

**Exploración de los Sentidos y Significados de los Números Racionales con Estudiantes de
Sexto Grado**

Lizeth Carolina Yara Hoyos

Trabajo de Grado para Optar el título de Magister en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctorado en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A Dios, mi Padre Celestial, que me ha dado la vida, la fortaleza cuando mis fuerzas fallan y me ha dado el privilegio de tener una familia maravillosa.

A mi amada madre Marta, por amarme tanto, por formarme como la persona que soy, y apoyarme en todos los momentos, este logro ha sido gracias a todo su apoyo y dedicación.

A mi amado esposo William, por su comprensión, por sus palabras de aliento y por luchar a mi lado en los momentos de dificultad.

A mis amados hijos: Felipe, Gabriel y Alejandro por ser mi fuente de motivación para poder superarme cada día más.

Agradecimientos

A Dios, porque esta meta es gracias a su infinita bondad y fidelidad.

A mi familia, porque su amor, apoyo y motivación hicieron que pudiese culminar con éxito este trabajo.

A mi estimada profesora Sandra Evely, por todo lo que me ha enseñado, por su paciencia, apoyo y deseo de ayudarme en mi carrera como docente investigadora.

A mis profesores de la maestría en Educación Matemática, me llevo de cada uno de ustedes grandes enseñanzas.

A mis evaluadoras, doctora Solange Roa y Jenny Acevedo; sus correcciones y aportes fueron muy importantes en este trabajo.

A todos mis amigos por los momentos maravillosos compartidos en este recorrido con muchos aprendizajes, en especial a Luz Dary por abrirme las puertas de su casa y su corazón y a Dianita Serrano por estar pendiente en todo momento así sea desde la distancia.

Gracias a todas las personas que de una u otra forma contribuyeron con este trabajo y sobre todo que me aportaron su confianza y cariño

A la Fundación Colegio UIS por el apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de maestría que culminan con el presente trabajo de aplicación

Contenido

	Pág.
Introducción	15
1. Planteamiento del Problema	18
2. Algunos Antecedentes	21
2.1 Estudios asociados a los aspectos cognitivos de los números racionales	21
2.2 Acercamientos didácticos a los números racionales	22
3. Marco Conceptual	24
3.1 Significados de los Números Racionales	25
3.1.1 Los números racionales como medida.	26
3.1.2 Los números racionales como fracción decimal.	26
3.1.3 Los números racionales como cocientes indicados.	27
3.1.4 Los números racionales como razón.	28
3.1.5 Los números racionales como puntos en la recta numérica.	28
3.2 Elementos teóricos para el diseño de las situaciones	29
3.2.1 El tipo de unidad y magnitud.	30
3.2.2 La fracción como relación parte-todo.	30
3.2.3 La fracción como una relación multiplicativa.	31

3.3 Teoría de los campos conceptuales.....	32
4. Metodología	35
4.1 Fase I: Diseño de la secuencia didáctica y análisis a priori	37
4.1.1 Prueba Diagnóstica.	38
4.1.2 Relaciones multiplicativas.	44
4.1.3 El hombre que calculaba.....	49
4.1.4 Significado en contexto de la razón.	53
4.1.5 Diagnóstico final.....	58
4.2 Trabajo de Campo.....	60
4.2.1 Implementación de las actividades.	60
4.2.2 Instrumentos de recolección de datos.	60
4.3 Análisis de los datos.....	62
4.3.1 Análisis grupal de la secuencia de actividades.	62
4.3.2 Categorización de aprendizajes en términos de los Significados propuestos por Obando (2006).....	63
4.4 Reporte de resultados.....	63
4.4.1 Análisis cualitativo de evidencias asociadas a las categorías definidas a priori para describir los aprendizajes de los estudiantes.....	63
4.4.2 Reflexiones como profesora-investigadora del proceso de profundización en Educación Matemática.....	64
5. Los sentidos y Significados de los Números Racionales.....	64

5.1 Prueba Diagnóstica	65
5.2 Sentidos y significados de los números racionales	70
5.2.1 Los números racionales como medida.	70
5.2.2 Los números racionales como cocientes indicados.	80
5.2.3 Los números racionales como razón.	88
5.4 Diagnóstico Final	97
 6. Reflexiones	 98
 Referencias Bibliográficas	 101
Apéndices.....	103

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Estructura metodológica de la investigación	37
Figura 3. Solución dada al problema 2	66
Figura 4. Soluciones dadas al problema tres.....	66
Figura 5. Solución dada al problema seis.	68
Figura 6. Solución dada al problema 7	68
Figura 7. Organización de las regletas.....	72
Figura 8. Respuesta a las características de las regletas	72
Figura 9. Estrategias utilizadas para las relaciones.....	73
Figura 10. Explicaciones de la estrategia usada para las relaciones	74
Figura 11. Explicación a la actividad 4.....	75
Figura 12. Relación usando suma	76
Figura 13. Relación usando colores	77
Figura 14. Relación usando suma	77
Figura 15. Relación de multiplicidad.....	78
Figura 16. Tangram.....	78
Figura 17. Respuesta a la actividad con tangram.....	79
Figura 18. Representación del racional como decimal	81
Figura 19. Representación del racional como decimal	82
Figura 20. Respuesta al inciso e de la actividad 7	82

Figura 21. Respuesta sobre el problema de los hermanos	83
Figura 22. Explicación a la solución del conflicto.....	84
Figura 23. Respuesta dada a la actividad 3	84
Figura 24. Respuesta a la actividad 3 (cociente).....	85
Figura 25. Relaciones multiplicativas actividad 4	85
Figura 26. Solución dada a la actividad 5	86
Figura 27. Cálculo de porcentajes.....	87
Figura 28. Cálculo de porcentajes de la herencia	87
Figura 29. Explicación con base en la lectura.....	89
Figura 30. Diferentes representaciones del cociente.....	90
Figura 31. Comparación de la sombra respecto a la longitud de la vara	91
Figura 32. Comparación de la longitud respecto a la sombra.....	92
Figura 33. Solución a la actividad 3 (con las estaturas).....	92
Figura 34. Solución a la actividad 3 (con las estaturas).....	93
Figura 35. Cálculo de porcentajes.....	94
Figura 36. Cálculo de porcentajes.....	95

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Secuencia de actividades	38
Tabla 2. Porcentaje de estudiantes que resolvieron los problemas (N=82)	65
Tabla 3. Diagnóstico Final	97

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A. Primera Actividad de la secuencia: “relaciones multiplicativas”	103
Apéndice B. Segunda actividad de la secuencia: el hombre que calculaba.....	108
Apéndice C. Tercera actividad de la secuencia: significado en contexto de la razón	114

Resumen

Título: Exploración de los Sentidos y Significados de los Números Racionales con Estudiantes de Sexto Grado*

Autor: Lizeth Carolina Yara Hoyos**

Palabras Clave: Proceso de Medición, Significados de los Racionales, Secuencia de Actividades.

Descripción:

En este trabajo nos proponemos describir los aprendizajes que logran los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 12 años) de un colegio privado del municipio de Floridablanca, Santander (Colombia) cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales. Para ello, se aplicó una secuencia de actividades, donde se tuvo en cuenta los elementos que propone Obando (2006), para el diseño de situaciones didácticas que involucren el trabajo con los números racionales, estos elementos son: el tipo de unidad y magnitud, la fracción como relación parte-todo, la fracción como composición multiplicativa, y la medición como fuente fenomenológica para conceptualizar los números racionales.

La metodología empleada es de carácter cualitativo, la cual está estructurada en cuatro fases: en la primera; se describe el diseño de la secuencia de actividades con su respectivo análisis a priori; en la segunda, se describe el trabajo de campo; en la tercera, se describe las categorías para el análisis y en la cuarta, cómo se presenta el reporte de los resultados.

Los resultados de la propuesta evidencian que los elementos que se tuvieron en cuenta para el diseño de la propuesta, favorecieron en los estudiantes la comprensión del racional como medida, como cociente y otras interpretaciones del racional como la porcentual y el decimal.

El desarrollo de este trabajo de aplicación me permitió afianzar y adquirir nuevos conocimientos relacionados con los números racionales, aclarar los significados y las maneras cómo estos números pueden ser abordados en el aula de clases.

* Tesis de Maestría

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evelyn Parada Rico. Doctorado en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Abstract

Title: Exploration of the Senses and Meanings of Rational Numbers with Sixth Grade Estudents*

Author: Lizeth Carolina Yara Hoyos**

Keywords: Measurement Process, Rational Meanings, Sequence of Activities.

Description

In this work we propose to describe the learning achieved by sixth grade students (children between 10 and 12 years old) from a private school in the municipality of Floridablanca, Santander (Colombia) when they explore the senses and meanings of rational numbers. To this end, a sequence of activities was applied, taking into account the elements proposed by Obando (2006), for the design of didactic situations involving work with rational numbers, these elements are: the type of unit and magnitude, the fraction as a part-total relationship, the fraction as a multiplicative composition, and the measurement as a phenomenological source to conceptualize rational numbers.

The methodology used is of a qualitative nature, which is structured in four phases: in the first, the design of the sequence of activities is described with their respective a priori analysis; in the second, the fieldwork is described; in the third, the categories for the analysis are described and in the fourth, how the report of the results is presented.

The results of the proposal show that the elements that were taken into account for the design of the proposal favored the students' understanding of the rational as a measure, as a quotient, and other interpretations of the rational such as the percentage and the decimal.

The development of this application work allowed me to consolidate and acquire new knowledge related to rational numbers, to clarify the meanings and ways in which these numbers can be approached in the classroom.

* Tesis de Maestría

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evelyn Parada Rico. Doctorado en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de los Números Racionales ha sido tema de investigación e interés para la Educación Matemática permanentemente. Fandiño (2009) menciona que los primeros estudios sobre los Números racionales, se realizaron sobre una de sus representaciones simbólicas: la notación fraccionaria, los cuales se llevaron a cabo en los Estados Unidos durante los años 60 y 80; especialmente se realizaron investigaciones con estudiantes entre los 8 y los 15 años de edad. Para Freudenthal (2001) “las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional” (p. 2), puesto que fracción es la palabra con la que se introduce este concepto, la cual está asociada a romper o fracturar.

Por otra parte Elguero (2009) indica que el número racional positivo sintetiza diversos significados que han participado en la construcción del concepto y que emergen de sus usos en diferentes situaciones y contextos. Situación por la cual diversos autores se han ocupado de esta variedad de significados asociados al número racional buscando identificarlas y distinguirlas, así mismo analizar lo que cada una de ellas posibilita y también limita en el proceso de construcción de este concepto matemático.

En la misma medida, Obando (2006) advierte que la introducción al número racional se da con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos. Por otra parte, los números

racionales en su notación decimal son tratados como si se tratara de conjuntos discretos, y los números irracionales son tratados como si fueran decimales periódicos y finitos.

El estudio de los números racionales, tal como lo sugiere Obando (2006), debe permitir la construcción de los significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones y campo de cocientes, mediante el diseño de situaciones didácticas, que permitan que el concepto de número racional tome sentido a través de sus múltiples representaciones.

Es por eso que la investigación que aquí se reporta, es una exploración con estudiantes de sexto grado de la institución Fundación Colegio UIS, en la cual nos enfocamos en el pensamiento numérico, específicamente en los números racionales. Para el desarrollo de esta experiencia se tuvo en cuenta el nuevo énfasis para la enseñanza de los números racionales que propone Obando (2006).

En este documento, se presenta inicialmente (capítulo 1) el planteamiento del problema de investigación y se describe por qué los números racionales se constituyen en una problemática tanto de los procesos de enseñanza como de aprendizaje de las matemáticas. En éste, se plantea el objetivo y pregunta de investigación. Posteriormente, se presenta una breve revisión bibliográfica, a manera de antecedentes (capítulo 2), en los que se exhiben algunas ideas sobre la historia de los números racionales y se rescatan algunos estudios cognitivos y didácticos asociados a este objeto matemático. También se expone el marco teórico y conceptual de la investigación (capítulo 3), el cual consiste en la articulación de elementos teóricos necesarios para el diseño de las actividades que se implementaron en la experiencia de aula. Seguidamente, se presenta la metodología

(capítulo 4) que se llevó a cabo para la desarrollar la investigación en el aula. Luego, se describe el desarrollo de las actividades en el aula con el respectivo análisis de los datos obtenidos (capítulo 5). Por último, se presentan (capítulo 6) las conclusiones a manera de reflexiones que dan respuesta a la pregunta de investigación.

1. Planteamiento del Problema

Desde el año 2009 me he desempeñado como docente de la Fundación Colegio UIS en el área de las matemáticas en educación básica primaria y en educación básica secundaria. Desde hace cuatro años he tenido la oportunidad de trabajar en los grados sexto y séptimo. La experiencia adquirida orientando a estos niños me ha dejado varios interrogantes e inquietudes con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De la experiencia ha surgido en mí, preocupación por la forma como los estudiantes de estos niveles comprenden los números racionales, formas como los interpretan y representan, así como la manera en que los usan para resolver problemas que los requieren. En ese sentido Fandiño (2009) recopila en su investigación errores típicos de los estudiantes identificados por la literatura internacional. Una de las dificultades es la ordenar las fracciones, los números decimales, o los dos mezclados. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ puede pensarse como menor a $\frac{4}{9}$ porque $2 < 4$. En el caso del orden entre números con coma, por ejemplo, si se trata de ordenar 1,2 y 1,15, la literatura señala casos en los cuales el estudiante afirma: “A paridad de parte entera, en vista de que $15 > 2$, entonces $1,15 > 1,2$. Otra dificultad conceptual se da al momento de realizar operaciones entre las fracciones, por ejemplo para la regla del producto: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{axc}{bxd}$, no ofrece dificultades, pero si se trata de hallar la análoga para la adición las cosas ya no funcionan: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, puesto que al sumar o restar dos fracciones no se tiene en cuenta el proceso de hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores y hallar las respectivas fracciones equivalentes, sino que se tratan como si fuesen números naturales. Stenger, (1971), mencionado por Fandiño (2009) resalta que hace

algunos decenios, alguien propuso no dar a los estudiantes explicaciones sobre el significado de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ sino únicamente la regla para efectuarla $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ porque la forma clásica creaba problemas. Esto permitió una mejoría de prestaciones formales, pero un fracaso en el aprendizaje del sentido que se le da a lo que se está haciendo.

Las dificultades anteriormente mencionadas con los números racionales y entre otras que advierte la literatura se dan por la complejidad que tiene para los niños trascender de un pensamiento matemático más allá de los números naturales. Obando (2006) menciona que la conceptualización que se alcanza a lo largo de toda la educación básica de los diferentes sistemas numéricos es muy pobre. Esto se evidencia en situaciones como: las operaciones entre fracciones se realizan como si se tratara de números naturales, los números racionales en su notación decimal son tratados como si se tratara de conjuntos discretos.

Según Obando (2006), el estudio formal de los números racionales se puede dar hacia los últimos años de la educación básica, o incluso, en la educación media. Además existen múltiples contextos y situaciones a través de los cuales los estudiantes puedan desarrollar intuiciones primarias sobre este sistema numérico, incluso desde el preescolar, preparándose así el camino para su estudio formal en momentos posteriores. Esto se evidencia en la importancia que en el currículo nacional de la educación básica se le otorga al estudio de los números racionales; tal como se puede evidenciar en los Estándares de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006). En este documento se plantea que los estudiantes deben describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes, al terminar tercer grado; interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente,

razones y proporciones y relacionar las fracciones con la notación decimal y los porcentajes, al terminar quinto grado; utiliza los números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida, al terminar séptimo grado.

Lo anterior hace referencia al estudio formal en otros sistemas numéricos diferentes a los números naturales, en este caso los racionales. Obando (2006), menciona que el estudio formal de otros sistemas numéricos debe ser desarrollado a partir de situaciones que permitan la construcción de los múltiples sentidos y significados de cada uno de ellos. En el caso de los números racionales debe permitir la construcción de los sentidos y significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, y campo de cocientes. De esta manera se logra que el estudio formal del sistema de los racionales, esté sustentado sobre una base fenomenológica fuente de sentido y significado.

La enseñanza del número racional se da generalmente con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos, lo cual conlleva a una fuente de dificultades en los procesos de conceptualización de los alumnos. Para Gairín (1998) los problemas de aprendizaje de los racionales se dan debido a esta enseñanza tradicional, lo cual se conoce como instrucción por parte del maestro a los estudiantes.

Por lo anterior, y teniendo en cuenta que los números racionales constituyen un campo numérico de gran importancia por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida

cotidiana, nos motiva a realizar una investigación de aula en la que se espera comprender más esta problemática, hacer un diseño e implementación de actividades que permita dar respuesta a la pregunta ¿Qué aprendizajes logran los estudiantes de sexto grado de la Fundación Colegio UIS cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales? Cuyo objetivo general es describir los aprendizajes que logran los estudiantes de sexto grado de la Fundación Colegio UIS cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales.

2. Algunos Antecedentes

En el presente apartado se enuncian algunos trabajos que aportaron tanto en la comprensión como en el planteamiento y diseño de este trabajo de aplicación. El capítulo está organizado de la siguiente manera: i) estudios asociados a los aspectos cognitivos de los números racionales; y iii) acercamientos didácticos a los números racionales.

2.1 Estudios asociados a los aspectos cognitivos de los números racionales

En nuestro modelo de enseñanza el primer sistema numérico que se presenta a los estudiantes es el de los naturales, y es a través de las actividades de conteo como los niños construyen sus ideas abstractas sobre el número. Gairín (1998), menciona que estas ideas sirven para responder a la pregunta ¿Cuántos hay? Por lo tanto, las características, propiedades, y usos de este conjunto numérico deben limitarse al contexto concreto en el que han surgido. El problema surge cuando los niños tienden a trasladar las propiedades y características de los números naturales a los números racionales. Es por ello que la comprensión de los números racionales presenta dificultades

en aspectos esenciales. Gairín (1999, pág 24) recopila concepciones y errores de los estudiantes con los números racionales, las cuales constatan una desconexión entre:

- los dos sistemas de representación simbólicos de los números racionales: la notación fraccionaria y la notación decimal, puesto que para el alumno es una idea difícil de asimilar que cualquier concepto, pueda tener más de un símbolo.
- el conocimiento conceptual de los números racionales y los procedimientos utilizados en la manipulación de símbolos, sobre todo con las expresiones decimales.
- Los distintos significados del número racional.

Estos resultados recopilados por Gairín (1999), reflejan las principales dificultades que los niños encuentran en el aprendizaje de los números racionales; muchas de ellas tienen un origen epistemológico, pero también los conocimientos personales de los estudiantes obstaculizan la comprensión de algunos aspectos de los números racionales. En las investigaciones de Escolano y Gairín (2005), las dificultades en el aprendizaje de los números racionales son básicamente conceptuales y procedimentales en lo referente a las relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y en parte, son el resultado de procesos instructivos inadecuados.

2.2 Acercamientos didácticos a los números racionales

La introducción al número racional se da generalmente a través de su representación fraccionaria y para ella generalmente los docentes hacen uso de la equipartición De León (1998), señala que la

enseñanza de las fracciones se ha centrado en el significado del fraccionamiento de la unidad, así como en el dominio algorítmico de las fracciones, dejando de lado la gran variedad de situaciones que están vinculadas al significado de las fracciones. Groff (1996) mencionado por Gairín (1999), afirma que la instrucción tradicional sobre fracciones es altamente vulnerable a la crítica bajo distintos ángulos, lo que induce a una multiplicidad de propuestas instruccionales que permiten diferentes estrategias para abordar el proceso de instrucción.

Gairín (1999) reporta en su investigación diferentes propuestas de enseñanza para los números racionales, expuestas por investigadores que se han preocupado por la enseñanza de este concepto matemático. Entre las propuestas se encuentran autores que han trabajado sobre el diseño de la secuencia instructiva, para la cual es importante prestar atención al conocimiento informal de los niños. Otras propuestas sugieren potenciar las experiencias concretas para adquirir y representar los conceptos abstractos de los números racionales. En cuanto a las magnitudes que favorecen la introducción de las fracciones, existen diferencias puesto que en la escuela elemental el conocimiento de las fracciones basado en cantidades discretas puede tener ciertas ventajas sobre el conocimiento de las fracciones basado en cantidades continuas. Sin embargo, la mayoría de los textos escolares utiliza representaciones pictóricas sobre cantidades continuas para presentar las fracciones.

En las propuestas didácticas de carácter general se potencian aspectos estructurales muy diferenciados del conjunto de los números racionales. Por ejemplo, hay autores que proponen dar prioridad a los aspectos algebraicos, mientras que otros consideran prioritarios los aspectos topológicos. En el caso de las expresiones decimales hay autores que proponen introducir los

decimales como medidas de una misma cantidad de medida expresadas respecto a diferentes unidades.

En otras propuestas se abordan distintos aspectos del conjunto de los números racionales y los modelizan con diferentes soportes materiales. Caldwell, (1995) mencionado por Gairín (1999), sugiere que para establecer conexiones entre lenguaje oral, escrito, pictórico y simbólico se puede utilizar modelos de bloques.

Gairín (1999), deduce que el concepto de los números racionales también presenta grandes dificultades desde una perspectiva docente. Todo ello se traduce en la variedad de propuestas para abordar el proceso de enseñanza- aprendizaje de los números racionales, lo que indica que ninguna de ellas resulta plenamente eficaz para la instrucción. De esta deducción rescatamos que los números racionales, es tema de interés para la Educación Matemática debido a la complejidad que tiene el proceso de enseñanza – aprendizaje de este conjunto numérico.

3. Marco Conceptual

Los aspectos teóricos que se consideraron para efectos de este trabajo de intervención están divididos en dos partes: i) Significados de los números racionales, según el énfasis de enseñanza de Obando (2006), los cuales fueron el referente para la interpretación de los datos. ii) elementos teóricos para el diseño de las situaciones tomadas de Obando (2006), los cuales fueron el referente para el diseño de las situaciones iii) la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990),

que es una teoría de corte cognitivo centrada en analizar la adquisición de los contenidos matemáticos. La teoría de los campos conceptuales permite al investigador establecer “lo que se puede enseñar, en qué orden y con qué métodos”, (Halbawachs, 1981, citado por De león, 1998).

3.1 Significados de los Números Racionales

Para tratar los números racionales se debe tener en cuenta que no es suficiente mostrar a los estudiantes algunos ejemplos y luego pasar a generalizar ciertas fórmulas o reglas y finalmente proponer ejercicios prácticos para la fórmula aprendida. Al contrario, comprender que, la formulación de una ley general implica: reconocer una estructura invariante en un conjunto de situaciones particulares, la cual, una vez conceptualizada, debe permitir el tratamiento de cada situación particular como si se tratara de la situación general. Es por ello por lo que un proceso de generalización requiere de múltiples situaciones, en diferentes contextos, a través de diversos sistemas de representación y a lo largo de un período de tiempo considerable.

En virtud de lo anterior, es importante el uso de múltiples situaciones, en las cuales emerjan las diversas representaciones del número racional, donde cada representación se puede dotar de un significado diferente.

A continuación, se define algunos significados de los números racionales los cuales son tomados de Obando (2006).

3.1.1 Los números racionales como medida. Para Obando (2006) la medición, es importante en el proceso de conceptualizar los números racionales, pues de ella se derivan las fracciones, cuando lo que se mide no es un múltiplo entero de veces la unidad patrón de medida usada. Para obtener la medida exacta se deben utilizar los submúltiplos, y el resultado obtenido es la relación cuantitativa entre la magnitud medida y la unidad de medida utilizada. Si se hace necesaria la utilización de varios submúltiplos para la misma unidad de medida, entonces a partir de la regularidad que deben guardar el resultado se puede cuantificar en términos de cualquiera de las distintas unidades utilizadas: unidad o submúltiplos de la unidad de medida. Además, como resultado de la comparación de dos mediciones puede surgir una razón.

La medición con respecto a los números racionales merece ser estudiada en detalle, no sólo porque sea utilizada en la solución de numerosos problemas relacionados con éstos, sino también porque los sistemas de medidas tienen características que le dan identidad.

La conceptualización de fracción como medida permite al estudiante ser capaz de identificar que una fracción $\frac{a}{b}$ es a veces $\frac{1}{b}$, por ejemplo, que si repite 3 veces $\frac{1}{2}$ obtendrá $\frac{3}{2}$.

La comprensión del significado de la fracción como medidor, permitirá a los estudiantes resolver con mayor destreza operaciones con fracciones y relacionarlos con otras representaciones como lo son la representación decimal y la porcentual.

3.1.2 Los números racionales como fracción decimal. Obando (2006) menciona, que las fracciones decimales hacen su aparición en el escenario de las matemáticas escolares cuando se

empieza el uso de la notación decimal (sistema de numeración decimal) para representar las fracciones. De manera que el estudio de las fracciones decimales no solo implica la transformación de un sistema simbólico a otro (del de la fracción como $\frac{a}{b}$ a la escritura decimal y viceversa), sino también la extensión y la generalización de las reglas del sistema de numeración decimal a un nuevo contexto numérico: los números racionales.

Las fracciones decimales no son solamente otra forma de representación simbólica de las fracciones, ni cocientes indicados, ni fracciones en las que la unidad es partida en 10, 100, 1000, etc. partes. Además, son un sistema notacional con reglas y lógica propia, y su comprensión implica, la comprensión de dichas reglas y lógica.

Las reglas y la lógica del sistema de numeración decimal para las fracciones, aunque son las mismas que para los números enteros, deben ser construidas por quien aprende como producto de su actividad intelectual. Esta construcción permitirá, que se dote significado a los símbolos que escribe y su manipulación operativa.

3.1.3 Los números racionales como cocientes indicados. El cociente indicado permite interpretar la fracción $\frac{a}{b}$ como el cociente entre dos cantidades A y B. Esta es quizás la interpretación más común para las fracciones. El nombre de cociente indicado expresa que la división no se realiza a través del algoritmo convencional, sino que la fracción es el cociente.

En el caso de que la fracción sea el resultado de una repartición (la cantidad A es repartida en B grupos iguales), o partición (extraer la cantidad B, de la cantidad A hasta agotarla), entonces la

fracción es una cantidad (la medida de cada uno de los B grupos iguales), o es un parámetro (cuántas veces se puede extraer la cantidad B de la cantidad A).

Cuando la fracción es interpretada como el resultado de una división, se prepara el camino para entender los números racionales como un campo de cocientes.

3.1.4 Los números racionales como razón. La razón es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte todo (magnitud continua y discreta). La generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo permite comparar cantidades del mismo tipo.

Este significado se usa comúnmente con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentajes.

3.1.5 Los números racionales como puntos en la recta numérica. Según Obando (2006) la interpretación de los números racionales como puntos en la recta numérica implica una comprensión profunda de las relaciones parte – todo, la medida fraccional, la fracción decimal y el cociente indicado. Pensar en los números racionales sobre la recta numérica implica interpretarlos de dos formas diferentes: como puntos o como segmentos. Pero el número racional como tal no es ni el punto ni el segmento. Como puntos, el número racional expresa la relación cuantitativa entre la distancia desde ese punto al cero, con respecto a la distancia desde el punto

unidad hasta el cero. Como segmento, el número racional expresa la relación cuantitativa entre la longitud de dicho segmento y la longitud del segmento unidad.

Para propiciar la comprensión conceptual de los números racionales y sus diferentes significados, se propone una serie de situaciones didácticas como estrategia para la conceptualización matemática y para desarrollar procesos de aprendizaje más significativos. Así mismo, tomando como referencia a Vergnaud (1990), un concepto está vinculado a una variedad de situaciones y a su vez una situación nos remite a varios conceptos. A continuación, se muestra la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

3.2 Elementos teóricos para el diseño de las situaciones

Para tratar los números racionales se debe tener en cuenta que no es suficiente mostrar a los estudiantes algunos ejemplos y luego pasar a generalizar ciertas fórmulas o reglas y finalmente proponer algunos ejercicios para practicar la regla o fórmula aprendida, si no que el paso a la formulación de una ley general implica: reconocer una estructura invariante en un conjunto de situaciones particulares, la cual, una vez conceptualizada, debe permitir el tratamiento de cada situación particular como si se tratara de la situación general. Es por ello que un proceso de generalización requiere de múltiples situaciones, en diferentes contextos, a través de diversos sistemas de representación y a lo largo de un período de tiempo considerable.

Considerando lo anteriormente expuesto Obando (2006) propone que el trabajo sobre los números racionales debe orientarse al diseño de situaciones didácticas que consideren los

siguientes elementos: el tipo de unidad y magnitud, la fracción como relación parte todo, la fracción como composición multiplicativa, y la medición como fuente fenomenológica para conceptualizar los números racionales. Elementos que Obando (2006) describe como sigue.

3.2.1 El tipo de unidad y magnitud. Dos elementos fundamentales que se deben considerar en las distintas situaciones problema que se pueden proponer desde la relación parte – todo, corresponden a la naturaleza de la unidad y al tipo de magnitud sobre el cual se establece la comparación. En este sentido, la unidad puede ser simple o compuesta, y las magnitudes continuas o discretas.

Con respecto al tipo de unidad, inicialmente se trabaja con unidades simples, lo cual implica tareas en el contexto de las magnitudes continuas. El paso a las unidades compuestas, implica por su parte, el trabajo con las magnitudes discretas, en tanto que las situaciones implican conteos de colecciones, su división, y respectiva comparación cuantitativa entre las partes y el todo.

3.2.2 La fracción como relación parte-todo. La fracción, como relación Parte - Todo, puede ser definida como una “nueva cantidad” que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte. Las magnitudes involucradas pueden ser continuas o discretas, y por consiguiente, las unidades (el todo) simples o compuestas respectivamente.

Pensar la fracción en el sentido antes denotado implica, fundamentalmente, la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y el todo, y por consiguiente

establecer la relación cuantitativa entre ambos. Igualmente, obliga a explicitar la magnitud sobre la cual se debe realizar la cuantificación.

3.2.3 La fracción como una relación multiplicativa. La fracción unitaria: si se parte del principio que la interpretación que actualmente se da a las fracciones (numerador y denominador como partes que se toman y partes en que se divide la unidad, la fracción como el nombre de una parte de la unidad) genera problemas serios en la conceptualización del número racional, entonces es necesario proponer una nueva: la fracción es una relación multiplicativa, resultado del proceso de medición. Desde el punto de vista matemático la relación de multiplicidad (ser múltiplo de...) genera la relación de divisibilidad (ser parte de...). Esto es, la relación $X = nY$ es equivalente a la relación $Y = \frac{1}{n}X$. Por tanto la relación multiplicativa “n veces...”, define la relación inversa “n-ésima parte de...” y viceversa. En términos de las magnitudes, dicha equivalencia se puede interpretar así: si X e Y son dos magnitudes, tales que una de ellas (la magnitud Y) está contenida un número entero de veces n en la otra magnitud (la magnitud X), entonces se puede concluir que la magnitud Y es la n -ésima parte de la magnitud X .

Al abordar actividades que centre la reflexión en los procesos de medición, y que por tanto, se enfatice en las relaciones “n veces...” y “n-ésima parte de...” como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra. Es decir, que se comprenda que “la magnitud Y es $\frac{1}{n}$ veces la magnitud X puesto que la magnitud X es n veces la magnitud Y ”. De esta manera se hace ver la fracción como una relación cuantitativa entre cantidades, a la vez que se enfatiza el carácter relativo de la fracción.

La fracción no unitaria: desde la anterior perspectiva aún queda un problema por resolver: ¿cómo proponer a los alumnos un proceso para conceptualizar las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$? Desde el punto de vista formal, la fracción $\frac{m}{n}$ es equivalente a $m \frac{1}{n}$. Esto es, la repetición aditiva de una fracción unitaria (lo cual es una multiplicación) genera una fracción no unitaria. Por ejemplo, las fracciones como $\frac{3}{5}$ son interpretadas como 3 veces $\frac{1}{5}$ de la unidad, y no como 3 de las 5 partes en las que se partió la unidad.

Con este proceso de conceptualización, no hay dificultad para interpretar las fracciones impropias, y que además, la suma de fracciones surge de manera natural.

3.3 Teoría de los campos conceptuales

En la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1982), el autor toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto ocurre de manera secuencial y en un periodo de tiempo prolongado, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Además, afirma que un concepto adquiere sentido a través de situaciones y problemas, no reduciéndolo simplemente a una definición. Vergnaud (1995) define un campo conceptual como un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos, procedimientos y representaciones de naturalezas distintas.

De acuerdo con Vergnaud (1990), la acción operatoria no es todo en la conceptualización de lo real, el uso de los significantes explícitos es fundamental para la misma. La conceptualización de un concepto es una tripleta de tres conjuntos: $C(S, I, T)$

S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (referencia).

I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (significado)

T: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones, y los procedimientos de tratamiento (el significante).

Se entiende por situación una combinación de tareas, para las cuales es importante conocer su naturaleza y dificultad propia. Vergnaud (1990), argumenta que una situación tiene interés didáctico moderado puesto que ellas son instrumentos para el análisis de las dificultades conceptuales, de los obstáculos, de los procedimientos disponibles y de las posibles representaciones que encuentran los estudiantes. Se pueden distinguir dos clases de situaciones: aquellas para las cuales el niño dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación; y aquellas situaciones para las cuales el niño no dispone de todas las competencias necesarias, lo que lo obliga a un tiempo de reflexión y de exploración de dudas tentativas abortadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso.

Vergnaud, define la noción de sentido como:

El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por el sujeto individual en una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto. Los esquemas, es decir, las conductas y su organización. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición (Vergnaud, 1990, p. 158).

En cuanto a la noción de concepto, Vergnaud menciona que son aquellos "sobre los que yace la operacionalidad de los esquemas". Esta definición es diferente de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia. Específicamente, dice que:

Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemático, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones (Vergnaud, 1990, p. 145).

La noción cognitiva básica para Vergnaud (1990) es la de esquema. El autor, destaca que es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria. Además, considera que los esquemas son los elementos que sirven de base, que evidencian los desempeños de un estudiante.

Los algoritmos, por ejemplo, son esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos. Cuando los algoritmos se utilizan repetidamente para tratar las mismas situaciones, se transforman en esquemas ordinarios o hábitos.

Un esquema permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Esto es posible porque el esquema comporta:

- invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que dirigen el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
- anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
- reglas de acción del tipo si... entonces... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
- inferencias (o razonamientos) que permiten “calcular” las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

4. Metodología

En el presente capítulo describo el diseño metodológico del trabajo de intervención que aquí se reporta; este trabajo es de corte fenomenológico y de tipo experimental. Este diseño surge de la necesidad de conseguir evidencias que, analizadas a la luz del marco teórico adoptado, permitan responder a la pregunta y alcanzar el objetivo planteado. Para fundamentar esa elección, la cual surge de la reflexión de mi práctica, me ubico en lo que Porlan y Martín (1994), llaman profesor investigador en el aula. En este proceso se indaga sobre las características y necesidades del contexto donde tiene lugar su actividad, haciendo aportes teóricos, significativos, planeando, diseñando y evaluando su intervención mediante el seguimiento de su actividad docente. También es posible que el maestro realice una investigación sobre los procesos de conocimiento en sus alumnos; sobre su práctica pedagógica, al establecer sus hipótesis de trabajo e identificar qué es factible realizar, sin perder de vista los referentes teórico - práctico con los cuales se identifica.

El trabajo de investigación en el aula que se reporta en este documento se realizó en la Fundación Colegio UIS del municipio de Floridablanca (Santander). Esta institución es de carácter privado, presta servicios educativos en todos los grados de escolaridad y cuenta con única jornada (de 6:45 am a 3:25 pm).

La población objeto de estudio estuvo conformada por un total de 24 estudiantes pertenecientes al grupo 6B con edades comprendidas entre los 10 y 12 años, con el fin de dar respuesta a la pregunta: ¿Qué aprendizajes logran los estudiantes de sexto grado de la Fundación Colegio UIS cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales?

Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa que nos permitiera observar como a través de una actividad matemática propuesta a los estudiantes, ellos desarrollan o construyen significados asociados a los números racionales.

Se detallan las fases desarrolladas en la investigación, los instrumentos de recolección de datos, y las actividades realizadas en el aula que han sido tenidas en cuenta para la toma de los datos. A continuación se describe las cuatro fases en las que fue estructurado el proceso de intervención (Figura 1).

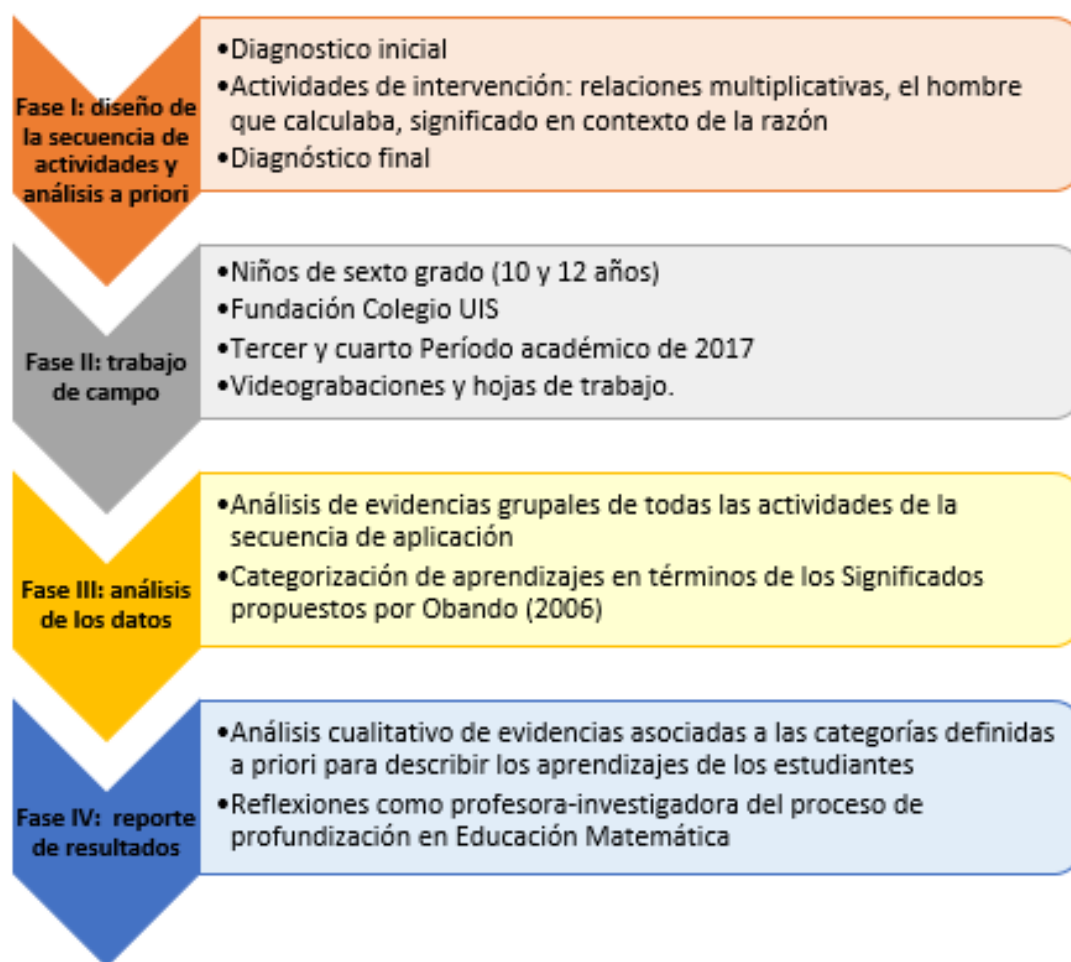


Figura 1. Estructura metodológica de la investigación

4.1 Fase I: Diseño de la secuencia didáctica y análisis a priori

En esta etapa se describe el diseño de cada una de las actividades, para el cual se tuvieron en cuenta los elementos mencionados por Obando (2006) para el diseño de situaciones didácticas y la teoría de los campos conceptuales definidos por Vergnaud (1990), donde el autor considera que un concepto está vinculado a una diversidad de situaciones, y a su vez una situación nos remite a varios conceptos. Para efectos de este trabajo de aplicación dichas situaciones apuntan a nuestro objetivo:

describir los aprendizajes que logran los estudiantes de sexto grado de la Fundación Colegio UIS cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales.

En la

Tabla 1 se presentan cada una de las secuencias de actividades que se implementaron para el desarrollo del trabajo de aplicación.

Tabla 1.

Secuencia de actividades

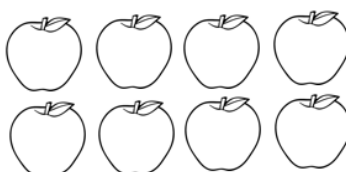
N°	Nombre de la actividad	objetivo	Recursos	Elementos teóricos	N° sesiones
1	Prueba diagnóstica inicial	Indagar sobre la representación fraccionaria del racional y sus diferentes significados.	Hoja de trabajo	Significados de los racionales	1 (2 h de 50 m c/u)
2	Relaciones multiplicativas	Favorecer la interpretación del racional como medida, y otras interpretaciones como decimal y porcentaje.	Tangram Regletas de Cousineare Hoja de trabajo	Unidad: simple Magnitud: continua Relación parte-todo, la fracción como una relación multiplicativa.	4 (8 h de 50 m c/u)
3	El hombre que calculaba	Favorecer la interpretación del racional como cociente y la representación decimal y porcentual.	Hoja de trabajo	Unidad: compuesta Magnitud: discreta Relación parte-todo, la fracción como una relación multiplicativa	2 (4 h de 50 m c/u)
4	Significado en contexto de la razón	Favorecer la interpretación del racional como razón, y la representación decimal y porcentual.	Palos de balso, cartabón, luz solar y hojas de trabajo	Unidad: simple Magnitud: continua Comparaciones	3 (6 h de 50 m c/u)
5	Prueba diagnóstica final			Significados de los racionales	1 (1 h de 50 m)

4.1.1 Prueba Diagnóstica. La prueba diagnóstica fue una experiencia de aula de indagación sobre una de las representaciones del número racional, la fracción y sus diferentes significados en estudiantes que inician básica secundaria.

Para ello se diseñó y se aplicó una prueba diagnóstica a los tres grupos que integraban el curso sexto en la institución (6°A, 6°B y 6°C) para un total de 82 estudiantes. La duración de esta prueba fue de 80 minutos. Cada uno de los problemas de la prueba diagnóstica apuntaba a un significado de los racionales en su notación fraccionaria (relación parte-todo, cociente, medida, operador y razón).

También se consideró algunos de los problemas planteados en Valdemoros (1998), puesto que con estos problemas se quería observar si los estudiantes reconocían la unidad y su complemento con el apoyo de una representación pictórica; además de la habilidad para crear y resolver una situación problema a partir de una suma dada de fracciones. A continuación, se muestra el análisis a priori de la cada uno de los problemas planteados en la prueba diagnóstica.

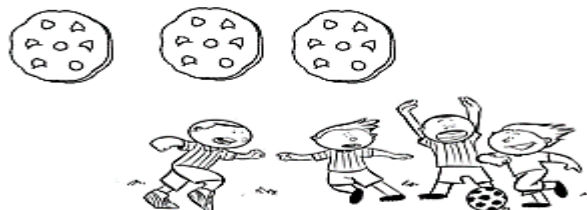
Problema 1: Encierra $\frac{1}{8}$ del siguiente conjunto de manzanas:



Este problema se hace con el objetivo de observar si los estudiantes reconocen la relación parte-todo en un contexto discreto. Se espera que los estudiantes realicen el conteo de las manzanas para

reconocer cuántos elementos forman la unidad. Para ello deben identificar el todo que son las ocho manzanas, y que una de ellas representa una parte del total que en este caso es un octavo.

Problema 2: La mamá de Tomás, Felipe, Carlitos y David necesita repartir en partes iguales tres galletas entre sus hijos:



¿Cómo puede la mamá repartir la galleta entre sus cuatro hijos? ____

¿Qué fracción de galleta le correspondió a cada uno? ____

Este problema se hace con el objetivo de observar el reconocimiento del racional como cociente. Se espera que el problema genere dificultades en los estudiantes por lo que puede pasar que algunos digan que no se puede, ante esta situación el docente debe orientar diciendo al estudiante que represente la repartición gráficamente. También puede suceder que algunos realicen la división y la respuesta dada sea el cociente de la división, expresando la cantidad correspondiente a cada niño. Se puede dar el caso de que algunos estudiantes realicen el gráfico correspondiente de cómo se debe repartir cada galleta pero no logren expresar la fracción correspondiente de galleta para cada niño.

Problema 3: Juan tiene dos cintas del mismo ancho pero de diferente medida de largo.



La cinta A ¿Qué parte es de la cinta B?

Este problema se hace con el objetivo de observar si los estudiantes reconocen del significado del racional como medida. Se espera que para ello los estudiantes identifiquen que la cinta A cabe 5 veces en la cinta B por lo tanto la cinta A es una quinta parte de la cinta B, esto se puede dar mediante el conteo de las partes, o midiendo con una regla las longitudes de las cintas y comparándolas.

Problema 4: Juanita dibujó un florero de la misma forma como el que aparece en la cuadrícula, pero de diferente tamaño, ella redujo a un medio cada uno de los lados. Dibuja en la cuadrícula cómo debió quedarle el florero a Juanita.

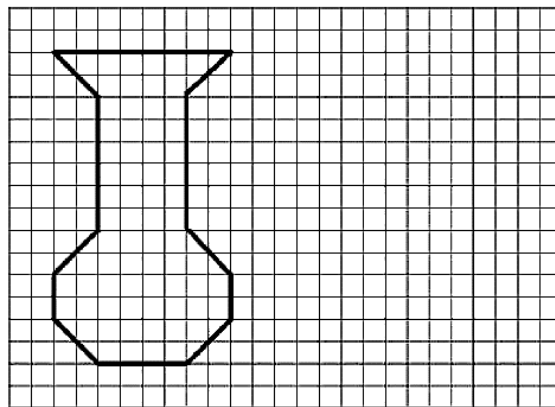


Figura 2: actividad para trabajar el significado de operador multiplicativo. (Valdemoros, 2009, p.91))

Este problema se hace con el objetivo de observar si los estudiantes identifican el racional como operador, que para este caso es reconocer como actúa el operador un medio en cada uno de los lados de la figura. Se espera que los estudiantes cuenten cada uno de los lados de la figura cuya medida en cuadritos es un número par y seguidamente calculen la mitad de cada lado. Puede suceder que haya estudiantes que no comprendan el concepto de reducir a un medio y dibujen el nuevo jarrón sin tener en cuenta la condición dada. Este problema fue tomado de Valdemoros (2009)

Problema 5: Un deportista de alto rendimiento por cada 45 minutos que se ejercita, 15 minutos los dedica a trotar. Si el deportista dedicó 60 minutos a trotar, ¿Cuánto tiempo en total se ejercitó?

Este problema se hace con el objetivo de observar en los estudiantes si hacen uso de las razones para solucionarlo. Se espera que para dar solución al problema los estudiantes realicen procedimientos como: el planteamiento de las razones, regla de tres, operaciones aritméticas, como por ejemplo ir sumando de 45 en 45 y de 15 en 15; o si expresa los datos iniciales como una razón, a través de la amplificación hallar una fracción equivalente que permita dar solución al problema. También se puede dar el caso que haya estudiantes que no logren interpretar los datos del problema y no den solución al mismo.

Problema 6: Pedro tiene una colección de maras. Aquí representamos las dos terceras partes de su colección:



Dibuja las maras que completan su colección.

¿Qué fracción representa esa cantidad de maras? _____

Este problema se tomó de Valdemoros (1998), y se propuso con el objetivo de observar si los estudiantes reconocían la relación parte todo, en el cual se les daba las dos terceras partes para que identificaran el todo. Sabemos que este proceso es complejo porque requiere de que el estudiante realice varias operaciones aritméticas para identificar que cada tercio de la unidad son dos maras; así, que dos tercios son cuatro maras y tres tercios corresponden a seis maras. Se espera que para dar solución al problema los estudiantes agrupen cierta cantidad de maras, hasta que encuentren la que cumple la condición, también pueden realizar operaciones aritméticas para encontrar la parte que hace falta.

Problema 7: Plantea un problema cuya solución implique la siguiente suma de fracciones: $\frac{1}{5} +$

$$\frac{1}{10}$$

El objetivo de este problema es observar el reconocimiento adecuado de la unidad, dónde cada sumando se vincula a un referente que generalmente es a objetos concretos. También, identificar las estrategias utilizadas para realizar la suma de fracciones. Se espera que en la redacción del

problema los sumandos sean asignados a objetos concretos particularmente a alimentos, además que los vinculen a objetos de diferente clase. En la suma de las fracciones se espera que hallen las fracciones equivalentes para operar con ellas, también se puede dar el caso que al operar con ellas las traten como si fuesen números naturales.

A continuación se presenta el análisis a priori de las actividades de intervención que se desarrollaron en el aula, una secuencia conformada por tres actividades donde se tuvo en cuenta los elementos definidos por Obando (2006): el tipo de unidad y de magnitud, la relación parte-todo, las relaciones multiplicativas y la medida como recurso para conceptualizar los diferentes sentidos y significados del número racional.

4.1.2 Relaciones multiplicativas. Esta primera parte de la secuencia titulada “relaciones multiplicativas” (ver apéndice A), se diseñó con el objetivo de que a través de la manipulación de las longitudes de las regletas de Cousineare y el tangram y cada una de las actividades propuestas se favoreciera la conceptualización del número racional. En esta actividad la fracción es una relación multiplicativa resultado del proceso de medición, también favorece otras interpretaciones del racional, como el racional como decimal.

Actividad 1: observa las regletas y escribe las características que encuentras en ellas.

Esta actividad se propone con el objetivo que los estudiantes identifiquen las características de las regletas como el color, la longitud, superficie, volumen y forma. Se espera que los estudiantes describan las características de las regletas y que asocien el color con una medida de longitud. Las

regletas facilitan la asignación de medida pues traen unas marcas que permiten asignar una medida a cada una, y compararlas unas con otras.

Actividad 2: compara las longitudes de las regletas y relaciona la regleta que cabe un número de veces exacto en otra regleta.

Con esta actividad se pretende trabajar el racional como medida, resultado de un proceso de medición, que en este caso resulta de las comparaciones con las diferentes regletas. Se espera que los niños empiecen a superponer una regleta sobre otra, y que vayan poniendo regletas de la misma longitud hasta tener la longitud de la que han tomado como referencia. Habrá estudiantes que encuentren las longitudes de las regletas y que empiecen a decir, por ejemplo: que la regleta blanca cabe en todas una unidad exacta de veces, que la roja sirve para medir las regletas con longitudes pares; la verde clara las longitudes múltiplos de tres; la rosada, las longitudes múltiplos de cuatro; la amarilla, las longitudes múltiplos de cinco.

Esta actividad se realiza con el objetivo que los niños vayan identificando que si una longitud A, está contenida un número entero de veces n en otra longitud B, puedan llegar a deducir que la longitud de A es la n -ésima parte de la longitud B. Esto de acuerdo a los elementos teóricos en el cual el racional se puede ver como una relación multiplicativa.

Es posible que haya estudiantes que relacionen una regleta solo una vez, como los estudiantes que se den cuenta que una regleta la pueden relacionar varias veces. En cuanto al registro de las

relaciones se espera múltiples respuestas, como: que relacionen con colores, de manera verbal, en forma de multiplicación, con líneas, entre otras.

Actividad tres: explica como lograste hacer la actividad anterior.

Se hace con el objetivo de que quede el registro de cómo lograron relacionar las longitudes de las regletas y de ver la habilidad para expresar lo que hicieron de manera escrita.

Actividad cuatro: encuentra una regleta que cabe un número de veces exacto, tanto en la regleta azul, como en la regleta verde oscuro. Explica tu respuesta.

Esto se propone con el objetivo de ir apuntando al concepto de conmensurabilidad, es decir, en este caso encontrar una regleta que puede ser usada una cantidad de veces entera para producir una regleta congruente a la azul y otra congruente a la regleta verde oscura. De acuerdo a esto, se apunta al concepto de número racional, puesto que se está trabajando el racional como razón.

Se espera que los estudiantes empiecen a superponer las regletas de color verde claro puesto que la longitud de esta es tres unidades y la longitud de la azul es 9 unidades. Además, la longitud de la regleta verde oscura es 6 unidades. Es decir, se espera que los estudiantes se den cuenta que la longitud de la regleta azul y la verde oscura, son múltiplos de la longitud verde claro. También lo podrían hacer con la regleta de color blanco puesto que esta cabe exactamente en todas. También se espera que por ensayo y error los estudiantes empiecen a superponer regletas de otros colores hasta que se den cuenta que la que pueden usar es la verde clara o la blanca.

Actividad cinco: identifica cinco relaciones multiplicativas que se encuentran en el inciso dos. Observa el ejemplo.



La regleta blanca está contenida 3 veces en la regleta verde claro, por lo tanto, la longitud de la regleta blanca es la tercera parte de la longitud de la regleta verde claro.

Se espera que con la ayuda de la actividad dos, los estudiantes puedan encontrar este tipo de relación, estableciendo las veces que cabe una regleta en otra. Por lo tanto, puedan comprender que las veces que cabe la regleta también representa una relación parte-todo y desde luego una comparación. Quizás, algunos estudiantes solo establezcan una relación, pero se espera que se den cuenta que una regleta de la derecha se puede comparar con más de una de la izquierda. (Aquí se trabaja la relación multiplicativa, la relación parte-todo y también razón).

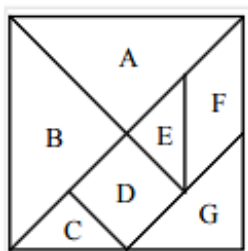
Actividad seis: expresa matemáticamente las relaciones que escribiste en el inciso anterior.

Esta actividad se propone con el objetivo de formalizar las relaciones multiplicativas expresadas en lenguaje natural a lenguaje matemático. Por ejemplo.

$$verde = 3blancas \quad blanca = \frac{1}{3}verde$$

Es posible que esta parte de la actividad se les dificulte a los estudiantes, pues expresar matemáticamente lo que han dicho de manera verbal no es sencillo. En este caso la docente debe intervenir y acercar a los estudiantes al propósito de la actividad.

Actividad siete: El tangram es un cuadrado que ha sido diseñado a partir de siete fichas, las cuales han sido nombradas con algunas letras.



- a) El área del triángulo G, ¿Cuántas veces cabe en el área del triángulo A?
¿Qué parte es el área del triángulo G, del área del triángulo A?
- b) El área del triángulo A, ¿Cuántas veces contiene el área del triángulo G?
- c) El área del triángulo C, ¿Cuántas veces cabe en el área del triángulo A?
¿Qué parte es el área del triángulo C, del área del triángulo A?
- d) ¿Cuántas veces está contenida el área del triángulo C en el área del triángulo G?
¿Qué parte es el área del triángulo C, del área del triángulo G?
¿Qué parte es el área del triángulo C, del área de todo el cuadrado?
- e) Si la superficie total del cuadrado mide 1m^2 , ¿Cuánto mide la superficie de cada una de las fichas A, B, C, D, E, F, G? suma las áreas de todas las figuras.

Para esta actividad a cada grupo se le entrega un tangram con el objetivo de que al manipular el material, los estudiantes puedan observar que al superponer una ficha sobre la otra pueden determinar las veces que cabe una en otra.

Las preguntas que se hacen en esta actividad apuntan a reforzar lo trabajado con las regletas, es decir, las relaciones multiplicativas, la razón, la relación parte- todo, pero ahora con la magnitud área.

Se espera que para que los estudiantes respondan a los incisos a, b, c y d superpongan las fichas correspondientes, para que puedan establecer las veces que cabe una en la otra.

Por otra parte, se espera que para responder al inciso e, los estudiantes puedan establecer las equivalencias de la relación parte-todo con el racional como decimal, puede suceder que ellos expresen que no entienden lo que deban hacer, si esto sucede la docente debe guiar a través de ejemplos para que puedan comprender lo que se les está preguntando. En esta parte también se puede aprovechar para trabajar el racional como decimal y el racional como porcentaje.

4.1.3 El hombre que calculaba. La segunda actividad ha sido diseñada con el propósito de que a partir de una lectura se sumerja al estudiante en una historia dónde las matemáticas emergen de manera natural, (ver apéndice B). En este caso, surge el número racional en varias de sus representaciones. La lectura permite reconocer el tipo de unidad y la magnitud en un contexto aritmético. Las actividades propuestas permiten trabajar la relación parte todo, la relación multiplicativa, el racional como decimal y como porcentaje.

Actividad 1: ¿Qué problema enfrentaban los hermanos de esta historia? ¿Por qué era un problema?

Esta actividad se propone con el objetivo de que los estudiantes identifiquen el conflicto en el que se encontraban los hermanos para repartir la herencia de los camellos, puesto que las partes correspondientes no están contenidas un número entero de veces en el total de camellos, y por ser una magnitud discreta es imposible partir los camellos.

Se espera que los niños respondan que para los hermanos no era posible ponerse de acuerdo para repartir la herencia. Además, que identifiquen que 2, 3 y 9 no son divisores de 35, por tal motivo no da un número exacto de camellos, el resultado es un número decimal que en el contexto es imposible dotar de significado puesto que no se puede partir un camello. También se espera que se den cuenta que sobraba un camello, lo cual quiere decir, que hay una parte de la herencia que no está incluida.

Actividad 2: ¿Cómo el hombre que calculaba logró resolver el conflicto entre los hermanos, y conseguir quedarse con un camello?

Esta actividad se plantea con el propósito de trabajar el tipo de unidad y de magnitud, que para el caso la unidad es compuesta y la magnitud discreta. Para resolver este problema se requiere del conteo de la colección de camellos, e identificar que la relación parte- todo para cada uno de los hermanos no permite que la parte correspondiente tome significado. Es por ello que es necesario agregar otro elemento a la unidad para que se puedan dar las relaciones multiplicativas.

Se espera que los niños identifiquen la relación parte-todo que corresponde a cada uno de los hermanos y que la parte correspondiente de cada uno de ellos es una cantidad decimal, además que después de tener las tres cantidades decimales los estudiantes las sumen y se den cuenta que el

total no son los 35 camellos sino una cantidad menor y decimal. De tal manera que al sobrar es porque en esa distribución no se tuvo en cuenta 1 camello, por eso el cálculo realizado por el hombre que calculaba permitía que las partes correspondientes a cada uno de ellos fuera mayor a los cálculos iniciales y además cantidades enteras.

Actividad 3: Expresa la fracción que representa la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno (los hermanos, Beremís y Bagdalí).

Con esta actividad se tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen que el todo son 36 camellos. Aquí se trabaja la representación del racional en su forma fraccionaria y relación parte-todo.

Se espera que los niños escriban la fracción de camellos que le corresponde a cada hermano, a Beremís y Bagdalí y que también escriban la cantidad que expresa cada una por ejemplo: el mayor

$$\frac{36}{2} = 18.$$

Actividad 4: Expresa matemáticamente las relaciones multiplicativas resultantes de la repartición que hizo el hombre que calculaba.

Esta actividad tiene como objetivo trabajar las relaciones multiplicativas para expresar la cantidad de camellos de la repartición que realizó el hombre que calculaba. Se espera que para expresar las relaciones multiplicativas los estudiantes recuerden lo trabajado con las regletas. Por ejemplo, la cantidad resultante de camellos para el hermano mayor es: $18 = \frac{1}{2}36$ porque $36 =$

18×2 . Es posible que alguno manifieste no entender lo que se le pedía, para lo cual se le debe responder que la cantidad recibida de camellos para cada persona cómo se expresa en forma fraccionaria y por qué.

Actividad 5: Expresa de forma decimal la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno.

Esta actividad tiene como objetivo trabajar el racional en su representación decimal, donde al considerar el total de camellos como la unidad, entonces la cantidad correspondiente para cada uno es menor que uno. Se espera que los estudiantes realicen la división correspondiente de la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno entre el total de camellos que se consideraron para repartir la herencia, y el cociente resultante lo interpreten como esa cantidad decimal que representa la parte de la herencia recibida.

Actividad 6: ¿Qué porcentaje de la herencia le correspondía a cada hermano?

Esta actividad se diseña con el propósito de trabajar el racional como porcentaje. En este caso se espera que los estudiantes tengan en cuenta que el 100% de la herencia está representado por los 35 camellos, para que de esta manera calculen el porcentaje correspondiente para cada hermano.

Actividad 7: al sumar los porcentajes respectivos, ¿qué puedes concluir de la repartición estipulada por el padre y la propuesta por Beremís?

En esta actividad se pretende dotar de significado la relación parte-todo, el racional como decimal y como porcentaje. Se espera que el estudiante identifique que hay una parte de la herencia que no está incluida, pues si el estudiante suma las partes correspondientes a cada uno $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, que es equivalente a $\frac{34}{36}$. Al analizar este resultado y darse cuenta que es menor que el todo, es decir, del total de camellos que son 35, el estudiante puede concluir que hubo un camello que el padre no contempló para repartir, lo que explica el papel del camello de Bagdalí. Si el estudiante suma los porcentajes teniendo en cuenta solo los 35 camellos este será menor que 100%, pero si suma los porcentajes teniendo en cuenta el camello que agregó Beremís a la repartición, tiene una buena aproximación al 100% puesto que da 99,98%.

Actividad 8: ¿Qué representaciones de los números racionales surgieron en la solución a este problema?

Con esta actividad se pretende dotar de sentido y significado a las diferentes representaciones del racional que surgieron en el desarrollo de la actividad. Se espera que los estudiantes interpreten que el racional se puede ver como la relación entre la parte y el todo, como un número decimal y también como un porcentaje.

4.1.4 Significado en contexto de la razón. Esta parte de la secuencia ha sido diseñada con el objetivo de brindar un contexto real en el cual se puede dotar de significado al racional en su representación fraccionaria, cociente, decimal, razón y porcentaje, a través del proceso de medición. Para Obando (2006) en el proceso de conceptualizar los números racionales la medición es importante, pues este proceso permite que emerjan las fracciones, cuando lo que se mide no es un múltiplo entero de veces la unidad patrón tomada como medida. También como resultado de la comparación de dos medidas puede surgir una razón. Además, al realizar el cociente indicado entre las longitudes respectivas, permite al estudiante que de acuerdo al contexto lo dote de significado.

Esta actividad hace uso de un episodio de la historia en la que el personaje principal es Tales de Mileto, (Ver apéndice C). La historia permite al estudiante descubrir cómo Tales de Mileto logró resolver un reto matemático a partir de la modelación. A continuación se muestra el análisis a priori de esta actividad.

Actividad 1: De acuerdo a la lectura responde:

- a) ¿En qué se basó Tales de Mileto para medir la altura de la pirámide?
- b) Si comparamos la medida de la sombra del bastón con respecto a la longitud del bastón en ese preciso instante ¿qué podemos afirmar?
- c) Entonces, si en ese mismo instante construimos un cociente que resulte de calcular el número de veces que cabe la longitud de la sombra en la longitud del bastón, ¿qué valor tiene en ese momento dicho cociente? ¿Cómo se podría representar dicho cociente?

Se espera que a partir de la lectura ellos respondan a la primera pregunta, que en cierto día del año y en una hora determinada, la sombra que proyecta un objeto es igual a su longitud, por lo tanto, cuando la sombra del bastón era igual a la longitud del bastón, sucedía lo mismo con la pirámide.

Con la segunda pregunta se espera que los estudiantes respondan que como en ese momento del día la sombra es igual a la longitud, las dos medidas son iguales. Esto con el objetivo de trabajar la tercera pregunta, donde se espera ir conceptualizando el racional como razón, puesto que este surge en este caso como la comparación de dos medidas, y el cociente entre las dos medidas es igual a uno.

Actividad 2: Realizar en grupos de tres estudiantes la siguiente experiencia.

Tomar la vara de 90cm de longitud y mantenerla en posición vertical (formando un ángulo de 90° respecto al suelo), mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra.

- a) Registrar los datos en la hoja de trabajo (registrar la hora exacta de la toma de la medida).
- b) Comparar la longitud de la sombra de la vara respecto a la longitud de la vara en ese preciso instante. ¿Qué pueden afirmar de esa comparación?
- c) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la vara en la longitud de la vara, ¿cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la vara?

Esta actividad busca orientar hacia la comparación de segmentos, de un modelo geométrico cotidiano, en el cual se puede establecer la comparación de las longitudes de las sombras y las

alturas. Esto con el fin de ir apuntando hacia los distintos significados del número racional que pueden surgir con esta experiencia (razón, cociente, decimal y porcentaje).

Al pedirle al estudiante que compare la longitud de la sombra de la vara respecto a la longitud de la vara en ese preciso instante ¿Qué pueden afirmar de esa comparación? Se espera que los estudiantes respondan que es menor o mayor la longitud de la sombra respecto a la longitud de la vara, puesto que esto depende del momento del día en que realice la actividad, aunque en la hora que se tiene contemplada hacerla, las longitudes de las sombras de los objetos son menores que la longitud del mismo.

En el momento siguiente se le pide al estudiante: representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la vara en la longitud de la vara, ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la vara? Con esta pregunta le apuntamos a la representación del racional en forma de cociente, el cual también se puede representar en forma decimal, y va a tomar el significado de razón al comparar las dos longitudes. Se espera que los estudiantes realicen la división respectiva y que el decimal resultante les permita responder la pregunta formulada. Es posible que la pregunta, ¿cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la vara? genere dudas y confusión en los estudiantes para lo cual la docente debe intervenir sin perder de vista el propósito de la actividad que es que el estudiante lo resuelva por sí mismo.

Actividad 3: Realizar el procedimiento anterior con la otra vara que les dio la profesora.

La actividad de medición, cálculos de cocientes y comparaciones se les pide realizarlas dos veces más la siguiente con una vara de otra longitud y por último con la altura de uno de sus compañeros del grupo realizar la actividad 3.

Actividad 4: Escojan un compañero del grupo, midan su estatura, y luego midan la proyección de la sombra de su estatura. (Registrar las medidas y la hora en la hoja de trabajo)

- a) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la altura del compañero en la longitud de su altura, ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la altura?
- b) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la altura del compañero en la longitud de su sombra ¿Cuántos metros de longitud de la altura corresponden por cada metro de longitud de la sombra?

Se propone al estudiante que compare la longitud de la sombra de la altura del compañero con la altura del mismo y viceversa, esto con el objetivo que se dé cuenta que estas comparaciones no son iguales al menos de que ese momento del día la medida de la sombra y la medida de la longitud sean las mismas. Se espera que el estudiante después de escribir los cocientes respectivos, los calcule para escribir el decimal correspondiente y lo interprete para responder las preguntas: ¿cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la altura?, ¿cuántos metros de longitud de la altura corresponden por cada metro de longitud de la sombra?

- c) ¿Qué porcentaje de la longitud de la sombra corresponde a la longitud de la estatura?
- d) ¿Qué porcentaje de la longitud de la estatura corresponde a la longitud de la sombra?
- e) ¿Qué pueden concluir al comparar los dos porcentajes?

Por último, con las preguntas: c, d y e, se espera que los estudiantes puedan interpretar el porcentaje en este contexto geométrico, puesto que de acuerdo al orden de la comparación el porcentaje resultante es mayor o menor.

4.1.5 Diagnóstico final. Para evaluar el impacto de la relación entre el diseño de las actividades implementadas, con sus respectivos análisis en términos de los elementos teóricos y finalmente la manera como la secuencia de actividades es realizada en clase, se diseñó y aplicó un diagnóstico final, que permitiera observar los significados de los racionales que se abordaron con el trabajo de aplicación. Para el diseño de este diagnóstico se tuvo en cuenta que en el colegio se realizaron varias actividades de finalización de año que coincidieron con algunas horas de clase de matemáticas. Por tal motivo no se pudo realizar una actividad final de diagnóstico de la misma manera como se aplicó la secuencia de actividades, si no que se realizó una evaluación escrita en la que se valoraron los siguientes indicadores de logro.

- Formulo y resuelvo situaciones problemáticas en las cuales intervengan las diferentes interpretaciones de las fracciones.
- Justifico mis procedimientos para resolver una situación problema que requiera del conjunto de Números Racionales, junto con sus propiedades, relaciones y operaciones.

A continuación, se muestra el diseño de la evaluación, con su respectivo análisis a priori.

1. La siguiente tabla muestra la distancia que camina Juan durante cinco días:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Distancia en Kilómetros	$\frac{1}{6} Km$	$\frac{6}{6} Km$	$\frac{11}{6} Km$	$\frac{12}{6} Km$	$\frac{5}{6} Km$

- a) ¿Qué días Juan caminó menos de un Kilómetro?
- b) ¿Qué días Juan caminó exactamente un kilómetro?
- c) ¿Qué días caminó más de un kilómetro?
- d) ¿Qué día caminó exactamente dos kilómetros?

Con esta situación se pretende evaluar el significado del racional como medida, a partir de la comparación de distancias representadas por medio de racionales. Teniendo en cuenta la magnitud el estudiante debe identificar que fracciones expresan menos de un kilómetro, un kilómetro, más de un kilómetro y dos kilómetros.

2. Lucía dispone de \$120.000 para comprar ciertos artículos: de modo que para el primer artículo dispone de las $\frac{2}{5}$ de esa cantidad; para el segundo artículo $\frac{1}{3}$ de la misma cantidad y el resto para el tercer artículo.

Con esta situación se pretende que el estudiante reconozca las veces que cabe un quinto en \$120.000 (relación multiplicativa). Luego, teniendo como referencia cuanto es un quinto, calcule dos quintos de la misma cantidad; y por último halle lo que sobra de la unidad. Esta situación permite que los estudiantes doten de significado al racional como parte-todo, al identificar cuánto

representa un quinto de 120.000 y dos quintos de 120.000. También se dota de significado al racional como cociente indicado al interpretar la repartición del total del dinero entre la parte correspondiente.

4.2 Trabajo de Campo

Esta fase consta de la recolección y sistematización de datos de cada una de las actividades aplicadas en el aula. Para ello se video grabaron cada una de las sesiones y se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes. A continuación, se detallan un poco más los procesos realizados en esta etapa:

4.2.1 Implementación de las actividades. El trabajo de campo que aquí reportamos se realizó en el año 2017, se escogió el grupo 6B, para la implementación de las actividades en el aula, las cuales se realizaron en diez sesiones de trabajo por un grupo heterogéneo de 24 estudiantes que cursaban sexto grado, con edades comprendidas entre los 10 y 12 años. Las actividades se desarrollaron en equipos de tres estudiantes puesto que el trabajo cooperativo en pares favorece la cooperación y la participación.

Una vez seleccionado el grupo en el cual se haría la recolección de los datos, y aplicadas las actividades, se realizó el análisis de los datos obtenidos.

4.2.2 Instrumentos de recolección de datos. La toma de datos para la investigación fue realizada mediante dos instrumentos: las grabaciones de audio o vídeo y las hojas de trabajo de los

estudiantes. La primera, las grabaciones de audio o video realizadas en donde se registraban los periodos de interacción entre estudiantes o de estos con la profesora investigadora. La segunda, las hojas de trabajo en las que se presentan las actividades a los estudiantes y a su vez en donde dejaban registro de las soluciones a las actividades propuestas.

Las grabaciones de audio o vídeo permiten complementar el sentido y significado que los estudiantes dan a la actividad matemática realizada. Esto es importante en tanto el significado de la experiencia del estudiante no queda capturado directamente en la hoja de trabajo:

- En primer lugar, muchas veces lo que un estudiante hace sólo queda plasmado parcialmente en su texto escrito: los fragmentos de su producción escrita van acompañados de una serie de afirmaciones verbales que completan el sentido de lo que consigna en su hoja de trabajo, o incluso de acciones asociadas a movimientos corporales.
- En segundo lugar, cuando se hace necesaria una intervención que oriente la actividad del estudiante en una cierta dirección, es el dialogo profesor-estudiante (o a veces estudiante-estudiante) con todas sus interacciones orales y gestuales el que marca de manera definitiva el curso de lo que el estudiante hace o dice, y esto no queda necesariamente plasmado en la producción escrita del estudiante.
- En tercer lugar, hay ocasiones en que la actividad matemática se desarrolla fundamentalmente en forma oral y gestual, y los registros audiovisuales son la única forma de capturar estos procesos de interacción.

Las grabaciones de audio y video permiten, además de profundizar sobre las técnicas e instrumentos recuperar el gesto y la palabra como base fundamental en la actividad matemática del estudiante, y de esa manera, observar en los estudiantes qué enuncian, cómo enuncian, y como desarrollan su actividad matemática que le permitirá a los estudiantes elaborar los sentidos y significados propios de su experiencia matemática.

Las hojas de trabajo para los estudiantes, diseñada por el profesor, permiten identificar el tipo de actividad planificada (qué instrumentos se espera use el estudiante, qué tipos de técnicas podría desplegar, qué tipos de sentidos y significados podría construir). A través de estas producciones escritas se tiene la fuente documental clave para el análisis de los resultados.

4.3 Análisis de los datos

En esta fase se describe los aprendizajes logrados por los estudiantes cuando exploran los sentidos y significados de los números racionales, a través de la implementación de actividades dónde se tuvo en cuenta el proceso de medición como recurso fenomenológico para conceptualizar los números racionales. Para la descripción de los sentidos y significados de los números racionales se procede a realizar la triangulación teniendo en cuenta la selección de los datos de la fase anterior. Se definen como categorías de análisis los significados de los números racionales descritos en el marco teórico.

4.3.1 Análisis grupal de la secuencia de actividades. Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación y determinar el cumplimiento de nuestro objetivo, en este trabajo de aplicación se

decidió realizar un análisis general de la secuencia de actividades enfocadas en los sentidos y significados de los números racionales. Para este análisis se tuvo en cuenta las evidencias de todo el grupo de estudiantes, es decir, no se tomaron casos de estudio.

4.3.2 Categorización de aprendizajes en términos de los Significados propuestos por Obando (2006). De acuerdo al marco conceptual adoptado para este trabajo de aplicación se definió como categorías de aprendizajes: los racionales como medida, los números racionales como cocientes indicados y los números racionales como razón. Para la categoría los números racionales como medida se tuvo en cuenta los aprendizajes logrados con las actividades de las relaciones multiplicativas; para la categoría de los números racionales como cocientes indicados, se tuvo en cuenta las actividades de relaciones multiplicativas y el hombre que calculaba; por último, la categoría de los números racionales como razón, se tuvo en cuenta la actividad significado en contexto de la razón.

4.4 Reporte de resultados

En esta sección describimos los aprendizajes logrados por los estudiantes de acuerdo a las categorías definidas para el análisis según el marco teórico de Obando (2006). Este reporte se describe en tres partes, las cuales se detallan en el capítulo cinco.

4.4.1 Análisis cualitativo de evidencias asociadas a las categorías definidas a priori para describir los aprendizajes de los estudiantes. Se realiza un análisis descriptivo de las evidencias

de este trabajo de aplicación. Para dicho análisis se tienen en cuenta las categorías definidas para describir los aprendizajes logrados por los estudiantes, los cuales se detallan en el capítulo cinco.

4.4.2 Reflexiones como profesora-investigadora del proceso de profundización en Educación Matemática. Las reflexiones de este proceso como profesora-investigadora se enmarcan en tres partes: la primera, las que tienen que ver con los sentidos y significados asociados a los números racionales. La segunda, mis aprendizajes logrados con este trabajo de aplicación y por último la transformación de mi práctica docente. Las reflexiones se detallan en el capítulo seis del documento.

5. Los sentidos y Significados de los Números Racionales

En este capítulo se presentan los resultados del análisis de los datos. Para ello, se tomaron los significados de los números racionales descritos en el capítulo 3 del marco teórico tomados de Obando (2006), como categorías para el análisis. El capítulo está organizado en tres partes:

La primera corresponde a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, cuya finalidad se centraba en indagar sobre una de las representaciones del número racional, el de fracción y sus diferentes significados para estudiantes que inician la básica secundaria.

La segunda parte del análisis, corresponde a los resultados obtenidos de la aplicación de las tres actividades diseñadas: relaciones multiplicativas; el hombre que calculaba; significado en contexto de la razón; y el análisis del diagnóstico final, con el fin de responder a nuestro objetivo de investigación.

Por último, se presenta el análisis de acuerdo a las categorías: el racional como medida, los números racionales como cocientes indicados, y los números racionales como razón.

5.1 Prueba Diagnóstica

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se presentan los porcentajes de los estudiantes que respondieron acertadamente a cada uno de los problemas propuestos. Del análisis de las soluciones dadas por los estudiantes, se puede concluir que la relación parte-todo es uno de los significados de la fracción que comprenden con mayor facilidad, puesto que en el problema número 1, dado en un contexto discreto, hubo el reconocimiento de la parte con respecto al todo, al encerrar el octavo del conjunto de manzanas.

Tabla 2.

Porcentaje de estudiantes que resolvieron los problemas (N=82)

Problema	1	2	3	4	5	6	7
Aciertos	82 (100%)	36 (43,90%)	75 (91,46%)	62 (75,60%)	24 (29,26%)	51 (62,19%)	7 (8,53%)

En el segundo problema, en el que se aborda el significado de la fracción como cociente, en un contexto continuo, se asocia a la operación división de un número entero entre otro o a la de repartir en varias partes iguales un número determinado de unidades. Algunos estudiantes representaron gráficamente la partición pero, no lograron identificar la fracción de galletas que le correspondía a cada niño.

Tal es el caso que se muestra en la Figura 3; el estudiante divide las cuatro galletas en partes iguales (tratamiento que se da a las magnitudes continuas), en el cual comprende que al resultarle doce pedazos a cada hijo le corresponde tres partes. Sin embargo, no establece la relación entre la parte y el todo, puesto que varía la unidad al decir que a cada niño le corresponde $\frac{3}{12}$ de galleta. Esto a la luz del marco teórico muestra que no hay un tratamiento adecuado de la unidad y de la magnitud.

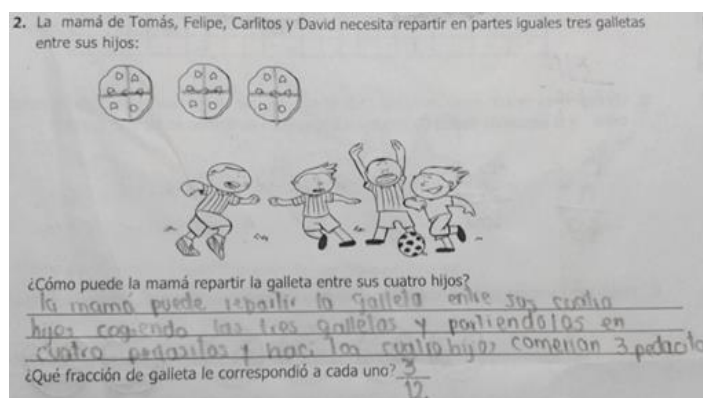


Figura 3. Solución dada al problema 2

En el problema 3, referente al significado del racional como medida, se observó que la gran mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultad para calcular las veces que cabe una longitud determinada en una magnitud dada, dado que el 91,46% logró responder acertadamente, incluso hubo niños que lo relacionaron con porcentaje (Figura 4). De esto se concluye que el estudiante establece la comparación entre las unidades de medidas dadas y también establece una relación entre la parte y el todo.

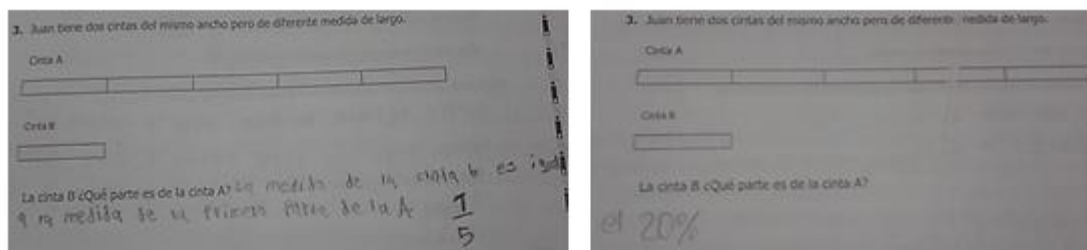


Figura 4. Soluciones dadas al problema tres

En relación con el problema 4, asociado al significado de operador multiplicativo, un 75,60% del grupo pudo reducir los lados de la figura a la mitad, para ello, contaron los cuadritos que tenía cada lado y luego dividieron en dos. Con este problema se pudo notar que un alto porcentaje de los niños lograba comprender que un medio actuaba de cierta manera sobre cada una de las medidas de los lados, que en este caso era reducir cada lado a la mitad.

En cuanto al problema 5, vinculado al significado de la fracción como razón, se pudo observar que uno de los estudiantes, le dio solución usando regla de tres. Otros dividieron el tiempo que trotó el deportista (60 minutos) entre 15 y se dieron cuenta que debían multiplicar 45 por el resultado de la división que fue 4. Notamos que el porcentaje de estudiantes que logró resolverlo fue muy poco, solo un 29,26%, por lo que deducimos que este significado de razón no es tan comprensible para los estudiantes, a pesar de que en quinto primaria en su plan de estudios se incluye el tema de proporcionalidad directa e inversa y sabemos que para la comprensión de este se debe haber trabajado la noción de razón.

Del problema 6, se observó que la redacción de este problema no permitió que los estudiantes lograran escribir la fracción correspondiente puesto que la pregunta no fue clara (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), aun así, un porcentaje significativo de estudiantes dibujó

las maras que completaban la colección. En este contexto discreto, el tipo de unidad es compuesta lo cual implica que el estudiante debe hacer la repartición de las maras para deducir que dos maras son un tercio de la unidad, de manera que cuatro maras representan las dos terceras partes y así concluir que el tercio que falta representa dos maras.

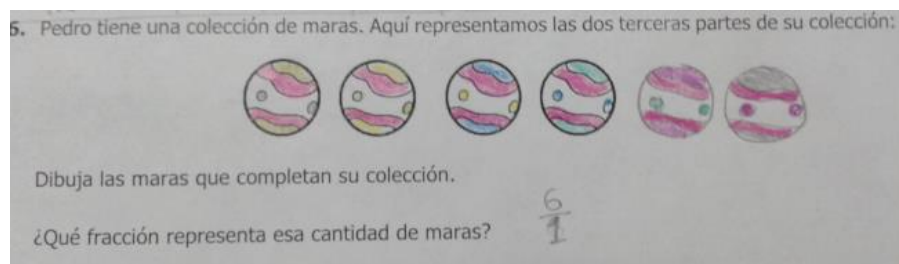


Figura 5. Solución dada al problema seis.

Del problema 7, se concluye que los estudiantes que inventaron un problema variaban el todo vinculado a la suma de fracciones puesto que no identificaban la unidad y asociaban cada sumando a objetos de diferente clase, por ejemplo: sumar fracciones referentes a caramelos con fracciones referentes a peras (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Además, solo 7 estudiantes de 82 a los que se les aplicó la prueba realizaron correctamente la suma de fracciones.

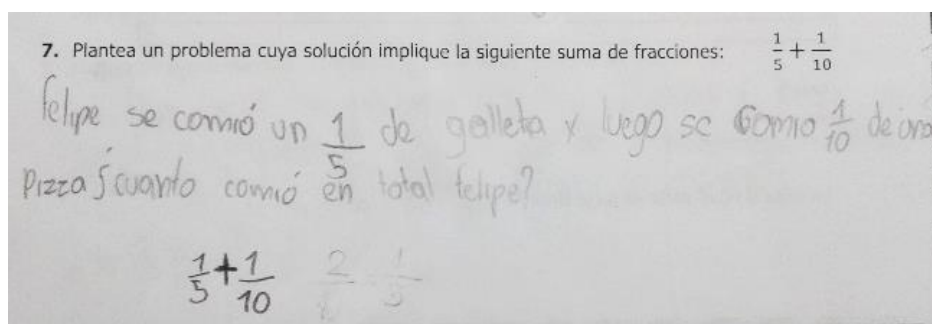


Figura 6. Solución dada al problema 7

En términos generales, se podría decir que la prueba diagnóstica fue un recurso que nos aportó información acerca de las nociones sobre los significados del número racional, que tenían los estudiantes al iniciar su básica secundaria. También nos permitió observar las estrategias de resolución y los modos de representación utilizados por los estudiantes para tratar la fracción. Identificamos que la relación parte-todo es la que más se trabaja en la primaria puesto que el 100% de los estudiantes reconocieron la octava parte de un conjunto de manzanas y también la identificaron en el problema de comparación de longitudes.

Los resultados de la prueba, dan cuenta de que los estudiantes poseen la habilidad para identificar cuántas veces cabe una longitud determinada en una magnitud dada.

En cuanto a la fracción como operador, se pudo apreciar que en un principio comprender cómo actuaba el operador $\frac{1}{2}$ sobre una figura, fue confuso para los estudiantes. Sin embargo, después de la intervención de la profesora la gran mayoría pudo resolver el problema reduciendo cada lado de la figura a la mitad. Identificamos que los significados del racional como razón y cociente presentaron mayor dificultad pues un gran porcentaje de los estudiantes no logró resolver estos problemas, con lo que se comprueba lo que afirma Kieren (como se citó en Valdemoros, 1998), los niños contaban con escasos conocimientos intuitivos respecto a las nociones de fracción.

En cuanto a la invención del problema a partir de una suma de fracciones dada, notamos que los estudiantes asociaban cada sumando a objetos de la misma clase, sin mantener constante la unidad o asignaban a cada sumando objetos de diferente clase. Además, el 91.47% no recuerda cómo realizar una suma de fraccionarios.

También se concluye que para el diseño de esta prueba seis de los problemas seleccionados, se ubican en el campo conceptual de la estructura multiplicativa, ya que la comprensión de los significados que se estaban abordando requieren de una variedad de situaciones y la interrelación de varios conceptos, además, se observó que hubo diferentes estrategias de solución para dar una respuesta acertada. El único problema que se ubicaba en la estructura aditiva es el número uno puesto que en este se pedía encontrar la relación parte – todo, y no se requiere de conectar varios conceptos.

5.2 Sentidos y significados de los números racionales

El sentido y significado de los racionales está fundamentado en las relaciones y operaciones que le dan sentido numérico. Es por ello que dar sentido numérico al racional es interpretar su representación fraccionaria desde sus propiedades aritméticas. A continuación, se realiza el análisis de los datos obtenidos en la experimentación.

5.2.1 Los números racionales como medida. Recordemos que el racional como medida a/b aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, cuya unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Para obtener la medida exacta se debe: medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad, o realizar comparaciones con la unidad. En el caso de conceptualizar el racional a partir de las relaciones multiplicativas, donde $X=nY$ es equivalente a la relación $Y=1/n X$, permite la construcción del número racional, no sobre las propiedades físicas de los objetos con los que se actúa, sino sobre las relaciones cuantitativas

establecidas a partir de las mediciones, y esencialmente, sobre las composiciones aditivas y multiplicativas que se deriven de estas relaciones cuantitativas. Es decir, dar sentido numérico al número racional desde sus propiedades aritméticas y a su vez trabajar el significado del racional como medida.

La primera secuencia de actividades “relaciones multiplicativas”, centradas en la medida de magnitudes y en las relaciones “n veces...” y la “n-ésima parte de”, permitió que inicialmente, los estudiantes expresaran la relación entre las dos magnitudes con el lenguaje natural. Posteriormente, se logró que los estudiantes trataran de expresar matemáticamente las relaciones, con la idea de que surgiera la representación fraccionaria del racional.

A medida que se avanzaba en el desarrollo de la actividad, se pudo evidenciar que algunos estudiantes fueron estructurando el concepto de fracción, partiendo del proceso de utilizar las relaciones multiplicativas para establecer las veces que está contenida una magnitud en otra. Esto se evidenció en la actividad 7, en la cual se usó el tangram como material didáctico y la secuencia de las actividades propuestas fueron llevando a los estudiantes a comprender el racional como medida. A continuación, se muestran evidencias de la implementación de la actividad en la clase y el análisis de los datos a la luz del marco teórico.

Se inicia la actividad entregándoles el material a los estudiantes y la hoja de trabajo. Inicialmente observaron las regletas y las organizaron para poder trabajar con ellas.

En la Figura 5 se puede apreciar algunas de las formas en que estas fueron organizadas.



Figura 5. Organización de las regletas

En la actividad uno, se pudo apreciar que los estudiantes hicieron el reconocimiento de la unidad y de la magnitud con la cual iban a trabajar, pues asociaron cada longitud de la regleta con un color diferente, También hubo estudiantes que reconocieron en las regletas la magnitud de volumen. En la Figura 6 se observan algunas de las respuestas dadas por ellos.

Observa las regletas y escribe las características que encuentras en ellas.

- * cada figura presenta colores distintos y medidas distintas
- * Cada figura tiene un cuadro de diferencia según su siguiente
- * El color de la figura es distinto según su tamaño

Figura 6. Respuesta a las características de las regletas

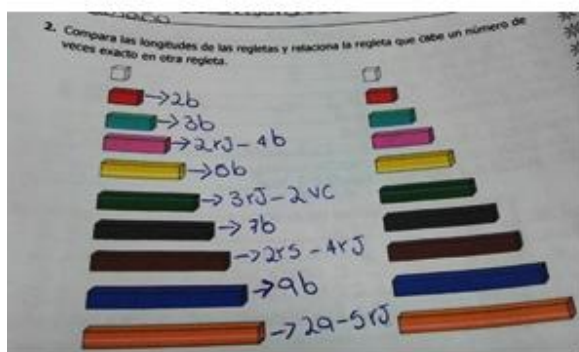
En la actividad dos, los estudiantes empezaron a superponer las regletas para determinar las veces que cabía exactamente una regleta en otra. En esta parte inicialmente algunos preguntaron qué quería decir la palabra relaciona y que utilidad tenía la imagen en la hoja. Igualmente, preguntaron si, debían hacer la misma figura con las regletas, a por lo cual se les aclaró que la imagen era para que plasmaran las relaciones que iban encontrando, es decir, que si había una regleta que cabía exactamente en otra, cómo dejaban ellos la evidencia de esto por escrito. Hubo estudiantes que no tuvieron necesidad de superponer una regleta sobre otra porque tenían presente la longitud de las mismas y lograron establecer las relaciones un poco más rápido que los demás. En la Figura 7, se observan algunas de las maneras en las cuales los estudiantes plasmaron en la hoja de trabajo las relaciones encontradas.



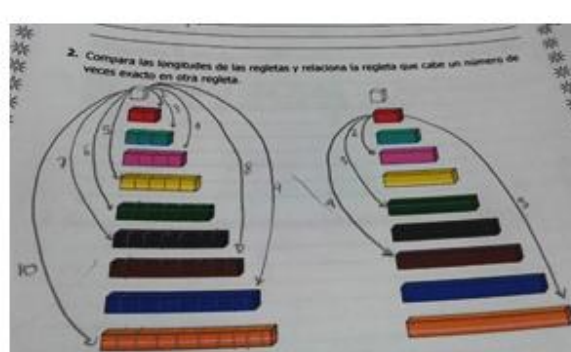
a



b



c



d

Figura 7. Estrategias utilizadas para las relaciones

Puede verse en la escritura de algunos estudiantes, una estructura aditiva, puesto que la estrategia utilizada fue la de agregar regletas hasta completar la longitud deseada. Mientras que en otros se puede apreciar una estructura multiplicativa, incluso usaron notación algebraica (figura 9c). Por ejemplo: la regleta verde oscura es igual a $3rJ$ y también a $2vc$, en la cual se entiende que la verde oscura es tres veces una roja o 2 veces una verde clara.

En la actividad tres, los estudiantes dejaron por escrito la estrategia que utilizaron para realizar la actividad anterior. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se puede apreciar una de las respuestas dadas.

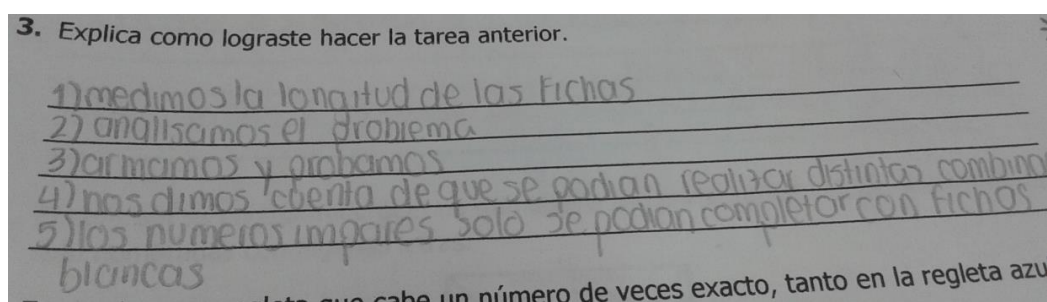


Figura 10. Explicaciones de la estrategia usada para las relaciones

En la actividad cuatro, se observó que algunos estudiantes empezaron a superponer regletas del mismo color para completar la longitud de la regleta azul como de la verde oscura. Sin embargo, algunos de ellos no tenían en cuenta la condición de que el color de la regleta debía ser el mismo y superponían regletas de distintos colores. En esta actividad hubo estudiantes que solo expresaron una de las dos posibles opciones que cumplían la condición que era la regleta blanca o la regleta

verde clara. También, hubo el caso en el que encontraron las dos relaciones. En la Figura 8, se muestra una respuesta de esta actividad.

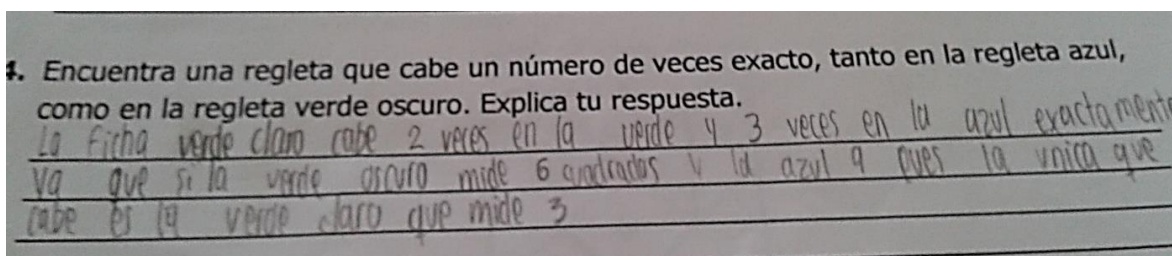


Figura 8. Explicación a la actividad 4

En la actividad cinco, inicialmente hubo dificultad para comprender el enunciado, dado que preguntaban qué significaba el inciso dos, a lo que se les decía que era el punto dos del taller.

Los estudiantes manifestaban no entender lo que se les pedía, frente a esta situación se les indicaba leer nuevamente todo el enunciado con el ejemplo. En esta actividad, se observó que los estudiantes por medio de la manipulación del material, encontraron las relaciones multiplicativas, pues superponían y comparaban las regletas para poder encontrarlas y posteriormente escribirlas.

Hubo estudiantes que realizaban el gráfico y luego escribían la relación en palabras, así como también hubo estudiantes que las expresaban por medio de la multiplicación y una fracción. También se observó el caso en el cual expresaban por medio de la suma la relación de multiplicidad, mas no expresaban la consecuencia que es ser divisor de, que en este caso es la relación parte- todo. En la Figura 9 se pueden apreciar una de las respuestas dadas.

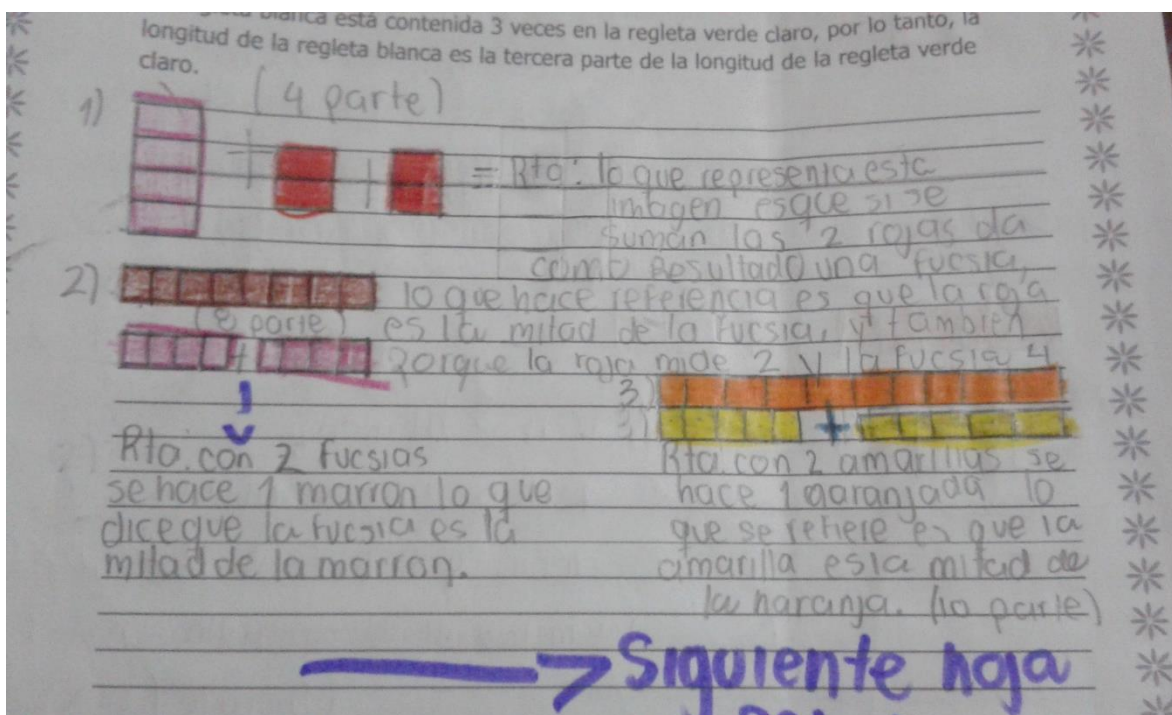


Figura 9. Relación usando suma

En el caso de los estudiantes que hallaron la relaciones a través de la suma se puede apreciar que en su actividad matemática, comprenden a través del uso del material que al juntar regletas del mismo color pueden obtener la longitud de otra regleta, e identificar una regleta como parte de la otra, es decir que implícitamente están trabajando la suma de fracciones porque la suma de las partes le da la unidad, que en este caso es la longitud de otra regleta. Sin embargo, en su respuesta no utilizan la representación fraccionaria, lo que indica que para este caso no la ha dotado de significado como parte de la unidad, ni como medida.

La actividad seis se dificultó un poco, pues no entendían aquello de expresar matemáticamente. Por tal razón, fue necesario pedirles que plasmaran por escrito esas relaciones que habían identificado, pero en términos matemáticos, es decir utilizando una igualdad. En esta parte se

evidenciaron diferentes modos de representar esas relaciones, como se puede apreciar en la Figura 10, en la que se utilizan colores para expresar la relación, es decir, el color hace referencia a la longitud de la regleta.

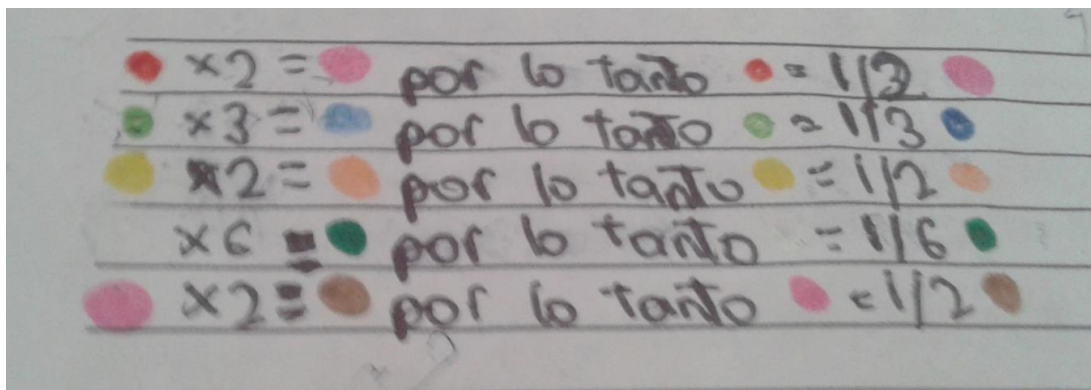


Figura 10. Relación usando colores

Esta misma situación se observó en el caso de los que utilizaron la suma, ver Figura 11.

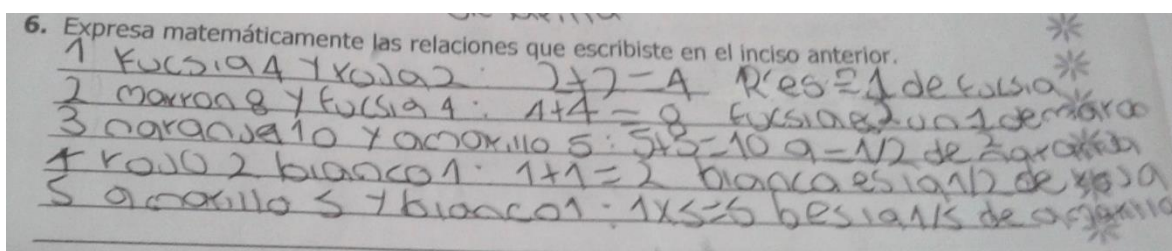


Figura 11. Relación usando suma

También hubo equipos de trabajo que expresaron la relación de multiplicidad con las operaciones implicadas pero a su vez se valieron del lenguaje natural (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

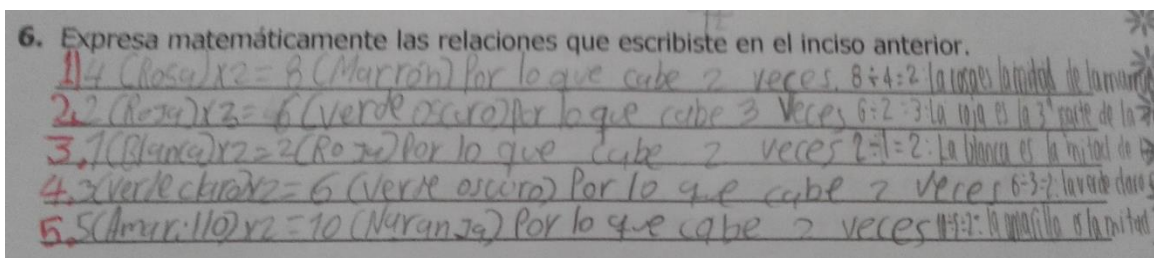


Figura 15. Relación de multiplicidad

En la siguiente parte de la actividad utilizamos otro material didáctico que fue el tangram.

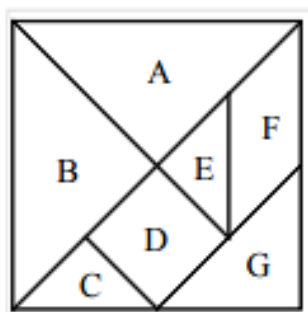


Figura 12. Tangram

Luego, de entregar dicho material a todos los grupos de trabajo, se observó que los estudiantes armaron el cuadrado y empezaron a realizar distintas figuras con las fichas del tangram, también identificaban por el tamaño y color cada una de las partes en las que estaba dividido el tangram (Figura 12).

Para responder a la actividad siete, superponían las fichas y observaban cuántas veces cabía un área en otra. Se apreciaba que había estudiantes que completaban la figura al realizar estas comparaciones, por ejemplo: la figura E y C son iguales y con ellas se puede completar el cuadrado, entonces sobre la ficha A o B que son iguales superponían el cuadrado y las fichas C y

E por lo tanto la ficha C o E cabía 4 veces en el A, entonces podían deducir que correspondían a la cuarta parte de A. De igual manera, se evidenció que los estudiantes eran capaces de hacer deducciones como la siguiente: si la ficha A cabe 4 veces en el cuadrado entonces la ficha más pequeña cabía 16 veces en todo el cuadrado, lo que los llevaba a concluir que la ficha C es un dieciseisavo del cuadrado. Este mismo procedimiento fue utilizado con la ficha G para mirar cuántas veces cabía en A y la ficha C cuántas veces cabía en G.

En esta parte de la actividad se observó mayor fluidez en los estudiantes para responder a la actividad dado que la experiencia que traían con las regletas les permitía realizarla un poco más rápido comprendiendo lo que se les estaba preguntando. Así pues, las relaciones de multiplicidad salían de manera más natural. A continuación, se muestra evidencia de esta parte de la actividad. (Figura 13).

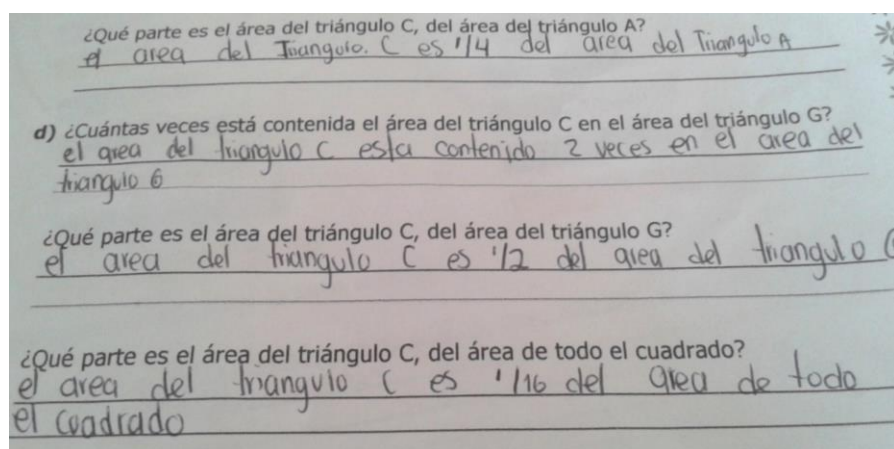


Figura 13. Respuesta a la actividad con tangram

La implementación de la secuencia de actividades “relaciones multiplicativas”, donde las actividades propuestas a los estudiantes favorecieron que la representación $\frac{a}{b}$ tomara el significado

del racional como medida, puesto que al identificar una regleta como medida de otra, y comprobar la cantidad de veces en la que una magnitud cabe en otra, permite que la fracción sea vista como una relación multiplicativa, es decir, ser múltiplo de... genera la relación ser parte de..., dicho de otra manera la relación es equivalente a la relación $Y = \frac{1}{n} X$.

Obando (2006), menciona que la comprensión del significado de la fracción como medidor, permite a los estudiantes resolver con mayor destreza operaciones con fracciones y relacionarlos con otras representaciones como lo son los números decimales y estos conducen a los porcentajes. Características de esto, se pudo observar cuando se pidió a los estudiantes identificar cinco relaciones multiplicativas, en las cuales hubo diversidad de sentidos para escribir las relaciones multiplicativas. En las soluciones algunos hicieron uso de la suma, otros por medio de una multiplicación y una fracción.

5.2.2 Los números racionales como cocientes indicados. El nombre de cociente indicado expresa que la división no se realiza a través del algoritmo convencional, sino que la fracción es el cociente. El trabajo en este campo está estrechamente ligado a las demás interpretaciones de la división. Esta interpretación favorece otras interpretaciones del número racional como puntos en la recta numérica, razones y números decimales. En seguida, se muestran evidencias en las cuales se favoreció el significado del número racional como cociente indicado.

En la actividad “relaciones multiplicativas” en el inciso e, de la actividad 7, hubo estudiantes que pasaron fácilmente de la representación del racional como fracción, al racional como decimal, estableciendo las equivalencias correspondientes de cada parte del tangram con la unidad de

medida dada que era un metro cuadrado, ver Figura 14. En este caso, la estrategia de solución de estos estudiantes, consistió en hallar el cociente indicado por cada fracción al identificar la parte que representaba cada figura del tangram. Por ejemplo: A es $\frac{1}{4}$ de la superficie del cuadrado de manera que al dividir uno entre cuatro el resultado es $0,25 \text{ m}^2$.

* 0,25	El A mide	$0,25 \text{ m}^2$
* 0,25	El B mide	$0,25 \text{ m}^2$
* 0,0625	El C mide	$0,0625 \text{ m}^2$
* 0,1250	El D mide	$0,1250$
* 0,0625	El E mide	$0,0625$
* 0,1250	El F mide	$0,1250$
* 0,1250	El G mide	$0,1250$
* 1,0000		

Figura 14. Representación del racional como decimal

La gran mayoría de los estudiantes expresó la equivalencia correspondiente de un metro en centímetros pues les pareció más sencillo trabajar con centímetros cuadrados, con la manipulación del tangram anteriormente se les escuchaba decir que si A y B formaban la mitad del cuadrado entonces cada una tenía 25 cm^2 , y como G era igual que F y D y estas eran la mitad de A entonces cada una tenía $12,5 \text{ cm}^2$, así mismo hicieron con C y E puesto que estas eran la mitad de G, entonces tenían $6,25 \text{ cm}^2$. Al realizar la suma les daba los 100 cm^2 (Figura).

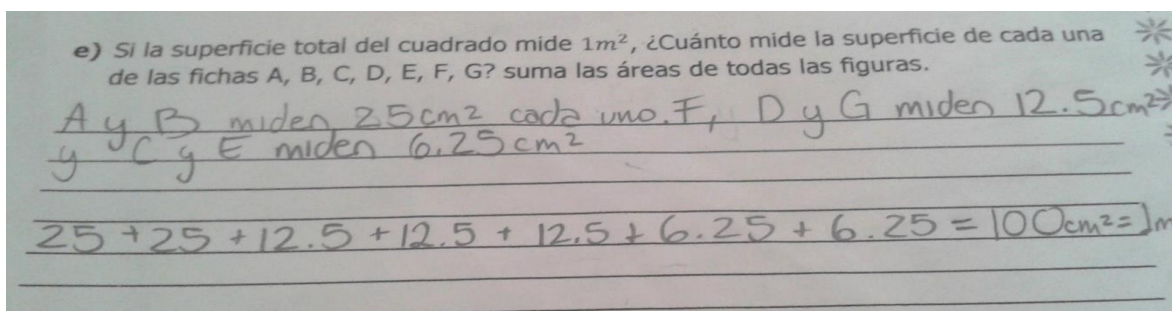


Figura 19. Representación del racional como decimal

También se presentó el caso de un estudiante que no logró establecer las equivalencias correspondientes del racional como cociente, al racional como decimal (Figura 15), se observa que intenta hacer la conversión equivalente en centímetros cuadrados de los cuales las figuras A y B tiene cada una 25cm^2 , las figuras G, F y D tienen la misma área pero no son 15cm^2 , es decir que el estudiante no tuvo en cuenta que esas figuras son exactamente la mitad de A o B, por lo tanto la medida de esas superficie de esas figuras es $12,5\text{cm}^2$.

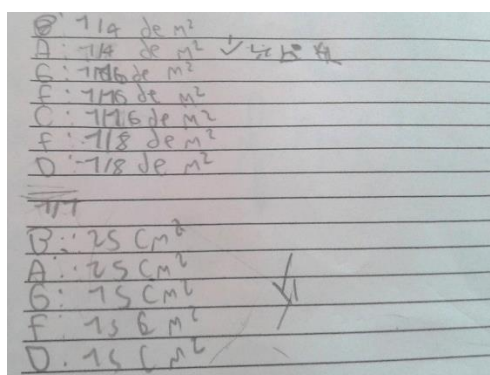
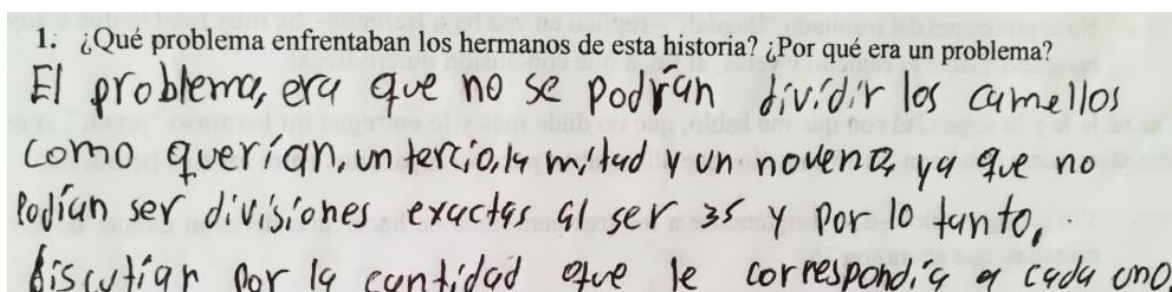


Figura 15. Respuesta al inciso e de la actividad 7

Otra de las actividades, cuyo diseño y estructura permitieron que a través de las relaciones y operaciones realizadas por el estudiante, fuera posible dotar al racional como cociente y como

número decimal, incluso como porcentaje, fue la actividad denominada “el hombre que calculaba”. Inicialmente la lectura permitió que los estudiantes identificaran que había un problema para repartir la herencia, puesto que la cantidad de camellos no era divisible en las partes propuestas por el padre ya que no les daba una cantidad exacta y los camellos no podían partirse. De esto se puede deducir que el estudiante dota de significado a la fracción teniendo en cuenta la unidad y el contexto, en este caso es un contexto discreto y la unidad es compuesta. Según Obando (2006), al considerar distintas situaciones problema, en las que se propone la relación parte-todo, para que el número racional adquiera sentido para el estudiante se debe considerar el tipo de unidad y de magnitud. En la Figura 16 se muestra un modelo de respuesta dada por los estudiantes.



1. ¿Qué problema enfrentaban los hermanos de esta historia? ¿Por qué era un problema?
El problema era que no se podrán dividir los camellos como querían, un tercio, la mitad y un noveno ya que no podían ser divisiones exactas al ser 35 y por lo tanto, discutir por la cantidad que le correspondía a cada uno.

Figura 16. Respuesta sobre el problema de los hermanos

En las respuestas dadas a la actividad 2 (Figura), se pudo evidenciar que los estudiantes dotaron de significado al camello que agregó el hombre que calculaba, puesto que para que la repartición de camellos tuviera sentido debía agregarse un camello y así esa nueva cantidad fuese múltiplo de cada una de las partes correspondientes para los hermanos. Con esta actividad se fortalece el racional como relación parte-todo, donde la parte representa una cantidad numérica, en este caso una “nueva cantidad” que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte, Obando (2006).

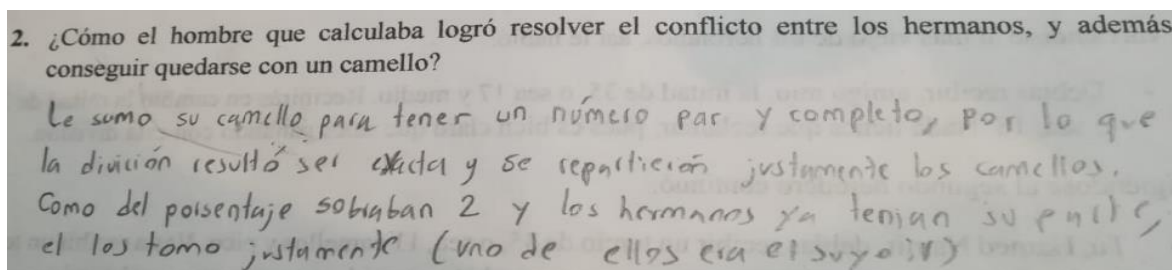


Figura 22. Explicación a la solución del conflicto

En cuanto a la actividad 3, en la cual se pedía a los estudiantes escribir la fracción que representaba la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno, hubo respuestas en las cuales los estudiantes establecieron fracciones equivalentes, incluso realizaron una suma de fracciones al expresar la fracción en total que les correspondió a los hermanos (Figura 17). Esto a la luz del marco teórico indica que el estudiante encuentra la relación multiplicativa al calcular $\frac{1}{2}$ de 36 y las otras partes, a partir de la cual se logra desarrollar un proceso en las operaciones que le dan sentido numérico. Así, es fácil ver que, a partir de este proceso de conceptualización la suma de fracciones surge de manera natural.

3. Expresa la fracción que representa la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno (los hermanos, Beremís y Bagdali).

$$\begin{aligned} \frac{34}{36} &= \text{Hermanos} \begin{cases} \frac{18}{36} = \text{Hermano Mayor} = \frac{1}{2} \\ \frac{12}{36} = \text{El segundo} = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{36} = \text{El menor} = \frac{1}{9} \end{cases} \\ \frac{1}{36} &= \text{Bagdali} \\ \frac{1}{36} &= \text{Beremís} \end{aligned}$$

Figura 17. Respuesta dada a la actividad 3

Otra respuesta dada a esta actividad, fue en la que el racional expresa un cociente indicado, tal es el caso que se aprecia en la

Figura 18, esta interpretación es importante, ya que desde aquí se prepara el camino para entender los números racionales como un campo de cocientes.

3. Expresa la fracción que representa la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno (los hermanos, Beremis y Bagdali).

el mayor $\frac{36}{2} = 18$
 Hamed $\frac{36}{3} = 12$
 Harim $\frac{36}{9} = 4$
 Beremis $36/36$
 Bagdali $36/36$

Figura 18. Respuesta a la actividad 3 (cociente)

En la actividad 5, en la cual se le pedía al estudiante expresar las relaciones multiplicativas el 58% de los estudiantes no respondió, a pesar de que en la actividad con las regletas se había trabajado, lo que indica que cuando el proceso de medición favorece la conceptualización del racional como parte-todo y como medida. En este caso para la mayoría de las estudiantes expresar las veces que cabe la parte en el todo (contexto discreto) no fue de fácil comprensión. Sin embargo el resto de estudiantes pudo expresar respuestas como la que se observa en la Figura 19, en la cual los estudiantes también representan el racional como un cociente, puesto que la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno, fue el valor numérico de la fracción $\frac{a}{b}$.

4. Expresa matemáticamente las relaciones multiplicativas resultantes de la repartición de camellos a cada hombre que calculaba.

Hermano mayor: $18 \times 2 = 36$ (total) $18 = \frac{1}{2}$ de 36
 Hermano mediano: $12 \times 3 = 36$ (total) $12 = \frac{1}{3}$ de 36
 Hermano menor: $4 \times 9 = 36$ (total) $4 = \frac{1}{9}$ de 36
 Bagdali: $1 \times 36 = 36$ (total) $1 = \frac{1}{36}$ de 36
 Beremis: $1 \times 36 = 36$ (total) $1 = \frac{1}{36}$ de 36

4. Expresa matemáticamente las relaciones multiplicativas resultantes de la repartición de camellos a cada hombre que calculaba.

① $\frac{36}{2} = 18$ porque al multiplicar $2 \times 18 = 36$
 ② $\frac{36}{3} = 12$ porque al multiplicar $3 \times 12 = 36$
 ③ $\frac{36}{9} = 4$ porque al multiplicar $9 \times 4 = 36$
 ④ $\frac{36}{36} = 1$ porque al multiplicar $36 \times 1 = 36$

Figura 19. Relaciones multiplicativas actividad 4

El propósito de la actividad cinco es trabajar el racional en su representación decimal, donde en el contexto de la situación planteada, esta cantidad es menor que uno. En este caso, una gran parte de los estudiantes no realizó esta actividad propuesta (los mismos que no hicieron la actividad anterior). Se evidencia que al no haber interpretado el racional como un cociente indicado es imposible dotar de significado a dicho cociente como una expresión decimal. A continuación, se muestra una evidencia de un estudiante en el cual se puede apreciar que realiza el cociente indicado encontrando una nueva cantidad que representa la relación entre la parte y el todo, ver Figura 20.

Figura 20 shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, it says 'Expresa de forma decimal la cantidad de camellos que le correspondió a cada un'. Below this, there are several lines of calculations in red ink:

- *Hermano Nouf: $\frac{18}{36} = 0,5$
- *H. del medio: $\frac{12}{36} = 0,3$
- *H. menor: $\frac{11}{36} = 0,3$
- *H. Beremís: $\frac{1}{36} = 0,027$
- *H. Bagdalí: $\frac{1}{36} = 0,027$

To the right of these calculations, there are several long division problems written in black ink, showing the conversion of fractions to decimals:

- $\frac{18}{36} = 0,5$
- $\frac{12}{36} = 0,333$
- $\frac{11}{36} = 0,3055$
- $\frac{1}{36} = 0,0277$
- $\frac{1}{36} = 0,0277$

Figura 20. Solución dada a la actividad 5

En la actividad seis se buscaba que el estudiante dotara de significado al racional como porcentaje, dado que para ello es necesario establecer la comparación de la parte con el todo y reconocer que esa parte, también representa un porcentaje. En la solución del problema el estudiante debía calcular el porcentaje de la herencia de cada hermano (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), sin embargo, hubo estudiantes que también calcularon el porcentaje que recibió Beremís y Bagdalí como se puede observar en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

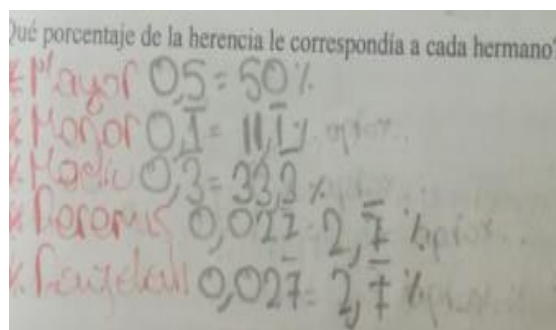


Figura 27. Cálculo de porcentajes

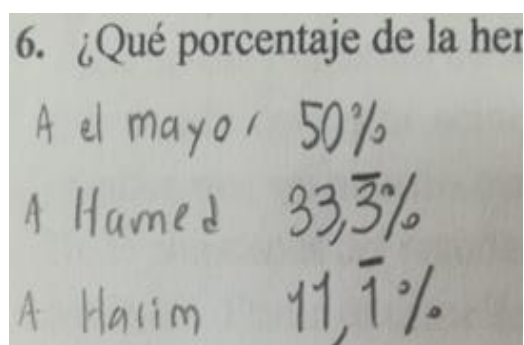


Figura 28. Cálculo de porcentajes de la herencia

La idea de que el estudiante calculara el porcentaje de herencia que recibió cada hermano, tenía como finalidad que estos advirtieran, que al sumar los porcentajes el resultado no daba un total del 100%, de manera que concluirían que si no daba el 100% era porque una parte de los camellos no estaba incluida en la repartición. En las respuestas dadas por los estudiantes ninguno deduce que el padre no contempló un camello para repartir, si no que expresan que el padre repartió mal. Lo que indica que este tipo de situaciones debe continuar trabajándose con los estudiantes para fortalecer el significado de la parte y el todo en unidades compuestas y magnitudes discretas.

En cuanto al racional como decimal, la dificultad que se presentó se debió al algoritmo de la división, ellos comprendían que debían dividir, pero el hecho de que el dividendo fuese menor que el divisor, generó conflicto. Por otra parte, hubo estudiantes que calcularon el decimal por aproximación, es decir, si un medio es equivalente a 0,5 pues un tercio es menor que 0,5 y así con las otras partes.

La implementación de las actividades en la cuales se pretende dotar de significado al cociente como número racional, quizás es uno de los más importantes, puesto que el trabajo sobre este significado del racional, puede trascender al significado del racional como número decimal y como porcentaje. Prueba de esto lo notamos en la interpretación del problema que tenían los hermanos para partir la herencia, de allí se desprendió una serie de actividades que fueron llevando al estudiante a darle sentido y significado a los racionales como: cociente, decimal y porcentaje, a través de las relaciones y operaciones que realizó en el desarrollo de la actividad.

5.2.3 Los números racionales como razón. La razón es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte todo (magnitud continua y discreta). La generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo permite comparar cantidades del mismo tipo.

La actividad que tenía el propósito de trabajar el racional como razón, fue la actividad “significado en contexto de la razón”, en la cual la secuencia de actividades planteadas al

estudiante, conducían a que las relaciones y operaciones hechas por él, le permitieran dotar de sentido y significado al racional como razón.

En la primera parte de la actividad se cumplió con el propósito planeado, pues a partir de la lectura, todos los grupos de trabajo lograron deducir que: Tales de Mileto pudo medir la altura de la pirámide, teniendo en cuenta la sombra de la pirámide que en algún momento del día era igual a la longitud de la pirámide. (En Figura 21).

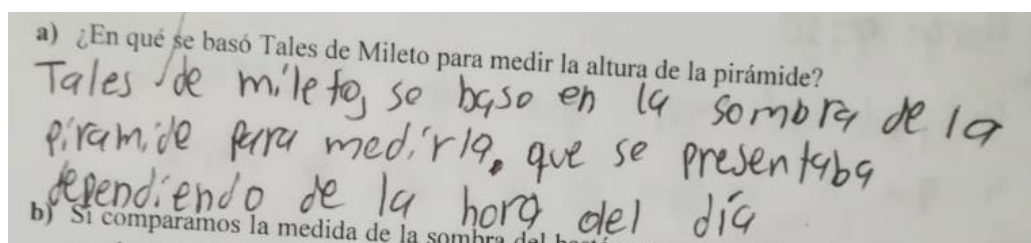


Figura 219. Explicación con base en la lectura

En el ítem c, se buscaba que el estudiante relacionara la longitud de la sombra del bastón con la longitud del bastón. Según Obando (2006), el racional como medida permite dotar de significado al racional como cociente indicado o como razón. De esta actividad surgieron tres representaciones: la fraccionaria, la aritmética de la división en forma de ángulo y la de la línea horizontal en medio de dos puntos ($\div$), en la cual el cociente indicado entre las dos magnitudes es igual a uno. Lo que muestra que los estudiantes comprendieron que al comparar la longitud de la sombra con la longitud del bastón en ese preciso instante en que eran iguales, el cociente es uno. De manera implícita se está trabajando el significado del racional como razón, sin decirle al estudiante que dicha representación es una razón. A continuación, se muestran evidencias de dichas representaciones. (Figura 22).

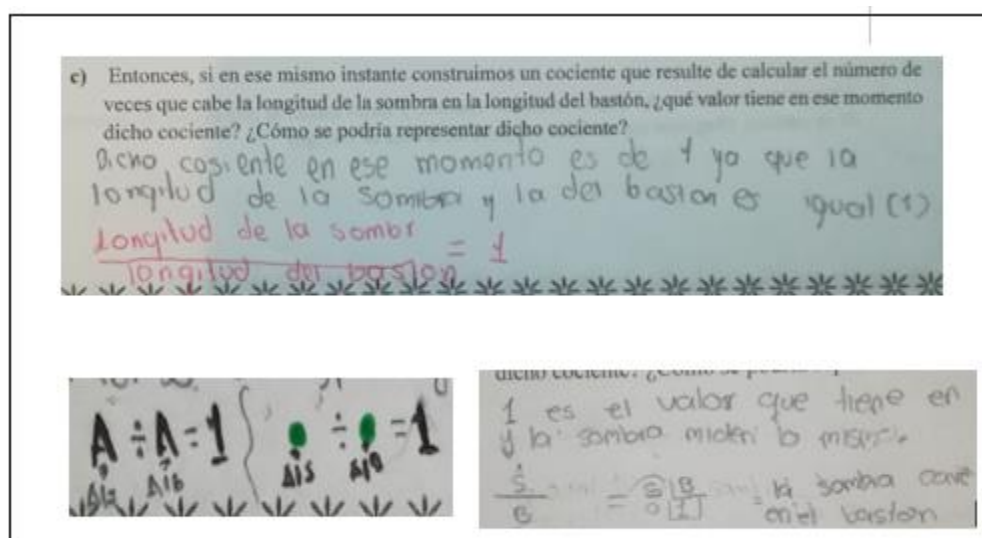


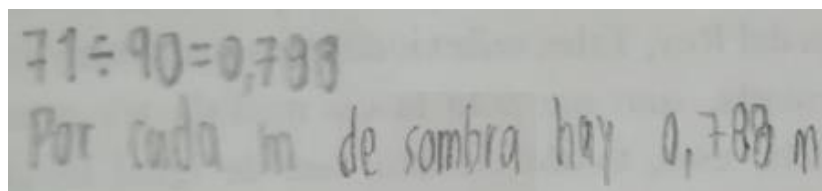
Figura 22. Diferentes representaciones del cociente

La segunda parte de esta actividad se realizó fuera del salón de clases puesto que se requería de la luz solar. A cada grupo de estudiantes se les hizo entrega de los materiales necesarios para medir la sombra que proyectaba la vara (palo de balso) en determinada hora del día. Para ello, un estudiante del grupo sostenía la vara verticalmente formando un ángulo de 90° respecto del suelo, con un cartabón otro integrante medía la longitud de la sombra que proyectaba la vara. Además, cada grupo debía registrar la hora y la medida de la longitud de la sombra.

La toma de medidas se hizo entre las 9:30 y 10:00 de la mañana, por lo tanto, cuando los estudiantes compararon la longitud de la sombra proyectada, respecto de la longitud de la vara, afirmaron que la longitud de la sombra proyectada era menor que la longitud de la vara. Lo que indica que el tipo de situaciones en la cual el estudiante dota de significado a su experiencia es más enriquecedor para él que cuando simplemente el docente modela una situación y espera que sus estudiantes repliquen dicho modelo.

Para Vergnaud (1991), un concepto está vinculado a una diversidad de situaciones, en este caso la noción de razón está siendo modelada por medio de la comparación de la sombra proyectada con la longitud de la vara (ítem c segunda parte de la actividad). Para ello el estudiante debía calcular el cociente indicado entre dichas longitudes.

Algunos estudiantes presentaron dificultad para calcular dicho cociente, a los cuales se les permitió el uso de la calculadora. El cociente resultante era menor que uno, puesto que la longitud de la sombra era menor a la longitud de la vara, es decir, un número decimal, el cual tomaba el significado de razón al interpretarse como tantos metros de sombra por tantos metros de longitud. A continuación se muestran evidencias de esta parte de la experiencia (Figura 23).



Handwritten student work showing a division problem and its interpretation. The first line shows the calculation $71 \div 90 = 0,788$. The second line shows the interpretation: "Por cada m de sombra hay 0,788 m".

Figura 23. Comparación de la sombra respecto a la longitud de la vara

También se presentó el caso en el que algunos grupos de trabajo realizaron lo contrario, es decir, compararon la longitud de la vara respecto a la sombra de la vara, lo que muestra que hubo una confusión al interpretar la comparación. Este caso se puede apreciar en la Figura 24, el estudiante escribe: “cabría una vez en la sombra y quedaría faltando”. Por lo cual podemos observar que el estudiante comprende que esa cantidad decimal representa que la longitud de la sombra cabe una vez y un poquito en la longitud de la vara.

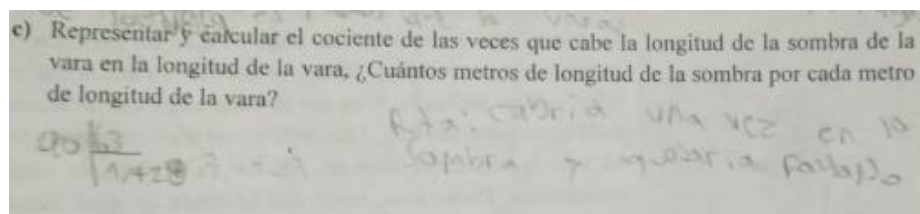


Figura 24. Comparación de la longitud respecto a la sombra

La experiencia anteriormente descrita se repite nuevamente con una vara de 60 cm de longitud y con la medida de la estatura de un compañero, con el fin de que se fueran familiarizando con las comparaciones y el cálculo del cociente indicado. En el caso de la estatura de algún compañero, se pedían las dos comparaciones: la de la longitud de la sombra, respecto a la longitud de la vara y viceversa. Como se puede apreciar continuación, en la Figura , este grupo de estudiantes no escribe el cociente indicado en forma fraccionaria, pero si lo expresan en forma de ángulo para calcular el valor del cociente, además se nota que por comodidad decidieron tomar la estatura de $1,50 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, inicialmente la estatura del estudiante es 1,52 m.

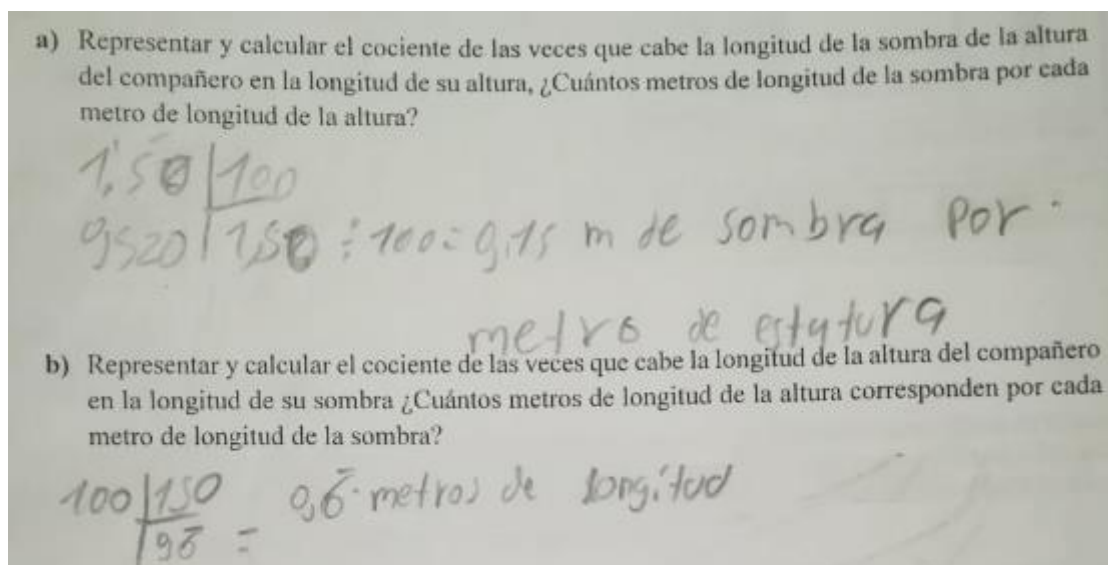


Figura 33. Solución a la actividad 3 (con las estaturas)

En cuanto a la comparación de las dos medidas, nótese que los estudiantes interpretaron la contraria a la que se les pedía; en la parte a, calcularon los metros de longitud por cada metro de sombra; y en la parte b, metros de sombra por cada metro de longitud. Esta situación le pasó a tres grupos de trabajo. Así, como hubo 2 grupos que no realizaron esta parte de la actividad.

a) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la altura del compañero en la longitud de su altura, ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la altura?

$$\frac{118}{157} = 0,75$$

$$118 \overline{) 157} \quad 0,75$$

0,75 m de Sombra por
Cada m d estatura

b) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la altura del compañero en la longitud de su sombra ¿Cuántos metros de longitud de la altura corresponden por cada metro de longitud de la sombra?

$$\frac{157}{118} = 1,33$$

$$157 \overline{) 118} \quad 1,33$$

1,33 m de Estatura
por cada m de
Sombra

Figura 25. Solución a la actividad 3 (con las estaturas)

En la Figura 25, se aprecia que este equipo de estudiantes, escribe el cociente en forma de fracción, además realizan las comparaciones en el orden en el que se indica, interpretando el número decimal como una razón. Según Gáirin y Sancho (2002), citado por Quispe (2011), la comparación de las magnitudes se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador, por lo tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial.

En la siguiente actividad se pedía calcular los porcentajes respectivos de cada una de las comparaciones, es decir, ese número decimal que expresa las relaciones entre dos magnitudes también toma el significado de porcentaje (la parte que representa dicha cantidad). Para que los

estudiantes lograran interpretar el valor del cociente como porcentaje, se les recordaba que el porcentaje es un valor representativo de cierta cantidad, por ejemplo, si hablamos de la mitad de las mujeres, hablamos del 50% y así se les enunció otros ejemplos. Finalmente, algunos estudiantes mencionaron que para calcular el 100% debían multiplicar el número decimal por 100. A continuación se muestran evidencias de esta parte de la actividad (Figura 26).

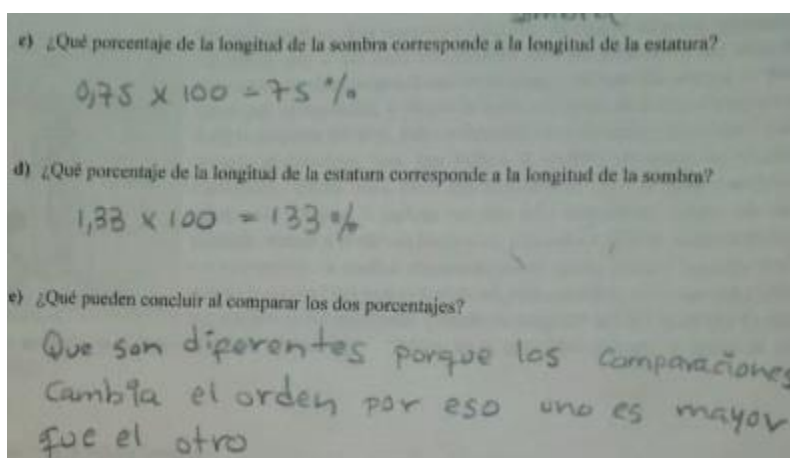


Figura 26. Cálculo de porcentajes

En la solución dada por este equipo de estudiantes, se observa que transforman el número decimal en un porcentaje. Cuando se les preguntó por la conclusión que dieron sobre la comparación de los porcentajes, manifestaron que se debía a que un porcentaje era mayor porque la sombra era menor que la longitud, y que la sombra representaba el 75% de la vara, y que el otro porcentaje era mayor, porque la longitud respecto a la sombra es mayor. Con este argumento dado por los estudiantes se entiende que el proceso de medición y de comparación de dichas magnitudes realizados por los estudiantes durante la experiencia, les permitió conceptualizar la relación que hay entre dos magnitudes del mismo tipo, en este caso, de las longitudes. Respecto a este modo de ver el racional como ese porcentaje de dicha comparación, no todos los estudiantes lograron

conceptualizarlo, pues no comprendían cómo dicha relación, también representaba un porcentaje, podemos ver un ejemplo de esto en la (Figura 27). Vemos que en la conclusión que dan estos estudiantes sobre los porcentajes, tienen claro que el porcentaje de la sombra es menor que la longitud de la vara, pero como en la parte que debían realizar las comparaciones no tuvieron en cuenta el orden en el que eran nombradas las magnitudes, los porcentajes resultantes no son los correctos, sin embargo, a pesar de que estos cálculos no son correctos, la experiencia de la medición, les permite afirmar que el porcentaje de la sombra es menor.

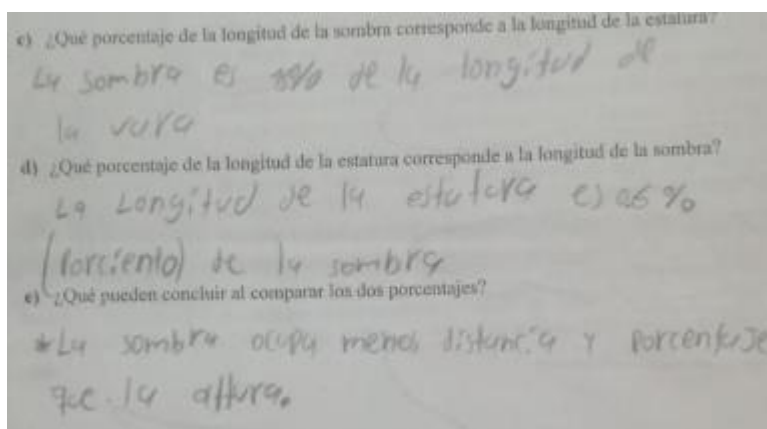


Figura 27. Cálculo de porcentajes

Al finalizar la experiencia se realizó la socialización con los estudiantes sobre la actividad. Manifestaron que salir del salón a realizar ésta experiencia de medición, con la cual aprendieron que se puede calcular la longitud de un objeto a partir de su sombra, les llamó la atención. Compartieron las dificultades presentadas durante la actividad, que en su mayoría ocurrieron en la actividad 2. En ésta se les pedía representar y calcular los cocientes e interpretar esos valores con la comparación dada, con lo que podemos concluir que no todos los estudiantes lograron dotar de significado a las comparaciones que se les pedía. Por lo tanto, se hace necesario llevar al aula más

actividades de tipo experimental en las cuales el estudiante a través de los procesos de medición pueda dotar de significado al racional como una razón. Además, se preguntó a los estudiantes sobre las representaciones de los números durante el desarrollo de la actividad, a esto respondieron: números decimales, porcentajes y cociente. Se resaltó a los estudiantes que el cociente indicado, el decimal y el porcentaje eran representaciones distintas para una misma cantidad.

Según Obando (2006), podemos resaltar que la significación está en la reflexión que el alumno hace sobre cada una de las acciones realizadas, de manera que cada acción que realizó el estudiante en el desarrollo de la actividad permitió dotar de significado a cada una de las representaciones que surgieron del número racional. La actividad favoreció el significado del racional como cociente, pues inicialmente esto era lo que se le pedía al estudiante: realizar el cociente entre la longitud de la proyección de la sombra y la longitud del bastón, vara o estatura del compañero. En el contexto de la situación los cálculos no daban números enteros, si no números decimales, lo cual permitía dotar de significado esa cantidad resultante como un número decimal.

El significado del racional como razón, se propiciaba cuando se pedía al estudiante interpretar ese cociente en términos de la comparación de las magnitudes, lo cual hubo una parte de los estudiantes que lo logró, pero otros no. Esto nos lleva a reflexionar, que el significado como razón fue el de mayor complejidad para los niños y que para que este el estudiante lo dote de significado se hace necesario realizar más experiencias en el cual el proceso de medición sea la fuente fenomenológica para darle sentido al racional como razón.

5.4 Diagnóstico Final

El instrumento aplicado para el diagnóstico final fue una herramienta que nos permitió medir los aprendizajes de los alumnos después de la metodología implementada en clase. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran las respuestas obtenidas por estudiantes.

Tabla 3.

Diagnóstico Final

Respuestas de los estudiantes	Análisis	Significado del racional
Juan caminó menos de un km los días lunes y viernes. Caminó exactamente un km el día martes. Los días miércoles y jueves, caminó más de un km. El día jueves caminó exactamente dos km.	En la primera situación en la cual el estudiante debía interpretar datos de una tabla, para responder a las preguntas planteadas. Se observó que el 66,7% de los estudiantes logró reconocer la unidad respectiva que está trabajando, la cual es de carácter continuo.	Los significados del racional que se observó en los estudiantes es: los racionales como medida, los racionales como cocientes indicados. Se evidencia la relación parte-todo y el reconocimiento de unidad y de magnitud.
En esta situación, se dieron dos tipos de respuesta uno en que los estudiantes hallaban los $\frac{2}{5}$ de 120.000, $\frac{1}{3}$ de 120.000 a través de multiplicaciones y divisiones. Luego, sumaban los valores resultantes de cada uno y por último hacían la diferencia La otra respuesta fue en la que calcularon un quinto de 120.000, $\frac{120.000}{5}$ que daba como resultado 24.000. Luego sumaron otros 24.000 y así obtenían los $\frac{2}{5}$. Seguidamente calcularon $\frac{120.000}{3}$, realizaron suma y luego la resta para hallar la diferencia También hubo estudiantes que solo sacaron los datos de la situación más no la resolvieron	En este modelo de respuesta se puede observar que el estudiante le da sentido a esta situación a través de operaciones: división, multiplicación, suma y resta. El estudiante organiza lo que sabe para darle significado al racional. En este modelo se observa que el estudiante le da significado al racional como cociente, al expresar un cociente indicado entre los 120.000 con cada parte correspondiente para cada artículo. De estos estudiantes los cuales fueron el 20%, no lograron interpretar los datos del problema y dotar de significado a los racionales dados en esta situación	Esta situación permitió trabajar la relación parte-todo. La fracción como cociente indicado y la fracción como una relación multiplicativa.

Al proponer situaciones donde los estudiantes pueden reconocer el tipo de unidad y magnitud y recurrir a las relaciones multiplicativas para dar solución a la situación planteada, se puede reconocer cuales son los sentidos y significados de los racionales que da el estudiante a la actividad propuesta. Los sentidos en el diagnóstico final se pueden apreciar a través de las operaciones y representaciones que usó el estudiante para resolver la situación.

Se puede concluir de la prueba diagnóstica final, que las actividades implementadas en el aula las cuales tenían el propósito de trabajar los sentidos y los significados de los números racionales, son una buena estrategia para conceptualizar los números racionales y que estos tengan sentido y significado para quien los usa. Sin embargo, se observa que un pequeño porcentaje de estudiantes, no logró dotar de significado al racional en el contexto de la segunda situación, lo que nos indica que es necesario dedicar más tiempo y diferentes tipos de situaciones, en las cuales las variables del diseño de las mismas sean en contextos discretos y compuestos.

6. Reflexiones

De la intervención realizada en el aula y sobre mis aprendizajes adquiridos en mi experiencia de formación en la Maestría en Educación Matemática, doy a conocer mis reflexiones que están organizadas de la siguiente manera: los significados de los números racionales, mis aprendizajes y como fue transformada mi práctica docente.

El racional como medida adquiere significado para el estudiante cuando la reconoce como la asignación de una cantidad a una magnitud ya sea de longitud, área o volumen. En esta experiencia

se pudo dotar de sentido y significado al racional como medida a través de las actividades en las cuales el estudiante pudo reconocer la fracción de medida de una longitud y de una superficie.

El uso del material didáctico utilizados en la aplicación (regletas de Cousineare y tangram) favoreció el aprendizaje de los significados del racional como parte-todo, medida, decimal y porcentaje. Lo anterior, porque por medio de los recursos y una buena actividad matemática planteada al estudiante, se puede promover la comprensión de que una cantidad numérica puede interpretarse de varias maneras. Por ejemplo: la mitad de una magnitud puede verse como 0,5 o como el 50% de la unidad.

El significado del racional como cociente adquiere sentido para el estudiante no solo con material concreto si no por medio de situaciones, en la cual los esquemas que el alumno elabora para llegar a la solución de la situación, le permiten interpretar dicha cantidad resultante que algunas veces es entera y en su mayoría es decimal. Esta interpretación del decimal es importante porque el estudiante la dota de significado de acuerdo al contexto, por ello no solo se debe centrar la atención en los contextos continuos sino también los discretos, puesto que en los discretos es dónde se requiere que el estudiante realice relaciones y operaciones que le dan un sentido numérico al racional.

Se pudo evidenciar, que para los estudiantes comprender la comparación numérica de dos cantidades no resultó ser como lo esperábamos, de lo cual comprobamos lo que expone Perera y Valdemoros (2009) que el significado de razón es demasiado complejo. El abordaje de este significado, requiere de más tiempo y de diferentes tipos de situaciones para dotarlo de significado,

es por ello que cuando deba abordarlo nuevamente, aplicaré en el aula prácticas en las que el proceso de medición permita que los estudiantes doten de significado al racional como razón.

De la experiencia de aula realizada, se pudo apreciar que los elementos que se tuvieron en cuenta para el diseño de las actividades como: el tipo de magnitud y el tipo de unidad, permitió desarrollar en los alumnos sentidos y significados asociados a los racionales como el racional como medida, cociente y decimal, pero también favoreció la interpretación del racional como porcentaje.

El desarrollo de esta investigación me permitió afianzar y adquirir nuevos conocimientos relacionados con los números racionales, aclarar los significados y las maneras cómo estos pueden ser abordados en el aula de clases.

El rol de profesora investigadora ha generado en mí la necesidad de investigar, antes de abordar una temática en el salón de clases, con el ánimo de favorecer el proceso de enseñanza - aprendizaje de los estudiantes, y compartir mis experiencias con otros maestros para contribuir a una transformación de las prácticas docentes.

En el desarrollo de esta investigación no se abordó los racionales como fracción decimal, ni cómo puntos en la recta numérica, es por eso que como perspectiva de investigación quedan preguntas como ¿Qué aprendizajes adquieren los estudiantes cuando exploran los sentidos y significados asociados a los números racionales como fracción decimal y puntos en la recta numérica?

Referencias Bibliográficas

- De león, H. (1998). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Relime*, 1(002), 5-28.
- Elguero, C. (2009). *Construcción social de Ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural de trabajo*. Tesis de maestría en Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, México, México, D.F.
- Escolano, R. y Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de los números racionales en educación primaria. *Unión, Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, (1), 17-35.
- Fandiño, M.I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Magisterio
- Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (L. Puig, Trad.). México: CINVESTAV: Departamento de Matemática Educativa. (Trabajo original publicado en 1983).
- Gairín, J. (1998). Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción. *Aula Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, (10), 41-64.
- Gairín, J. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos, un estudio con maestros en formación* (Tesis doctoral) . Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.
- MEN (2006). *Estándares curriculares del área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá, Colombia: Magisterio.

- Obando, Z., y otros autores. (2006). *Módulo 1. Pensamientos Numéricos y Sistemas Numéricos*. Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.
- Obando, Z. (2015). *Sistemas de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica*, (Tesis doctoral) Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Perera, P. y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, (21), 29-61.
- Porlan, R. y Martín, J. (1994). *Hojeando el diario del profesor, un recurso para la investigación en el aula*. Sevilla: Diada Editora S.L. (Colección investigación y enseñanza N°6).
- Quispe, W. (2011). *La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales*, (Tesis doctoral) Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú.
- Valdemoros, M.E (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso. En F. Hitt. (Ed), *DIDÁCTICA. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 465-480). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactiques des mathematiques*, 10(2 y 3), 133-170.
- Valdemoros, M.E (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso. En F. Hitt. (Ed), *DIDÁCTICA. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 465-480). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactiques des mathematiques*, 10(2 y 3), 133-170.

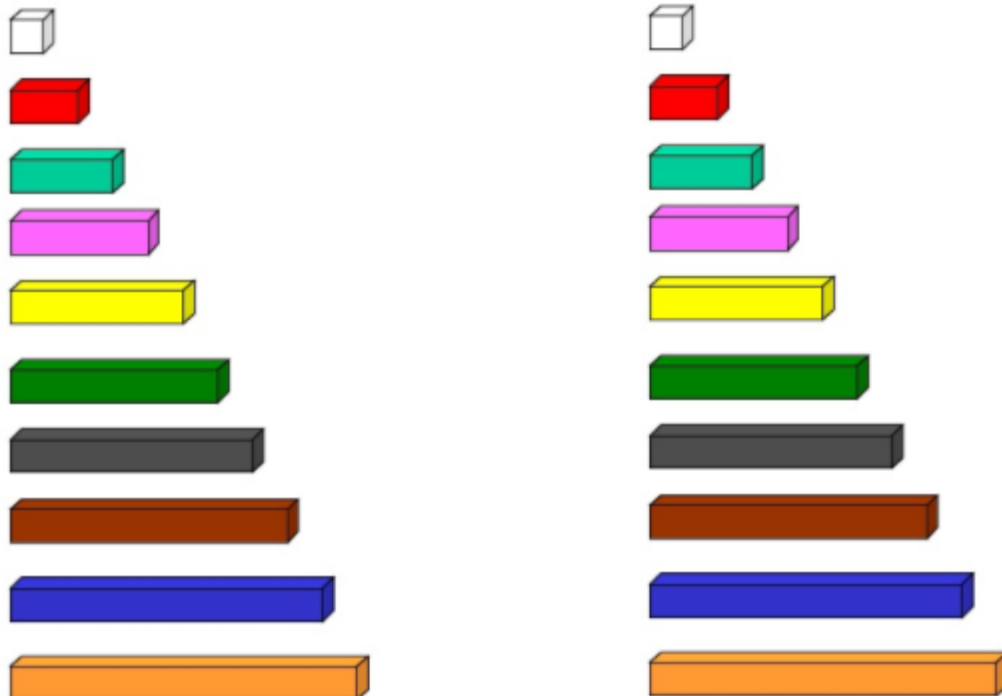
Apéndices

A continuación presentamos el diseño de la secuencia de actividades implementadas en el trabajo de aplicación.

Apéndice A. Primera Actividad de la secuencia: “relaciones multiplicativas”

1. Observa las regletas y escribe las características que encuentras en ellas.

2. Compara las longitudes de las regletas y relaciona la regleta que cabe un número de veces exacto en otra regleta.



3. Explica como lograste hacer la actividad anterior.

4. Encuentra una regleta que cabe un número de veces exacto, tanto en la regleta azul, como en la regleta verde oscuro. Explica tu respuesta.

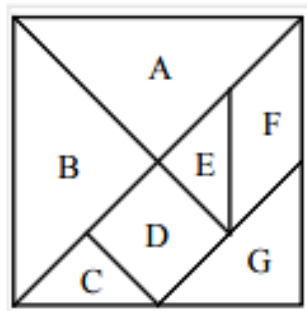
5. Identifica cinco relaciones multiplicativas que se encuentran en el inciso dos. Observa el ejemplo.



La regleta blanca está contenida 3 veces en la regleta verde claro, por lo tanto, la longitud de la regleta blanca es la tercera parte de la longitud de la regleta verde claro.

6. Expresa matemáticamente las relaciones que escribiste en el inciso anterior.

7. El tangram es un cuadrado que ha sido diseñado a partir de siete fichas, las cuales han sido nombradas con algunas letras.



a) El área del triángulo G, ¿Cuántas veces cabe en el área del triángulo A?

¿Qué parte es el área del triángulo G, del área del triángulo A?

b) El área del triángulo A, ¿Cuántas veces contiene el área del triángulo G?

c) El área del triángulo C, ¿Cuántas veces cabe en el área del triángulo A?

¿Qué parte es el área del triángulo C, del área del triángulo A?

d) ¿Cuántas veces está contenida el área del triángulo C en el área del triángulo G?

¿Qué parte es el área del triángulo C, del área del triángulo G?

¿Qué parte es el área del triángulo C, del área de todo el cuadrado?

- e) Si la superficie total del cuadrado mide $1m^2$, ¿Cuánto mide la superficie de cada una de las fichas A, B, C, D, E, F, G? suma las áreas de todas las figuras.

Apéndice B. Segunda actividad de la secuencia: el hombre que calculaba

Lee con atención el siguiente texto.

Hacia pocas horas que viajábamos sin interrupción, cuando nos ocurrió una aventura digna de ser referida, en la cual mi compañero Beremís puso en práctica, con gran talento, sus habilidades de eximio algebrista.

Encontramos, cerca de una antigua posada medio abandonada, tres hombres que discutían acaloradamente al lado de un lote de camellos. Furiosos se gritaban improperios y deseaban plagas:

- ¡No puede ser!
- ¡Esto es un robo!
- ¡No acepto!

El inteligente Beremís trató de informarse de que se trataba.

Somos hermanos –dijo el más viejo- y recibimos, como herencia, esos 35 camellos. Según la expresa voluntad de nuestro padre, debo yo recibir la mitad, mi hermano Hamed Namir una tercera parte, y Harim, el más joven, una novena parte. No sabemos sin embargo, como dividir de esa manera 35 camellos, y a cada división que uno propone protestan los otros dos, pues la mitad de 35 es 17 y medio. ¿Cómo hallar la tercera parte y la novena parte de 35, si tampoco son exactas las divisiones?

Es muy simple –respondió el “Hombre que calculaba”-. Me encargaré de hacer con justicia esa división si me permitís que junte a los 35 camellos de la herencia, este hermoso animal que hasta aquí nos trajo en buena hora.

Traté en ese momento de intervenir en la conversación:

- ¡No puedo consentir semejante locura! ¿Cómo podríamos dar término a nuestro viaje si nos quedáramos sin nuestro camello?
- No te preocupes del resultado “Bagdalí” –replicó en voz baja Beremís-. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Dame tu camello y verás, al fin, a que conclusión quiero llegar.

Fue tal la fe y la seguridad con que me habló, que no dudé más y le entregué mi hermoso “jamal”, que inmediatamente juntó con los 35 camellos que allí estaban para ser repartidos entre los tres herederos.

- Voy, amigos míos –dijo dirigiéndose a los tres hermanos –a hacer una división exacta de los camellos, que ahora son 36.

Y volviéndose al más viejo de los hermanos, así le habló:

- Debías recibir, amigo mío, la mitad de 35, o sea 17 y medio. Recibirás en cambio la mitad de 36, o sea, 18. Nada tienes que reclamar, pues es bien claro que sales ganando con esta división.

Dirigiéndose al segundo heredero continuó:

- Tú, Hamed Namir, debías recibir un tercio de 35, o sea, 11 camellos y pico. Vas a recibir un tercio de 36, o sea, 12. No podrás protestar, porque también es evidente que ganas en el cambio.

Y dijo, por fin, al más joven:

- A ti, joven Namir, que según la voluntad de tu padre debías recibir una novena parte de 35, o sea, 3 camellos y parte de otro, te daré una novena parte de 36, es decir, 4 y tu ganancia será también evidente, por lo cual sólo te resta agradecerme el resultado.

Luego, continuó diciendo:

- Por esta ventajosa división ha favorecido a todos vosotros, tocarán 18 camellos al primero, 12 al segundo y 4 al tercero, lo que da un resultado $(18+12+4)$ de 34 camellos. De los 36 camellos me sobran, por lo tanto, dos. Uno pertenece como saben, a mi amigo el “Bagdalí” y el otro me toca a mí, por derecho, y por haber resuelto a satisfacción de todos, el difícil problema de la herencia.
- ¡Sois inteligente, extranjero! –exclamó el más viejo de los tres hermanos-. Aceptamos vuestro reparto en la seguridad de que fue hecho con justicia y equidad.

El astuto Beremís –el “Hombre que calculaba”- tomó luego posesión de uno de los más hermosos “jamales” del grupo y me dijo, entregándome por la rinda el animal que me pertenecía:

- Podrás ahora, amigo, continuar tu viaje en tu manso y seguro camello. Tengo ahora yo, uno solamente para mí.

Y continuamos nuestra jornada hacia Bagdad.

Tomado del libro el hombre que calculaba cap. 3, págs. 13, 14 y 15

De acuerdo a la lectura responde:

1. ¿Qué problema enfrentaban los hermanos de esta historia? ¿Por qué era un problema?

2. ¿Cómo el hombre que calculaba logró resolver el conflicto entre los hermanos, y además conseguir quedarse con un camello?

3. Expresa la fracción que representa la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno (los hermanos, Beremís y Bagdalí).

4. Expresa matemáticamente las relaciones multiplicativas resultantes de la repartición que hizo el hombre que calculaba.

5. Expresa de forma decimal la cantidad de camellos que le correspondió a cada uno.

6. ¿Qué porcentaje de la herencia le correspondía a cada hermano?

7. Al sumar los porcentajes respectivos, ¿qué puedes concluir de la repartición estipulada por el padre y la propuesta por Beremís?

8. ¿Qué representaciones de los números surgieron en la solución de este problema?

Apéndice C. Tercera actividad de la secuencia: significado en contexto de la razón**Actividad 1:** Lee atentamente el siguiente texto.

Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el joven e inquieto Rey de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le preguntó si podía medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops que se levantaba ante ellos.



Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas y los objetos proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al mediodía, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse. Ante la pregunta del Rey, Tales reflexionó unos instantes y le contestó que no solo la calcularía, sino que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento. Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en horizontal, y se puso a esperar. Como todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba con mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena, Tales le dijo al Rey: “Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide”.

De acuerdo a la lectura responde:

- a) ¿En qué se basó Tales de Mileto para medir la altura de la pirámide?
- b) Si comparamos la medida de la sombra del bastón con respecto a la longitud del bastón en ese preciso instante ¿qué podemos afirmar?
- c) Entonces, si en ese mismo instante construimos un cociente que resulte de calcular el número de veces que cabe la longitud de la sombra en la longitud del bastón, ¿qué valor tiene en ese momento dicho cociente? ¿Cómo se podría representar dicho cociente?

Actividad 2: Realizar en grupos de tres estudiantes la siguiente experiencia.

Tomar la vara de 90cm de longitud y mantenerla en posición vertical (formando un ángulo de 90° respecto al suelo), mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra.

- a) Registrar los datos en la hoja de trabajo (registrar la hora exacta de la toma de la medida).
- b) Comparar la longitud de la sombra de la vara respecto a la longitud de la vara en ese preciso instante ¿Qué pueden afirmar de esa comparación?
- c) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la vara en la longitud de la vara, ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la vara?

Actividad 3: Realizar el procedimiento anterior con la otra vara que les dio la profesora.

- a)
- b)
- c)

Actividad 4: Escojan un compañero del grupo, midan su estatura, y luego midan la proyección de la sombra de su estatura. (Registrar las medidas y la hora en la hoja de trabajo)

- a) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la sombra de la altura del compañero en la longitud de su altura, ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de longitud de la altura?
- b) Representar y calcular el cociente de las veces que cabe la longitud de la altura del compañero en la longitud de su sombra ¿Cuántos metros de longitud de la altura corresponden por cada metro de longitud de la sombra?
- c) ¿Qué porcentaje de la longitud de la sombra corresponde a la longitud de la estatura?
- d) ¿Qué porcentaje de la longitud de la estatura corresponde a la longitud de la sombra?
- e) ¿Qué pueden concluir al comparar los dos porcentajes?