

EVALUACIÓN DE VOLÚMENES DE MADERA EN PIE DEL *Pinus patula* Schl. et cham.,  
MEDIANTE EL AJUSTE DE FUNCIONES DE AHUSAMIENTO: FINCA LA TACHUELA,  
MÁLAGA, SANTANDER.

Fredy Alexander Arciniegas Gelvez, Jorge Adrián Barajas León

Trabajo de Grado para Optar el Título de Ingeniero Forestal

Director

Jorge Andrés Rodríguez Toro

PhD. en Ciencias Forestales

Universidad Industrial de Santander

Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia IPRED

Programa de Ingeniería Forestal

Málaga

2019

### **Dedicatoria**

Al creador.

Por ser el inspirador, nuestro guía a lo largo de nuestra existencia, por brindarnos fortaleza en los momentos de debilidad y dificultad.

A nuestros padres.

Por su amor, trabajo, y sacrificio durante tantos años. Por enseñarnos a luchar por nuestros sueños, y por apoyarnos desde pequeños en cada meta que logramos. Ya que son nuestros mejores amigos, consejeros y ejemplos a seguir.

A nuestros hermanos.

Por ser los mayores cómplices en este proceso, los consejos, las risas, la compañía, el apoyo y el amor.

A nuestros maestros.

Que contribuyeron en este proceso de formación y a todas las personas que de una u otra manera estuvieron presentes durante esta etapa de nuestras vidas.

“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo”

Nelson Mandela.

### **Agradecimientos**

Principalmente a la Universidad Industrial de Santander Sede Málaga, por ser la institución donde crecimos académicamente, la vieja fundación donde se han forjado durante muchos años grande profesionales, A su personal directivo, administrativo, y a los profesores quienes nos acompañaron en nuestra formación.

Para el Dr. Jorge Andrés Rodríguez Toro por su dirección, acompañamiento y apoyo durante la ejecución durante el proyecto.

A todos los compañeros y amigos del programa de Ingeniería forestal, por las buenas experiencias en prácticas como en las aulas de clases, por fomentar y fortalecer cada día más el estudio de las buenas practicas forestales.

## Tabla de Contenido

|                                                            | <b>Pág.</b> |
|------------------------------------------------------------|-------------|
| Introducción.....                                          | 15          |
| 1 Objetivos.....                                           | 17          |
| 1.1 Objetivo General .....                                 | 17          |
| 1.2 Objetivos Específicos .....                            | 17          |
| 2 Marco Referencial.....                                   | 18          |
| 2.1 Marco Teórico.....                                     | 18          |
| 2.2 Marco Histórico .....                                  | 21          |
| 2.3 Marco Conceptual .....                                 | 23          |
| 2.4 Marco Jurídico .....                                   | 24          |
| 3 Metodología.....                                         | 26          |
| 3.1 Ubicación.....                                         | 26          |
| 3.2 Zona de estudio (Finca la tachuela).....               | 26          |
| 3.3 Recopilación de información en campo .....             | 27          |
| 3.4 Medición de variables.....                             | 27          |
| 3.5 Transcripción y análisis de datos .....                | 28          |
| 3.6 Ajuste de funciones de ahusamiento .....               | 34          |
| 3.7 Estimación de parámetros.....                          | 36          |
| 3.8 Cuantificación de volumen .....                        | 36          |
| 3.8.1 Estimación del volumen por integración. ....         | 36          |
| 3.8.2 Estimación del volumen por método analítico.....     | 37          |
| 3.9 Bondad de ajuste .....                                 | 38          |
| 3.9.1 Análisis de los residuos. ....                       | 39          |
| 4 Resultados.....                                          | 40          |
| 4.1 Fase de ajuste .....                                   | 40          |
| 4.2 Fase de validación .....                               | 43          |
| 4.2.1 Validación (Bruce et al., 1968). ....                | 44          |
| 4.2.2 Análisis Validación (Renteria & Bautista, 1998)..... | 46          |

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| 4.2.3 Análisis Validación (A Kozak et al., 1969). .....     | 48 |
| 4.2.4 Análisis de validación (J. Demaerschalk, 1972). ..... | 50 |
| 4.2.5 Análisis de validación (Rojo et al., 2005).....       | 52 |
| 5 Discusión .....                                           | 54 |
| 6 Conclusiones.....                                         | 56 |
| 7 Recomendaciones.....                                      | 57 |
| Referencias bibliográficas .....                            | 59 |
| Apéndices .....                                             | 63 |

**Lista de Tablas**

|                                                                | <b>Pág.</b> |
|----------------------------------------------------------------|-------------|
| Tabla 1. Características de datos de ajuste y validación. .... | 29          |
| Tabla 2. Modelos de ahusamiento aplicados para ajuste. ....    | 35          |
| Tabla 3. Parámetros de los modelos de ahusamiento.....         | 42          |

## Lista de Figuras

|                                                                                                                 | <b>Pág.</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Figura 1. Box –plot para la variable DAP. ....                                                                  | 30          |
| Figura 2. Histograma de frecuencia para la variable DAP. ....                                                   | 31          |
| Figura 3. Box –plot para la variable de altura. ....                                                            | 31          |
| Figura 4. Histograma de frecuencia para la variable altura. ....                                                | 32          |
| Figura 5. Box –plot para la variable de relación DAP/Altura. ....                                               | 32          |
| Figura 6. Histograma de frecuencia para la variable relación DAP/Altura. ....                                   | 33          |
| Figura 7. Box –plot para la variable de Volumen sin corteza. ....                                               | 33          |
| Figura 8. Histograma de frecuencia para la variable de volumen sin corteza. ....                                | 34          |
| Figura 9. Comportamiento de los modelos de ahusamiento en el perfil longitudinal fustal. ....                   | 43          |
| Figura 10. Distribución de residuales en relación con el volumen estimado, modelo (Bruce et al., 1968). ....    | 44          |
| Figura 11. Validación del volumen sin corteza del Pinus patula. ....                                            | 45          |
| Figura 12. Distribución de residuales en relación con el volumen estimado, modelo (Renteria et al., 1998). .... | 46          |
| Figura 13. Validación del volumen sin corteza del Pinus patula. ....                                            | 47          |
| Figura 14. Distribución de residuales en relación con el volumen estimado, modelo (Kozak et al., 1969). ....    | 48          |
| Figura 15. Validación del volumen sin corteza del Pinus patula. ....                                            | 49          |
| Figura 16. Distribución de residuales en relación con el volumen estimado, modelo (Demaerschalk, 1968). ....    | 50          |
| Figura 17. Validación del volumen sin corteza del Pinus patula. ....                                            | 51          |
| Figura 18. Distribución de residuales en relación con el volumen estimado, modelo (Rojo et al., 2005). ....     | 52          |
| Figura 19. Validación del volumen sin corteza del Pinus patula. ....                                            | 53          |



### Lista de Apéndices

|                                                                                                       | <b>Pág.</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Apéndice A. Rodal estudiado. ....                                                                     | 63          |
| Apéndice B. Individuos de estudio Pinus patula. ....                                                  | 63          |
| Apéndice C. Toma de datos en campo. ....                                                              | 64          |
| Apéndice D. Toma de altura con el instrumentó (pistola haga). ....                                    | 64          |
| Apéndice E. Toma de altura y distancia al individuo con el instrumentó (pistola haga). ....           | 65          |
| Apéndice F. Obtención de muestra de corteza con el instrumento (herramienta Barrena de Pressler)..... | 65          |
| Apéndice G. Muestra de corteza. ....                                                                  | 66          |
| Apéndice H. Medición contenida de corteza. ....                                                       | 66          |
| Apéndice I. Toma de medida del diámetro a la altura del pecho. ....                                   | 67          |
| Apéndice J. Estado de la plantación. ....                                                             | 67          |
| Apéndice K. Programación ajuste modelos de ahusamiento. ....                                          | 68          |

## RESUMEN

**TITULO:** EVALUACIÓN DE VOLÚMENES DE MADERA EN PIE DEL *Pinus patula* Schl. et cham., MEDIANTE EL AJUSTE DE FUNCIONES DE AHUSAMIENTO: FINCA LA TACHUELA, MÁLAGA, SANTANDER<sup>1</sup>.

**AUTORES:** FREDY ALEXANDER ARCINIEGAS GELVEZ.  
JORGE ADRIÁN BARAJAS LEÓN<sup>2</sup>.

**PALABRAS CLAVE:** ESTIMACIÓN VOLUMÉTRICA, MODELO DE AHUSAMIENTO, RESIDUALES.

### DESCRIPCIÓN:

Los modelos de ahusamiento son funciones que estiman la capacidad volumétrica de un árbol, la estimación precisa del volumen y el ahusamiento de los arboles es importante para un óptimo manejo de los recursos forestales, el objetivo principal de esta investigación fue evaluar ocho modelos compatibles de ahusamiento para la estimación volumétrica de la especie *Pinus patula* Schl et cham, datos correspondientes a perfiles fustales de 427 árboles en edad de cosecha, en una plantación establecida en la finca "la tachuela", Málaga, Santander, Colombia. Esta evaluación de ahusamiento se realizó mediante la toma de una submuestra del 70% de la base de datos para la fase de ajuste paramétrico y una validación del 30 % restante para el ajuste volumétrico de las ecuaciones. Se realizó una regresión lineal en el software (R-Project), para determinar la bondad de ajuste en los modelos evaluados para posteriormente determinar la bondad de ajuste mediante los procedimientos clásicos de estimación de máxima verosimilitud AIC (Akaike) y el de criterio de información BIC (Bayesiano), donde los resultados más pequeños arrojan los mejores ajustes en los modelos estimados. Subsiguientemente se realizó el ajuste volumétrico con los parámetros obtenidos en la regresión. Finalmente de acuerdo a los resultados obtenidos se seleccionó la ecuación (Bruce, Curtis, & Vancoevering, 1968) la cual fue la más compatible en predicción del perfil fustal y de volumen total.

---

<sup>1</sup> Trabajo de Grado.

<sup>2</sup> Instituto de proyección Regional y Educación a Distancia. Programa de Ingeniería Forestal. Director: RODRÍGUEZ TORO, Jorge Andrés. PhD. en Ciencias Forestales.

**ABSTRACT**

**TITLE:** EVALUATION OF WOODEN VOLUMES AT THE FOOT OF *Pinus patula* Schl. et cham., THROUGH THE ADJUSTMENT OF HOUSING FUNCTIONS: ESTATE, THE TACHUELA, MÁLAGA, SANTANDER <sup>3</sup>.

**AUTHORS:** FREDY ALEXANDER ARCINIEGAS GELVEZ.  
JORGE ADRIÁN BARAJAS LEÓN <sup>4</sup>.

**KEYWORDS:** VOLUMETRIC ESTIMATION, HOUSING MODEL, RESIDUAL.

**DESCRIPTION:**

Taper models are functions that estimate the volumetric capacity of a tree, accurate estimation of the volume and taper of trees is important for optimal management of forest resources, the main objective of this research was to evaluate eight compatible taper models for the volumetric estimation of the species *Pinus patula* Schl et cham, data corresponding to fustal profiles of 427 trees in harvest age, in a plantation established in the farm "la tachuela", Málaga, Santander, Colombia. This taper evaluation was performed by taking a subsample of 70% of the database for the parametric adjustment phase and a validation of the remaining 30% for the volumetric adjustment of the equations. A linear regression was performed in the software (R-Project), to determine the goodness of fit in the models evaluated to later determine the goodness of fit using the classic AIC (Akaike) maximum likelihood estimation procedures and the information criteria BIC (Bayesiano), where the smallest results yield the best adjustments in the estimated models. Subsequently, the volumetric adjustment was made with the parameters obtained in the regression. Finally, according to the results obtained, the equation was selected (Bruce, Curtis, & Vancoevering, 1968) which was the most compatible in predicting the fustal profile and total volume.

---

<sup>3</sup> Bachelor Thesis.

<sup>4</sup> Instituto de proyección Regional y Educación a Distancia. Programa de Ingeniería Forestal. Director: RODRÍGUE Z TORO, Jorge Andrés. PhD. en Ciencias Forestales.

## Introducción

En la actualidad la extracción de biomasa se ha convertido en un factor importante en el crecimiento lucrativo de algunas regiones, originando que sea el principal pilar de producción en algunas zonas del país, fomentando una gestión forestal sostenible, ambientalmente responsable, socialmente beneficiosa y económicamente viable. El aprovechamiento de estos recursos maderables, determina factores cuantitativos los cuales representan los tipos de productos que se puedan sustraer de la plantación estudiada. En donde las correctas prácticas silvícolas y la precisa cuantificación del volumen de madera, permite de manera óptima la planificación en las actividades de plan de aprovechamiento forestal. Las actividades y herramientas utilizadas en el manejo forestal representan modelos de crecimiento, como tecnologías adecuadas en la evaluación y estimación de variables, para determinar el rendimiento y productividad, el modelaje de ahusamiento comercial maderable puede ser constituido desde diferentes alternativas a nivel rodal del grupo de árboles o especies y a nivel del árbol individual,(Clutter, Fortson, Pienaar, Brister, & Bailey, 1983).

Dado que en una plantación forestal el volumen representa la parte más importante puesto que una vez estimado este valor se puede proyectar el manejo de una plantación actual y a futuro, también dicha forma en que se deberá desarrollar las diferentes etapas de dicho manejo.(Návar-Cháidez & Domínguez-Calleros, 2013).

En el municipio de Málaga Santander la producción forestal ha disminuido debido al aumento de actividades agropecuarias, obligando con el paso del tiempo que el potencial forestal tienda a disminuir cada vez más. El efecto conjunto de estas actividades genera que el sector agropecuario sea el principal pilar de la economía del municipio, limitándolo a una producción netamente

agropecuaria, a pesar de los problemas de economía agraria, bajo nivel tecnológico, influencia en los mercados y problemas sociales en el sector productivo.

En la región las actividades silvícolas son mínimas, teniendo en cuenta que el municipio cuenta con un gran potencial netamente forestal, las comunidades prefieren optar por prácticas que generen una rentabilidad en poco tiempo, la falta de recursos para la implementación de un programa forestal es limitada para la mayoría de los productores en la región.

Esta investigación plantea cuantificar el volumen de madera en pie de la especie *Pinus patula* “Schl. et cham”, mediante la validación de un modelo de ahusamiento eficiente que calculara con exactitud el volumen de madera de la plantación. Por consecuencia, disponer de un modelo de cubicación individualizado que permita estimar el volumen sin que obligue al derribo del árbol, que sea rápido, económico y preciso para cuantificar el volumen sobre una plantación (Pereira, Imaña-Encinas, & Rezende, 2012).

## 1 Objetivos

### 1.1 Objetivo General

Estimar los volúmenes de madera en pie de la especie *Pinus patula*, mediante el ajuste de funciones de ahusamiento realizando una comparación para establecer cual sistema es más compatible.

### 1.2 Objetivos Específicos

Estimar volúmenes de madera en pie en la plantación de *Pinus patula*, mediante la validación de modelos matemáticos.

Calcular el volumen individual de árboles, por método analítico y mediante integración de solidos de revolución.

Determinar el modelo de ahusamiento que mejor se ajusta a los perfiles fustales presentes en la plantación.

## **2 Marco Referencial**

### **2.1 Marco Teórico**

Según (Gezan, Moreno, & Ortega, 2009) las funciones matemáticas de ahusamiento son frecuentemente utilizadas en los inventarios forestales ya que permiten realizar una estimación más precisa de volumen de los individuos y de los materiales que pueden ser extraídos de ellos, por ende constituyen un factor relevante para los modelos de crecimiento, cubicación de la madera y optimización de procesos de aprovechamiento.

Donde (A Kozak, 1988) clasifica las funciones de ahusamiento en dos grupos; Modelos simples los cuales describen los cambios dasométricos a lo largo del fuste con una función, donde se presentan sesgos considerables de la estimación de su diámetros, y los modelos complejos los cuales utilizan diferentes funciones para distintas partes del fuste, donde su estimación de diámetros generan un menor sesgo.

(Bailey, 1995) Determina que los resultados obtenidos en estas funciones matemáticas son una herramienta valiosa para el análisis de la plantación como tal, permitiendo una distribución de productos por individuos o por unidad total en plantación, además le permiten un diagnóstico económico para la potencial comercialización en el mercado maderero. Los resultados pueden verse favorables o no, de acuerdo a las actividades silvícolas aplicadas.

(Cancino, 2012) Define ahusamiento como la disminución del diámetro que presenta un árbol desde su base hasta el ápice, variando ampliamente, de la especie, posición del fuste, ubicación del individuo dentro del dosel, tratamientos silvícolas, posición sociológica y ubicación regional. Esta función numérica que relaciona el diámetro del fuste con la altura, permitiendo realizar

estimaciones de volumen entre dos alturas del árbol, convirtiéndose en una gran herramienta en modelos de simulación, trazado del fuste y clasificación de productos de individuos en pie.

Se ha reportado en estudios de comparación de diferentes tipos de modelos de ahusamiento, han acertado que la exactitud de un modelo del fuste depende del tipo de especie, es difícil encontrar una función que se adapte convenientemente a todos los tipos de fuste.(Rojo, Perales, Sánchez-Rodríguez, Álvarez-González, & Von Gadow, 2005),(Gezan et al., 2009). Por lo tanto, esto nos indica que no hay un tipo de modelo de ahusamiento que se adapte convenientemente a todas las especies (Muhairwe, 1999).

Según (Hernández Pérez et al., 2013) Asegura que la especie *Pinus patula*, en donde se presenta un manejo de silvicultura intensivo presentan fustes más cilíndricos, que en plantaciones o rodales donde no hay presencia de un manejo aplicado, indicando que la forma del fuste tiene una gran relación con los tipos de técnica silvícola que se implementen.

Según (Corral, Chaidez, & Sánchez, 1999) el denota que el mayor error en el cálculo del volumen aumenta en forma de potencia para individuos que presentan mayor de 30cm de diámetro.

(Beal, 2007) Considera que la aplicación de software estadísticos, son múltiples herramientas estadísticas, que nos permiten desarrollar regresiones lineales y no lineales, utilizando criterios de covarianza y un numero de parámetros en dicho modelo, para computarizar un resumen estadístico que presenta la información obtenida por el modelo matemático.

En la estimación estadística en las funciones de ahusamiento, presentan interacciones que varían de acuerdo a los modelos aplicados y a la clase de regresiones que presenten, sin embargo, dada la forma preliminar de estas funciones se han generado métodos para explotar la estructura de los modelos estadísticos.



El método Gauss – Newton es una aplicación estadística que consiste en aproximar la matriz Hessiana en cada interacción presente mediante fórmulas de ocurrencia en el modelo, demostrando ser eficiente en optimización lineal. (Bonnans, Gilbert, Lemaréchal, & Sagastizábal, 2006).

El método de Levenberg-Marquardt ha sido una técnica numérica estándar para casos de mínimos cuadrados no lineales frecuentemente aplicada en varias disciplinas para el ajuste de parámetros, siendo Levenberg – Marquardt una buena alternativa para evitar los problemas del método GAUSS – Newton cuando la matriz del modelo no es singular (Cornejo Zúñiga & Rebolledo Vega, 2016).

Para el cálculo del volumen maderable de un individuo, una vez determinada la ecuación de ahusamiento, la integración matemática permite calcular el volumen de un árbol a cualquier rango de altura o diámetro definido, estimando de una forma total, parcial y comercial la cantidad de material en metros cúbicos que posee cada individuo (Lynch, Chang, & Chandler, 1992).

(J. Demaerschalk, 1972) desarrollo la compatibilidad de funciones de volumen y ahusamiento, en el cual el propone que el volumen determinado en función del volumen, es asociado a una función de ahusamiento, el razonamiento general mediante el cual se deriva la ecuación cónica se fundamenta en la condición de que las estimaciones de volumen total, establecidas en la integración de la ecuación cónica, sean iguales a las propuestas por la ecuación de volumen de árbol existente.

Para la determinación del volumen en rodal se calcula mediante la suma de los volúmenes individuales de cada árbol. La determinación del volumen en rodal se realiza mediante la anexión individual de volúmenes de los árboles que puede obtenerse por funciones de valor agregado, realizando un agrupamiento o no de diámetros fustales (Alder, 1980).

Cada árbol contempla una forma de fuste diferente debido a que esta varia ampliamente ya sea por tipo de especie, manejos silvícolas, morfología de la especie, condiciones edafológicas. La tasa de disminución del diámetro a lo largo del fuste, distinguida como ahusamiento, cambia dependiendo de la edad, especie, condiciones del sitio y factores asociados (García, 1995).

## **2.2 Marco Histórico**

En la década del 50, la facultad de ciencias forestales de la Universidad de Gran Bretaña. Columbia (UBC). Investigaba en la demanda de mejores sistemas de estimación de volúmenes. En 1956 esta investigación la dirigía el Dr. J. Harry G. Smith y uno de sus estudiantes graduados R. Monty Newnham, los cuales dirigieron sus estudios en desarrollar ecuaciones de ahusamiento.

En 1965, a este grupo de investigación se unió el profesor Robert Antal Kozak, quien fue el creador de varios modelos de ahusamiento, ya que en la temática de esta investigación se convertiría en una pasión profesional para este autor, desarrollando varias funciones matemáticas e investigaciones científicas en colaboración con varios autores investigadores de la (UBC).

En 1969 realizaron la primera publicación de una ecuación cónica (Kozak et al Alabama.), En los años siguientes, Julián P Demaerschalk, bajo la dirección de Smith y Kozak presento su tesis de Doctorado en Sistemas de estimación (Demaerschalk 1972, 1973) para posteriormente luego de graduarse en 1973 se uniera a este grupo de investigadores de modelos de ahusamiento.

Este grupo de investigación, realizaron varias publicaciones y desarrollaron modelos matemáticos los cuales actualmente son aplicados con resultados óptimos (Antal Kozak, 2004).

Los primeros estudios incluyeron el uso de polinomios con potencias altas en los modelos con la finalidad de describir principalmente la sección basal del fuste, otros investigadores introdujeron

ecuaciones con exponentes con el objetivo de describir continuamente la forma del fuste del árbol desde el nivel del suelo hasta el ápice, exhibiendo más su flexibilidad (López, Molina, Barrios, & Aguirre, 2018).

A pesar de que la estimación volumétrica ha generado una gran importancia económica, son pocos los estudios encontrados sobre la generación de ecuaciones para la cuantificación volumétricas y de productos en Colombia, estos estudios encontrados, se enfocan en especies alta demanda comercial como *la Gmelina arbórea* en el Magdalena medio y *Eucalyptus tereticornis* en la Costa Atlántica.

Para la determinación del volumen en rodal se calcula mediante la suma de los volúmenes individuales de cada árbol. La determinación del volumen en rodal se realiza mediante la anexión individual de volúmenes de los árboles que puede obtenerse por funciones de valor agregado, realizando un agrupamiento o no de diámetros fustales. (Alder, 1980).

Por lo general en Colombia la estimación de madera volumétrica de rodales y plantaciones forestales de uso comercial se realizan a través de modelos de rendimiento y crecimiento. Sin embargo, estas herramientas proporcionan información a nivel de rodal. Por lo cual esto no permite una apreciación de volumen a nivel individual, esto genera inseguridad e ineficiencias en la planeación ya que no hay una evaluación precisa de los productos que ofrece una plantación. (Herrera, Barrios, López, & Nieto, 2015).

En la provincia de García Rovira en una búsqueda amplia de revisión bibliográfica y científica, no se logró encontrar contenido de investigaciones con credibilidad sobre la aplicación en estimación volumétrica maderable con modelos de ahusamiento, por lo cual, es necesario implementar nuevas técnicas que permiten el desarrollo cuantitativo en plantaciones presentes en la región.

## 2.3 Marco Conceptual

*Ahusamiento:* Es la disminución del diámetro que presenta un árbol desde su base hasta el ápice.

*Altura comercial:* Es la longitud de un tronco, desde su parte inferior o tocón hasta su extremo superior aprovechable, diámetro mínimo comercial, o donde empiezan las ramificaciones de la copa del árbol.

*Altura total:* Es la distancia vertical entre el nivel del suelo y el extremo superior del árbol o ápice de la copa.

*Apeo:* Es la operación de corta y derribo de árboles en pie desde el tocón.

*Aprovechamiento:* Conjunto de todas las operaciones, incluidas la planificación previa y la evaluación posterior, relacionadas con el apeo de los árboles y el desembosque de sus troncos u otras partes aprovechables para su posterior transformación en productos industriales. Se denomina también aprovechamiento de madera.

*Corteza:* Es el conjunto de tejidos primarios y capas de fibra vegetal que envuelve la parte exterior de algunas plantas y árboles.

*Cubicación:* Determinación de la cantidad de troncos obtenidos, por lo común, midiendo el volumen (en maderos de pequeño tamaño, también por peso; esto último es normal en el caso de la madera para pasta; el pesaje se realiza en ese caso en el centro de elaboración).

*DAP:* Medida del diámetro tomada a la altura del pecho o (1.30 metros).

*Dasometría:* Ciencia que trata de la medición de los bosques y de los árboles que los

*Dendrometría:* Significa "medición de árboles e incluye la verificación y análisis de datos tales como la altura, diámetro, área basal, volumen, etc.

*Fuste:* Tronco de un árbol que alcanza un grosor notable de manera que de él pueden obtenerse trozas, rollos para chapa o postes de gran tamaño.

*Individuo:* Cada uno de los elementos de la población, en este caso hace referencia a cada árbol del estudio.

*Población:* Conjunto de todos los elementos que verifican una característica que será objeto de estudio.

*Rodal:* Agrupación de árboles u otras plantas que por alguna circunstancia particular se distingue del ecosistema que le rodea. Es suficientemente uniforme en la especie, edad, calidad o estado para poder distinguirse del arbolado que lo rodea.

*Silvicultura:* Es la ciencia que trata de la conservación de los bosques, con la finalidad de obtener de ellos el mayor provecho posible. Llamada también Dasonomía o Ecología Forestal. Tiene que ver con el corte de árboles, con el objeto de obtener una regeneración natural o artificial de los bosques por medio de podas, producción de plántones en el vivero, plantaciones, etc.

*Tocón:* Base del árbol que queda en el suelo después del apeo.

*Volumen en pie:* Cantidad de madera en metros cúbicos cuando el árbol está en el bosque, plantación o estado natural.

*Volumen:* cantidad de espacio ocupado por un cuerpo.

## **2.4 Marco Jurídico**

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 1731 (31, julio, 2014). Por medio de la cual se adoptan medidas en materia de financiamiento para la reactivación del sector agropecuario, pesquero, acuícola, forestal y agroindustrial, y se dictan otras disposiciones relacionadas con el

fortalecimiento de la corporación colombiana de investigación agropecuaria (CORPOICA) (Congreso de Colombia, 2014).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 29 (27, febrero, 1990). Por la cual se dictan disposiciones para el fomento de la investigación científica y el desarrollo tecnológico y se otorgan facultades extraordinarias (Congreso de Colombia, 1990).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 842 (09, octubre, 2003). Por la cual se modifica la reglamentación del ejercicio de la ingeniería, de sus profesiones afines y de sus profesiones auxiliares, se adopta el Código de Ética Profesional y se dictan otras disposiciones (Congreso de Colombia, 2003).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Decreto 1498 (07, mayo, 2008). Por medio del cual se reglamenta la Política de Cultivos Forestales Comerciales (Congreso de Colombia, 2008).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 1021 (20, abril, 2006). Por la cual se expide la Ley General Forestal (Congreso de Colombia, 2006).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Decreto 1791 (04, octubre, 1996). Por el cual se establece el Régimen de Aprovechamiento Forestal (Congreso de Colombia, 1996).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 139 (21, junio, 1994). Por la cual se crea el certificado de incentivo forestal y se dictan otras disposiciones (Congreso de Colombia, 1994).

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Decreto 877 (10, mayo, 1976). Por el cual se señalan prioridades referentes a los diversos usos del recurso forestal, a su aprovechamiento y al otorgamiento de permisos y concesiones y se dictan otras disposiciones (Congreso de Colombia, 1976).

### 3 Metodología

#### 3.1 Ubicación

El municipio de Málaga se encuentra ubicado al sur oriente del departamento de Santander, capital de la provincia de García Rovira; encontrando tres tipos de climas: templado, cálido y páramo, con una temperatura media de 19 °C y una altitud de 2,200 m.s.n.m. (EOT, 2003).

#### 3.2 Zona de estudio (Finca la tachuela)

La información solicitada para este estudio fue recolectada en la finca “La Tachuela” en el municipio de Málaga, Santander, Colombia, en las coordenadas espaciales de latitud 6°42'40.39"N y longitud 72°44'54.39"O, con una extensión total de 15 ha, esta finca cuenta con varios sistemas agropecuarios y forestales, está localizada a 8 kilómetros de la cabecera del casco urbano del municipio en la vía principal que comunica Málaga los cueros.

La plantación que se estudió tiene un área de 1.8 hectáreas las cuales cuentan con un total de 427 individuos, fue establecida con fines comerciales hace 23 años, la investigación a realizar se consideró una plantación forestal de *Pinus patula*, en edad de cosecha, cuyo rodal no cuenta con un manejo silvícola, de dicho rodal se obtuvieron los individuos para realizar los diferentes análisis y cálculos, bajo manejo con modelos de ahusamiento ya que estos nos permiten comprender un modelo de la variabilidad de formas y tamaños del fuste.

### **3.3 Recopilación de información en campo**

Esta información fue recolectada en campo con el objetivo de capturar todas las características necesarias para obtener de manera cuantitativa y cualitativa toda la información del rodal en estudio. Se determinaron los diferentes factores dasométricos de la plantación dentro del rodal y cada árbol en pie, la toma de datos fue mediante un censo completo de la especie.

### **3.4 Medición de variables.**

Para la medición de las variables se utilizaron equipos empleados en la dasometría forestal, la medición del DAP (dímetro a la altura del pecho) se realizó con una cinta diamétrica, asegurando que estuviera bien ajustada alrededor del árbol en una posición perpendicular al fuste. Hay que tener en cuenta el estado del árbol porque si presenta características tales como inclinación, bifurcado, o las condiciones topográficas en el terreno ya que cada una de estas características puede abarcar un tipo de medición diferente.

Para la medición de la altura se aplicó la herramienta (Pistola Haga) la cual se utilizó trazando una distancia de 20m de la base del árbol, desde un punto en el cual se observa el ápice, enseguida de esto se presionaba el botón lateral del instrumento, donde arrojó una altura, después de esto se lee la altura directamente en la escala seleccionada a 20m, estando a la misma distancia se observó la base del árbol nuevamente oprimiendo el botón lateral y leyendo la altura dada, obteniendo una altura superior e inferior del individuo, luego se combinan estas dos lecturas y se obtiene la altura total del árbol.



Para la estimación del contenido de corteza del individuo se empleó la herramienta Barrena de Pressler, tomando muestras de corteza en todos los individuos, a diferentes alturas en zonas donde la madera se halle intacta, esta muestra extraída nos permite calcular el porcentaje de corteza en el individuo, como evolución y desarrollo presente.

### 3.5 Transcripción y análisis de datos

Se transcribió la información recolectada en las carteras de campo a el software (Microsoft Excel) aprovechando capacidad de la organización de datos digitales, se almaceno toda la información recogida en hojas de cálculo, para posteriormente realizar la verificación con el propósito que la información sea confiable y libre de errores, los cuales generalmente pueden aparecer en la toma de datos en campo o en el proceso de digitalización a la base de datos.

Para la validación de bondad para el ajuste de las funciones matemáticas se analizó cada individuo, donde se verifico que cada árbol contenga la información completa.

Se realizó la verificación por medio del índice de esbeltez, con el propósito que la información sea confiable y libre de errores. Donde los modelos de ahusamiento presentan comportamientos sensibles a datos atípicos, con el objetivo de garantizar que no se presente errores en la transcripción de datos.

$$IE = \frac{\text{Altura de parte aerea (cm)}}{\text{Diametro del tallo}}$$

Tabla 1.  
*Características de datos de ajuste y validación.*

| <b>Muestra total 100% (n = 380)</b>            |            |                    |                |              |                    |            |             |                  |          |           |
|------------------------------------------------|------------|--------------------|----------------|--------------|--------------------|------------|-------------|------------------|----------|-----------|
| <b>Variable</b>                                | <b>Min</b> | <b>1st Quantil</b> | <b>Mediana</b> | <b>Media</b> | <b>3rd Quantil</b> | <b>Max</b> | <b>Moda</b> | <b>Variación</b> | <b>S</b> | <b>Cv</b> |
| dap(cm)                                        | 19.50      | 26.40              | 32.00          | 32.90        | 38.50              | 58.80      | 23.50       | 70.30            | 8.30     | 25.40     |
| ht (m)                                         | 12.00      | 20.00              | 22.00          | 21.90        | 24.40              | 31.50      | 22.00       | 14.50            | 3.80     | 17.40     |
| dap/ht (m)                                     | 0.01       | 0.01               | 0.02           | 0.02         | 0.02               | 0.02       | 0.01        | 1.05             | 0.03     | 21.40     |
| Vsc (m3)                                       | 0.15       | 0.40               | 0.65           | 0.81         | 1.06               | 3.48       | 0.21        | 0.31             | 0.56     | 69.75     |
| <b>Submuestra para ajuste 70% (n = 266)</b>    |            |                    |                |              |                    |            |             |                  |          |           |
| dap(cm)                                        | 19.50      | 26.30              | 32.00          | 32.90        | 38.50              | 58.80      | 23.50       | 71.10            | 8.40     | 25.70     |
| ht (m)                                         | 12.00      | 20.00              | 22.00          | 22.00        | 24.00              | 31.50      | 22.00       | 14.40            | 3.80     | 17.20     |
| dap/ht (m)                                     | 0.01       | 0.01               | 0.01           | 0.02         | 0.02               | 0.02       | 0.01        | 1.01             | 0.00     | 21.15     |
| Vsc (m3)                                       | 0.15       | 0.40               | 0.67           | 0.82         | 1.05               | 3.48       | 0.25        | 0.34             | 0.58     | 70.89     |
| <b>Submuestra para validación 30% (n =114)</b> |            |                    |                |              |                    |            |             |                  |          |           |
| dap(cm)                                        | 20.20      | 26.90              | 32.00          | 33.09        | 38.30              | 55.20      | 21.20       | 68.71            | 8.28     | 25.04     |
| ht (m)                                         | 12.50      | 19.25              | 22.00          | 21.75        | 24.50              | 31.40      | 21.00       | 15.29            | 3.91     | 17.97     |
| dap/ht (m)                                     | 0.01       | 0.01               | 0.01           | 0.02         | 0.18               | 0.02       | 0.01        | 1.19             | 0.00     | 22.39     |
| Vsc (m3)                                       | 0.15       | 0.40               | 0.63           | 0.78         | 1.04               | 2.85       | 0.21        | 0.27             | 0.52     | 66.02     |

En la tabla 1 se muestra la estadística descriptiva de los árboles muestra de *Pinus patula* empleados en el ajuste y validación. Donde se ven parámetros estadísticos como la media que es el promedio aritmético de las observaciones, la suma de todos los datos y el número de ellos. La mediana que es el valor que deja a la mitad de los datos por encima de dicho valor y a la otra mitad por debajo, también la moda que es el valor de la variable que más veces se repite, la variación que representa la media de los cuadrados de las diferencias entre cada valor de la variable y la media aritmética de la distribución, también se presenta el cálculo de la desviación típica (S) que es la raíz cuadrada de la varianza y el coeficiente de variación que nos informa acerca de la dispersión relativa del conjunto de datos.

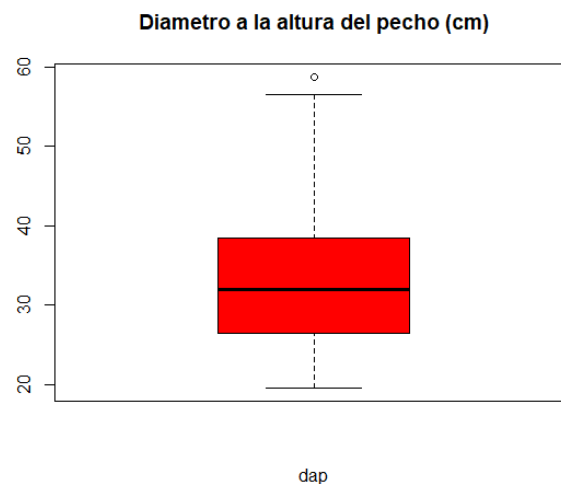
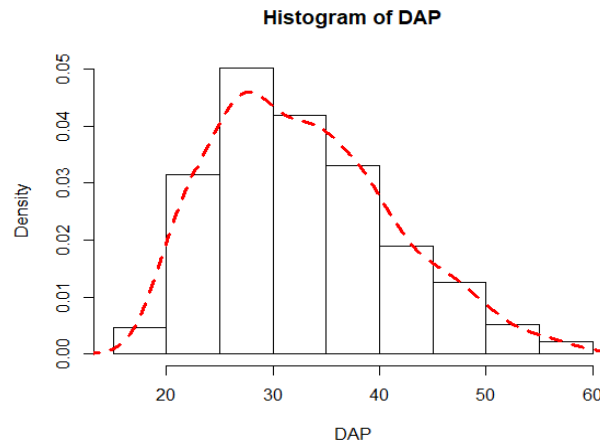


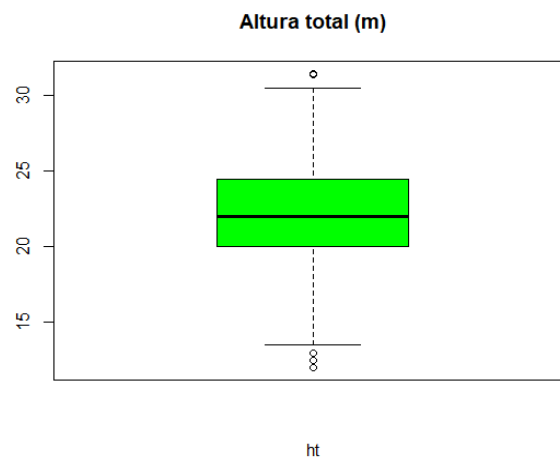
Figura 1. Box –plot para la variable DAP.

En la figura 1, la caja o box-plot muestra el comportamiento de los datos en la variable DAP (Diámetro a la altura del pecho), indicando el comportamiento disperso de los datos y una conducta asimétrica positiva, donde la mediana se acerca al primer cuartil y es menor que la media.



*Figura 2.* Histograma de frecuencia para la variable DAP.

En este histograma de frecuencia de distribución normal, presenta una asimetría positiva ya que los datos se alargan a la derecha en valores superiores a la media, de acuerdo a la forma de la curva muestra un alto grado de Curtosis.



*Figura 3.* Box –plot para la variable de altura.

En esta grafica de caja o box-plot muestra el comportamiento de los datos en la variable altura, indicando el comportamiento disperso de los datos y una conducta asimétrica negativa, donde la mediana se acerca al tercer cuartil y es mayor que la media, también presenta valores atípicos.

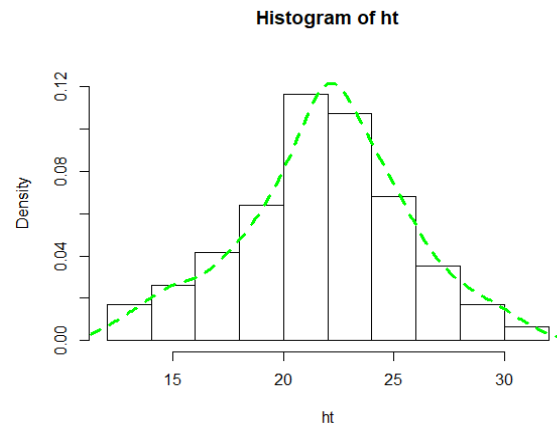


Figura 4. Histograma de frecuencia para la variable altura.

En este histograma de frecuencia de distribución normal, presenta una asimetría negativa ya que los datos se alargan hacia la izquierda en valores inferiores a la media, de acuerdo a la forma de la curva muestra un alto grado de Curtosis.

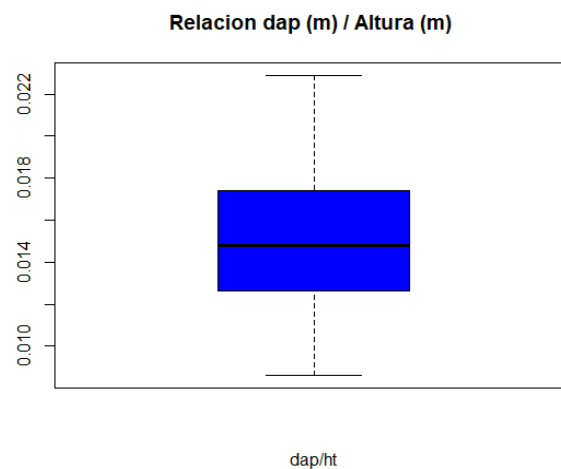


Figura 5. Box –plot para la variable de relación DAP/Altura.

En esta grafica de caja o box-plot muestra el comportamiento de los datos en la variable de relación DAP y Altura, indicando la variación de los datos y una conducta asimétrica positiva, donde la mediana se acerca al primer cuartil y es menor que la media.

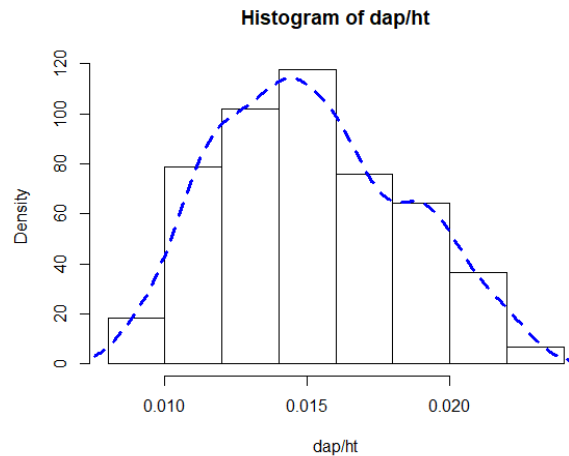


Figura 6. Histograma de frecuencia para la variable relación DAP/Altura.

En este histograma de frecuencia de distribución normal, presenta una asimetría positiva ya que los datos se alargan hacia la derecha en valores superiores a la media, de acuerdo a la forma de la curva muestra un alto grado de Curtosis, presentando gran variabilidad.

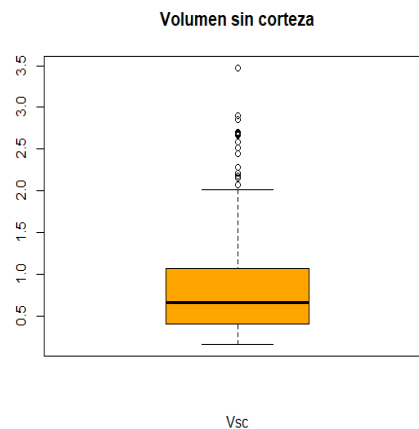
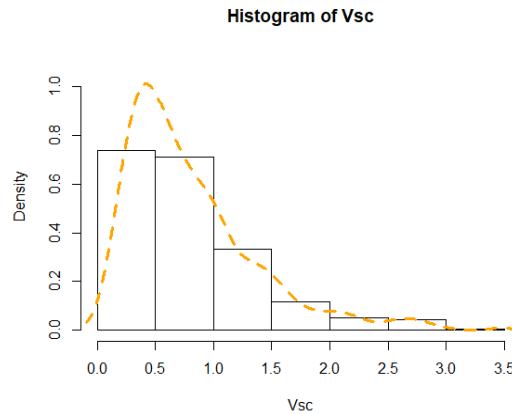


Figura 7. Box –plot para la variable de Volumen sin corteza.

En esta grafica de caja o box-plot muestra el comportamiento de los datos en la variable volumen sin corteza, indicando el comportamiento más concentrado de los datos y una conducta asimétrica positiva, donde la mediana se acerca al primer cuartil y es menor que la media, también presenta valores atípicos superiores.



*Figura 8.* Histograma de frecuencia para la variable de volumen sin corteza.

En este histograma de frecuencia de distribución normal, presenta una asimetría positiva ya que los datos se alargan hacia la derecha en valores superiores a la media, de acuerdo a la forma de la curva muestra un alto grado de Curtosis, presentando gran variabilidad de los datos.

### 3.6 Ajuste de funciones de ahusamiento

Se realizó el ajuste de las funciones de ahusamiento para estimar el volumen de cada árbol, empleando una selección en la base de datos 70% de la muestra para el ajuste a través de una regresión no lineal, y el 30% de la muestra para realizar una validación con los parámetros obtenidos en el ajuste. Se garantizó la independencia de las muestras, con el objetivo de que los selectos para la validación no se utilicen en el ajuste del modelo (de-Miguel, Mehtätalo, Shater, Kraid, & Pukkala, 2012).

El ajuste de ahusamiento se realizó con los datos provenientes de 427 árboles medidos, en donde se descartaron aquellos individuos que presentaban deformaciones en su fuste, quedando un total de 380 individuos, esto con el fin de no alterar, la estimación de parámetros y el comportamiento de la función matemática.

Se realizó la modelación de ocho modelos, de los cuales (Bruce, 1968), (Kozak, 1969), (Demaerschalk, 1972), (Rojo et al., 2005) y (Rentería, 1998), presentaron los mejores ajustes estadísticos. Estos clasificaron como modelos potenciales ya que relacionan el diámetro relativo en función de la altura a un parámetro constante, donde la principal ventaja es que sus ecuaciones de volumen obtenidas después de su integración son compatibles con el sistema de cubicación clásica (Dorado & González, 2000).

Tabla 2.

*Modelos de ahusamiento aplicados para ajuste.*

| Modelo                                                                               | Autor                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $Y = b_1 \cdot x^{1.5} + b_2 \cdot x^3 + b_3 \cdot x^{32}$                           | (Bruce, Curtis, & Vancoevering, 1968) |
| $Y = b_1 \cdot (T - 1) + b_2 \cdot (T^2 - 1)$                                        | (A Kozak, Munro, & Smith, 1969)       |
| $Y = b_1 \cdot Z^{(b_2)}$                                                            | (J. Demaerschalk, 1972)               |
| $Y = b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3$                                    | (Rojo et al., 2005)                   |
| $Y = b_1 \cdot Z + b_2 \cdot Z^2 + b_3 \cdot Z^3$                                    | (Renteria & Bautista, 1998)           |
| $Y = \frac{b_1}{dap^2 \cdot ht} \cdot Z^{(b_2)} + b_3 \cdot Z^{(b_4)}$               | (Demaerschalk, 1973)                  |
| $Y = b_1 \cdot X + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + b_4 \cdot x^4 + b_5 \cdot x^5$    | (Lowell, 1986)                        |
| $Y = X^2 + b_1 \cdot (X^3 - X^2) + b_2 \cdot (X^8 - X^2) + b_3 \cdot (X^{40} - X^2)$ | (Real & Moore, 1986)                  |

$$Y = \frac{d^2}{dap^2} ; T = \frac{h}{ht} ; X = \frac{ht - h}{ht - 1.3} ; Z = \frac{ht - h}{ht}$$

dap = Diámetro normal (cm) a 1.30.

d = Diámetro con corteza correspondiente a la altura h.

ht = Altura total del árbol (m).

h = altura desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d, (m).

b1, b2, b3, b4, b5 = parámetros de regresión a determinar mediante el ajuste.



### 3.7 Estimación de parámetros

La estimación de los parámetros en los modelos de ahusamiento se realizó con la aplicación de ajuste de modelos no lineales por el procedimiento nlmod, empleando método de minimización de la suma de cuadrados de Marquardt, en el software estadístico (RProject, 2013).

```
library(minpack.lm)
```

```
Modelo <- (Ecuacion de ahusamiento)
```

```
nlmod1 <- nlsLM(Modelo, data = f00, start = list(a1 = 0.1, a2 = 0.1,))
```

```
summary(nlmod1)
```

### 3.8 Cuantificación de volumen

**3.8.1 Estimación del volumen por integración.** Se integraron los modelos de ahusamiento que se ajustaron a las características de la plantación, el volumen se cuantificó aplicando los modelos simplificados. Con base a los parámetros obtenidos por el ajuste de ahusamiento, se realizó la estimación del volumen para cada árbol. Este procedimiento de integración con sólidos revolución se realizó en el software (RProject, 2013), con la función:

$$VM = function(h) * k * Dap^2 * (f(x))$$

```
integrate(VM, hi, hs)
```

```
q = integrate(VM, hi, hs)
```

```
q $ value
```

$f(x)$  = función de ahusamiento.

VM = Volumen modelo.

$h_i$  = altura inferior del individuo.

$h_s$  = altura superior del individuo.

$D_{ap}$  = Diámetro normal (cm) a 1.30 m.

$K = \frac{\pi}{40000}$  = Constante de transformación diámetros cuadrados en secciones.

Function (h) = La ecuación se desarrollaba en función de la variable h.

h = altura desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d, (m).

**3.8.2 Estimación del volumen por método analítico.** Este método se basa en que el fuste del árbol es semejante a sólidos geométricos básicos como (cono, neoloide, paraboloide, cilindro) o por secciones cortadas de estos sólidos. Cada uno de estos posee una fórmula específica, mediante las cuales se utilizan para cubicación de trozas (Cancino, 2006), para la determinación del volumen observado se emplearon las fórmulas de Smalian, cilindro y cono. Permitiendo estimar el volumen de los individuos por medio de cubicación de secciones los cuales se realizaron mediciones de diámetros a lo largo del fuste, donde la suma total de las fracciones de los árboles se obtiene sumando los volúmenes obtenidos en las secciones (Alder, 1980).

$$V = \left( \pi \cdot \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot 1,3 \right) + \left( \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(D^2 + Dm^2)}{2} \cdot (ht - 1.3 - 1) \right) + \left( \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left( \frac{Dm}{2} \right)^2 \cdot 1 \right)$$

V = volumen a estimar.

$\pi$  = constante.

D = diámetro normal.

ht = altura total del árbol.

Dm = diámetro en el extremo inferior de la sección o troza en este caso (0.01m).

Este volumen se calculó con el objetivo de contrastar los dos resultados obtenidos, por la integración y la suma de secciones. A partir de este valor podemos establecer una diferencia de validación entre volúmenes estimados y observados, para posteriormente realizar una relación de error presente entre estos resultados obtenidos.

### **3.9 Bondad de ajuste**

Por medio de un modelo estadístico se puede describir lo bien que se ajusta un conjunto de observaciones. En este caso la bondad de ajuste es una herramienta que se resume la diferencia entre valores esperados por el modelo y los valores dados por el estudio.

Para determinar la bondad de ajuste en los modelos se aplicó los procedimientos clásicos de estimación de máxima verosimilitud AIC (Akaike, 1974), el cual proporciona un medio para la selección de modelos, evaluando la bondad de ajuste de cada modelo y su complejidad, introduciendo nuevas estimaciones de criterio de información teórica definiendo la función más adecuada y el de criterio de información BIC (Bayesiano) el cual su criterio se basa en la selección de un número grande de modelos, según su probabilidad mediante la edición de parámetros. Estos indicadores se estiman de acuerdo al valor de AIC y BIC más bajo, determinando el mejor ajuste del modelo (Gómez, Torres, García, & Navarro, 2012).

Para la selección del mejor modelo de acuerdo al volumen, se realizó mediante la aplicación del Coeficiente de determinación ( $r^2$ ), permitiendo relacionar los resultados obtenidos con los volúmenes observados y los predichos. Determinando la validación de confianza en el ajuste de los modelos, lo que permite generar un porcentaje de credibilidad en los volúmenes obtenidos.

$$r^2 = 1 - \frac{\sum(Y_{obs} - Y_{pre})^2}{\sum(Y_{obs} - Y_{med})^2}$$

$Y_{obs}$  = Valores observados de la variable dependiente (Estimación de volumen por método analítico).

$Y_{pre}$  = Son los valores de variable dependiente estimado a través de los modelos de ahusamiento desarrollados.

$Y_{med}$  = Media de los valores observados.

El error se evaluó empleando la raíz cuadrada media de error medio.

$$RCME: \sqrt{\frac{\sum(Y_{obs} - Y_{pre})}{(n - q)}}$$

$Y_{obs}$  = Valores observados de la variable dependiente (Estimación de volumen por método analítico).

$Y_{pre}$  = Son los valores de variable dependiente estimado a través de los modelos de ahusamiento desarrollados.

$n$  = Numero de datos usados en el ajuste del modelo.

$q$  = Parámetro del modelo.

**3.9.1 Análisis de los residuos.** Es el residuo de la diferencia entre los valores dependientes de volumen, este resultado permite interpretar el comportamiento de los errores presentes de los modelos a lo largo del modelamiento fustal.

$$Resd = Y_{obs} - Y_{pre}$$

$Y_{obs}$  = Valores observados de la variable dependiente (Estimación de volumen por método analítico).

$Y_{pre}$  = Son los valores de variable dependiente estimado a través de los modelos de ahusamiento desarrollados.

## 4 Resultados

### 4.1 Fase de ajuste

En la fase de ajuste para la obtención de los parámetros, se realizó un trabajo en campo para la obtención de los datos, en la finca la tachuela se tomaron registros de 427 individuos de la especie *Pinus patula*, al momento de la evaluación de los modelos se evidencio que hay funciones matemáticas que requieren caracteres específicos para una correcta estimación volumétrica. Ya que en el proceso de estimación los modelos presentaban condiciones las cuales indicaron que hay aspectos en los individuos que alteran o limitan el modelamiento estadístico de los parámetros.

Estas condiciones se presentan en las características morfológicas de la especie, donde llevando acabo el descarte de 47 individuos, los cuales presentaban anomalías en su perfil fustal y un dap menor a 20cm.

La metodología estadística aplicada, para el ajuste de la ecuación de ahusamiento se tomó el 70% de la muestra para la obtención de los parámetros estadísticos para las 8 ecuaciones evaluadas. Donde se ajustaron con más precisión (Bruce et al.,1968), (Rentería et al., 1998), (Kozak et al.,1969), (Rojo et al.,2005) y (Demaerschlak,1972), los modelos (Real et al.,1986), (Lowell,1986) y (Demaerschalk,1973) no presentaron altos valores de significancia en el ajuste estadístico y por ende fueron excluidos del análisis.

En la Tabla 3 se muestra la estimación de parámetros realizados para cada uno de los modelos de ahusamientos, y los estadísticos de ajuste de cada una de las ecuaciones evaluadas. Donde (Lowell,1986), (Real & Moore,1986) y (Demaerschalk,1973). fueron los modelos que no se ajustaron y por ende fueron excluidos del estudio.

La Tabla 3 presenta los valores estadísticos como es el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), raíz del error medio cuadrático (RCME) en comparación, para cada ecuación aplicada de acuerdo a la modelación presentada a la totalidad fustal, también se incluyen los valores de estimación de máxima verosimilitud AIC (Akaike) y BIC (Bayesiano).

Los mejores modelos que muestran los estadísticos de ajuste AIC y BIC son los modelos (Bruce et al.,1968) y (Rentería et al., 1998), presentando los mejores valores en la bondad de ajuste, estos métodos de criterios de información señalaron (Bruce et al.,1968) como el mejor ajuste.

En la Figura 9, se muestran el comportamiento de cada modelo en la expresión del fuste, donde los mejores comportamientos se observaron en (Bruce et al.,1968) y (Rentería et al., 1998), representando una óptima continuidad en la asíntota a lo largo del modelo fustal, dado que los exponentes de estas ecuaciones exhiben más cantidad de parámetros que las demás ecuaciones evaluadas.

(Rojo et al.,2005) y (Demaerschlak,1972) presentaron un perfil semejante en la modelación en el fuste, por la naturalidad de la ecuación (Kozak et al.,1969) obtuvo la menor eficiencia en el comportamiento del modelo. Por su parte (Bruce et al,1968) al contener en su función matemática un exponente de grado muy elevado, muestra que las ecuaciones de este tipo de grado van a constituir una mayor predicción en la representación en el perfil del árbol. Lo cual permite que se evalué de una manera más acertada la continuidad del diámetro con relación a la altura.

Tabla 3.

*Parámetros de los modelos de ahusamiento.*

| <b>Sistema compatible</b>   | <b>Parámetros ajustados</b> |           |          | <b>Ecuación de volumen</b> |        | <b>Función de ahusamiento</b> |           |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------|----------|----------------------------|--------|-------------------------------|-----------|
| Modelo                      | b1                          | b2        | b3       | $R^2$                      | RCME   | AIC                           | BIC       |
| (Bruce et al., 1968)        | 0.09757                     | 1.13231   | -0.13399 | 95,33%                     | 0.1306 | -2375.819                     | -2362.761 |
| (Renteria & Bautista, 1998) | 0.09757                     | 1.13231   | -0.13399 | 92.80%                     | 0.1836 | -2374.761                     | -2361.703 |
| (A Kozak et al., 1969)      | -1.716061                   | 0.8726376 |          | 70,59%                     | 0.2397 | -2373.879                     | -2356.468 |
| (J. Demaerschalk, 1972)     | 0.8535982                   | 2.2277338 |          | 64.60%                     | 0.2523 | -2254.275                     | -2236.864 |
| (Rojo et al., 2005)         | 0.0217648                   | -0.03079  | 0.75092  | 36,08%                     | 0.2931 | -2236.869                     | -2351.703 |

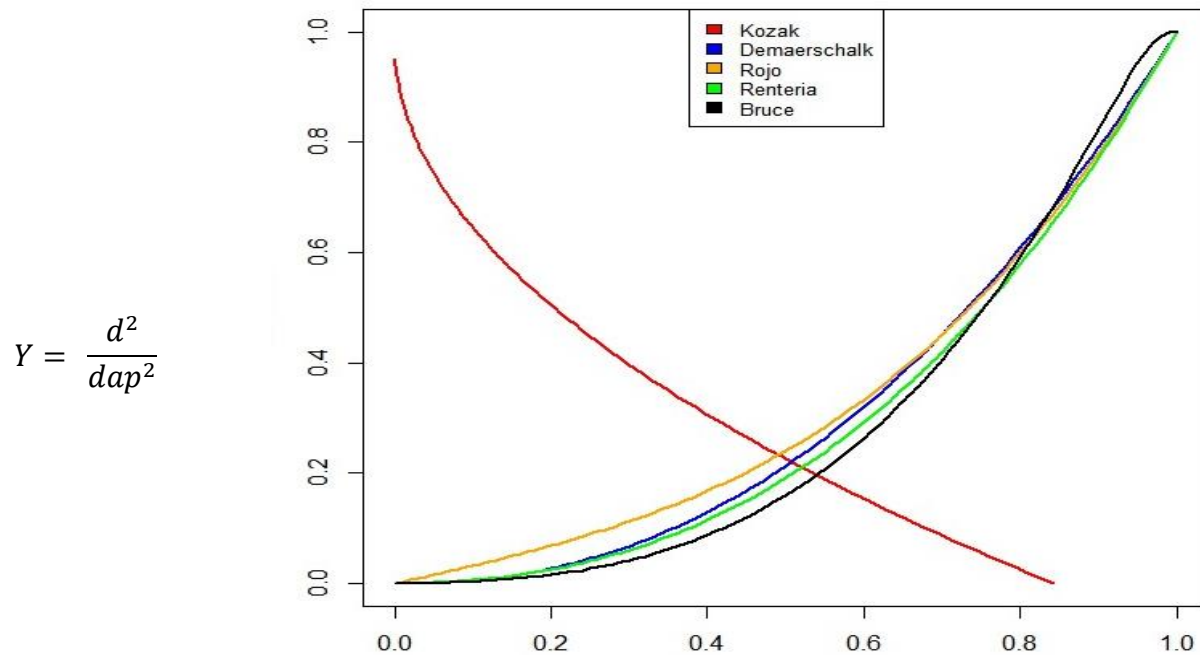


Figura 9. Comportamiento de los modelos de ahusamiento en el perfil longitudinal fustal.

$$X = \frac{ht-h}{ht-1.3} \text{ (Bruce et al., 1968)(Rojo et al., 2005),}$$

$$T = \frac{h}{ht} \text{ (A Kozak et al., 1969),}$$

$$Z = \frac{ht-h}{ht} \text{ (J. Demaerschalk, 1972) (Rentería & Bautista, 1998).}$$

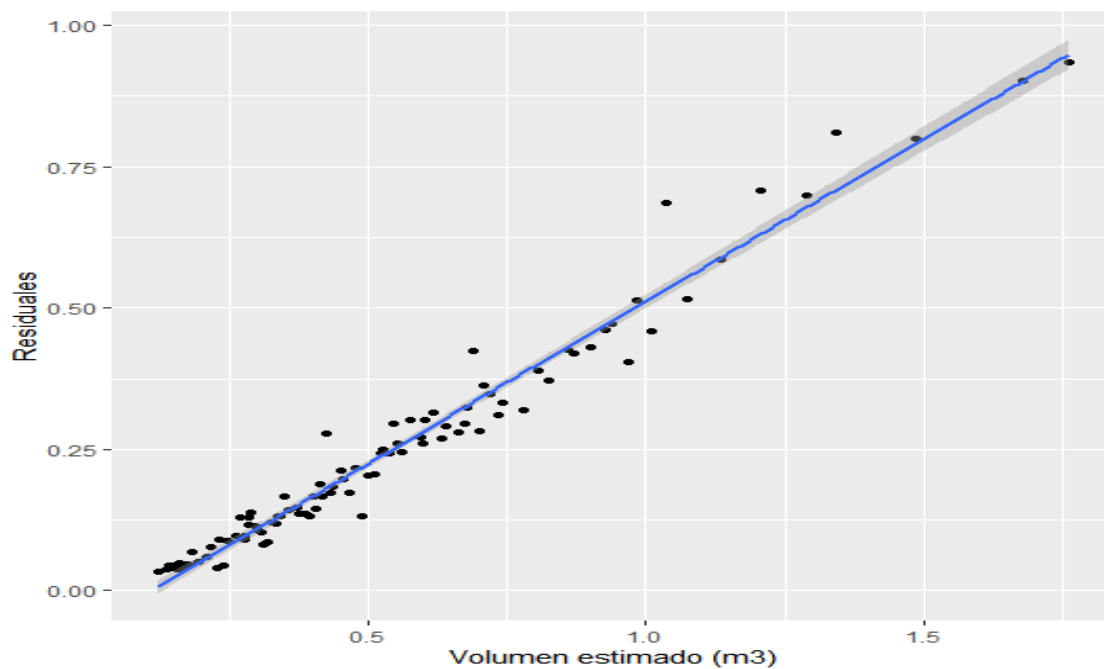
#### 4.2 Fase de validación

En la fase de validación para los cinco modelos evaluados en este estudio se seleccionó el 30% restante de la muestra total. Se evaluaron los resultados obtenidos en cada modelo, donde se observó el comportamiento de la ecuación de ahusamiento en los volúmenes obtenidos, también se realizó un análisis en la relación obtenida en la diferencia entre el volumen observado y el volumen predicho.



Se analizó la heterogeneidad de los residuales contra los valores predichos de cada modelo, prestando atención en su distribución y la proporción que presenta cada ecuación en la estimación de todos los individuos evaluados.

#### 4.2.1 Validación (Bruce et al., 1968).



*Figura 10.* Distribución de residuales en relación con el volumen estimado. Adaptado del modelo Bruce... [et al.] (1968). Diagrama de dispersión.

En la Figura 10 se determina los residuales presentando un comportamiento aleatorio en volúmenes menores a un metro cúbico, donde a medida que incrementa el volumen se demuestra una subestimación, lo que traduce que las estimaciones más confiables se presentan en volúmenes pequeños.

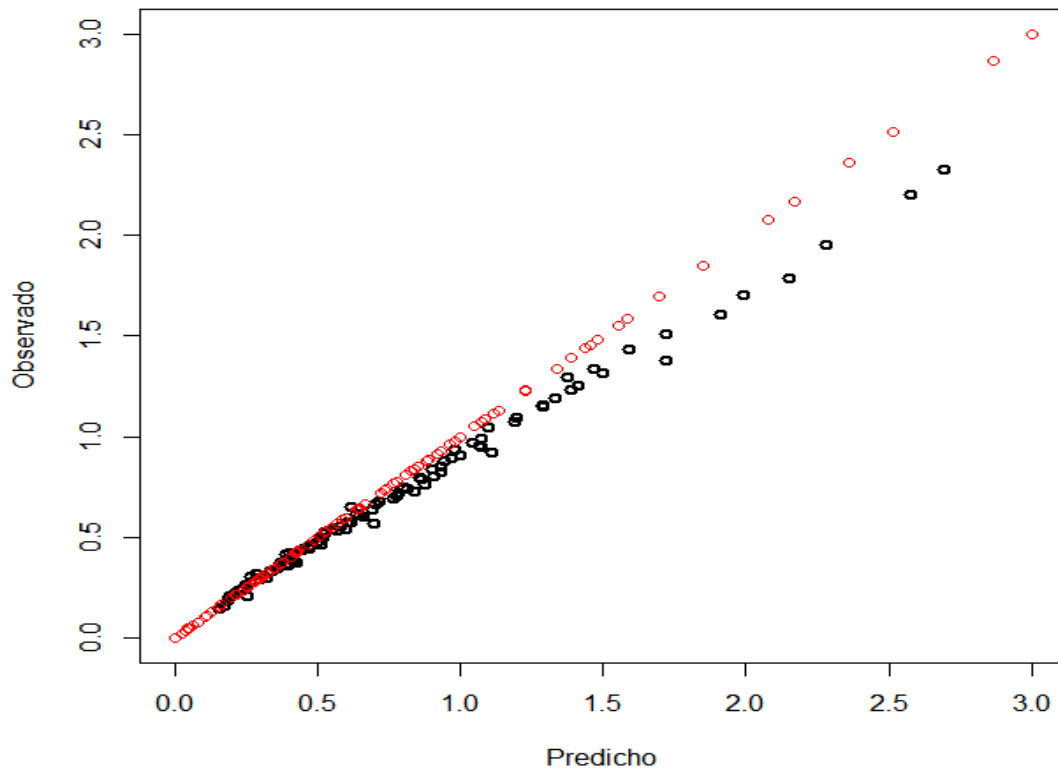
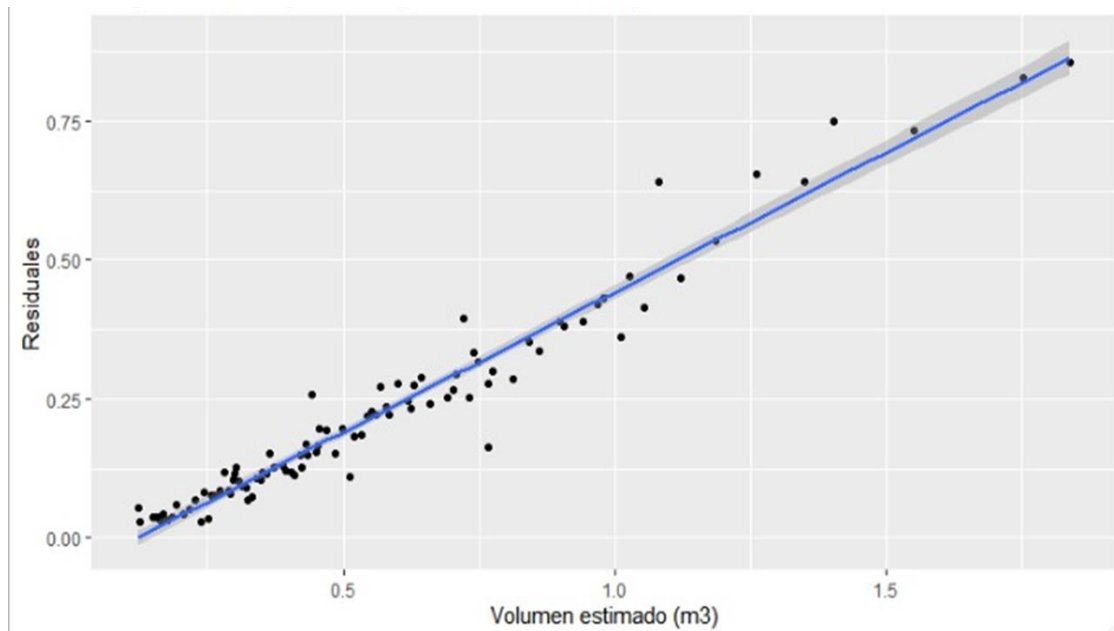


Figura 11 .Validación del volumen sin corteza del *Pinus patula*. Adaptado del modelo Bruce... [et al.] (1968). Volumen observado/predicho ( $m^3$ ).

En la Figura 11, se observa la tendencia del volumen observado y el predicho por el modelo notando que no hay grandes diferencias en la calidad de estimación de volúmenes pequeños, sin embargo, a mayor volumen comienza a incrementar una diferencia levemente no tan significativa entre los valores observados y predicho, generalmente este modelo presenta las mejores estimaciones con un 95.33% de confianza, y asumiendo los mejores resultados estadísticos RCME (0.1306) y teniendo un AIC (-2375.819) y BIC (-2362.761).

#### 4.2.2 Análisis Validación (Renteria & Bautista, 1998).



*Figura 12.* . Distribución de residuales en relación con el volumen estimado. Adaptado del modelo Renteria... [et al.] (1998). Diagrama de dispersión.

En la Figura 12, de residuales se identifica la predicción volúmenes que es muy similar al modelo (Bruce et al., 1968) en volúmenes bajos se comporta de manera aleatoria, pero a medida que aumenta el volumen se presenta un sobreestima de los valores.

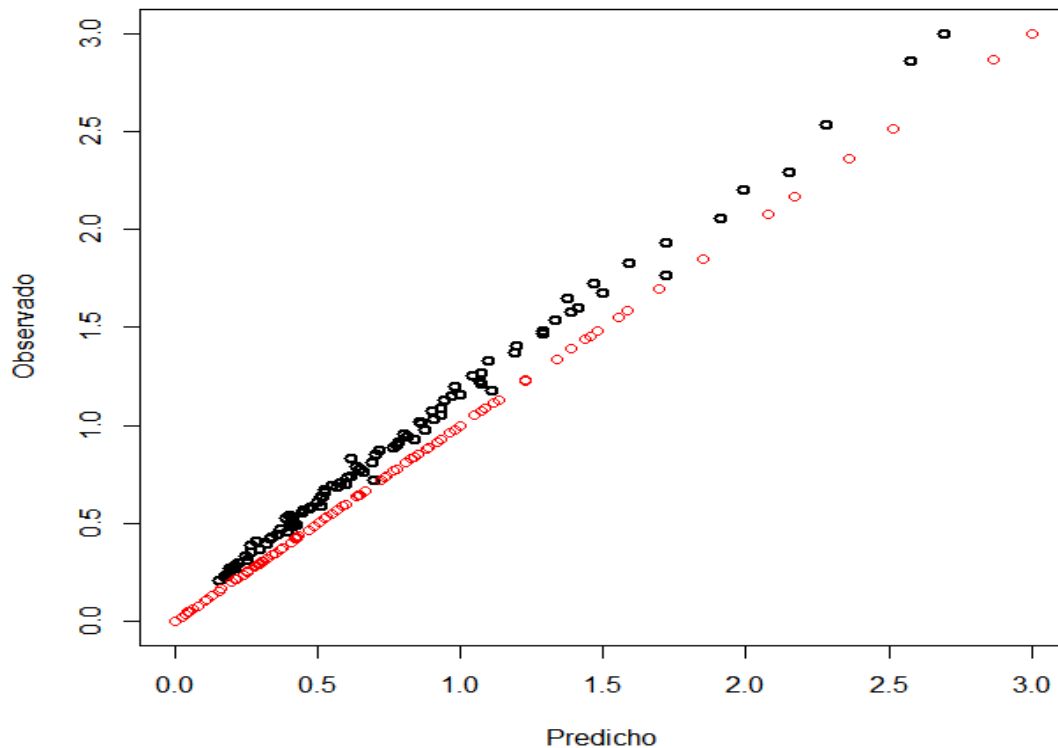
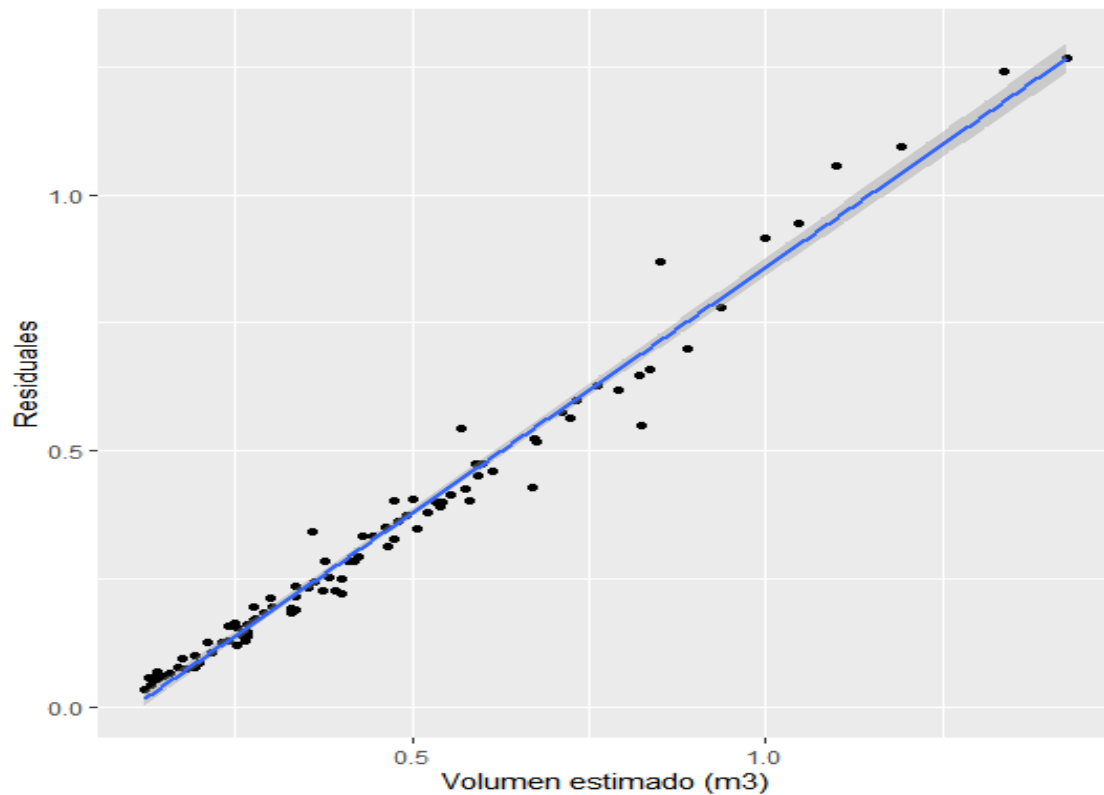


Figura 13. Validación del volumen sin corteza del *Pinus patula*. Adaptado del modelo Renteria... [et al.] (1998). Volumen observado/predicho ( $m^3$ ).

Este modelo es el que mejor se ajusta después del modelo de (Bruce et al.,1968), como se observa en la Figura 13 este modelo tiene una moderación en la validación de los valores, aunque presenta una estimación por encima del volumen observado. Los valores permanecen de manera paralela y muy cercana a la medida central, aun así, a medida que el volumen aumenta la diferencia entre la relación de volúmenes es mayor. Generalmente el modelo presenta una buena estimación con el 92.80 % de confianza, y asumiendo resultados estadísticos de RCME (0.1836) y teniendo un AIC (-2374.761) y BIC (-2361.703).

#### 4.2.3 Análisis Validación (A Kozak et al., 1969).



*Figura 14 . Distribución de residuales en relación con el volumen estimado. Adaptado del modelo Kozak... [et al.] (1969). Diagrama de dispersión.*

En esta Figura 14 se observa que los residuales se comportan de manera aleatoria en los volúmenes estimados más bajos, el modelo tiende a subestimar los valores intermedios, y en volúmenes más altos sobreestima.

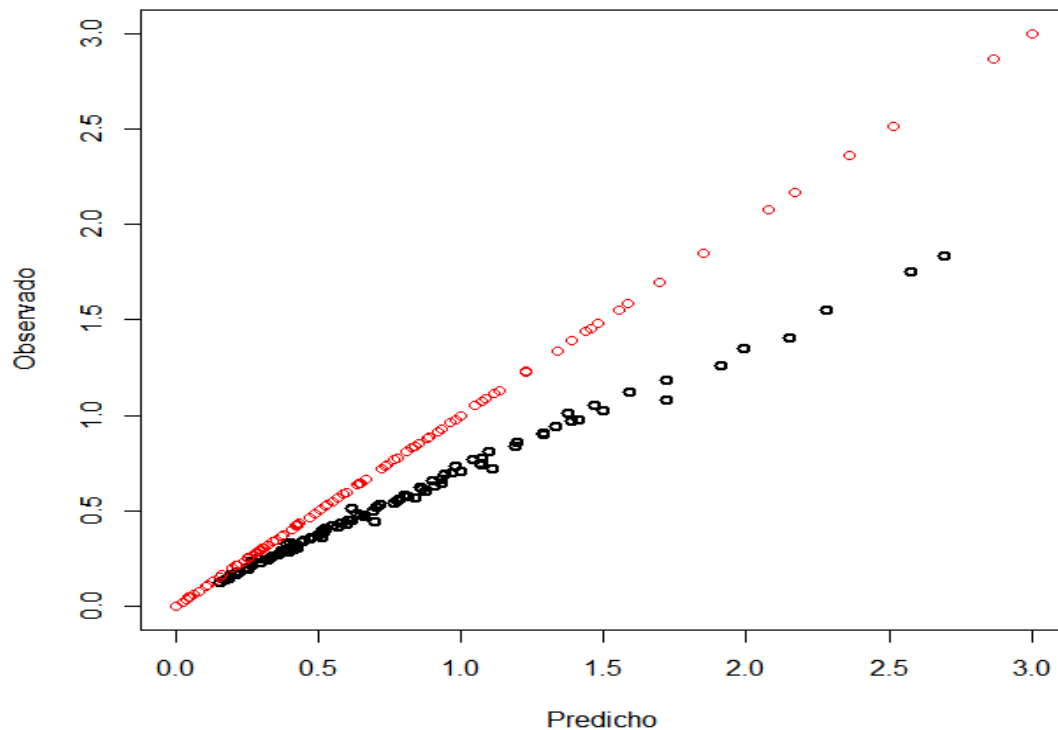


Figura 15. Validación del volumen sin corteza del *Pinus patula*. Adaptado del modelo Kozak... [et al.] (1969). Volumen observado/predicho ( $m^3$ ).

Como lo indica la Figura 15 este modelo presenta unos resultados muy inconsistentes, ya que los volúmenes predicho están muy alejados de los valores observados, determinando que solo una pequeña parte de los volúmenes más bajos lograron una estimación más cercana, logrando una tasa de confiabilidad del 70.59%, y asumiendo resultados estadísticos intermedios entre los modelos evaluados de RCME (0.2397) y teniendo un AIC (-2373.879) y BIC (-2356.468).

#### 4.2.4 Análisis de validación (J. Demaerschalk, 1972).

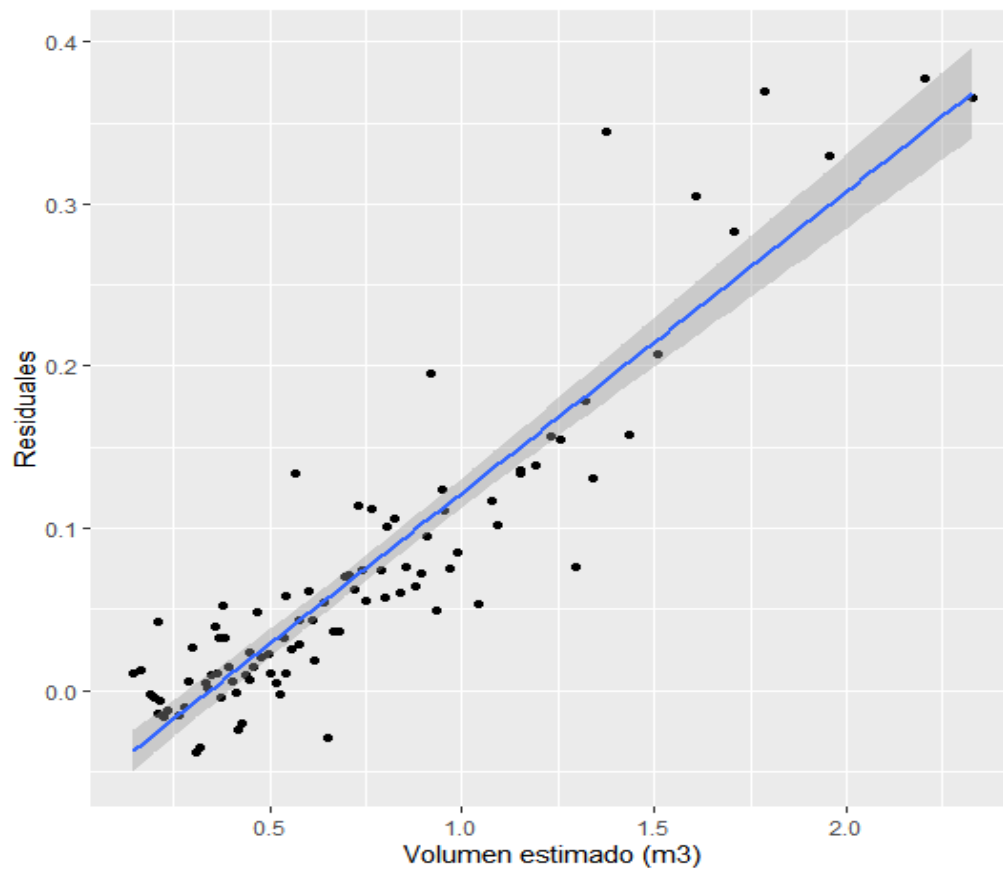


Figura 16. . Distribución de residuales en relación con el volumen estimado. Adaptado del modelo Demaerschalk, (1968). Diagrama de dispersión.

En la Figura 16 se denota los residuales mostraron que este modelo se ajustó, pero no contiene una representación óptima del perfil fustal ya que presenta valores desajustados de la línea de tendencia central.

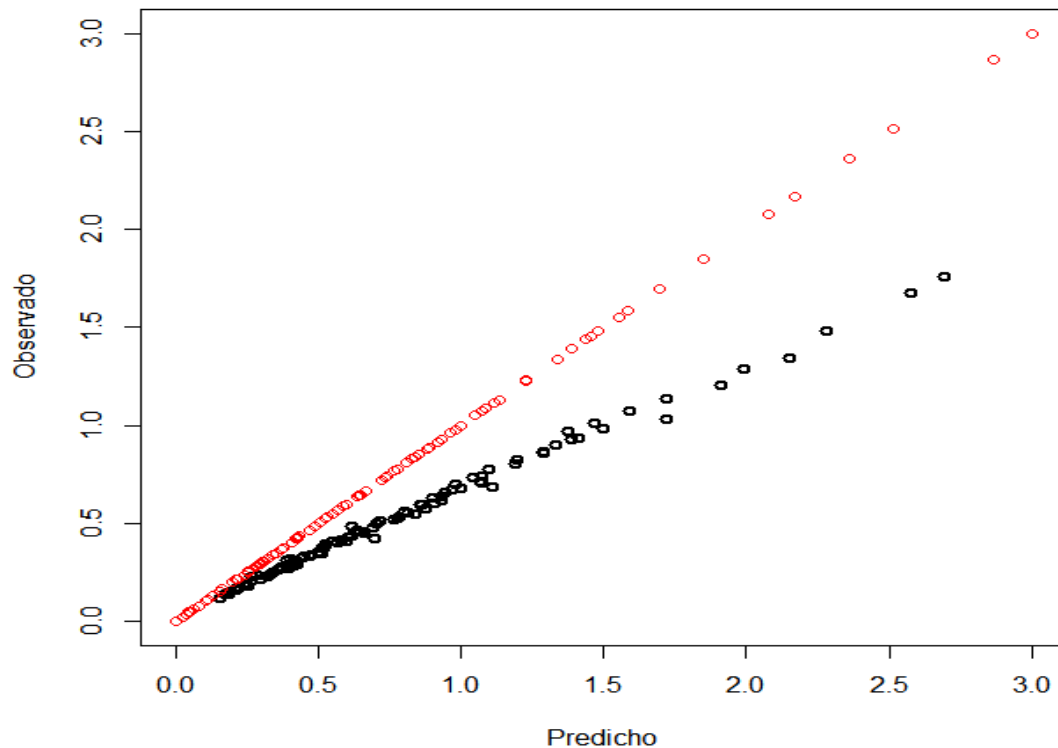


Figura 17. Validación del volumen sin corteza del *Pinus patula*. Adaptado del modelo Demaerschalk, (1968). Volumen observado/predicho ( $m^3$ ).

Como se identifica en la Figura 17 este modelo presenta una gran diferencia entre el valor estimado y el predicho, se puede identificar que esta ecuación pierde precisión en la estimación del volumen, obteniendo un menor porcentaje de confianza con un 64.60%, y asumiendo resultados estadísticos de menor precisión con un RCME (0.2523) y teniendo un AIC (-2254.275) y BIC (-2236.864).



#### 4.2.5 Análisis de validación (Rojo et al., 2005).

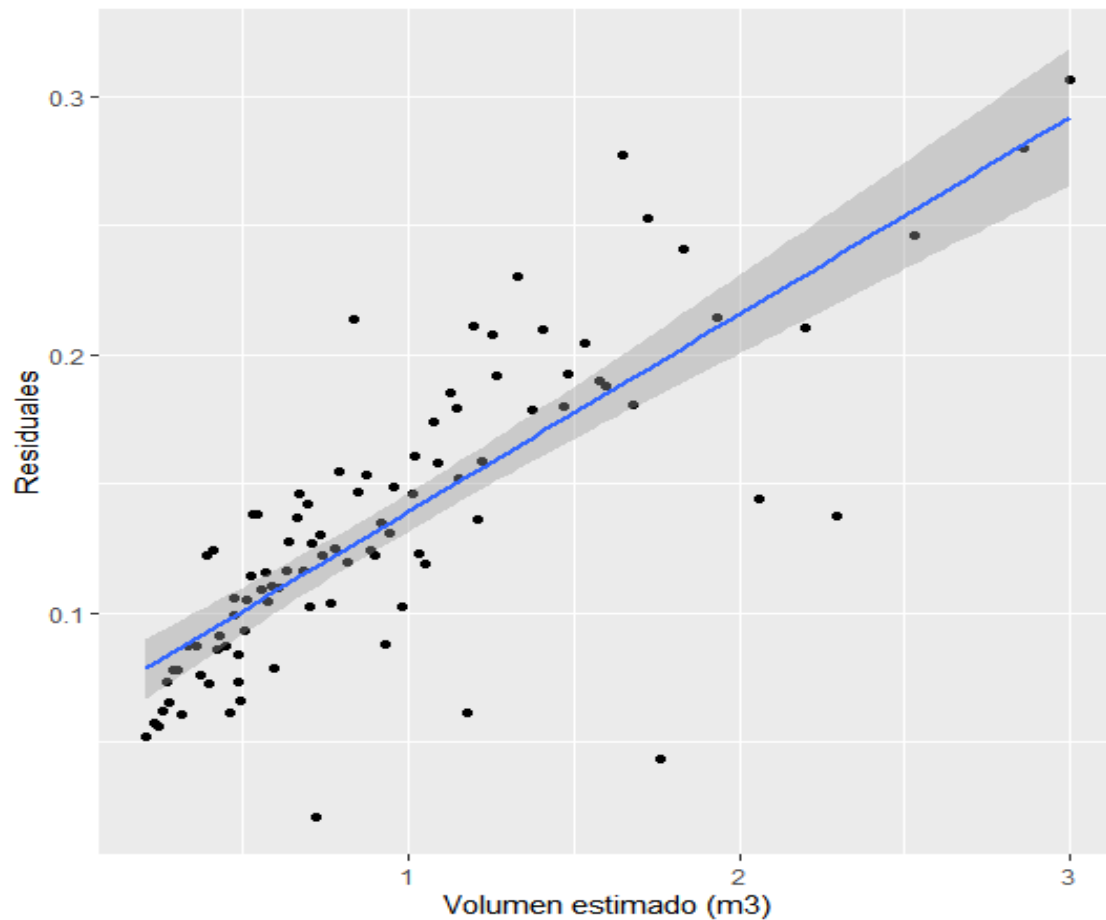


Figura 18 . Distribución de residuales en relación con el volumen estimado. Adaptado del modelo Rojo... [et al.] (2005). Diagrama de dispersión.

En la Figura 18 se ilustra la conducta de los residuales de una manera muy dispersa poca aleatoria, que en volúmenes mayores a un metro cubico subestima el volumen. Ya que este modelo es el que menos represento el perfil fustal.

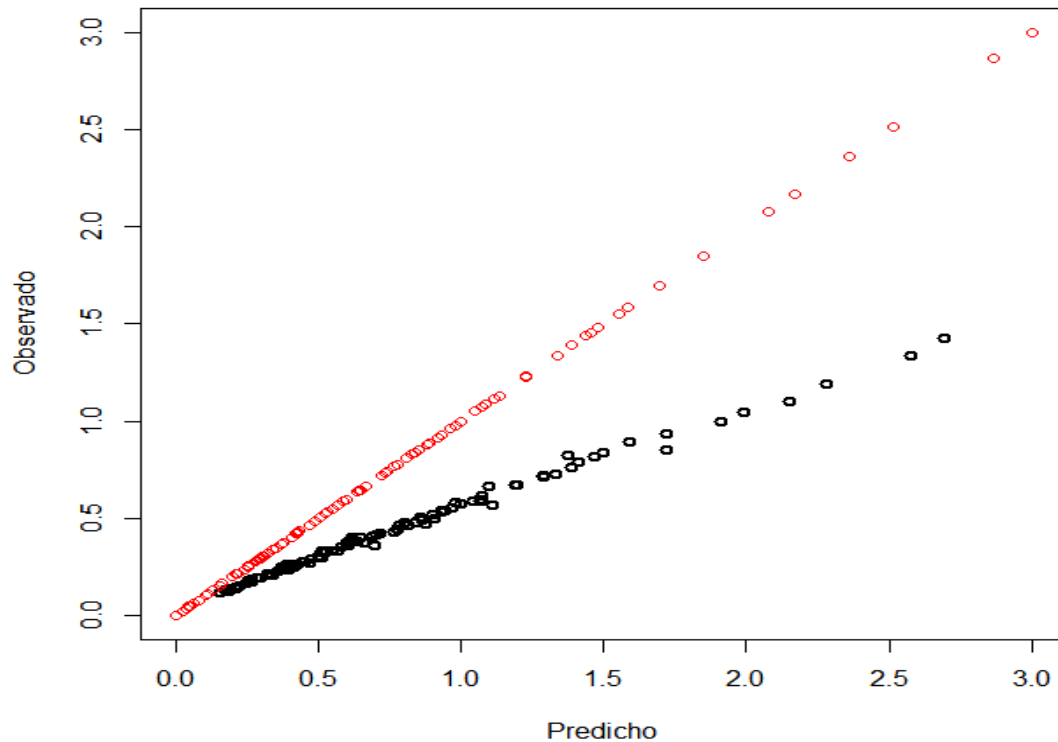


Figura 19. Validación del volumen sin corteza del *Pinus patula*. Adaptado del modelo Rojo... [et al.] (2005). Volumen observado/predicho ( $m^3$ ).

Esta validación presenta los menores índices de confiabilidad con un 36.08%, y asumiendo resultados estadísticos de menor precisión con un RCME (0.2931) y teniendo un AIC (-2236.869) y BIC (-2351.703). Indicándonos que este modelo contiene la más desfavorable predicción del perfil fustal, ya que demuestra un alto rango de dispersión de acuerdo a la relación con la línea de tendencia.

## 5 Discusión

En cuanto a los modelos evaluados en este estudio, el modelo de ahusamiento por (Demaerschalk, 1972) y (Rojo et al., 2005) mostraron una bondad de ajuste y validación con resultados inferiores a los demás sistemas evaluados. Como (Herrera, Barrios, López, & Nieto, 2015), han obtenido resultados de modelos polinomiales simples como Demaerschalk (1972), mostraron que han obtenido deficiencias en la evaluación del área basal y ápice de los árboles, similar a los resultados obtenidos en este estudio.

(Muhairwe, 1999). establece que no hay una función de ahusamiento que se adapte a todas las especies, donde se determina en este estudio y en la revisión de otras literaturas que para el ajuste de estas ecuaciones juegan muchas características presentes en la especie, sitio del rodal. De acuerdo con esto, es complejo encontrar un modelo de ahusamiento que se ajuste a todas las especies o en los medios donde se desarrolló.

De acuerdo con (Hernández Pérez et al., 2013) establece que la especie *Pinus patula* presenta fustes más cilíndricos y homogéneos en plantaciones donde hay un manejo silvícola. Por lo tanto, en esta investigación se evidenció que el rodal evaluado no presentaba ningún manejo silvícola, lo que traduce que no hubo una homogeneidad en los perfiles fustales y como consecuencia las ecuaciones de ahusamiento no se ajustaron de una manera más precisa.

Los estudios realizados por (Corral, Chaidez, & Sánchez, 1999) presenta que el mayor error en la estimación volumétrica se presenta en los individuos con diámetros mayores a 30cm, se evidencio que efectivamente en diámetros pequeños se ajusta de una manera más precisa que en diámetros mayores, sin embargo, este comportamiento no se presentó en todos los sistemas ajustados en este diámetro (30 cm), si podemos establecer que los errores de ajuste empiezan a ser

más grandes de acuerdo aumenta el diámetro en los individuos, pero cada modelo presenta diferente comportamiento de acuerdo al sistema de ajuste que demuestra.

(Dorado & González, 2000), desarrolló una tarifa de cubicación para el *Pinus radiata* usando funciones de perfil fustal, los autores encontraron que los mejores sistemas de ecuaciones evaluados fueron (Bruce et al. 1968) y (Kozak, 1969) quienes presentan estimaciones aceptables desde el punto de vista del sesgo de los residuos y su dispersión. En la presente investigación se concuerda con que el sistema mejor ajustado con estimaciones consistentes para árboles de la especie *Pinus patula* fue (Bruce et al. 1968), sin embargo, el modelo de (Kozak et al. 1969) en los resultados obtenidos sus predicciones del volumen son muy sesgadas.

Los modelos de (Kozak et al. 1969), (Demaerschalk, 1972), dado a su sencillez en su ecuación resultaron más sencillos para ajustar y determinar el volumen integrando, no obstante, su estimación de la tasa de cubicación de estos sistemas está muy por debajo en comparación con el volumen observado.

Las ecuaciones de ahusamiento de volumen ajustadas aportan una herramienta importante en el campo forestal, ya que permite realizar investigaciones de estimación volumétrica, en este caso en la medición de individuos que están en pie, estos métodos facilitan el estudio rápido y económico de una plantación forestal en desarrollo.

Este estudio involucro la recolección de datos por medio de un censo completo de las características del rodal, donde se presentaba gran variabilidad en los datos obtenidos al ser una plantación que no contiene ningún tipo de manejo silvicultura, cabe resaltar que la mayoría de estudios realizados involucran muestras aleatorias con los mejores individuos para realizar el ajuste y validación de los datos, lo que esto ocasiona una mejor predicción de los volúmenes en dichas dicha muestra.

## 6 Conclusiones

De acuerdo a la metodología aplicada a este estudio, con la muestra evaluada de 427 individuos tomada mediante un censo completo de la plantación se trabajaron características cuantitativas como altura del árbol y el diámetro, características cualitativas con forma, estado del individuo. Estableció que el mejor ajuste y validación volumétrica lo presento el modelo de ahusamiento propuesto por (Bruce et al., 1968) fue el que mejor obtuvo resultados en la fase de ajuste paramétrico y de validación volumétrica, ha sido seleccionado con un 95.33% de confiabilidad y asumiendo los mejores resultados de ajuste y validación estadísticos con un RCME (0.1306) y teniendo un AIC (-2375.819) y BIC (-2362.761). Para la estimación volumétrica del *Pinus patula*, este sistema proporciona estimaciones muy precisas del volumen.

Los modelos de ahusamiento de (Bruce et al. 1968) y (Renteria, 1998) han mostrado estadísticos de ajuste y validación, en la interpretación del gráfico se encontraron semejanzas, también en la integración del volumen presenta buenos resultados de estimación, siendo estos dos sistemas los mejores para obtener predicciones consistentes a lo largo del fuste. En cambio, los sistemas de ahusamiento de (Kozak et al. 1969), (Demaerschalk, 1972), (Rojo et al. 2005), son modelos que se ajustan con significancias, pero al integrar para obtener el volumen presentan capacidades predictivas bajas en la capacidad volumétrica del *Pinus patula*. su estimación de la tasa de cubicación de estos sistemas está muy por debajo en comparación con el volumen observado.

En el presente estudio se evaluaron cinco modelos de ahusamiento en cuanto a la capacidad de estimar el volumen total de la especie *Pinus patula* en la finca “La Tachuela” en el municipio de Málaga, Santander, Colombia. Mediante sistemas de ahusamiento compatible siendo una herramienta muy importante para la cubicación volumétrica, determinando una mejor proyección

y el manejo de la especie, disminuyendo la incertidumbre del cálculo de los productos a aprovechar de un árbol.

En conclusión, la estimación volumétrica por el método analítico el cual se basa en dividir el árbol en tres secciones, permite cuantificar el volumen total de madera con una alta confiabilidad, los modelos de ahusamiento nos permiten calcular a través de la integración matemática el volumen a cualquier altura del árbol determinado volúmenes de tipo de aserio, volumen para biomasa y carbono, lo cual estas estimaciones no se pueden realizar por el método de analítico por secciones.

## **7 Recomendaciones**

Se recomienda para futuras investigaciones forestales la implementación de un aplicativo móvil, o una extensión de un software estadístico, para la estimación del volumen de madera en plantaciones o rodales comerciales, donde faciliten el procesamiento de la información recolectada en campo, para optimizar la cuantificación volumétrica de los individuos en estudio.

Se recomienda para el ajuste de estos modelos trabajar con plantaciones que tengan un manejo silvícola establecido, así asegurando resultados más óptimos en los resultados estadísticos.

Profundizar en los estudios de estimación volumétrico en árboles en pie ya que gracias a estas metodologías se determina el estado de una plantación y la cantidad de productos que se puede obtener de ella, de manera precisa rápida y económica.

Cabe resaltar la importancia de la aplicación de softwares estadísticos como R- Project, mediante la implementación de la programación lineal en el ámbito académico que facilita la optimización de procesos, es por esto que se hace necesario ver la utilidad práctica de programar

con el fin de obtener resultados de alta precisión en tiempos cortos que repercuten el análisis de datos respectivamente.

Se recomienda para trabajos futuros analizar el comportamiento de las ecuaciones de ahusamiento, entendiendo su estructura se puede establecer cuáles son sus variables por las que están compuestas, ya que hay modelos matemáticos que son muy sensibles a valores atípicos lo que puede ocasionar que no se realice un ajuste estadístico óptimo.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. In Selected Papers of Hirotugu Akaike (pp. 215-222). Recuperado de [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-1694-0\\_16](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-1694-0_16)
- Alder, D. (1980). Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. FAO, 22 Commonwealth Forestry Institute, Reino Unido. FAO. Recuperado de <http://www.fao.org/3/a-ap354s.pdf>
- Bailey, R. L. (1995). Upper stem volumes from stem analysis data: an overlapping bolts method. Canadian Journal of Forest Research, 25(1), 170-173.
- Beal, D. J. (2007). Information criteria methods in SAS for multiple linear regression models. SESUG Proceedings, 1-10. Recuperado de <https://analytics.ncsu.edu/sesug/2007/SA05.pdf>
- Bonnans, J.-F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C., & Sagastizábal, C. A. (2006). Numerical optimization: theoretical and practical aspects. Recuperado de <https://www.springer.com/gp/book/9783540354451>
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Ley 1731 31 de Julio de 2014, Diario Oficial No. 49229 (2014).
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Ley 29 27 de Febrero de 1990, Diario Oficial No. 39.205 (1990).
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Ley 842 09 de Octubre de 2003, Diario Oficial No. 45.340 (2003).
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Decreto 1498 07 de Mayo de 2008, Diario Oficial No. 42.645 (2008).
- Bogotá, D.C, Congreso de Colombia Ley 1021 20 de Abril de 2006, Diario Oficial No. 39.205 (2006).
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Decreto 1791 04 de Octubre de 1996, Diario Oficial No. 41.560 (1996).
- Bogota, D.C, Congreso de Colombia Ley 139 21 de Junio de 1994, Diario Oficial No. 41.401 (1994).
- Bogotá, D.C, Congreso de Colombia Decreto 877 10 de Mayo de 1976, Diario Oficial No. 34.568 (1976).



- Bruce, D., Curtis, R. O., & Vancoevering, C. (1968). Development of a system of taper and volume tables for red alder. *Forest Science*, 14(3), 339-350.
- Cancino, J. (2006). *Dendrometría Básica* (Concepción: Universidad de Concepción. Facultad de Ciencias Forestales. Departamento manejo de Bosques y Medio Ambiente ed.). Santiago de Chile. Recuperado de [http://www.sibudec.cl/ebook/UDEC\\_Dendrometría\\_Basica.pdf](http://www.sibudec.cl/ebook/UDEC_Dendrometría_Basica.pdf)
- Cancino, J. (2012). *Dendrometría básica: Determinación del volumen en árboles individuales*. Universidad de Concepción. Facultad de Ciencias Forestales. Departamento manejo de Bosques y Medio Ambiente. Concepción, Chile. Recuperado de <http://www.sibudec.cl/ebook/buscar.php?mat=3>
- Clutter, J. L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G. H., & Bailey, R. L. (1983). *Timber management: a quantitative approach*: John Wiley & Sons, Inc. Univ. Georgia, GA, EE. UU. Recuperado de <https://www.cabdirect.org/cabdirect/abstract/19840691762>
- <https://www.cabdirect.org/cabdirect/abstract/19840691762>
- Cornejo Zúñiga, O., & Rebolledo Vega, R. (2016). Estimación de parámetros en modelos no lineales: algoritmos y aplicaciones. *Revista EIA*, 13(25), 81-98.
- Corral, S., Chaidez, J. d. J. N., & Sánchez, F. F. (1999). Ajuste de funciones de ahusamiento a losperfiles fustales de cinco Pináceasde la región de El Salto, Durango. *Madera y Bosques*, 5(2), 53-65.
- de-Miguel, S., Mehtätalo, L., Shater, Z., Kraid, B., & Pukkala, T. (2012). Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research*, 42(7), 1383-1394.
- Demaerschalk. (1973). Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Canadian Journal of Forest Research*, 3(1), 90-94.
- Demaerschalk, J. (1972). Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science*, 18(3), 241-245.
- Dorado, F. C., & González, J. Á. (2000). Construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* D. Don en Galicia basada en una función de perfil del tronco. *Forest Systems*, 9(2), 253-268.
- García, O. (1995). *Apuntes de mensura forestal I. Estática*. Universidad Austral de Chile. Facultad de Ciencias Forestales. Chile, 1. Recuperado de <http://www.ambienteforestalnoa.org.ar/userfiles/biblioteca/descarga/Manual%20Mensuras%20Forestales.pdf>
- Gezan, S. A., Moreno, P. C., & Ortega, A. (2009). Modelos fustales para renovales de roble, raulí y coigüe en Chile. *Bosque (Valdivia)*, 30(2), 61-69.

- Gómez, S., Torres, V., García, Y., & Navarro, J. (2012). Procedimientos estadísticos más utilizados en el análisis de medidas repetidas en el tiempo en el sector agropecuario. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 46(1), 1-7.
- Hernández Pérez, D., de los Santos Posadas, H. M., Ángeles Pérez, G., Valdez Lazalde, J. R., Haller, V., & Hugo, V. (2013). Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schltdl. et Cham. en Zacualtipán, Hidalgo. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 4(16), 34-45.
- Herrera, J. F., Barrios, A., López, A. M., & Nieto, V. (2015). Generación de patrones de corte óptimos para árboles individuales a partir de productos demandados en plantaciones comerciales. *Colombia Forestal*, 18(2), 193-206.
- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11), 1363-1368.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4), 507-515.
- Kozak, A., Munro, D., & Smith, J. (1969). Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*, 45(4), 278-283.
- López, G. S. N., Molina, P. A. R., Barrios, A., & Aguirre, A. M. L. (2018). Modelos compatibles de ahusamiento-volumen para árboles de *Gmelina arborea* Roxb. en el Alto Magdalena, Colombia. *Colombia Forestal*, 21(2), 174-187.
- Lowell, K. (1986). A flexible polynomial taper equation and its suitability for estimating stem profiles and volumes of [N and P] fertilized and unfertilized radiata pine trees [*Pinus radiata*]. *Australian Forest Research* (Australia). Recuperado de <http://agris.fao.org/agris-search/search.do?recordID=AU8902125>
- Lynch, T. B., Chang, S.-T., & Chandler, J. P. (1992). Estimation of individual tree volume by importance sampling and antithetic variates from the cylindrical shells integral. *Canadian Journal of Forest Research*, 22(3), 326-335.
- Muhairwe, C. K. (1999). Taper equations for *Eucalyptus pilularis* and *Eucalyptus grandis* for the north coast in New South Wales, Australia. *Forest Ecology and Management*, 113(2-3), 251-269.
- Návar-Cháidez, J. d. J., & Domínguez-Calleros, P. A. (2013). Modelo de incremento y rendimiento: ejemplos y aplicaciones para bosques templados mexicanos. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 4(18), 8-27.
- Pereira, E. M., Imaña-Encinas, J., & Rezende, A. V. (2012). Evaluación de procedimientos simplificados en la cuantificación volumétrica de una plantación de pino. *Colombia forestal*, 15(1), 131-138.

- Real, P., & Moore, J. (1986). An individual tree system for Douglas-fir in the inland north-west. USDA Forestry Service General Technical Report NC-120, 1037-1044. Recuperado de <http://myb.ojs.inecol.mx/index.php/myb/article/view/446>
- Renteria, A., & Bautista, J. (1998). Sistema de cubicación para Pinus cooperi blanco mediante ecuaciones de ahusamiento en Durango/por Juan Bautista Rentería Anima. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/617/61750205.pdf>
- Rojo, A., Perales, X., Sánchez-Rodríguez, F., Álvarez-González, J., & Von Gadow, K. (2005). Stem taper functions for maritime pine (Pinus pinaster Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). European Journal of Forest Research, 124(3), 177-186.
- RProject, T. (2013). Software : R: A language and environment for statistical computing.

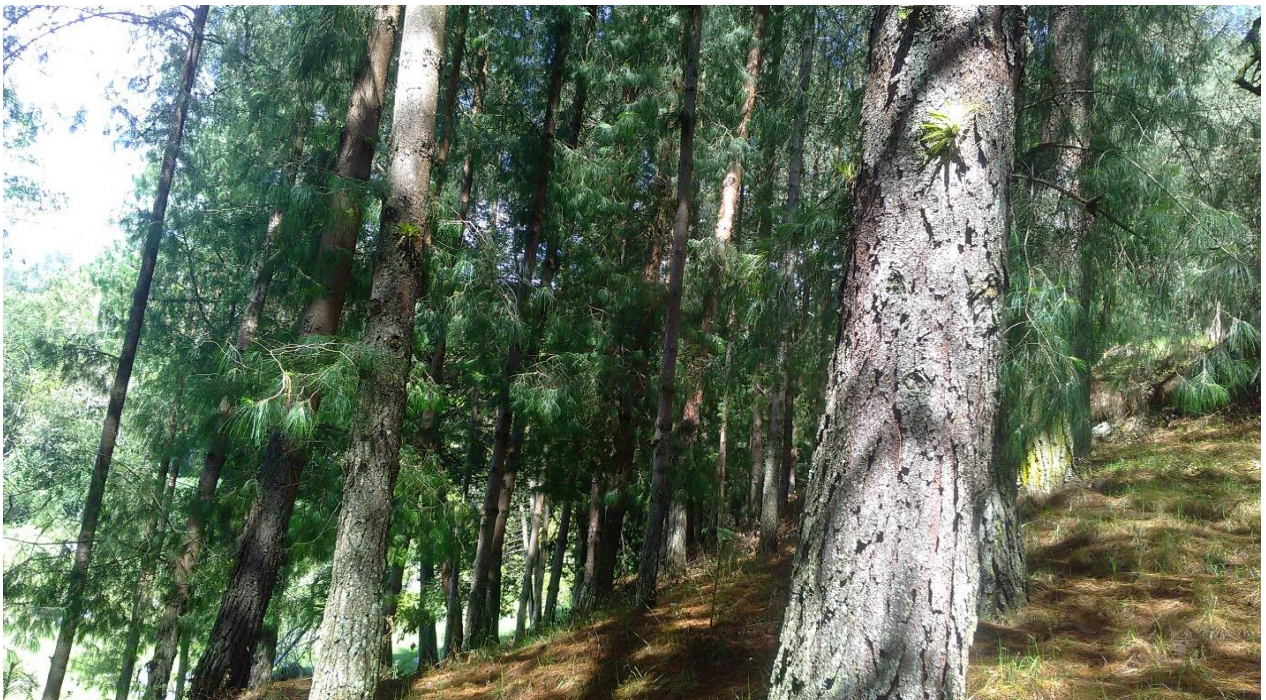


## Apéndices

### *Apéndice A. Rodal estudiado.*



### *Apéndice B. Individuos de estudio Pinus patula.*





*Apéndice C. Toma de datos en campo.*



*Apéndice D. Toma de altura con el instrumentó (pistola haga).*





*Apéndice E.* Toma de altura y distancia al individuo con el instrumentó (pistola haga).

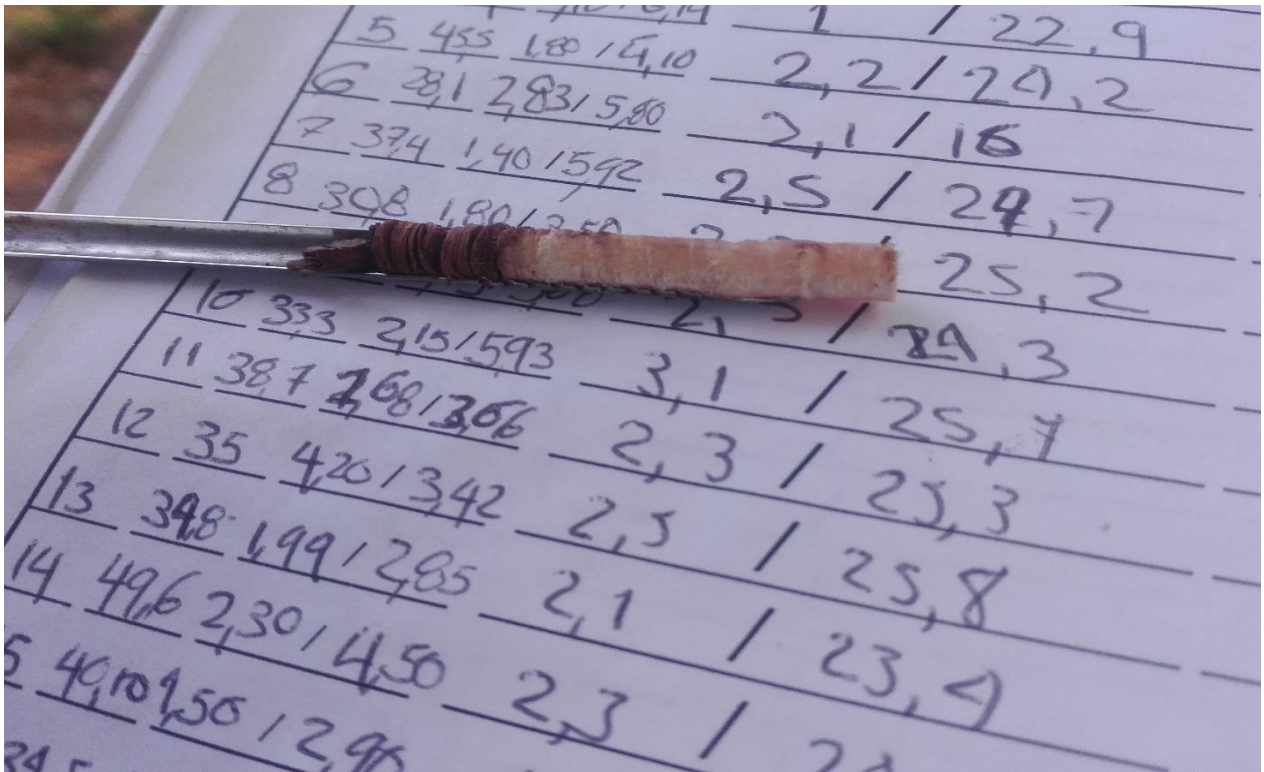


*Apéndice F.* Obtención de muestra de corteza con el instrumento (herramienta Barrena de Pressler)



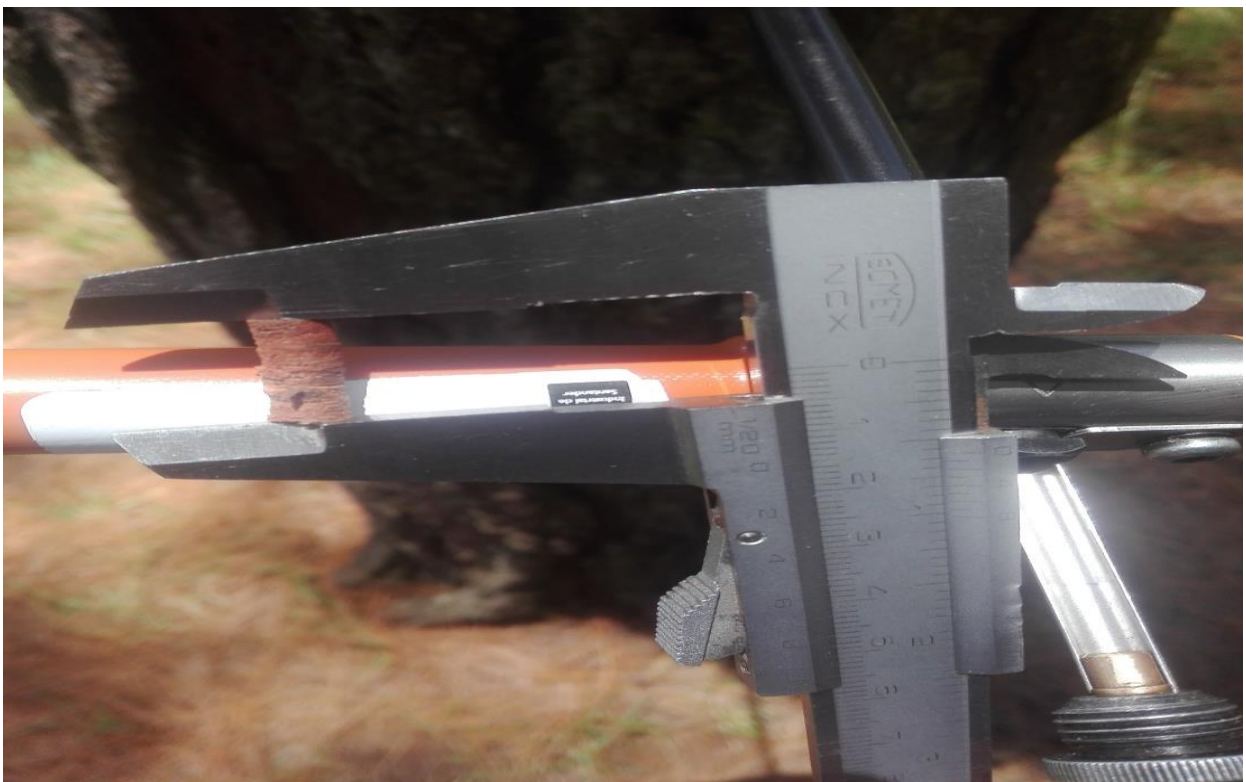


Apéndice G. Muestra de corteza.



|    |      |      |       |     |      |
|----|------|------|-------|-----|------|
| 5  | 455  | 180  | 14,10 | 1   | 22,9 |
| 6  | 381  | 283  | 15,90 | 2,2 | 24,2 |
| 7  | 374  | 140  | 15,92 | 2,1 | 16   |
| 8  | 308  | 180  | 17,50 | 2,5 | 24,7 |
|    |      |      |       |     | 25,2 |
| 10 | 333  | 215  | 15,93 | 2,3 | 24,3 |
| 11 | 387  | 268  | 306   | 3,1 | 25,7 |
| 12 | 35   | 420  | 342   | 2,3 | 25,3 |
| 13 | 348  | 199  | 285   | 2,5 | 25,8 |
| 14 | 496  | 230  | 4,50  | 2,1 | 23,4 |
| 5  | 4010 | 1,50 | 2,90  | 2,3 | 24   |

Apéndice H. Medición contenida de corteza.





*Apéndice I. Toma de medida del diámetro a la altura del pecho.*



*Apéndice J. Estado de la plantación.*





*Apéndice K. Programación ajuste modelos de ahusamiento.*

```

library(minpack.lm)
Bruce <- dscdap2~a1*X**1.5+a2*X**3+a3*X**32
nlmod1 <- nlsLM(Bruce, data=f00, start=list(a1=0.1, a2= 0.1, a3=0.1))
summary(nlmod1)
#=====
# Regresión no lineal Renteria & Ramirez (1998)
#=====
Renteria <- dscdap2~ b1*Z+b2*Z**2+b3*Z**3
nlmod5 <- nls(Renteria, data=f00, start=list( b1=0.1, b2= 0.1, b3=0.1))
summary(nlmod5)
coef(nlmod5)
nlmod5$p.value
#=====
# Regresión no lineal Kozak. 1969
#=====
Kozak <- dscdap2~ a1*(T-1)+a2*(T**2-1)
nlmod2 <- nls(Kozak, data=f00, start=list(a1=0.1, a2=0.1))
summary(nlmod2)
#=====
# Regresión no lineal Demaerschalk. 1972
#=====
Demaerschalk <- dscdap2~ b1*(Z)**b2
nlmod3 <- nls(Demaerschalk, data=f00, start=list(b1=0.1, b2=0.1))
summary(nlmod3)
#=====
# Regresión no lineal Coffre. 1982
#=====
library(minpack.lm)
Coffre1 <- dscdap2~ b1*X+b2*X**2+b3*X**3
nlmod4 <- nlsLM(Coffre1, data=f00, start=list(b1=0.1, b2=0.1, b3=0.1))
summary(nlmod4)

AIC(nlmod1, nlmod2 , nlmod3 , nlmod4 , nlmod5)
BIC(nlmod1, nlmod2 , nlmod3 , nlmod4 , nlmod5)

```