

FUNCIONES INDUCIDAS ABIERTAS ENTRE HIPERESPACIOS DE CONTINUOS.

ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

FUNCIONES INDUCIDAS ABIERTAS ENTRE HIPERESPACIOS DE CONTINUOS.

ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director:

Javier Enrique Camargo García.
Doctorado en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2021

Agradecimientos

Agradezco al profesor Javier Enrique Camargo García por su apoyo, tiempo y explicaciones que me dio para la realización de este trabajo. A mi madre, padre, hermana, amigos y compañeros por el apoyo durante este camino.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. PRELIMINARES	11
1.1. NOCIONES BÁSICAS	11
1.1.1. Hiperespacios de un continuo	13
2. FUNCIONES ENTRE CONTINUOS	16
3. FUNCIONES INDUCIDAS	28
3.1. FUNCIONES INDUCIDAS ABIERTAS	31
3.2. FUNCIONES INDUCIDAS SEMIABIERTAS	40
3.3. FUNCIONES INDUCIDAS CASI ABIERTAS Y CUASI INTERIOR	46
3.4. PREGUNTAS	52
BIBLIOGRAFÍA	53

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1.	Función no cuasi interior	18
Figura 2.	Función no semiabierta	18
Figura 3.	Función no semiabierta ni casi abierta	19
Figura 4.	Función confluyente y no cuasi interior	22
Figura 5.	Diagrama I	26
Figura 6.	Función abierta	35

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Funciones abiertas	40
Tabla 2. Funciones semiabiertas	46
Tabla 3. Funciones casi abiertas	50
Tabla 4. Funciones cuasi interior	51

RESUMEN

TÍTULO: FUNCIONES INDUCIDAS ABIERTAS ENTRE HIPERESPACIOS DE CONTINUOS. *

AUTOR: ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN **

PALABRAS CLAVE: CONTINUO, HIPERESPACIO, FUNCIÓN INDUCIDA, FUNCIÓN ABIERTA, FUNCIÓN SEMIABIERTA, FUNCIÓN CASI ABIERTA, FUNCIÓN CUASI INTERIOR.

DESCRIPCIÓN:

Los hiperespacios de un continuo es una colección de subconjuntos del continuo bajo algunas condiciones, los hiperespacios que se estudiarán es el hiperespacio $C(X)$, donde este contiene todos los subcontinuos del continuo X y el hiperespacio de suspensión denotado por $HS(X)$. En este trabajo estudiamos algunas clases de funciones definida entre continuos mostrando que las funciones semiabiertas, casi abiertas o cuasi interior son independientes entre sí y una que otra implicación importante, para después dar paso al estudio las funciones inducidas entre hiperespacios, donde mostrando que relaciones hay entre estas cuando alguna de estas es abierta, semiabierta, casi abierta o cuasi interior, y daremos algunas condiciones tal que una función entre continuos es un homeomorfismo dado que las funciones inducidas son abiertas. Al final de cada sección se podrá apreciar un resumen de estas implicaciones y cuales quedan como preguntas aún por resolver. Mostraremos que existe una función entre continuos que no es semiabierta tal que su función inducida $C(f)$ si es semiabierta, con este ejemplo se contradice la demostración de los profesores Xianjiu, Fapping y Gengrong en su artículo “Semi-openness and almost-openness of induced mapping” no es correcto. Además, con el ejemplo que construimos, damos respuesta negativa a una pregunta planteada en el mismo artículo.

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: OPENNESS INDUCED MAPS BETWEEN CONTINUUMS HYPERSPACES *

AUTHOR: ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN. **

KEYWORDS: CONTINUUM, HYPERSPACE, INDUCED MAP, OPENNESS MAP, SEMI-OPENNESS MAP, ALMOST-OPENNESS MAP, QUIASI-INTERIOR MAP.

DESCRIPTION:

The hyperspaces of a continuum is a collection of subsets of the continuum under some conditions, the hyperspaces to be studied is the hyperspace $C(X)$, where it contains all the subsets of the continuum X and the suspension hyperspace denoted by $HS(X)$. In this degree thesis, we study some classes of mappings defined between continua showing that the semi-openness, almost-openness or quasi-interior mappings are independent of each other and some other important implications, and then give way to the study of the induced mappings between hyperspaces, where we show that there are relations between these when any of these is openness, semi-openness, almost-openness or quasi-interior, and we will give some conditions such that a function between continua is a homeomorphism since the induced mappings are open. At the end of each section you will see a summary of these implications and which ones remain as questions still to be solved. We will show that there exists a function between continua that is not semi-open such that its induced function $C(f)$ if it is semi-open, with this example contradicts the demonstration of Professors Xianjiu, Fapping, and Gengrong in their article "Semi-openness and almost-openness of induced mappings is not correct. Moreover, with the example we constructed, we give a negative answer to a question raised in the same article.

* Bachelor Thesis

** Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos compactos y conexos. A finales del siglo XIX el matemático ruso George Cantor introduce el término “continuo” en un contexto de espacios euclidianos. A comienzos del siglo XX, los matemáticos Fréchet, Borel, Hausdorff, Alexandroff y Urysohn establecen el concepto de continuo como lo conocemos en la actualidad. Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo con al menos un punto.

Más adelante, matemáticos como Hausdorff y Vietoris estudian familias de subconjuntos de un espacio topológico que los llamaron hiperespacios, e introducen algunos conceptos y propiedades de estos. Son ellos quienes definen una métrica y una topología para los hiperespacios.

Por otra parte, en 1979 en el artículo titulado “A fixed point theorem for hyperspaces suspensions”, el profesor Sam. B. Nadler Jr. define una clase especial de hiperespacios que resulta al identificar cierto cerrado de un hiperespacio conocido; este nuevo espacio lo llamó el *hiperespacio de suspensión*. Posteriormente, en 2004, los profesores Raúl Escobedo, María de Jesús López y Sergio Macías profundizaron en el estudio del hiperespacio de suspensión. Nuestro trabajo se desarrollará en el marco de la Teoría de los continuos y sus hiperespacios.

En 1989, H. Hosokawa en su trabajo “Induced mappings between hyperspaces” inicia un estudio sobre funciones entre hiperespacios de continuos, llamándolas funciones inducidas. El profesor Hosokawa estudió el comportamiento de este tipo de funciones cuando éstas son: monótonas, abiertas y confluentes. Años más tarde, en el 2010, el profesor Javier Camargo en el artículo “Openness of induced maps homeomorphisms” nos muestra algunas relaciones entre las funciones inducidas

abiertas y los homeomorfismos, profundizando en el estudio de las funciones inducidas $C(f)$ y $HS(f)$. En el trabajo del profesor Camargo centraremos esta tesis de grado.

Como se expuso anteriormente, estos estudios son muy recientes, y su temprana investigación trae muchas preguntas abiertas. Por esta razón, consideramos importante continuar el estudio de estas funciones inducidas y tal vez, dar solución a una de esas preguntas, u ofrecer avances en la teoría de continuos dirigidos a esta clase de funciones.

Cabe resaltar que en este trabajo se mostrará que un resultado expuesto por los profesores Xianjiu, Fanping y Gengrong en su artículo "Semi-openness and almost-openness of induced mappings"(ver ¹) no es correcto. Ellos afirman que si $C(f)$ es una función semiabierta, esto implica que f también lo es. Por ello, en el Capitulo 3, mostramos que existe una función f que contradice la anterior afirmación. Además, con el ejemplo que construimos, damos respuesta negativa a una pregunta planteada en el mismo artículo. Esto dio origen al trabajo expuesto en ² que enviamos a evaluar en una revista de prestigio internacional en el área.

¹ FANPING Z. & GENGRONG Z. XIANJIU H. "Semi-openness and almost-openness of induced mapping". En: *Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities. Ser. B.* 20 (2005), págs. 21-26.

² & CAMARGO J. ANDRADE A. "A note about semi-open and almost open induced maps". En: *Preprint* ().

1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es definir y enunciar algunas nociones básicas necesarias para la lectura de este trabajo. Enunciaremos algunos resultados sobre la teoría de continuos y los hiperespacios de un continuo.

Algunos de los resultados que a continuación presentaremos no tendrán mucha participación en este trabajo. Debido a eso algunos resultados no serán demostrados. Sin embargo, algunas de estas demostraciones se pueden encontrar en libros de Topología general.

1.1. NOCIONES BÁSICAS

Empezaremos definiendo algunos operadores con su respectiva notación.

Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$ definimos:

1. La adherencia de A denotada por $\overline{A}$ o $\text{cl}_X(A)$ como:

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado de } X \text{ y } A \subseteq F\}.$$

2. El interior de A denotado por $\text{int}_X(A)$ como:

$$\text{int}_X(A) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto de } X \text{ y } U \subseteq A\}.$$

3. La frontera de A denotada por $\text{Fr}(A)$ como:

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Debido a que nuestro objetivo principal es basado en los continuos, empezaremos dando algunos resultados previos relacionados con estos espacios, cuya aplicación se apreciará en los siguientes capítulos.

Definición 1.1.1. Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo diferente de vacío. Un subcontinuo es un continuo contenido en un espacio métrico.

Los siguientes resultados son muy usados en la Teoría de continuos y serán utilizados en el desarrollo de este trabajo. Una demostración se puede encontrar en ³.

Proposición 1.1.2. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $X = K = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Si U es un subconjunto abierto tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para cada $n \geq N$.

Teorema 1.1.3. Sea X un continuo. Si $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X tal que $Y_{n+1} \subset Y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$ es un subcontinuo de X .

Teorema 1.1.4. Sea X un espacio métrico compacto. Si A y B son cerrados no vacíos tales que no existe un conexo C en X donde $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$, entonces $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son cerrados disjuntos tales que $A \subset Y$ y $B \subset Z$.

Teorema 1.1.5. Sea X un continuo y U un subconjunto abierto de X . Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$.

Definición 1.1.6. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que X es localmente conexo en x si existe una base de vecindades abiertas $\mathcal{B}_x$ de x en X , tal que

³ S. NADLER. *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 2005.

B es conexo para cada $B \in \mathcal{B}_x$. Además, diremos que X es localmente conexo, si X es localmente conexo en todo punto en X .

En esta sección definiremos los hiperespacios, los cuales tienen un papel muy importante en el desarrollo de nuestro trabajo, puesto que debemos saber cómo se comportan antes de trabajar con estos. Por ello, empezaremos definiendo y enunciando algunos resultados cuya importancia se podrá apreciar en el Capítulo 3.

1.1.1. Hiperespacios de un continuo Así, definiremos su métrica y su topología llamadas como métrica de Hausdorff y topología de Vietoris, respectivamente.

Definición 1.1.7. Sea X un continuo y definamos los siguientes hiperespacios:

1. $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$;
2. $F_1(X) = \{A \subset C(X) : |A| = 1\}$;
3. $HS(X) = C(X)/F_1(X)$.

El hiperespacio $C(X)$ lo dotaremos de la topología inducida por la métrica de Hausdorff, definida para cada $A, B \in C(X)$ por:

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\},$$

donde d denota la métrica de X y $d(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}$ para cualesquiera $x \in X$ y $E \in C(X)$.

El espacio $F_1(X)$ es un subespacio de $C(X)$ y $HS(X)$, el espacio cociente, donde la función cociente es denotada por q_X . También, denotaremos a $q_X(F_1) = \{F_X\}$. Sabemos que la colección de conjuntos $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ forman una base de $C(X)$ (La topología de Vietoris), donde $U_1, U_2, \dots, U_n$ son abiertos en X y

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{A \in C(X) : A \subset \cup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}.$$

Observación 1.1.8. Note que $q_X|_{C(X)\setminus F_1(X)}: C(X)\setminus F_1(X) \rightarrow HS(X)\setminus \{F_X\}$ es un homeomorfismo, para cada continuo X .

Observación 1.1.9. Notemos que si $U_1, U_2, \dots, U_n$ son abiertos de X , entonces:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n \rangle$$

Con esto, la colección:

$$\sigma = \{ \langle U \rangle : U \text{ es abierto en } X \} \cap \{ \langle X, V \rangle : V \text{ es abierto en } X \}$$

es una subbase de la topología de Vietoris.

Proposición 1.1.10. Sea X un continuo. Entonces la topología de Vietoris es equivalente a la generada por la métrica de Hausdorff.

Proposición 1.1.11. Si X es un continuo, entonces los hiperespacios $F_1(X)$ y $C(X)$ son continuos.

El siguiente resultado será de gran utilidad para el estudiar de las funciones inducidas.

Proposición 1.1.12. Sea X un continuo. Entonces:

- $F_1(X)$ es cerrado;
- $C(X)\setminus F_1(X)$ es denso en $C(X)$.

Demostración. Veamos que $C(X)\setminus F_1(X)$ es abierto. Sea K un subcontinuo no degenerado de X . Sean a y b dos puntos distintos de K . Como X es Hausdorff existen U y V subconjuntos abiertos de X , tal que $a \in U$ y $b \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Si $\mathcal{U} = \langle X, U, V \rangle$, entonces $K \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \subset C(X)\setminus F_1(X)$. Por tanto, $F_1(X)$ es cerrado.

Ahora veamos que $C(X)\setminus F_1(X)$ es denso en $C(X)$. Para ello debemos mostrar que $F_1(x) \subset \text{cl}_{C(X)}(C(X)\setminus F_1(X))$. Sean $\{a\} \in F_1(X)$ y $\mathcal{U}$ abierto de $C(X)$ tal que

$\{a\} \in \mathcal{U}$. Luego existen $U_1, U_2, \dots, U_n$ abiertos de X tal que $\{a\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ y $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $V = \cup_{i=1}^n U_i$. Nótese que $\{a\} \in \langle V \rangle$ y $\langle V \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Como X es regular existe un abierto W de X , tal que $a \in W \subset \overline{W} \subset V$. Sea L la componente de $\overline{W}$, tal que $a \in L$. Por Teorema 1.1.5 se tiene que $L \cap Fr(W) \neq \emptyset$. Luego, $|L| > 1$, y así, L es un subcontinuo no degenerado de X . Esto prueba que, $L \in C(X) \setminus F_1(X)$ con $L \in \mathcal{U}$. Por tanto, $\text{cl}_{C(X)}(C(X) \setminus F_1(X)) = C(X)$.

□

Ahora, sobre el hiperespacio $C(X)$ definiremos un arco de orden, cuya aplicación se podrá apreciar más adelante. Para ello, daremos un criterio para la existencia de este arco.

Definición 1.1.13. Sean X un continuo. Un arco de orden α en $C(X)$, es un arco tal que para cualesquiera dos puntos distintos A y B en α , tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Teorema 1.1.14. Sean X un continuo y A y B dos puntos en $C(X)$. Entonces existe un arco de orden de A a B si, y sólo si, $A \subsetneq B$.

2. FUNCIONES ENTRE CONTINUOS

En este capítulo daremos algunos resultados importantes para el desarrollo de este trabajo. Para evitar ejemplos triviales, supondremos que toda función definida entre continuos es continua y sobreyectiva.

Empezaremos definiendo algunos tipos de funciones continuas entre continuos, como abiertas, semiabiertas, cuasi interior, etc.

Definición 2.0.1. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Diremos que f es:

1. Abierta, si para cada abierto U de X , tenemos que $f(U)$ es abierto de Y .
2. Semiabierta, si para cada abierto no vacío U de X , tenemos que $\text{int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$.
3. Cuasi interior, si para cada $y \in Y$, L componente de $f^{-1}(y)$ y U abierto de X tal que $L \subseteq U$, tenemos que $y \in \text{int}_Y(f(U))$.
4. Casi abierta, si para cada $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $y \in \text{int}_Y(f(U))$, para cada abierto U de X , con $x \in U$.
5. Monótona, si $f^{-1}(L)$ es conexo, para cada conexo L de Y .
6. Ligera, si $f^{-1}(y)$ es totalmente desconexo para cada $y \in Y$; esto es, si C es una componente de $f^{-1}(y)$, entonces C tiene un único punto.
7. OM, si existe una función abierta g y una función monótona h tal que $f = g \circ h$.
8. Confluente, si para cada subcontinuo Q en Y y cada componente C de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(C) = Q$.

9. Débilmente confluyente, si para cada subconjunto Q en Y , existe una componente P de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(P) = Q$.

Respecto a las funciones definidas anteriormente, mostramos algunas relaciones. La demostración del siguiente teorema se sigue directamente de las definiciones.

Teorema 2.0.2. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si f es abierta, entonces:

- f es semiabierta;
- f es cuasi interior;
- f es casi abierta.

A continuación daremos una serie de ejemplos donde mostraremos que semiabierta, cuasi interior y casi abierta no están relacionadas entre sí.

Ejemplo 2.0.3. Existe una función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que f es semiabierta y casi abierta, pero no cuasi interior. Por el Teorema 2.0.2, f no es abierta.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida por:

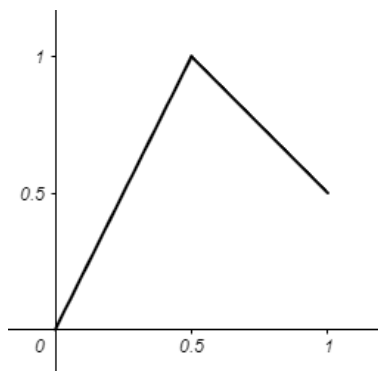
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que f es semiabierta y casi abierta. Veamos que no es cuasi interior. Sea $y = \frac{1}{2}$. Observe que $f^{-1}(y) = \{\frac{1}{4}, 1\}$. Si $U = (a, 1]$ abierto con $\frac{1}{4} < a$. Fácilmente podemos verificar que $f(1) \notin \text{int}_{[0,1]}(f(U))$. Luego f no es cuasi interior.

Ahora, mostraremos que una función casi abierta o cuasi interior, no necesariamente es semiabierta.

Ejemplo 2.0.4. Existe una función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que f es casi abierta y cuasi interior, pero no es semiabierta.

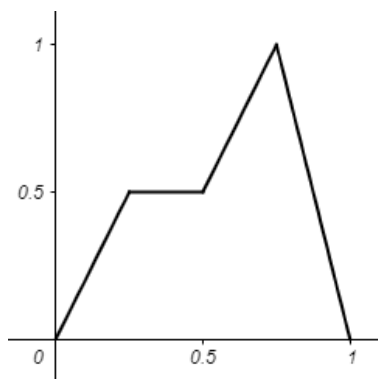
Figura 1. Función no cuasi interior



Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(x - \frac{1}{4}), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}; \\ 4(1 - x), & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 2. Función no semiabierta



Nótese que f es casi abierta y cuasi interior, pero no es semiabierta. Puesto que si $U \subset (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ abierto, tenemos que, $f(U) = \{\frac{1}{2}\}$.

En el siguiente ejemplo mostraremos que una función f semiabierta, no tiene que

ser casi abierta o cuasi interior.

Ejemplo 2.0.5. Existe una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$ tal que f es semiabierta, pero no es casi abierta ni cuasi interior.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$, donde $f(t) = e^{2\pi t}$ para cada $t \in [0, 1]$. Para $y = 1$, se tiene que $f^{-1}(y) = \{0, 1\}$. Sean $U = [0, \frac{1}{2})$ y $V = (\frac{1}{2}, 1]$. Notemos que, $y \notin \text{int}_{\mathcal{S}^1}(f(V))$ y $y \notin \text{int}_{\mathcal{S}^1}(f(U))$. Por tanto, f no es casi abierta ni cuasi interior.

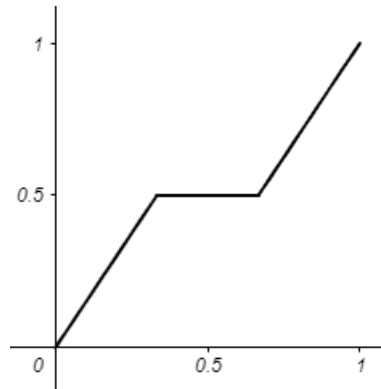
Por último, mostraremos que una función cuasi interior no necesariamente es f sea casi abierta o semiabierta.

Ejemplo 2.0.6. Existe una función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que f es cuasi interior, pero no es semiabierta, ni casi abierta.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}), & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 3. Función no semiabierta ni casi abierta



Tenemos que f es cuasi interior. Veamos que no es casi abierta. Sea $y = \frac{1}{2}$, luego $f^{-1}(y) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Note que si $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, existe U abierto que contiene a x , tal que $f(U) = \{\frac{1}{2}\}$. Si $x = \frac{1}{3}$ y $V = (\frac{1}{4}, \frac{2}{5})$, se tiene que $\frac{1}{2} \notin \text{int}_{[0,1]}(f(V))$. De forma análoga para $x = \frac{2}{3}$. Por tanto, f no es casi abierta. Claramente tampoco es semiabierta.

Visto que semiabierta, casi abierta y cuasi interior son independientes entre sí, ¿es posible que el inverso del Teorema 2.0.2 sea cierto? Esto es:

Pregunta 2.0.7. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios métricos. ¿Si f es semiabierta, cuasi interior y casi abierta, entonces f es abierta?

Observación 2.0.8. Nótese que por la función que presentamos en el Ejemplo 2.0.6, el recíproco del Corolario 2.0.11 no es cierto. Además, si f es la función del Ejemplo 2.0.3, entonces f es semiabierta, casi abierta y no es confluyente ni es cuasi interior.

En el Ejemplo 2.0.3 y el Ejemplo 2.0.5, se tiene que f es cuasi interior y confluyente. En la siguiente teorema veremos que si f es cuasi interior implica que sea f confluyente.

Teorema 2.0.9. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos. Si f es cuasi interior, entonces f es confluyente.

Demostración. Supongamos que f no es confluyente. Esto es, existen D un subcontinuo de Y y E una componente de $f^{-1}(D)$ tales que $f(E) \neq D$. Sea $y \in D \setminus f(E)$. Nótese que E y $f^{-1}(y)$ son cerrados no vacíos y disjuntos en D . Como E es una componente de $f^{-1}(D)$, no existe un conexo en $f^{-1}(D)$ que intersecte simultáneamente a $f^{-1}(y)$ y a E . Así, por el Teorema 1.1.4, $f^{-1}(D) = M \cup N$ donde M y N son cerrados disjuntos tales que $E \subset M$ y $f^{-1}(y) \subset N$. Como D es un continuo y $f(M) \subsetneq D$, existen $w \in f(M)$ y $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus f(M)$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$. Como $w \in f(M)$, existe una componente L de $f^{-1}(w)$ tal que $L \subset M$. Sea U un

abierto de X tal que $M \subset U \subset X \setminus N$. Nótese que $f^{-1}(w_n) \subset N$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $L \subset U$. Así, $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus f(U)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$, $w \notin \text{int}_Y(f(U))$. De lo anterior, f no es cuasi interior. $\square$

En el siguiente ejemplo veremos que el inverso del Teorema 2.0.9 no es cierto.

Ejemplo 2.0.10. Existe una función f entre continuos, tal que f es confluyente, pero no es cuasi interior.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos, tal que $X = Z \cup W$ con

$$Z = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = \sin(1/x) \text{ y } x \in [-1, 0)\}$$

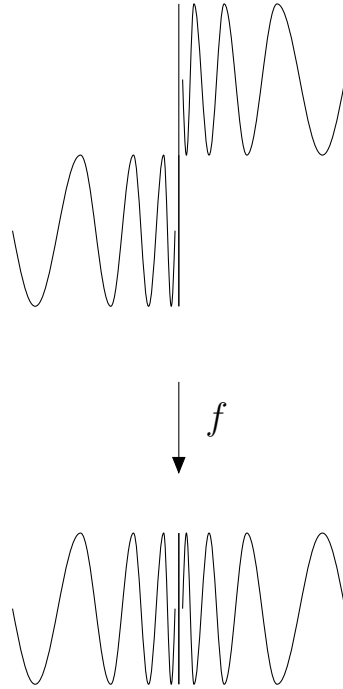
y

$$W = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 2 - \sin(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\},$$

y sea $Y = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = \sin(1/x) \text{ y } x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\}$. Con f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in Z; \\ (x, 2 - y) & \text{si } (x, y) \in W. \end{cases} \quad (1)$$

Figura 4. Función confluyente y no cuasi interior



Fácilmente se puede ver que esa función es confluyente. Veamos que f no es cuasi interior. Para ello tomaremos $a = (0, 0)$, luego $f^{-1}(a) = \{0\} \times \{0, 2\}$. Para $B = B((0, 0), 1/2)$ se tiene que $B \subset X \setminus W$. Ahora, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en Y , con $a_n = (x_n, y_n)$ con $x_n \in (0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Notemos que, $a_n \notin f(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $a \notin \text{int}_Y(f(B))$. Por tanto f no es cuasi interior.

Como consecuencia del Teorema 2.0.9 y del Teorema 2.0.2, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.0.11. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si f es abierta, entonces f es confluyente.

En el siguiente lema daremos una condición adicional, tal que si f es confluyente, entonces f es cuasi interior.

Lema 2.0.12. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos, donde Y es localmente conexo. Si f es confluyente, entonces f es cuasi interior.

Demostración. Sea $y \in Y$. Ahora, sea C una componente de $f^{-1}(y)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Como Y es localmente conexo, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de Y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{y\}$ con $y \in \text{int}_Y(B_n)$ y $B_{n+1} \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea C_n la componente de $f^{-1}(B_n)$ tal que $C \subset C_n$. Como $f^{-1}(B_{n+1}) \subset f^{-1}(B_n)$ tenemos que $C_{n+1} \subset C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Por el Teorema 1.1.3, K es un continuo. Note que, $C \subset K$. Además, $K \subset f^{-1}(y)$ ya que si $x \in K$, entonces $f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(B_n) = \{y\}$. Luego, $C = K$. Por la Proposición 1.1.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $C_n \subset U$. Por tanto, $f(C_n) \subset f(U)$. Como f es confluyente, tenemos que $B_n \subset f(U)$. Ahora, tenemos que $y \in \text{int}_Y(B_n)$, esto implica que $y \in \text{int}_Y(f(U))$. Por tanto, f es cuasi interior. $\square$

A continuación, veremos un resultado más general cuya hipótesis restringida a una función monótona f , nos implicará que f sea cuasi interior.

Proposición 2.0.13. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto de X tales que $f^{-1}(y) \subset U$. Entonces, $y \in \text{int}(f(U))$.

Demostración. Sea $y \in Y$. Supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus f(U)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Veamos que $\limsup f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y)$. Sea $z \in \limsup f^{-1}(y_n)$. Luego, existe una sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$ con $z_k \in f^{-1}(y_{n_k})$. Así, $f(z_k) = y_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como f es continua se tiene que $f(z) = y$. Así, $\limsup f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y)$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^{-1}(y_m) \cap U \neq \emptyset$. Esto implica que $y_m \in f(U)$, lo cual es absurdo. Por tanto, $y \in \text{int}(f(U))$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 2.0.14. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si f es monótona, entonces f es cuasi interior.

Note que el inverso del Corolario 2.0.14 no es cierto, puesto que en el Ejemplo 2.0.4, f es cuasi interior pero no es monótona.

Notemos que una función $f: X \rightarrow Y$ es cuasi interior en un punto $y \in Y$, si para cada componente L de $f^{-1}(y)$ y U un abierto de X con $L \subset U$, $y \in \text{int}_Y(f(U))$.

Ahora, enunciaremos una caracterización de una función cuasi interior. Este es un resultado análogo al teorema de Eilenberg, que se enunciará más adelante y funciona para funciones abiertas.

Proposición 2.0.15. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces f es cuasi interior en $y \in Y$ si, y solo si, para cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim y_n = y$, $\limsup f^{-1}(y_n)$ interseca cada componente de $f^{-1}(y)$.

Demostración. Si f es cuasi interior en y . Sean $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y con $y_n \rightarrow y$ y C una componente de $f^{-1}(y)$, entonces para cada subconjunto U abierto de X , existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$ $y_n \in f(U)$. Así, $U \cap f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$. Luego, $\limsup f^{-1}(y_n) \cap C \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que f no es cuasi interior en y . Sea U un abierto que contiene una componente C de $f^{-1}(y)$ tal que $y \notin \text{int}_Y(f(U))$. Entonces, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim y_n = y$ tal que $y_n \in Y \setminus f(U)$. Por tanto, $f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$ y $\limsup f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U \subset X \setminus C$, lo cual es imposible. Así, f es cuasi interior en y . □

A continuación enunciaremos un resultados cuya demostración se podrán encontrar en ⁴.

Teorema 2.0.16. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es un compacto, entonces existe un función g monótona y una función h ligera tal que $f = h \circ g$.

⁴ G. WHYBURN. *Analytic Topology*. Vol. 28. 1. American Mathrmatical Society, 1942.

El siguiente teorema será importante para la clasificación de una función cuasi interior.

Teorema 2.0.17. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces f es cuasi interior si, y solo si, existe un función g monótona y una función h ligera y abierta tal que $f = h \circ g$.

Demostración. Suponga que f es cuasi interior. Por el Teorema 2.0.16 existe un función g monótona y una función h ligera tal que $f = h \circ g$. Veamos que h es abierta. Sea x un punto en el dominio de h y U un abierto tal que $x \in U$. Como g es monótona tenemos que $K = g^{-1}(x)$ es un continuo. Notemos que, K es una componente de $f^{-1}(h(x))$ ya que h es ligera. Sea $W = g^{-1}(U)$. Tenemos que W es abierto por la continuidad de g y $K \subset W$. Como f es cuasi interior, $h(x) \in \text{int}_Y(f(W))$. Además, $f(W) = h(U)$. Por tanto, h es abierta.

Ahora, supongamos que existe un función g monótona y una función h ligera y abierta tal que $f = h \circ g$. Por Corolario 2.0.14 g es cuasi interior. Por tanto, como h es abierta tenemos que $f = h \circ g$ es cuasi interior.

□

Como consecuencia de la Proposición 2.0.15, del y del Teorema 2.0.17 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.0.18. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

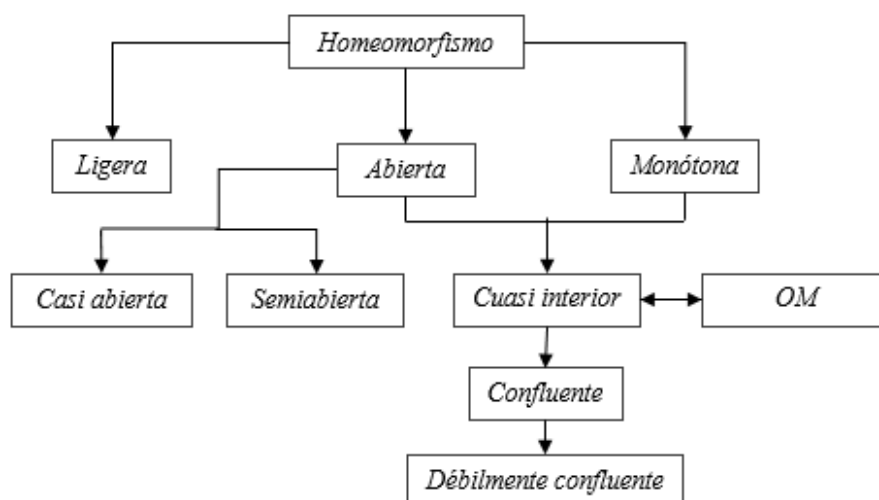
- (1) f es cuasi interior;
- (2) Para cada $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim y_n = y$, $\limsup f^{-1}(y_n)$ interseca cada componente de $f^{-1}(y)$
- (3) f es OM.

Demostración. La equivalencia de (1) y (2) se tiene por la Proposición 2.0.15. Por el Teorema 2.0.16 y el Teorema 2.0.17 se tiene la equivalencia entre (1) y (3).

□

De las anteriores funciones definidas (ver Definición 2.0.1) y de los resultados anteriores tenemos el siguiente diagrama, donde se muestran algunas relaciones que hay entre ellas.

Figura 5. Diagrama I



En los siguiente resultados daremos una caracterización de las funciones abiertas, cuya utilidad será de gran importancia en el siguiente capítulo.

Una demostración del siguiente resultado se puede encontrar en ⁴.

Teorema 2.0.19 (Eilenberg). Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces f es abierta si, y solo si, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$ para cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

A continuación enunciaremos un resultado cuya demostración se podrá apreciar

en ⁵. En el siguiente capítulo veremos una aplicación del siguiente lema.

Lema 2.0.20. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función ligera entre continuos y U un subconjunto abierto de X . Si $q \notin \text{int}_Y(f(U))$, entonces existe una sucesión $(z_n)_{n=1}^\infty \subset Y/f(U)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = q$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un continuo E_n con $z_n \in E_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E_0$, donde E_0 es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$. Además, si f es confluyente, entonces existe un subcontinuo D de U tal que $f(D) = E_0$.

Proposición 2.0.21. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función ligera entre continuos. Entonces f es cuasi interior sí, y solo sí, f es abierta.

Demostración. Supongamos que f es cuasi interior. Sean U un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Claramente $x \in f^{-1}(f(x))$. Como f es ligera, tenemos que $f^{-1}(f(x))$ es totalmente desconexo. Luego, las componentes de $f^{-1}(f(x))$ son conjuntos degenerados en X . Por lo tanto, $\{x\}$ es una componente de $f^{-1}(f(x))$. Como f es cuasi interior y $x \in U$, entonces $f(x) \in \text{int}_Y(f(U))$. Así, como x es arbitrario en U , tenemos que $f(U)$ es abierto. Por tanto, f es abierta.

Claramente se tiene la otra implicación.

□

⁵ J. CAMARGO. "Openness of induced maps and homeomorphisms". En: *Houston Journal of Mathematics* 36 (2010), págs. 199-213.

3. FUNCIONES INDUCIDAS

El objetivo de nuestro trabajo será el siguiente: dada $\mathcal{A}$ la clase de funciones abiertas, semiabiertas, cuasi interior o casi abiertas, encontrar todas las relaciones existentes entre las siguientes afirmaciones:

1. f está en $\mathcal{A}$;
2. $C(f)$ está en $\mathcal{A}$;
3. $HS(f)$ está en $\mathcal{A}$.

A continuación definiremos las funciones inducidas entre hiperespacios dada una función f entre continuos.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces la función $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ definida por $C(f)(A) = f(A)$ para cada $A \in C(X)$, es llamada la función inducida entre los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$. Además, $HS(f): HS(X) \rightarrow HS(Y)$ esta definida como:

$$HS(f)(A) = \begin{cases} q_Y(C(f)((q_X)^{-1}(A))), & \text{si } A \neq F_X; \\ F_Y, & \text{si } A = F_X. \end{cases}$$

Esta función es llamada la función inducida entre los hiperespacios de suspensión $HS(X)$ y $HS(Y)$. Note que $q_Y \circ C(f) = HS(f) \circ q_X$.

A continuación enunciaremos algunas relaciones y equivalencias entre las funciones entre continuos y las funciones inducidas, cuya aplicación se podrá apreciar más adelante.

Proposición 3.0.1. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua definida entre continuos. Entonces:

1. $C(f)$ es continua;
2. $HS(f)$ es continua.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Veamos que $C(f)$ es continua. Por la Observación 1.1.9, es suficiente probar que

$(C(f))^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$ y $(C(f))^{-1}(\langle X, V \rangle) = \langle Y, f^{-1}(V) \rangle$, para cualesquiera abiertos U y V en Y .

Probemos primero que $(C(f))^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$. Sea $A \in (C(f))^{-1}(\langle U \rangle)$. Entonces, tenemos que $C(f)(A) \in \langle U \rangle$. Luego, por la definición de $\langle U \rangle$, $f(A) \subset U$. De esta manera, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U)$, es decir, $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$. Recíprocamente si $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$, entonces $A \subset f^{-1}(U)$ y $f(A) \subset U$. Con esto tenemos que $C(f)(A) \in \langle U \rangle$ y $A \in (C(f))^{-1}(\langle U \rangle)$.

Mostremos que $C(f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Si $A \in C(f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$, entonces tenemos que $C(f)(A) \in \langle Y, V \rangle$. Luego, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Donde se sigue que $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. De manera similar, si $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, entonces $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Con lo que concluimos que $C(f)(A) \in \langle Y, V \rangle$ y $A \in C(f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$.

La continuidad de $HS(f)$ se tiene por ⁶.

□

La siguiente proposición caracteriza las funciones ligeras usando las funciones inducidas.

Proposición 3.0.2. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

⁶ J. DUGUNDJI. *Topology*. Vol. 216. Boston: Allyn y Bacon, Inc., 1996.

1. f es ligera;
2. $C(f)^{-1}(F_1(Y)) = F_1(X)$;
3. $HS(f)^{-1}(F_Y) = \{F_X\}$.

Demostración. Claramente (1) implica (2) con solo utilizar la definición de función ligera. Veamos que (2) implica (3). Supóngase que existe $\chi \in HS(X) \setminus \{F_X\}$, con $HS(f)(\chi) = F_Y$. Luego $q_X^{-1}(\chi) \not\subseteq F_1(X)$, esto implica que $C(f)(q_X^{-1}(\chi)) \not\subseteq F_1(Y)$, ya que $C(f)^{-1}(F_1(Y)) = F_1(X)$. Por tanto, $q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\chi))) \neq F_Y$, de lo cual $HS(\chi) \neq F_Y$, pero esto contradice que $HS(f)(\chi) = F_Y$. Por lo tanto, $HS(f)^{-1}(F_Y) = \{F_X\}$.

Veamos que (3) implica (1). De forma equivalente debemos probar que si f no es ligera, entonces existe $\chi \in HS(X) \setminus \{F_X\}$ con $HS(f)(\chi) = F_Y$.

Como f no es ligera existe $y \in Y$ tal que existe una componente Q de $f^{-1}(y)$ no degenerada. Fácilmente podemos ver que Q es un subcontinuo de X por la continuidad de f , i.e, $Q \in C(X) \setminus F_1(X)$, observe que $C(f)(Q) = \{y\}$. Ahora, si tomamos $\chi = q_X(Q)$, tenemos que $\chi \in HS(X) \setminus \{F_X\}$ con $HS(f)(\chi) = q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\chi)))$. Así, $HS(f)(\chi) = F_Y$. Esto contradice que $HS(f)^{-1}(F_Y) = \{F_X\}$. Por tanto, f es ligera. □

A continuación supondremos que toda función es débilmente confluyente. La razón la mostramos en la siguiente proposición.

Proposición 3.0.3. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es débilmente confluyente;
2. $C(f)$ es sobreyectiva;
3. $HS(f)$ es sobreyectiva.

Demostración. Claramente (1) implica (2) con solo aplicar la definición de débilmente confluyente. Ahora, mostremos que (2) implica (1). Sea A un subcontinuo de Y , es decir, $A \in C(Y)$. Como $C(f)$ es sobreyectiva existe $B \in C(X)$, tal que $C(f)(B) = A$. Así, por definición, $C(f)(B) = f(B) = A$. Por tanto, f es débilmente confluyente.

Veamos que (2) implica (3). Tenemos que $q_Y \circ C(f) = HS(f) \circ q_X$. Como $C(f)$ es sobreyectiva, se tiene que $q_Y \circ C(f)$ es sobreyectiva, esto implica que, $HS(f)$ sea sobreyectiva.

Ahora, veamos que (3) implica (2). Primero mostremos que f es sobreyectiva. Dado que $HS(f)$ es sobreyectiva, existe $K \in C(X)$, tal que, $HS(f)(q_X(K)) = q_Y(Y)$. Como $q_Y \circ C(f) = HS(f) \circ q_X$, $q_Y(C(f)(K)) = q_Y(Y)$. Luego, por la Observación 1.1.8, $C(f)(K) = Y$. Esto implica que f sea sobreyectiva por como se definió $C(f)$. Además, $C(f)(F_1(X)) = F_1(Y)$.

Sea $A \in C(Y) \setminus F_1(Y)$. Como $HS(f)$ es sobreyectiva existe $B \in C(X)$ tal que $HS(f)(q_X(B)) = q_Y(A)$. Puesto que $q_Y \circ C(f) = HS(f) \circ q_X$, se tiene que $q_Y(C(f)(B)) = q_Y(A)$. Por la Observación 1.1.8 tenemos que $C(f)(B) = A$. Por tanto, $C(f)$ es sobreyectiva.

□

A partir de la siguiente sección estudiaremos las funciones inducidas de clase $\mathcal{A}$. Empezaremos estudiando las funciones abiertas y sus relaciones con las funciones inducidas.

3.1. FUNCIONES INDUCIDAS ABIERTAS

A continuación listamos algunos resultados que encontramos en la literatura relacionados con nuestro problema de investigación.

Proposición 3.1.1. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es ligera.

Demostración. Para demostrar que f es ligera debemos mostrar que $HS(f)^{-1}(F_Y) = \{F_X\}$. Supongamos que existe $\chi \in HS(f)^{-1}(F_Y) \setminus \{F_X\}$. Sean d y e dos puntos distintos en Y , y sean $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de $C(Y) \setminus F_1(Y)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \{d\}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \{e\}$. Ahora, definamos $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ por:

$$L_n = \begin{cases} D_{(n+1)/2}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ E_{n/2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Note que $\{L_n\}_{n=1}^\infty \subset C(Y) \setminus F_1(Y)$ y además $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ es divergente en $C(Y)$. Claramente

$\{q_Y(L_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a F_Y . Como $HS(f)$ es una función abierta, por Teorema 2.0.19 tenemos que $HS(f)^{-1}(F_Y) \subset \liminf HS(f)^{-1}(q_Y(L_n))$, ya que $\chi \in HS(f)^{-1}(F_Y)$, se tiene que $\chi \in \liminf HS(f)^{-1}(q_Y(L_n))$. Sea $\bar{H}$ una métrica de $HS(X)$ (ver ⁷). Sea $m \in \mathbb{N}$, y sea

$$\mathcal{U}_m = (HS(X) \setminus \{F_X\}) \cap B_{\bar{H}}(\chi, 1/m).$$

Como $\chi \in \liminf HS(f)^{-1}(q_Y(L_n))$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $K_m \in \mathbb{N}$ al que $\mathcal{U}_m \cap HS(f)^{-1}(q_Y(L_k)) \neq \emptyset$ para cada $k \geq K_m$. Ahora, definamos una sucesión $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ en $HS(X)$ tal que:

- (i.) $\chi_n \in \mathcal{U}_n$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \chi$;
- (ii.) para cada $n \in \mathbb{N}$, $\chi_{2n-1} \in HS(f)^{-1}(q_Y(L_k))$ para algún número impar k , y $\chi_{2n} \in HS(f)^{-1}(q_Y(L_l))$ para algún número par l .

⁷ S. NADLER. "A fixed point theorem for hyperspaces suspensions". En: *Houston Journal of Mathematics* 5 (1979), págs. 125-132.

Sean $A = q_X^{-1}(\chi)$, y $A_n = q_X^{-1}(\chi_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$, y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A , por Observación 1.1.8. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} C(f)(A_n) = C(f)(A)$. Sin embargo, $|\{C(f)(A_n): n \in \mathbb{N}\} \cap \{D_n: n \in \mathbb{N}\}| = \infty$ y $|\{C(f)(A_n): n \in \mathbb{N}\} \cap \{E_n: n \in \mathbb{N}\}| = \infty$, por (ii.). Así, $\{C(f)(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión divergente, pero esto contradice el hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} C(f)(A_n) = C(f)(A)$. Por tanto, $HS(f)^{-1}(F_Y) = \{F_X\}$, y por Proposición 3.0.2 se concluye que f es ligera.

□

Proposición 3.1.2. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función ligera entre continuos. Si $C(f)$ es abierta, entonces $HS(f)$ es abierta.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $HS(X)$. Consideremos dos casos:

- (1) Si $\mathcal{U} \cap \{F_X\} = \emptyset$. Por la Observación 1.1.8 y como f es ligera, se tiene que $HS(f)(\mathcal{U})$ es homeomorfo a $C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))$. Así, $HS(f)$ es abierta.
- (2) Si $F_X \in \mathcal{U}$. Tenemos que $q_X^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto con $F_1(X) \subset q_X^{-1}(\mathcal{U})$. Luego $C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))$ es abierto ya que $C(f)$ es abierta. Además, $F_1(Y) \subset C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))$. Note que $C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))$ es un abierto saturado. Por tanto, $q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U})))$ es abierto en $HS(Y)$. Ahora, por definición

$$HS(f)(\mathcal{U}) = q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))).$$

Así, $HS(f)$ es abierta.

□

Teorema 3.1.3. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es ligera.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos tal que $HS(f)$ es abierta. Suponga que f no es abierta. Así, existe un subconjunto abierto U de X , tal que $f(U)$ no es abierto en Y . Sea $p \in U$ tal que $f(p) \notin \text{int}_Y(f(U))$. Como $HS(f)$ es abierta, f es una función ligera y confluyente (ver Proposición 3.1.1 y ⁸). Por tanto, por Lema 2.0.20, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus f(U)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = f(p)$, y existe un E_n tal que $z_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E_0$, donde E_0 es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$. Además, existe un subcontinuo A de U tal que $f(A) = E_0$.

Sea $q \in A$ tal que $f(q) \neq f(p)$. Sean V y W subconjuntos disjuntos abiertos de X , tal que $V \cup W \subset U$, con $p \in V$ y $q \in W$. Sea $\mathcal{U} = \langle U, V, W \rangle$. Claramente $A \in \mathcal{U}$. Así, $C(f)(A) = E_0 \in C(f)(\mathcal{U})$. Como $z_n \notin f(U)$, $E_n \notin C(f)(\mathcal{U})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $C(f)(\mathcal{U})$ no es abierto. Nótese que $\mathcal{U} \cap F_1(X) = \emptyset$ y f es ligera, entonces $C(f)(\mathcal{U}) \cap F_1(Y) = \emptyset$, por Corolario 3.0.2. Así, $q_X(\mathcal{U})$ es un subconjunto de $HS(X)$ y $HS(f)(q_X(\mathcal{U}))$ es homeomorfo a $C(f)(\mathcal{U})$, por Observación 1.1.8. Por tanto, $HS(f)$ no es una función abierta.

□

Proposición 3.1.4. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es abierta.

Demostración. Sean U un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Claramente, $\langle U \rangle$ es abierto en $C(X)$ y $\{x\} \in \langle U \rangle$. Como $C(f)$ es abierta, $C(f)(\langle U \rangle)$ es abierto. Además, notemos que $C(f)(\langle U \rangle) = \langle f(U) \rangle$ y $\{f(x)\} \in \langle f(U) \rangle$. Así $f(x) \in \text{int}_Y(f(U))$. Como x fue un punto arbitrario, $f(U)$ es abierto en Y . Por tanto, f es abierta.

□

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Teorema 3.1.3 y de la Proposi-

⁸ J. CAMARGO. "Some relationships between induced mappings". En: *Topology and its Applications* (2010), págs. 2038-2047.

ción 3.1.4 no es cierto.

Ejemplo 3.1.5. Existe una función entre continuos, tal que f es abierta, pero $C(f)$ y $HS(f)$ no lo son.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función entre continuos con la topología usual para ambos espacios, donde f está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

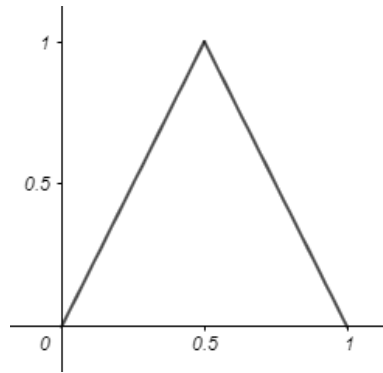


Figura 6. Función abierta

Note que f es abierta. Veamos que $C(f)$ no lo es. Sea $U = [0, 1)$. Como $C(f)$ es continua, tenemos que $\mathcal{W} = (C(f))^{-1}(\langle U \rangle)$ es un abierto, y $\mathcal{W}$ consta de todos los subcontinuos de $[0, 1]$ que no tienen a $\frac{1}{2}$. Ahora, sea $\mathcal{V} = C([0, 1]) \setminus \overline{\mathcal{W}}$ abierto no vacío. Luego, $C(f)(\mathcal{V}) \subset \mathcal{L} = \{A \in C([0, 1]) : 1 \in A\}$. Fácilmente se puede comprobar que $\text{int}_{C([0, 1])}(\mathcal{L}) = \emptyset$. Por tanto $C(f)$ no es abierta. De forma análoga se muestra que $HS(f)$ no es abierta.

Proposición 3.1.6. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si $HS(f)$ es abierta, entonces $C(f)$ es abierta.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(Y)$ y sea $A \in C(Y)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Probaremos que $C(f)^{-1}(A) \subset \liminf C(f)^{-1}(A_n)$. Nótese que f es ligera y abierta (ver Proposición 3.1.1 y Teorema 3.1.3). Considere dos casos:

(1) $A \in C(Y) \setminus F_1(Y)$. Podemos suponer que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(Y) \setminus F_1(Y)$ por la Proposición 1.1.12. Como $HS(f)$ es abierta, por la Observación 1.1.8 y el Teorema 2.0.19, $C(f)^{-1}(A) \subset \liminf C(f)^{-1}(A_n)$.

(2) $A \in F_1(Y)$. Sea $B \in C(f)^{-1}(A)$. Por Proposición 3.0.2 $B \in F_1(X)$. Sean $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in A_n$. Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Como f es abierta, $f^{-1}(a) \subset \liminf f^{-1}(a_n)$, por Teorema 2.0.19. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in f^{-1}(a_n)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Sea B_n una componente de $f^{-1}(A_n)$ tal que $b_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f es abierta, por la Proposición 2.0.11 f es confluyente. Así, $f(B_n) = A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además $B_n \in C(f)^{-1}(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$. Como $b_n \in B_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $B \subset \lim_{k \rightarrow \infty} B_{n_k}$ para cada subsucesión convergente $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Suponga que existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} B_{n_k} = B_0 \in C(X)$, donde B es un subconjunto propio de B_0 . Tenemos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C(f)(B_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_k} = A.$$

Además, $\lim_{k \rightarrow \infty} C(f)(B_{n_k}) = C(f)(B_0)$. Luego, $C(f)(B_0) = A$, pero esto contradice el hecho que f es ligera (ver Proposición 3.0.2). Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ y $B \in \liminf C(f)^{-1}(A_n)$. Luego, $C(f)^{-1}(A) \subset \liminf C(f)^{-1}(A_n)$

Como $C(f)$ es continua, $\limsup C(f)^{-1}(A_n) \subset C(f)^{-1}(A)$. Por tanto,

$$\lim C(f)^{-1}(A_n) = C(f)^{-1}(A)$$

y, por Teorema 2.0.19, $C(f)$ es una función abierta.

□

Con el siguiente ejemplo veremos que no se cumple el inverso de la Proposición 3.1.6

Ejemplo 3.1.7. Existe una función f tal que $C(f)$ es abierta, pero $HS(f)$ no lo es.

Sea $f: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, donde $f((x, y)) = x$. Claramente, f es abierta y no es ligera. Por ⁵, $C(f)$ es abierta, pero $HS(f)$ no lo es.

El siguiente resultado muestra una caracterización cuando $HS(f)$ es abierta, esto es consecuencia de la Proposición 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.4.

Corolario 3.1.8. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces la función $HS(f)$ es abierta si, y solo si, $C(f)$ es abierta y f es ligera.

Como consecuencia de los resultados anteriores enunciaremos el siguiente Teorema cuyo fin es brindarnos un breve resumen de lo anteriormente mostrado.

Teorema 3.1.9. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuo.

Dadas las siguientes afirmaciones:

- (1) f es abierta;
- (2) $C(f)$ es abierta;
- (3) $HS(f)$ es abierta.

Entonces (3) implica (2) y (2) implica (1). Además, si f es ligera, entonces (2) y (3) son equivalentes.

Demostración. De la Proposición 3.1.6 tenemos que (3) implica (2). Continuando, de la Proposición 3.1.4 se tiene que (2) implica (1). Por ultimo, la equivalencia de (2) y (3) es resultado del Corolario 3.1.8.

□

Visto que $HS(f)$ es abierta implica que f es abierta y ligera, ¿es posible que si $HS(f)$ es abierta, implica que f sea un homeomorfismo? Esto es:

Pregunta 3.1.10. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo?

A continuación veremos algunos resultados bajo la condición de espacios localmente conexos extraídos de la literatura. Esta condición adicional nos brindará resultados muy interesantes.

Teorema 3.1.11. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos, y supongamos que X es localmente conexo. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que f no es monótona. Sea z un punto en Y tal que $f^{-1}(z)$ no es conexo. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $f^{-1}(z)$. Como Y es localmente conexo y f es una función continua, tenemos que existe un subcontinuo Z de Y , tal que $z \in \text{int}_Y(Z)$ y p y q están en diferentes componentes de $f^{-1}(Z)$. Sean P y Q las componentes de $f^{-1}(Z)$ tales que $p \in P$ y $q \in Q$. Como las componentes de un abierto son abiertas en un localmente conexo (ver ⁹), $p \in \text{int}_X(P)$ y $q \in \text{int}_X(Q)$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset P$ y $B(q, \delta) \subset Q$. Sea $\mathcal{L}$ un arco de orden en $C(Y)$ de $\{z\}$ a Y , pasando por Z (ver Teorema 1.1.14). Como $\mathcal{L}$ es un arco de orden, $\mathcal{L}$ es un conjunto ordenado con la relación de inclusión. Sea $R = \sup\{L \in \mathcal{L}: f^{-1}(L) \text{ tiene a } p \text{ y } q \text{ en diferentes componentes}\}$.

⁹ K KURATOWSKI. *Topology*. Vol. 2. New York–London: Academic Press y Warsaw: PWN, 1968.

Veamos que $f^{-1}(R)$ tiene a p y q en la misma componente. Sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}$ con $L_{n+1} \subset L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = R$. Note que cada $f^{-1}(L_n)$ tiene a p y q en la misma componente, ya que $R \subset L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ dado que $\mathcal{L}$ es un arco de orden. Sea M_n la componente de L_n que contiene a p y q . Note que $M_{n+1} \subset M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Como f es continua y $f(M_n) \subset L_n$, $f(M) \subset R$. Además, observe que p y q están en M , y M es conexo. Por tanto, $f^{-1}(R)$ tiene a p y q en la misma componente.

Sea E la componente de $f^{-1}(R)$ que contiene a q y p . Como $C(f)$ es abierta por la Proposición 3.1.4 f es abierta, por tanto, f es confluyente (ver Diagrama 5). Así $f(E) = R$. Sea $\mathcal{A} = \{L \in \mathcal{L} : L \subsetneq R\}$. Claramente, $R \in \text{cl}_{C(Y)}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(A)$ tiene a p y q en diferentes componentes.

Probemos que $C(f)(B_H(E, \delta))$ no es abierto en $C(Y)$. Supongamos que $C(f)(B_H(E, \delta))$ es abierto. Sea $K \in B_H(E, \delta)$ tal que $f(K) \in \mathcal{A}$. Como p y q están en E y $H(K, E) < \delta$, tenemos que $P \cap K \neq \emptyset$ y $Q \cap K \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Z \subsetneq f(K)$. Con esto tenemos que $P \cup K \cup Q = K'$ es un continuo, donde p y q pertenecen a K' y $f(K') = f(K)$. Por tanto, $f(K') \in \mathcal{A}$. Pero esto contradice la definición de $\mathcal{A}$. Así, $C(f)(B_H(E, \delta))$ no es abierto y, con esto, contradecimos nuestra hipótesis.

□

Como consecuencia del Teorema 3.1.11 y del Corolario 3.1.8 tenemos los siguientes dos resultados.

Corolario 3.1.12. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos, y supongamos que X es localmente conexo. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos tal que $HS(f)$ es abierta. Por Proposición 3.1.6, $C(f)$ es abierta. Como X es localmente conexo, f es

monótona por Teorema 3.1.11. Además, f es ligera por la Proposición 3.1.1. Por tanto, f es un homeomorfismo.

□

Un continuo X es un *abanico* si X es hereditariamente unicoherente, arco conexo y tal que solo hay un punto que es final común de tres arcos en X .

Corolario 3.1.13. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos, donde X es un abanico. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.

Como resumen de este capítulo tenemos la siguiente tabla

Tabla 1. Funciones abiertas

Abiertas	$HS(f)$	$C(f)$	f
$HS(f)$	✓	✓ Proposición 3.1.6	✓ Proposición 3.1.3
$C(f)$	× Ejemplo 3.1.7	✓	✓ Proposición 3.1.4
f	× Ejemplo 3.1.5	× Ejemplo 3.1.5	✓

Una de las preguntas naturales es: si sustituimos en las hipótesis de los resultados presentados en esta sección, la condición de ser abierta por: semiabierta, casi abierta o cuasi interior, ¿qué resultados continúan siendo ciertos?

3.2. FUNCIONES INDUCIDAS SEMIABIERTAS

Siguiendo la idea principal de nuestro trabajo, ahora veremos que relaciones se conservan del Teorema 3.1.9 sobre las funciones semiabiertas.

Proposición 3.2.1. Si X es un continuo, entonces la función $q_X: C(X) \rightarrow HS(X)$ es semiabierta.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $C(X)$. Por la Proposición 1.1.12 existe un subconjunto abierto $\mathcal{V}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \setminus F_1(X)$. Así, por la Observación 1.1.8, $q_X(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $HS(X)$, con $q_X(\mathcal{V}) \subset q_X(\mathcal{U})$. Por tanto, $\text{int}_{HS(X)}(q_X(\mathcal{U})) \neq \emptyset$.

□

Es fácil probar que si f y g son funciones semiabiertas, entonces $f \circ g$ es semiabierta. Además, si $f \circ g$ es una función semiabierta y g es sobreyectiva, entonces f es semiabierta.

Proposición 3.2.2. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces, $HS(f)$ es semiabierta si, y solo si, $C(f)$ es semiabierta.

Demostración. Supongamos que $C(f)$ es semiabierta. Como $q_Y \circ C(f) = HS(f) \circ q_X$, por la Proposición 3.2.1, tenemos que $q_Y \circ C(f)$ y q_X son semiabiertas. Por tanto $HS(f)$ es semiabierta.

Ahora, supongamos que $HS(f)$ es semiabierta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $C(X)$. Por la Proposición 1.1.12, existe un subconjunto abierto $\mathcal{V}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \setminus F_1(X)$. Por tanto, $\text{int}_{HS(Y)}(HS(f)(q_X(\mathcal{U}))) \neq \emptyset$. Así, existe un subconjunto abierto $\mathcal{W}$ de $HS(Y)$ tal que $\mathcal{W} \subset \text{int}_{HS(Y)}(HS(f)(q_X(\mathcal{U}))) \setminus \{F_Y\}$. Por tanto, por la Observación 1.1.8, se tiene que, $q_Y^{-1}(\mathcal{W}) \subset C(f)(\mathcal{U})$, y ahí $\text{int}_{C(Y)}(c(f)(\mathcal{U})) \neq \emptyset$.

□

De la Definición 2.0.1 sabemos que es una función semiabierta en todo su dominio, i.e, es semiabierta en cada punto, esto es, $f: X \rightarrow Y$ es semiabierta en cada punto $a \in X$ si para cada abierto U en X con $a \in U$, $\text{int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$.

De ¹ tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.3. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si $C(f)$ es semiabierta en $\{a\}$, entonces f es semiabierta en a .

En la Proposición 3.2.6, mostraremos que ¹ no es correcto.

Sea $Y_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ un continuo tal que $Y_1 = W_1 \cup R_1$, donde $W_1 = [-1, 1] \times \{0\}$, $R_1 \cong [0, 1]$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R_1) \setminus R_1 = W_1$ como mostraremos en la Figura 6.

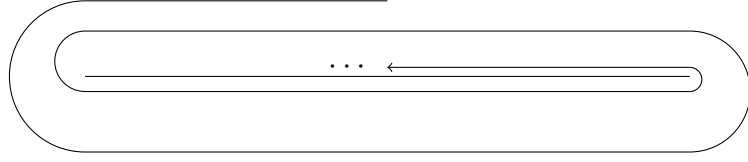


Figura 6: $Y_1 = W_1 \cup R_1$.

Ahora sea $W_2 = W_1 \cup J_{11}$ donde $J_{11} = \{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, i.e., J_{11} es un arco cuyo punto medio p_1^1 divide W_1 en dos partes iguales, y la longitud de J_{11} es la mitad de la longitud del arco W_1 . Note que W_2 tiene cuatro arcos máximos libres. Sea $Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ un continuo tal que $Y_2 = W_2 \cup R_2$, donde $R_2 \cong [0, 1)$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R_2) \setminus R_2 = W_2$ como mostraremos en la Figura 7.

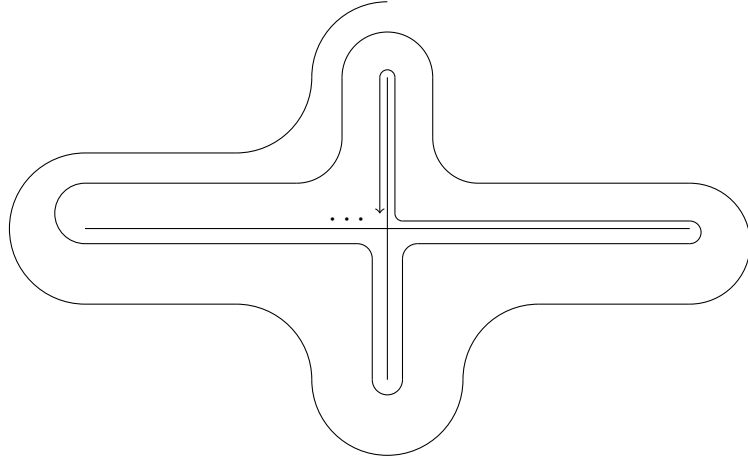


Figura 7: $Y_2 = W_2 \cup R_2$.

Note que si A es un subcontinuo de W_2 , $A \cap J_{11} = \{p_{11}\}$ y $A \setminus \{p_{11}\}$ is desconexo, entonces $A \in \text{int}_{C(Y)}(C(W_2))$.

Haremos un otro paso adicional. Sea $W_3 = W_2 \cup (\bigcup_{i=1}^4 J_{2i})$, donde para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ J_{2i} es un arco cuyo punto medio p_{2i} divide cada arco máximo libre W_2 en dos partes iguales, y la longitud de J_{2i} es la mitad de la longitud del arco al cual divide. Sea Y_3 un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ tal que $Y_3 = W_3 \cup R_3$, donde $R_3 \cong [0, 1)$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R_3) \setminus R_3 = W_3$ (ver Figura 8).

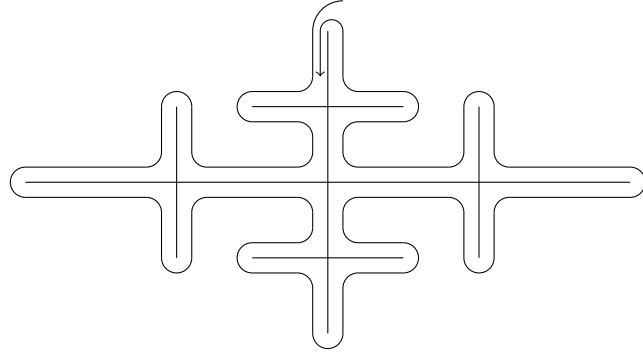


Figura 8: $Y_3 = W_3 \cup R_3$.

Inductivamente, supongamos que definimos $Y_{n-1} = W_{n-1} \cup R_{n-1}$ donde $R_{n-1} \cong [0, 1)$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R_{n-1}) \setminus R_{n-1} = W_{n-1}$. W_{n-1} tiene 4^{n-2} arcos máximos libres.

Sea $W_n = W_{n-1} \cup (\bigcup_{i=1}^{4^{n-2}} J_{(n-1)i})$, donde para cada $i \in \{1, \dots, 4^{n-2}\}$, $J_{(n-1)i}$ es un arco cuyo punto medio $p_{(n-1)i}$ divide cada arco máximo libre de W_{n-1} en dos partes iguales, y la longitud de $J_{(n-1)i}$ es la mitad de la longitud del arco al cual divide.

Sea $Y_n = W_n \cup R_n$ donde $R_n \cong [0, 1)$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R_n) \setminus R_n = W_n$.

Note que $Y_n = W_n \cup R_n$, donde

$$W_n = W_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{4^{n-2}} J_{(n-1)i} \right)$$

y $W_{n-1} \cap J_{(n-1)i} = \{p_{(n-1)i}\}$ para cada $i \in \{1, \dots, 4^{n-2}\}$.

Observación 3.2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si A es un subcontinuo de W_n tal que existe $p_{(n-1)j} \in A$ donde $A \setminus \{p_{(n-1)j}\}$ es desconexo, y $A \cap J_{(n-1)j} = \{p_{(n-1)j}\}$, para algún $j \in \{1, \dots, 4^{n-2}\}$, entonces $A \in \text{int}_{C(Y)}(C(W_n))$.

Sea $Y = \varprojlim \{Y_n; \phi_n\}$, donde $\phi_n: Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ es tal que:

1. $\phi_n|_{R_{n+1}}: R_{n+1} \rightarrow R_n$ es un homeomorfismo; y

2. $\phi_n|_{W_{n+1}}: W_{n+1} \rightarrow W_n$ esta definido por:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in W_{n+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^{4^{n-1}} J_{ni}); \\ p_{ni}, & \text{si } x \in J_{ni}, \text{ para algùn } i \in \{1, \dots, 4^{n-1}\}. \end{cases}$$

El continuo Y es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y puede ser escrito como $Y = W \cup R$ donde W es la dendrita universal de cuarto orden (ver ³), $R \cong [0, 1]$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(R) \setminus R = W$.

Proposición 3.2.5. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $C(X)$. Si $\mathcal{U} \cap C(W) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{U} \cap \text{int}_{C(Y)}(C(W))$ es un subconjunto abierto no vacío de $C(Y)$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{U} \cap C(W)$. Por ³, A es una dendrita. Por lo tanto, existe un árbol $T \subseteq A$ tal que $T \in \mathcal{U}$, por ³. Sea $\pi_n: Y \rightarrow Y_n$ la proyección, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto $\{p_{ni} : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, 4^{n-1}\}\}$ es denso en Y , existe m tal que $p_{mj} \in \pi_m(T) \subseteq W_m$, $J_{mj} \cap \pi_m(T) = \{p_{mj}\}$, y $\pi_m(T) \setminus \{p_{mj}\}$ es desconexo. Así, $\pi_m(T) \in \text{int}_{C(Y_m)}(C(W_m))$, por Observación 3.2.4. Puesto que $C(\pi_m)$ es una función continua,

$$C(\pi_m)^{-1}(\text{int}_{C(Y_m)}(C(W_m))) \text{ es un abierto de } C(X).$$

Además, $C(\pi_m)^{-1}(\text{int}_{C(Y_m)}(C(W_m))) \subseteq C(W)$. Así,

$$T \in \mathcal{U} \cap C(\pi_m)^{-1}(\text{int}_{C(Y_m)}(C(W_m))) \subseteq \mathcal{U} \cap \text{int}_{C(Y)}(C(W)).$$

Por tanto, $\mathcal{U} \cap \text{int}_{C(Y)}(C(W))$ es un subconjunto no vacío de $C(Y)$. □

El siguiente resultado mostrará que ¹ no es cierto.

Proposición 3.2.6. Existe una función entre continuos f tal que $C(f)$ es semiabierta, pero f no es semiabierta.

Demostración. Sea $e: Y \rightarrow \mathbb{R}^3$ un encaje definido por $e(x, y) = (x, y, 0)$. Denotamos $Y' = e(Y)$, $R' = e(R)$ y $W' = e(W)$. Sea $X = Y' \cup (W' \times [0, 1])$. Sea $f: X \rightarrow Y$

definida por $f(x, y, z) = (x, y)$ para cada $(x, y, z) \in X$.

Note que $X \setminus Y'$ es un subconjunto abierto no vacío, $f(X \setminus Y') = W$ y $\text{int}_Y(W) = \emptyset$.

Así, f no es semiabierta.

Veremos que $C(f)$ es semiabierta. Sea $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto no vacío de $C(X)$.

Consideremos dos casos:

Caso 1. $\langle R', X \rangle \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Observe que R' es un subconjunto abierto de X . Por lo tanto, $\langle R', X \rangle \cap \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ tal que

$$(\langle R', X \rangle \cap \mathcal{V}) \cap C(W' \times [0, 1]) = \emptyset.$$

Como $f|_{R'}$ es un homeomorfismo, $C(f)(\langle R', X \rangle \cap \mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $C(Y)$. Por tanto, $C(f)(\mathcal{V})$ tiene interior no vacío.

Caso 2. $\mathcal{V} \subseteq C(W' \times [0, 1])$. Como $C(f|_{W' \times [0, 1]})$ es abierto (ver Teoremas 16 y 27 de ¹⁰), $C(f|_{W' \times [0, 1]})(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $C(W)$. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(Y)$ tal que

$$\mathcal{U} \cap C(W) = C(f|_{W' \times [0, 1]})(\mathcal{V}).$$

Por la Proposición 3.2.5, $\mathcal{U} \cap \text{int}_{C(Y)}(C(W))$ es un subconjunto abierto no vacío de $C(Y)$. Además, $\mathcal{U} \cap \text{int}_{C(Y)}(C(W)) \subseteq C(f|_{W' \times [0, 1]})(\mathcal{V}) \subseteq C(f)(\mathcal{V})$. Así, $C(f)(\mathcal{V})$ tiene interior no vacío.

Por lo tanto, $C(f)$ es semiabierta. □

Notemos que el recíproco del Lema 3.2.3, es falso. Es decir, si f es semiabierta, no es cierto que también lo sea $C(f)$. Puesto que en el Ejemplo 3.1.5 f es abierta, pero $C(f)$ no lo es.

¹⁰ CHARATONIK W. & ILLANES A. CHARATONIK J. "Openness of induced mapping". En: (1999), págs. 67-80.

En ¹¹ se plantea el siguiente problema:

Pregunta 3.2.7. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $C(f)$ es semiabierta, entonces f es abierta?

Note que la Proposición 3.2.6 responde a la anterior pregunta.

En la siguiente tabla se puede observar qué implicaciones se tienen entre las funciones f , $C(f)$ y $HS(f)$, cuando alguna de ellas es semiabierta y cuáles no.

Tabla 2. Funciones semiabiertas

Semiabiertas	$HS(f)$	$C(f)$	f
$HS(f)$	✓	✓ Proposición 3.2.2	× Proposición 3.2.6
$C(f)$	✓ Proposición 3.2.2	✓	× Proposición 3.2.6
f	× Ejemplo 3.1.5	× Ejemplo 3.1.5	✓

3.3. FUNCIONES INDUCIDAS CASI ABIERTAS Y CUASI INTERIOR

A continuación, veremos qué sucede si estudiamos la funciones inducidas casi abiertas. De esta última clase de funciones nos quedamos con muchas dudas que más adelante enunciaremos, pero antes, veamos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva entre continuos. Si $C(f)$ es casi abierta, entonces f es casi abierta.

Demostración. Sea $y \in Y$, entonces $\{y\} \in C(Y)$. Entonces, existe un punto $A \in C(f)^{-1}(\{y\})$ tal que $\{y\} \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\mathcal{U}))$ para cada vecindad $\mathcal{U}$ de A en $C(X)$, pues $C(f)$ es casi abierta. Si $x \in A$, es claro que $x \in f^{-1}(y)$. Ahora, para cualquier vecindad U de x y cualquier vecindad $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ de A , tenemos que

¹¹ J. CAMARGO. "Semi-open induced mapping". En: *Topology Proceedings* (2008), págs. 145-152.

$A \in \langle U, U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Luego, $\{y\} \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\langle U, U_1, U_2, \dots, U_n \rangle))$. Así, existen subconjuntos abiertos $V_1, V_2, \dots, V_m$ tal que

$$\{y\} \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle \subset C(f)(\langle U, U_1, \dots, U_n \rangle).$$

Sea $V = \cap_{i=1}^m V_i$, entonces $\{y\} \in \langle V \rangle \subset C(f)(\langle U, U_1, U_2, \dots, U_n \rangle)$. Para $v \in V$, existe $B \in \langle U, U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ tal que $f(B) = \{v\}$. Luego, si $u \in U \cap B$, entonces $f(u) = v$. Así, $V \subset f(U)$. Por tanto, f es casi abierta. $\square$

En ¹ los autores desean mostrar con un ejemplo que el recíproco de la Proposición 3.3.1 es falso. Sin embargo, a continuación mostraremos que el ejemplo que ellos plantean no sirve, puesto que $C(f)$ es casi abierta, dado que f lo es.

Ejemplo 3.3.2. Sea $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ y $X = Y \cup \{-z \in \mathbb{R}^2 : z \in Y\}$. Sea $f: X \rightarrow Y$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in Y; \\ -z, & \text{si } z \notin Y. \end{cases} \quad (2)$$

Tenemos que f es casi abierta. Veamos que $C(f)$ también lo es. Fácilmente podemos ver que $C(Y) \subset C(X)$, y si $Z \in C(Y)$, tenemos que $Z \in C(f)^{-1}(Z)$. Note que si $\mathcal{W} \subseteq C(X)$ es un abierto, se tiene que $\mathcal{W} \cap C(Y)$ es abierto en $C(Y)$. Luego, si $Z \in \mathcal{W}$, tenemos que $Z \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\mathcal{W}))$. Es decir, $C(f)(Z) \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\mathcal{W}))$. Por tanto, $C(f)$ es casi abierta.

En la Proposición 3.3.1 se mostró que si $C(f)$ es casi abierta, entonces f también lo es. Además, no pudimos mostrar que el recíproco era falso al no poder encontrar un ejemplo. ¿Es posible que si f es casi abierta, implica que $C(f)$ sea casi abierta? Esto es:

Pregunta 3.3.3. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si f es casi abierta, entonces $C(f)$ es casi abierta?

A continuación daremos un ejemplo donde mostraremos que la pregunta anterior es falsa bajo funciones que no son débilmente confluentes.

Ejemplo 3.3.4. Existe una función f casi abierta que no es débilmente confluyente tal que $C(f)$ no es casi abierta.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ definida como $f(t) = e^{3\pi t}$, para cada $t \in [0, 1]$. Sea K un arco en S^1 tal que su punto medio es $(0, 1)$ y tiene una longitud igual a π . Note que, $C(f)^{-1}(K) = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$. Sea $U = [0, \frac{1}{2})$, con $[0, \frac{1}{3}] \in \langle U \rangle$. Ahora, sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos en S^1 tal que su punto medio es $(0, 1)$ y tienen una longitud igual a $\pi + \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$. Sin embargo, podemos ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n \notin C(f)(\langle U \rangle)$. Por tanto, $C(f)$ no es casi abierta.

Ahora, con respecto a $HS(f)$, ¿es posible que si f es casi abierta, implica que $HS(f)$ sea casi abierta? Esto es:

Pregunta 3.3.5. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si f es casi abierta, entonces $HS(f)$ es casi abierta?

En la siguiente Proposición, veremos que si $C(f)$ es casi abierta, $HS(f)$ también lo es, bajo la condición de que f sea una función ligera. Por ello, ¿es posible que si $C(f)$ es casi abierta, entonces que $HS(f)$ es casi abierta? Esto es:

Pregunta 3.3.6. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $C(f)$ es casi abierta, entonces $HS(f)$ es casi abierta?

Proposición 3.3.7. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función ligera entre continuos. Si $C(f)$ es casi abierta, entonces $HS(f)$ es casi abierta.

Demostración. Sea $K \in HS(Y)$. Consideremos dos casos.

- (1) Si $K \neq F_Y$. Sea $B' = q_Y^{-1}(K)$. Como $C(f)$ es casi abierta existe $B \in C(X)$ tal que para todo $\mathcal{U}$ abierto con $B \in \mathcal{U}$, tenemos que $B' \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\mathcal{U}))$. Sea

$K' = q_X(B)$ y $\mathcal{W}$ abierto de $HS(X)$ tal que $K' \in \mathcal{W}$. Ahora, por la continuidad de q_X , se tiene que $q_X^{-1}(\mathcal{W})$ es abierto con $B \in q_X^{-1}(\mathcal{W})$. Así, tenemos que $B' \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{W})))$. Como $K \neq F_Y$, por la Observación 1.1.8 y por la Proposición 1.1.12, $K \in \text{int}_{HS(Y)}(q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{W}))))$. Por lo tanto, por la definición de $HS(f)$ se concluye que $K \in \text{int}_{HS(Y)}(HS(f)(\mathcal{W}))$.

- (2) Si $K = F_Y$. Como f es ligera por la Proposición 3.0.2 tenemos que para cada $B \in F_1(Y)$, existe un $B' \in F_1(X)$ tal que para toda vecindad $\mathcal{V}$ de B' , se tiene que $B \in \text{int}_{C(Y)}(C(f)(\mathcal{V}))$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $HS(X)$ con $F_X \in \mathcal{U}$. Note que, $q_X^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto con $F_1(X) \subset q_X^{-1}(\mathcal{U})$. Como $C(f)$ es casi abierta tenemos que $F_1(Y) \subset \text{int}_{C(Y)}(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U})))$. Así, $F_Y \in \text{int}_{HS(Y)}(q_Y(C(f)(q_X^{-1}(\mathcal{U}))))$. Por tanto, por como se definió $HS(f)$ concluimos que $K \in \text{int}_{HS(Y)}(HS(f)(\mathcal{U}))$.

□

Ahora, ¿qué sucede si $HS(f)$ es casi abierta? ¿cómo se comportan $C(f)$ y f ? ¿es posible que si $HS(f)$ es casi abierta, entonces $C(f)$ o f también lo son? Esto es:

Pregunta 3.3.8. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es casi abierta, entonces $C(f)$ es casi abierta?

Pregunta 3.3.9. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es casi abierta, entonces f es casi abierta?

En la siguiente tabla se puede ver qué relaciones se tienen cuando alguna de las funciones $HS(f)$, $C(f)$ o f es casi abierta y cuáles implicaciones están sin resolver.

Por ultimo, nos preguntamos cómo se comportan estas funciones cuando algunas de estas es cuasi interior.

Usaremos la siguiente notación: para cualquier colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio, $\mathcal{A}^*$ denota la unión de todos los miembros contenidos en $\mathcal{A}$.

Tabla 3. Funciones casi abiertas

Casi abiertas	$HS(f)$	$C(f)$	f
$HS(f)$	✓	? Pregunta 3.3.8	? Pregunta 3.3.9
$C(f)$	? Pregunta 3.3.6	✓	✓ Proposición 3.3.1
f	? Pregunta 3.3.5	? Pregunta 3.3.3	✓

Proposición 3.3.10. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces, f es cuasi interior si, y solo si, $C(f)$ es cuasi interior.

Demostración. Supongamos que f es cuasi interior y sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(Y)$ que convergente a L . Sea $\mathcal{K}$ una componente de $C(f)^{-1}(L)$. Debemos mostrar que $\limsup C(f)^{-1}(L_n) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Escojamos un punto $x \in \mathcal{K}^*$ y tomemos $y = f(x)$. Luego, existe un punto $y_n \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim y_n = y$. Sea C una componente de $f^{-1}(y)$ que contiene a x . Por el Corolario 2.0.18, existe un punto $x_n \in f^{-1}(y_n)$ y una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto de C . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim x_n = x_0 \in C$. Sea K_n la componente de $f^{-1}(L_n)$ que contiene a x_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.0.9 f es confluente, así

$K_n \in C(f)^{-1}(L_n)$. Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión convergente $\{K_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $\lim K_{n_j} = K_0 \in C(X)$. Note que $x_0 \in K_0$ y por lo tanto $K_0 \cup C$ es un elemento de $C(X)$. Luego, K_0 y $K_0 \cup C$ están en la misma componente de $C(f)^{-1}(L)$ ya que por el Teorema 1.1.14 existe un arco de orden entre estos dos conjuntos. Así, $K_0 \in \mathcal{K}$, y de esto, $\limsup C(f)^{-1}(L_n) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Por el Corolario 2.0.18, $C(f)$ es cuasi interior.

Supongamos que $C(f)$ es cuasi interior y sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión de Y que converge a un punto y . Claramente, $\{\{y_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y)$ que converge a $\{y\}$. Sea K una componente de $f^{-1}(y)$. Luego, $K \in C(X)$. Note que $C(K)$ es una componente de $C(f)^{-1}(\{y\})$. Por el Corolario 2.0.18, existe $K_n \in C(f)^{-1}(\{y_n\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que existe una subsucesión de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un

elemento de $C(K)$. Como $K_n \subset f^{-1}(y_n)$, esto implica que $\limsup f^{-1}(y_n) \cap K \neq \emptyset$. Por el Corolario 2.0.18, tenemos que f es cuasi interior.

□

Respecto a $HS(f)$ no pudimos mostrar cuáles relaciones se conservaban ni dar un contra ejemplo para mostrar cuáles no estaban relacionadas o si esta era implicada por $C(f)$. Por tanto, ¿es posible que si $HS(f)$ es cuasi interior, entonces $C(f)$ es cuasi interior? Esto es:

Pregunta 3.3.11. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es cuasi interior, entonces $C(f)$ es cuasi interior?

A la anterior pregunta, la implicación inversa no le pudimos dar una respuesta. Por tanto ¿es posible que si $C(f)$ es cuasi interior, entonces $HS(f)$ es cuasi interior? Esto es:

Pregunta 3.3.12. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es cuasi interior, entonces $C(f)$ es cuasi interior?

Note que las preguntas anteriores son equivalentes si cambiamos $C(f)$ por f ya que estas son equivalentes por la Proposición 3.3.10.

En la siguiente tabla podremos ver qué relaciones se tienen cuando alguna de las funciones $HS(f)$, $C(f)$ o f son cuasi interior y cuáles implicaciones están sin resolver.

Tabla 4. Funciones cuasi interior

Casi abiertas	$HS(f)$	$C(f)$	f
$HS(f)$	✓	? Pregunta 3.3.11	? Pregunta 3.3.11
$C(f)$	? Pregunta 3.3.12	✓	✓ Proposición 3.3.10
f	? Pregunta 3.3.12	✓ Proposición 3.3.10	✓

3.4. PREGUNTAS

A continuación enunciaremos una serie de preguntas que surgieron a lo largo de este capítulo. Recopilamos estas preguntas para que un lector interesado tenga un punto de partida para iniciar un nuevo trabajo de investigación con lo expuesto en este libro.

1. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo?
2. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $C(f)$ es semiabierta, entonces f es semiabierta?
3. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es casi abierta, entonces $C(f)$ es casi abierta?
4. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es casi abierta, entonces f es casi abierta?
5. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. ¿Si f es casi abierta, entonces $C(f)$ es casi abierta?
6. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $HS(f)$ es cuasi interior, entonces $C(f)$ es cuasi interior?
7. Sea $f: X \rightarrow Y$ un función entre continuos. ¿Si $C(f)$ es cuasi interior, entonces $HS(f)$ es cuasi interior?

BIBLIOGRAFÍA

- ANAYA J., CAPULÍN F. & OROZCO F. "Induced mapping on symmetric products of continua". En: *Topology and its Applications* (2016), págs. 100-108.
- ANDRADE A., & CAMARGO J. "A note about semi-open and almost open induced maps". En: *Preprint* () (vid. pág. 10).
- BARRAGÁN, F. "Induced maps on n-folds symmetric product suspensions". En: *Topology and its Applications* (2011), págs. 1192-1205.
- CAMARGO, J. "Openness of induced maps and homeomorphisms". En: *Houston Journal of Mathematics* 36 (2010), págs. 199-213 (vid. págs. 27, 37).
- "Semi-open induced mapping". En: *Topology Proceedings* (2008), págs. 145-152 (vid. pág. 46).
- "Some relationships between induced mappings". En: *Topology and its Applications* (2010), págs. 2038-2047 (vid. pág. 34).
- CHARATONIK J., CHARATONIK W. & ILLANES A. "Openness of induced mapping". En: (1999), págs. 67-80 (vid. pág. 45).
- DUGUNDJI, J. *Topology*. Vol. 216. Boston: Allyn y Bacon, Inc., 1996 (vid. pág. 29).
- ESCOBEDO R., LOPÉZ M. & MACÍAS S. "On the hyperspace suspension of a continuum". En: *Topology and its Applications* (2011), págs. 1192-1205.

- HOSOKAWA, H. "Induced mappings between hyperspaces". En: *Tsukuba Journal of Mathematics* (1997), págs. 239-250.
- ILLANES A & NADLER, S. *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*. New York y Basel: Monographs, Textbooks in pure y applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., 1999.
- KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. 2. New York—London: Academic Press y Warsaw: PWN, 1968 (vid. pág. 38).
- LELEK A. & READ, D. "Compositions of confluent mappings and some other classes of functions". En: *Colloquium Mathematicum* 29 (1974), págs. 101-112.
- MACÍAS, S. "Induced maps on n-fold hyperspaces suspensions". En: *Topology Proceedings* (2004), págs. 143-152.
- NADLER, S. "A fixed point theorem for hyperspaces suspensions". En: *Houston Journal of Mathematics* 5 (1979), págs. 125-132 (vid. pág. 32).
- *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 2005 (vid. págs. 12, 44).
- OLANO W., & SÁNCHEZ J. "Hiperespacios de continuos: historia, avances y nuevos retos". En: *Pesquimat* (2019), págs. 59-78.
- WHYBURN, G. *Analytic Topology*. Vol. 28. 1. American Mathematical Society, 1942 (vid. págs. 24, 26).

XIANJIU H., FANPING Z. & GENGRONG Z. "Semi-openness and almost-openness of induced mapping". En: *Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities. Ser. B.* 20 (2005), págs. 21-26 (vid. págs. 10, 41, 44, 47).