de las cuales se espera que los educandos tomen las operaciones en común, donde esas operaciones desarrolladas en ciclo constituyen el Máximo Común Divisor.

Se espera que la experiencia con los alumnos corrobore lo planeado. Los alumnos(as) inducen el concepto de Máximo Común Divisor después de desarrollar las situaciones problema interesados por el tema y con agrado.

---

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Carlos Oñate Fernández

SUMMARY

Title: SITUATIONS PROBLEMS TO APPROACH THE STUDENTS TOUR GRADE TO CONCEPT OF HIGHEST COMMON DIVISOR*

Author: López Jaimes Alderman**

Keywords: situation problem, denomination, highest common divisor.

Description: The work SITUATIONS PROBLEMS TO APPROACH THE STUDENTS TOUR GRADE TO CONCEPT OF HIGHEST COMMON DIVISOR for this purpose are estbilished 7 problems distributed in 3 groups, the first and the second each are with 3 problems, and the third group with a problem. In the first problem (ok the first group) are looking for data by means of preliminary information, the second (of first groupe) by means of the information of in previous problem and another operation looks for another data, of the samp form the third problem of the same group basing on information of the both two previous problem are found another data; in the way that the next group of three problems it is stated a different case but Ander similar patterns.

In the third group, the situation problem enchains a set of experiences Vich it is expected that alumns take up the operations in common, where this operations resolved in cycles constitutes the highest common divisor.

It is expected that the experience with the alumns corroborate the stated. The alumns induce the concept of highets common divisor alter resolving the situations problem interested by the matter and with affability.

* Work of Gradee.

** Faculty of Sciences. Math Licenciated. Director: Luis Carlos Oñate Fernández.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto se ha diseñado para acercar los alumnos de Cuarto Grado al concepto de Máximo Común Divisor, por medio de situaciones problema.

De manera constructiva se propone ocho (8) situaciones problema, donde con cada tres problemas se estructuran tres pasos que acercan al alumno(a) al concepto de Máximo Común Divisor; así, en los seis primeros problemas, de tal manera que estos tres pasos se ejecutan dos veces; luego se realiza una situación problema donde se concretan los mismos tres pasos anteriores; de esta forma, se espera que los alumnos(as) tengan en un tiempo corto un grupo de experiencias (como por ejemplo: repartir en partes iguales una cantidad, buscar partes iguales en común y encontrar la mayor de las partes iguales en común) de las cuales se desea que alcancen a abstraer los procesos en común de las situaciones problema. Después de este proceso de denominación del concepto de Máximo Común Divisor se utiliza como auxiliar para asociar los pasos descritos con dicho concepto.

Los problemas planteados se basan en el diario vivir, donde se puede reconocer fácilmente los objetos, frutas o demás elementos a tratar para el desarrollo de las situaciones problema; el alumno(a) se puede ubicar en la situación problema con propiedad, despertando el interés por tal problema. Los pasos por los cuales se desarrolla este trabajo están basados en la percepción –abstracción - generalización de las pautas por las que se constituye el concepto de Máximo Común Divisor. La percepción se adopta de la interpretación que los alumnos(as) dan a la información planteada (las situaciones problema) las cuales son reforzadas con sus vivencias, ideas, imágenes, expectación y actitud.

La abstracción o lo que “sacan” de las situaciones problema planteadas se espera que sean los procedimientos en común que estructuran el concepto de Máximo Común Divisor. Un concepto puede ser definido como una generalización o la idea en común que se tiene como perspectiva de lo que se abstrae, en el concepto de Máximo Común Divisor.

Un concepto puede ser definido como una generalización a partir de datos relacionados, y posibilita responder a, o pensar en, estímulos específicos o preceptos de una forma determinada. Por esto, un concepto equivale a un juicio y se utiliza como un criterio (K Novell, 1969, p. 25).

Basándonos en la jerarquización de los procesos siguientes se establece la construcción del proyecto:

1. **Percepción**. Interpretación de las situaciones problema por los alumnos(as).
2. **Abstracción**. Proceso mental que el alumno(a) ejecuta substrayendo (sacando) las pautas que estructuran el concepto de Máximo Común Divisor.

3. **Generalización**. Construcción mental que el alumno(a) realiza de los datos y procesos que se abstraen, donde estos proceden de las percepciones.

JUSTIFICACIÓN

En este proyecto se pretende crear situaciones problema con el objetivo primordial de permitir al alumno un acercamiento al concepto de Máximo Común Divisor.

El inducir un concepto por medio de situaciones problema es una estrategia importante e innovadora, que pone a prueba el ingenio y la imaginación del profesor y los alumnos(as); con la aplicación de este método los alumnos construyen, por etapas, un proceso (el concepto de Máximo Común Divisor) en el cual, mediante situaciones reales y útiles, pueden aprender a manejar una información bajo pautas ya conocidas (como el concepto divisor) y encadenar la información para la obtención de una meta (la de construir el concepto de Máximo Común Divisor), haciendo de estos pasos un método interesante y creativo para inducir este concepto.

Se puede considerar la inducción al concepto de Máximo Común Divisor como un hito en el conocimiento y una posible utilización para la apropiación de otros como el de Mínimo Común Múltiplo, etc.

Actualmente los conceptos son establecidos intrínsicamente donde no se observa la estructuración de estos, olvidando que cuando se construyen las herramientas es más fácil manejarlas, esto debido a, que hay una mejor imagen de cómo y hasta dónde pueden utilizarse.

El objetivo de este proyecto es construir las pautas por las cuales se forma el concepto de Máximo Común Divisor donde se pueda observar paso a paso cómo se forma; dar una interpretación a estos procesos (percepción), abstraer los pasos en común (abstracción) y generalizar dichos pasos relacionándolos (generalización).

Toda construcción de un concepto (sin olvidar por medio de qué) es un medio didáctico, por el cual se le facilita al educando solucionar las preguntas: ¿De dónde salió? ¿Por qué se utiliza? y ¿Para qué sirve? el concepto en estudio. Donde es posible cimentar una base fuerte en la formación del conocimiento, mejorar los métodos de aprendizaje por medios cada vez mas concretos, llevando así al alumno a suscitar su atención sobre lo que se está viendo, buscando de una forma amable y comprensiva, cautivarlo en una empresa muy grande que lo acompañará toda su vida, el aprendizaje.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Plantear una estrategia por medio de situaciones problema que permitan acercar a los alumnos de Cuarto Grado al concepto de Máximo Común Divisor.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Plantear situaciones problema para inducir el concepto de Máximo Común Divisor.

2. Analizar y estructurar el concepto de Máximo Común Divisor a partir de las situaciones problemas planteadas.

3. Definir formalmente el concepto de Máximo Común Divisor.

4. Establecer propiedades y resolver ejemplos y ejercicios de aplicación del concepto de Máximo Común Divisor.

5. Experimentar las situaciones problema con diez (10) estudiantes de Cuarto Grado del Colegio Aurelio Martínez Mutis.

2. METODOLOGÍA

En las estrategias de resolución de problemas se aplica el método heurístico.

El método heurístico consiste en estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas para las soluciones de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares.

Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques que se siguen para alcanzar una solución. (Paggioli, 2006, Serie Enseñando a Aprender).

Este método se utiliza en el presente proyecto debido a que ofrece la posibilidad de crear y seleccionar estrategias que permitan aproximar a los alumnos(as) de Cuarto Grado al concepto de Máximo Común Divisor; igualmente porque da las pautas por las cuales se puede alcanzar las metas planteadas en cada situación problema.

El método heurístico contiene procedimientos generales. El que se escoge es el siguiente:

Análisis de medios – fin (mean-ends análisis). Este procedimiento permite al que resuelve un problema trabajar en un objetivo a la vez. Consiste en descomponer el problema en subtemas, escoger uno para trabajar la tarea superando los obstáculos que impidan llegar al estado final. (Poggioli, 2006, serie Enseñando a Aprender).

Pasos del método heurístico en la solución de problemas. Cada problema está compuesto por un enunciado; se plantean unas metas; se dispone de datos para analizar; se formulan restricciones, procedimientos y se analiza una verificación de las soluciones encontradas.

En este proyecto se establecen 7 problemas; los 3 primeros problemas utilizan procedimientos similares a los 3 siguientes y el séptimo problema recopila los tres pasos mencionados en el párrafo anterior. El resultado del primer problema se utiliza en el segundo, el del segundo en el tercero. Del cuarto al sexto problema se realiza un procedimiento similar al anterior; el séptimo, se puede establecer como la recopilación de todas las pautas planteadas en los problemas anteriores; después se desarrollan ejemplos y se proponen ejercicios y situaciones problema para resolver.

Para desarrollar el presente proyecto se tiene en cuenta la teoría cognitiva del aprendizaje, de la cual se hace un resumen a continuación.

Teoría cognitiva del aprendizaje. La crisis que sacudió la teoría del conductismo, dio paso a las teorías cognitivas, en las cuales la intuición, la conducta dirigida a objetivos y expectativas eran consideradas más importantes que las relaciones E-R (Estímulo – Respuesta). Se considera que en la solución de un problema debe realizarse un proceso mental, que incluye el esquela E-O-R, donde la "O" representa lo que la persona almacena en la mente: imágenes, símbolos, lenguajes, esquemas, etc; éste método busca que el niño adquiera el hábito de descubrir.

Dentro de las posiciones destacadas en la teoría cognitiva están las de Piaget, Visgotsky y Ausubel, de ellas se destaca lo pertinente a la parte matemática.

La teoría de Piaget. En la teoría de Piaget deben distinguirse varios conceptos fundamentales sobre los cuales se cimenta su concepción del desarrollo mental e intelectual del individuo, que es lo que conviene a este proyecto.

Piaget y la enseñanza de las matemáticas. Para abordar el proceso del aprendizaje de las matemáticas, Piaget[1] plantea el problema de saber si las conexiones matemáticas son engendradas por la actividad de la inteligencia o si ésta las descubre como una realidad exterior y completa. Para resolver dicho problema fundamental la construcción del edificio matemático en la noción de estructura, considerando ésta como un sistema operatorio, pero a su vez plantea la cuestión de decidir si los elementos de diversa naturaleza a los que se aplica la estructura, existen previamente a ella o por el contrario, es la acción de la estructura la que confiere a los elementos sus propiedades esenciales. Para comprender las ideas piagetanas es necesario tener en cuenta que las teorías de este científico tienen su génesis en el desarrollo de la inteligencia y, más generalmente, en la psicología de las funciones cognitivas.

En este orden de ideas no es fácil comprender el tratamiento de objetos que les da a los números como elementos ya existentes pero cuya significación se debe definir dentro de un contexto en el cual se caracterizaran por tener relaciones operatorias entre si. Para resolver esta duda no define los elementos aisladamente, sino que su definición estructural consiste en caracterizarlos por las relaciones operatorias que tienen entre si, en función del sistema. El término psicológico general para una estructura mental es esquema. Un esquema tiene dos funciones principales. Integra conocimiento existente y es un instrumento mental para la adquisición de nuevos conocimientos. Piaget tiene en cuenta tres estructuras fundamentales para analizar el desarrollo psicológico de las operaciones aritméticas y geométricas espontáneas del niño: las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas. Este investigador considera que el desarrollo de la inteligencia ocurre por etapas, las

[1] PIAGET, J. La Enseñanza de las Matemáticas. Las Estructuras Matemáticas y las Operatorias de la Inteligencia. Cap. 1. Madrid: Aguilar S.A. 1963.

cuales clasifica por edades cronológicas, según el desarrollo mental del niño. Sin entrar a analizar cada una de esas etapas digamos que en lo que aquí tratamos, tiene que ver con la etapa de operaciones concretas (entre 8 y 11 años). En esta etapa el niño adquiere la capacidad de efectuar una operación mental interna o una operación con conceptos.

La teoría de Vigotsky. De esta teoría suelen formularse como ideas centrales las siguientes tesis:

- Los **Procesos Psicológicos Superiores** (PPS) tienen un origen histórico social.
- Los **instrumentos de medición** (herramientas y signos) cumplen un papel central en la constitución de tales PPS.
- Los PPS deben abordarse según los procesos de su constitución, es decir, desde **una perspectiva genética**.

En lo referente a nuestro trabajo, se resaltan los instrumentos de mediación (de esta teoría), en los renglones siguientes:

Instrumentos de mediación. Al basar su psicología en el concepto de actividad, Vigostsky considera que el hombre no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos, transformándolos, lo cual lo es posible gracias a la **mediación** de instrumentos que se interponen entre el estimulo y la respuesta. El concepto vigotskiano de mediador está más próximo al concepto piagetiano de adaptación como un equilibrio de asimilación y acomodación.

Además de proporcionar herramientas, la cultura está constituida fundamentalmente por sistema de signos o símbolos que median en nuestras acciones. El sistema de signos usado con mas frecuencia es el lenguaje hablado, pero hay otros muchos sistemas simbólicos que nos permiten actuar sobre la realidad por ejemplo, los sistemas de medición, la aritmética, el sistema de lecto-escritura, etc., pero a diferencia de la herramienta, el signo no modifica materialmente el estimulo, sino que modifica a la persona que lo utiliza como mediador y, en definitiva, actúa sobre la interacción de esa persona con su entorno.

Según Vigostsky, los conceptos verdaderos son los conceptos científicos adquiridos a través de la instrucción. A diferencia de los conceptos espontáneos, los conceptos científicos tienen tres rasgos característicos en su adquisición:

- Forma parte de un sistema
- Se adquieren a través de una toma de conciencia de la propia actividad mental.
- Implica una relación especial con el objeto basada en la internalización de la esencia del concepto.

Vigotsky y la enseñanza de las matemáticas. Debido a la poca difusión que tuvo la obra de Vigotsky en sus comienzos, es de esperar que no haya tenido gran influencia en la enseñanza de las matemáticas. Según Baquero (1997), se concibe en muchos ámbitos el interés por la obra de Vigotsky, como un declinar de la obra de otros autores, particularmente de Piaget. En el análisis de la construcción de conocimientos en los diversos dominios del saber escolar se considera que desde una perspectiva vigotskiana se ha reflexionado sobre el desarrollo de conceptos científicos en los contextos de enseñanza, con la vinculación entre conceptos espontáneos y científicos, situando el debate en el problema de las teorías de cambio conceptual. Vinculado con este problema, se sitúan indagaciones más específicas, sobre la apropiación del sistema de numeración y el desarrollo de conceptos matemáticos, pero en estado incipiente.

La teoría de Ausubel: El aprendizaje significativo. En su teoría[2] del aprendizaje, Ausubel establece dos diferencias fundamentales entre las dimensiones que representan los tipos de procesos de aprendizaje. La primera diferencia tiene que ver con los medios por los cuales el conocimiento se pone a disposición de la mente consciente del aprendiz (dimensión de aprendizaje por recepción/aprendizaje por descubrimiento); la segunda diferencia trata de las formas alternas en que el aprendiz puede incorporar tal conocimiento en sus estructuras existentes de ideas (dimensión de aprendizaje significativo/aprendizaje memorístico). Se asume que estas dos dimensiones son relativamente independientes, de tal manera que pueden ocurrir los cuatro tipos de aprendizaje siguientes: (1) significativo por recepción, (2) memorístico por recepción; (3) significativo por descubrimiento; (4) memorístico por descubrimiento.

De esta teoría se rescata lo siguiente:

La dimensión del aprendizaje por descubrimiento memorístico o significativo. Hasta ahora se ha discutido la primera etapa en el proceso de aprendizaje, o sea la etapa en la cual el aprendiz dispone del concepto en su forma final. Ahora el aprendiz debe relacionar esta idea con los conocimientos que ya posee, esto es, con su estructura cognitiva previa.

En la segunda etapa el aprendiz actúa conscientemente sobre este concepto en un intento por recordarlo de tal manera que estaría disponible en un tiempo futuro. Él puede hacer esto de una u otra forma. Si el aprendiz procura retener la idea por tener relación con lo que él sabe, y, en consecuencia, por "encontrarle sentido", entonces el resultado es un **aprendizaje significativo**. Por otro lado, si él meramente intenta memorizar (repetir) la idea, sin relacionarla con su conocimiento existente, entonces se dice que tiene lugar el aprendizaje de memoria.

---

[2] AUSUBEL, D.P. Readings in School Learning. New Cork: Holt, Rinehart and winston. Inc. 1969.

Otro tipo de aprendizaje significativo lo constituye la **asimilación de conceptos o ideas**. En este sentido, para Ausubel la asimilación es el proceso por el cual un concepto (o "significado") se relaciona con los ya existentes, y tiende a ser **asimilado o reducido** en el transcurso del tiempo a significados más estables de las ideas ancladas establecidas. Este aprendizaje solo puede realizarse si hay la predisposición del que aprende, para efectuarlo.

Ausubel, considera que el aprendizaje de las matemáticas ilustra claramente las posibilidades para el aprendizaje significativo, siempre que se tenga cuidado de preparar material potencialmente significativo para el niño,

En cuanto a los obstáculos aparentemente insuperables para incontables estudiantes y profesores que presenta el aprendizaje de las matemáticas, este autor considera que las matemáticas se aprenden continua y secuencialmente. Al fallar en un paso previo, el aprendiz se encontrará en posición de incompetencia para comprender lo que sigue en la secuencia, y puede sobrevivir durante algún tiempo por puro aprendizaje mecánico, pero su confusión e incompetencia irán aumentando hasta llegar a convertirse en incapaz para emprender cualquier operación, por simple que sea.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 SITUACIONES PROBLEMA

Las situaciones problema se definen como proposiciones dirigidas especialmente a buscar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos.

La estructura en la cual se construyen las situaciones problemas se basa en un acercamiento al concepto de Máximo Común Divisor, donde por medio de cada problema se adoptan los pasos en los cuales se forma este concepto. Cada tres problemas se analiza un aspecto diferente, donde el primero es parte del segundo y este del tercero, así en forma encadenada se organizan los primeros seis problemas. El problema siete conforma tres pasos, por los cuales en forma organizada induce el concepto de Máximo Común Divisor.

3.2 DENOMINACIÓN DEL CONCEPTO DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Un concepto es una idea, el nombre de un concepto es un sonido, o una marca sobre papel, asociada con él. Esta asociación puede formarse después de que el concepto ha sido formado o en el proceso de formarlo.[3]

Esta es la idea principal en que se ha construido este proyecto, en el deseo de inducir el concepto de Máximo Común Divisor estructurándolo a través de situaciones problema. El nombre que adopta este concepto esta hecho con base en las operaciones (procesos) que desarrolla.

3.3 DIVISOR

Es un número por el cual ha de dividirse otro. En el caso particular de los divisores de un número, esta cantidad divide a otra exactamente.

3.4 NÚMEROS COMUNES

Los números comunes entre dos o más conjuntos de números son aquellos que se encuentran en todos los conjuntos sin excepción.

3.5 MÁXIMO DE UN CONJUNTO DADO DE NÚMEROS

Es el número mayor del conjunto de números dados.

[3] R.SKEMP Richard (1980), Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas. Ediciones Morata, S.L. Madrid, 1993.

3.6 MÁXIMO COMÚN DIVISOR

En el siglo IV (a.C) Euclides, un genial griego, logró reunir los principales conocimientos matemáticos de su época. Todo lo relacionado con la aritmética, los expuso en los libros VII, VIII, IX y X de sus "Elementos". Entre los curiosos datos aritméticos que se encuentran en esa portentosa obra, aparece el método de resolución del Máximo Común Divisor, que hoy llamamos de divisores sucesivos.[4]

El Máximo Común Divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Observación. El Máximo Común Divisor de dos números enteros a y b lo notamos M.C.D (a, b), o m.c.d. (a, b) o (a, b). Si es el Máximo Común Divisor de más de dos números se nota m.c.d (a, b, c) o m.c.d de a, b y c (de igual forma cuando hay más de tres números).

3.7 DEFINICIÓN DE PRIMOS RELATIVOS

Dos números son primos relativos o primos entre si, cuando el Máximo Común Divisor entre ellos es uno.

[4] BALDOR, Aurelio (1983). Aritmética. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. Delegación Azcapotzalco, México, 1998.

4. SITUACIONES PROBLEMA

4.1 SITUACION PROBLEMA N°1

A Josefina, dueña de una venta de carne de pollo, le hacen tres supermercados los siguientes pedidos: 60 perniles, 54 perniles y 38 perniles. Los dueños de los supermercados desean que se les empaque los perniles en bandejas de igual cantidad de presas. ¿De cuántas formas puede hacerlo Josefina?

1. Metas. Encontrar cuál es la cantidad de perniles por bandeja sin que sobren perniles y ¿en qué cantidad de bandejas se agrupan dichos perniles?.

2. Datos.

- Una venta de carne de pollo
- Tres supermercados
- 60 perniles
- 54 perniles
- 38 perniles

3. Restricciones. Los perniles se reparten por bandejas en cantidades "enteras" positivas únicamente, 1, 2, 3,…, debido a que sólo estos divisores tienen sentido en este caso. Las bandejas deben tener igual cantidad de perniles por bandeja. (No deben quedar perniles fuera de una bandeja).

4. Procedimiento. Para obtener la cantidad de perniles que se puede empacar en cada bandeja, primero buscamos cómo se pueden agrupar los 60 perniles en cantidades iguales para que todas las bandejas contengan la misma cantidad de perniles. Esto lo hacemos por medio de una operación sencilla, encontrando los divisores de 60; porque los divisores de este número lo dividen exactamente.

Nota. Como no deben quedar perniles fuera de las bandejas, los divisores deben ser exactos, lo cual cumplen los divisores de cada número.

El conjunto de los divisores lo denotamos con D.

$D60= \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

De igual forma para los divisores de 54.

$D54= \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

Así también, para los divisores de 38.

D38= {1,2,19,38}

Los perniles se pueden agrupar en las siguientes cantidades en cada bandeja:

Tabla 1. Situación problema N°1.

NUMERO DE PERNILES	CANTIDAD DE PERNILES POR BANDEJA	CANTIDAD DE BANDEJAS
60	1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60	60 30 20 15 12 10 6 5 4 3 2 1
54	1 2 3 6 9 18 27 54	54 27 18 9 6 3 2 1
38	1 2 19 38	38 19 2 1

Fuente: Autor del Proyecto.

5. Verificación. Para repartir los 60 perniles en bandejas de igual cantidad de perniles por cada bandeja, según la Tabla 1, se puede agrupar así:

a. 1 Pernil para cada una de las 60 bandejas.
b. 2 Perniles para cada una de las 30 bandejas.
c. 3 Perniles para cada una de las 20 bandejas.
d. 4 Perniles para cada una de las 15 bandejas.

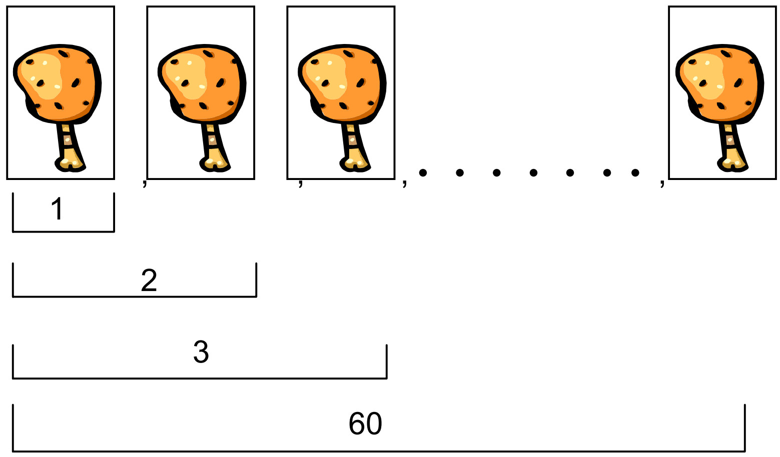
Así sucesivamente, para las demás cantidades.

De la misma forma, para los 54 y 38 perniles según se indica en la distribución precedente.

a.

Cantidad de perniles:

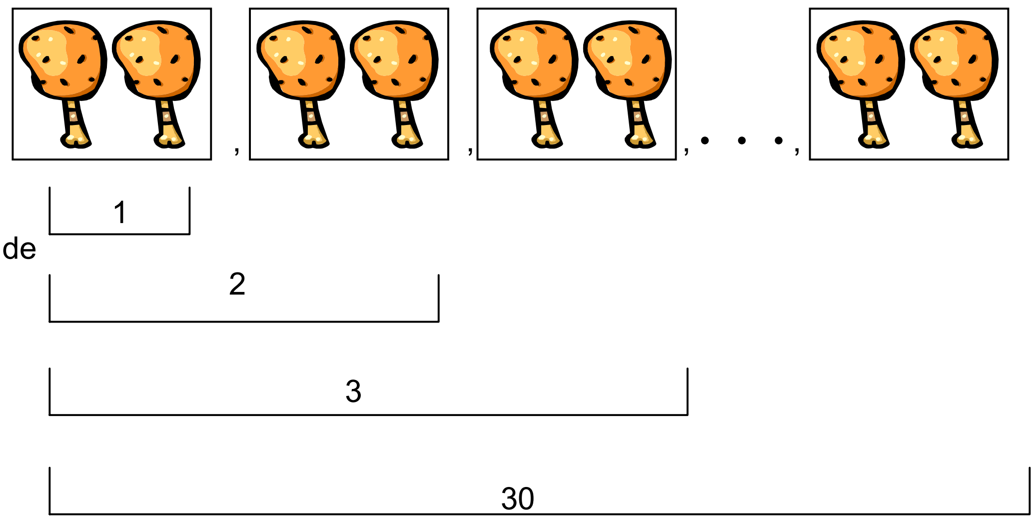
Cantidad de bandejas:



b.

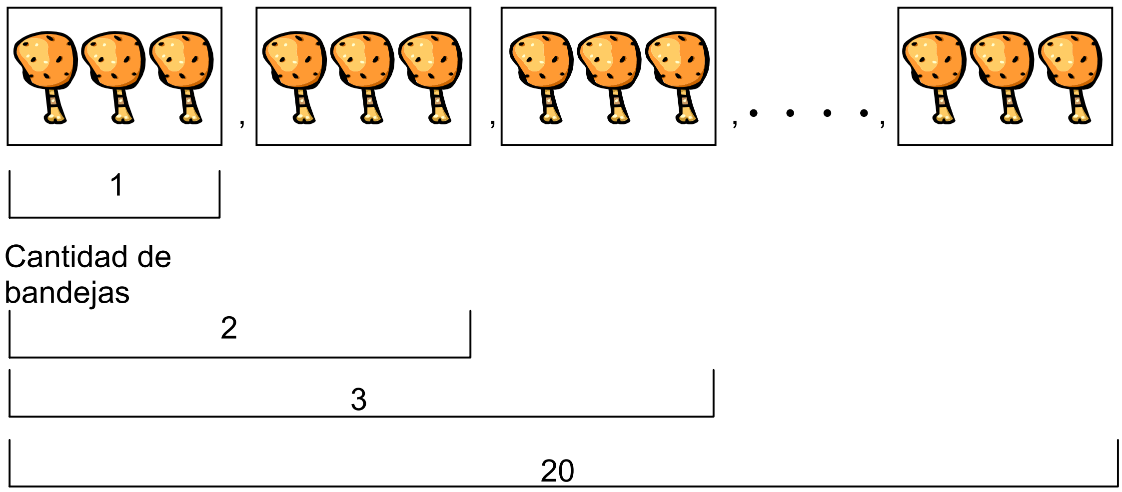
Cantidad de perniles

Cantidad de bandejas



c.

Cantidad de
perniles



Observaciones. Se encuentra en el literal a: 60 bandejas con un pernil en cada bandeja. En el b: 30 bandejas con 2 perniles en cada bandeja. En el literal c: 20 bandejas con 3 perniles en cada bandeja. De la misma manera, para las demás cantidades. Estas son las posibles soluciones donde se encuentran las cantidades de perniles por bandeja y las cantidades de bandejas para estos perniles.

4.2 SITUACION PROBLEMA N°2

Observando la situación problema N°1, a Josefina la llamaron los tres dueños de los supermercados pidiéndole que la cantidad de perniles por bandeja sea la misma para los tres supermercados, para dar precios iguales. ¿Cómo lo puede hacer?

1. Metas. Encontrar la cantidad de perniles por bandeja en las que se pueden agrupar y que es común para repartir los 60, 54 y 38 perniles.

2. Datos. Como se tiene en cuenta la situación problema N°1, tomamos de allí los datos necesarios para el problema N°2. (Tabla 1).

3. Restricciones.

- Las cantidades de perniles por bandeja que se escojan deben estar dentro de la tabulación de los datos.

- Las cantidades de perniles por bandeja en común para los que se puede repartir los 60, 54 y 38 perniles deben estar en cada uno de las diferentes formas en las que fueron distribuido individualmente los 60, 54 y 38 perniles.

4. Procedimiento. Observando todos los datos, en la segunda columna de la Tabla 1, se encuentra la cantidad de perniles por bandeja, en los que se puede distribuir los 60, 54 y 38 perniles. Veamos las cantidades de perniles por bandeja en común en que existen:

Tabla 2. Situación problema N°2.

NUMERO DE PERNILES	CANTIDAD DE PERNILES POR BANDEJA EN COMUN	CANTIDAD DE BANDEJAS
60	1 2	60 30
54	1 2	54 27
38	1 2	38 19

Fuente: Autor del Proyecto.

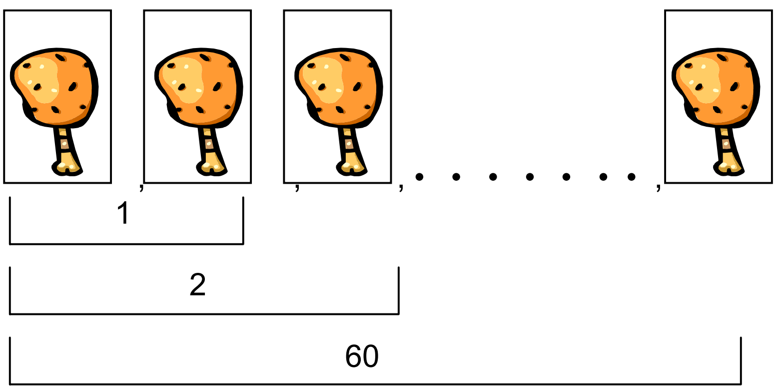
5. Verificación. Las cantidades de perniles por bandeja en común para 60, 57 y 38 perniles son:

Veamos según los numerales anteriores:

a.

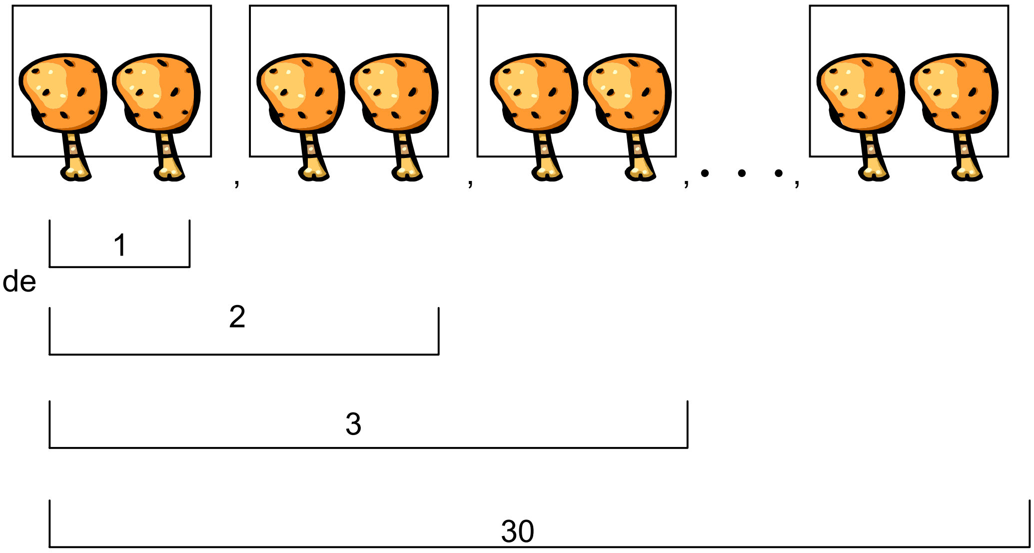
Cantidad de perniles:

Cantidad de bandejas:



b.

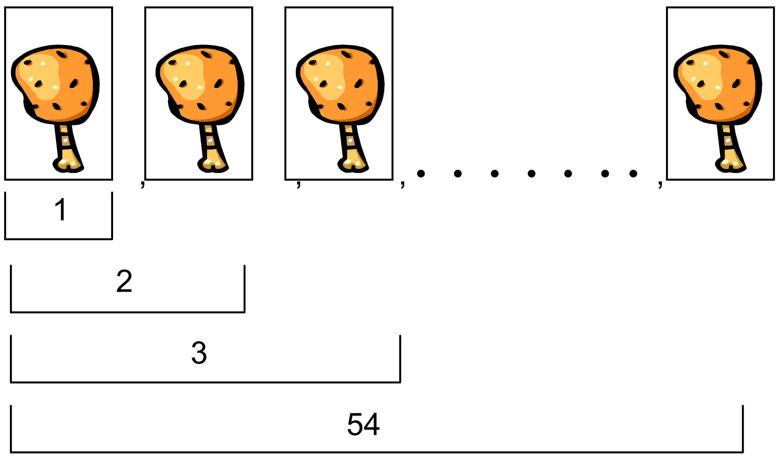
Cantidad de perniles



Cantidad de bandejas

c.

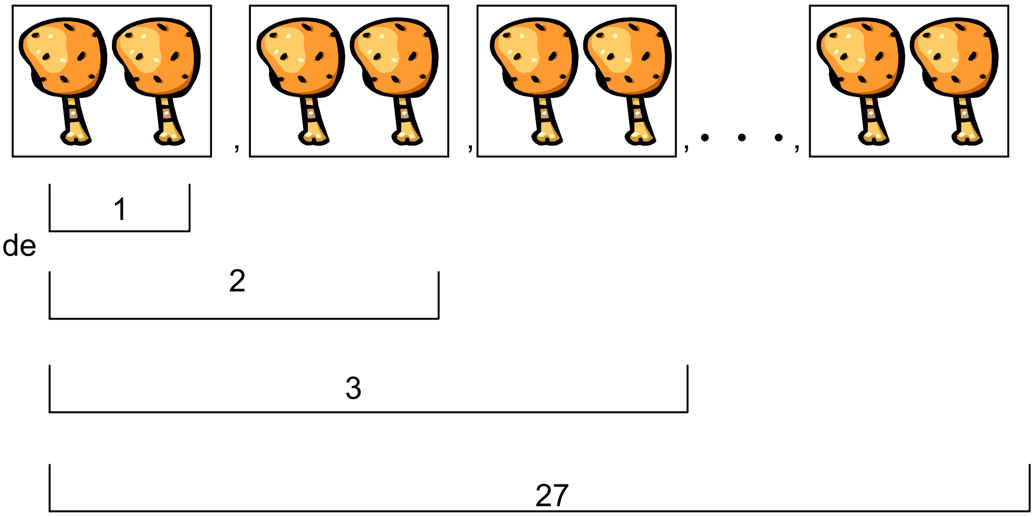
Cantidad de perniles:



Cantidad de bandejas:

d.

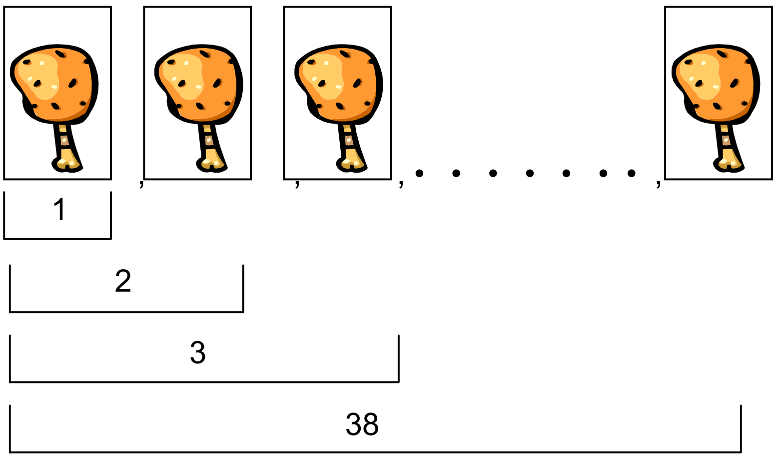
Cantidad de
perniles



Cantidad de
bandejas

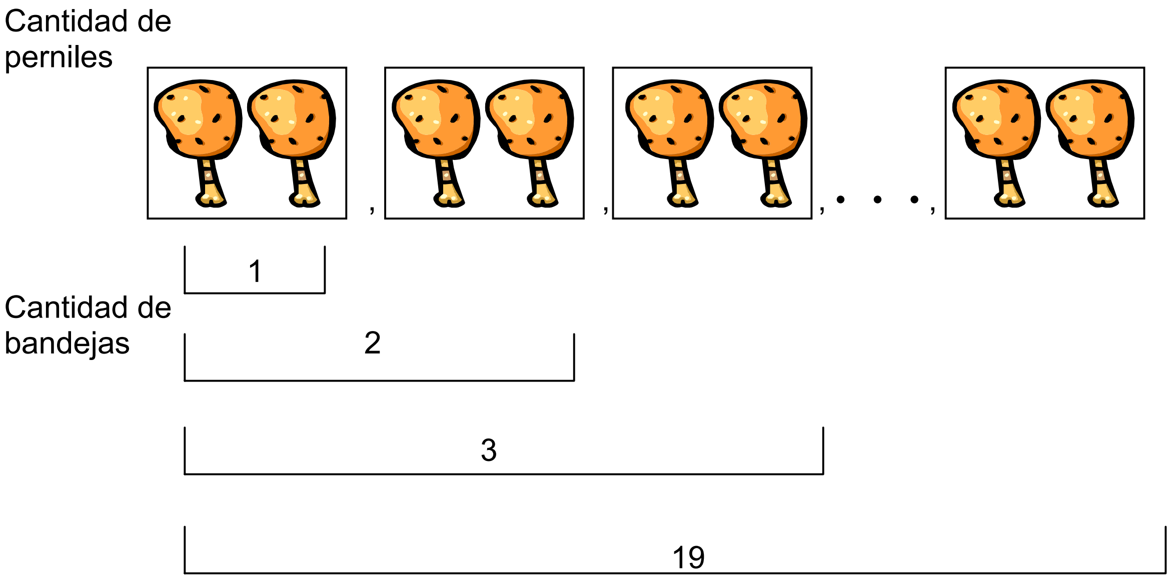
e.

Cantidad de
perniles:



Cantidad de
bandejas:

f.



Los anteriores numerales muestras gráficamente las cantidades de perniles por bandeja en común en las que se pueden repartir los 60, 50 y 38 perniles.

4.3 SITUACION PROBLEMA N°3

Contemplando las situaciones problemas N°1 y N°2, Josefina recibió los llamados de los dueños de los tres supermercados quienes, en acuerdo colectivo, solicitaron que de las cantidades de perniles por bandeja en común se les venda la de mayor cantidad de perniles. ¿Cuál es?

1. Metas. Hallar de las cantidades en común en los cuales se puede repartir los 60, 54 y 38 perniles, la mayor.

2. Datos. Atendiendo a las situaciones problema número 1 y 2, de la dos, observamos en la Tabla 2.

3. Restricciones.

- La mayor de las cantidades en las cuales se puede repartir los 60, 54 y 38 perniles es única.
- En la Tabla 3, se encuentra en la segunda columna, la cantidad de perniles por bandeja en común, en donde se halla obligatoriamente, la mayor de las cantidades en común.

4. Procedimientos. Observando los resultados de la Tabla 2, en la columna del medio se pueden apreciar las cantidades de perniles por bandeja en común que son 1 o 2 perniles; de los cuales se deduce que la mayor cantidad de perniles por bandeja es dos, veamos:

Tabla 3. Situación problema N°3.

NUMERO DE PERNILES	CANTIDAD MAYOR DE PERNILES POR BANDEJA EN COMUN	CANTIDAD DE BANDEJAS
60	2	30
54	2	27
38	2	19

Fuente: Autor del proyecto.

5. Verificación. La cantidad mayor de perniles por bandeja en común para 60, 54 y 38 perniles es, según el número de perniles:

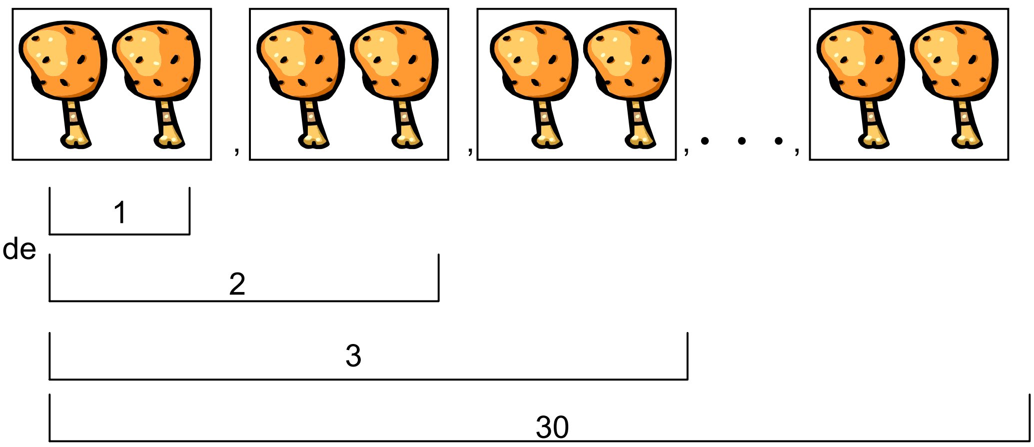
a. 2 perniles para cada una de las 30 bandejas.
b. 2 perniles para cada una de las 27 bandejas.
c. 2 perniles para cada una de las 19 bandejas.

Veamos según los numerales anteriores:

a.

Cantidad de perniles

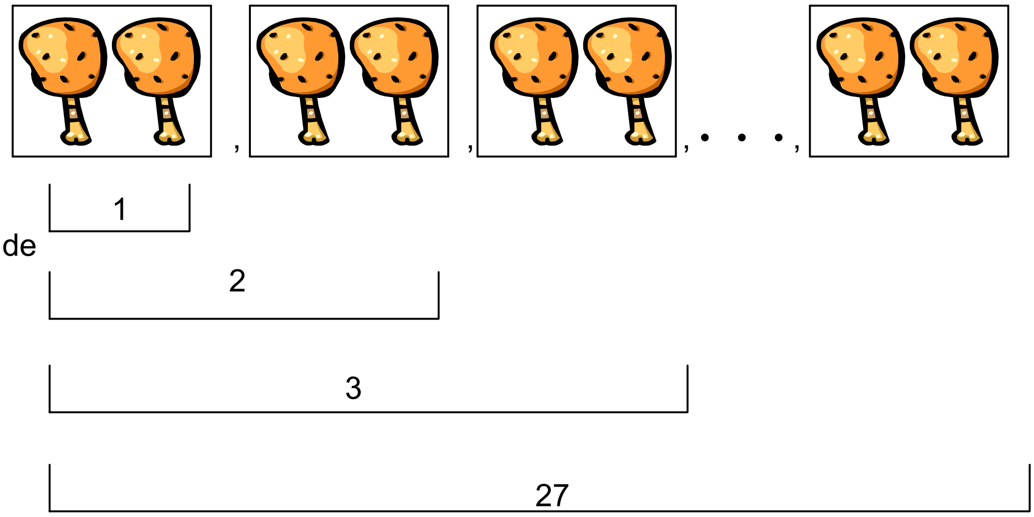
Cantidad de bandejas



b.

Cantidad de
perniles

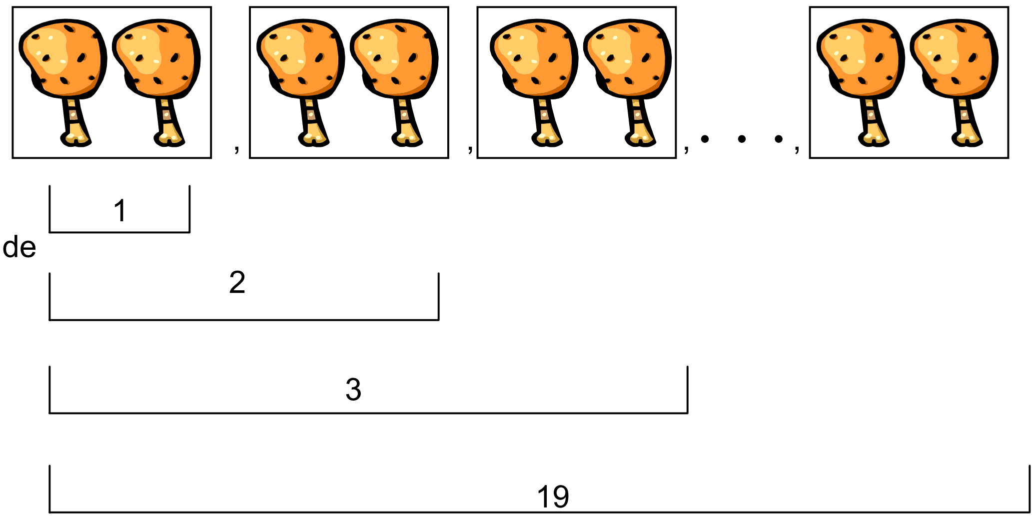
Cantidad de
bandejas



c.

Cantidad de
perniles

Cantidad de
bandejas



Los anteriores numerales muestran gráficamente la cantidad mayor de perniles por bandeja en común en la que se puede repartir 60, 54 y 38 perniles.

4.4 SITUACION PROBLEMA N°4

Se tienen tres listones de madera de 24, 42 y 36 metros. Ricardo, el dueño de la madera, desea repartirla en partes iguales, entre la gente humilde, para que construyan sus casas. ¿Cómo lo puede hacer?

1. Metas. Hallar las medidas en las cuáles se puede cortar la madera en partes iguales, y en cuántos trozos, para los 24, 42 y 36 metros de madera.

2. Datos.

- Tres listones de madera.
- Medida de los listones de madera 24, 42 y 36 metros

3. Restricciones.

- Las medidas en las cuales se cortan los listones de madera son en metros exactos, por lo tanto las medidas 24, 42 y 36 deben dividirse en partes enteras.
- Las medidas en las que se dividen los 24, 42 y 36 metros tienen que ser positivas, porque las negativas no tienen sentido real en la medición de los troncos.
- Las medidas en las que se dividen los 24, 42 y 36 metros, deben ser iguales para cada uno de estos, para que se cumplan las metas y se repartan equitativamente, la madera entre las personas.

4. Procedimiento. Para saber en que medidas puede cortar los 24 metros de madera en partes iguales, Ricardo puede hacerlo buscando los divisores positivos de 24; debido a que al dividir a 24 por sus divisores positivos no hay residuo, luego por esto no hay desperdicio, y estas medidas se dan en metros.

D24= {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

De igual manera para el tronco de 42 metros:

D42 = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

De la misma forma para el tronco de 36 metros:

D36 = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

La madera se puede cortar en las siguientes medidas en metros, en partes iguales y en ciertas cantidades como lo muestra en la tabla siguiente:

Tabla 4. Situación problema N°4.

MEDIDA DE LOS TROZOS DE MADERA	MEDIDAS EN METROS EN LAS QUE SE PUEDE CORTAR LA MADERA EN PARTES IGUALES	CANTIDADES CORTADAS (TROZOS)
24	1 2 3 4 6 8 12 24	24 12 8 6 4 3 2 1
42	1 2 3 6 7 14 21 42	42 21 14 7 6 3 2 1
36	1 2 3 4 6 9 12 18 36	36 18 12 9 6 4 3 2 1

Fuente: Autor del proyecto.

5. Verificación. Para cortar los 24 metros de madera, en trozos de igual medida en metros y la cantidad de partes cortadas, según en la Tabla 4, se puede realizar así:

a. 24 trozos de a 1 metro
b. 12 trozos de a 2 metros
c. 8 trozos de a 3 metros
d. 6 trozos de a 4 metros

De igual manera para los demás.

Así también para los 42 y 36 metros de madera, como lo indica la tabla anterior. Veamos:

1 metro

a. Medidas en metros

1

Cantidad de trozos cortados

2

3

24

2 metros

b. Medidas en metros

1

Cantidad de trozos cortados

2

12

c. Medidas en metros

3 metros

Cantidad de trozos cortados

1

2

8

Observaciones. Se encuentra en el literal a. En trozos de 1 metro, 24 trozos. En el b: En trozos de 2 metros, 12 trozos. En el c: En trozos de 3 metros, 8 metros. De igual manera para las demás medidas. Estas son las medidas en las cuales se puede cortar la madera en partes iguales en metros.

4.5 SITUACION PROBLEMA N°5

Observando la situación problema número cuatro, Ricardo desea encontrar las medidas en "común" en las cuales se puede cortar en partes iguales. Los 24, 42 y 36 metros de madera. (Estas medidas deben ser en metros). ¿Cómo lo haría?.

1. Metas. Averiguar las medidas en "común" en las que se pueden cortar la madera en partes iguales, y en cuántos trozos, para los 24, 42 y 36 metros de madera.

2. Datos. Observando la situación problema N°4, citamos de este la información que se necesita para el problema N°5. (Tabla 4)

3. Restricciones.

- Las medidas en metros en las que se puede cortar la madera en partes iguales deben hallarse en la Tabla de datos.
- Las medidas en "común" en las que se puede cortar la madera en partes iguales para los 24, 42 y 36 metros de madera, necesariamente estarán en cada una de las diferentes formas en las que se puede cortar en partes iguales cada uno de estas.

4. Procedimiento. Atendiendo los datos dados, en la segunda columna de la Tabla 4, están las medidas en metros en las que se puede cortar los 24, 42 y 36 metros de madera en partes iguales. Se puede observar las medidas en común que se encuentran allí.

Tabla 5. Situación problema N°5

MEDIDA DE LOS LISTONES DE MADERA	MEDIDAS EN COMUN EN LAS QUE SE PUEDE CORTAR LA MADERA EN PARTES IGUALES (EN METROS)	CANTIDADES CORTADAS (TROZOS)
24	1 2 3 6	24 12 8 4
42	1 2 3 6	42 21 14 7
36	1 2 3 6	36 18 12 6

Fuente: Autor del proyecto.

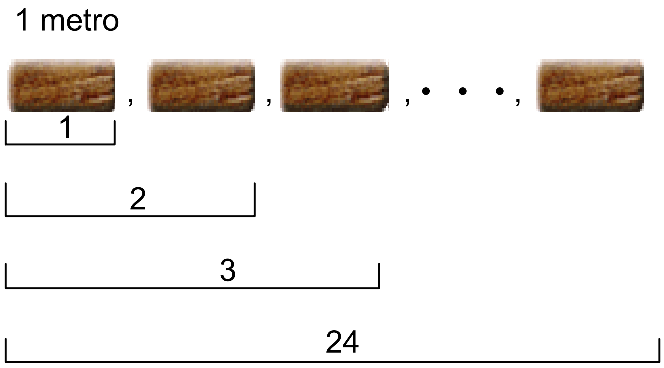
5. Verificación. Las medidas en común en las cuales se puede cortar en partes iguales los 24, 42 y 36 metros de madera (dados en metros) son:

a. En trozos de 1 metro
b. En trozos de 2 metros
c. En trozos de 3 metros
d. En trozos de 6 metros

Se puede observar según la Tabla 5.

a. Medidas en metros

Cantidad de trozos cortados



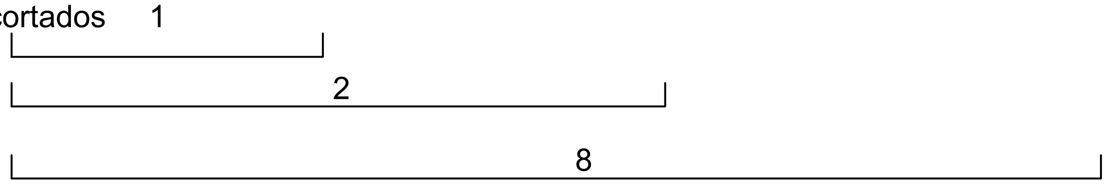
b. Medidas en metros

Cantidad de trozos cortados

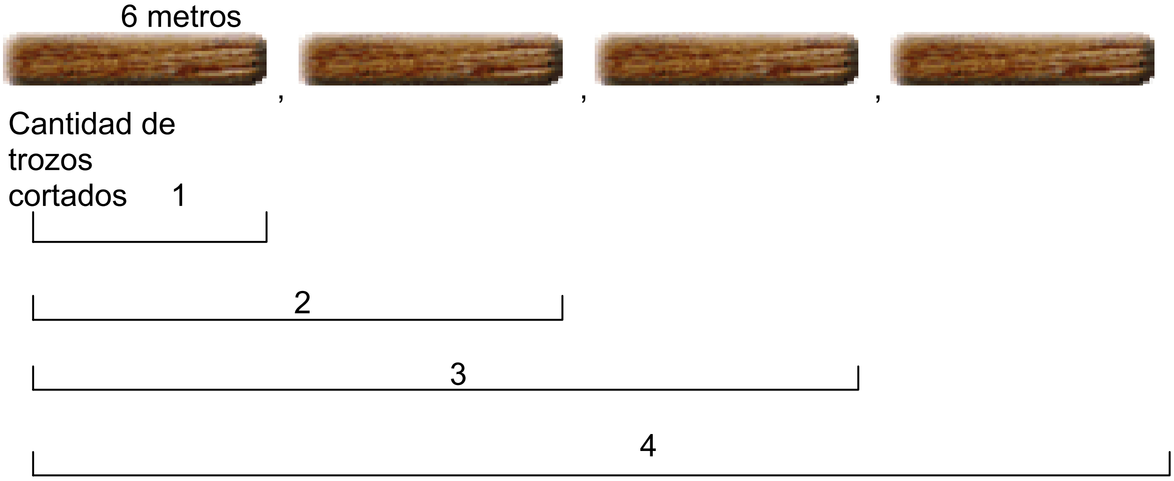
c. Medidas en metros

3 metros

Cantidad de trozos cortados 1

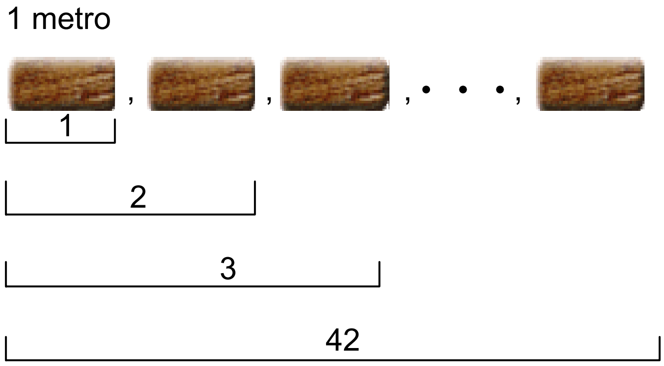


d. Medidas en metros



Cantidad de trozos cortados

e. Medidas en metros



Cantidad de trozos cortados

f. Medidas en metros

Cantidad de trozos cortados

g. Medidas en
metros

3 metros

Cantidad de
trozos
cortados 1

2

14

h. Medidas en
metros

6 metros

Cantidad de
trozos
cortados 1

2

7

1 metro

i. Medidas en
metros

1

Cantidad de
trozos
cortados

2

3

36

2 metros

j. Medidas en metros

1

Cantidad de trozos cortados

2

18

k. Medidas en metros

3 metros

Cantidad de trozos cortados 1

2

12

l. Medidas en metros

6 metros

Cantidad de trozos cortados 1

2

6

En los numerales anteriores se pueden apreciar gráficamente las medidas en “común”, en las cuales se puede cortar 24, 42 y 36 metros de madera en partes iguales (en metros).

4.6 SITUACION PROBLEMA N°6

Retomando las situaciones problemas N°4 y N°5, Ricardo pensó que sería mejor que de las medidas en común en las cuales se puede repartir los 24, 42 y 36 metros de madera, se seleccionara la más grande para dar un uso muy importante: la construcción de un buen techo. ¿Cómo lo puede hacer?

1. Metas. Obtener la mayor de las medidas en común en las cuales se puede cortar la madera en partes iguales.

2. Datos. Observando la Tabla 5.

3. Restricciones.

- La mayor de las medidas en común en las que se puede cortar la madera en partes iguales es única.
- En la segunda columna de la Tabla 5, se encuentran las medidas en común en las que se puede cortar la madera en partes iguales, donde se "debe" hallar las mayores medidas en común.

4. Procedimientos. Teniendo en cuenta los resultados de la Tabla 5, en la columna central se observa las medidas en común en las cuales se puede cortar la madera en partes iguales que son: "1, 2, 3 y 6 metros" de las cuales la mayor es la de 6 metros. Veamos:

Tabla 6. Situación problema N°6.

MEDIDA DE LOS LISTONES DE MADERA	MAYOR MEDIDA EN COMUN, EN LA QUE SE PUEDE CORTAR LA MADERA EN PARTES IGUALES (EN METROS)	CANTIDADES CORTADAS (TROZOS)
24	6	4
42	6	7
36	6	6

Fuente: Autor del proyecto.

5. Verificación.

a) De la Tabla 6 se concluye que la mayor medida en común en la que se puede cortar los 24, 42 y 36 metros de madera es seis.

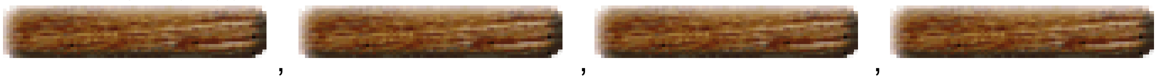
b) Los trozos correspondientes para cada listón son:

- 4 trozos para el listón de 24 metros.
- 7 trozos para el listón de 42 metros.
- 6 trozos para el listón de 36 metros.

Observemos según los numerales anteriores:

a. Medidas en metros

6 metros



Cantidad de trozos cortados

1

2

3

4

b. Medidas en metros

6 metros

Cantidad de trozos cortados

1

2

7

c. Medidas en
metros
6 metros

Cantidad de
trozos
cortados 1

2

6

En los numerales inmediatamente anteriores se puede observar gráficamente la mayor medida en común, en la que se puede cortar los 24, 42 y 36 metros de madera en partes iguales.

4.7 SITUACION PROBLEMA N°7

En una tienda se reparten 3 paquetes, uno de 20 naranjas, otro de 15 mandarinas, y otro de 10 toronjas, entre 3 niños, Juan, Maria y Luís. Ellos desean agrupar cada paquete en pequeños grupos de igual cantidad de frutas, de tal forma que no sobren naranja, mandarinas, ni toronjas. ¿Cómo pueden hacerlo los niños(as)? Si se desea que, cada fajo de naranjas contenga el mismo numero que cada fajo de mandarinas ó cada fajo de toronja, ¿Cómo se puede realizar esta solicitud?.

1. Metas.

- Obtener las cantidades en las cuales se pueden agrupar, las naranjas, las mandarinas y las toronjas individualmente y en igual número.

- Hallar las cantidades en común para agrupar las mandarinas, las naranjas y las toronjas en igual número.

- Encontrar la mayor cantidad en común en la que se puede agrupar en igual número, las mandarinas, naranjas y toronjas.

2. Datos.
- Una tienda.
- Tres niños(as), Juan, Maria y Luís.
- Tres paquetes, uno de 20 naranjas otro de 15 mandarinas y otro de 10 toronjas.

3. Restricciones.

- Las cantidades en las cuales se reagrupan las naranjas, mandarinas y toronjas deben (las frutas) ser dadas en números enteros, para no tener que partir las frutas.

- Las cantidades en las que se reagrupen las frutas deben ser en números enteros positivos, porque las cantidades negativas no tienen sentido real en este problema.

- Las cantidades en común en las que se agrupan las naranjas, mandarinas y toronjas en igual número, deben estar en las cantidades individuales que en igual cantidad se reagrupa las naranjas, mandarinas y toronjas.

- La mayor de las cantidades en común, en la que se puede reagrupar en igual número las naranjas mandarinas y toronjas, debe estar dentro de las cantidades en común.

4. Procedimiento. Juan puede averiguar las cantidades en las cuales debe agrupar las 20 naranjas en igual número sin que sobren o falten naranjas al empacarlas, por medio de los divisores positivos de 20, ya que al dividir a 20 por sus divisores positivos no hay residuo, entonces no sobran ni faltan naranjas al empacarlas. También debido a esto, las cantidades en las que se agrupan son dadas en números enteros (positivos), y por tanto en cantidades iguales. Veamos:

D 20 ={1,2,4,5,10,20}

También Maria puede hallar las cantidades en las cuales puede agrupar las 15 mandarinas en iguale numero. De la misma forma:

D 15={1,3,5,15}

Así también Luís:

D 10={1,2,5,10}

Las cantidades en las cuales se pueden agrupar las naranjas, mandarinas y toronjas individualmente y en igual número, como se puede apreciar en el siguiente informe:

Tabla 7. Situación problema Nº. 7

Cantidad de Frutas	Cantidad de Fruta contenida en cada empaque	Cantidad de fajos (empaques)
20 naranjas	1 2 4 5 10 20	20 10 5 4 2 1
15 mandarinas	1 3 5 15	15 5 3 1
10 toronjas	1 2 5 10	10 5 2 1

Fuente: Autor de este proyecto.

Las naranjas se pueden agrupar en pequeños paquetes de igual cantidad sin que sobre o falte fruta al ser empacada, según el informe anterior de la siguiente manera:

a. 1 naranja en cada uno de los 20 paquetes.
b. 2 naranja en cada uno de los 10 paquetes.
c. 4 naranja en cada uno de los 5 paquetes.
d 5 naranja en cada uno de los 4 paquetes.
e. 10 naranja en cada uno de los 2 paquetes.
f. 20 naranja en cada uno de los 1 paquetes.

De la misma forma Maria puede hacerlo para agrupar las mandarinas:

g. 1 mandarina en cada uno de los 15 paquetes.
h. 3 mandarinas en cada uno de los 5 paquetes.
i. 5 mandarinas en cada uno de los 3 paquetes
j. 15 mandarinas en un paquete.

Así también Luís puede agrupar las toronjas:

k. 1 toronja en cada uno de los 10 paquetes.
l. 2 toronjas en cada uno de los 5 paquetes.

m. 5 toronjas en cada uno de los 2 paquetes.
n. 10 toronjas en un paquete.

En la Tabla 7, en al columna central se encuentran las cantidades de fruta contenidas en cada empaque; encerramos en cada cuadro las cantidades en común de éstos.

Al observar las cantidades que fueron encerradas tenemos:

a. 1 naranja en cada uno de los 20 paquetes.
b. 5 naranjas en cada uno de los 4 paquetes.
c. 1 mandarina en cada uno de los 15 paquetes.
d. 5 mandarinas en cada uno de los 3 paquetes.
e. 1 toronja en cada uno de los 10 paquetes.
f. 5 toronjas en cada uno de los 2 paquetes.

En los numerales inmediatamente anteriores se pueden reagrupar las naranjas, mandarinas y toronjas en igual número, por Juan, Maria y Luís.

De las cantidades en común encerradas en un cuadro se subraya la mayor, la cual es la máxima de las cantidades en común en las cuales se pueden reagrupar en igual número las naranjas, mandarinas y toronjas, veamos:

a. 5 naranjas en cada uno de los 4 paquetes.
b. 5 mandarinas en cada uno de los 3 paquetes.
c. 5 toronjas en cada uno de los 2 paquetes.

5. Verificación.

- Los divisores de 20, 15 y 10 dan las cantidades de fruta de igual numero en las que se pueden empacar las diferentes clases de fruta.

- Los cocientes en estas divisiones son cantidades de fajos en los que se puede empacar la fruta.

- Las cantidades en común para agrupar las naranjas, mandarinas y toronjas en igual número son los divisores comunes de 20, 15 y 10.

- La mayor de las cantidades en común en las cuales se agrupa las naranjas, las mandarinas y toronjas en igual número, es el mayor de los divisores comunes de 20, 15 y 10.

1. $\begin{array}{r|l} 20 & \boxed{1} \\ \cline{2-2} 0 & 20 \end{array}$ 2. $\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$ 3. $\begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ 4. $\begin{array}{r|l} 20 & \boxed{5} \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$ 5. $\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$

6. $\begin{array}{r|l} 20 & 20 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$ 7. $\begin{array}{r|l} 15 & \boxed{1} \\ \cline{2-2} 0 & 15 \end{array}$ 8. $\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ 9. $\begin{array}{r|l} 15 & \boxed{5} \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$ 10. $\begin{array}{r|l} 15 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

11. $\begin{array}{r|l} 10 & \boxed{1} \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$ 12. $\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ 13. $\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$ 14. $\begin{array}{r|l} 10 & \boxed{10} \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$

Se puede comparar los divisores y los cocientes de cada división en su orden respectivo con los datos que se encuentran en las columnas del centro y de la derecha de la Tabla 7.

Se podrán comparar los divisores comunes de 20, 15 y 10 que se encuentran en las anteriores divisiones, con las cantidades en común en las cuales se pueden reagrupar las naranjas, mandarinas y toronjas en igual número encerradas en cada cuadro en la columna central en la Tabla 7.

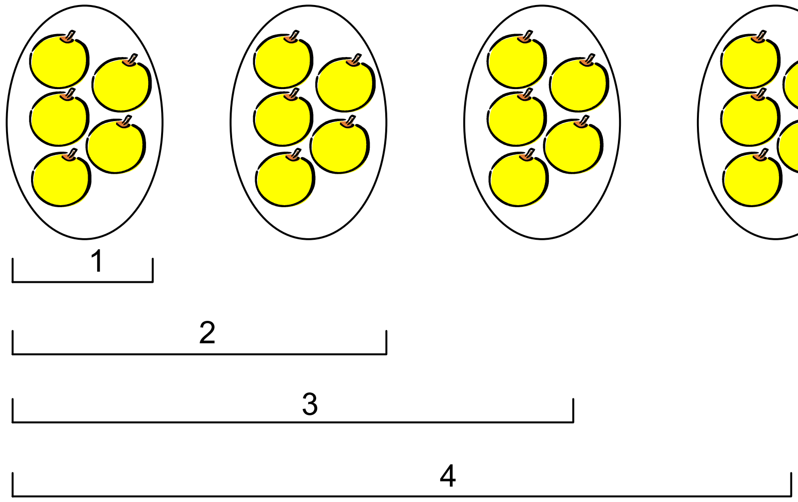
De igual manera se pueden comparar el mayor de los divisores comunes de 20, 15 y 10 subrayado en las divisiones anteriores, con la mayor de las cantidades en común subrayada en la columna central de la Tabla 7.

Se puede observar de las anteriores comparaciones como se obtuvo las soluciones a las preguntas planteadas.

Se puede observar gráficamente la mayor de las cantidades en común en las que se puede agrupar en igual número las naranjas, mandarinas y toronjas.

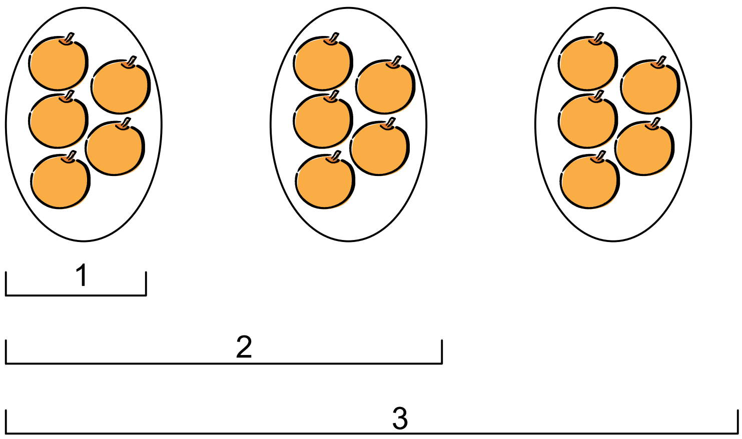
a. Cantidad de naranjas

Cantidad de fajos (paquetes)



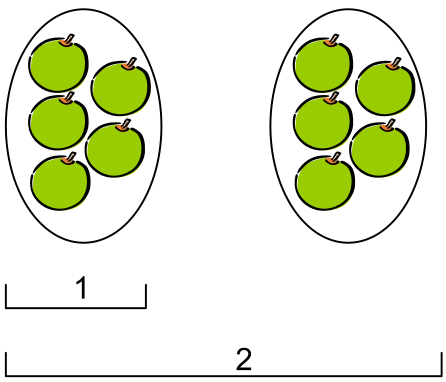
b. Cantidad de mandarinas

Cantidad de fajos (paquetes)



c. Cantidad de toronjas

Cantidad de fajos (paquetes)



Se acara gráficamente como se puede hallar la mayor cantidad en común en la que se puede agrupar las frutas.

5. ANALISIS DE SITUACIONES PROBLEMA

Las situaciones problema propuestas son construidas de una forma cíclica.

Las 6 primeras situaciones problema son distribuidas en grupos de 3 problemas donde el primero busca repartir (dividir, cortar, agrupar, etc.) en partes iguales ciertas cantidades, el segundo investiga cuáles de estas partes iguales están en igual numero, y el tercero averigua cual de estas partes iguales que están en igual número es la mayor.

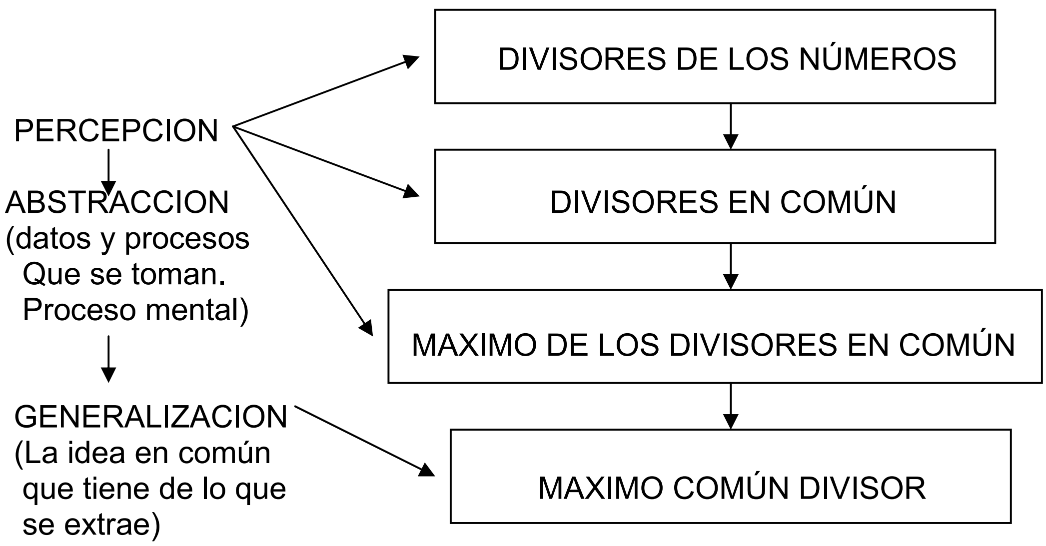
Las situaciones problema de esta forma nos aproximan consecutivamente al concepto de máximo común divisor; donde, con ingenio se estructura cada 3 problemas, hasta entonces desconocido para los alumnos(as) de cuarto grado qué es el concepto de máximo común divisor.

La situación problema numero 7 recapitula los 3 pasos fundamentales por los cuales se puede hallar el máximo común divisor sin mencionarlo y construido bajo sucesos.

El proceso de construcción de las situaciones problema visionan y estructuran el concepto de máximo común divisor utilizando circunstancias reales donde fácilmente los alumnos(as) se pueden ubicar.

De esta forma los alumnos(as) pueden agrupar las experiencias planteadas, donde se espera que lleguen a sustraer las operaciones en común que estructuran el concepto de máximo común divisor.

MAPA CONCEPTUAL DE LAS SITUACIONES PROBLEMA



6. MÉTODOS PARA HALLAR EL M.C.D.

6.1 POR INSPECCIÓN

Se observa el menor de los números dados, si éste número divide a todos los demás, será el m.c.d. Si no los divide, averiguar cuál es el mayor de los divisores del menor de los números dados que los divide a todos y éste es el m.c.d.

Ejemplos:

Hallar el m.c.d. de los siguientes números

a. 1, 2 y 3

1 es el menor de todos los números y divide a los demás, luego 1 es el m.c.d.

b. 2 y 9

Divisores de 2 (positivos): 1, 2
Como 1 divide a 9, luego éste es el m.c.d.

6.2 POR DIVISIONES SUCESIVAS

Este método sólo sirve para hallar el m.c.d. entre “dos números”. Consiste en dividir el mayor de los números dados por el menor, donde si la división es exacta el menor es el m.c.d.; si no, se sigue dividiendo el divisor por el residuo así hasta que se obtenga una división exacta; el último divisor será el m.c.d.

Ejemplos:

a. Hallar el m.c.d. de 10 y 8:

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{8} \\ 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 8 & \underline{2} \\ 0 & 4 \end{array} \text{, m.c.d. } (10, 8) = 2$$

b. Hallar el m.c.d. de 14 y 5:

$$\begin{array}{r|l} 14 & \underline{5} \\ 4 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 5 & \underline{4} \\ 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 4 & \underline{1} \\ 0 & 4 \end{array} \text{, m.c.d } (14, 5) = 1$$

c. Hallar el m.c.d de 30 y 8

$$30 \,\underline{|\,8}\quad \; 6\,|\,3 \;\rightarrow\; 8\,\underline{|\,6}\quad 2\,|\,1 \;\rightarrow\; 6\,\underline{|\,2}\quad 0\,|\,3$$

30	8		8	6		6	2	
6	3	→	2	1	→	0	3	, m.c.d (30, 8) = 2

Observación: Si al efectuar las divisiones sucesivas se encuentra un residuo que es primo y la siguiente división no es exacta, se puede decir que el m.c.d. es 1 y no es necesario seguir dividiendo.

d. Hallar el m.c.d. de 41 y 30:

41	30		30	11		11	8	
11	1	→	8	2	→	3	1	Se ha encontrado el residuo primo 3,

luego como el m.c.d. de 8 y 3 sólo puede ser 3 o 1, 3 no lo es porque la división de 8 entre 3 no es exacta, entonces tiene que ser 1; de tal forma podemos decir que el m.c.d. de 41 y 30 es 1.

6.3 POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Descomponemos cada número en sus factores primos; el m.c.d es el construido por el producto de los factores primos comunes con el menor exponente.

Ejemplos:

a. Hallar el m.c.d. de 8, 4 y 6:

8	2	4	2	6	2
4	2	2	2	3	3
2	2	1		1	
1					

El único número que está en las tres descomposiciones es el 2, donde el menor exponente es el 1 (o la menor cantidad de veces en que se repite ese número en común es 1)

8 = 2 x 2 x 2
4 = 2 x 2
6 = 2 x 3, entonces el m.c.d. (8,4,6) = 2

b. Hallar el m.c.d de 12, 16 y 20

12	2	16	2	20	2
6	2	8	2	10	2
3	3	4	2	5	5
1		2	2	1	
		1			

12 = 2 x 2 x 3
16 = 2 x 2 x 2 x 2
20 = 2 x 2 x 5

El 2 es el único número que está en las tres descomposiciones; la menor cantidad de veces en que se repite el 2 para las 3 descomposiciones en común es 2 veces (exponente menor 2). Luego el m.c.d de 12, 16 y 20 es $2 \times 2 = 2^2 = 4$

c. Hallar el m.c.d. de 135, 45 y 90

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$
$45 = 3 \times 3 \times 9$
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

El 3 y el 5 son los únicos números que están en las 3 descomposiciones. La menor cantidad de veces en que se repite el 3 para todas las descomposiciones en común es 2 veces, de igual forma para el 5 una vez.

Luego el m.c.d. de 135, 45 y 90 es:

$$\underbrace{3 \times 3}_{\text{Se repite dos veces}} \times \underbrace{5}_{\text{está una sola vez}} = 9 \times 5 = 45$$

d. Hallar el m.c.d. de 50 y 75

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$50 = 2 \text{ X } 5 \text{ X } 5$
$75 = 3 \text{ X } 5 \text{ X } 5$

Factores primos en común: 5
Menor número de veces en que repite en ambas descomposiciones: 2

MCD (50, 75) = 5 x 5 = 25

6.4 POR EL ALGORITMO DE EUCLIDES

Observación: El algoritmo de Euclides se puede tomar como una generalización del método de divisiones sucesivas. Si $o < b < a$, por medio del algoritmo de la división obtenemos:

$a = bc_i + r_1 \quad o \leq r_i < b$

a : dividendo
b : divisor

ci: cociente
i : {1, 2, 3, … k} - enteros
ri : residuo

Si $r_1 = 0$, entonces **b** divide a **a** exactamente y (a, b) = b. Si no se aplica nuevamente el algoritmo para obtener:

$b = r_1 c_2 + r_2 \quad o \quad \leq r_2 < r_1$

Si $r_2 = 0$, entonces $r_1 = (r_1, b) = (a, b)$. Si no, se repite el proceso, hasta llegar a la suma en b pasos a un residuo cero, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$a = bc_1 + r_1 \qquad 0 < r_1 < b$
$b = r1c_2 + r_2 \qquad 0 < r_2 < r_1$
$r_1 = r_2 c_3 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$
•
•
•
$r_{k-3} = r_{k-2}\ c_{k-1} + r_{k-1} \quad o < r_{k-1} < r_{k-2}$

$r_{k-2} = r_{k-1}\ c_k + r_k \qquad o < r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_k\ c_{k+1} + 0$

Luego: Si a = bc + r entonces (a, b) = (b, r), de tal manera que $(a, b) = (b, r_1) =$
$= (r_1, r_2) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{k-1}, r_k) = r_k$

Entonces el $(a, b) = r_k$

Observación: El algoritmo de Euclides nos permite hallar el máximo común divisor de “dos enteros” cualesquiera.

Ejemplos:

a. Hallar el m.c.d. de 10 y 20
Sea 20 = a y b = 10
20 = 10(2) + 0

Luego el m.c.d. (10, 20) = 10

b. Hallar el m.c.d. de 35 y 40

Sea 40 = a y b = 35
40 = 35 (1) + 5
35 = 5(7) + 0

Luego el m.c.d. (35, 40) = 5

c. Hallar el m.c.d de 50 y 42

Sea 50 = a y 42 = b
50 = 42(1) + 8
42 = 8(5) + 2
8 = 2(4) + 0

Luego el m.c.d. (50, 42) = 2

d. Hallar el m.c.d. de 70 y 30

Sea a = 70 y b = 30
70 = 30(2) + 10
30 = 10(3) + 0

Luego el m.c.d. (70, 30) = 10

7. ALGUNAS PROPIEDADES DEL M.C.D.

Las siguientes propiedades no serán demostradas, ya que, no es del interés de los alumnos de Cuarto Grado. Se utilizará la expresión “a divide a b” que se escribirá así: “alb”, lo cual quiere decir que **a** divide a **b** exactamente.

7.1 PROPIEDAD N°1

Si C = (a, b) entonces $\left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right) = 1$

Ejemplo:

Si 2 = (4, 6) entonces $\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right)$ = (2 , 3) = 1

7.2 PROPIEDAD N°2

Si ul(m)(n) y (u , m) = 1 entonces uln

Ejemplo:

Si 3l(4)(6) y (3, 4) = 1 entonces 3l6

7.3 PROPIEDAD N°3

Si a es primo y al(b)(c) entonces alb o alc.

Ejemplo:

3 es primo y 3l(2)(9) entonces 3l9.

7.4 PROPIEDAD N°4

Si ulm, nlm y (u,n) = 1 entonces (u)(n)lm

Ejemplo:

Si 2l6, 3l6 y (2 , 3) = 1 entonces (2)(3)l6 = 6l6

7.5 PROPIEDAD N°5

Si $m \neq 0$ entonces $((m)(a), (m)(b)) = m\ (a, b)$ donde m es positivo.

Ejemplo:

$3 \neq 0$ entonces $((3)(5), (3)(7)) = 3\ (5, 7) = (3)(1) = 3$

7.6 PROPIEDAD N°6

Si $(m,n) = 1$ y $(m, s) = 1$ entonces $(m, (n)(s)) = 1$

Ejemplo:

Si $(5, 7) = 1$ y $(5, 6) = 1$ entonces $(5, (7)(6)) = 1$

Efectivamente, $(5, 42) = 1$

8. EJEMPLOS DE M.C.D.

8.1 HALLAR EL M.C.D. (8, 5)

a. Por el método de inspección:

- Menor de los números dados: 5
- 5 no divide a 8 exactamente.
- El mayor de los divisores positivos de 5 que divide a 5 y 8 es 1

D5 = {1, 5}, 1 divide a 5 y 8 exactamente, 5 no divide a 8 exactamente, luego el m.c.d de 8 y 5 es 1.

b. Por el método de divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{5} \\ 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 5 & \underline{3} \\ 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 3 & \underline{2} \\ 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 2 & \underline{1} \\ 0 & 1 \end{array}, \text{ m.c.d } (8, 5) = 1$$

c. Por descomposición en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como no existen factores primos en común el m.c.d de 8 y 5 es 1

d. Por el método de algoritmo de Euclides:

Sea 8 = a y 5 = b

8 = 5(1) + 3
5 = 3(1) + 2
3 = 2(1) + 1
2 = 1(2) + 0

Luego el m.c.d. (8, 5) = 1

8.2 HALLAR EL M.C.D. (7, 4, 6)

a. Por el método de inspección:

- El menor de los números dados es 4
- 4 no divide a 5 y 7 exactamente

- Veamos cuál es el mayor de los divisores positivos de 4 que divide a 6 y 7:

D4 = {1, 2, 4}
El mayor de estos números que divide a 6 y 7 es el 1, luego el m.c.d. (7,4,6) = 1.

b. Por el método de divisiones sucesivas:

No se puede realizar el m.c.d. (7, 4, 6) por este método, debido a que este solo sirve para hallar el máximo común divisor de dos números.

c. Por descomposición en factores primos:

7	7	4	2	6	2	7 = 7 x 1
1		2	2	3	3	4 = 2 x 2
		1		1		6 = 2 x 3

El único factor primo en común es el 1, y sólo se repite una vez.
Luego el m.c.d. (7, 4, 2) = 1

d. Por el método del algoritmo de Euclides:

No se puede hallar el m.c.d de (7, 4, 2) porque este método sólo sirve para hallar el máximo común divisor de dos números.

8.3 HALLAR EL M.C.D (20, 40)

a. Por el método de inspección

- Menor de los números dados: 20
- 20 divide a 40 entonces el m.c.d. (20, 40) = 20

b. Por el método de divisiones sucesivas

40	20	Luego el m.c.d (20, 40) = 20
00	2	

c. Por el método de descomposición en factores primos:

20	2	40	2	
10	2	20	2	20 = 2 x 2 x 5
5	5	10	2	40 = 2 x 2 x 2 x 5
1		5	5	
		1		

Factores primos en común: {2, 5} menor cantidad de veces en que se repite el 2 es 2, la menor cantidad de veces en que se repite el 5 es 1.

Luego el producto entre 2^2 x 5 = 2 x 2 x 5 = 20 es el m.c.d (20, 40) = 20

d. Por el método del algoritmo de Euclides

Sea 40 = a y 20 = b

40 = 20(2) + 0

Luego el m.c.d. (40, 20) = 20

8.4 HALLAR EL M.C.D. (15, 45, 30, 60)

a. Por el método de inspección

- El menor de los números dados es el 15
- 15 divide exactamente a 45, 30 y 60, luego el m.c.d. (15, 45, 30, 60) = 15

b. Por el método de divisiones sucesivas:

No se puede hallar el m.c.d (15, 45, 30, 60) por este método, debido a que sólo sirve para hallar el máximo común divisor de dos números.

c. Por el método de descomposición en factores primos:

15	3	45	3	30	2	60	2	15 = 3 x 5
5	5	15	3	15	3	30	2	45 = 3 x 3 x 5
1		5	5	5	5	15	3	30 = 2 x 3 x 5
		1		1		5	5	60 = 2 x 2 x 3 x 5
						1		

Factores primos comunes: {3, 5}; la menor cantidad de veces que se repite 3 es 1 y 5 es 1.

Luego el m.c.d. (15, 45, 30, 60) = 3 x 5 = 15

d. Por el método del algoritmo de Euclides:

Por este método no se puede hallar el m.c.d (15, 45, 30, 60) porque sólo sirve para hallar el máximo común divisor de dos números.

8.5 HALLAR EL M.C.D. (21, 27, 36)

a. Por el método de inspección:

- El menor de los números dados es 21.
- 21 no divide a 27 ni a 36
- El mayor de los divisores del menor de los números que es 21 y que divide a 27 y 36 es el máximo común divisor de estos.

Veamos: D21 = {1, 3, 7, 21}

3 es el m.c.d (21, 27, 36)

b. Por el método de divisiones sucesivas:

No se puede encontrar el m.c.d. (21, 27, 36) porque este método únicamente sirve para hallar el máximo común divisor de dos números.

c. Por el método de descomposición en factores:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 21 = 3 \times 7 \\ 27 = 3 \times 3 \times 3 \\ 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \end{array}$$

El 3 es el único número que está en las tres descomposiciones, se repite una sola vez en común.

Luego el m.c.d. (21, 27, 36) = 3

d. Por el método del algoritmo de Euclides:

No se puede hallar el m.c.d. (21, 27, 36) porque el algoritmo de Euclides sólo halla el máximo común divisor de dos números.

9. EJERCICIOS DE M.C.D.

Los siguientes ejercicios sirven para complementar nuestros estudios.

Halle por el método que desee el Máximo Común Divisor de:

1. (11, 2)
2. (20, 100)
3. (1, 30)
4. (10, 30, 100)
5. (78, 34, 22)
6. (52, 22, 6)
7. (5, 10, 20, 35)
8. (17, 5, 4, 6)
9. (36, 6, 9, 4)
10. (15, 20, 8)

Solucione según las propiedades.

11. Si 3l(7)(6) y (3, 7) = 1 entonces 3l( )
12. Si 5 = (10, 15) entonces $\left(\frac{10}{5}, \frac{15}{5}\right) =$ (,) = 1
13. Si 7 es primo y 7l(4)(14) entonces 7l( )
14. Si 2l22, 11l22 y (2, 11) = 1 entonces $\frac{22}{2(\ )}$
15. Si (8,5) = 1 y (8, 7) = 1 entonces (, ( ) ( )) = 1
16. 7 ≠ 0 entonces ((7)(9), (7)(8) = 7 (9, 8) = _________
17. Si (11, 6) = 1 y (11, 8) = 1 entonces (11, (6)(8)) = ______
18. Si (6, 5) = 1 y (6, 7) = 1, entonces (6, (5)(7)) = _______
19. Si 6 ≠ 0, entonces ((6) (7), (6)(5)) = 6 (7, 5) = ______
20. Si 7 = (7, 14) entonces (( )l7 , ( )l14) = 1

10. SITUACIONES PROBLEMA CON BASE AL M.C.D.

Las situaciones problema que se dan a continuación son aplicaciones de lo aprendido.

Resuelva las siguientes situaciones problema:

1. En una feria escolar se necesitan repartir cuatro pinturas, 18 litros de pintura blanca, 14 de azul, 16 de roja, 20 de amarilla; ¿Cuál es la mayor cantidad en la que puede repartirse en litros iguales las pinturas?

2. Juliana necesita llevar un pedido de 200 rosas, 300 girasoles y 120 astromelias a un cliente, desea empacarla en grupos de flores de igual cantidad pero siendo la mayor cantidad en común para las tres clases de flores; con el fin de que se vean voluptuosos los paquetes. ¿Cómo podría hacerlo?

3. Carlos desea pagarle a unos niños por realizar unas tareas, a Juan 800 pesos, a Fabián 600 pesos y 500 pesos a Raúl. Como desea pagarles en monedas de igual valor a todos pero siendo la de mayor valor posible ¿Cómo lo haría?

4. ¿Cuál es la mayor longitud en al que pueden partirse en partes iguales tres pedazos de lana de 28.16 y 12 centímetros?

5. Hay que cortar un tronco abandonado de 28 metros y otro de 24 metros en trozos iguales. ¿Qué tan grandes pueden ser los trozos?

6. Se desea cortar un hilo de 30 centímetros y otro de 20 centímetros en partes iguales. ¿Cuánto es el máximo que pueden medir las partes?

7. ¿Cuál es la mayor longitud de una regla que puede usarse para medir exactamente 250 y 350 centímetros?

8. Se desea cortar hielo en una fábrica en pedazos, cada lámina de hielo mide 200, 100 y 120 centímetros de largo. ¿Cuál es la mayor longitud en la que puede dividirse en partes iguales el hielo?

9. Se debe cortar 3 cadenetas para una fiesta, una de 12 metros, otra de 24 metros y otra de 16 metros en partes iguales sin que se desperdicie. ¿Qué tan grandes pueden ser las partes?

10. Laura esta haciendo una cinta métrica para medir distancias largas en carretera. ¿Cuál es la mayor longitud que debe tener para medir 80 y 60 metros exactamente?

CONCLUSIONES

Las situaciones problema permitieron inducir el concepto de Máximo Común Divisor de una forma creativa y lúdica.

Al principio las situaciones problema planteadas se pueden definir como una situación didáctica fundamentalmente, donde se pudo observar en la practica con los alumnos, como se pone en juego los presaberes de los alumnos, quienes participaron de una forma continua dando como prueba que se puede aprender en un ambiente amable, alegre y didáctico; logrando así las metas propuestas que en este caso fue un acercamiento al concepto de Máximo Común Divisor.

El crear un concepto por medio de situaciones problema es un método inductivo, que permite interactuar muy de cerca al profesor con los alumnos, de la misma forma se crea una relación interactiva entre lo aprendido y lo que se desea aprender, creando así un vinculo muy cercano entre el conocimiento y quienes lo aprenden.

La motivación en el desarrollo de la práctica con los 10 alumnos(as) de Cuarto Grado del Colegio Aurelio Martínez Mutis sede D fue excelente, los alumnos participaron continuamente en la construcción del conocimiento, se formaron entre los 10 alumnos(as), sus lazos de amistad y contribuyendo de esta manera a la formación personal de los estudiantes y la paz en nuestro país.

RECOMENDACIONES

Es un excelente método de aprendizaje, las estrategias de resolución de problemas, donde contribuye a las situaciones didácticas de una forma creativa e innovadora sirviendo de ayuda para la construcción de conceptos matemáticos.

Cuando las situaciones problema se desarrollan en pequeños grupos de alumnos(as) se fortalecen los lazos de convivencia entre ellos; contribuyendo a la tolerancia, consolidando la amistad y beneficiándose de las ventajas que tiene el trabajar en grupo.

En un concurso de matemáticas las estrategias de resolución de problemas puede ser muy interesante, al igual que en un salón de clase donde el educando tendrá la facultad de plantear conceptos a través de este método donde seria muy innovador y se tendría que utilizar lo presaberes de los estudiantes para crear otros nuevos.

BIBLIOGRAFIA

AUSUBEL, D.P.Readings in School Learning. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.1969.

BALDOR, Aurelio (1979). Álgebra. Edime Organización Gráfica, S.A. Madrid: España, 1979.

BALDOR, Aurelio (1983). Aritmetica. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. Delegación Azcapotzalco: México, 1998.

BAQUERO, Ricardo. Vigotsky y el Aprendizaje Escolar. 2ª de Capital Federal: Aique Grupo Editor S.A. 1997. y POZO, Juan Ignacio. Teorías Cognitivas del Aprendizaje. 2ª de Madrid: Ediciones Morata S.A., 1993.

K. LOVELL, 1961. Didactica de las Matematicas (Sus Bases Psicologicas). Ediciones Morata, S.A,, 1969.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – REPUBLICA DE COLOMBIA (1990). Marcos Generales y Programas Curriculares Cuarto Grado de Educación Básica. Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional. Bogota: Colombia, 1990.

OBANDO, Gilberto y MÚNERA, John Jairo. (2003). Revista de Educación y Pedagogía. Vol. XV, N°35, Articulo: Las Situaciones Problema como estrategia para la conceptualización matemática. Universidad Antioquia, Facultad de Educación, Medellín, Colombia, 2003.

POGGIOLI, Lisette (2006). Serie Enseñando a Aprender Estrategias de Resolución de Problemas. Recuperada el 22 de Noviembre de 2006 de http://www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio51.htm.

RAMÍREZ, Cesar Camilo, NOREÑA, Maria Isabel, MONTAGUT, Oscar Alberto, ROMÁN, Pedro José (2006). Mi Lib5ro Integrado 4. Editorial Escuelas del Futuro S.A. Bogota: Colombia, 2006.

ROEGIERS , Xavier (2006). ¿Se puede Aprender a Bucear antes de Saber Nadar?. Los Desafíos actuales de la Reforma Curricular. Aprendizajes: Situaciones Anteriores y Posteriores. Recuperado el 23 de Noviembre de 2006 de: http://www.ibe.unesco.org/publications/wprkingpaperspdf/curreform-challen-ibewpci-3.pdf.

SKEMP, Richard (1993). Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas. Ediciones Morata, S.L. Madrid: España, 1993.