Introducción a la teoría de fluidos no newtonianos

Laura Milena Romero Parada

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2016

Introducción a la teoría de fluidos no newtonianos

Autora
Laura Milena Romero Parada

Trabajo de grado como requisito parcial para optar el título de
Magister en Matemáticas

Director
Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2016

Agradecimientos

- ◇ Agradezco a Dios mi creador, mi amigo y compañero que me inspira y me motiva a seguir adelante.
- ◇ Agradezco a mis padres: Antonio Romero y Luz Marina Parada, por todo su amor incondicional, apoyo y comprensión en cada momento, y en general a toda mi familia.
- ◇ Agradezco al profesor Élder por toda su colaboración y excelente orientación a lo largo de toda la maestría.
- ◇ Agradezco a todos mis profesores, compañeros y amigos, de quienes he aprendido y compartido valiosas experiencias; en especial a Vladimir por todo su respaldo.
- ◇ A todas las personas que hicieron posible la consecución de este gran logro.

Índice general

Índice de figuras

TÍTULO: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS[1]

AUTORA: Laura Milena Romero Parada[2]

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; fluido no newtoniano; solución débil.

DESCRIPCIÓN

Un fluido se define como un conglomerado de partículas indivisibles que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte o cizalla. La rama de la física que estudia las propiedades de los fluidos como la viscosidad, la elasticidad y la densidad, es conocida como Reología.

Un aspecto de gran interés que estudia la Reología es la relación que existe entre la velocidad de esfuerzo de cizalla y la deformación del fluido. Si la relación es lineal, es decir, si la deformación del fluido es directamente proporcional a la velocidad de cizalla, con constante de proporcionalidad μ, se dice que el fluido es un fluido newtoniano, con viscosidad μ. En caso contrario, se dice que el fluido es un fluido no newtoniano. En este trabajo, se presenta un análisis matemático de un modelo estacionario para fluidos incompresibles no newtonianos con condiciones de frontera tipo Dirichlet antideslizante.

La organización del presente trabajo es de la siguiente manera. En el primer capítulo, se encuentran los preliminares, resultados clásicos del análisis funcional que fundamentan este trabajo, iniciando con los espacios de Lebesgue, continuando con los espacios de Sobolev y finalizando con algunas propiedades de los espacios de Campanato, el espacio de las funciones oscilatorias con valor medio acotado y el espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

En el segundo capítulo, se presenta una breve deducción física del modelo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen la dinámica de fluidos viscosos incompresibles no newtonianos y se enuncia formalmente el problema a trabajar.

Finalmente, en el tercer capítulo, se enuncia y se demuestran dos teoremas de existencia de solución débil al modelo estacionario de fluidos viscosos incompresibles no newtonianos, junto con algunos resultados de unicidad.

[1]Proyecto de Grado

[2]FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph.D. Élder Jesús Villamizar Roa

TITLE: INTRODUCTION TO THE THEORY OF NON NEWTONIAN FLUIDS [1]

AUTHOR: Laura Milena Romero Parada[2]

KEY WORDS: Partial differential equations; non-Newtonian fluid; weak solution.

DESCRIPTION

A fluid is defined as a cluster of indivisible particles which deforms continuously under the action of a shear stress or shear. The branch of physics that studies the fluid properties such as viscosity, elasticity and density, is known as Rheology.

One aspect of great interest that studies Rheology is the relationship between the shear stress rate and deformation rate. If the relationship is linear, that is, if the deformation of the fluid is directly proportional to shear rate, with proportionality constant μ, it is said that the fluid is a Newtonian fluid, with viscosity μ. Otherwise, it is said that the fluid is a non-Newtonian fluid. In this thesis, we give a mathematic study of the stationary model for non-Newtonian incompressible fluids with no-slip Dirichlet boundary conditions.

The present document has been organized as follows. In the first chapter, we establish some classical results of functional analysis underlying this work, beginning with Lebesgue spaces, continuing with Sobolev spaces and ending with some properties of Campanato spaces, the space of functions of bounded mean oscillation and the Hardy space $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

In the second chapter, we give a brief physical deduction of the model of partial differential equations describing the dynamics of incompressible viscous non-Newtonian fluids; we also establish formally the mathematical problem.

Finally, in the third chapter, we prove two theorems of existence of weak solution of the stationary model of the incompressible non-Newtonian fluid viscous, as well as some results of uniqueness.

[1]Degree Project

[2]FACULTY OF SCIENCES, SCHOOL OF MATHEMATICS.
DIRECTOR Ph.D. Élder Jesús Villamizar Roa

Notaciones importantes

1. $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f$ es k veces continuamente diferenciable$\}$.
2. $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ (página 13)
3. $\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$ (página 30)
4. $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1(\Omega)$ (página 17)
5. $L^p = L^p(\Omega)$ (página 10)
6. $L^p_{loc} = L^p_{loc}(\Omega)$ (página 11)
7. $L^{p'} = L^{p'}(\Omega)$ (página 12)
8. $\mathcal{L}^{2,n} = \mathcal{L}^{2,n}(\Omega)$ (página 16)
9. $V^p = V^p(\Omega)$ (página 30)
10. $W^{m,q} = W^{m,q}(\Omega)$ (página 13)
11. $W_0^{m,q} = W_0^{m,q}(\Omega)$ (página 13)
12. $W^{-m,q'}(\Omega) = (W_0^{m,q}(\Omega))'$.

Introducción

El estudio de los fluidos lleva mucho tiempo realizándose, desde Arquímedes con su "Eureka" cuando descubrió la fuerza de empuje que un fluido ejerce sobre un cuerpo, hasta estos días. Su desarrollo se ha dado gracias a los aportes de grandes científicos como Galileo Galilei con sus fundamentos de la hidróstatica, los modelos de máquinas voladoras de Leonardo Davinci, la prensa hidraúlica de Blaise Pascal, la ley de viscosidad dinámica de Isaac Newton, los estudios sobre la energía de Daniel Bernoulli, el modelo de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un fluido ideal por Leonhard Euler, las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento de fluidos viscosos, los estudios reológicos de Bingham, entre otros aportes de científicos que se han interesado por el estudio de las propiedades del movimiento de los fluidos.

Un fluido se define como un conglomerado de partículas indivisibles que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte o cizalla, entendiendo cizalla como el movimiento de una capa relativo al de capas adyacentes paralelas. Ejemplos comunes del esfuerzo de cizalla suceden cuando se agita, se rasga y se golpea un fluido. La rama de la física que estudia las propiedades de los fluidos como la viscosidad, la elasticidad y la densidad, es conocida como *Reología*, término introducido por el químico Eugene Bingham en 1928. El estudio de las propiedades reológicas de los fluidos se aplica en un gran número de actividades como lo son, la producción y el control de calidad de pinturas, cosméticos, esmaltes, aceites, lubricantes, fármacos, alimentos, entre otros.

Un aspecto de gran interés que estudia la Reología es la relación que existe entre la velocidad de esfuerzo de cizalla y la deformación del fluido. Si la relación es lineal, es decir, si la deformación del fluido es directamente proporcional a la velocidad de cizalla, con constante de proporcionalidad μ, se dice que el fluido es un *fluido newtoniano*, con viscosidad μ, la cual representa la resistencia del fluido al movimiento. En caso contrario, esto es, si la deformación del fluido no es directamente proporcional a la velocidad de cizalla, entonces se dirá que el fluido es un *fluido no newtoniano*; en otras palabras un fluido es no newtoniano si su viscosidad no es constante.

Existe gran cantidad y variedad de fluidos no newtonianos, una de ellas es la que contiene los fluidos cuya viscosidad es independiente del tiempo y dependiente de la velocidad de cizalla, en la cual se encuentran los fluidos dilatantes y pseudoplásticos. Un fluido es pseudoplástico si a mayor velocidad de cizalla se obtiene una menor viscosidad; como es el caso de la arcilla, miel y algunas pinturas. Por otra parte, un fluido es dilatante si el incremento de la velocidad de cizalla genera un aumento de viscosidad; ejemplos de este tipo de fluidos son más escasos que los pseudoplásticos y su caso más común es la mezcla de agua con almidón de maíz o maizena.

El alcance de esta disertación será presentar un análisis matemático de un modelo estacionario para fluidos incompresibles no newtonianos con condiciones de frontera tipo Dirichlet antideslizante. Más exactamente, el objetivo principal de este trabajo consiste en presentar un documento autocontenido que sirva de referencia para un primer acercamiento al estudio matemático de fluidos no newtonianos. Para ello, el trabajo se ha organizado en tres capítulos cuya estructura se comentará a continuación.

En el primer capítulo, se recordarán las propiedades, desigualdades y resultados clásicos del análisis funcional que fundamentan este trabajo, iniciando con los espacios de Lebesgue, las desigualdades de Young, Hölder y Minkowski, el teorema de convergencia dominada y el teorema de Vitali. También se recuerdan las propiedades básicas de los espacios de Sobolev, y algunos resultados clásicos, entre ellos, el teorema de las inmersiones de Sobolev, el teorema de la traza, y el teorema de punto fijo de Brouwer. Se finaliza mencionando algunas propiedades de otros espacios que desempeñan un papel destacado al final del documento, como lo son, los espacios de Campanato, el espacio de las funciones oscilatorias con valor medio acotado y el espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

En el segundo capítulo, se presentará una idea sobre la deducción física del modelo a trabajar que corresponde a las ecuaciones que describen la dinámica de fluidos viscosos incompresibles no newtonianos, las cuales se fundamentan en las leyes de conservación de masa y de momento, haciendo énfasis en los tensores extra de esfuerzo; se mostrarán las propiedades de $p-$coercividad, crecimiento polinomial y monotonicidad estricta de estos tensores. Por último, se enunciará formalmente el problema junto con otros resultados útiles para el desarrollo del trabajo.

En el tercer capítulo, se enunciará y se demostrarán dos teoremas de existencia de solución débil al modelo estacionario de los fluidos no newtonianos. Para ello, en primer lugar se presentará la definición formal de solución débil del problema. Seguidamente, se probará la existencia de solución débil para valores de p mayores o iguales que $\frac{3n}{n+2}$ basados en la teoría de operadores monótonos, siendo p un parámetro dado por el tensor extra de esfuerzo, y n la dimensión del espacio. Finalmente, haciendo uso del método de truncamiento L^∞, basados en el artículo [8], se probará la existencia de solución débil al problema para valores de p mayores o iguales que $\frac{2n}{n+1}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se hará una revisión general de los espacios de Lebesgue y los espacios de Sobolev junto con algunas de sus propiedades, desigualdades y resultados que serán fundamentales para el desarrollo de este trabajo, entre ellos, el teorema de las inmersiones de Sobolev, el teorema de la traza y el teorema de punto fijo de Brouwer. Adicionalmente se mencionan algunas propiedades de los espacios de Campanato, BMO y de Hardy $\mathcal{H}^1$, que cumplen un papel importante en la parte final de este trabajo.

1.1. Espacios de Lebesgue L^p

Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, \infty)$. Se denota por $L^p = L^p(\Omega)$ al espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones reales Lebesgue-medibles f definidas en Ω, tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.1}$$

El funcional (1.1) define una norma en L^p, con la cual L^p es un espacio de Banach. Para $p = 2$, el espacio L^p es de Hilbert con producto escalar definido por

$$(f, g) = \int_\Omega fg.$$

Se denota por $L^\infty = L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones Lebesgue medibles f definidas en Ω tales que

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \operatorname{supess}\{|f(x)| : x \in \Omega\} \qquad (1.2) \\ &= \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > c\}) = 0\} < \infty. \end{aligned}$$

El funcional (1.2) define una norma en L^∞, y L^∞ con esta norma es un espacio de Banach.

Adicionalmente, se dice que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, cuando $f \in L^p(\Omega')$ para cualquier conjunto abierto y acotado Ω' con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

A continuación se enuncian algunas desigualdades que serán de uso constante en el desarrollo del presente trabajo.

Desigualdad de Young: Sean $a, b, \varepsilon > 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \varepsilon^{-p'/p}\frac{b^{p'}}{p'}, \quad \forall p \in (1, \infty), \quad p' = p(p-1)^{-1}. \tag{1.3}$$

Desigualdad de Hölder: Sean $1 \leq p_i \leq \infty$, para cada $i = 1, \cdots, m$. Considere $f_i \in L^{p_i}$ tales que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p} \leq 1$. Entonces $f_1 \cdots f_m = f \in L^p$ y

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}. \tag{1.4}$$

En caso de que $p_i = \infty$ para algún $i = 1, \cdots, m$, se considerará $\dfrac{1}{p_i} = 0$.

Desigualdad de Minkowski: Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \ \ \forall f, g \in L^p. \tag{1.5}$$

Desigualdad de interpolación: Si $f \in L^p \cap L^q$, entonces

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{(1-\theta)}, \tag{1.6}$$

con $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, y $r^{-1} = \theta p^{-1} + (1-\theta)q^{-1}, \ \ \theta \in [0, 1]$.

Además, si Ω es acotado, se tiene que L^q está inmerso continuamente en L^p para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, es decir, $L^q \subset L^p$ y existe una constante $c > 0$ tal que $\|f\|_p \leq c\|f\|_q$.

Se finaliza esta sección recordando la definición de convergencia fuerte y débil en los espacios L^p, el *teorema de convergencia dominada*, el *teorema de Vitali* y un criterio de convergencia débil. Dada una sucesión $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^p, \ 1 \leq p \leq \infty$, se dice que:

- $\{u_m\}$ converge fuertemente, o en la norma, a alguna $u \in L^p$, y se denota por $u_m \to u$, si
$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_p = 0;$$
- $\{u_m\}$ converge débilmente a $u \in L^p$, y se denota por $u_m \rightharpoonup u$ si
$$\lim_{m \to \infty} \langle f, u_m \rangle = \langle f, u \rangle, \ \forall f \in (L^p)', \tag{1.7}$$
para $1 \leq p < \infty$, donde $(L^p)'$ representa el dual topológico de L^p y $\langle , \rangle$ denota la dualidad entre $(L^p)'$ y L^p .

Note que gracias al Teorema de Representación de Riesz ([4], p. 97) es posible realizar la siguiente identificación: $\langle f, v\rangle = \int_\Omega fv$, para $f \in L^{p'}$, $v \in L^p$; así se tiene que $(L^p)' = L^{p'}$, con $p' = p(p-1)^{-1}$. Por tal razón, la convergencia débil (1.7) en la práctica es determinada por

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega f u_m = \int_\Omega f u, \ \forall f \in L^{p'}(\Omega), \ 1 < p' \leq \infty.$$

Teorema 1.1. *(Teorema de convergencia dominada [4, p.90])*
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^1 que satisface:

i) *$f_n(x) \to f(x)$ en casi todo punto (c.t.p.) de Ω.*

ii) *Existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p de Ω.*

Entonces $f \in L^1$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Teorema 1.2. *(Teorema de Vitali [3, p.76])*
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^p, con $1 \leq p \leq \infty$. Suponga que

i) *$f_n \to f$ c.t.p de Ω.*

ii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset \Omega$ medible con $|A| < \delta$, se satisface que $\int_A |f_n|^p < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $f \in L^p$ y $f_n \to f$ en L^p.

Teorema 1.3. *[9, p.27] Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^p, con $1 < p < \infty$ y suponga que existe $M > 0$, tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $\{f_m\} \subseteq \{f_n\}$ y $f \in L^p$ tal que*

$$f_m \rightharpoonup f, \quad \textit{débilmente en } L^p.$$

1.2. Espacios de Sobolev $W^{m,q}$

Los espacios de Sobolev son subespacios particulares de los espacios de Lebesgue, los cuales son fundamentales en el desarrollo teórico de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Por tal razón se dedica esta sección para recordar su definición y establecer algunas de sus propiedades y resultados básicos, entre ellos, el teorema de inmersiones de Sobolev, el teorema de la traza, la desigualdad de Poincaré y la desigualdad de Korn.

Sean Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multíndice.[1] Se dice que la función v es la α-ésima derivada parcial débil de u si

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

[1] Un multíndice α es un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un número entero no negativo y su orden $|\alpha|$ está dado por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

donde $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω.

Esta definición es motivada por la fórmula de integración por partes. Si $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, entonces $v = D^\alpha u$ en el sentido clásico. En adelante se denotará

$$v = D^\alpha u,\ D^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Los espacios de Sobolev $W^{m,q} = W^{m,q}(\Omega),\ q \in [1,\infty], m \in \mathbb{N}$, son espacios vectoriales formados por el conjunto de todas las funciones Lebesgue-medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que para todo α con $|\alpha| \leq m,\ D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^q(\Omega)$.
Los espacios $W^{m,q}$ son espacios de Banach con la norma

$$\|u\|_{m,q} := \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_q^q \Big)^{1/q} \text{ si } q \in [1,\infty), \tag{1.8}$$

$$\|u\|_{m,q} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \text{ si } q = \infty. \tag{1.9}$$

Claramente, $W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$. Dado el espacio de Sobolev $W^{m,q}(\Omega)$, se define $W_0^{m,q}(\Omega)$ como el subespacio de $W^{m,q}(\Omega)$ que corresponde a la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en la norma (1.8) ó (1.9) dependiendo del valor de q. Al igual que el espacio L^2, $W^{m,2}$ es un espacio de Hilbert con producto escalar dado por:

$$(u,v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Teorema 1.4. *[9, p.35] Sean Ω un dominio*[2] *acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in W_0^{m,q},\ q \geq 1, m \geq 0$. Entonces,*

- *Si $mq < n$, se tiene que $W_0^{m,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, para todo $r \in [q, \frac{nq}{n-mq}]$, y existe una constante $c = c(m,q,r,n)$ tal que $\|u\|_r \leq c\|u\|_{m,q}$.*
- *Si $mq = n$, se tiene que $W_0^{m,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, para todo $r \in [q,\infty)$, y existe una constante $c = c(m,q,r,n)$ tal que $\|u\|_r \leq c\|u\|_{m,q}$.*
- *Si $mq > n$, entonces cada $u \in W_0^{m,q}(\Omega)$ es igual c.t.p. de Ω a una única función en $C^k(\bar{\Omega})$, para todo entero $k \in [0, m-(n/q))$ y existe una constante $c = c(m,q,r,n)$ tal que*
$$\max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_\Omega |D^\alpha u| \leq c\|u\|_{m,q}.$$

Es posible generalizar el Teorema 1.4 para toda función en el espacio $W^{m,q}(\Omega)$ si se agregan condiciones al dominio Ω, por ejemplo, considerando que Ω es localmente lipschitziano.

[2]Dominio se refiere a un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.5. *[9, p.36](Dominio localmente lipschitziano.) Sea* Ω *un dominio de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera acotada. Suponga que para cada* $x_0 \in \partial\Omega$ *existen una bola de centro* x_0 *y radio r, que se denotará por* $B_r(x_0)$*, y una función real* ρ *definida en un dominio* M *de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, tales que en un sistema de coordenadas* $(x_1, \cdots, x_n)$ *con origen en* x_0*:*

1. *El conjunto* $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$ *puede ser representado por una ecuación del tipo*

$$x_n = \rho(x_1, ..., x_{n-1}), \text{ con } (x_1, ..., x_{n-1}) \in M;$$

2. $\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x_n < \rho(x_1, ..., x_{n-1}), \ (x_1, ..., x_{n-1}) \in M\}$.

Se dice que Ω *es un dominio localmente lipschitziano si* ρ *es una función lipschitziana sobre* $\overline{M}$.

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 1.4 para las funciones del espacio $W^{m,q}$.

Teorema 1.6. *[9, p.37] Sea* Ω *un dominio acotado localmente lipschitziano de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces, el teorema anterior es válido si se sustituye* $W_0^{m,q}(\Omega)$ *por* $W^{m,q}(\Omega)$.

Definición 1.7. *(Inmersión compacta)[7, p.286] Sean* X *y* Y *espacios de Banach, se dice que* X *está inmerso compactamente en* Y $(X \hookrightarrow\hookrightarrow Y)$ *si* X *está inmerso continuamente en* Y *y para toda suceción acotada uniformemente* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset X$*, existe una subsucesión* $\{u_k\}$ *que converge fuertemente a alguna* u *en* Y.

Teorema 1.8. *[7, p.286] Sea* Ω *un dominio acotado de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces* $W_0^{1,q}$ *está inmerso compactamente en* L^r $(W_0^{1,q} \hookrightarrow\hookrightarrow L^r)$ *para todo* $r \in [1, \infty)$ *si* $q \geq n$ *y para todo* $r \in [1, np(n-p)^{-1})$ *si* $q < n$.

Además, si se considera un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ localmente lipschitziano Ω es posible generalizar el Teorema 1.8 al espacio $W^{1,q}$.

Si $u \in C(\overline{\Omega})$ entonces u alcanza valores sobre la frontera en el sentido usual. Una pregunta natural es saber si dada una función $u \in W^{1,q}(\Omega)$, la cual en general no es continua sobre $\overline{\Omega}$, tiene sentido hablar de la restricción de u a $\partial\Omega$. El siguiente teorema conocido como *Teorema de la traza* da respuesta a este interrogante.

Teorema 1.9. *(Teorema de la traza) [9, p.43] Sea* Ω *un dominio acotado localmente lipschitziano de* $\mathbb{R}^n$ *y suponga que* $r = q(n-1)/(n-mq)$ *si* $mq < n$*, y* $r \in [1, \infty)$ *si* $mq \geq n$*. Entonces existe una única aplicación lineal continua* γ *de* $W^{m,q}(\Omega)$*,* $q \in [1, \infty), m \geq 1$ *en* $L^r(\partial\Omega)$ *tal que para toda* $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$*,* $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$*. Además, para el caso* $m = 1$ *existen* $c = c(n, r, q, \Omega)$ *y* $\lambda = n(r-q)/q(r-1)$ *tal que*

$$\|\gamma(u)\|_r \leq c\|u\|_q^{(1-\lambda)}\|u\|_{1,q}^\lambda. \tag{1.10}$$

El siguiente resultado permite caracterizar las funciones del espacio $W_0^{1,q}(\Omega)$ en relación a la traza de funciones en $W^{1,q}(\Omega)$.

Teorema 1.10. *[7, p.259] Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio acotado, con $\partial\Omega$ de clase C^1 (i.e. la función escalar ρ de la Definición 1.5 es de clase C^1) y $u \in W^{1,q}(\Omega)$. Entonces, $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ si y solamente si $\gamma(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Para finalizar, se recuerda la *Desigualdad de Poincaré* , la cual relaciona la norma L^q de una función con la norma de sus primeras derivadas.

Teorema 1.11. *[9, p. 49] Suponga que Ω es un subconjunto de la banda de ancho d, $L_d = \{x \in \mathbb{R}^n : -d/2 < x_n < d/2\}$. Entonces, para toda $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, se tiene que*

$$\|u\|_q \leq (d/2)\|\nabla u\|_q. \tag{1.11}$$

1.3. Teoremas de punto fijo

Un método bastante utilizado para resolver problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, es construir las soluciones como punto fijo de algunos operadores relacionados con las ecuaciones del problema.

Teorema 1.12. *(Teorema de punto fijo de Brouwer) [7, p. 441] Sea*

$$u : B[0,1] \to B[0,1]$$

una aplicacion continua, donde $B[0,1]$ denota la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$. Entonces u tiene un punto fijo, es decir, existe un punto $x \in B[0,1]$ tal que

$$u(x) = x.$$

Como corolario de este teorema se tiene el siguiente resultado que será de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Corolario 1.13. *(Ceros de un campo vectorial) [7, p. 493] Sea $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface*

$$v(x) \cdot x \geq 0 \text{ si } |x| = r,$$

para algún $r > 0$. Entonces existe un punto $x \in B[0,r]$ tal que

$$v(x) = 0.$$

Demostración. Suponga que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in B[0,r]$. Defina

$$w(x) = -\frac{r}{|v(x)|}v(x), \quad \forall x \in B[0,r].$$

Note que w es continua, luego por el Teorema 1.12 existe un punto $z \in B[0,r]$ tal que $w(z) = z$. Además, observe que $|z| = r$. Pero

$$r^2 = |z|^2 = w(z) \cdot z = -\frac{r}{|v(z)|}v(z) \cdot z \leq 0,$$

lo cual es una contradicción. □

1.4. Otros espacios de funciones

En esta sección se recordarán los espacios de Campanato, BMO y de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ junto con algunas propiedades y resultados que serán de utilidad al aplicar el método de Truncación L^∞.

El espacio de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, con $p \geq 1$, $\lambda > 0$, corresponde al espacio de las funciones Lebesgue-medibles f definidas en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tales que $f \in L^p$ y

$$[f]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} := \sup_{\substack{x_0\in\Omega \\ 0<\rho<diam\Omega}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |f - f_{x_0,\rho}|^p \; dx < \infty, \tag{1.12}$$

donde $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap B_\rho(x_0)$ y $f_{x_0,\rho} := |\Omega(x_0, \rho)|^{-1} \int_{\Omega(x_0,\rho)} f \; dx$.

El funcional (1.12) define una seminorma en $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, puesto que $[f]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = 0$ si y solo si f es constante. Sin embargo,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} := \|f\|_p + [f]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \tag{1.13}$$

define una norma en el espacio de $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, con la cual $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ es un espacio de Banach.

Otro espacio que se va a recordar corresponde al espacio de las funciones de oscilación media acotada, BMO de acuerdo a sus siglas en inglés. Se dirá que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pertenece al espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$ si

$$|f|_* := \sup \; |Q|^{-1} \int_Q |f - f_Q| \; dx < \infty, \tag{1.14}$$

donde Q son los cubos $n-$dimensionales cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

Cabe resaltar que en este trabajo solo se considerará el Espacio $\mathcal{L}^{2,n}$, el cual satisface

$$\mathcal{L}^{2,n} \cong BMO. \tag{1.15}$$

De hecho, en [10] se prueba $\mathcal{L}^{p,n} \cong BMO$ para $p \in [1, \infty)$ y el siguiente teorema:

Teorema 1.14. *[10, p. 83] Sea $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ una solución de*

$$D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}_{ij} D_\beta u^j \right) = -D_\alpha F^\alpha_i, \tag{1.16}$$

con $A^{\alpha\beta}_{ij}$ constante y verificando la condición de Legendre Hadamard.[3] *Si $F^\alpha_i \in \mathcal{L}^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$, con $0 \leq \lambda < n + 2$, entonces $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$ y para cada compacto $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$*

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\tilde{\Omega})} \leq c(\Omega, \tilde{\Omega}) \left(\|\nabla u\|_2 + [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\tilde{\Omega})} \right). \tag{1.17}$$

---

[3]Se dice que una matriz de coeficientes $\left(A^{\alpha\beta}_{ij}\right)^{1\leq\alpha,\beta\leq m}_{1\leq i,j\leq n}$ satisface la condición de Legendre-Hadamard si $\forall \xi \in \mathbb{R}^m, \forall \eta \in \mathbb{R}^n, \exists c > 0$ tal que $A^{\alpha\beta}_{ij} \xi_\alpha \xi_\beta \eta^i \eta^j \geq c|\xi|^2|\eta|^2$.

Algunas propiedades que verifica el espacio BMO y que serán utilizadas en este trabajo son:

i) $BMO(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall p, 1 \leq p < \infty.$

ii) $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n).$

Para terminar, otro espacio que se requiere recordar es el espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \sup_{t>0} |\phi_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^n)\},$$

donde $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$, con $\phi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\mathbb{R}^n)$.

La importancia de recordar este espacio radica en que el espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$ es dual al espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ y se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *[10, p.126] Sean $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$, con $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ tal que $divf = 0$ y $rotg = 0$ en el sentido de las distribuciones. Entonces $fg \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|fg\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Capítulo 2

Origen del modelo

El objetivo de este capítulo es presentar una idea sobre el origen físico de las ecuaciones que modelan la dinámica de fluidos viscosos, incompresibles y no newtonianos, las cuales se fundamentan en las leyes de conservación de masa y de momento. Se hará enfásis en los tensores extra de esfuerzo con los que se va a trabajar, junto con algunas de sus propiedades. Por último, se enunciará formalmente el problema.

2.1. Deducción del modelo

El modelo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con el cual se estudia la dinámica de los fluidos viscosos incompresibles es conocido como el modelo generalizado de Navier-Stokes. Este modelo se basa en la ley de conservación de masa y la ley de conservación del momento o segunda ley de Newton. A continuación se presenta una breve discusión sobre el origen del modelo, teniendo en cuenta las referencias [5] y [14].

La descripción de la dinámica de un fluido que ocupa un dominio Ω del espacio $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, se puede realizar desde dos enfoques, a saber, el enfoque Lagrangiano y el enfoque Euleriano. En el primero se analiza la trayectoria seguida por cada partícula del fluido mediante una función flujo denotada $\phi(a, t)$, la cual representa la trayectoria recorrida en un lapso de tiempo t por una partícula cuya posición inicial es $a \in \Omega$, como se puede ver en la Figura 2.1 . Por otro lado, el enfoque Euleriano se basa en el estudio de la velocidad que lleva una partícula que pasa por un determinado $x \in \Omega$ en un instante t de tiempo. En este trabajo se realiza la deducción del modelo considerando el enfoque Euleriano.

Para llevar a cabo esta deducción se requiere del resultado clásico conocido como el *teorema de Gauss-Green* o *teorema de la divergencia*, el cual permite expresar una integral de superficie como una integral de volumen.

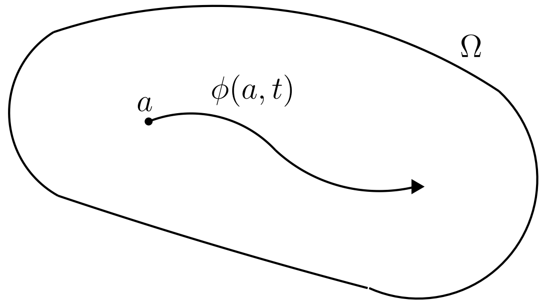

Figura 2.1 – Enfoque Lagrangiano

Teorema 2.1. *[9, p. 40] Sea Ω un dominio acotado localmente lipschitziano en $\mathbb{R}^n$. Entonces el vector normal unitario exterior $\overrightarrow{n}$ existe en casi todo punto sobre $\partial\Omega$ y se satisface la siguiente identidad:*

$$\int_{\Omega} div\ u\ dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \overrightarrow{n}\ dA_x,$$

para todo campo vectorial u con primera derivada continua.

Sean $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ y $\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}$, denotando respectivamente, el campo de velocidad del fluido y la densidad de masa del fluido. Suponga que estas funciones tienen primera derivada continua y que Ω es un dominio acotado localmente lipschitziano.

Adicional al Teorema 2.1, también se hará uso del siguiente resultado conocido como *teorema del transporte de Reynolds*.

Teorema 2.2. *[5, p.10] Sean Ω_t una región donde se puede aplicar el teorema de la divergencia, $f(x,t)$ una función suficientemente regular y u la velocidad del fluido. Entonces*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f\ dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(fu)\right)\ dx.$$

Recuerde que la masa de una porción del fluido que ocupa Ω_t en el instante t está dada por

$$m = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx.$$

La Ley de conservación de masa establece que

$$\int_{\Omega_0} \rho(x,0)dx = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$

Aplicando el Teorema 2.2 a la función $\rho(x,t)$ se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\ dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u)\right)\ dx. \tag{2.2}$$

Así, de (2.1) se deduce que

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dx + \int_{\Omega_t} \text{div}\ (\rho u)\ dx = 0, \tag{2.3}$$

y dado que Ω_t es arbitrario, de (2.3) se concluye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ (\rho u)\ = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) recibe el nombre de *ecuación de continuidad*. Por otro lado, aplicando el teorema del transporte a la función constante 1 se deduce que

$$\text{div}\ u = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) representa la condición de incompresibilidad del fluido, la cual garantiza que los cambios de presión no modifican el volumen del fluido. Observe que si la densidad es constante, la ecuación (2.5) se deduce inmediatamente de (2.4).

En lo que respecta a la Ley de conservación de momento o Segunda Ley de Newton se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho u\ dx = \int_{\Omega_t} \rho f\ dx + \int_{\partial\Omega_t} \tau(x,t,\overrightarrow{n})\ dA_x, \tag{2.6}$$

donde el miembro izquierdo indica la razón de cambio del momento con respecto al tiempo y el miembro derecho representa la suma de las fuerzas externas e internas o de contacto, respectivamente.

Aplicando el Teorema 2.2 al término de la izquierda de (2.6) se obtiene que:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \otimes u) \right)\ dx = \int_{\Omega_t} \rho f\ dx + \int_{\partial\Omega_t} \tau\ dA_x, \tag{2.7}$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial, definido por

$$u \otimes v := (u_1, u_2, \cdots, u_n) \otimes (v_1, v_2, \cdots, v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}.$$

Gracias a los aportes de Claude-Louis Navier (1785-1836) y George Gabriel Stokes (1819-1903), se sabe que

$$\tau(x,t,\overrightarrow{n}) = -\pi(x,t)\overrightarrow{n} + S(x,t)\cdot\overrightarrow{n},$$

donde $\pi(x,t)$ representa la presión del fluido y $S(x,t)$ es una matriz conocida como *tensor extra de esfuerzo* sobre la cual se profundizará en la siguiente sección.

Utilizando el teorema de la divergencia en la integral de superficie de (2.7) se obtiene

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) \right) \, dx = \int_{\Omega_t} \rho f \, dx - \int_{\Omega_t} \nabla \pi \, dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div} S \, dx. \tag{2.8}$$

Dado que Ω_t es arbitrario se concluye que

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho f - \nabla \pi + \operatorname{div} S. \tag{2.9}$$

En resumen, el sistema de ecuaciones que describe el flujo de un fluido incompresible con densidad constante (por simplicidad $\rho = 1$) es

$$\begin{cases} \dfrac{\rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) - \operatorname{div} S + \nabla \pi & = f \qquad \text{(conservación de momento)}, \\ \operatorname{div} u & = 0 \qquad \text{(conservación de masa)}. \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2. Acerca de los tensores extra de esfuerzo

Se entiende por tensor de esfuerzos a las fuerzas de tensión, presión y de contacto o arrastre que las partículas de un fluido ejercen sobre partículas contiguas a ellas; en otras palabras, los tensores de esfuerzos describen la manera en la que interactúan las partículas de un fluido. De acuerdo a lo mencionado en la sección anterior, la expresión de los tensores de esfuerzo de un fluido incompresible está dada por:

$$\tau(x, t, n) = -\pi(x, t) \overrightarrow{n} + S(x, t) \cdot \overrightarrow{n}, \tag{2.11}$$

donde $\pi(x, t)$ representa la presión del fluido y $S(x, t)$ corresponde a una matriz conocida como *tensor extra de esfuerzo*, la cual permite clasificar los fluidos en diferentes tipos.

Si el fluido es un fluido homogéneo con viscosidad dependiente de cizalla, esto es, un fluido con densidad constante cuya resistencia a fluir depende únicamente del movimiento de sus capas adyacentes, entonces, su tensor extra de esfuerzo dependerá solamente de la parte simétrica del gradiente de la velocidad u, $Du = \dfrac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$, como se expresa en [8].

Ejemplo 2.3. *Los siguientes son ejemplos de tensores extra de esfuerzo para algunos tipos de fluidos.*

1. $S = 0$, *que corresponde a los denominados fluidos perfectos o ideales. En este caso, el sistema (2.10) se reduce a las ecuaciones de Euler.*

2. $S = 2\nu Du$, *el cual describe el comportamiento de fluidos conocidos como fluidos newtonianos. Para este caso, el sistema (2.10) corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes. Ejemplos de estos fluidos son: agua, gasolina, vino, glicerina, algunos aceites, entre otros.*

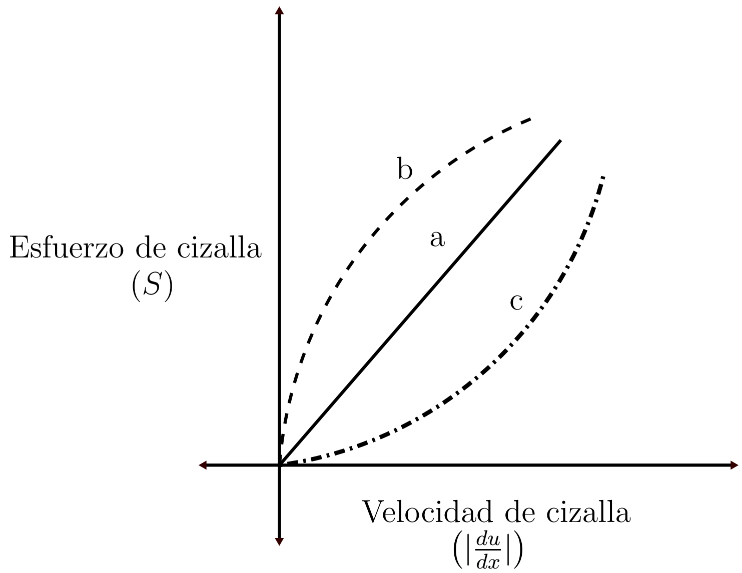

Figura 2.2 – Gráfica de esfuerzo cortante vs velocidad de corte: a. Fluido newtoniano, b. Fluido pseudoplástico, c. Fluido dilatante.

A lo largo de este trabajo se considerarán los tensores extra de esfuerzo que satisfacen la *ley de potencia*, los cuales se caracterizan por ser de la siguiente forma

$$S(Du) = 2\mu(|Du|^2)Du, \text{ con } \mu(s) = \nu s^{\frac{p-2}{2}},$$

donde ν es una constante positiva, $p > 1$ y μ corresponde a la viscosidad del fluido.

El modelo *ley de potencia* permite clasificar a los fluidos en tres grupos, a saber, newtonianos, pseudoplásticos y dilatantes.

i) Newtonianos: Corresponde al caso en el que $\dfrac{d\mu}{ds} = 0$, lo cual ocurre si $p = 2$, de esta manera, $S = 2\nu Du$.

ii) Pseudoplásticos (*shear thinning*): A esta categoría pertenecen los fluidos cuya viscosidad disminuye a medida que aumenta la velocidad de corte o cizalla, es decir, si $\dfrac{d\mu}{ds} < 0$, lo cual se satisface si $p \in (1, 2)$. Como ejemplos se tienen la arcilla, leche, miel, gelatina y algunas pinturas.

iii) Dilatantes (*shear thickening*): Categoría formada por los fluidos cuya viscosidad se incrementa al aumentar la velocidad de cizalla; de esta forma, $\dfrac{d\mu}{ds} > 0$, y así, $p > 2$. Suspensiones de almidón de maíz o de arroz, tierra húmeda y arena mojada son ejemplos de esta categoría.

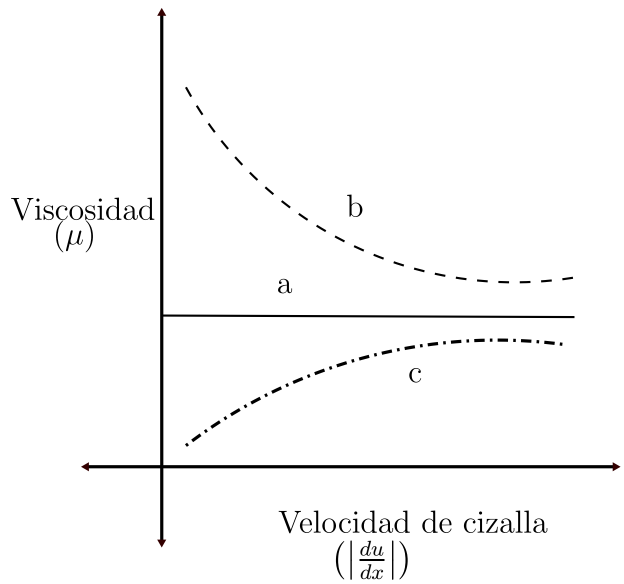

Figura 2.3 – Gráfica de viscosidad vs velocidad de corte: a. Fluido newtoniano, b. Fluido pseudoplástico, c. Fluido dilatante.

La Figura 2.2 ilustra la relación entre el esfuerzo de cizalla y la velocidad de corte para los fluidos newtonianos, pseudoplásticos y dilatantes cuando el fluido se desplaza solo en una dirección x. La Figura 2.3 muestra el comportamiento de la viscosidad con respecto a la velocidad de cizalla para las mismas categorías de fluidos.

Ejemplo 2.4. *Existe gran cantidad de tensores extra de esfuerzo que satisfacen la Ley de potencia. En este trabajo solo se considerarán los siguientes tensores:*

$$S_1(\eta) = 2\nu|\eta|^{p-2}\eta, \tag{2.12}$$
$$S_2(\eta) = 2\nu(1 + |\eta|)^{p-2}\eta, \tag{2.13}$$
$$S_3(\eta) = 2\nu(1 + |\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}\eta, \tag{2.14}$$

con $\nu > 0$ constante y $\eta \in \mathbb{R}^{n^2}_{sim}$, donde $\mathbb{R}^{n^2}_{sim}$ denota el conjunto de todas las matrices simétricas de $n \times n$ con el respectivo producto escalar denotado por $\eta : \xi$.

Cada uno de estos tensores satisfacen propiedades de coercividad, crecimiento polinomial y monotonicidad estricta como se prueba a continuación, teniendo en cuenta las ideas en [6] y [12].

Lema 2.5. *(p-coercividad) Para $p > 1, \eta \in \mathbb{R}^{n^2}_{sim}$, existe $c_1 > 0$, tal que para $i \in \{1, 2, 3\}$ se cumple que*

$$S_i(\eta) : \eta \geq c_1(|\eta|^p - 1). \tag{2.15}$$

Demostración. Considerando separadamente cada tensor de esfuerzo se deduce que:

a) Para $S_1(\eta)$:

$$S_1(\eta) : \eta = 2\nu|\eta|^p = c_1|\eta|^p > c_1(|\eta|^p - 1).$$

b) Para $S_2(\eta)$:

Caso 1: Si $1 < p < 2$. De [12], se tiene que existe $c > 0$ tal que, para $x > 0$ verifica

$$(1+x)^{p-2} \geq c \int_0^1 (1+sx)^{p-2}\, ds,$$

por lo tanto,

$$(1+x)^{p-2}x^2 \geq \frac{cx}{p-1}((1+x)^{p-1} - 1). \tag{2.16}$$

Por otro lado, como $\sup_{x\geq 0} \frac{1+x^{p-1}}{(1+x)^{p-1}} < 2$, se obtiene de (2.16) que

$$(1+x)^{p-2}x^2 \geq \frac{cx}{2(p-1)}(1 + x^{p-1} - 2) = \frac{cx}{2(p-1)}(x^{p-1} - 1). \tag{2.17}$$

Aplicando la desigualdad de Young se tiene que $x = 1x \leq \frac{1}{2}x^p + c1^{p'}$, por lo tanto, de (2.17) se sigue que

$$(1+x)^{p-2}x^2 \geq c_1(x^p - 1). \tag{2.18}$$

Como $S_2(\eta) : \eta = 2\nu(1 + |\eta|)^{p-2}|\eta|^2$, entonces (2.15) se tiene directamente de (2.18).

Caso 2: Si $p \geq 2$.

$$S_2(\eta) : \eta = 2\nu(1 + |\eta|)^{p-2}\eta : \eta \geq 2\nu|\eta|^p = c_1|\eta|^p \geq c_1(|\eta|^p - 1).$$

c) Para $S_3(\eta)$:

Caso 1. Si $1 < p < 2$. Observe que para $x > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$(1+x^2)^{\frac{p-2}{2}} \geq c \int_0^1 ((1+sx^2)^{\frac{p-2}{2}}\, ds,$$

luego,

$$(1+x^2)^{\frac{p-2}{2}}x^2 \geq \frac{2c}{p}((1+x^2)^{\frac{p}{2}} - 1). \tag{2.19}$$

Además, note que $(1+x^2)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{1}{2}(1+x^p)$; entonces, de (2.19) se tiene que

$$(1+x^2)^{\frac{p-2}{2}}x^2 \geq \frac{c}{p}(x^p - 1). \tag{2.20}$$

Dado que $S_3(\eta) : \eta = 2\nu(1+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\eta|^2$, entonces (2.15) se sigue directamente de (2.20).

Caso 2. Si $p \geq 2$

$$S_3(\eta) : \eta = 2\nu(1+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}\eta : \eta \geq 2\nu|\eta|^p = c_1|\eta|^p \geq c_1(|\eta|^p - 1). \ \square$$

Lema 2.6. *(crecimiento polinomial de orden $p-1$) Para $p > 1, \eta \in \mathbb{R}^{n^2}_{sim}$, existe $c_2 > 0$, tal que para $i \in \{1,2,3\}$ se satisface*

$$|S_i(\eta)| \leq c_2(1+|\eta|)^{p-1}. \tag{2.21}$$

Demostración. Analizando separadamente cada tensor de esfuerzo se obtiene:

a) Para $S_1(\eta)$:

$$|S_1(\eta)| = |2\nu|\eta|^{p-2}\eta| = c_2|\eta|^{p-1} \leq c_2(1+|\eta|)^{p-1}.$$

b) Para $S_2(\eta)$:

$$\begin{aligned} |S_2(\eta)| &= |2\nu(1+|\eta|)^{p-2}\eta| \\ &= |2\nu(1+|\eta|)^{p-2}||\eta| \\ &\leq 2\nu(1+|\eta|)^{p-1}. \end{aligned}$$

c) Para $S_3(\eta)$: Teniendo en cuenta que $1+x^2 \leq (1+x)^2$ si $x \geq 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} |S_3(\eta)| &= |2\nu(1+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}\eta| \\ &\leq |2\nu(1+|\eta|)^{p-2}||\eta| \\ &\leq c_2(1+|\eta|)^{p-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Lema 2.7. *(monotonicidad estricta) Para $p > 1, a, b \in \mathbb{R}^{n^2}_{sim}, a \neq b,\ i \in \{1,2,3\}$ se tiene que:*

$$(S_i(a) - S_i(b)) : (a-b) > 0 \tag{2.22}$$

Demostración. Esta prueba se realizará analizando cada tensor separadamente y encontrando estimativas al producto escalar. Note que aplicando el *teorema fundamental del cálculo* y la regla del producto se tiene:

a) Para el tensor S_1:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 =& 2\nu(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) : (a-b) \\ &= 2\nu\left(\int_0^1 \frac{d}{ds}|sa+(1-s)b|^{p-2}(sa+(1-s)b)\ ds\right) : (a-b) \\ &= 2\nu\int_0^1 (p-2)|sa+(1-s)b|^{p-2}|a-b|^2\left(\frac{sa+(1-s)b}{|sa+(1-s)b|}\right)^2\ ds \\ &\quad + 2\nu\int_0^1 |sa+(1-s)b|^{p-2}|a-b|^2\ ds. \end{aligned}$$

Ahora, considere los siguientes casos:

Caso 1: Si $1 < p < 2$.

$$\mathcal{I}_1 \geq 2\nu(1 + \text{mín}(0, p-2)) \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2}|a-b|^2 \; ds. \tag{2.23}$$

Observe que la integral en (2.23) está acotada, puesto que por la desigualdad triangular, se tiene que $|sa + (1-s)b| \leq |sa| + |(1-s)b| \leq |a| + |b|$, luego

$$\mathcal{I}_1 \geq 2\nu(p-1)|a-b|^2(|a| + |b|)^{p-2}. \tag{2.24}$$

Caso 2: Si $p \geq 2$ y $|a| \geq |b-a|$.

$$\mathcal{I}_1 \geq 2\nu \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2}|a-b|^2 \; ds, \text{ pero} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
|sa + (1-s)b| &= |a - a + sa + (1-s)b| \\
&\geq ||a| - (1-s)|a-b|| \\
&\geq ||a-b| - (1-s)|a-b|| \\
&= s|a-b|.
\end{aligned}$$

De esta manera, $\mathcal{I}_1 \geq c|a-b|^p$, con $c = 2\nu(p-1)$.

Caso 3: Si $p \geq 2$ y $|a| < |b-a|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &\geq 2\nu \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2}|a-b|^2 \; ds \\
&= 2\nu \int_0^1 \frac{(|sa + (1-s)b|^2)^{\frac{p}{2}}|a-b|^2}{|sa + (1-s)b|^2} \; ds;
\end{aligned}$$

observe que $|a| < |b-a|$ implica que $|b| < 2|b-a|$, luego

$$\begin{aligned}
|sa + (1-s)b|^2 &\leq (s|a| + (1-s)|b|)^2 \\
&< (s|a-b| + 2(1-s)|a-b|)^2 \\
&= (2-s)^2|a-b|^2.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &> 2\nu \int_0^1 \frac{(|sa + (1-s)b|^2)^{\frac{p}{2}}|a-b|^2}{(2-s)^2|a-b|^2} \; ds \\
&\geq \frac{1}{2}\nu \left(\int_0^1 |sa + (1-s)b|^2 \; ds \right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3^{\frac{p}{2}}}\nu \left(|a|^2 + |b|^2 + (a:b) \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\geq c|a-b|^p.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Note que (2.26) se satisface, puesto que si $a : b \geq 0$, se tiene que

$$|a-b|^p = (|a-b|^2)^{\frac{p}{2}} = (|a|^2 + |b|^2 - 2(a:b))^{\frac{p}{2}} \leq (|a|^2 + |b|^2 + (a:b))^{\frac{p}{2}}.$$

En caso contrario, esto es, si $a : b < 0$, el objetivo es encontrar $c > 0$ tal que $|a|^2 + |b|^2 + (a : b) \geq c(|a|^2 + |b|^2 - 2(a : b))$, luego

$$(1-c)(|a|^2 + |b|^2) \geq (-1-2c)(a:b). \tag{2.27}$$

Por otro lado, aplicando las desigualdades de Cauchy y Young respectivamente, se tiene

$$a : b \leq |a : b| \leq |a||b| \leq \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2},$$

con lo cual, tomando $c = 1/4$ se satisface (2.27) y por tanto, (2.26).

b) Para el tensor S_2:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= 2\nu((1+|a|)^{p-2}a - (1+|b|)^{p-2}b) : (a-b) \\
&= 2\nu \left(\int_0^1 \frac{d}{ds}(1 + |sa + (1-s)b|)^{p-2}(sa + (1-s)b)\ ds \right) : (a-b) \\
&= 2\nu \int_0^1 (p-2)(1 + |sa + (1-s)b|)^{p-2}|a-b|^2 \left(\frac{sa + (1-s)b}{|sa + (1-s)b|} \right)^2\ ds \\
&\quad + 2\nu \int_0^1 (1 + |sa + (1-s)b|)^{p-2}|a-b|^2\ ds.
\end{aligned}$$

Ahora, de manera análoga al análisis del tensor S_1, consideremos los siguientes casos:

<u>Caso 1</u>: Si $1 < p < 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &\geq 2\nu(1 + \text{mín}(0, p-2)) \int_0^1 (1 + |sa + (1-s)b|)^{p-2}|a-b|^2\ ds \\
&\geq 2\nu(p-1)|a-b|^2(1 + |a| + |b|)^{p-2}. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

<u>Caso 2</u>: Si $p \geq 2$, utilizando (2.26), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &\geq 2\nu \int_0^1 (1 + |sa + (1-s)b|)^{p-2}|a-b|^2\ ds \\
&\geq 2\nu \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2}|a-b|^2\ ds \\
&= \mathcal{I}_1\ \geq c|a-b|^p. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

c) Para el tensor S_3:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= 2\nu((1+|a|^2)^{\frac{p-2}{2}}a - (1+|b|^2)^{\frac{p-2}{2}}b) : (a-b) \\
&= 2\nu\left(\int_0^1 \frac{d}{ds}(1+|sa+(1-s)b|^2)^{\frac{p-2}{2}}(sa+(1-s)b)\ ds\right) : (a-b) \\
&= 2\nu\int_0^1 (p-2)(1+|sa+(1-s)b|^2)^{\frac{p-2}{2}}|a-b|^2\frac{(sa+(1-s)b)^2}{1+|sa+(1-s)b|}\ ds \\
&\quad + 2\nu\int_0^1 (1+|sa+(1-s)b|^2)^{\frac{p-2}{2}}|a-b|^2\ ds.
\end{aligned}
$$

Considere los siguientes casos:

Caso 1: Si $1 < p < 2$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &\geq 2\nu(1+\text{mín}(0,p-2))\int_0^1 (1+|sa+(1-s)b|^2)^{\frac{p-2}{2}}|a-b|^2\ ds \\
&\geq 2\nu(p-1)|a-b|^2(1+(|a|+|b|)^2)^{\frac{p-2}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Caso 2: Si $p \geq 2$, teniendo en cuenta (2.26), se llega a que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &\geq 2\nu\int_0^1 (1+|sa+(1-s)b|^2)^{\frac{p-2}{2}}|a-b|^2\ ds \\
&\geq 2\nu\int_0^1 |sa+(1-s)b|^{p-2}|a-b|^2\ ds \\
&= \mathcal{I}_1\ \geq c|a-b|^p. \qquad \square
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

2.3. Presentación del problema

Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n = 2,3$, un dominio acotado con frontera Lipschitz $\partial\Omega$. El problema consiste en encontrar una función vectorial $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, que representa la velocidad del fluido, y una función escalar $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$, que denota la presión hidrostática, las cuales satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\text{div }(S(Du)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi &= f \quad \text{en } \Omega, \\
\text{div } u &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\
u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,
\end{aligned}
\right.
\tag{2.32}
$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ denota un campo de fuerzas externas dado, S corresponde al tensor extra de esfuerzos, el cual es de la forma del Ejemplo 2.4 y Du se refiere a la parte simétrica del gradiente de la velocidad, es decir,

$$Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Obsérvese que de (2.5) se tiene que $(u \cdot \nabla)u = div(u \otimes u)$. Los siguientes resultados serán de gran utilidad para la solución del sistema (2.32), junto con los mencionados en el capítulo de preliminares.

Lema 2.8. *[12, p. 196](Desigualdad de Korn)*
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante $c_k = c_k(\Omega)$ tal que:

$$\|u\|_{1,p} \leq c_k \|Du\|_p. \tag{2.33}$$

Considere el espacio de Sobolev $W^{1,p}$. Se denotará por $W^{-1,p'}$ al espacio dual de $W_0^{1,p}$ y a su correspondiente dualidad por $\langle , \rangle$. Adicionalmente, se usarán constantemente los siguientes espacios de divergencia nula:

$$\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{div}\phi = 0\}$$
$$V^p = V^p(\Omega) = \overline{\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)}^{\|\nabla \cdot\|_p} = \{\phi \in W_0^{1,p} : \text{div}\phi = 0\}$$

Lema 2.9. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Considere*

$$b(u, v, w) := \int_\Omega (u \cdot \nabla)vw = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i(D_i v_j)w_j \, dx.$$

Entonces, para toda $u \in V^p$, $v, w \in W_0^{1,p}$, con $p \geq \frac{3n}{n+2}$, se verifica que

i) $b(u, v, v) = 0$,

ii) $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$.

Demostración. Observe que si $p \geq \frac{3n}{n+2}$, entonces $\int_\Omega D_i u_i(v_j^2) \, dx < \infty$. Luego, integrando por partes, se obtiene que

$$\begin{aligned} i) \; b(u, v, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i(D_i v_j)v_j \, dx = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \int_\Omega u_i D_i(v_j^2) \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega D_i u_i(v_j^2) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_\Omega \text{div}u \; (v_j^2) \, dx = 0. \end{aligned}$$

$$ii) \; b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i(D_i v_j)w_j \, dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i v_j(D_i w_j) \, dx = -b(u, w, v). \; \square$$

Capítulo 3

Existencia de soluciones débiles

En este capítulo se demostrará la existencia de solución débil para el sistema (2.32). Inicialmente, se presentará la definición formal de solución débil del problema (2.32). La prueba de existencia de solución débil se dividirá en dos casos. En el primero, usando principalmente la teoría de operadores monótonos, se analizará la existencia de solución para valores de p mayores o iguales que $\frac{3n}{n+2}$ y las condiciones necesarias para asegurar la unicidad de solución. Posteriormente, empleando el método de truncamiento L^∞, usado en el artículo [8], se probará la existencia de solución débil al problema para valores de p mayores o iguales que $\frac{2n}{n+1}$.

3.1. Solución débil para $p \geq \frac{3n}{n+2}$

A continuación se establecerá el concepto de solución débil del problema (2.32). Como es natural, esta definición es motivada por la regla de integración por partes.

Definición 3.1. *Dada $f \in W^{-1,p'}$, se dice que $u \in V^p$ es solución débil del sistema (2.32) si*

$$\int_\Omega S(Du) : D\phi \, dx = \langle f, \phi \rangle - \int_\Omega (u \cdot \nabla) \, u\phi \, dx,$$

para toda $\phi \in V^p$.

Observe que de la desigualdad de Hölder (1.4) y de la definición de S dada en el Ejemplo 2.4, se tiene

$$\int_\Omega S(Du) : D\phi \, dx \leq \|S(Du)\|_{\frac{p}{p-1}} \|D\phi\|_p, \quad \text{y} \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla) \, u\phi \, dx \leq \|u\|_{\frac{2p}{p-1}} \|\nabla u\|_p \|\phi\|_{\frac{2p}{p-1}}. \tag{3.2}$$

Por la condición (2.21), de crecimiento polinomial de S, se tiene que $S(Du) \in L^{\frac{p}{p-1}}$ y por el Teorema 1.4, $V^p \subset L^{\frac{np}{n-p}}$. Además, $L^{\frac{np}{n-p}} \subset L^{\frac{2p}{p-1}}$ si y solo si $p \geq \frac{3n}{n+2}$, con lo cual los productos en el lado derecho de (3.1) y (3.2) son finitos.

De acuerdo con lo anterior, se analizará la existencia de soluciones débiles en el sentido de la Definición 3.1 para $p \geq \frac{3n}{n+2}$. El siguiente resultado de existencia fue demostrado en 1969 por Lions en [11] basándose principalmente en la teoría de operadores monótonos.

Teorema 3.2. *Si $p \geq \frac{3n}{n+2}$, entonces el sistema (2.32) tiene solución débil $u \in V^P$ en el sentido de la Definición 3.1.*

Demostración. Considere $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$ una sucesión de funciones cuyo generado lineal es denso en V^p. La idea es usar el Método de Galerkin el cual consiste en construir una sucesión de funciones u_m de la forma

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k, \tag{3.3}$$

tal que

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi_k \, dx + \int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\, u_m \phi_k \, dx = \langle f, \phi_k \rangle, \tag{3.4}$$

con $k = 1, \cdots, m$.

Lema 3.3. *(Construcción de soluciones aproximadas)*
Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una función u_m de la forma (3.3) que satisface (3.4).

Demostración. Se define la aplicación no lineal continua $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, cuya k-ésima componente viene dada por

$$\beta(\alpha)_k = \int_\Omega S(Du_m) : D\phi_k \, dx + \int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\, u_m \phi_k \, dx - \langle f, \phi_k \rangle. \tag{3.5}$$

Note que $\beta(\alpha) \cdot \alpha \geq 0$ si y solo si

$$\int_\Omega S(Du_m) : Du_m \, dx + \int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\, u_m u_m \, dx - \langle f, u_m \rangle \geq 0.$$

Como $\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\, u_m u_m \, dx = 0$ por Lema 2.9, entonces $\beta(\alpha) \cdot \alpha \geq 0$ si y solo si

$$\int_\Omega S(Du_m) : Du_m \, dx - \langle f, u_m \rangle \geq 0.$$

Usando la condición de coercividad (2.15) y aplicando las desigualdades de Poincaré, Korn y Young se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega S(Du_m) : Du_m \, dx - \langle f, u_m \rangle &\geq \int_\Omega c_1(|Du_m|^p - 1) \, dx - \|f\|_{-1,p'} \|u_m\|_{1,p} \\ &\geq c_1 \|Du_m\|_p^p - c_1|\Omega| - c_k \|f\|_{-1,p'} \|Du_m\|_p \\ &\geq c_1 \|Du_m\|_p^p - c_1|\Omega| - \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} - \frac{\varepsilon}{p} \|Du_m\|_p^p \\ &\geq \left(c_1 - \frac{\varepsilon}{p} \right) \|Du_m\|_p^p - \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} - c_1|\Omega|.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < pc_1$, por ejemplo $\varepsilon = \frac{pc_1}{2}$, se deduce que $\beta(\alpha) \cdot \alpha \geq 0$, si

$$\|Du_m\|_p^p \geq 2|\Omega| + \left(\frac{2}{pc_1} \right)^{p'} \frac{pc_k^{p'}}{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} = C. \tag{3.6}$$

Considerando $\delta \geq C^{1/p}$ y haciendo uso del Corolario 1.13, se tiene que existe $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $|\alpha| \leq \delta$ y $\beta(\alpha) = 0$. $\square$

Note que las soluciones aproximadas u_m satisfacen

$$\int_\Omega S(Du_m) : Du_m \, dx = \langle f, u_m \rangle. \tag{3.7}$$

Así, haciendo uso de la condición de coercividad (2.15) y utilizando nuevamente las desigualdades de Poincaré, Korn y Young, se obtiene que

$$\begin{aligned}c_1 \|Du_m\|_p^p \leq \int_\Omega S(Du_m) : Du_m \, dx + c_1|\Omega| = \langle f, u_m \rangle + c_1|\Omega| &\leq c_k \|f\|_{-1,p'} \|Du_m\|_p + c_1|\Omega| \\ \leq \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} + \frac{\varepsilon}{p} \|Du_m\|_p^p + c_1|\Omega|.\end{aligned}$$

Tomando ε suficientemente pequeño tal que $\frac{\varepsilon}{p} < c_1$; por ejemplo, $\varepsilon = \frac{pc_1}{2}$, se concluye que, independiente de $m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_m\|_{V^p} = \|\nabla u_m\|_p \leq c_k \|Du_m\|_p \leq C^{1/p}, \tag{3.8}$$

donde $C = 2|\Omega| + \left(\frac{2}{pc_1} \right)^{p'} \frac{pc_k^{p'}}{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'}$. Por consiguiente, existen $u \in V^p$ y una subsucesión de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que se continuará denotando por $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } V^p, \tag{3.9}$$

$$Du_m \rightharpoonup Du \quad \text{débilmente en } L^p, \tag{3.10}$$

$$u_m \to u \quad \text{fuertemente en } L^r, \text{ para todo } r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right). \tag{3.11}$$

La última convergencia se debe a la inmersión compacta $V^p \hookrightarrow\hookrightarrow L^r$, para todo $r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$. Resta probar que u es una solución débil del problema (2.32). Esto es consecuencia del siguiente lema.

Lema 3.4. *Considere una sucesión de funciones $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $u \in V^p$ verificando (3.9)-(3.11). Entonces se cumple para toda $\phi \in V^p$*

$$\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi\ dx \to \int_\Omega (u \cdot \nabla)\ u\phi\ dx, \quad y \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi\ dx \to \int_\Omega S(Du) : D\phi\ dx. \tag{3.13}$$

Demostración. Aplicando el Lema 2.9, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi\ dx &= -\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ \phi\ u_m\ dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\ D_i\phi_j\ dx.\end{aligned}$$

Además, por las convergencias (3.9) y (3.11), se puede afirmar que

$$u_{mi}^2 \to u_i^2 \quad \text{fuertemente en } L^s, \text{ para todo } s \in \left[1, \frac{np}{2n-2p}\right). \tag{3.14}$$

Haciendo uso del Teorema 1.4 y de la inclusión $L^{\frac{np}{n-p}} \subset L^{\frac{2p}{p-1}}$ si y solo si $p \geq \frac{3n}{n+2}$ se tiene que

$$\int_\Omega u_{mi}u_{mj}\ D_i\phi_j\ dx \to \int_\Omega u_iu_j\ D_i\phi_j\ dx. \tag{3.15}$$

Por tanto, usando (3.15) y aplicando nuevamente el Lema 2.9 se obtiene (3.12).

Ahora, observe que gracias a la condición de crecimiento polinomial (2.21) y a la acotación uniforme (3.8), $\{S(Du_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada uniformemente en $L^{\frac{p}{p-1}}$, por lo tanto, existe una subsucesión de $\{S(Du_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$, que se continuará denotando por $\{S(Du_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\xi \in L^{\frac{p}{p-1}}$ tal que

$$S(Du_m) \rightharpoonup \xi \text{ débilmente en } L^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.16}$$

De modo que,

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi \; dx \to \int_\Omega \xi : D\phi \; dx, \quad \forall \phi \in V^p. \tag{3.17}$$

Además, de la condición de monoticidad (2.22), se tiene

$$\int_\Omega (S(Du_m) - S(Dw)) : (Du_m - Dw) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p,$$

es decir, para toda $w \in V^p$ se verifica que

$$\int_\Omega \left(S(Du_m) : Du_m - S(Du_m) : Dw - S(Dw) : (Du_m) + S(Dw) : Dw\right) \; dx \geq 0.$$

Usando la convergencia (3.17), se obtiene

$$\int_\Omega \left(\xi : Du_m - \xi : Dw - S(Dw) : (Du_m) + S(Dw) : Dw\right) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p.$$

Adicionalmente, utilizando las convergencias (3.9) y (3.10) se llega a

$$\int_\Omega \left(\xi : Du - \xi : Dw - S(Dw) : (Du - Dw)\right) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega (\xi - S(Dw)) : (Du - Dw) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p. \tag{3.18}$$

Fijando cualquier $v \in V^p$ y considerando $w = u - \lambda v$, con $\lambda > 0$, entonces

$$\int_\Omega (\xi - S(Du - \lambda Dv)) : Dv \; dx \geq 0. \tag{3.19}$$

Note que, si $\lambda \to 0$, aplicando el Teorema 1.1, se concluye que

$$\int_\Omega (\xi - S(Du)) : Dv \; dx \geq 0, \quad \forall v \in V^p. \tag{3.20}$$

Reemplazando v por $-v$, se deduce que

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi \; dx \to \int_\Omega S(Du) : D\phi \; dx, \quad \forall \phi \in V^p.$$

Por tanto, $u \in V^p$ es una solución débil de (2.32). Esto concluye la demostración del Teorema 3.2. $\square$

Observe que en la Definición 3.1, la presión π desaparece; sin embargo, como es usual se recupera usando el siguiente resultado, consecuencia del denominado Lema de De Rham.

Lema 3.5. *[1, p.115] Sean Ω un dominio acotado Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ y $F \in W^{-1,p'}$. Entonces $\langle F, \phi \rangle = 0$ para toda $\phi \in V^p$, si y solo si existe $\pi \in L^{p'}$ tal que $F = \nabla \pi$. Además, existe una contante positiva c independiente de f tal que*

$$\|\pi\|_{p'/\mathbb{R}} \leq c\|f\|_{-1,p'}.$$

Para aplicar el Lema 3.5 al problema (2.32) se define $F : V^p \to \mathbb{R}$ por

$$\langle F, \phi \rangle = \int_\Omega S(Du) : D\phi \, dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) \, u\phi \, dx - \langle f, \phi \rangle. \tag{3.21}$$

Note que $F \in (V^p)'$. Además $\langle F, \phi \rangle = 0$ para toda $\phi \in V^p$ puesto que $u \in V^p$ es una solución débil de (2.32).Por el Lema 3.5, existe $\pi \in L^{p'}$ tal que $F = \nabla \pi$; de esta manera, existen $(u, \pi) \in V^p \times L^{p'}$ que satisfacen la primera ecuación del sistema (2.32) en el sentido de las distribuciones, es decir,

$$\int_\Omega S(Du) : D\phi \, dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) \, u\phi \, dx - \int_\Omega \pi \mathrm{div}\phi \, dx = \langle f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Obsérvese que del Teorema 3.2 se tiene que existe solución débil del problema (2.32) en el caso bidimensional y tridimensional para valores de $p \geq 1{,}5$ y $p \geq 1{,}8$, respectivamente. Cabe preguntarse si estos rangos pueden ampliarse. La respuesta es afirmativa, gracias a los aportes de varios autores, entre ellos, Frehse, Málek y Steinhauer, como se verá en la Sección 3.3.

3.2. Algunos resultados de unicidad

Garantizada la existencia de solución débil del sistema (2.32) para $p \geq \frac{3n}{n+2}$, es natural preguntarse acerca de la unicidad de solución. A continuación, se mostrarán dos resultados de unicidad basados en las ideas de [2]. Para esto, se requiere que el campo de fuerzas externo dado tenga una mayor regularidad.

Teorema 3.6. *Sea $p \geq 2, f \in L^2$, y suponga que $u, v \in V^p$ son soluciones débiles de (2.32). Si $\frac{\|f\|_2}{\nu^2} < \frac{4}{C_k^4}$, donde C_k denota el producto de la constante de la desigualdad de Korn c_k por una constante c que depende de n, p y Ω, entonces $u = v$.*

Demostración. Por hipótesis, las funciones $u, v \in V^p$ satisfacen

$$\int_\Omega S(Du) : D\phi \; dx = \int_\Omega f\phi \; dx - \int_\Omega (u \cdot \nabla) \; u\phi \; dx, \;\; \forall \phi \in V^p, \tag{3.22}$$

$$\int_\Omega S(Dv) : D\phi \; dx = \int_\Omega f\phi \; dx - \int_\Omega (v \cdot \nabla) \; v\phi \; dx, \;\; \forall \phi \in V^p. \tag{3.23}$$

Restando (3.23) de (3.22) y tomando $\phi = u - v$, se tiene que

$$\int_\Omega (S(Du) - S(Dv)) : (Du - Dv) \; dx = -\int_\Omega ((u \cdot \nabla) \; u - (v \cdot \nabla)v)(u - v) \; dx. \tag{3.24}$$

Por otra parte, para $p \geq 2$ se satisface

$$\int_\Omega (S(Du) - S(Dv)) : (Du - Dv) \; dx \geq 2\nu \|D(u - v)\|_2^2. \tag{3.25}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2\nu\|Du\|_2^2 \leq \int_\Omega S(Du) : Du \; dx &= \int_\Omega fu \; dx - \int_\Omega (u \cdot \nabla) \; uu \; dx \\ &= \int_\Omega fu \; dx \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq C_k \|f\|_2 \|Du\|_2, \end{aligned}$$

donde C_k es el producto de la constante de la desigualdad de Korn por una constante c que depende de n, p y Ω. Por lo tanto,

$$\|Du\|_2 \leq \frac{C_k \|f\|_2}{2\nu}. \tag{3.26}$$

Además, por las desigualdades de Hölder, Poincare, Korn, y por (3.26) se tiene que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega ((u \cdot \nabla) \; u - (v \cdot \nabla)v)(u - v) \; dx &= -\int_\Omega ((u - v) \cdot \nabla) \; u(u - v) \; dx \\ &\leq \|u - v\|_4^2 \|\nabla u\|_2 \\ &\leq C_k^3 \|D(u - v)\|_2^2 \|Du\|_2 \\ &\leq \frac{C_k^4 \|f\|_2}{2\nu} \|D(u - v)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Entonces, de (3.24), (3.25) y (3.27), se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\nu\|D(u - v)\|_2^2 &\leq \int_\Omega (S(Du) - S(Dv)) : (Du - Dv) \; dx \\ &= -\int_\Omega ((u \cdot \nabla) \; u - (v \cdot \nabla)v)(u - v) \; dx \\ &\leq \frac{C_k^4 \|f\|_2}{2\nu} \|D(u - v)\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(2\nu - \frac{C_k^4\|f\|_2}{2\nu}\right)\|D(u-v)\|_2^2 \leq 0. \tag{3.28}$$

Observe que si $\frac{\|f\|_2}{\nu^2} < \frac{4}{C_k^4}$, entonces $\|D(u-v)\|_2^2 = 0$, lo cual implica que $D(u-v) = 0$. Como $u = 0$ y $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u = v$. $\square$

Teorema 3.7. *Sean $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2, f \in L^r$, con $r > n$, y suponga que $u, v \in V^p$, son soluciones débiles de (2.32), con $u \in W^{2,p}$. Si*

$$\frac{C_k^3}{2(p-1)}\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}} + 2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'} + 2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\frac{\|f\|_r}{\nu^2} < 1,$$

donde C_k denota el producto de la constante de la desigualdad de Korn c_k por una constante c que depende de n, p y Ω; entonces $u = v$.

Demostración. Por la condición de coercividad de S dada en (2.15), se sabe que

$$\begin{aligned} c_1\|Dv\|_p^p &\leq \int_\Omega S(Dv) : Dv\ dx + c_1|\Omega| \\ &= \int_\Omega fv\ dx + c_1|\Omega| \\ &\leq \|f\|_r\|v\|_{r'} + c_1|\Omega| \\ &\leq c\|f\|_r\|v\|_{V^p} + c_1|\Omega|. \end{aligned}$$

Usando las desigualdades de Korn y de Young, se tiene que

$$\|Dv\|_p^p \leq \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'}\left(\frac{C_k}{c_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'} + \frac{\varepsilon}{p}\|Dv\|_p^p + |\Omega|,$$

donde C_k es el producto de la constante de la desigualdad de Korn por una constante c que depende de n, p y Ω. Entonces,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right)\|Dv\|_p^p \leq \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'}\left(\frac{C_k}{c_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'} + |\Omega|.$$

Por lo tanto, tomando $\varepsilon = \frac{p}{2}$, se tiene que

$$\|Dv\|_p^p \leq \frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'} + 2|\Omega|. \tag{3.29}$$

Ahora, considere $w_1,\ w_2 \in V^p$ soluciones débiles de (2.32). Analizando por casos se tiene que

Caso $S = S_1$: Por (2.24), se sabe que

$$(S(Dw_1) - S(Dw_2)) : (Dw_1 - Dw_2) \geq 2\nu(p-1)|Dw_1 - Dw_2|^2(|Dw_1| + |Dw_2|)^{p-2}. \tag{3.30}$$

Entonces,

$$|Dw_1 - Dw_2|^2 \leq \frac{1}{2\nu(p-1)}(S(Dw_1) - S(Dw_2)) : (Dw_1 - Dw_2)(|Dw_1| + |Dw_2|)^{2-p}. \tag{3.31}$$

Integrando, usando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que $p < 2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|D(w_1 - w_2)\|_p^2 &\leq \frac{1}{2\nu(p-1)} \int_\Omega (S(Dw_1) - S(Dw_2)) : (Dw_1 - Dw_2)(|Dw_1| + |Dw_2|)^{2-p} \\ &\leq \frac{1}{2\nu(p-1)} \|(S(Dw_1) - S(Dw_2)) : (Dw_1 - Dw_2)\|_1 \left(\|Dw_1\|_p^{2-p} + \|Dw_2\|_p^{2-p}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2\nu(p-1) & \frac{\|D(w_1 - w_2)\|_p^2}{\left(\|Dw_1\|_p^{2-p} + \|Dw_2\|_p^{2-p}\right)} \\ &\leq \int_\Omega |(S(Dw_1) - S(Dw_2)) : (Dw_1 - Dw_2)| \\ &\leq \int_\Omega |((w_1 - w_2) \cdot \nabla)\ w_1(w_1 - w_2)|\ dx \\ &\leq \|w_1 - w_2\|_{2p'}^2 \|\nabla w_1\|_p \\ &\leq c^2 c_k^3 \|D(w_1 - w_2)\|_p^2 \|Dw_1\|_p. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Entonces, aplicando (3.29) en (3.33), se tiene que

$$\begin{aligned} 2\nu(p-1)\|D(w_1 - w_2)\|_p^2 &\leq c^2 c_k^3 \left(\|Dw_1\|_p^{2-p} + \|Dw_2\|_p^{2-p}\right) \|D(w_1 - w_2)\|_p^2 \|Dw_1\|_p \\ &\leq 2c^2 c_k^3 \left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'} \|f\|_r^{p'} + 2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}} \|D(w_1 - w_2)\|_p^2 \|Dw_1\|_p. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Si u es una solución débil de (2.32), con $u \in V^{2,p} := V^p \cap W^{2,p}$, entonces existe una constante positiva $c = c(n, p, \Omega)$ tal que

$$\|u\|_{2,p} \leq \frac{c\|f\|_r}{\nu}. \tag{3.35}$$

Ahora, considerando u, v soluciones débiles de (2.32), con $u \in V^{2,p}$, de (3.34) y (3.35), se obtiene que

$$\begin{aligned}\|D(u-v)\|_p^2 &\leq \frac{c^2 c_k^3}{p-1}\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\|D(u-v)\|_p^2\frac{\|Du\|_p}{\nu}\\ &\leq \frac{C_k^3}{p-1}\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\|D(u-v)\|_p^2\frac{\|f\|_r}{\nu^2}. \qquad (3.36)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(1-\frac{C_k^3}{p-1}\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\frac{\|f\|_r}{\nu^2}\right)\|D(u-v)\|_p^2 \leq 0. \qquad (3.37)$$

Note que que si

$$\frac{C_k^3}{p-1}\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\frac{\|f\|_r}{\nu^2} < 1,$$

entonces $\|D(u-v)\|_p^2 = 0$, lo cual implica que $D(u-v) = 0$. Dado que $u = 0$ y $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u = v$.

Caso $S = S_2$: Por (2.28), se tiene que

$$(S(Dw_1)-S(Dw_2)) : (Dw_1-Dw_2) \geq 2\nu(p-1)|Dw_1-Dw_2|^2(1+|Dw_1|+|Dw_2|)^{p-2}. \qquad (3.38)$$

Entonces,

$$|Dw_1-Dw_2|^2 \leq \frac{1}{2\nu(p-1)}(S(Dw_1)-S(Dw_2)) : (Dw_1-Dw_2)(1+|Dw_1|+|Dw_2|)^{2-p}. \qquad (3.39)$$

Integrando y aplicando la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$\begin{aligned}&\|D(w_1-w_2)\|_p^2\\ &\leq \frac{1}{2\nu(p-1)}\int_\Omega (S(Dw_1)-S(Dw_2)) : (Dw_1-Dw_2)(1+|Dw_1|+|Dw_2|)^{2-p}\\ &\leq \frac{1}{2\nu(p-1)}\|(S(Dw_1)-S(Dw_2)) : (Dw_1-Dw_2)\|_1\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+\|Dw_1\|_p^{2-p}+\|Dw_2\|_p^{2-p}\right). \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
2\nu(p-1)&\frac{\|D(w_1-w_2)\|_p^2}{\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+\|Dw_1\|_p^{2-p}+\|Dw_2\|_p^{2-p}\right)}\\
&\leq \int_\Omega |(S(Dw_1)-S(Dw_2)):(Dw_1-Dw_2)|\\
&\leq \int_\Omega |((w_1-w_2)\cdot\nabla)\ w_1(w_1-w_2)|\ dx\\
&\leq \|w_1-w_2\|_{2p'}^2\|\nabla w_1\|_p\\
&\leq c^2c_k^3\|D(w_1-w_2)\|_p^2\|Dw_1\|_p.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Usando (3.29) en (3.41), se concluye que

$$\begin{aligned}
&2\nu(p-1)\|D(w_1-w_2)\|_p^2\\
&\quad\leq c^2c_k^3\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+\|Dw_1\|_p^{2-p}+\|Dw_2\|_p^{2-p}\right)\|D(w_1-w_2)\|_p^2\|Dw_1\|_p\\
&\quad\leq c^2c_k^3\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\|D(w_1-w_2)\|_p^2\|Dw_1\|_p.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Si u es una solución débil de (2.32), con $u\in V^{2,p}:=V^p\cap W^{2,p}$, entonces existe una constante positiva $c=c(n,p,\Omega)$ tal que

$$\|u\|_{2,p}\leq\frac{c\|f\|_r}{\nu}. \tag{3.43}$$

Sean u,v soluciones débiles de (2.32), con $u\in V^{2,p}$, de (3.42) y (3.43), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|D(u-v)\|_p^2\\
&\quad\leq\frac{c^2c_k^3}{2(p-1)}\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\|D(u-v)\|_p^2\frac{\|Du\|_p}{\nu}\\
&\quad\leq\frac{C_k^3}{2(p-1)}\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\|D(v-u)\|_p^2\frac{\|f\|_r}{\nu^2}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por lo tanto,

$$\left(1-\frac{C_k^3}{2(p-1)}\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\frac{\|f\|_r}{\nu^2}\right)\|D(u-v)\|_p^2\leq 0. \tag{3.45}$$

Note que que si

$$\frac{C_k^3}{2(p-1)}\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+2\left(\frac{p'}{p}\left(\frac{2C_k}{pc_1}\right)^{p'}\|f\|_r^{p'}+2|\Omega|\right)^{\frac{2-p}{p}}\right)\frac{\|f\|_r}{\nu^2}<1,$$

se concluye que $\|D(u-v)\|_p^2=0$, de esta manera se tiene que $D(u-v)=0$. Como $u=0$ y $v=0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u=v$.

Caso $S=S_3$: Por (2.30) se sabe que

$$(S(Dw_1)-S(Dw_2)):(Dw_1-Dw_2)\geq 2\nu(p-1)|Dw_1-Dw_2|^2(1+(|Dw_1|+|Dw_2|)^2)^{\frac{p-2}{2}}. \tag{3.46}$$

Entonces,

$$|Dw_1-Dw_2|^2\leq\frac{1}{2\nu(p-1)}(S(Dw_1)-S(Dw_2)):(Dw_1-Dw_2)(1+(|Dw_1|+|Dw_2|)^2)^{\frac{2-p}{2}}. \tag{3.47}$$

Integrando y usando la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$\begin{aligned}&\|D(w_1-w_2)\|_p^2\\&\leq\frac{1}{2\nu(p-1)}\int_\Omega(S(Dw_1)-S(Dw_2)):(Dw_1-Dw_2)(1+(|Dw_1|+|Dw_2|)^2)^{\frac{2-p}{2}}\\&\leq\frac{1}{2\nu(p-1)}\|(S(Dw_1)-S(Dw_2)):(Dw_1-Dw_2)\|_1\left(|\Omega|^{\frac{2-p}{p}}+\|Dw_1\|_p^{2-p}+\|Dw_2\|_p^{2-p}\right).\end{aligned} \tag{3.48}$$

Observe que (3.48) corresponde a (3.40). Por lo tanto, el resultado se sigue como en el Caso $S=S_2$. □

3.3. Solución débil para $p\geq\frac{2n}{n+1}$

En esta sección se probará la existencia de solución débil al sistema (2.32) para $p\geq\frac{2n}{n+1}$; para ello, haremos uso del Método de Truncación L^∞, basados en las ideas desarrolladas en [8]. En esta prueba consideramos $\frac{2n}{n+1}\leq p<\frac{3n}{n+2}$, dado que en el Teorema 3.2 se demostró la existencia de solución débil para $p\geq\frac{3n}{n+2}$. Con el fin de ampliar el rango de valores de p, para los cuales existe solución débil al sistema, es necesario considerar una reformulación débil del sistema (2.32).

Definición 3.8. *Dada $f\in W^{-1,p'}$, se dice que $u\in V^p$ es solución débil del sistema (2.32) si para toda $\phi\in\mathcal{D}_{div}(\Omega)$*

$$\int_\Omega S(Du):D\phi\;dx=\langle f,\phi\rangle-\int_\Omega(u\cdot\nabla)\;u\phi\;dx.$$

Teniendo en cuenta la definición de S dada en el Ejemplo 2.4, y aplicando la desigualdad de Hölder (1.4) se observa que

$$\int_\Omega S(Du) : D\phi \; dx \le \|S(Du)\|_{\frac{p}{p-1}} \|D\phi\|_\infty, \quad \text{y} \tag{3.49}$$

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla) \; u\phi \; dx \le \|u\|_{\frac{p}{p-1}} \|\nabla u\|_p \|\phi\|_\infty. \tag{3.50}$$

Debido a la condición de crecimiento polinomial de S dada en (2.21), se tiene que $S(Du) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, dado que $V^p \subset L^{\frac{np}{n-p}}$ por el Teorema (1.4), y $L^{\frac{np}{n-p}} \subset L^{\frac{p}{p-1}}$ si y solo si $p \ge \frac{2n}{n+1}$, se obtiene que los productos en el lado derecho de (3.49) y (3.50) son finitos.

Note que la diferencia en las Definiciones 3.1 y 3.8 radica en la restricción del campo de las funciones test ϕ de V^p a $\mathcal{D}(\Omega)$, lo cual posibilita ampliar el rango de los valores de p para los cuales existe solución débil al sistema (2.32).

Teorema 3.9. *Si $p \ge \frac{2n}{n+1}$, entonces el sistema (2.32) tiene solución débil $u \in V^p$ en el sentido de la Definición 3.8.*

Debido a que la regularidad de u es menor que la correspondiente al caso $p \ge \frac{3n}{n+2}$, se considerará, en primer lugar, una familia de problemas aproximados los cuales permitirán hallar una familia de funciones $u^\delta \in V^p \cap L^q$, con $q \ge 2p'$, cuyo límite cuando δ tienda a cero, arrojará una solución débil de (2.32) en el sentido de la Definición 3.8, lo cual se probará más adelante.

Sean $\delta > 0$, $p > 1$ y $q \ge \frac{2p}{p-1} = 2p'$. Considere la siguiente familia de problemas aproximados: Hallar (u^δ, π^δ) que solucionan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{cases} -\text{div } (S(Du^\delta)) + (u^\delta \cdot \nabla) u^\delta + \delta |u^\delta|^{q-2} u^\delta + \nabla \pi^\delta & = f \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } u^\delta & = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u^\delta & = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.51}$$

Se dirá que $u^\delta \in V^p \cap L^q$ es solución débil de (3.51) si

$$\int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \; dx + \int_\Omega (u^\delta \cdot \nabla) \; u^\delta \phi \; dx + \delta \int_\Omega |u^\delta|^{q-2} u^\delta \phi \; dx = \langle f, \phi \rangle, \tag{3.52}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$.

Lema 3.10. *Sean $p > \frac{2n}{n+2}$, $q \ge \frac{2p}{p-1} = 2p'$ y $f \in W^{-1,p'}$. Entonces el sistema (3.51) tiene solución débil $u^\delta \in V^p \cap L^q$ en el sentido de (3.52).*

Demostración. Sea $\{\phi_j^\delta\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$ un conjunto numerable de funciones cuyo generado lineal es denso en V^p. Se pretende aplicar el método de Galerkin construyendo una sucesión de funciones u_m^δ de la forma

$$u_m^\delta = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}\phi_j^\delta, \tag{3.53}$$

que verifica, para cada $j = 1, \cdots, m$, la siguiente ecuación integral

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi_j^\delta \; dx + \int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta \phi_j^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta \phi_j^\delta \; dx = \langle f, \phi_j^\delta \rangle. \tag{3.54}$$

Para esto, de manera análoga a la demostración del Lema 3.3, se define la aplicación no lineal continua $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, cuya j-ésima componente viene dada por

$$\beta(\alpha)_j = \int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi_j^\delta \; dx + \int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta \phi_j^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta \phi_j^\delta \; dx - \langle f, \phi_j^\delta \rangle.$$

Se observa que $\beta(\alpha) \cdot \alpha \geq 0$, si y solo si,

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : Du_m^\delta \; dx + \int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta u_m^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta u_m^\delta \; dx - \langle f, u_m^\delta \rangle \geq 0,$$

por el Lema 2.9, se tiene que $\int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta u_m^\delta \; dx = 0$, luego $\beta(\alpha) \cdot \alpha \geq 0$ si y solo si

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : Du_m^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta u_m^\delta \; dx - \langle f, u_m^\delta \rangle \geq 0.$$

Aplicando las desigualdades de Poincaré, Korn y Young, junto con la condición de coercividad (2.15), se observa que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S(Du_m^\delta) : Du_m^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^q \; dx - \langle f, u_m^\delta \rangle \\
&\quad \geq \int_\Omega c_1(|Du_m^\delta|^p - 1) \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^q \; dx - \|f\|_{-1,p'} \|u_m^\delta\|_{1,p} \\
&\quad \geq c_1 \|Du_m^\delta\|_p^p - c_1|\Omega| + \delta \|u_m^\delta\|_q^q - c_k \|f\|_{-1,p'} \|Du_m^\delta\|_p \\
&\quad \geq c_1 \|Du_m^\delta\|_p^p - c_1|\Omega| - \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} - \frac{\varepsilon}{p} \|Du_m^\delta\|_p^p + \delta \|u_m^\delta\|_q^q \\
&\quad \geq (c_1 - \frac{\varepsilon}{p}) \|Du_m^\delta\|_p^p - \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} - c_1|\Omega|.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < pc_1$, por ejemplo $\varepsilon = \frac{pc_1}{2}$, se tiene que

$$\|Du_m^\delta\|_p^p \geq 2|\Omega| + \left(\frac{2}{pc_1}\right)^{p'} \frac{pc_k^{p'}}{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} = C, \tag{3.55}$$

y así $\beta(\alpha)\cdot\alpha \geq 0$. Considerando $\delta \geq C^{1/p}$ y aplicando el Corolario 1.13, se garantiza que existe $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $|\alpha| \leq \delta$ y $\beta(\alpha) = 0$.

Adicionalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} c_1\|Du_m^\delta\|_p^p &\leq \int_\Omega S(Du_m^\delta) : Du_m^\delta \; dx + \delta \int_\Omega |u_m^\delta|^q \; dx + c_1|\Omega| \\ &= \langle f, u_m^\delta \rangle \leq c_k \|f\|_{-1,p'} \|Du_m^\delta\|_p + c_1|\Omega| \\ &\leq \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'} c_k^{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'} + \frac{\varepsilon}{p}\|Du_m^\delta\|_p^p + c_1|\Omega|. \end{aligned}$$

Considerando un ε suficientemente pequeño de tal manera que $\frac{\varepsilon}{p} < c_1$, por ejemplo $\varepsilon = \frac{pc_1}{2}$, se obtiene que

$$\|u_m^\delta\|_{V^p \cap L^q} \leq \|u_m^\delta\|_{V^p} = \|\nabla u_m^\delta\|_p \leq c_k \|Du_m^\delta\|_p \leq C^{1/p}, \tag{3.56}$$

donde $C = 2|\Omega| + \left(\dfrac{2}{pc_1}\right)^{p'} \frac{pc_k^{p'}}{p'} \|f\|_{-1,p'}^{p'}$.

Esta acotación uniforme de la norma de u_m^δ en el espacio $V^p \cap L^q$ garantiza la existencia de una subsucesión de $\{u_m^\delta\}_{m\in\mathbb{N}}$, que por simplicidad también se denotará $\{u_m^\delta\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $u^\delta \in V^p \cap L^q$ tal que

$$u_m^\delta \rightharpoonup u^\delta \quad \text{débilmente en } V^p \cap L^q, \tag{3.57}$$

$$Du_m^\delta \rightharpoonup Du^\delta \quad \text{débilmente en } L^p, \tag{3.58}$$

$$u_m^\delta \to u^\delta \quad \text{fuertemente en } L^r, \text{ para todo } r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right). \tag{3.59}$$

Note que la última convergencia se tiene gracias a la inmersión compacta $V^p \hookrightarrow\hookrightarrow L^r$, para todo $r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$.

Ahora se probará que u^δ es una solución débil del problema (3.51). Para ésto, se demostrarán las siguientes convergencias:

$$\int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta \phi \; dx \to \int_\Omega (u^\delta \cdot \nabla)\; u^\delta \phi \; dx, \tag{3.60}$$

$$\int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta \phi \; dx \to \int_\Omega |u^\delta|^{q-2} u^\delta \phi \; dx, \tag{3.61}$$

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi \; dx \to \int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \; dx, \tag{3.62}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$.

Observe que aplicando el Lema 2.9, se tiene

$$\int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; u_m^\delta \phi \; dx = -\int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla)\; \phi \; u_m^\delta \; dx$$
$$= -\sum_{i,j}^{n} \int_\Omega u_{mi}^\delta \; u_{mj}^\delta D_i \phi_j \; dx.$$

Teniendo en cuenta la inmersión compacta $V^p \hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ para $p > \frac{2n}{n+2}$, y la convergencia (3.57), se tiene que

$$u_{mi}^\delta \to u_i^\delta \quad \text{fuertemente en } L^2, \tag{3.63}$$

luego

$$(u_{mi}^\delta)^2 \to (u_i^\delta)^2 \quad \text{fuertemente en } L^1. \tag{3.64}$$

Utilizando (3.64) y el Lema 2.9 se llega a (3.60).

Para probar la convergencia (3.61) se define el operador $T : L^q \to L^{q'}$ como $\langle T(w), \phi \rangle = \int_\Omega |w|^{q-2} w \phi \; dx$. Note que $\{T(u_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada uniformemente en $L^{q'}$, luego existe $\xi \in L^{q'}$ y una subsucesión de $\{T(u_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$ que se seguirá denotando por $\{T(u_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$T(u_m^\delta) \rightharpoonup \xi \text{ débilmente en } L^{q'}, \tag{3.65}$$

esto es,

$$\int_\Omega T(u_m^\delta)\phi \; dx \to \int_\Omega \xi\phi \; dx, \quad \forall \phi \in L^q. \tag{3.66}$$

Adicionalmente, utilizando la siguiente desigualdad para $r > 2$ se tiene que existe $c > 0$ tal que

$$(T(v) - T(w)) \cdot (v - w) = \left(|v|^{r-2} v - |w|^{r-2} w\right) \cdot (v - w) \geq c|v - w|^2, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \tag{3.67}$$

probando así que T es monótono y por tanto se satisface la desigualdad

$$\int_\Omega T(u_m^\delta) u_m^\delta \; dx - \int_\Omega T(u_m^\delta) w \; dx - \int_\Omega T(w)(u_m^\delta - w) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in L^q.$$

Así, teniendo en cuenta la convergencia (3.66), se observa que

$$\int_\Omega \xi u_m^\delta \; dx - \int_\Omega \xi w \; dx - \int_\Omega T(w)(u_m^\delta - w) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in L^q.$$

Aplicando la convergencias (3.57) y (3.58), y agrupando convenientemente se obtiene que

$$\int_\Omega (\xi - T(w)) \cdot (u^\delta - w) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in L^q. \tag{3.68}$$

Fijando cualquier $v \in L^q$ y considerando $w = u^\delta - \lambda v$, con $\lambda > 0$ se tiene

$$\int_\Omega (\xi - T(u^\delta - \lambda v)) v \; dx \geq 0. \tag{3.69}$$

Observe que usando el Teorema 1.1 se llega a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_\Omega T(u^\delta - \lambda v))v \; dx = \int_\Omega T(u^\delta)v \; dx.$$

Por consiguiente,

$$\int_\Omega (\xi - T(u^\delta))v \; dx \geq 0 \quad \forall v \in L^q. \tag{3.70}$$

Reemplazando v por $-v$, se deduce la igualdad. De esta manera,

$$\int_\Omega |u_m^\delta|^{q-2} u_m^\delta \phi \; dx \to \int_\Omega |u^\delta|^{q-2} u^\delta \phi \; dx.$$

Resta probar

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi \; dx \to \int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \; dx.$$

Observe que gracias a la condición de crecimiento polinomial (2.21) y a la acotación uniforme (3.56), $\{S(Du_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada uniformemente en $L^{\frac{p}{p-1}}$, luego existe una subsucesión de $\{S(Du_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$, que se continuará denotando por $\{S(Du_m^\delta)\}_{m\in\mathbb{N}}$, y $\chi \in L^{\frac{p}{p-1}}$ tal que

$$S(Du_m^\delta) \rightharpoonup \chi \text{ débilmente en } L^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.71}$$

De modo que,

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi \; dx \to \int_\Omega \chi : D\phi \; dx, \quad \forall \phi \in V^p. \tag{3.72}$$

Por otra parte, de la condición de monotonicidad (2.22) se tiene

$$\int_\Omega (S(Du_m^\delta) - S(Dw)) : (Du_m^\delta - Dw) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p,$$

esto es para toda $w \in V^p$ se satisface

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : Du_m^\delta \; dx - \int_\Omega S(Du_m^\delta) : Dw \; dx - \int_\Omega S(Dw) : (Du_m^\delta - Dw) \; dx \geq 0.$$

Aplicando la convergencia (3.72) se tiene que

$$\int_\Omega \chi : Du_m^\delta \; sx - \int_\Omega \chi : Dw \; dx - \int_\Omega S(Dw) : (Du_m^\delta - Dw) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p.$$

Utilizando las convergencias (3.57), (3.58) y agrupando debidamente se cumple que

$$\int_\Omega (\chi - S(Dw)) : (Du^\delta - Dw) \; dx \geq 0 \quad \forall w \in V^p. \tag{3.73}$$

Fijando cualquier $v \in V^p \cap L^q$ y tomando $w = u - \lambda v$, con $\lambda > 0$, se llega a

$$\int_\Omega (\chi - S(Du^\delta - \lambda Dv)) : Dv \, dx \geq 0. \tag{3.74}$$

Aplicando el Teorema 1.1 se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_\Omega S(Du^\delta - \lambda Dv)) : Dv \, dx = \int_\Omega S(Du^\delta) : Dv \, dx.$$

Por consiguiente,

$$\int_\Omega (\chi - S(Du^\delta)) : Dv \, dx \geq 0, \quad \forall v \in V^p. \tag{3.75}$$

Sustituyendo v por $-v$, se llega a la igualdad y así se concluye que

$$\int_\Omega S(Du_m^\delta) : D\phi \, dx \to \int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \, dx, \quad \forall \phi \in V^p.$$

Por lo tanto, $u^\delta \in V^p \cap L^q$ es una solución débil de (3.51). $\square$

Además, note que existe una constante $K = K(\|f\|_{-1,p'})$ tal que

$$\|Du^\delta\|_p^p + \|\nabla u^\delta\|_p^p + \delta \|u^\delta\|_q^q \leq K, \tag{3.76}$$

y por tanto, gracias a la condición de crecimiento polinomial de S dada en (2.21), y usando la desigualdad de Young, se tiene que

$$\|S(Du^\delta)\|_{p'} \leq c_2 \|1 + |Du^\delta|\|_p^{p-1} \leq \frac{c_2^p}{p} + \frac{\|1 + |Du^\delta|\|_p^p}{p'} \leq K. \tag{3.77}$$

Note que el Lema 3.10 es válido considerando las funciones test ϕ de (3.52) en el espacio $V^p \cap L^\infty$, específicamente, se satisface la convergencia del término convectivo (3.60), puesto que

$$u_{mi}^\delta \to u_i^\delta \quad \text{fuertemente en } L^{2p'},$$

luego

$$(u_{mi}^\delta)^2 \to (u_i^\delta)^2 \quad \text{fuertemente en } L^{p'},$$

de esta manera y aplicando el Lema 2.9, se tiene

$$\int_\Omega (u_m^\delta \cdot \nabla) \, u_m^\delta \phi \, dx \to \int_\Omega (u^\delta \cdot \nabla) \, u^\delta \phi \, dx, \ \forall \phi \in V^p \cap L^\infty.$$

Ahora, de manera análoga a la sección anterior, se procederá a recuperar la presión, haciendo uso del Lema 3.5. Se define el funcional $F^\delta : W_0^{1,p} \cap L^s \to \mathbb{R}$, con $q \leq s < \infty$, por

$$\langle F^\delta, \phi \rangle = \int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \, dx + \int_\Omega (u^\delta \cdot \nabla) \, u^\delta \phi \, dx + \delta \int_\Omega |u^\delta|^{q-2} u^\delta \phi \, dx - \langle f, \phi \rangle. \tag{3.78}$$

Observe que aplicando las desigualdades de Hölder y de Young, junto con (3.76) y (3.77), se obtienen las siguientes acotaciones

$$\left|\int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \; dx\right| \leq \|S(Du^\delta)\|_{p'}\|D\phi\|_p \leq K\|D\phi\|_p, \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\left|\delta\int_\Omega |u^\delta|^{q-2}u^\delta\phi \; dx\right| &\leq \delta\|(u^\delta)^{q-1}\|_{q'}\|\phi\|_q \\ &\leq \delta\left(\|u^\delta\|_q^{q-1}\|\phi\|_s\right) \\ &\leq \delta\left(\frac{1}{q'}\|u^\delta\|_q^q + \frac{1}{q}\|\phi\|_s^q\right) \\ &\leq K + \delta\frac{1}{q}\|\phi\|_s^q. \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (u^\delta\cdot\nabla)\; u^\delta\phi \; dx\right| &\leq \|u^\delta\|_q\|\nabla u^\delta\|_p\|\phi\|_{\frac{pq}{pq-p-q}} \\ &\leq \|u^\delta\|_q\|\nabla u^\delta\|_p\|\phi\|_q \qquad (3.81)\\ &\leq \left(\frac{1}{q}\|u^\delta\|_q^q + \frac{1}{q'}\|\nabla u^\delta\|_p^{q'}\right)\|\phi\|_s \\ &\leq \left(\frac{K}{\delta}\frac{1}{q} + \frac{1}{q'}K\right)\|\phi\|_s. \qquad (3.82)\end{aligned}$$

Observe que (3.81) se tiene, puesto que $L^q \subset L^{\frac{pq}{pq-p-q}}$ cuando $q \geq 2p'$.
Luego $F^\delta \in (W_0^{1,p}\cap L^s)'$ y por (3.79), (3.80) y particularmente (3.82) se tiene

$$\|F^\delta\|_{(W_0^{1,p}\cap L^s)'} = \sup_{\|\phi\|\leq 1}|\langle F^\delta,\phi\rangle| \leq C(\delta).$$

No obstante, si se considera $r > n$ se tiene que $W_0^{1,r} \subset W_0^{1,p}\cap L^\infty \subset W_0^{1,p}\cap L^s$, y así se obtiene la siguiente cota uniforme

$$\|F^\delta\|_{(W_0^{1,r})'} \leq K. \tag{3.83}$$

Adicionalmente, por el Lema 3.10 $\langle F^\delta,\phi\rangle = 0$ para toda $\phi\in\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$. Aplicando el Lema 3.5, se concluye que existe $\pi^\delta\in L^{r'}$ tal que $F^\delta = \nabla\pi^\delta$ y se verifica que

$$\|\pi^\delta\|_{r'} \leq c\|\nabla\pi^\delta\|_{(W_0^{1,r})'} = c\|F^\delta\|_{(W_0^{1,r})'} \leq K. \tag{3.84}$$

De esta manera existen $(u^\delta,\pi^\delta)\in W_0^{1,p}\times L^{r'}$ que satisfacen la primera ecuación del sistema (3.51) en el siguiente sentido

$$\int_\Omega S(Du^\delta) : D\phi \; dx + \int_\Omega (u^\delta\cdot\nabla)\; u^\delta\phi \; dx + \delta\int_\Omega |u^\delta|^{q-2}u^\delta\phi \; dx - \int_\Omega \pi^\delta \text{div}\phi \; dx = \langle f,\phi\rangle,$$

para toda $\phi\in W_0^{1,p}\cap L^\infty$, con $\text{div}\phi\in L^r, r>n$.

<u>Demostración del Teorema 3.9</u>
Por (3.76), existe $u \in V^p$ y una sucesión $\{\delta_m\}$, tal que $\delta_m \to 0$ y $\{u_m\} = \{u_{\delta m}\}$ satisface:

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } V^p, \tag{3.85}$$
$$Du_m \rightharpoonup Du \quad \text{débilmente en } L^p, \tag{3.86}$$
$$u_m \to u \quad \text{fuertemente en } L^r, \text{ para todo } r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right). \tag{3.87}$$

Cabe resaltar que (3.87) se tiene debido a la inmersión compacta de $V^p \hookrightarrow\hookrightarrow L^r$ para todo $r \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$. De esta manera, también se tiene que

$$u_m \to u \quad \text{fuertemente en } L^2, \text{ para } p > \frac{2n}{n+2}. \tag{3.88}$$

Ahora se probará que $u \in V^p$ es solución débil del problema (2.32) en el sentido de la Definición 3.8. Para ello, se hará uso de los siguientes lemas:

Lema 3.11. *(Convergencia del término convectivo)*

Considere $u \in V^p$ y una sucesión de funciones $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisface (3.85)-(3.88). Entonces para toda $\phi \in \mathcal{D}_{div}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi\ dx \to \int_\Omega (u \cdot \nabla)\ u\phi\ dx. \tag{3.89}$$

Demostración. Empleando el Lema 2.9, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi\ dx &= -\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ \phi\ u_m\ dx\\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_{mi}u_{mj}\ D_i\phi_j\ dx.\end{aligned}$$

Usando la convergencia (3.88) se deduce que

$$(u_{mi})^2 \to (u_i)^2 \quad \text{fuertemente en } L^1, \tag{3.90}$$

de esta manera es válida la convergencia (3.89). □

Lema 3.12. *(Convergencia del término penalizado)*
Sean δ_m una sucesión una sucesión de números reales que converge a cero, una sucesión de funciones $\{u_m\} \subset V^p \cap L^q$ y $\phi \in \mathcal{D}_{div}(\Omega)$. Entonces

$$\delta_m \int_\Omega |u_m|^{q-2}u_m\phi\ dx \to 0. \tag{3.91}$$

Demostración. Usando la desigualdad de Hölder y $V^p \cap L^q \subset V^p \subset L^{\frac{np}{n-p}}$ se tiene

$$\begin{aligned}|\delta_m \int_\Omega |u_m|^{q-2} u_m \phi \, dx| &\le c\delta_m \|u_m\|^{q-1}_{\frac{np}{(n-p)(q-1)}} \|\phi\|_{\frac{np}{np-(n-p)(q-1)}} \\ &\le \delta_m \left(c\|u_m\|^{q-1}_{\frac{np}{(n-p)(q-1)}} \|\phi\|_\infty \right). \qquad (3.92)\end{aligned}$$

Claramente, en (3.92) la norma $\|u_m\|^{q-1}_{\frac{np}{(n-p)(q-1)}}$ es acotada, y como δ_m converge a cero, se tiene (3.91). $\square$

Solo resta probar la convergencia en el tensor; para esto es necesario realizar primero la prueba de un lema auxiliar en donde se evidenciará el uso del Método de Truncación L^∞, el cual, en términos generales, consiste en construir una clase especial de funciones test acotadas permitiendo hacer un proceso especial de paso al límite. Debido a la extensión de la prueba, por tal razón ella se dividirá en varios pasos.

Lema 3.13. *(Convergencia sobre compactos)*
Sea Ω_0 un subconjunto compacto de Ω. Suponga que $p \ge \frac{2n}{n+1}$ y u_m y u satisfacen las convergencias (3.85)-(3.88). Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $L_0 > 0$ se satisface, cuando $m \to \infty$, la siguiente desigualdad

$$\int_{\Omega_0 \setminus M} (S(Du_m) - S(Du)) : (Du_m - Du) \, dx \le c(\varepsilon + L_0) + o(1) + c\|f\|_{-1,p'}(\varepsilon + L_0 K), \quad (3.93)$$

donde M es un conjunto abierto de medida de Lebesgue arbitrariamente pequeña, $o(1)$ representa una cantidad que tiende a cero cuando $m \to \infty$, y K es la constante dada por (3.76).

Demostración.

Paso 1. (*Construcción de conjuntos especiales con medida de Lebesgue pequeña.*)
Considerando $\varepsilon > 0$, $0 < L_0 < 1$ arbitrarios, se mostrará que existe $0 < L \le L_0$, independiente de m, y conjuntos

$$E_m = \{x \in \Omega : L^2 \le |(u_m - u)(x)| < L\},$$

tales que

$$\int_{E_m} (|\nabla u_m| + |\nabla u|)^p + (1 + |S(Du_m)|) (|Du_m| + |Du|) \, dx \le \varepsilon. \qquad (3.94)$$

Desarrollo. Considere $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $N > K$, y los conjuntos

$$E_m^i := \{x \in \Omega : L_i^2 \le |(u_m - u)(x)| < L_i\},$$

donde $L_i = L_{i-1}^2$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Observe que, fijando m, los conjuntos E_m^i son disjuntos dos a dos; además, por (3.76) y (3.77) se llega a que:

$$\sum_{i=1}^N \int_{E_m^i} (|\nabla u_m| + |\nabla u|)^p + (1 + |S(Du_m)|) (|Du_m| + |Du|) \, dx \le K,$$

lo cual indica que existe un índice i_0 tal que

$$\int_{E_m^{i_0}} (|\nabla u_m| + |\nabla u|)^p + (1 + |S(Du_m)|)\,(|Du_m| + |Du|)\;\; dx \leq \varepsilon. \tag{3.95}$$

Claramente, el índice i_0 varía si se cambia el m, pero como el conjunto de donde se están tomando estos índices es finito, entonces se tiene que existe una subsucesión de $\{u_m\}$, que se seguirá denotando por $\{u_m\}$, tal que i_0 no varía y por consiguiente $L = L_{i_0}$ es el mismo para toda m; así que $E_m = E_m^{i_0}$ satisface (3.94).

<u>*Paso 2.*</u> (*Construcción de una función test especial* ϕ_m.)

Desarrollo. Considere

$$\psi_m = (u_m - u)\left(1 - \text{mín}\left(\frac{|(u_m - u)(x)|}{L}, 1\right)\right), \tag{3.96}$$

esto es,

$$\psi_m = \begin{cases} (u_m - u)\left(1 - \dfrac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) & \text{en} \quad \Omega_L^m \\ \\ 0 & \text{en} \quad \Omega \setminus \Omega_L^m, \end{cases} \tag{3.97}$$

donde $\Omega_L^m := \{x \in \Omega : |(u_m - u)(x)| < L\}$.

Note que $\psi_m \in W_0^{1,p} \cap L^\infty$ y

$$\begin{aligned} \|\psi_m\|_\infty &= \text{ínf}\{c : |\psi_m(x)| \leq c, \;\text{c.t.p } x \in \Omega\} \\ &\leq \text{ínf}\{c : |\psi_m(x)| \leq c, \;\text{c.t.p } x \in \Omega_L^m\} \\ &\leq (u_m - u)\left(1 - \frac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) \leq L. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Vitali (Teorema 1.2), se tiene que

$$\|\psi_m\|_s \to 0 \text{ cuando } m \to \infty, \quad s \in (1, \infty) \tag{3.98}$$

Adicionalmente, sobre Ω_L^m se llega a que

$$\begin{aligned} |\text{div } \psi_m| &= \left|\text{div }\left[(u_m - u)\left(1 - \frac{|u_m - u|}{L}\right)\right]\right| \\ &= \left|\text{div }(u_m - u) - \text{div }\left[(u_m - u)\cdot\frac{|u_m - u|}{L}\right]\right| \\ &= \left|0 - \left[\text{div }(u_m - u)\cdot\frac{|u_m - u|}{L} + (u_m - u)\cdot\frac{\nabla|u_m - u|}{L}\right]\right| \\ &= \frac{|u_m - u|}{L}|\nabla|u_m - u||, \end{aligned} \tag{3.99}$$

Entonces, haciendo uso de (3.99), (3.94), (3.76), junto con la siguiente propiedad

$$\|\nabla u_m\|_p = \|\nabla|u_m|\|_p,$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\|\text{div } \psi_m\|_p &= \left(\int_{\Omega_L^m} |\text{div } \psi_m|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{E_m} |\text{div } \psi_m|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_L^m \setminus E_m} |\text{div } \psi_m|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon + KL. \qquad (3.100)
\end{aligned}$$

Ahora, considere la solución del siguiente problema elíptico auxiliar

$$\begin{cases} \Delta z_m & = \text{div } \psi_m \quad \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n} & = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (3.101)$$

Note que para cada m, existe solo una solución $z_m \in W^{1,2}$ tal que su media se anula sobre toda componente conexa de Ω. Además, dado que $\psi_m \in L^\infty$ se tiene que div$\psi_m \in W^{-1,\infty}$; así, por la teoría de regularidad elíptica se tiene que $z_m \in W^{1,\infty}$, y por (3.98) y (3.100) se verifica

$$\|\nabla z_m\|_s \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty, s \in (1, \infty), \qquad (3.102)$$

$$\|\nabla^{(2)} z_m\|_p \leq c\|\text{div}\psi_m\|_p \leq c(\varepsilon + KL). \qquad (3.103)$$

Aplicando la teoría de regularidad de Campanato al problema (3.101), y teniendo en cuenta la definición del Espacio de Campanato $\mathcal{L}^{2,n} = \mathcal{L}^{2,n}(\Omega)$, junto con sus propiedades dadas en la Sección 1.4, se obtiene que

$$\begin{aligned}
[\nabla z_m]_{\mathcal{L}^{2,n}_{\text{loc}}} &\leq c(\|z_m\|_2 + [\psi_m]_{\mathcal{L}^{2,n}}) \\
&\leq c(\|\nabla z_m\|_2 + [\psi_m]_{\mathcal{L}^{2,n}}) \\
&\leq c[\psi_m]_{\mathcal{L}^{2,n}} + o(1) \\
&\leq c\|\psi_m\|_\infty + o(1) \\
&\leq cL + o(1). \qquad (3.104)
\end{aligned}$$

Considerando $\tau \in \mathcal{D}(\Omega)$ una función que verifica $\tau = 1$ en Ω_0, $0 < \tau \leq 1$ y $|\nabla\tau| \leq c$, donde c es una constante que depende de n y de la distancia de Ω_0 desde $\partial\Omega$, se define la función test ϕ_m, conveniente para la Definición (3.8).

$$\phi_m = (\psi_m - \nabla z_m)\tau. \qquad (3.105)$$

Note que $\phi_m \in W_0^{1,p} \cap \mathcal{L}^{2,n} \cap L^s$ para $s \in (1, \infty)$ y observe que

$$\|\phi_m\|_s = \|(\psi_m - \nabla z_m)\tau\|_s \leq \|\psi_m - \nabla z_m\|_s \leq \|\psi_m\|_s + \|\nabla z_m\|_s,$$

luego por (3.98) y (3.102), se tiene que

$$\|\phi_m\|_s \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty, s \in (1, \infty). \qquad (3.106)$$

Además,

$$\|\phi_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}} = \|(\psi_m - \nabla z_m)\tau\|_{\mathcal{L}^{2,n}} \leq \|\psi_m - \nabla z_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}} \leq \|\nabla z_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}},$$

y por (3.104) se llega a que

$$\|\phi_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}} \leq cL + o(1). \tag{3.107}$$

Adicionalmente,

$$\mathrm{div}\phi_m = (\mathrm{div}\psi_m - \triangle z_m)\tau + (\psi_m - \nabla z_m)\nabla\tau = (\psi_m - \nabla z_m)\nabla\tau,$$

luego

$$\|\mathrm{div}\phi_m\|_s = \|(\psi_m - \nabla z_m)\nabla\tau\|_s \leq c\|\psi_m - \nabla z_m\|_s,$$

de aquí se obtiene que

$$\|\mathrm{div}\phi_m\|_s \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty, s \in (1, \infty). \tag{3.108}$$

<u>*Paso 3.*</u> Sustituyendo ϕ por ϕ_m en la siguiente igualdad

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi\ dx + \int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi\ dx + \delta_m \int_\Omega |u_m|^{q-2}u_m\phi\ dx - \int_\Omega \pi_m \mathrm{div}\phi\ dx = \langle f, \phi\rangle,$$

la cual corresponde a la formulación débil equivalente a (3.52) y analizando cada término por separado se tiene que $\int_\Omega \pi_m \mathrm{div}\phi_m\ dx \leq \|\pi_m\|_{r'}\|\mathrm{div}\phi_m\|_r$. Así, por (3.84) y (3.108)

$$\int_\Omega \pi_m \mathrm{div}\phi_m\ dx \to 0 \qquad \text{cuando } m \to \infty. \tag{3.109}$$

Además, $\delta_m \int_\Omega |u_m|^{q-2}u_m\phi_m\ dx \leq \delta_m\|u_m\|_q^{q-1}\|\phi_m\|_q$, y teniendo en cuenta (3.76) y (3.106), también se tiene que

$$\delta_m \int_\Omega |u_m|^{q-2}u_m\phi_m\ dx \to 0 \qquad \text{cuando } m \to \infty. \tag{3.110}$$

Ahora se va a analizar el término convectivo. Note que de las propiedades de los Espacios $\mathcal{H}^1$, BMO y $\mathcal{L}^{2,n}$ mencionados en la Sección 1.4, de (3.76) y (3.107), se deduce para $p \geq \frac{2n}{n+1}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_m \cdot \nabla)\ u_m\phi_m\ dx &\leq \|(u_m \cdot \nabla)\ u_m\|_{\mathcal{H}^1}\|\phi_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}}\\ &\leq \|u\|_{p'}\|\nabla u\|_p\|\phi_m\|_{\mathcal{L}^{2,n}}\\ &\leq cKL + o(1).\end{aligned} \tag{3.111}$$

Continuando con las estimativas, se muestra que

$$\begin{aligned}|\langle f, \phi_m\rangle| &= |\langle f, (\psi_m - \nabla z_m)\tau\rangle|\\ &\leq |\langle f, (u_m - u)\tau\rangle| + |\langle f, (u_m - u)\,\mathrm{mín}(\frac{|u_m - u|}{L}, 1)\tau\rangle| + |\langle f, (\nabla z_m)\tau\rangle|.\\ &\leq o(1) + c\|f\|_{-1,p'}(\varepsilon + LK)\end{aligned} \tag{3.112}$$

Por último, observe que el término que involucra al tensor se puede descomponer en tres integrales, a saber,

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\psi_m \tau \; dx - \int_\Omega S(Du_m) : D(\nabla z_m)\tau \; dx + \int_\Omega S(Du_m) : (\psi_m - \nabla z_m) D\tau \; dx. \tag{3.113}$$

Ahora, note que de (3.77) y (3.103) se tiene

$$\left| \int_\Omega S(Du_m) : D(\nabla z_m)\tau \; dx \right| \leq \|S(Du_m)\|_{p'} \|D(\nabla z_m)\tau\|_p \leq cK(KL + \varepsilon), \tag{3.114}$$

además,

$$\int_\Omega S(Du_m) : (\psi_m - \nabla z_m) D\tau \; dx = o(1). \tag{3.115}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la formulación equivalente a (3.52) junto con (3.109)-(3.115) se concluye que

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\psi_m \tau \; dx \leq C(L + \varepsilon) + o(1) + c\|f\|_{-1,p'}(\varepsilon + LK). \tag{3.116}$$

Por otra parte, considere la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S(Du_m) : D\psi_m \tau \; dx = \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : D\psi_m \tau \; dx \\
&= \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : D(u_m - u) \left(1 - \frac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) \tau \; dx \\
&\quad + \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : (u_m - u) D \left(1 - \frac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) \tau \; dx \\
&= \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : (Du_m - Du) \left(1 - \frac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) \tau \; dx \\
&\quad + \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : \frac{(u_m - u)}{L} D(|(u_m - u)(x)|)\tau \; dx \\
&= \int_{\Omega_L^m} (S(Du_m) - S(Du)) : (Du_m - Du)\tau \; dx \\
&\quad + \int_{\Omega_L^m} S(Du) : (Du_m - Du)\tau \; dx \\
&\quad - \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : (Du_m - Du) \left(\frac{|(u_m - u)(x)|}{L}\right) \tau \; dx \\
&\quad + \int_{\Omega_L^m} S(Du_m) : \frac{(u_m - u)}{L} D(|(u_m - u)(x)|)\tau \; dx \\
&\equiv I_1 + I_2 - I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Por (3.86) se tiene que

$$I_2 = \int_{\Omega_L^m} S(Du) : (Du_m - Du)\tau \; dx \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty. \tag{3.117}$$

Adicionalmente, de la definición de los conjuntos E_m y la propiedad (3.94) se observa que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{E_m} S(Du_m) : (Du_m - Du) \left(\frac{|(u_m - u)(x)|}{L} \right) \tau \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_L^m \setminus E_m} S(Du_m) : (Du_m - Du) \left(\frac{|(u_m - u)(x)|}{L} \right) \tau \, dx \\ &\leq \varepsilon + LK, \end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{E_m} S(Du_m) : \frac{(u_m - u)}{L} D(|(u_m - u)(x)|) \tau \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_L^m \setminus E_m} S(Du_m) : \frac{(u_m - u)}{L} D(|(u_m - u)(x)|) \tau \, dx \\ &\leq \varepsilon + LK, \end{aligned} \tag{3.119}$$

entonces, por (3.116)-(3.119), se concluye que

$$I_1 = \int_{\Omega_L^m} (S(Du_m) - S(Du)) : (Du_m - Du) \tau \, dx \leq C(L + \varepsilon) + o(1) + c\|f\|_{-1,p'}(\varepsilon + LK). \tag{3.120}$$

Para terminar, haciendo

$$M = \bigcup_{m=m_0+1}^{\infty} \Omega \setminus \Omega_m^L, \text{ con } |\Omega \setminus \Omega_m^L| < 2^{-m}, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

se concluye la prueba de este lema. □

Lema 3.14. *(Convergencia del tensor) Sean $u \in V^p$ y una sucesión de funciones $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que verifica (3.85)-(3.88). Entonces para toda $\phi \in \mathcal{D}_{div}(\Omega)$, se tiene*

$$\int_\Omega S(Du_m) : D\phi \, dx \to \int_\Omega S(Du) : D\phi \, dx. \tag{3.121}$$

Demostración. Por el Lema 3.13 se concluye que

$$Du_m \to Du \quad \text{c.t.p. sobre compactos de } \Omega, \tag{3.122}$$

entonces, haciendo uso del proceso de diagonalización, se tiene que existe una subsucesión de $\{u_m\}$, que por comodidad se seguirá denotando por $\{u_m\}$, la cual verifica

$$Du_m \to Du \quad \text{c.t.p. de } \Omega, \tag{3.123}$$

obteniendo así, por el Teorema de Vitali (Teorema 1.2), la convergencia (3.121). □

Con esto se da por terminada la prueba del Teorema 3.9, el cual garantiza la existencia de solución débil del problema (2.32) para un rango de valores de p más amplio, a saber, $p \geq 1.\overline{3}$ y $p \geq 1{,}5$, en el caso bidimensional y tridimensional respectivamente.

Conclusiones

- ⋄ Se estudió el problema estacionario del modelo generalizado de Navier-Stokes para fluidos incompresibles no newtonianos con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas.
- ⋄ Se probó existencia de solución débil al problema para $p \geq \frac{3n}{n+2}$, es decir, para valores de p mayores o iguales a $1,5$ en el caso bidimensional y $1,8$ en el caso tridimensional, basados en la Teoría de operadores monótonos.
- ⋄ Se probó existencia de solución débil al problema para $\frac{2n}{n+1} \leq p < \frac{3n}{n+2}$, utilizando el método de truncación L^∞, el cual consiste en restringir el espacio de las funciones test a funciones acotadas, con base en el artículo [8].
- ⋄ Se presentó una breve deducción del modelo matemático que describe la dinámica de fluidos incompresibles viscosos. Se estudiaron las propiedades que satisfacen los tensores extra de esfuerzo que satisfacen la *Ley de potencia*.

Bibliografía

[1] Ch. Amrouche, V. Girault, *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 44 (1994), No. 1, 109-140.

[2] N. Arada, *A note on the regularity of flows with shear-dependent viscosity*, Nonlinear Analysis 75 (2012) 5401-5415.

[3] R. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, 2014.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, S.A., Madrid, 1984.

[5] A. Chorin, J. Marsden, *A mathematical introduction to Fluid Mechanics*, 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1992.

[6] E. Dibennedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] L. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society. USA, 1998.

[8] J. Frehse, J. Málek, M. Steinhauer, *An existence result for fluids with shear dependent viscosity-steady flows*, Nonlinear Analysis TMA 30 (1997) 3041-3049.

[9] G. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I. Linearized Steady problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, 38. Springer-Verlag, New York, 1994.

[10] M. Giaquinta, L. Martinazzi, *An introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs*, Scuola Normale Superiore Pisa, seconda edizione, 2012.

[11] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, París 1969.

[12] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta y M. Růžička, *Weak and Measure-valued solutions to Evolutionary PDEs*, Aplied Mathematics and Mathematical Computations 13, Chapman y Hall, Londres, 1996.

[13] R. Temam, *Navier Stokes Equations Theory and Numerical Analysis*, American Mathematical Society, New York, 1977.

[14] S. Toscano Melo, F. Moura Neto, *Mecânica dos fluidos e Equações Diferenciais*, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática.