EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARABÓLICO HOMOGÉNEO CON Y SIN CONDICIONES EN LA FRONTERA

SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARABÓLICO HOMOGÉNEO CON Y SIN CONDICIONES EN LA FRONTERA

SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN

Monografía presentada para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
JULIO CÉSAR CARRILLO ESCOBAR, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

RESUMEN

TÍTULO: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARABÓLICO HOMOGÉNEO CON Y SIN CONDICIONES EN LA FRONTERA[*]

AUTOR: SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN[**]

PALABRAS CLAVES: Ecuación de calor unidimensional, Problema parabólico homogéneo con valores iniciales, Transformada de Fourier.

DESCRIPCIÓN:
Muchos problemas físicos surgen, o son propuestos, en el campo de la ingeniería, pero son las matemáticas las encargadas de dar el sustento teórico para tratarlos. Por ejemplo, el problema físico de encontrar la función que determine la temperatura de un cuerpo, en un lugar x y en un tiempo t dado y que solo experimenta flujo de calor en una sola dirección, se resume en encontrar la solución $u(x,t)$ del problema parabólico de valor inicial

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{array}$$

en donde f es una función continua o continua a trozos conocida. También nos interesa determinar la solución del problema de valor inicial y con especificación de la temperatura en la frontera,

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty,\ t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ (CF) & u(0,t) = g(t), & t > 0, \end{array}$$

en donde f y g son funciones continuas o continuas a trozos conocidas. Aquí se busca analizar bajo que condiciones se tiene la existencia y unicidad de soluciones para éstos problemas, para ello se establecerá inicialmente un Teorema de existencia de soluciones para los dos problemas antes mencionados, donde además, se muestre la manera de construir dichas soluciones, finalmente se enunciará y se demostrará un teorema de Unicidad de soluciones, y se darán a conocer algunos tipos de problemas que pueden tener más de una solución. El planteamiento anterior se desarrollará tal como lo discute Cannon [3].

---

[*] Dr. Julio César Carrillo Escobar, Director del Trabajo de Grado.

[**] Programa de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR A PARABOLIC INITIAL VALUE PROBLEM OF HOMOGENEOUS WITH AND WITHOUT CONDITIONS ON THE BOUNDARY*

AUTHOR: SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN**

KEYWORDS: One-Dimensional Heat Equation, Homogeneous Parabolic Problem with initial values, Transformer of Fourier.

DESCRIPTION:

Many physical problems arise, or are proposed in the field of engineering, but is mathematics in charge of giving the theoretical basis for treating them. For example, the physical problem of finding function to determine the temperature of a body in a place x at time t given that only experience heat flow in one direction, is summarized in finding the solution $u(x,t)$ of problem parabolic initial value

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{array}$$

Where f is a continuous or piecewise continuous known. We are also interested in determining the Solving the problem of initial value and specifying the temperature at the boundary,

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ (CF) & u(0,t) = g(t), & t > 0, \end{array}$$

where f and g are continuous or piecewise continuous known. Here attempts to analyze low conditions of the existence and uniqueness of solutions to these problems, this will establish Initially an existence theorem of solutions for the two problems mentioned above, where Furthermore, we show how to build such solutions eventually will set out and demonstrate a Uniqueness Theorem for solutions, and will be announced some types of problems that can be more than one solution. The above approach will be developed as discussed Cannon [3].

---

*Dr. Julio César Carrillo Escobar, Undergraduate Dissertation Director.

**Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

El éxito de una persona no solo depende de su genialidad, sino más bien, depende de las ganas y la disciplina que se tenga a la hora de enfrentar cualquier desafío.

PÉREZ Sergio

Agradecimientos

Al Dios topoderoso que aunque nunca lo he visto, siento que me da las fuerzas para levantarme cada mañana para seguir luchando por mis sueños.

A mi Padre Andrés Pérez Carreño, mis hermanas Diana Carolina Pérez León y Angie Vanessa Pérez León y a la mujer que mas amo sobre la tierra, mi madre Olga León Rodríguez por brindarme amor y apoyo incondicional.

A mi director de tesis de grado, Doctor Julio César Carrillo Escobar, por compartirme sus experiencias académicas y profesionales, las cuales siempre llevaré presente en mi vida. Además agradezco su esmerada colaboración.

A los profesores de la escuela de matemáticas con los que alguna vez tuve la fortuna de tener clases, porque de cada uno de ellos aprendí muchísimo, y en especial quiero destacar a los maestros José Bernardo Mayorga Rodríguez y Edilberto José Reyes a quienes admiro como matemáticos, y a los que envidio por sus estilos a la hora de enseñar.

A mi grupo V.I.P comformado por Michael Alexander Rincón Villamizar, Luis Andrés Rosso Cerón, Ana Patricia García Amado y Carlos Torres Amaya, a ellos agradezco su valiosa amistad, porque como personas siempre fueron y han sido incondicionales conmigo, a ellos les deseo lo mejor de lo mejor siempre. También quiero agradecer a mis compañeros Jhon Freddy Lancheros, Carol Díaz Aponte, entre otros, por transmitirme esa alegría y entusiasmo que los caracteriza.

Por último quiero destacar a mi amigo Darwin Díaz Mejía por ser un ejemplo de superación en la carrera, que pese a sus dificultades siempre ha mostrado coraje y ganas a la hora de alcanzar sus metas, esto de una u otra manera me ayudo a darme cuenta que aún tengo mucho más que dar para cumplir mis sueños.

Tabla de Contenido

Introducción

Muchos problemas físicos surgen, o son propuestos, en el campo de la ingeniería, pero son las matemáticas las encargadas de dar el sustento teórico para tratarlos. Por ejemplo, el problema físico de encontrar la función que determine la temperatura de un cuerpo, en un lugar x y en un tiempo t dado y que solo experimenta flujo de calor en una sola dirección, se resume en encontrar la solución $u(x,t)$ del problema parabólico de valor inicial

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{array}$$

en donde f es una función continua o continua a trozos conocida. También nos interesa determinar la solución del problema de valor inicial y con especificación de la temperatura en la frontera,

$$\begin{array}{rll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty,\ t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, \\ (CF) & u(0,t) = g(t), & t > 0, \end{array}$$

en donde f y g son funciones continuas o continuas a trozos conocidas. Nos interesa analizar bajo que condiciones se tiene la existencia y unicidad de soluciones para éstos problemas, tal como lo discute Cannon [3].

El primer Capítulo es titulado **preliminares**, allí se enuncian y se demuestran desigualdades interesantes y consecuencias importantes del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Más adelante se habla acerca de las **Transformadas integrales**, y se enfatiza en la importancia de las transformadas de Fourier y de Laplace, a la hora de encontrar una representación formal de una solución para cada uno de los dos problemas aquí tratados.

El segundo Capítulo es titulado **Un problema de valor inicial**, allí se estudia el primer problema anteriormente mencionado, es decir, se inicia encontrando una representación formal de una solución por medio de la transformada de Fourier, y posteriormente se analizan las propiedades de la solución hallada para luego establecer un Teorema de existencia. Finalmente se enuncia y se demuestra un teorema de Unicidad de soluciones para el mismo problema. El tercer Capítulo es titulado **Un problema de valor inicial**

con condiciones en la frontera, allí se estudia el segundo problema mencionado al inicio de la introducción, este problema es más general, porque además de tener condiones de valor inicial también posee condiciones en la frontera. La forma de estudiar este problema es similar a la llevada a cabo en el problema anterior, primero se halla una representación formal de una solución, y luego se analizan las propiedades de la solución hallada para luego establecer un Teorema de existencia. Finalmente se enuncia y se demuestra un teorema de Unicidad similar al del primer problema.

Entender los problemas que se trabajaran aquí, será de gran ayuda para aquellos estudiantes de pregrado que quieran trabajar con problemas parabólicos no homogéneos y no lineales.

Capítulo 1

Preliminares

Inicialmente veremos algunos resultados importantes del análisis de variable real y compleja, los cuales nos serán de gran utilidad a la hora de analizar bajo que condiciones se tiene la existencia y unicidad de soluciones para los problemas planteados en la introducción. En el desarrollo de cada sección utilizaremos [1], [2], [3], [4] y [5].

1.1. Algunas desigualdades

Partimos del hecho de que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ para todo para de números reales a y b. De aquí se sigue que que

$$2ab \leq a^2 + b^2 \tag{1.1}$$

para todo real a y b. Dividiendo por 2 y reemplazando a por $\sqrt{2\epsilon}\, a$ y b por $b/\sqrt{2\epsilon}$ en esta desigualdad obtenemos la desigualdad

$$ab \leq \epsilon a^2 + (4\epsilon)^{-1} b^2, \tag{1.2}$$

para todo real a, b y todo $\epsilon > 0$.
También recordamos la estimación elemental

$$e^{-x} \leq p! x^{-p} \tag{1.3}$$

la cual es válida para todo entero no negativo p y para todo $x > 0$. En efecto, como para todo $x > 0$ tenemos que

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}.$$

entonces

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \geq \frac{x^p}{p!}$$

para todo entero no negativo p. Tomando recíprocos, se llega a la desigualdad (1.3).

1.2. Sucesiones de funciones

Una sucesión de funciones (f_n) de $D \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto de funciones de valor real f_n, $n = 1, 2, \ldots$, definidas sobre un dominio común D.

Ejemplo 1.1. *La sucesión de funciones* (f_n) *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *definida como* $f_n(x) = nx$, *tiene términos* $f_1(x) = x, f_2(x) = 2x, f_3(x) = 3x, \ldots$

Definición 1.1 (Convergencia puntual de sucesiones de funciones)**.** *Decimos que la sucesión de funciones* (f_n) *de* $D \subseteq \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *converge puntualmente a la función* f *en* D *si para todo* $x \in D$ *la sucesión de números reales* $(f_n(x))$ *converge al número real* $f(x)$*; es decir, si para todo* $x \in D$ *y para cada* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ *para todo* $n \geq N$.

Ejemplo 1.2. *La sucesión de funciones* $(f_n(x))$ *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *definida como* $f_n(x) = x/n$, *converge puntualmente a la función nula para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$ *el resultado es trivial. Sea* $x \neq 0$ *un número real dado y consideremos la sucesión de números reales* (x/n)*. Sea* $\epsilon > 0$ *dado. Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos que*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n}.$$

Como $\epsilon/|x| > 0$*, la Propiedad arquimediana de los números reales garantiza que existe un* $N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{|x|}.$$

Por lo tanto, para todo $n \geq N$ *tenemos que*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| \leq \frac{|x|}{N} < \epsilon.$$

Como x *es un número real no nulo arbitrario, lo anterior demuestra la convergencia puntual de la sucesiones de funciones dada a la función nula en* $\mathbb{R}$.

La noción de convergencia uniforme, es similar a la definición de convergencia puntual, simplemente hay que quitar la dependencia que tiene N de x.

Definición 1.2 (Convergencia uniforme de sucesiones de funciones)**.** *Decimos que la sucesión de funciones* (f_n) *de* D *en* $\mathbb{R}$ *converge uniformemente a la función* f *en* D*, si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ *y para todo* $x \in D$.

Ejemplo 1.3. *Sea* $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{n}$, *entonces como* $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, *se tiene que* $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, *eso equivale a que:*

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{n}\right| \leq |1/n|. \tag{1.4}$$

de acuerdo a que el $\lim(1/n) = 0$, *se tiene que dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que* $|1/n - 0| < \epsilon$ *para todo* $n > N$, *de acuerdo a* (1.4).
Se tiene que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{n}\right| < \epsilon$, *para todo* $n > N_\epsilon$ *y para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Por lo tanto se tiene que* $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{n}$, *converge uniformemente a la función nula.*

El hecho de que una sucesión de funciones converge uniformemente a una función f, implica de inmediato la convergencia puntual de la misma, pero el recíproco no siempre se tiene. Por ejemplo, si tomamos la sucesión $f_n(x) = x/n$, sabemos que está sucesión converge puntualmente a la función nula, pero no converge uniformemente a la función nula, ya que no podemos encontrar un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que cumpla la definición de convergencia uniforme, por lo ya discutido en el Ejemplo 1.2.

1.3. Algunas aplicaciones importantes del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sería deseable que dada una sucesión de funciones integrables según Riemann, las cuales estuvieran definidas en un conjunto cerrado y acotado $[a, b]$, donde esa sucesión de funciones convergiera puntualmente a una función f, se tuviese que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Pero lastimosamente esto no siempre es cierto, por ejemplo si usamos la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida para $n \geq 2$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(ver Figura. 1.1) Claramente se puede ver que todas las funciones son continuas en $[0, 1]$; Por tanto son integrables. Ya sea mediante un cálculo directo, o bien, haciendo referencia al significado de la integral como un área, se obtiene

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \qquad \text{si } n \geq 2.$$

Ahora veamos que $f_n(x) \to 0$ para toda $x \in [0,1]$.

Si $x_0 = 0$, entonces $f_n(x_0) = 0$, para todo $n \geq 2$. Por otra parte, si $x_0 \in (0,1]$, entonces por la propiedad arquimediana existe $N_{x_0} \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{2}{N_{x_0}} < x_0$.

Si $n \geq N_{x_0}$, entonces

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{N_{x_0}} < x_0 \leq 1,$$

de acuerdo a como se definió $f_n(x)$, se concluye que $f_n(x_0) = 0$, para todo $n \geq N_{x_0}$. Lo anterior muestra que la función $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 0$. Como la función nula es integrable entonces se tiene que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Pero se llega a la incómoda situación en que:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

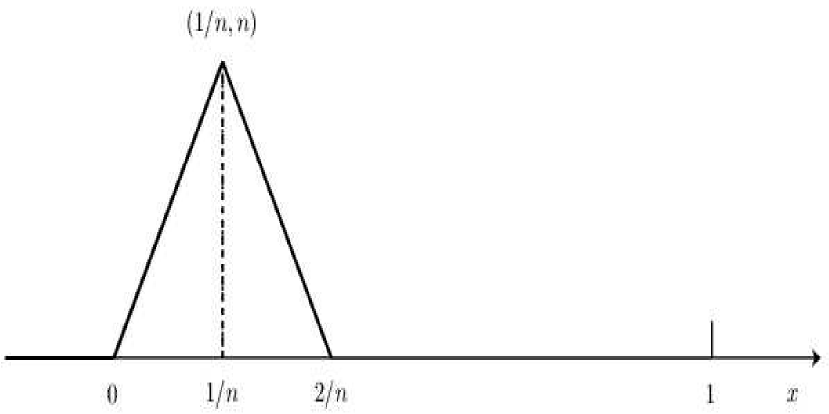

Figura 1.1

Observación 1.1. *Se puede demostrar que si cambiamos la condición de que la sucesión de funciones converge puntualmente a una función f por la condición de que ésta converge uniformemente a una función f, entonces si se cumpliría* (1.5).

Pero en muchas ocasiones necesitamos que se cumpla (1.5) para una sucesión de funciones que convergen puntualmente a una función f, para ello debemos agregar otras hipótesis al comentario que hicimos inicialmente y usar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Para obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones Riemann integrables en* $[a,b]$*, tal que* (f_n) *converge puntualmente a* f *en* $[a,b]$*. Suponga que existe una función* g *de valores positivos Riemann integrable, tal que* $|f_n(x)| < g(x)$ *para toda* $x \in [a,b]$ *y toda* $n = 1, 2, \ldots$*. Entonces la función límite* f *es Riemann integrable y además*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.6}$$

La demostración de este teorema, requiere de los siguientes teoremas.

Teorema 1.2. *Toda función Riemann integrable es Lebesgue integrable.*

La definición de función Lebesgue integrable puede ser encontrada en [1].

Teorema 1.3 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea* f_n *una sucesión de funciones Lebesgue integrable en un intervalo* I*. Supongamos que*

a) (f_n) *converge para casi todo* I *hacia una función límite* f*,*

b) Existe una función no negativa g *Lebesgue integrable tal que, para todo* $n \geq 1$ *y para todo* $x \in I$

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Entonces, la función límite f *es Lebesgue integrable, y la sucesión* $(\int_I f_n)$ *converge y*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

Observación 1.2. *Para la demostración del Teorema 1.1, usamos los dos teoremas anteriores, ya que aplicando el Teorema 1.2 , se concluye que la sucesión de funciones* (f_n) *y* g *son Lebesgue Integrable. Luego aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que* f *es Lebesgue integrable y se obtiene la igualdad* (1.6)*. Aún más, para cualquier intervalo* I *se tiene que* $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$*. Las demostraciones de estos teoremas no se presentan en este trabajo, ya que para ello se requiere definir muchas cosas y demostrar algunos otros teoremas aparte, y esa no es la finalidad de esta monografía, sino más bien usar el Teorema 1.1, para desarrollar dos problemas importantes que se necesitan en el desarrollo del trabajo. Para ver las demostraciones de los Teoremas 1.2 y 1.3 consultar páginas* 316 *y* 330 *de* [1]*.*

Teorema 1.4. *Suponga que* $F = F(x,t)$ *está definida de* $[a,b] \times [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que para cada* $t \in [\alpha,\beta]$*,* $F(x,t)$ *es una función Riemann integrable de* x*, y para cada* $x \in [a,b]$*,* $F(x,t)$ *es continua para todo* t *en* $[\alpha,\beta]$*. Suponga que, para todo* $t \in [\alpha,\beta]$*,* $|F(x,t)| \leq g(x)$ *para alguna función Riemann integrable no negativa* g*. Entonces, la función*

$$H(t) = \int_a^b F(x,t)\ dx$$

es continua en $[\alpha,\beta]$*.*

Demostración. Para $t_0 \in [\alpha, \beta]$, necesitamos mostrar que $\lim\limits_{t \to t_0} H(t) = H(t_0)$. Definamos la sucesión de funciones $(f_n(x))$ como $f_n(x) = F(x, t_n)$ en donde (t_n) es alguna sucesión en $[\alpha, \beta]$ que converge a t_0. Por otra parte, de las hipótesis del teorema se puede deducir que $f_n(x) = F(x, t_n)$ es una sucesión de funciones Riemann integrables en $[a, b]$, porque $F(x, t)$ es una función Riemann integrable de x, para cada $t \in [\alpha, \beta]$, además

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x, t_0).$$

Y $|f_n(x) = F(x, t_n)| \leq g(x)$ para alguna función Riemann integrable no negativa g, entonces aplicando el Teorema 1.1 a $f_n(x) = F(x, t_n)$, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b F(x, t_n)\ dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} F(x, t_n)\ dx = \lim_{t_n \to t_0} \int_a^b F(x, t_n)\ dx.$$

Como $F(x, t)$ es continua para todo t en $[\alpha, \beta]$, se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} F(x, t_n) = F(x, t_0)$. Haciendo $t = t_n$ se tiene que:

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b F(x, t) dx = \int_a^b F(x, t_0)\ dx = \lim_{t \to t_0} H(t) = H(t_0),$$

como se quería demostrar. $\square$

La aplicación final del Teorema 1.1, es la regla de Leibniz.

Teorema 1.5 (Derivada de la integral)**.** *Sea $F(x, t)$ una función definida en $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ tal que, para cada $t \in [\alpha, \beta]$, $F(x, t)$ es una función integrable de x, y para cada x, $(\partial F / \partial t)(x, t)$ existe y es continua. Suponga que para todo $t \in [\alpha, \beta]$,*

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$$

Para alguna función integrable no negativa g. Entonces la función $G(t) = \int_a^b F(x, t)\ dx$ es diferenciable y

$$G'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x, t)\ dx$$

Para cada $t \in [\alpha, \beta]$.

Demostración. El cociente de diferencias $h^{-1}\{F(x, t + h) - F(x, t)\}$, con $h \neq 0$, es una función integrable de x, ya que F lo es. Además, como $(\partial F / \partial t)(x, t)$ existe para cada x, aplicando el Teorema del Valor Medio para derivadas a $F(x, t)$ en el intervalo $[t, t + h]$, tenemos que existe un $\tau \in (t, t + h)$, tal que

$$\left| \frac{F(x, t + h) - F(x, t)}{h} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, \tau) \right| \leq g(x). \tag{1.7}$$

Ahora bien, como la función $(\partial F/\partial t)(x,t)$ es continua para todo $x \in [a,b]$, ella es integrable en $[a,b]$. Por lo tanto, la función $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)$ con $\tau \in [\alpha,\beta]$, cumple con todas las hipótesis del Teorema 1.4. Entonces,

$$\lim_{\tau\to t}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)\ dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\ dx. \tag{1.8}$$

Teniendo en cuenta que la función $\int_a^b F(x,t)\ dx$ es diferenciable con respecto a t y que cuando $h \to 0$, $\tau \to t$, se deduce que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_a^b F(x,t)\ dx &= \lim_{h\to 0}\frac{\{F(x,t+h)-F(x,t)\}}{h}\ dx\\
&= \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)\ dx\\
&= \lim_{\tau\to t}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)\ dx\\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nosotros podemos agregar una condición más al teorema anterior, y demostrar un teorema que nos será de gran ayuda en este trabajo.

Teorema 1.6 (Regla de Leibniz)**.** *Sea $F : E \times I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde E es un intervalo e I es un intervalo abierto. Si $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones diferenciables de I en E, entonces la función*

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x,t)\ dx$$

existe para todo $t \in I$ y es diferenciable en I, además

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x,t)\ dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\ dx + F(\beta(t),t)\beta'(t) - F(\alpha(t),t)\alpha'(t)$$

Demostración. Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
H(u,v,t) &= \int_u^v F(x,t)\ dx\\
F(t) &= (\alpha(t),\beta(t),t)\\
H(F(t)) = H(\alpha(t),\beta(t),t) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x,t)\ dx.
\end{aligned}$$

Como las funciones definidas anteriormente son diferenciables, y $H(F(t)) = G(t)$, de la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{d}{dt}(H(\alpha(t), \beta(t), t)) \\
&= \frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \beta(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}(\alpha(t), \beta(t), t)
\end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{-\partial}{\partial \alpha(t)} \int_{\beta(t)}^{\alpha(t)} F(x, t)dx \ \alpha'(t) = -F(\alpha(t), t)\alpha'(t)$$

porque en ese caso la función $\beta(t)$ permanece constante, por el hecho de que se está derivando con respecto a $\alpha(t)$. Del mismo modo se prueba que

$$\frac{\partial H}{\partial \beta(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial \beta(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x, t)dx \ \beta'(t) = F(\beta(t), t)\beta'(t).$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial H}{\partial t}(\alpha(t), \beta(t), t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t}F(x, t) \ dx$$

Lo anterior se tiene usando el Teorema 1.5, considerando $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ como constantes. Con estos resultados se concluye que

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \beta(t)}(\alpha(t), \beta(t), t)\frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial (t)}(\alpha(t), \beta(t), t) \\
&= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \ dx + F(\beta(t), t)\beta'(t) - F(\alpha(t), t)\alpha'(t)
\end{aligned}$$ $\square$

A continuación demostraremos algunos resultados importantes, los cuales nos serán de gran ayuda.
Demostración de la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ dx = \frac{\pi}{2}. \tag{1.9}$$

Sea (g_n) la sucesión de funciones definida para todo número real y de la forma

$$g_n(y) = \int_0^n e^{-xy} \ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ dx. \tag{1.10}$$

Como $|\operatorname{sen} x| \leq x$ para $x \geq 0$, al hacer el cambio de variable $t = xn$, se puede observar que $g_n(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, por el hecho de que

$$|g_n(n)| \leq \int_0^n e^{-xn} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leq \int_0^n e^{-xn}\ dx = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} e^{-t}\ dt = \frac{1}{n}(1 - e^{-n^2}) \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora aplicamos la Regla de Leibnitz para diferenciar (1.10), y después de aplicar dos veces integración por partes tenemos que

$$g_n'(y) = -\int_0^n e^{-xy} \operatorname{sen} x\ dx = \frac{e^{-ny}\ (y \operatorname{sen}(n) + \cos n) - 1}{1 + y^2},$$

lo cual es válido para todo número real y. Esto demuestra además que $g_n'(y) \to -1/(1+y^2)$, puesto que

$$|g_n'(y)| = \left| \frac{e^{-ny}(y \operatorname{sen}(n) + \cos n) - 1}{1 + y^2} \right| \leq \frac{e^{-y}\ (y+1) + 1}{1 + y^2} \quad \text{para todo } y \geq 0.$$

Por consiguiente, la sucesión de funciones (f_n) en $[0, \infty)$ definida de la forma

$$f_n(y) = \begin{cases} g_n'(y) & \text{si } 0 \leq y \leq n, \\ 0 & \text{si } y > n. \end{cases}$$

es integrable en $[0, \infty)$ (eso se puede ver por la continuidad de la función). Además, por la anterior estimación tenemos que

$$f_n(y) \leq g(y) = \frac{e^{-y}\ (y+1) + 1}{1 + y^2}.$$

Como la función $g(y) = \dfrac{e^{-y}\ (y+1) + 1}{1 + y^2}$ es continua, ella es integrable en $[0, \infty)$. Dado que la sucesión de funciones f_n converge a la función $-1/(1 + y^2)$ en $[0, \infty)$, el Teorema 1.1 implica que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(y)\ dy = -\int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = -\arctan(y)\Big|_0^\infty = -\frac{\pi}{2}. \tag{1.11}$$

Pero además tenemos que

$$\int_0^\infty f_n(y)\ dy = \int_0^n g_n'(y)\ dy = g_n(n) - g_n(0).$$

Haciendo que $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que $g_n(n) \to 0$ y usando (1.11), encontramos que $g_n(0) \to \dfrac{\pi}{2}$. Ahora bien, si $b > 0$ y si $n = [b]$, mediante (1.10) tenemos que

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx = \int_0^n \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx + \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx = g_n(0) + \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx.$$

Puesto que

$$0 \leq \left| \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx \right| \leq \int_n^b \frac{1}{n}\ dx = \frac{b-n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \ \ \textit{cuando } b \to \infty,$$

tenemos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx = \lim_{n\to\infty} \left[g_n(0) + \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx \right] = \frac{\pi}{2}.$$

Otro resultado que nos será de gran utilidad es el siguiente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\alpha(x-\ \xi)-\ \alpha^2 t)}\ d\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-\ (x-\ \xi)^2/4t}, \quad t > 0 \tag{1.12}$$

Antes de probar este resultado, debemos probar que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ cx^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad \text{para todo } c > 0. \tag{1.13}$$

Observamos que

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ cx^2}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ cy^2}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ c(x^2+y^2)}\ dx\ dy.$$

Mediante la transformación en coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $r > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos que

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ c(x^2+y^2)}\ dx\ dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\ cr^2}\ r\ d\theta\ dr = \frac{\pi}{c}.$$

Por lo tanto,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}.$$

Ahora bien debemos probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ \alpha^2 b} \cos(\alpha r)\ d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\ \ e^{-r^2/4b} \quad \text{para todo } b > 0. \tag{1.14}$$

Consideremos la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\ \alpha^2 b} \cos(\alpha r)\ d\alpha.$$

Mediante la Regla de Leibnitz 1.6, tenemos que

$$f'(r) = \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha\ e^{-\ \alpha^2 b} \operatorname{sen}(\alpha r)\ d\alpha.$$

Usando la integración por partes, considerando $u = \operatorname{sen}(\alpha r)$ y $dv = -\alpha\ e^{-\ \alpha^2 b}\ d\alpha$, obtenemos la ecuación diferencial

$$f'(r) + \frac{r}{2b} f(r) = 0,$$

la cual tiene solución

$$f(r) = c\ e^{-\ r^2/4b}.$$

Como por definición y (1.13) tenemos que $f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$, concluimos que $f(r) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\ e^{-r^2/4b}$, lo cual establece la validez de (1.14).
Para establecer completamente (1.12), debemos probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 b} \operatorname{sen}(\alpha r)\ d\alpha = 0. \tag{1.15}$$

Consideremos la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 b} \operatorname{sen}(\alpha r)\ d\alpha.$$

Utilizando el mismo razonamiento que se hizo para probar (1.14), se llega al problema de valor inicial

$$f'(r) + \frac{r}{2b} f(r) = 0, \qquad\qquad f(0) = 0,$$

el cual tiene como solución

$$f(r) = f(0) e^{-r^2/4b} = 0.$$

Esto demuestra la validez de (1.15). Ahora si nos queda fácil probar la validez de (1.12).

Primero que todo, usamos la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, para escribir la integral en (1.12) de la forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\alpha(x-\xi)-\alpha^2 t)}\ d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\ (\cos \alpha(x-\xi) + i \operatorname{sen} \alpha(x-\xi)) d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \cos \alpha(x-\xi)) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\ i \operatorname{sen} \alpha(x-\xi)\ d\alpha.
\end{aligned}$$

Mediante las fórmulas (1.13) y (1.14), y haciendo $b = t$ y $r = x - \xi$, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\ \operatorname{sen}\alpha(x-\xi)\ d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 b}\operatorname{sen}(\alpha r)\ d\alpha = 0,$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\xi)\ d\alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 b}\cos(\alpha r)\ d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi b}}\ e^{-r^2/4b} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-(x-\xi)^2/4t},\end{aligned}$$

con lo que queda establecida la validez de (1.12).
Finalmente probaremos la fórmula

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\frac{\operatorname{sen}(2\beta y)}{\beta}\ d\beta = \frac{\pi}{2}\ erf(y), \quad \text{donde } \beta \text{ y } y \text{ son variables} \tag{1.16}$$

y

$$erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-\xi^2}d\xi.$$

Consideremos la función $F(\beta, y) = e^{-\beta^2}\dfrac{\operatorname{sen}(2\beta y)}{\beta}$, la cual satisface las hipótesis del la Regla de Leibnitz, Teorema 1.6. Por ello, la derivada de la función $f(y)$ definida como

$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\frac{\operatorname{sen}(2\beta y)}{\beta}\ d\beta,$$

está dada como

$$f'(y) = 2\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\cos(2\beta y)\ d\beta.$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en (1.14), con $\alpha = \beta$, $b = 1$ y $r = 2y$, tenemos que

$$f'(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ e^{-y^2},$$

por lo cual

$$f(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \int e^{-y^2}\ dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \int_0^y e^{-\xi^2}\ d\xi,$$

con lo cual queda demostrado el resultado dado en (1.16).

1.4. Transformadas integrales

Las series de Fourier son de gran importancia a la hora de resolver problemas concernientes a la ecuación de calor cuando las condiciones en la frontera son determinadas por una función periódica con dominio finito. Cuando las condiciones en la frontera son determinadas por funciones no periódicas y de dominio infinito, como es el caso de los problemas planteados en la introducción, debemos acudir a otros métodos para solucionar dichos problemas, por esa razón veremos en esta sección el concepto de transformada integral, y nos concentraremos en especial en el estudio de las propiedades de las transformadas de Fourier y de Laplace.

Definición 1.3. *Si $f(x)$ está definida para $-\infty < x < \infty$, entonces la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(\alpha,x)dx$ se define como el límite:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(\alpha,x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)K(\alpha,x)dx.$$

Si existe el límite, se dice que la integral es convergente; en caso contrario, la integral es divergente.

Definición 1.4 (Transformadas integrales)**.** *Muchas de las funciones que aparecen en Análisis Matemático se pueden expresar por medio de integrales de Lebesgue o bien por medio de integrales de Riemann impropias de la forma*

$$I_f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(\alpha,x)dx. \tag{1.17}$$

*Una función I_f definida de esta forma (en la que α puede ser un número real o complejo) se llama **transformada integral de f**. La función $K(\alpha,x)$ que aparece en el integrando se denomina el núcleo o kernel de la transformada. Las transformadas integrales son de amplio uso tanto en Matemática pura como en Matemática aplicada. Son especialmente útiles para resolver ciertos tipos de problemas. Las transformadas más comunes son las siguientes.*

Transformada exponencial de Fourier:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx.$$

Transformada coseno de Fourier:

$$F_c(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx.$$

Transformada seno de Fourier:

$$F_s(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)\,dx.$$

Transformada de Laplace:

$$L(\alpha) = \int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x}\ dx.$$

Transformada de Mellin:

$$M(\alpha) = \int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}\ dx.$$

Puesto que $e^{-i\alpha x} = \cos(\alpha x) - i\,\mathrm{sen}(\alpha x)$*, las transformadas seno y coseno son casos particulares de la transformada exponencial de Fourier en los que la función* f *se anula en el eje real negativo. La transformada de Laplace también está relacionada con la transformada exponencial de Fourier. Si consideramos* α *como una variable compleja, por ejemplo* $\alpha = u + iv$*, en donde* u *y* v *son reales, entonces podemos escribir*

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x}\ dx = \int_0^\infty f(x)e^{-ixv}e^{-xu}\ dx = \int_0^\infty e^{-ixv}\phi_u(x)\ dx,$$

en donde $\phi_u(x) = e^{-xu}f(x)$*. Por consiguiente, la transformada de Laplace puede considerarse como un caso particular de la transformada exponencial de Fourier.*

Observación 1.3. *La función dada en* (1.17) *se designa a menudo en forma breve* $I_f = L(F)$ *o* $I_f = Lf$*, en donde* L *designa el* ***operador*** *que convierte* f *en* I_f*. Dado que la integral se halla involucrada, el operador* L *se designa con el nombre de* ***operador integral****. Es claro que* L *es también un operador lineal. Esto es,*

$$L(a_1f_1 + a_2f_2) = a_1Lf_1 + a_2Lf_2,$$

si a_1 *y* a_2 *son constantes.*

Definición 1.5 (Kernel de Fourier)**.** *Ya se dijo que la transformada integral de una función por el kernel* $K(\alpha, x)$ *es un operador lineal el cual puede ser denotado por* L*, es decir,*

$$L(f) = I_f(\alpha).$$

Si nosotros asumimos que para cada función $B(\alpha)$*, que pertenece a una cierta clase de funciones en la variable* α*, se cumple que*

$$L(f) = B(\alpha)$$

para una, y solo una, función $f(x)$*, entonces se puede ver fácilmente que existe un operador lineal* L^{-1}*, tal que es equivalente a decir*

$$L(f) = B(\alpha) \quad y \quad f(x) = L^{-1}(B).$$

Nuestro principal problema es encontrar el operador lineal inverso de L, para algunos casos especiales. Esas consideraciones son semejantes a indicar que, bajo ciertas circunstancias, es posible determinar f tal que

$$I_f(\alpha) = \int_0^\infty f(x)K(\alpha, x)dx \tag{1.18}$$

en la forma

$$f(x) = \int_0^\infty I_f(\alpha)H(\alpha, x)d\alpha. \tag{1.19}$$

Una fórmula del tipo (1.19) *expresa la función $f(x)$ en términos de su transformada integral* (1.18)*, el cual podemos llamar un* ***teorema de inversión****. En el caso especial en que la solución* (1.19) *de la ecuación* (1.18) *sea del tipo*

$$f(x) = \int_0^\infty I_f(\alpha)K(\alpha, x)d\alpha$$

esto es, la relación entre la función y su transformada integral es simétrica, cuando esto se tiene, decimos que la función $K(\alpha, x)$ es llamado un ***kernel de Fourier****. Más adelante veremos que para las transformaciones integrales de Fourier se cumple una especie de* ***teorema de inversión****, pero antes de eso se deben hacer algunas consideraciones adicionales y demostrar el Teorema Integral de Fourier.*

Definición 1.6 (Integrales de Dirichlet)**.** *Decimos que una función $f(x)$ satisface las* ***Condiciones de Dirichlet*** *en el intervalo (a, b) si*

1. *$f(x)$ tiene solo un número finito de máximos y mínimos relativos en (a, b).*

2. *$f(x)$ tiene solo un número finito de discontinuidades acotadas en (a, b).*

Se puede observar que toda función continua en (a, b) que tenga un número finito de máximos y mínimos en (a, b) satisface las condiciones de Dirichlet en (a, b). Por ejemplo la función $x/(1 + x^2)$ satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Lo contrario ocurre con la función $(1 - x)^{-1}$, ésta función no satisface las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo que contenga al punto $x = 1$, ya que la función tiene una discontinuidad no acotada. La función $\operatorname{sen}(1/x)$ no satisface las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo que incluya el origen, porque tiene un número infinito de máximos y mínimos relativos en cercanías del origen.

Teorema 1.7. *Si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en un intervalo (a, b) donde $0 \leq a \leq b$, entonces*

$$\lim_{w \to \infty} \int_a^b f(x) \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx = \begin{cases} 0 & si\ a > 0 \\ \frac{\pi}{2} f(0^+) & si\ a = 0. \end{cases}$$

Observación 1.4. *El término $f(0^+)$ es equivalente a la expresión* $\lim_{y\to 0^+} f(y)$, *donde* $y \in \mathbb{R}^+$, *y* $f(0^-)$, *es equivalente a la expresión* $\lim_{y\to 0^-} f(y)$, *en pocas palabras* $f(0^+)$ *y* $f(0^-)$ *son límites a derecha y a izquierda de* 0 *respectivamente.*

Demostración. Consideremos primero que $a > 0$.
Iniciemos tomando puntos $a_1, a_2, \ldots, a_p$ en (a, b), de tal forma que la función $f(x)$ evaluada en esos puntos tenga una discontinuidad acotada o un mínimo o máximo relativo. Si tomamos $a = a_0$ y $b = a_{p+1}$ y dividimos el intervalo (a, b) en subintervalos (a_r, a_{r+1}), entonces $f(x)$ será una función continua y monótona en cada subintervalo (a_r, a_{r+1}) $(r = 0, 1, 2, \ldots, p)$. Aplicando el Segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann (ver páginas 200 y 201 de [1]) y haciendo el cambio de variable $\zeta = wx$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx &= f(a_r^+)\int_{a_r}^{\xi}\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx + f(a_{r+1}^-)\int_{\xi}^{a_{r+1}}\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx\\ &= f(a_r^+)\int_{wa_r}^{w\xi}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + f(a_{r+1}^-)\int_{w\xi}^{wa_{r+1}}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\end{aligned}$$

donde $a_r \leq \xi \leq a_{r+1}$. De (1.9) tenemos que existe un número real M tal que si $N_1 > M$, $N_2 > M$, entonces

$$\left|\int_0^{N_1}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \left|\int_0^{N_2}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $N_2 > N_1$,

$$\left|\int_{N_1}^{N_2}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right| < \epsilon,$$

de lo cual se puede concluir que

$$\lim_{N_1\to\infty}\int_{N_1}^{N_2}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = 0. \tag{1.20}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\lim_{w\to\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}}\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx\\ &= \lim_{w\to\infty}\left(f(a_r^+)\int_{wa_r}^{w\xi}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + f(a_{r+1}^-)\int_{w\xi}^{wa_{r+1}}\frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right) = 0.\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos

$$\lim_{w\to\infty}\int_a^b\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx = \sum_{r=0}^{p}\lim_{w\to\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\,dx = 0.$$

Ahora consideremos el caso en que $a = 0$.

Inicialmente dividamos el intervalo $(0, b)$ en subintervalos (a_r, a_{r+1}) como en el caso anterior, de tal forma que a_1 sea el primer máximo o mínimo relativo o un punto de discontinuidad acotada de la función $f(x)$. Entonces la función $f(x)$ es continua y monótona en el intervalo $0 < x < a_1$, luego elegimos un número $k \in (0, a_1)$, tal que

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx = \int_0^k f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx + \int_k^b f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx = \int_0^k f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx,$$

según el caso anterior. Aplicando el segundo Teorema del valor medio para integrales de Riemann a $\int_0^k f(x)\operatorname{sen}(wx)/x\, dx$, tenemos que existe $\xi \in [0, k]$, tal que

$$\begin{aligned}\int_0^k f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx &= f(0^+)\int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx + f(k)\int_\xi^k \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx \\ &= f(0^+)\int_0^k \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx + [f(k) - f(0^+)]\int_\xi^k \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx \\ &= f(0^+)\int_0^{kw} \frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta + [f(k) - f(0^+)]\int_{\xi w}^{kw} \frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{w\to\infty}\int_0^k f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx = \lim_{w\to\infty} f(0^+)\int_0^{kw} \frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta + [f(k) - f(0^+)]\lim_{w\to\infty}\int_{\xi w}^{kw} \frac{\operatorname{sen}(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta.$$

De (1.9), y de (1.18) tenemos que

$$\lim_{w\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}\, dx = f(0^+)\frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Como un corolario tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.8. *Si $f(x+u)$ satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo $a < u < b$, entonces*

$$\lim_{w\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x+u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\, du = \begin{cases} f(x^+) + f(x^-) & si\ a < 0 < b, \\ f(x^+) & si\ a = 0 < b, \\ f(x^-) & si\ a < 0 = b, \\ 0 & si\ 0 < a < b \ \ ó\ \ a < b < 0 \end{cases}$$

Demostración. Primero consideremos el caso en que $a < b \leq 0$. Entonces

$$\int_a^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du = \int_{-b}^{-a} f(-u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du,$$

donde, por el Teorema 1.7

$$\lim_{w\to\infty}\int_{-b}^{-a} f(-u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du = \begin{cases} 0 & \text{si } -a > -b > 0 \\ \frac{\pi}{2}f(0^-) & \text{si } -a > -b = 0. \end{cases}$$

O equivalentemente,

$$\lim_{w\to\infty}\int_a^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b < 0, \\ \frac{\pi}{2}f(0^-) & \text{si } a < b = 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Ahora, sea $a < 0 < b$. De nuevo tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du &= \int_a^0 f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du + \int_0^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du \\ &= \int_0^{-a} f(-u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du + \int_0^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}\,du\end{aligned}$$

De nuevo por el Teorema 1.7, se concluye

$$\lim_{w\to\infty}\int_0^{-a} f(-u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}du = \frac{\pi}{2}f(0^-)$$

y

$$\lim_{w\to\infty}\int_0^b f(u)\frac{\operatorname{sen}(wu)}{u}du = \frac{\pi}{2}f(0^+).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{w\to\infty}\int_a^b f(u)\operatorname{sen}(wu)\frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}[f(0^-) + f(0^+)]. \tag{1.22}$$

El teorema se sigue de (1.21), (1.22) y del Teorema 1.7 al sustituir $f(x+u)$ por $f(u)$ □

Teorema 1.9 (Teorema Integral de Fourier)**.** *Si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet para $-\infty < x < \infty$ y si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente, entonces*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)d\eta = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

Demostración. Como la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ es convergente. Ahora, escribimos

$$\int_0^{\infty} f(\eta)\Big(\int_0^m \cos\alpha(\eta - x)\ d\alpha\Big)\, d\eta - \int_0^m \Big(\int_0^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\Big)\, d\alpha$$
$$= \int_0^{k} f(\eta)\Big(\int_0^m \cos\alpha(\eta - x)\ d\alpha\Big)\, d\eta - \int_0^m \Big(\int_0^{k} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\Big)\, d\alpha$$
$$+ \int_k^{\infty} f(\eta)\Big(\int_0^m \cos\alpha(\eta - x)\ d\alpha\Big)\, d\eta - \int_0^m \Big(\int_k^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\Big)\, d\alpha \quad (1.23)$$

Mediante el Teorema de Fubini, se llega a lo siguiente

$$\int_0^{k} f(\eta)\Big(\int_0^m \cos\alpha(\eta - x)\ d\alpha\Big)\, d\eta = \int_0^m \Big(\int_0^{k} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\Big)\, d\alpha.$$

Ahora, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

es absolutamente convergente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que la integral

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{b} |f(x)|dx = L = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{-\infty}^{k} |f(x)|dx + \int_{k}^{\infty} |f(x)|dx\Big)$$

De esto se sigue

$$\lim_{k\to\infty}\int_{k}^{\infty} |f(x)|\ dx = 0.$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un número real K tal que

$$\Big|\int_k^{\infty} |f(\eta)|d\eta\Big| < \frac{\epsilon}{2m}$$

Si $k > K$. De eso se sigue

$$\Big|\int_0^m \Big(\int_k^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\Big)\, d\alpha\Big| \leq \int_0^m \Big(\int_k^{\infty} |f(\eta)|\ d\eta\Big)\, d\alpha < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.24)$$

Cambiando la variable $\eta = \eta + x$, tenemos que

$$\Big|\int_k^{\infty} f(\eta)\Big(\int_0^m \cos\alpha(\eta - x)\ d\alpha\Big)\, d\eta\Big| = \Big|\int_{k+x}^{\infty} f(\eta + x)\frac{\operatorname{sen}(m\eta)}{\eta}\ d\eta\Big|.$$

viendo los límites de integración de las integrales anteriores se puede ver que $0 < k \leq \eta$, de ello que

$$\begin{aligned}
\left|\int_k^\infty f(\eta)\left(\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta\right| &= \left|\int_{k+x}^\infty f(\eta+x)\frac{\operatorname{sen}(m\eta)}{\eta}\ d\eta\right| \\
&< \frac{1}{k}\int_k^\infty |f(\eta+x)|\ d\eta \\
&< \frac{\epsilon}{2k}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Teniendo en cuenta (1.23),(1.24),(1.25), además, sin importar que tan grande sean m y K

$$\left|\int_0^\infty f(\eta)\left(\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta - \int_0^m \left(\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right) d\alpha\right| < \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{k}+1\right) < \epsilon.$$

En otras palabras,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f(\eta)\left(\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \left(\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right) d\alpha. \tag{1.26}$$

De manera similar se puede probar lo siguiente

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^0 f(\eta)\left(\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \left(\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right) d\alpha. \tag{1.27}$$

Combinando (1.26) y (1.27), obtenemos

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\int_0^m \left(\cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right) d\alpha. \tag{1.28}$$

Aplicando el Teorema 1.8, usando (1.28) para comparar los dos últimos miembros del lado derecho de la igualdad siguiente y haciendo $u = \eta - x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+u)\frac{\operatorname{sen}(mu)}{u}\ du \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\frac{\operatorname{sen} m(\eta-x)}{\eta-x}\ d\eta \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\left(\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)\ d\alpha\right) d\eta \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^m \left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right) d\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\right) d\alpha. \tag{1.29}$$

Si la función $f(x)$ es continua en el punto x, entonces

$$f(x^+) = f(x^-) = f(x).$$

Y por (1.29), tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta\right) d\alpha \quad \square \tag{1.30}$$

Teorema 1.10 (Forma exponencial del teorema de la integral de Fourier)**.** *Si f satisface las hipótesis del Teorema de la integral de Fourier, entonces*

$$\begin{aligned} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)e^{i\alpha(\eta-x)}d\eta\right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)e^{i\alpha\eta}\ d\eta\right) d\alpha \end{aligned} \tag{1.31}$$

Demostración. Sea

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta - x)\ d\eta.$$

Entonces F es continua en $(-\infty, \infty)$, porque se supone que la integral impropia anterior existe, $F(\alpha) = F(-\alpha)$, ya que $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, entonces cambiando la variable α por $-\alpha$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^0 F(\alpha)\ d\alpha = \int_0^\infty F(-\alpha)\ d\alpha = \int_0^\infty F(\alpha)\ d\alpha.$$

Por consiguiente aplicando el **Teorema Integral de Fourier**, Teorema 1.9 se llega a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\ d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)\ d\alpha. \tag{1.32}$$

Ahora definimos la función G en $(-\infty, \infty)$ de la forma

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(\eta)\operatorname{sen}\alpha(\eta - x)\ d\eta.$$

Entonces G es continua en todo $\mathbb{R}$ y $G(\alpha) = -G(-\alpha)$, ya que $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$. Luego $\int_{-\infty}^\infty G(\alpha)\ d\alpha = 0$, porque si cambiamos la variable α por $-\alpha$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^0 G(\alpha)\ d\alpha = \int_0^\infty G(-\alpha)\ d\alpha = -\int_0^\infty G(\alpha)\ d\alpha,$$

lo cual implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)\ d\alpha = 0.$$

Combinando este resultado con la ecuación (1.30) obtenemos

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F(\alpha)+iG(\alpha))\ d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\alpha(\eta-x)}d\eta\right)d\alpha$$

Si la función $f(x)$ es continua en el punto x, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\alpha(\eta-x)}d\eta\right)d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\alpha\eta}\ d\eta\right)d\alpha \tag{1.33}$$

□

1.4.1. Teoremas de inversión para transformadas de Fourier

Teorema 1.11 (Teorema de Inversión para la transformada del coseno de Fourier). *Si F_c es la transformada del coseno de Fourier de $f(x)$, esto es, si*

$$F_c(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\eta)\cos(\alpha\eta)\ d\eta, \tag{1.34}$$

entonces

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\alpha)\cos(\alpha x)\ d\alpha \tag{1.35}$$

Demostración. En el caso en que la función $f(x)$ esta definida únicamente para valores positivos de x, existen dos importantes formas del Teorema integral de Fourier. Si $f(x)$ es definida en el intervalo $0 \leq x < \infty$, entonces podemos definir la función $f(x)$ en el intervalo $-\infty < x < \infty$ por medio de la ecuación $f(x) = f(-x)$. Cuando $-\infty < x < 0$, se concluye

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{0} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha.$$

Ahora, al realizar el cambio de la variable η por $-\eta$ se puede ver que

$$\int_{-\infty}^{0} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta = \int_0^{\infty} f(-\eta)\cos\alpha(-\eta-x)\ d\eta = \int_0^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta+x)\ d\eta$$

De acuerdo con lo anterior, y sabiendo que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\eta)[\cos\alpha(\eta-x)+\cos\alpha(\eta+x)]\ d\eta\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)\left(\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)\ d\eta\right)d\alpha\end{aligned}$$

Aplicando el **Teorema integral de Fourier**, Teorema 1.9 se llega a lo siguiente

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)\left(\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)\ d\eta\right)d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)\ d\alpha. \qquad \square$$

Teorema 1.12 (Teorema de inversión para la transformada del seno de Fourier)**.** *Si $F_s(\alpha)$ es la transformada del seno de Fourier de $f(x)$, esto es, si*

$$F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(\eta)\operatorname{sen}(\alpha\eta)\ d\eta \tag{1.36}$$

entonces

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)\ d\alpha. \tag{1.37}$$

Demostración. Podemos extender el intervalo de definición de $f(x)$ de $0 < x < \infty$ a $-\infty < x < \infty$, definiendo la función $f(x)$ en $-\infty < x < 0$ de la forma

$$f(x) = -f(-x).$$

En ese caso obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha$$

Realizando el cambio de la variable η por $-\eta$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta = \int_0^\infty f(-\eta)\cos\alpha(\eta+x)\ d\eta = -\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta+x)\ d\eta.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\ d\eta\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\eta)[\cos\alpha(\eta - x) - \cos\alpha(\eta + x)]\ d\eta \right) d\alpha$$

Aplicando el **Teorema integral de Fourier**, Teorema 1.9 y teniendo en cuenta que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$, obtenemos

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen}(\alpha x)\ d\alpha \int_0^\infty f(\eta) \operatorname{sen}(\alpha\eta)\ d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x)\ d\alpha. \qquad \square$$

Teorema 1.13 (Teorema de inversión para la transformada exponencial de Fourier)**.** *Si $F(\alpha)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, esto es, si*

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\alpha x} dx, \tag{1.38}$$

entonces $f(x)$ está dada en términos de $F(\alpha)$ por la relación

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\ e^{i\alpha x} d\alpha. \tag{1.39}$$

Demostración. La demostración del Teorema se desprende fácilmente del Teorema 1.10. Claro es de notar que $f(x)$ debe satisfacer las condiciones de Dirichlet en $(-\infty, \infty)$, y además que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx$$

debe ser convergente. Como la transformada de Fourier de $f(x)$ existe, de ello que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\alpha\eta}\ d\eta \right) d\alpha.$$

Mediante el cambio de variable α por $-\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\alpha\eta}\ d\eta \right) d\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\alpha\eta}\ d\eta \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\alpha\eta}\ d\eta \right) e^{i\alpha x}\ d\alpha \end{aligned}$$

Ahora, al realizar el cambio de la variable η por x, tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\alpha\eta}\ d\eta\ e^{i\alpha x}\ d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\ d\alpha \qquad \square$$

Teorema 1.14 (Teorema de la transformada de Fourier de las derivadas de una función)**.** *La transformada de Fourier de la función $\dfrac{d^r f}{dx^r}$ es $(i\alpha)^r$ por la transformada de Fourier de la función $f(x)$ si se tiene que las primeras $(r-1)$ derivadas de $f(x)$ se anulan cuando $|x| \to \infty$.*

Demostración. Por definición la transformada de Fourier de $\dfrac{d^r f}{dx^r}$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r}\ e^{-i\alpha x}\ dx = F^{(r)}(\alpha).$$

Integrando en la izquierda por partes, obtenemos

$$F^{(r)}(\alpha) = \frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}\ e^{-i\alpha x}\Big]_{-\infty}^{\infty} + (i\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}\ e^{-i\alpha x}dx.$$

Dado que las primeras $(r-1)$ derivadas de $f(x)$ se anulan cuando $|x| \to \infty$, entonces

$$F^{(r)}(\alpha) = (i\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}\ \ e^{-i\alpha x}dx = i\alpha\ F^{(r-1)}(\alpha).$$

Usando repetidamente integración por partes y asumiendo que, para $s = 1, 2, \ldots, r-1$,

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{d^s f}{dx^s}\right) = 0 \quad ,$$

finalmente se obtiene

$$F^{(r)}(\alpha) = (i\alpha)^r F(\alpha).$$ □

Teorema 1.15 (Teorema de inversión para la transformada de Laplace)**.** *Si $\phi(p)$ es una función de variable compleja $p = \gamma + i\eta$, tal que*

$$\phi(p) = \int_0^{\infty} f(\xi)\ e^{-p\ \xi}\ d\xi$$

converge absolutamente para $p > c$, donde $c > 0$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(p)\, e^{px}\, dp.$$

Cualquiera que sea $\gamma > c$

Demostración. De la demostración del **Teorema Integral de Fourier** tenemos que, si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \tag{1.40}$$

no es convergente, entonces la transformada de Fourier de $f(x)$ no existe. Esta situación de hecho aparece en muchos casos de interés. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(wx)$$

hace que la integral en (1.40) sea divergente. En ese caso, la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de la función $f(x)$ no existe. En muchos problemas de física matemática, especialmente en los cuales hay efectos transitorios interesantes, se considera una función $f(x)$ de este tipo, pero que toma el valor de cero para valores negativos de x. En otras palabras, $f(x) = 0$, si $-\infty < x < 0$. y tal que la integral de $f(x)$ en (1.40) sea divergente. Por el contrario, la función

$$f_1(x) = e^{-\gamma x} f(x) \tag{1.41}$$

donde γ es una constante positiva, si satisface las condiciones del **Teorema Integral de Fourier** y $f_1(x) = 0$, si $-\infty < x < 0$. Aplicando la **Forma exponencial del Teorema de la integral de Fourier** a $f_1(x)$, se obtiene

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} \left(\int_0^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\xi\eta} \, d\xi \right) d\eta.$$

De la definición de $f_1(x)$ tenemos que

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} \left(\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-(\gamma + i\eta)\xi} \, d\xi \right) d\eta \tag{1.42}$$

Por hipótesis $p = \gamma + i\eta$ y $\phi(p) = \int_0^{\infty} f(\xi) \; e^{-p\xi} d\xi$. Dado que $dp = i d\eta$, de (1.42) tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \phi(p) \; e^{px} dp. \tag{1.43}$$

Como la función $\phi(p)$ es la transformada de Laplace de la función f, la ecuación (1.43) expresa la función $f(x)$ en términos de su transformada de Laplace. Es decir, este es un Teorema de inversión para la transformada de Laplace. Si la integral impropia

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx$$

no es acotada, pero la integral impropia

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \; |f(x)| dx,$$

lo es para algún valor positivo c, entonces la fórmula de inversión (1.43) se da con $\gamma > c$ $\square$

1.4.2. Transformadas múltiples de Fourier

La teoría de transformadas de Fourier de una función de una variable se puede extender a funciones de varias variables. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables independientes

x y y. Considerando por un momento a $f(x,y)$ como una función de x, f tiene la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ e^{-i\xi x} dx. \tag{1.44}$$

Ahora considerando a $\widehat{f}(\xi, y)$ como una función que depende solo de y, entonces $\widehat{f}(\xi, y)$ tiene transformada de Fourier, la cual está dada por

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi, y)\ e^{-i\eta y} dy. \tag{1.45}$$

Combinando (1.44) y (1.45), se puede ver la relación entre la función $f(x,y)$ y $F(\xi,\eta)$, la cual está dada por

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ e^{-i(\xi x + \eta y)} dx \right) dy. \tag{1.46}$$

Decimos que $F(\xi,\eta)$ es la transformada bidimensional de la función $f(x,y)$. Aplicando el Teorema 1.13 en (1.44), se tiene que la función $f(x,y)$ puede ser expresada en términos de $\widehat{f}(\xi, y)$ por medio de la relación

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi, y)\ e^{i\xi x} d\xi. \tag{1.47}$$

De manera similar, aplicamos el Teorema 1.13 en (1.45) para obtener

$$\widehat{f}(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)\ e^{i\eta y} d\eta. \tag{1.48}$$

De acuerdo con (1.46) y (1.47) se deduce que

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)\ e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi \right) d\eta, \tag{1.49}$$

la cual es la fórmula de inversión para la transformada doble de Fourier, $F(\xi,\eta)$.

1.4.3. Transformadas dobles de Laplace

Inicialmente se considera una función $f(x,y)$ definida para $x \geq 0$, $y \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(x,y)$ con respecto a y se denota como

$$\widehat{f}(x, p) = \int_{0}^{\infty} e^{-py} f(x,y)\ dy,$$

y la transformada de Laplace de $f(x,y)$ con respecto a x como

$$F(p', y) = \int_{0}^{\infty} e^{-p'x} f(x,y)\ dx.$$

Entonces la transformada doble de $f(x,y)$ se denota como

$$\widehat{F}(p',p) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-p'x-py} f(x,y)\ dx \right) dy,$$

en donde las variables p' y p se suponen que tienen partes reales que son suficientemente grandes para asegurar la convergencia de las integrales anteriores. De manera análoga podemos definir la transformada iterada de Laplace de la función $f(x,y)$ como

$$\widehat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x,y) dx \right) dy.$$

$$\widehat{F}(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-s(x+y)} f(x,y) dx \right) dy. \tag{1.50}$$

Ahora consideramos la convolución generalizada de Bartels y Churchill, ver [5], definida por la relación

$$f^*(x) = \int_0^{x} f(x-y,y) dy. \tag{1.51}$$

Si denotamos la transformada de Laplace de está función por $\theta(s)$, entonces por definición

$$\theta(s) = L[f^*(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f^*(x) dx.$$

Considerando ahora la integral

$$\overline{\theta}(R,s) = \int_0^{R} e^{-sx} \left(\int_0^{x} f(x-y,y) dy \right) dx. \tag{1.52}$$

Entonces se puede ver que

$$\theta(s) = \lim_{R\to\infty} \overline{\theta}(R,s). \tag{1.53}$$

Mediante el cambio de variables $u = x - y$, $v = y$ en (1.52) se puede ver que

$$\overline{\theta}(R,s) = \int\int_{\Delta} e^{-su-sv} f(u,v) du\ dv, \tag{1.54}$$

donde el área de integración Δ es el triángulo encerrado por las líneas $u = 0$, $v = 0$ y $u + v = R$. Cuando $R \to \infty$, la región Δ llega a ser todo el cuadrante positivo del plano uv. De (1.53) y (1.54) se sigue que

$$\theta(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u,v) du \right) dv$$

y de (1.50) que

$$\theta(s) = \widehat{F}(s). \tag{1.55}$$

Así que la transformada de Laplace de la convolución generalizada $f^*(x)$ es la transformada iterada de Laplace de la función $f(x,y)$.

1.5. Deducción de la ecuación de calor

En su libro *Teoría Analítica de Chaleur*, Fourier establece su famosa ley

$$\mathbf{q} = -k\nabla u, \tag{1.56}$$

donde $\mathbf{q}$ es la tasa de cambio de flujo de energía térmica que fluye a través de una unidad de superficie por unidad de tiempo, la constante de proporcionalidad k es positiva y es llamada la constante de conductividad térmica del material, y ∇u denota el gradiente de la temperatura u. Para el caso unidimensional, la Ley de Fourier (1.56) se convierte en

$$\mathbf{q} = -k\ u_x, \tag{1.57}$$

donde $u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$. En ausencia de trabajo, el cambio ΔQ de la energía térmica por unidad de volumen en el material puede ser relacionado con el cambio Δu de temperatura, por medio de la fórmula

$$\Delta Q = c\rho\Delta u, \tag{1.58}$$

donde c es llamada la **capacitancia** del material y ρ es la **densidad de masa** del material. Si elegimos como referencia la temperatura cero, entonces

$$\Delta Q = c\rho\Delta u, \tag{1.59}$$

representa la energía térmica interna por unidad de volumen del material. La usual deducción de la ecuación de calor emplea (1.57) y (1.59) como sigue. Consideremos el rectángulo

$$R = \{(\xi,\tau) : x-\Delta x \leq \xi \leq x+\Delta x \quad \text{y} \quad t-\Delta t \leq \tau \leq t+\Delta t\}.$$

(ver Figura. 1.2) El incremento en el tiempo 2 Δt de la energía térmica interna en la región $[x-\Delta x, x+\Delta x] \subset \mathbb{R}$ es

$$c\rho\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x}(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t-\Delta t))\ d\xi = c\rho\int\int_R \frac{\partial u}{\partial \tau}\ d\tau\ d\xi = c\rho\int\int_R \frac{\partial u}{\partial \tau}\ d\xi\ d\tau. \tag{1.60}$$

En ausencia de trabajo, fuentes generadoras o disipadoras de calor, el cambio de Q es representado por el flujo total de energía calorífica a través de la frontera $[x-\Delta x, x+\Delta x]$, la cual es dada por

$$k\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,\tau)-\frac{\partial u}{\partial x}(x-\Delta x,\tau)\right\}\ d\tau = k\int\int_R \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\ d\xi\ d\tau. \tag{1.61}$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, podemos restar las ecuaciones (1.60) y (1.61) para obtener

$$\int\int_R \{c\rho u_\tau - k u_{\xi\xi}\}\ d\xi\ d\tau = 0$$

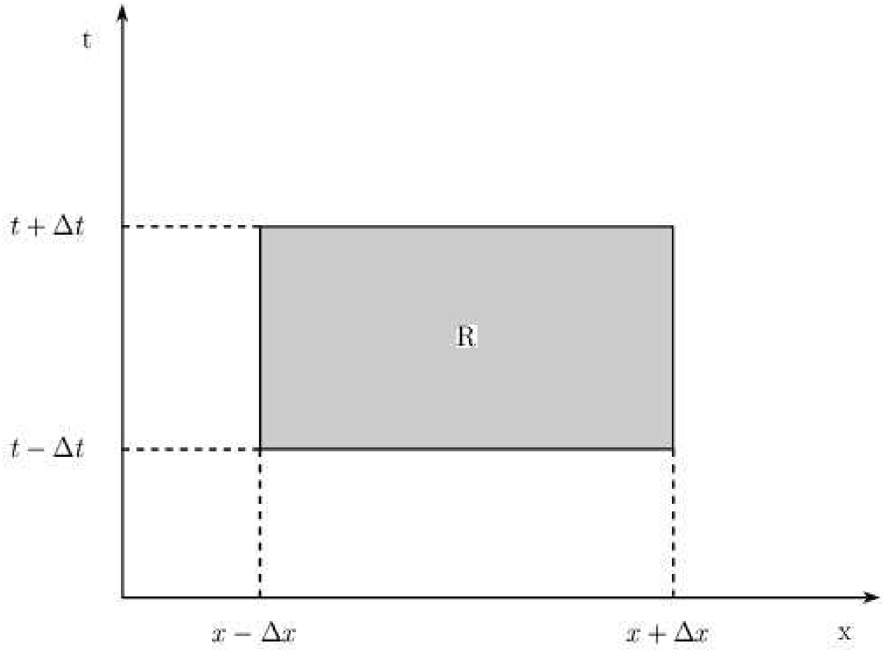

Figura 1.2

Consecuentemente, tenemos que

$$c\rho u_t - k u_{xx} = 0$$

para cada (x,t), dividiendo por $c\rho$ la ecuación anterior, obtenemos

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0 \tag{1.62}$$

Donde $\kappa = c^{-1}\rho^{-1}k$ denota la difusibidad térmica del material. Haciendo $\tau = \kappa t$ y renombrando a τ como t, la ecuación (1.62) se transforma en la ecuación clásica conocida como la ecuación de calor unidimensional.

$$L(u) = u_t - u_{xx} = 0 \tag{1.63}$$

1.5.1. Métodos para generar soluciones a partir de soluciones

La linealidad y homogeneidad de $u_t = u_{xx}$ permite una extensiva lista de métodos de generación de soluciones de (1.63) a partir de otras soluciones de (1.63).
Combinaciones lineales: Si u_1 y u_2 son soluciones de (1.63), entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es una solución de (1.63).
Traslaciones: Si $u(x,t)$ es una solución de (1.63), entonces $u(x-\xi, t-\tau)$, donde ξ y τ son los parámetros de traslación, también es una solución de (1.63).

Diferenciación con respecto a un parámetro: Si $u(x,t,\alpha)$ es una solución de (1.63) para cada α en $a \leq \alpha \leq b$, entonces $u_\alpha(x,t,\alpha)$, también es una solución de (1.63).
Transformación afín: Si $u(x,t)$ es una solución de (1.63), entonces $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ es una solución de (1.63) para cualquier constante λ.

1.5.2. Diferenciación con respecto a x y a t

Si $u(x,t)$ es una solución de (1.63), entonces $(\partial^{n+m}u/\partial x^n \partial t^m)(x,t)$, también es solución de (1.63).
La idea aquí no es demostrar que en verdad estos métodos generan soluciones de la ecuación de calor, porque lo importante es usar estos métodos de generación de soluciones para más adelante, cuando trabajemos el problema de la existencia y unicidad de soluciones para los problemas tratados en la introducción.

1.5.3. Definiciones básicas

En una línea

$$t \equiv constante,$$

u y u_t no pueden ser especificadas independientemente, entonces la ecuación $u_t = u_{xx}$ obliga a una condición de compatibilidad en sus datos. En la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales de orden n, cuando u y sus derivadas normales hasta el orden $(n-1)$ no pueden ser especificadas en una curva, esa curva es llamada **característica**. La característica $t \equiv constante$ desempeña un papel importante en la definición de una solución y de la noción de un problema de valor inicial en la frontera. En la Figura. 1.3, se muestra un tipo de región cerrada en $\mathbb{R}^2$, con la cual vamos a trabajar a lo largo de este trabajo. En adelante consideraremos que s_1 y s_2 son continuas.

Definición 1.7. ***El interior parabólico*** *D_T consiste en el interior representado por los puntos pintados que se muestran en la Figura 1.3 unido con el segmento de línea abierta*

$$\{(x,T) : s_1(T) < x < s_2(T)\}.$$

En la característica $t = T$.

Definición 1.8. ***La frontera parabólica*** *B_T consiste en la curva $\{(s_1(t),t) : 0 \leq t \leq T\}$, la curva $\{(s_2(t),t) : 0 \leq t \leq T\}$, y el segmento de línea $\{(x,0) : a \leq x \leq b\}$ en la característica $t = 0$.*

Definición 1.9. *La función u se dice que es una solución de $u_t = u_{xx}$ en D_T, si u, u_x, u_t, y u_{xx} son continuas en D_T y $u_t = u_{xx}$ se satisface como una identidad en (x,t) en todo D_T.*

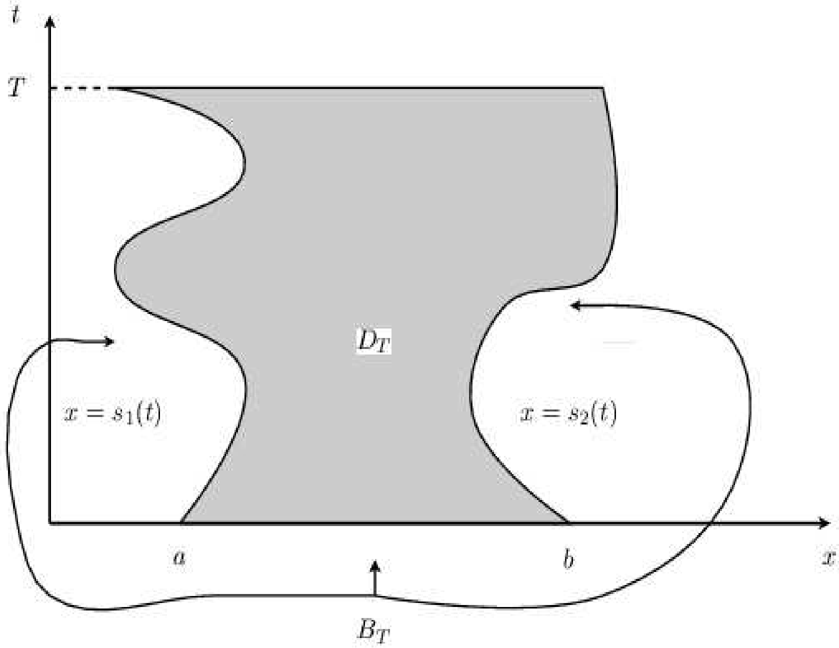

Figura 1.3

Un problema de **valor inicial con condiciones en la frontera** consiste en determinar una solución para $u_t = u_{xx}$ en D_T que satisface unas condiciones prescritas sobre B_T. Por ejemplo, u puede especificarse en todo punto de B_T. Otras especificaciones son posibles en algunas partes de B_T que no coinciden con un segmento de una característica. Cuando B_T coincide con una característica, entonces limitamos las especificaciones de u, y llamamos a tal problema un **Problema de valor inicial** .

En el Capítulo 2 estudiaremos un problema de valor inicial, ya que para este problema, B_T consiste en la característica $t = 0$, y en el Capítulo 3 estudiaremos un problema de valor inicial con condiciones en la frontera, ya que para este problema, B_T no solo consiste en la característica $t = 0$, porque además la característica $x = 0$ también hace parte de B_T.

1.5.4. El principio del máximo débil y algunas aplicaciones

Una poderosa herramienta para el estudio de los problemas de valor inicial en la frontera es el principio del máximo débil y sus aplicaciones.

Teorema 1.16 (El principio del máximo débil)**.** *Para una solución u de $u_t = u_{xx}$*

acotada en D_T, la cual es continua en $D_T \cup B_T$, se tiene que

$$\max_{D_T \cup B_T} u = \max_{B_T} u.$$

Demostración. Consideremos la función

$$v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2,$$

donde ϵ es un número positivo. Entonces v debe alcanzar su valor máximo en B_T, porque de lo contrario tendríamos que existiría un punto $(x_0, t_0) \in D_T$ tal que

$$v(x_0, t_0) = \max_{D_T \cup B_T} v.$$

Aplicando el criterio de la primera y segunda derivada, se tendría que

$$v_t(x_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad v_{xx}(x_0, t_0) < 0;$$

razón por la cual

$$L(v) \equiv v_{xx}(x_0, t_0) - v_t(x_0, t_0) < 0.$$

Pero por otro lado,

$$L(v) \equiv v_{xx} - v_t = u_{xx} - u_t + 2\epsilon = 2\epsilon > 0$$

en todo D_T, lo cual contradice el hecho de que v alcanza su máximo valor en D_T. Como $u \leq v$ y $v \leq \max_{B_T} v$, entonces

$$u \leq \max_{B_T} v \leq \max_{B_T} u + \epsilon \max_{B_T} x^2.$$

Como ϵ puede elegirse tan pequeño como se quiera, se tiene finalmente que

$$u \leq \max_{B_T} u. \qquad \square$$

Si consideramos a $(-u)$ en lugar de u, se obtiene el siguiente resultado siguiendo el mismo razonamiento anterior.

Teorema 1.17 (El principio del mínimo débil)**.** *Para una solución u de $u_t = u_{xx}$ acotada en D_T, la cual es continua en $D_T \cup B_T$,*

$$\min_{D_T \cup B_T} u = \min_{B_T} u$$

Demostración. Consideremos $w = -u$. Entonces w satisface las condiciones del Teorema 1.16. Por ello,

$$\max_{D_T \cup B_T} (-u) = \max_{B_T} (-u).$$

Como $\max_{D_T \cup B_T}(-u) = -\min_{D_T \cup B_T}(u)$ y $\max_{B_T}(-u) = -\min_{B_T}(u)$, entonces

$$\min_{D_T \cup B_T} u = \min_{B_T} u. \qquad \square$$

Una de las aplicaciones básicas del Principio del máximo débil, es el siguiente teorema de comparación para soluciones de la ecuación diferencial $u_t = u_{xx}$.

Teorema 1.18 (El teorema de comparación)**.** *Si u y v son soluciones de $u_t = u_{xx}$ acotadas en D_T, que son continuas en $D_T \cup B_T$ y si $u \leq v$ en B_T, entonces $u \leq v$ en $D_T \cup B_T$.*

Demostración. Consideremos $w = v - u$. Entonces $L(w) = 0$ en D_T y como $u \leq v$ en B_T, entonces $w \geq 0$ en B_T. Como w satisface las condiciones del Principio del mínimo débil, entonces $w \geq 0$ en $D_T \cup B_T$, de ello que $u \leq v$ en $D_T \cup B_T$. □

Teorema 1.19 (Extensión del Teorema de comparación)**.** *Si u y v son soluciones de $u_t = u_{xx}$ en D_T y son continuas a trozos en $D_T \cup B_T$ con a lo más un número finito de discontinuidades acotadas y si $u \leq v$ en B_T excepto en los puntos de discontinuidad, entonces $u \leq v$ en D_T.*

Demostración. Primero demostraremos para el caso especial de una sola discontinuidad acotada en la frontera parabólica B_T, y luego extenderemos esas ideas para demostrar el teorema en el caso de que se tenga un número finito de discontinuidades en B_T. Asumimos que $T > 0$ y que B_T contiene el segmento de línea $-A \leq x \leq A$, $t = 0$, donde A es una constante positiva. Más aún, por hipótesis u y v son soluciones de $u_t = u_{xx}$ en D_T que son continuas en $D_T \cup B_T$ excepto en $x = t = 0$. También asumimos que u y v son acotadas en valor absoluto, por la constante C a través de $D_T \cup B_T$ excepto en $x = t = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $D_T \subset \mathbb{R}^2_+ = \{(x,t)|t > 0\}$. Consideremos el dominio

$$\widetilde{D}^{\delta}_T = \mathbb{R}^2_+ - \{(x,t)| - \delta \leq x \leq \delta \ \ y \ \ 0 \leq t \leq \delta\},$$

como se observa en la Figura 1.4

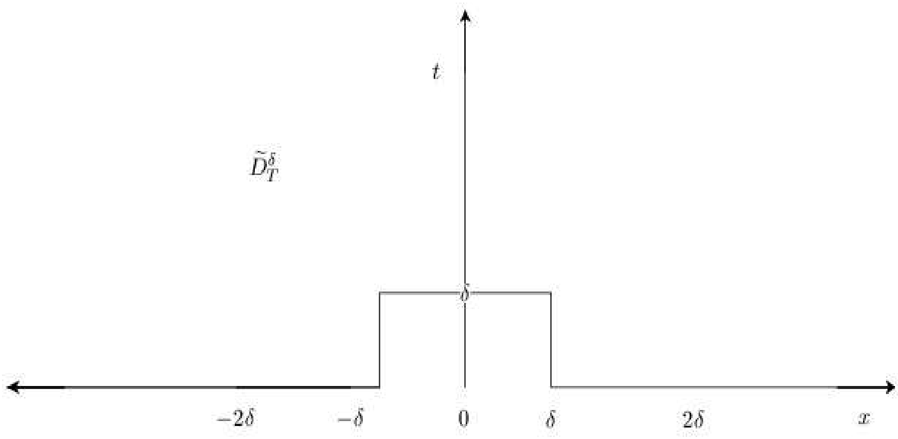

Figura 1.4

Claramente, la frontera parabólica $\widetilde{B}_T^\delta$ de $\widetilde{D}_T^\delta$ consiste en la unión de los segmentos de línea $-\infty < x \le -\delta$, $t = 0$; $\delta \le x < \infty$, $t = 0$; $x = -\delta$, $0 \le t \le \delta$; $x = \delta$, $0 \le t \le \delta$; y $-\delta \le x \le \delta$, $t = \delta$. En $\widetilde{D}_T^\delta$, consideramos el problema

$$
\begin{aligned}
&z_t^\delta = z_{xx}^\delta, && (x,t) \in \widetilde{D}_T^\delta,\\
&z^\delta(x,0) = 0, && -\infty < x < -2\delta,\\
&z^\delta(x,0) = C\delta^{-1}(2\delta + x), && -2\delta \le x \le -\delta,\\
&z^\delta(-\delta,t) = C, && 0 \le t \le \delta,\\
&z^\delta(x,\delta) = C, && -\delta \le x \le \delta,\\
&z^\delta(\delta,t) = C, && 0 \le t \le \delta,\\
&z^\delta(x,0) = C\delta^{-1}(2\delta - x), && \delta \le x \le 2\delta,\\
&z^\delta(x,0) = 0, && 2\delta < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Una solución, la cual es denotada por $z^\delta(x,t)$, puede ser construida de las representaciones dadas en los Teoremas 2.4 y 3.3 de la siguiente manera

$$
z^\delta(x,t) = \begin{cases}
0, & \text{si } -\infty < x < -2\delta,\ t > 0\\
\displaystyle\int_{-2\delta}^{-\delta} [G(x+\delta,t,\xi]\ C\ \delta^{-1}(2\delta+\xi)\ d\xi & \\
\displaystyle -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x+\delta,t-t')\ C\ dt', & \text{si } -2\delta \le x \le -\delta,\ 0 < t \le \delta\\
\displaystyle\int_{-2\delta}^{2\delta} [G(x,t-\delta,\xi]\ \frac{C}{2}\ d\xi, & \text{si } -2\delta \le x \le -2\delta,\ t > \delta\\
\int_\delta^{2\delta} [G(x-\delta,t,\xi]\ C\ \delta^{-1}(2\delta-\xi)\ d\xi, & \\
-2\int_0^t \dfrac{\partial K}{\partial x}(x-\delta,t-t')\ C\ dt', & \text{si } \delta \le x \le 2\delta,\ 0 < t \le \delta\\
0, & \text{si } 2\delta < x < \infty,\ t > 0,
\end{cases}
$$

donde

$$
G(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) - K(x+\xi,t), \qquad t > 0,
$$

y

$$
K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-(x-\xi)^2/4t}.
$$

Así definida $z^\delta(x,t)$ en $\widetilde{D}_T^\delta$, y con las condiciones iniciales impuestas en $\widetilde{B}_T^\delta$, se puede notar que es continua en $\widetilde{D}_T^\delta \cup \widetilde{B}_T^\delta$.

Consideremos ahora el dominio $D_T \cap \widetilde{D}_T^\delta$, y de acuerdo a las hipótesis del teorema, se tiene que u, v y z^δ son continuas en este dominio, ya que $D_T \cap \widetilde{D}_T^\delta \subset D_T$, y,

$D_T \cap \widetilde{D}_T^{\delta} \subset \widetilde{D}_T^{\delta}$. Mas aún, en la frontera parabólica de $D_T \cap \widetilde{D}_T^{\delta}$, $u \leq v + z^{\delta}$, ya que la frontera parabólica de $D_T \cap \widetilde{D}_T^{\delta}$, está contenida en B_T y B_T^{δ} y por hipótesis $u \leq v$ en B_T y $z^{\delta} \geq 0$ en B_T^{δ}.Entonces aplicando el Teorema 1.18, se concluye que, $u \leq v + z^{\delta}$ en $D_T \cap \widetilde{D}_T^{\delta}$. Dando un particular punto $(x_1, t_1) \in D_T$. Se sigue que para todo δ suficientemente pequeño, $(x_1, t_1) \in D_T \cap \widetilde{D}_T^{\delta}$, ya que si tomamos δ suficientemente pequeño, entonces $\widetilde{D}_T^{\delta}$, es casi todo $\mathbb{R}_+^2$. Consecuentemente,

$$u(x_1, t_1) \leq v(x_1, t_1) + z^{\delta}(x_1, t_1)$$

Para todo δ suficientemente pequeño. De la definición de la función $z^{\delta}(x, t)$ se tiene que

$$\lim_{\delta \to 0^+} z^{\delta}(x_1, t_1) = 0.$$

Como $u(x_1, t_1) \leq v(x_1, t_1)$, esto completa la demostración de la extensión del Teorema de comparación para el caso especial de una sola discontinuidad acotada en la frontera parabólica B_T. Siguiendo las mismas ideas se demuestra en el caso de que se tenga un número finito de discontinuidades en B_T. Sin pérdida de generalidad supongamos que B_T contiene el segmento $-A \leq x \leq A$, $t = 0$, donde A es una constante positiva. Sean $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)$ los puntos en B_T donde u y v presentan discontinuidad acotada. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Considerando los dominios

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_1^{\delta} &= \mathbb{R}_+^2 - \left\{ (x,t) | -\frac{\delta}{5} + x_1 \leq x \leq x_1 + \frac{\delta}{5} \;\; y \;\; 0 \leq t \leq \delta \right\}, \\
\widetilde{D}_2^{\delta} &= \mathbb{R}_+^2 - \left\{ (x,t) | -\frac{\delta}{5} + x_2 \leq x \leq x_2 + \frac{\delta}{5} \;\; y \;\; 0 \leq t \leq \delta \right\}, \\
&\vdots \\
\widetilde{D}_n^{\delta} &= \mathbb{R}_+^2 - \left\{ (x,t) | -\frac{\delta}{5} + x_n \leq x \leq x_n + \frac{\delta}{5} \;\; y \;\; 0 \leq t \leq \delta \right\},
\end{aligned}$$

y en especial el dominio

$$\widetilde{D}_T^{\delta} = \widetilde{D}_1^{\delta} \cap \widetilde{D}_2^{\delta} \cap \ldots \cap \widetilde{D}_n^{\delta},$$

donde

$$\delta = \inf\{|x_{i+1} - x_i|, i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

De manera similar al razonamiento anterior construimos el problema

$$\begin{aligned}
&z_t^\delta = z_{xx}^\delta, && (x,t) \in \widetilde{D}_T^\delta,\\
&z^\delta(x,0) = 0, && -\infty < x < \frac{-2\delta}{5} + x_1,\\
&z^\delta(x,0) = C && \left(\frac{\delta}{5}\right)^{-1}\left(2\frac{\delta}{5} + x - x_1\right), \frac{-2\delta}{5} + x_1 \leq x \leq \frac{-\delta}{5} + x_1,\\
&z^\delta\left(\frac{-\delta}{5} + x_1, t\right) = C, && 0 \leq t \leq \delta,\\
&z^\delta(x,\delta) = C, && \frac{-\delta}{5} + x_1 \leq x \leq \frac{\delta}{5} + x_1,\\
&z^\delta\left(\frac{\delta}{5} + x_1, t\right) = C, && 0 \leq t \leq \delta,\\
&z^\delta(x,0) = C && \left(\frac{\delta}{5}\right)^{-1}\left(2\frac{\delta}{5} - x + x_1\right), \frac{\delta}{5} + x_1 \leq x \leq \frac{2\delta}{5} + x_1,,\\
&z^\delta(x,0) = 0, && \frac{2\delta}{5} + x_1 \leq x \leq \frac{-2\delta}{5} + x_2,\\
&\vdots\\
&z^\delta(x,0) = C && \left(\frac{\delta}{5}\right)^{-1}\left(2\frac{\delta}{5} - x + x_n\right), dfrac\delta 5 + x_n \leq x \leq \frac{2\delta}{5} + x_n,\\
&z^\delta(x,0) = 0, && \frac{2\delta}{5} + x_n \leq x < \infty.
\end{aligned}$$

De forma análoga al problema anterior, podemos construir una solución $z^\delta(x,t)$ que cumpla con todas las condiciones ya establecidas en el problema anterior. La extensión del teorema de comparación queda demostrado siguiendo el mismo razonamiento hecho anteriormente.

Aquí se considero que B_T consistía en el segmento $-A \leq x \leq A$, $t = 0$, pero se debe notar que sin importar como sea la frontera parabólica B_T, siempre podemos aplicar el anterior razonamiento para demostrar el Teorema. $\square$

Capítulo 2

Un problema de valor inicial

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones para el problema presentado en la ecuación (2.1), tal como lo discute Cannon [3], para ello utilizaremos la transformada de Fourier, la cual nos servirá para deducir una representación formal de la solución del problema de valor inicial, luego analizaremos las propiedades de la solución hallada, y finalmente estableceremos las condiciones bajo las cuales el problema tratado en este capítulo tiene una única solución. Para desarrollar estos temas acudiremos algunas veces a [1], [3] y [5].

2.1. Introducción

Iniciemos planteando el problema de valor inicial, que consiste en encontrar una función de temperatura $u(x,t)$ que satisfaga

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, & t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, & \end{array} \tag{2.1}$$

donde $f(x)$ es una función conocida, la función $u(x,t)$ representa la temperatura existente en un medio infinito $-\infty < x < \infty$, y cuando la distribución inicial de la temperatura $u(x,0)$ es prescrita(ver Figura 1.5)

Para resolver el problema de valor inicial, consideramos la transformada de Fourier de la función $u(x,t)$ con respecto a x

$$\widehat{u}(\alpha,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\ e^{-i\alpha x}\ dx.$$

Multiplicando la ecuación (2.1) por $e^{-i\alpha x}$ y luego integrando desde $-\infty$ a ∞ con respecto a x los dos miembros de la igualdad (2.1), encontramos que $u_t - u_{xx} = 0$ se transforma en el siguiente problema

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\ e^{-i\alpha x}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)\ e^{-i\alpha x}\ dx. \tag{2.2}$$

El lado izquierdo de (2.2) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\ e^{-i\alpha x}\ dx = \widehat{u}_t(\alpha,t). \tag{2.3}$$

Utilizando el Teorema de la transformada de Fourier de las derivadas de una función, Teorema 1.14, encontramos que el lado derecho de (2.2) se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)\ e^{-i\alpha x}\ dx = -\alpha^2\widehat{u}(\alpha,t). \tag{2.4}$$

De acuerdo con (2.3) y (2.4), se tiene que

$$\widehat{u}_t(\alpha,t) = -\alpha^2\widehat{u}(\alpha,t). \tag{2.5}$$

Para encontrar la función $\widehat{u}(\alpha,t)$ basta resolver para t la ecuación diferencial ordinaria lineal dada por la ecuación (2.5), cuya solución viene dada por

$$\widehat{u}(\alpha,t) = ce^{-\alpha^2 t}, \tag{2.6}$$

Al hacer $t=0$ en (2.6) tenemos que

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\alpha x}\ dx = F(\alpha).$$

Por lo tanto,

$$\widehat{u}(\alpha,t) = F(\alpha)e^{-\alpha^2 t}. \tag{2.7}$$

Aplicando en (2.7) el Teorema de inversión para la transformada exponencial de Fourier, Teorema 1.13, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ e^{(i\alpha x-\alpha^2 t)}F(\alpha)\ d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ e^{(i\alpha x-\alpha^2 t)}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ e^{-i\alpha\xi}\ d\xi\ d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\alpha(x-\xi)-\alpha^2 t)}d\alpha\right)d\xi, \end{aligned}$$

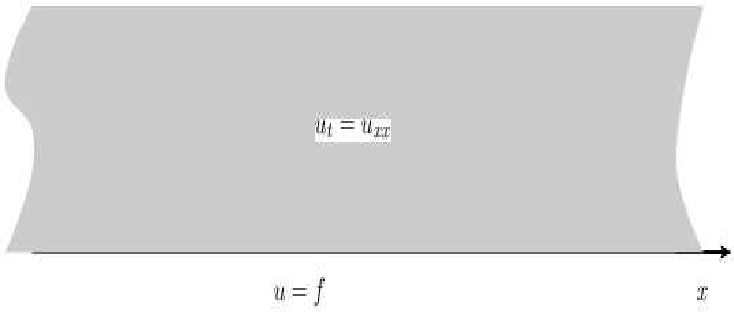

Figura 1.5

donde, mediante (1.12),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\alpha(x-\xi)-\alpha^2 t)} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x-\xi)^2/4t}$$
$$= K(x-\xi,t) \qquad t>0.$$

Por lo tanto, al definir la función $K(x,t)$ como

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}, \qquad t>0 \tag{2.8}$$

de acuerdo a la ecuación (2.8), tenemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4t}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi)\, d\xi, \qquad t>0. \tag{2.9}$$

Esta función es una representación formal de una solución del problema de valor inicial planteado en la ecuación (2.1), pero aún nos falta asegurar bajo que condiciones la función $u(x,t)$ está bien definida, es decir, analizar bajo que condiciones la función $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi)\, d\xi$ es convergente. Para ello iniciaremos estudiando las propiedades de la función $K(x,t)$.

2.2. Propiedades de la función $K(x,t)$

La función $K(x,t)$ dada en (2.8) tiene las siguientes propiedades

Teorema 2.1 (Propiedades de la función $K(x,t)$)**.**

A. $\quad K(x,t) > 0 \quad$ para $\quad t>0$

B. Para todo $t > 0$ fijo, K y sus derivadas tienden a cero exponencialmente cuando $|x|$ tiende a infinito.

C. Para todo $t > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\,dx = 1$.

D. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} -\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x,t-\tau)d\tau = \frac{-1}{2}$.

E. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x,t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}$.

Demostración. La propiedad A se tiene simplemente del hecho de que $e^x > 0$. La propiedad B se sigue del hecho de que $K_{x^n t^m} = R_{m,n}(x,t^{1/2})K$, donde $R_{m,n}$ es una función racional en x y en $t^{1/2}$, de ello que cuando $|x|$ tiende a infinito, entonces K y sus derivadas tienden a cero exponencialmente.

Para demostrar las propiedades C, D, y E, hacemos uso del resultado obtenido en (1.13) cuando $c = 1$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \sqrt{\pi}. \tag{2.10}$$

Mediante el cambio de variable $\rho = x/\sqrt{4t}$, se demuestra la propiedad C, ya que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4t}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = 1. \tag{2.11}$$

Ahora si hacemos el cambio de variable $\rho = x/2\sqrt{t-\tau}$, entonces

$$-\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x,t-\tau)d\tau = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho, & x > 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2}\, d\rho, & x < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

De (2.10) se tiene que

$$\lim_{x\to 0^-} -\int_0^t (\partial K/\partial x)(x,t-\tau)d\tau = \frac{-1}{2},$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} -\int_0^t (\partial K/\partial x)(x,t-\tau)d\tau = \frac{1}{2},$$

lo cual demuestra las propiedades D y E. $\square$

Estas propiedades de la función $K(x,t)$ serán de gran ayuda a la hora de establecer el tipo de funciones $f(x)$ para las cuales la convolución

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi)\ d\xi$$

es convergente.

2.3. Convergencia de la convolución $u(x,t)$

Primero iniciamos investigando las condiciones sobre las cuales la integral

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi)\ d\xi \tag{2.13}$$

es o no convergente. Como $(a\epsilon^{-1/2} - \epsilon^{1/2}b)^2 \geq 0$, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que

$$2ab \leq \epsilon^{-1}a^2 + \epsilon b^2, \qquad \epsilon > 0. \tag{2.14}$$

Ahora probemos lo siguiente

$$-(1+\epsilon^{-1})x^2 - (1+\epsilon)\xi^2 \leq -(x-\xi)^2.$$

Eso es equivalente a probar

$$-2\ x\ \xi \leq x^2\ \epsilon^{-1} + \epsilon\ \xi^2.$$

De (2.14), con $a = -x$ y $b = \xi$, se obtiene

$$-2\ x\ \xi \leq x^2\ \epsilon^{-1} + \epsilon\ \xi^2.$$

Por lo tanto,

$$-(1+\epsilon^{-1})x^2 - (1+\epsilon)\xi^2 \leq -(x-\xi)^2.$$

Ahora veamos lo siguiente

$$-(x-\xi)^2 \leq -(1-\epsilon^{-1})x^2 - (1-\epsilon)\xi^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$2\ x\ \xi \leq x^2\ \epsilon^{-1} + \epsilon\ \xi^2.$$

De (2.14), con $a = x$ y $b = \xi$, se concluye

$$2\ x\ \xi \leq x^2\ \epsilon^{-1} + \epsilon\ \xi^2.$$

Por lo tanto,

$$-(x-\xi)^2 \leq -(1-\epsilon^{-1})x^2 - (1-\epsilon)\xi^2,$$

entonces

$$-(1+\epsilon^{-1})x^2 - (1+\epsilon)\xi^2 \leq -(x-\xi)^2 \leq x^2\ \epsilon^{-1} + \epsilon\ \xi^2,$$

teniendo en cuenta que la función e^x es creciente, obtenemos

$$e^{-(1+\epsilon^{-1})\ x^2/4t}\ e^{-(1+\epsilon)\ \xi^2/4t} \leq\ e^{-(x-\xi)^2/4t} \leq\ e^{-(1-\epsilon^{-1})\ x^2/4t}\ e^{-(1-\epsilon)\ \xi^2/4t}, \qquad (2.15)$$

para todo $t > 0$. Definiendo las funciónes de valores positivos

$$F_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-(1+\epsilon^{-1})\ x^2/4t}, \qquad F_2(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{-(1-\epsilon^{-1})\ x^2/4t},$$

se obtiene

$$F_1(x,t)\ e^{-(1+\epsilon)\ \xi^2/4t} \leq\ K(x-\xi,t) \leq\ F_2(x,t)\ e^{-(1-\epsilon)\ \xi^2/4t}. \qquad (2.16)$$

Consideremos la función

$$f(x) = C_1\ e^{C_2|x|^{2+\alpha}}, \qquad \alpha > 0, \qquad (2.17)$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas. De (2.16) vemos que

$$K(x-\xi,t)f(\xi) \geq F_1 C_1\ e^{C_2|\xi|^{2+\alpha}-(4t)^{-1}(1+\epsilon)\ \xi^2}. \qquad (2.18)$$

Ahora, si ξ es suficientemente grande, se tiene que

$$C_2|\xi|^\alpha > \frac{(1+\epsilon)}{4t}$$

por ende, si $|\xi| \to \infty$,

$$F_1 C_1\ e^{C_2|\xi|^{2+\alpha}-(4t)^{-1}(1+\epsilon)\ \xi^2} \to \infty,$$

es decir

$$K(x-\xi,t)f(\xi) \to \infty.$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi)\ d\xi = \infty, \qquad (2.19)$$

esto es, la integral diverge. Lo mismo ocurre para todas las funciones f que son asintóticas cuando $|x| \to \infty$ a la función $C_1\ e^{C_2|x|^{2+\alpha}}$ para todo $\alpha > 0$. Ahora, consideremos la función

$$f(x) = C_1\ e^{C_2 x^2}. \qquad (2.20)$$

De (2.16), se sigue que

$$f(\xi)K(x-\xi,t) \leq C_1 F_2 \; e^{[C_2-(4t)^{-1}(1-\epsilon)]\xi^2}. \tag{2.21}$$

Como

$$C_2 - \frac{(1-\epsilon)}{4t} < 0, \tag{2.22}$$

para cada $0 < \epsilon < 1$ y además

$$0 < t < \frac{1-\epsilon}{4C_2} < \frac{1}{4C_2}. \tag{2.23}$$

De la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx,$$

(ver Capítulo 1), se sigue que para cada $0 < t < \dfrac{1}{4C_2}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi) \; d\xi < \infty, \tag{2.24}$$

es decir, la integral es convergente.

Lo mismo se tiene para todas las funciones f continuas a trozos y asintóticas cuando $|x| \to \infty$ a la función $C_1 \; e^{C_2 x^2}$. Finalmente, analizaremos el tipo de funciones definidas como

$$f(x) = C_1 \; e^{C_2|x|^{1+\alpha}}, \qquad\qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{2.25}$$

De (2.16), se sigue que

$$K(x-\xi,t)f(\xi) \leq C_1 F_2 \; e^{C_2|\xi|^{1+\alpha}-(4t)^{-1}(1-\epsilon)\xi^2}. \tag{2.26}$$

Como

$$C_2 - \frac{(1-\epsilon)|\xi|^{1-\alpha}}{4t} < 0 \tag{2.27}$$

para $0 < \epsilon < 1$ y $|\xi|$ suficientemente grande, es decir,

$$C_2|\xi|^{1+\alpha} - (4t)^{-1}(1-\epsilon)\xi^2 < 0,$$

lo cual implica que para todo x y $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)f(\xi) \; d\xi < \infty \tag{2.28}$$

para toda función que satisface

$$|f(x)| \leq C_1 \; e^{C_2|x|^{1+\alpha}}, \qquad\qquad 0 \leq \alpha < 1. \tag{2.29}$$

Retomando el hecho de que

$$\frac{\partial^{m+n} K}{\partial x^n \partial t^m}(x,t) = R_{m,n}(x, t^{1/2}) K(x,t). \tag{2.30}$$

Donde $R_{m,n}$ es una función racional, del razonamiento anterior y del teorema de la integral de la derivada se sigue que si f satisface (2.29), entonces u es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t)|t > 0\}$ y además del hecho de que $K_t = K_{xx}$, se tiene que $u_t = u_{xx}$. En otro caso , si f es asintótica cuando x tiende a infinito a la función $C_1 \; e^{C_2 x^2}$, entonces u es infinitamente diferenciable y satisface $\quad u_t = u_{xx}$, en cada $D_T = \{(x,t)| -\infty < x < \infty \quad y \quad 0 < t \leq T\}$, donde $T < \frac{1}{4C_2}$.

2.4. Continuidad de la función $u(x,t)$ en $t = 0$

En está sección vamos a investigar la continuidad de $u(x,t)$ en $t = 0$. Para facilitar las cosas, debemos demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 2.2. *Para toda función continua f que satisface $|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas, se tiene que el límite*

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x) \tag{2.31}$$

es uniforme para todo x en cualquier subconjunto compacto de $-\infty < x < \infty$.

Demostración. De acuerdo a la propiedad C del Teorema 2.1, $f(x)$ se puede escribir como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; f(x) \; d\xi. \tag{2.32}$$

Entonces, para cada x fijo, tenemos que

$$u(x,t) - f(x) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t), \tag{2.33}$$

donde

$$J_1(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{x-\delta} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; [f(\xi) - f(x)] \; d\xi, \tag{2.34}$$

$$J_2(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; [f(\xi) - f(x)] \; d\xi, \tag{2.35}$$

y

$$J_3(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; [f(\xi) - f(x)] \; d\xi. \tag{2.36}$$

De la continuidad de f, se sigue que f es uniformemente continua, es decir, para todo subconjunto compacto K de $-\infty < x < \infty$, se tiene que, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.37}$$

esto se tiene para cada x y ξ en K tal que $|x - \xi| < \delta_\xi$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x - \delta_\xi \leq \xi \leq x + \delta_\xi$ está contenido en K. Ahora, si $\delta_\xi = \delta$, entonces de acuerdo a la propiedad C del Teorema 2.1 se tiene que

$$|J_2(t)| \leq \int_{x-\delta_\xi}^{x+\delta_\xi} K(x-\xi,t)|f(\xi) - f(x)| \; d\xi \leq \frac{\epsilon}{3} \int_{x-\delta_\xi}^{x+\delta_\xi} K(x-\xi,t) \; d\xi \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.38}$$

Consideremos ahora la función $J_3(t)$. Como por hipótesis $|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}$, entonces se deduce que

$$|f(\xi) - f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2} + C_1 e^{C_2 \xi^2}.$$

Por otra parte, como $x < x + \delta_\xi \leq \epsilon$, entonces $C_1 e^{C_2 x^2} \leq C_1 e^{C_2 \xi^2}$, de ello que

$$|f(\xi) - f(x)| \leq 2C_1 e^{C_2 \xi^2}.$$

Por lo tanto,

$$|J_3(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x+\delta_\xi}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; |f(\xi) - f(x)| \; d\xi \leq 2C_1 \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x+\delta_\xi}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \; e^{C_2 \xi^2} \; d\xi. \tag{2.39}$$

Mediante el cambio de variable $\rho = (x - \xi)/2(\sqrt{t})$, se obtiene

$$|J_3(t)| \leq 2C_1 \int_{-\infty}^{-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2 + C_2(x - 2\sqrt{t}\;\rho)^2} \; d\rho. \tag{2.40}$$

Mediante la desigualdad

$$C_2(x - 2\sqrt{t}\;\rho)^2 \leq 2C_2 x^2 + 8C_2 t \rho^2 \tag{2.41}$$

(la cual de deduce considerando $C_2(x + 2\sqrt{t}\;\rho)^2 \geq 0$), (2.40) se convierte en

$$|J_3(t)| \leq 2C_1 \; e^{2C_2 x^2} \int_{-\infty}^{-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})} e^{(8C_2 t - 1)\rho^2} \; d\rho. \tag{2.42}$$

Consecuentemente, para $0 < t < (16C_2)^{-1}$ se tiene que $(8C_2t - 1)\rho^2 \leq \dfrac{-\rho^2}{2}$. Y así

$$|J_3(t)| \leq C \int_{-\infty}^{-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2/2}\ d\rho, \tag{2.43}$$

donde

$$C = 2C_1\ e^{2C_2A^2}$$

para $|x| < A$. La convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\rho^2/2}\ d\rho, \tag{2.44}$$

implica la existencia de un τ_ϵ tal que para todo $0 < t < \tau_\epsilon$,

$$|J_3(t)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.45}$$

es uniforme para todo $|x| < A$. Lo anterior se tiene ya que $\int_{-\infty}^{-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2/2}\ d\rho$, tiene como límite superior de integración el factor $-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})$, el cual depende de t, de ello que cuando t se hace muy pequeño entonces $-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})$ tiende a $-\infty$, y como la integral (2.44) es convergente, entonces

$$\int_{-\infty}^{-\delta_\epsilon/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2/2}\ d\rho,$$

tiende a cero. Es decir, existe un τ_ϵ, tal que para todo $0 < t < \tau_\epsilon$,

$$|J_1(t)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.46}$$

es uniforme para todo $|x| < A$. La elección de A se hace de manera que el subconjunto compacto K de $-\infty < x < \infty$, esté contenido en $|x| < A$. De (2.38), (2.45) y (2.46), se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\tau_\epsilon > 0$ tal que para $0 < t < \tau_\epsilon$,

$$|u(x,t) - f(x)| < \epsilon \tag{2.47}$$

para todo x en un subconjunto compacto K de $-\infty < x < \infty$ □

Teorema 2.3. *Para toda función f continua a trozos que satisface $|f(x)| \leq C_1e^{C_2x^2}$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas, el límite*

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \tag{2.48}$$

es uniforme para todo x en subconjuntos compactos de contenidos en los intervalos donde f es continua.

Demostración. Para todo punto x que pertenece a un subconjunto compacto donde f es continua, δ_ϵ se pude elegir independientemente del punto x por la continuidad uniforme local de f. □

2.5. Un teorema de existencia

En está sección reunimos todos los resultados analizados en las secciones anteriores de este capítulo, con el fin de enunciar el siguiente Teorema

Teorema 2.4 (Existencia). *Para toda función f continua o continua a trozos que satisface*

$$|f(x)| \leq C_1 e^{C_2|x|^{1+\alpha}}, \qquad 0 \leq \alpha < 1, \tag{2.49}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas, la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t) f(\xi)\, d\xi, \qquad t > 0, \tag{2.50}$$

donde $K(x-\xi,t)$ está definida por (2.8), *es una solución del problema de valor inicial*

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, & t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty. & \end{array} \tag{2.51}$$

Para toda función f continua o continua a trozos asintótica a $C_1 e^{C_2 x^2}$ cuando $|x|$ tiende a infinito, u es definida solo para $0 < t < \frac{1}{4C_2}$ y satisface el problema de valor inicial

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, & 0 < t < \frac{1}{(4C_2)}, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, & \end{array} \tag{2.52}$$

Demostración. La prueba de este teorema se encuentra en el análisis que se hizo en las secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4. En la sección 2.1 se encontró que (2.50) constituía una representación formal de una posible solución para el problema planteado en (2.51), posible, porque no sabíamos aún si la solución planteada en (2.50) era convergente, es decir, no sabíamos si en verdad la solución $u(x,t)$ era una función. Si $f(x)$ es una función continua a trozos y cumple la condición (2.49), entonces de acuerdo al análisis hecho en las secciones 2.2 y 2.3 se tiene que (2.50) converge. Finalmente nos faltaría demostrar la continuidad de $u(x,t)$ en $t = 0$, es decir, que

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x),$$

esto se necesita para ver que $u(x,t)$ cumpla con la condición de que $u(x,0) = f(x)$. Usando los resultados obtenidos en la sección 2,4, tenemos que para toda función $f(x)$ continua o continua a trozos que satisfaga $|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas, entonces

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x),$$

como $f(x)$ satisface la condición (2.49), entonces de allí que $|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}$, de ello que

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x).$$

Probadas todas las condiciones anteriores, se concluye que para el tipo de funciones $f(x)$ continuas a trozos que satisfacen (2.49) la función dada en (2.50) es una solución para el problema de valor inicial (2.51). La segunda parte del teorema se prueba de manera similar. $\square$

A continuación veremos dos ejemplos de dos problemas de valor inicial. El primer problema consiste en encontrar una solución para

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 < t, \\ (CI) & u(x,0) = x, & -\infty < x < \infty, & \end{array}$$

De acuerdo al teorema anterior este problema tiene solución y está viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \ \xi \ d\xi,$$

haciendo el cambio de variable $z = \dfrac{x-\xi}{2\sqrt{t}}$, la integral anterior se convierte en

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \ (x - 2\sqrt{t}\ z) \ dz = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \ dz - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \ z \ dz.$$

De (1.13), se obtiene finalmente que

$$u(x,t) = x.$$

El segundo problema consiste en

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 < t, \\ (CI) & u(x,0) = e^x, & -\infty < x < \infty, & \end{array}$$

De acuerdo al teorema anterior este problema tiene solución y está viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} \ e^{\xi} \ d\xi,$$

haciendo de nuevo el cambio de variable $z = \dfrac{x-\xi}{2\sqrt{t}}$, la integral anterior se convierte en

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 - 2\sqrt{t}\ z + \ x} \ dz = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+\sqrt{t})^2} \ dz.$$

Haciendo el cambio de variable $w = z + \sqrt{t}$ la anterior integral se convierte en

$$u(x,t) = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \ dw.$$

Finalmente, mediante (1.13), se obtiene finalmente que

$$u(x,t) = e^{x+t}.$$

2.6. Un teorema de unicidad

De (2.41), se puede ver que, para toda función f continua a trozos que satisface $|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}$, una estimación similar a la establecida en (2.42) puede ser empleada para mostrar que, para $0 < t < \frac{1}{(16C_2)}$,

$$|u(x,t)| \leq C_1 e^{2C_2 x^2}\ \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2/2}\ d\rho \leq \sqrt{2}\ C_1 e^{2C_2 x^2}.$$

De acuerdo a eso, sería interesante empezar nuestro estudio de unicidad, mostrando que solo existe una solución del problema de valor inicial (2.51), que satisface la siguiente condición

$$|u(x,t)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}, \tag{2.53}$$

para todo $t > 0$.

Supongamos que $u(x,t)$ y $w(x,t)$ son soluciones para el problema de valor inicial (2.51), que satisface (2.53). Sea $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$. De ello que $v(x,t)$ satisface las siguientes condiciones

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & -\infty < x < \infty, \qquad 0 < t < T, \\ v(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty, \\ |v(x,t)| \leq C_1\ e^{C_2 x^2}, & -\infty < x < \infty, \qquad 0 < t < T, \end{cases}$$

Esta última condición se obtiene al reemplazar la constante $2C_1$ por C_1, ya que inicialmente se tiene que $|v(x,t)| \leq 2C_1\ e^{C_2 x^2}$. La idea consiste en demostrar que $v = 0$. En el Capítulo 1 vimos que se pueden generar soluciones de $u_t = u_{xx}$ a partir de otra solución de sí misma, por ello que podemos obtener una particular solución de $u_t = u_{xx}$ a partir de la solución $K(x,t)$, por medio de una multiplicación por una constante, una traslación y una transformación afín. Sea

$$W(x,t) = \sqrt{4\pi} K(\alpha x, 1 + \alpha^2 t),$$

donde $\alpha = i\sqrt{4C_3}$ y $C_3 > 0$, $C_3 > C_2$, y $C_3 > (4T)^{-1}$. Entonces

$$W(x,t) = (1 - 4C_3 t)^{-1/2}\ e^{C_3 x^2 (1 - 4C_3 t)^{-1}},$$

es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} W_t = W_{xx}, &\qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < (4C_3)^{-1}, \\ W(x,0) = e^{C_3 x^2}, &\qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Seleccionando un punto (x_1, t_1) con $0 < t_1 < (4C_3)^{-1}$ del rectángulo

$$R = \left\{ (x,t) | -A \leq x \leq A, \qquad 0 \leq t \leq (4C_3)^{-1} \right\}$$

donde A es cualquier número real positivo tal que $A > |x_1|$. Ahora comparemos las funciones $\pm v(x,t)$ con

$$z(x,t) = C_1\ e^{(C_2 - C_3)A^2}\ W(x,t), \tag{2.54}$$

en el rectángulo R.

Para $t = 0$, tenemos que

$$0 = |v(x,0)| \leq z(x,0) = C_1\ e^{(C_2 - C_3)A^2}\ e^{C_3 x^2}. \tag{2.55}$$

En los lados $x = \pm A$ de R,

$$|v(\pm A, t)| \leq C_1\ e^{C_2 A^2}. \tag{2.56}$$

Sin embargo, para $0 < t < (4C_3)^{-1}$, se tiene que

$$z(\pm A, t) = C_1 (1 - 4C_3 t)^{-1/2}\ e^{C_2 A^2}\ e^{C_3 A^2 (1 - 4C_3 t)^{-1} - C_3 A^2} \geq C_1\ e^{C_2 A^2}. \tag{2.57}$$

ya que $(1 - 4C_3 t)^{-1} \geq 1$ y $(1 - 4C_3 t)^{-1/2} \geq 1$. Consecuentemente,

$$|v(\pm A, t)| \leq z(\pm A, t). \tag{2.58}$$

Aplicando la extensión del Teorema de comparación 1.19, se llega a que

$$-z(x_1, t_1) \leq v(x_1, t_1) \leq z(x_1, t_1). \tag{2.59}$$

De ello que, para todo $A > 0$,

$$|v(x_1, t_1)| \leq C_1\ e^{(C_2 - C_3)A^2} W(x_1, t_1). \tag{2.60}$$

Como $C_3 > C_2$, entonces $|v(x_1, t_1)|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, eligiendo a A suficientemente grande. Así,

$$v(x_1, t_1) = 0. \tag{2.61}$$

Como (x_1, t_1) fue un punto elegido arbitrariamente, tal que $0 < t_1 < (4C_3)^{-1}$, se sigue que $v(x,t) = 0$ para $-\infty < x < \infty$, $0 < t < (4C_3)^{-1}$. Sin embargo, eso implica que $v(x,t) = 0$ para $-\infty < x < \infty$, $0 < t < T$. Si eso no fuera cierto, entonces podríamos encontrar un punto (x_2, t_2), de manera que t_2 fuera el tiempo más cercano a $(4C_3)^{-1}$, es decir $(4C_3)^{-1} \leq t_2 < T$, tal que $v(x_2, t_2) \neq 0$. Considerando la sucesión $t_2 - 1/n$, la cual converge a t_2. Como $v_t(x,t)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$, la función $v(x,t)$ es continua en t_2. Por lo tanto, $v(x_2, t_2 - 1/n) \to v(x_2, t_2)$; esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|v(x_2, t_2 - 1/n) - v(x_2, t_2)| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$. Es decir

$$v(x_2, t_2) - \epsilon < v(x_2, t_2 - 1/n) < v(x_2, t_2) + \epsilon, \tag{2.62}$$

para todo $n \geq N$. Como $v(x_2, t_2) \neq 0$, podemos considerar el caso en que $v(x_2, t_2) > 0$. Entonces podemos tomar a $\epsilon = \dfrac{v(x_2, t_2)}{2}$, reemplazando en la parte izquierda de (2.62), se llega a que

$$v(x_2, t_2 - 1/n) > 0,$$

para todo $n \geq N$, lo cual es imposible ya que $v(x_2, t_2 - 1/n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por la hipótesis, t_2 es el tiempo más pequeño o más cercano a $(4C_3)^{-1}$, tal que $v(x_2, t_2) \neq 0$). Considerando ahora el caso en que $v(x_2, t_2) < 0$, podemos elegir a $\epsilon = -\dfrac{v(x_2, t_2)}{2}$. Al reemplazar en la parte derecha de (2.62), se obtiene

$$v(x_2, t_2 - 1/n) < 0,$$

para todo $n \geq N$. Nuevamente esto es absurdo ya que $v(x_2, t_2 - 1/n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $v(x_2, t_2) = 0$, lo cual contradice nuestra suposición inicial de que $v(x_2, t_2) \neq 0$, de ello que $v(x, t) = 0$ para $-\infty < x < \infty$, $0 < t < T$. Como T se puede tomar tan grande como se quiera, entonces podemos concluir que $u(x, t) = w(x, t)$ para todo $t > 0$. De estos resultados se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.5 (Unicidad). *La solución $u(x, t)$ del teorema 2.4 es única dentro del conjunto de soluciones $v(x, t)$ del problema de valor inicial que admite a lo más un número finito de discontinuidades acotadas en $t = 0$, y que satisface una condición de crecimiento de la forma*

$$|v(x, t)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}, \tag{2.63}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas.

Demostración. La prueba de este teorema se encuentra hecha en el ánalisis que hicimos anteriormente. $\square$

Observación 2.1. *Es importante resaltar que en el teorema anterior la hipótesis de que la solución única $u(x, t)$ que garantiza el resultado anterior, debe admitir a lo más un número finito de discontinuidades acotadas en $t = 0$, es decir, en su frontera parabólica B_T, porque esto permite aplicar el Teorema* ***extendido de comparación****, como se aplicó en la prueba del Teorema.*

2.7. No unicidad

Se pueden dar ejemplos de soluciones no triviales para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{2.64}$$

El primer ejemplo consiste en la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t)\, \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.65}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t^{-2}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

También la función $u(x,t) = 0$ es solución del problema (2.64). De acuerdo al Teorema 2.5, la función dada en (2.65) debe exceder la condición de crecimiento $C_1 e^{C_2 x^2}$.

Capítulo 3

Un problema de valor inicial con condiciones de frontera

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial con condiciones en la frontera,

$$\begin{array}{rlll} (EDP) & u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, & t > 0, \\ (CI) & u(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, & \\ (CF) & u(0,t) = g(t), & t > 0, & \end{array} \tag{3.1}$$

donde f y g son funciones continuas, o continuas a trozos, conocidas. (ver Figura 1.6). La metodología a seguir será la misma a la llevada a cabo en el capítulo anterior, es decir, primero buscaremos una representación formal de una solución para el problema, luego hablaremos de las propiedades de esta solución, para finalmente ver bajo que condiciones se pueden formular los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para el problema planteado en (3.1). Para desarrollar estos temas acudiremos algunas veces a [1], [3] y [5].

De acuerdo a la linealidad de $u_t = u_{xx}$, podemos descomponer el problema (3.1) en dos problemas. Considerando $u = v + w$, donde v satisface

$$\begin{array}{rll} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \infty, & t > 0, \\ v(0,t) = 0, & 0 < t, & \\ v(x,0) = f(x), & 0 < x < \infty, & \end{array} \tag{3.2}$$

y w satisface

$$\begin{array}{rll} w_t = w_{xx}, & 0 < x < \infty, & t > 0, \\ w(0,t) = g(t), & t > 0, & \\ w(x,0) = 0, & 0 < x < \infty, & \end{array} \tag{3.3}$$

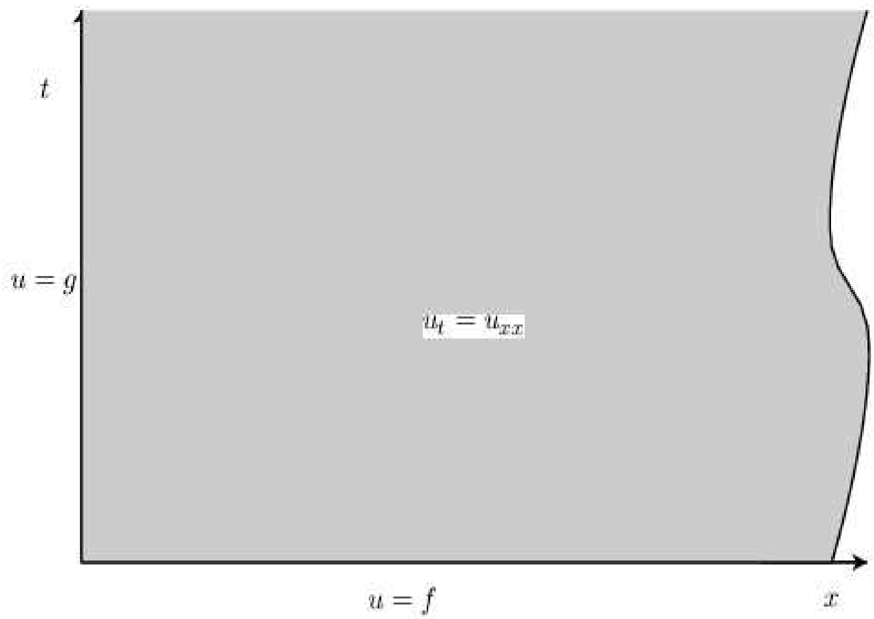

Figura 1.6

Consideremos el problema planteado en (3.2). Para ello, definamos la transformada del seno de Fourier de la función $v(x,t)$, la cual está dada por

$$v_s(\alpha,t) = \int_0^\infty v(x,t)\ sen(\alpha x)\ dx. \tag{3.4}$$

Al multiplicar ambos lados la ecuación en derivadas parciales por $sen(\alpha x)$ e integrar desde 0 a ∞ con respecto a x, tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\ sen(\alpha x)\ dx. = \int_0^\infty \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\ sen(\alpha x)\ dx. \tag{3.5}$$

Mediante el Teorema de la transformada de Fourier de las derivadas de una función, Teorema 1.14, encontramos que el lado derecho de (3.5) se convierte en

$$\int_0^\infty v_{xx}(x,t)\ sen(\alpha x)\ dx = -\alpha^2 v_s(\alpha,t). \tag{3.6}$$

De ello la ecuación (3.5) se convierte en

$$\frac{dv_s(\alpha,t)}{dt} = -\alpha^2 v_s(\alpha,t). \tag{3.7}$$

La anterior ecuación diferencial lineal, se puede resolver fácilmente, no nos detendremos en eso, lo importante es ver que la solución viene dada por

$$v_s(\alpha, t) = C\ e^{-\alpha^2 t} \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.4) y (3.8), tenemos que

$$v_s(\alpha, 0) = C = F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\ sen(\alpha x)\ dx. \tag{3.9}$$

Entonces

$$v_s(\alpha, t) = F_s(\alpha)\ e^{-\alpha^2 t} \tag{3.10}$$

Usando el teorema de inversión para la transformada del seno de Fourier 1.12, tenemos que

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\alpha)\ e^{-\alpha^2 t}\ sen(\alpha x)\ d\alpha \tag{3.11}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\Bigg(\int_0^\infty sen(\alpha\xi)\ sen(\alpha x)\ e^{-\alpha^2 t}\ d\alpha\Bigg) d\xi. \tag{3.12}$$

Usando identidades trigonométricas, se tiene que la ecuación (3.11) se convierte en

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\Bigg(\int_0^\infty (\cos(\alpha(x-\xi)) - \cos(\alpha(x+\xi)))\, e^{-\alpha^2 t}\, d\alpha\Bigg) d\xi. \tag{3.13}$$

Teniendo en cuenta que en el Capítulo 1 se demostró la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 b}\cos(\alpha r)\ d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\ e^{-r^2/4b} \tag{3.14}$$

entonces basta hacer, en (3.13), $b = t$, $r = x \pm \xi$, de acuerdo a cada caso, para así obtener finalmente

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\ [e^{-(x-\xi)^2/4t} - e^{-(x+\xi)^2/4t}]\ d\xi. \tag{3.15}$$

Ahora consideremos el problema planteado en (3.3). Antes de encontrar una representación de una solución del problema, es importante demostrar el Teorema de Duhamel asociado a un problema de valor en la frontera, que en nuestro caso es unidimensional. La importancia del Teorema de Duhamel radica en el hecho de que podemos encontrar una solución para el problema (3.3) a partir de una solución de un problema análogo a (3.3), donde lo único que cambia es la condición sobre la función $w(0,t)$ que en vez de considerarla como una función $g(t)$, es considerada como una constante c, es decir, $w(0,t) = c$. Antes de formular el Teorema de Duhamel, haremos una serie de razonamientos lógicos que nos llevarán a formular después el Teorema.

Considerando de nuevo el problema

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, w(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, w(x,t), & t > 0, \\ w(0,t) = g(t), & t > 0, \\ w(x,0) = 0 & x > 0. \end{cases}$$

Podemos utilizar la transformada de Laplace para transformar el complicado problema de valor en la frontera (A), en un problema más fácil de resolver. Si denotamos por $\widehat{w}(x,s)$, $\widehat{w}(0,s)$, las transformadas de Laplace con respecto a la variable t de las funciones $w(x,t)$ y $w(0,t)$ respectivamente. Por definición de transformada de Laplace tenemos que

$$\widehat{w}(x,s) = \int_0^\infty w(x,t)\; e^{-st}\; dt. \tag{3.16}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (A) por e^{-st} e integrando con respecto a t desde 0 a ∞, y haciendo uso del resultado

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\, w(x,t)\; e^{-st}\; dt &= [w(x,t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty w(x,t)e^{-st}\; dt \\ &= -w(x,0) + s\widehat{w}(x,s). \end{aligned}$$

Tenemos que las ecuaciones presentadas en (A) se convierten en el par de ecuaciones

$$(A') \qquad \begin{cases} s\widehat{w}(x,s) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{w}(x,s)\ , \\ \widehat{w}(0,s) = \int_0^\infty g(t)\; e^{-st}\; dt. \end{cases}$$

Supongamos ahora que la función de temperatura $\phi(x,t,t')$ dependiente del parámetro fijo t', es una solución del problema de valor en la frontera (A), en el caso en que la función $w(0,t)$ no dependa del parámetro t, sino que dependa del parámetro t', es decir, $w(0,t) = w(0,t')$. De ello que la función $\phi(x,t,t')$ satisface las condiciones

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, \phi(x,t,t') = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, \phi(x,t,t'), \\ \phi(0,t,t') = g(t'), \\ \phi(x,0,t') = 0. \end{cases}$$

Si $\widehat{\phi}(x,s,t')$ es la transformada de Laplace de la función $\phi(x,t,t')$, con respecto a la variable t, y haciendo uso del resultado

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\, \phi(x,t,t')\; e^{-st}\; dt = \phi(x,0,t') + s\; \widehat{\phi}(x,s,t'),$$

se tiene que las ecuaciones en (B) son equivalentes a las dos ecuaciones

$$s\ \widehat{\phi}(x,s,t') = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \widehat{\phi}(x,s,t'), \qquad \overline{\phi}(0,s,t') = s^{-1}g(t'). \tag{3.17}$$

Multiplicando ambos lados de (3.17) por $e^{-st'}$ e integrando con respecto a t' de 0 a ∞, se obtiene

$$(B') \qquad \begin{cases} s\Phi(x,s) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ \Phi(x,s), \\ \Phi(0,s) = s^{-1}\widehat{g}(s), \end{cases}$$

donde

$$\widehat{g}(s) = \int_0^\infty g(t')\ e^{-st'}\ dt'$$

y

$$\Phi(x,s) = \int_0^\infty \widehat{\phi}(x,s,t')\ e^{-st'}\ dt' = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+t')}\ \phi(x,t,t')\ dt\ dt',$$

es la transformada de Laplace iterada o doble de la función $\phi(x,t,t')$. Multiplicando cada miembro de las dos ecuaciones presentadas en (B') por s, se puede ver que los problemas (A') y (B') son equivalentes, así que la función $s\Phi(x,s)$ es una solución del problema de valor en la frontera (A'). Si asumimos que la solución de ese problema es única, entonces debemos tener que

$$\widehat{w}(x,s) = s\Phi(x,s). \tag{3.18}$$

Ahora, de acuerdo a (1.55) del Capítulo 1, se sigue que $\Phi(x,s)$, la cual es la transformada de Laplace iterada de la función $\phi(x,t,t')$, es también la transformada de Laplace de la convolución generalizada

$$\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'. \tag{3.19}$$

Así que $s\Phi(x,s)$ es la transformada de la función

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s\Phi(x,s)\ e^{st}\ ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt',$$

La parte izquierda de la igualdad anterior, se tiene utilizando el teorema de la transformada inversa de Laplace Teorema 1.15, y la parte derecha se explica del hecho de que $\Phi(x,s)$ es la transformada de Laplace de la función

$$\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'$$

y viendo que la transformada de Laplace de la función

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'$$

es igual a la transformada de Laplace de la convolución

$$\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'$$

multiplicada por s, para ello basta integrar por partes la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'\right) e^{st}dt.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.18) por e^{st} e integrando con respecto a s alrededor del contorno $R(s)=\gamma$ de $\gamma-i\infty$ a $\gamma+i\infty$, utilizando el teorema 1.15 y de acuerdo a la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \widehat{w}(x,s)\ e^{st}\ ds = w(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s\Phi(x,s)\ e^{st}\ ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'. \tag{3.20}$$

finalmente se concluye que

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'. \tag{3.21}$$

El anterior razonamiento es la prueba del siguiente teorema

Teorema 3.1 (Teorema de Duhamel). *La solución $w(x,t)$ del problema de valor en la frontera (A), es dado en términos de la solución $\phi(x,t,t')$ del problema de valor en la frontera (B) por medio de la fórmula*

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \phi(x,t-t',t')\ dt'.$$

Ahora estamos en capacidad de encontrar una representación formal de una solución para el problema presentado en (3.3). Iniciemos considerando el siguiente problema

$$\begin{aligned} w_t = w_{xx} \qquad & x>0, \\ w(x,0)=0, \quad & x>0, \\ w(0,t)=w_0 \quad & t>0., \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde w_0 es constante. Para encontrar una representación formal de una solución para este problema, iniciamos considerando la transformada del seno de Fourier de la función $w(x,t)$:

$$w_s(\alpha,t) = \int_0^\infty w(x,t)\ sen(\alpha x)\ dx. \tag{3.23}$$

Integrando por partes y considerando que $w(0,t) = w_0$, $w(\infty,t) = 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t)\ sen(\alpha x)\ dx = \alpha w_0 - \alpha^2 \int_0^\infty w(x,t)\ sen(\alpha x)\ dx.$$

De ello que, multiplicando ambos lados de la primera igualdad presentada en (3.22) por $sen(\alpha x)$ e integrando con respecto a x de 0 a ∞, obtenemos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d}{dt} w_s(\alpha,t) + \alpha^2 w_s(\alpha,t) = \alpha\ w_0$$

cuya solución viene dada por

$$w_s(\alpha,t) = \frac{w_0}{\alpha} + c\ e^{-\alpha^2 t}$$

haciendo $t = 0$ en la anterior igualdad y teniendo en cuenta que $w(x,0) = 0$, lo cual implica que $w_s(\alpha,0) = 0$, se llega a que $c = -\dfrac{w_0}{\alpha}$, de lo cual

$$w_s(\alpha,t) = w_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha^2 t}}{\alpha} \right).$$

Aplicando el teorema de inversión para la transformada del seno de Fourier, teorema 1.12, obtenemos la expresión para la función de temperatura $w(x,t)$

$$w(x,t) = \frac{2}{\pi}\ w_0 \int_0^\infty \frac{sen(\alpha x)}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha^2 t}\right)\ d\alpha. \tag{3.24}$$

Haciendo uso del resultado obtenido en (1.16)

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2} \frac{sen(2\beta y)}{\beta}\ d\beta = \frac{\pi}{2}\ erf(y) \tag{3.25}$$

donde

$$erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2}\ d\xi.$$

haciendo en la igualdad anterior $y = x/2\sqrt{t}$, $\beta = \alpha\sqrt{t}$, tenemos que

$$-\frac{2}{\pi}\ w_0 \int_0^\infty \frac{sen(\alpha x)}{\alpha}\ e^{-\alpha^2 t}\ d\alpha = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ w_0 \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2}\ d\xi. \tag{3.26}$$

Ahora teniendo en cuenta el resultado obtenido en (1.9), se deduce lo siguiente

$$\frac{2}{\pi}\ w_0 \int_0^\infty \frac{sen(\alpha x)}{\alpha}\ d\alpha = w_0 \tag{3.27}$$

utilizando el resultado obtenido en (3.24), (3.26), y, (3.27), se concluye

$$w(x,t) = w_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2}\, d\xi\right),$$

mediante el resultado obtenido en (1.13), se puede ver que

$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2}\, d\xi\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi. \tag{3.28}$$

Por lo tanto se obtiene

$$w(x,t) = w_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2}\, d\xi\right) = \frac{2w_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi. \tag{3.29}$$

La cual es una representación formal de una solución para el problema planteado en (3.22).
Ahora consideremos el problema de encontrar una representación formal de una solución para el problema

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} && 0 < x < \infty, \\ w(x,0) &= 0, && 0 < x < \infty, \\ w(0,t) &= g(t) && t > 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ahora si t' es un valor fijo de t , se sigue de la ecuación (3.29) que la solución de la ecuación $w_t = w_{xx}$, que satisface las condiciones en la frontera

$$w(0,t) = g(t'), \qquad\qquad w(x,0) = 0$$

es

$$w(x,t) = \frac{2\, g(t')}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Se sigue inmediatamente del Teorema 3.1 que la solución del problema planteado en la ecuación (3.30) viene dada por

$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t g(t')\, dt' \int_{x/2(t-t')^{1/2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

aplicando la regla de Leibnitz Teorema 1.6, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t g(t')\, dt' \int_{x/2(t-t')^{1/2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi &= \int_0^t g(t')\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x/2(t-t')^{1/2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi\right) dt' \\ &= \frac{x}{4}\int_0^t g(t')\frac{e^{-x^2/4(t-t')}}{(t-t')^{3/2}}\, dt'. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t g(t') \frac{e^{-x^2/4(t-t')}}{(t-t')^{3/2}} \ dt' = -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t') \ g(t') \ dt'.$$

Donde

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \ e^{-x^2/4t}$$

3.2. Propiedades de la convolución $w(x,t)$

En esta sección hablaremos acerca de las condiciones bajo las cuales la convolución

$$w(x,t) = -2 \int_0^t (\partial K/\partial x)(x, t-t') \ g(t') \ dt'$$

existe, además veremos lo siguiente

$$\lim_{t \to 0^+} w(x,t) = 0,$$

y,

$$\lim_{x \to 0^+} w(x,t) = g(t),$$

para finalmente establecer un Teorema de existencia de soluciones para el problema planteado en este capítulo.

Para todo $\xi > 0$ fijo, se probó en el capítulo 1, la siguiente desigualdad

$$e^{-\xi} \leq p! \ \xi^{-p}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.31}$$

Utilizando $\xi = x^2/4(t-t')$, gracias a (3.31), se tiene el resultado

$$\frac{\partial^{m+n} K}{\partial x^m \ \partial t^n}(x, t-t') = R_{m,n}(x, (t-t')^{1/2}) \ e^{-x^2/4(t-t')} \tag{3.32}$$

$$\leq R_{m,n}(x, (t-t')^{1/2}) \ p! \ \frac{[4(t-t')]^p}{x^{2p}}, \tag{3.33}$$

donde $R_{m,n}$ es una función racional y m, n enteros positivos, tomando un p adecuado se obtiene

$$\lim_{t' \to t^-} \frac{\partial^{m+n} K}{\partial x^m \ \partial t^n}(x, t-t') = 0. \tag{3.34}$$

Del mismo modo se puede ver lo siguiente

$$\frac{\partial^{m+n} K}{(\partial x^m \ \partial t^n)}$$

está acotada por constantes que dependen de x, m y n. Consecuentemente, es fácil especificar las condiciones para la existencia de la convolución $w(x,t)$. Solo basta escoger una función integrable continua a trozos g para que w esté bien definida, y que en $t' = 0$, g pueda crecer hasta $t'^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, esto con el fin de asegurar que el integrando tienda a cero cuando t' tiende a cero, tomando un p adecuado. Con todas estas especificaciones se puede ya garantizar la convergencia de la convolución

$$-2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ g(t')\ dt'.$$

Porque el integrando está acotado, y en los extremos $t' = 0$ y $t' = t$ el integrando tiende a cero.

De acuerdo a (3.32) y (3.34), aplicando la Regla de Leibnitz a la integral

$$-2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ g(t')\ dt',$$

se muestra que $w_t = w_{xx}$. Para $x > 0$ y $t > 0$, del hecho de que K_x satisface la ecuación de calor.

Claramente, para $x > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} w(x,t) = 0. \tag{3.35}$$

De hecho ese límite es uniforme para todo $x \geq \delta > 0$. Aplicando (3.31) con $p = 2$ y eligiendo $\xi = x^2/4(t-t')$, se puede ver que

$$2\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\right| \leq \frac{16\sqrt{t-t'}}{\sqrt{\pi}x^3} \leq 16\pi^{-1/2}\delta^{-3}(t-t')^{1/2} \tag{3.36}$$

para todo $x \geq \delta > 0$. Consecuentemente, de la continuidad a trozos e integrabilidad de g se sigue que existe una constante C tal que para todo $x \geq \delta > 0$ y $0 < t < T$,

$$|w(x,t)| \leq Ct^{(3-2\alpha)/2}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{3.37}$$

aquí se usó (3.36). La condición de crecimiento que cumple g en $t' = 0$, es decir $|g(t')| \leq C_1 t'^{-\alpha}$ para $0 < t < \epsilon$, y $(t-t')^{1/2} \leq t^{1/2}$. Implica la uniformidad del límite establecido en (3.35) para todo $x \geq \delta > 0$.

Ahora mostremos que, para $t > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} w(x,t) = g(t) \tag{3.38}$$

cuando t es un punto de continuidad de g. Para ello iniciamos considerando $g(t)W(x,t)$, donde

$$W(x,t) = -2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ dt',$$

usando la propiedad E del Teorema 2.1, se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} g(t)W(x,t) = \lim_{x\to 0^+} -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ g(t)\ dt' \tag{3.39}$$

$$= g(t). \tag{3.40}$$

Mejor aún, podemos ver que el límite anterior es uniforme para $t \geq \gamma > 0$ y $x > 0$. Mediante el cambio de variable $\rho = x/2\sqrt{t-t'}$, se tiene que

$$W(x,t) = -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ dt' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\rho^2}\ d\rho, \tag{3.41}$$

de acuerdo al resultado obtenido en el Capítulo 1,

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\ d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\rho^2}\ d\rho &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\rho^2}\ d\rho \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\gamma})} e^{-\rho^2}\ d\rho. \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\gamma})} d\rho = \pi^{-1/2}\gamma^{-1/2} x.
\end{aligned}$$

De ello que si tomamos $x < \delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{\pi^{-1/2}\gamma^{-1/2}}$, podemos decir que

$$\lim_{x\to 0^+} W(x,t) = 1$$

es uniforme para todo $t \geq \gamma > 0$, eso implica que el límite establecido en (3.39) es uniforme para todo $t \geq \gamma > 0$. Entonces para mostrar el límite que aparece en (3.38), es suficiente mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\{g(t') - g(t)\}\ dt' = 0. \tag{3.42}$$

Como g es continua en t, entonces en cada intervalo compacto, g es uniformemente continua, es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que $|g(t) - g(t')| < \epsilon/2$ para todo $|t - t'| < \delta_\epsilon$. Ahora consideramos la integral

$$J = -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\{g(t') - g(t)\}\ dt' \tag{3.43}$$

y escribiéndola en la forma

$$J = J_1 + J_2, \tag{3.44}$$

donde

$$J_1 = -2 \int_0^{t-\delta_\epsilon} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\{g(t') - g(t)\}\ dt' \tag{3.45}$$

y

$$J_2 = -2 \int_{t-\delta_\epsilon}^{t} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\{g(t') - g(t)\}\ dt'. \tag{3.46}$$

Como

$$-2(\partial K/\partial x)(x, t-t') = \frac{x}{4\pi^{1/2}(t-t')^{3/2}}\ e^{-x^2/4(t-t')} > 0$$

para $x > 0$, haciendo el cambio de variable $\rho = \dfrac{x}{2\sqrt{t-t'}}$, llegamos a que

$$|J_2| \leq \frac{\epsilon}{2}\left(-2 \int_{t-\delta_\epsilon}^{t} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')\ dt'\right) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{x/(2\sqrt{\delta_\epsilon})}^{\infty} e^{-\rho^2}\ d\rho\right) < \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.47}$$

Considerando el hecho de que $t - t' \leq \delta_\epsilon$, para J_1 se tiene que

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq -2 \int_0^{t-\delta_\epsilon} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')|g(t') - g(t)|\ dt' \\
&\leq -2 \int_0^{t} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t')|g(t') - g(t)|\ dt' \\
&\leq 2^{-1}\pi^{-1/2}\delta_\epsilon^{-3/2} x \int_0^t |g(t') - g(t)|\ dt' \\
&\leq 2^{-1}\pi^{-1/2}\delta_\epsilon^{-3/2} x \int_0^T |g(t') - g(t)|\ dt', \qquad\qquad 0 < t < T.
\end{aligned}$$

Entonces, para

$$0 < x < \pi^{1/2}\delta_\epsilon^{3/2}\left(\int_0^T |g(t') - g(t)|\ dt'\right)^{-1} \epsilon, \tag{3.48}$$

de ello que

$$|J_1| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.49}$$

Combinando (3.47) con (3.49), se puede ver que, dado $\epsilon > 0$, existe un $\Delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|J| < \epsilon \tag{3.50}$$

para todo x que satisface $0 < x < \Delta_\epsilon$. Esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *En cada punto t de continuidad de g,*

$$\lim_{x \to 0^+} -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t') g(t')\, dt' = g(t). \tag{3.51}$$

Demostración. Ver el análisis precedente al teorema. □

El siguiente resultado se obtiene como corolario del anterior teorema.

Corolario 3.1. *Para toda función continua a trozos g definida en $t > 0$,*

$$\lim_{x \to 0^+} -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t') g(t')\, dt' = g(t). \tag{3.52}$$

es uniforme para todo t que pertenece a un subconjunto compacto donde g es continua.

Demostración. Para un punto t que pertenece a un conjunto compacto donde g es continua, δ_ϵ se puede elegir independientemente del punto t por la continuidad uniforme local de g. □

3.3. Un Teorema de existencia

En está sección reunimos los resultado obtenidos en este capítulo para formular el siguiente Teorema.

Teorema 3.3 (Existencia)**.** *Para toda función continua o continua a trozos f que satisface*

$$|f(x)| \leq C_1 e^{C_2 |x|^{1+\alpha}}, \qquad 0 \leq \alpha < 1, \tag{3.53}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas, y para toda función continua o continua a trozos g que satisface

$$|g(t)| \leq C_1 t^{-\alpha}, \qquad 0 < t < \epsilon, \tag{3.54}$$

la función

$$u(x,t) = -2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-t') g(t')\, dt' + \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi, \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.55}$$

donde

$$G(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t), \qquad t > 0, \tag{3.56}$$

y

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t},$$

es una solución para el problema de valor inicial con condiciones en la frontera

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}, && 0 < x < \infty, \quad t > 0,\\
u(0,t) &= g(t), && t > 0,\\
u(x,0) &= f(x), && 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Para funciones continuas a trozos f que son asintóticas a $C_1 e^{C_2 x^2}$ cuando x tiende a infinito, $u(x,t)$ satisface (3.57) *solo para* $0 \leq t < \frac{1}{(4C_2)}$.

Demostración. La prueba está plasmada en el análisis hecho en las secciones 3.1 y 3.2. □

3.4. Unicidad y no unicidad

Podemos iniciar esta sección mostrando tres ejemplos de soluciones para un problema de valor inicial con condiciones en la frontera, para posteriormente establecer las condiciones que debe cumplir una solución para que sea única dentro del conjunto de soluciones para un problema de valor inicial con condiciones en la frontera. Consideremos el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}, && 0 < x < \infty, \quad t > 0,\\
u(0,t) &= 0, && t > 0,\\
u(x,0) &= 0, && 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

De acuerdo con el teorema anterior el problema (3.58) tiene solución y la solución construida en base al resultado anterior es $u(x,t) = 0$. El segundo ejemplo de una solución para el problema (3.58) es

$$u(x,t) = \frac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \frac{-x\ e^{-x^2/4t}}{4\pi^{1/2}t^{3/2}},$$

claramente $u_t = u_{xx}$,

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,t) = 0$$

para $t > 0$, y

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$$

para $x > 0$. Se puede notar que en la parábola $x = 2\sqrt{t},\ \ t > 0$,

$$u(2\sqrt{t}, t) = Ct^{-1}, \tag{3.59}$$

donde

$$C = -(2e\pi^{1/2})^{-1}. \tag{3.60}$$

Consecuentemente, $u(x,t)$ no está acotada en cualquier vecindad de $x = t = 0$, es decir en cada vecindad alrededor del origen u no está acotada.

El tercer ejemplo consiste en la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.61}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t^{-2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Ahora nuestro intéres se centra en determinar las condiciones bajo las cuales un problema de valor inicial con condiciones en la frontera tiene una única solución, por lo cual se hace necesario formular el siguiente teorema.

Teorema 3.4 (Unicidad)**.** *La solución $u(x,t)$ del teorema 3.3 es única dentro del conjunto de soluciones $v(x,t)$ que admiten a lo más un número finito de discontinuidades acotadas en la frontera parabólica y que satisface una condición de crecimiento de la forma*

$$|v(x,t)| \leq C_1 e^{C_2 x^2}, \tag{3.62}$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas.

Demostración. La demostración de este teorema es similar a la que demostración que se hizo para el teorema de unicidad del capítulo anterior, es decir, se supone que existen dos soluciones para el problema (3.57) que cumplen las hipótesis del teorema. Llamando $v(x,t)$ a la resta de las funciones soluciones, se tiene que

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, & & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0, & & t > 0, \\ v(x,0) &= 0, & & 0 < x < \infty, \end{aligned} \tag{3.63}$$

Ahora, consideramos el rectángulo

$$R = \{(x,t) | 0 \leq x \leq A, \qquad 0 \leq t \leq (4C_3)^{-1}\} \tag{3.64}$$

donde A es cualquier número positivo. Ahora, elegimos un punto (x_1, t_1), donde $0 < x_1 \leq A$ y $0 < t_1 < (4C_3)^{-1}$, y comparando las funciones $\pm v$ con la función de comparación

$$z(x,t) = C_1 e^{(C_2 - C_3)A^2} (1 - 4C_3 t)^{-1/2} e^{C_3 x^2 (1 - 4C_3 t)^{-1}}$$

definida en (2.54).

En R para $t = 0$

$$z(x, 0) \geq 0 = |v(x, 0)|, \tag{3.65}$$

para $x = 0$ y $0 < t < (4C_3)^{-1}$

$$z(0, t) \geq 0 = |v(0, t)|, \tag{3.66}$$

para $x = A$ y $0 < t < (4C_3)^{-1}$

$$z(A, t) = C_1(1 - 4C_3 t)^{-1/2} e^{C_2 A^2} e^{C_3 A^2 (1 - 4C_3 t)^{-1} - C_3 A^2} \geq C_1 e^{C_2 A^2}, \tag{3.67}$$

de ello que $|v(A, t)| \leq z(A, t)$. Consecuentemente

$$|v(x, t)| \leq z(x, t) \tag{3.68}$$

en la frontera parabólica de R, aplicando la extensión del Teorema de comparación 1.19, se tiene que

$$-z(x_1, t_1) \leq v(x_1, t_1) \leq z(x_1, t_1). \tag{3.69}$$

Repitiendo el mismo razonamiento que se llevó a cabo en la demostración del Teorema 2.5 se concluye que $v(x, t) = 0$ para $0 < x < \infty$ y $t > 0$. Esto completa la demostración del teorema.

Observación 3.1. *Es importante resaltar en el teorema anterior la hipótesis de que la solución única $u(x, t)$ que garantiza el resultado anterior, debe admitir a lo más un número finito de discontinuidades acotadas en la frontera parabólica B_T, porque esto permite aplicar la extensión del teorema* ***extendido de comparación****, como se aplicó en la prueba del teorema.*

□

Conclusiones

Con respecto a los dos problemas tratados en esta monografía, se logró demostrar las condiciones bajo las cuáles cada uno de los dos problemas tenía solución, es decir, para cada problema se enunció y se demostró un teorema de existencia de soluciones, el cual mostraba a su vez la forma de construir una solución. Una vez atacado el problema de la existencia de soluciones, el siguiente paso consistió en establecer las condiciones que debía cumplir tanto el problema, como la solución hallada en el teorema de existencia, para que está fuese la única solución, así, finalmente se enunció y se demostró para cada uno de los dos problemas un teorema de unicidad.

Es importante aclarar que esta monografía fue una revisión bibliográfica de los capítulos 1, 2, 3 y 4 de la enciclopedia de Jhon Rozier Cannon [3], donde los capítulos antes mencionados se desarrollaron de la forma más detallada posible. Espero que este trabajo sea de gran ayuda para aquellos alumnos que quieran estudiar problemas parabólicos homógeneos.

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol *Análisis matemático.* Editorial Reverté S.A. Versión española por D.r José Pla Carrera.

[2] Robert G. Bartle. *Introducción al análisis matemático.* Editorial Limusa, México, 1982. Translated from the English by Ma. Cristina Gutiérrez González.

[3] John Rozier. Cannon. *The one-dimensional heat equation, volume 23 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program,Reading, MA, 1984. With a foreword by Felix E. Browder.

[4] Richard Haberman. *Elementary applied partial differential equations.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1987. With Fourier series and boundary value problems.

[5] Ian N. Sneddon. *Fourier Transforms.* Mc Graw-Hill., Book Company, INC, Copyright 1951. University College of North Staffordshire.