Una introducción a los espacios normados difusos

Autor:
Andrés Felipe Morantes Arciniegas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

Una introducción a los espacios normados difusos

Autor:
Andrés Felipe Morantes Arciniegas

Trabajo de grado para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas

Director:
Michael Alexánder Rincón Villamizar
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2024

Dedicatoria

«Nanos gigantum humeris insidentes.»

Dedico este fruto, resultado de un largo proceso, en primer lugar a Dios. Al sol y la aurora que iluminaron mi infancia, a mis abuelos, Hugo Arciniegas y María Acuña. A la *Luz* que me dio la vida, mi querida madre. Y, con mucho amor, a Nanita y David.

Agradecimientos

" Cuando te encuentres de camino a Ítaca, desea que sea largo el camino, lleno de aventuras, lleno de conocimientos. A los lestrigones y a los cíclopes, al enojado Poseidón no temas, tales en tu camino nunca encontrarás, si mantienes tu pensamiento elevado, y selecta emoción tu espíritu y tu cuerpo tienta."

A mi madre y mi abuela materna, por su apoyo incondicional durante este proceso. A cada uno de los profesores de la I.E. La Juventud quienes con mucha pasión y amor me dieron las bases para emprender este camino, especialmente a la profesora Diana Moreno, los profesores Óscar Buitrago y Dairo Padilla y a la Sra. Adriana Coy. A mis amigos y colegas Edwin, Yani, Michael, Yesika, Julieth y Jeffrey por el acompañamiento durante esta etapa de mi vida y porque de ellos aprendí lo valioso y genuino de la amistad. A los profes Luis Ángel Pérez, Jorge Fiallo, Rafael Ortíz, Tulia Rivera, Jairo Balaguera, Sandra Evely y Michael Rincón por el aporte académico, profesional y humano hecho durante mi formación como Licenciado en Matemáticas. A los profesores Elder Villamizar y Juan Carlos López por la evaluación, comentarios y orientaciones constructivas útiles en la terminación del presente documento. También al profesor Andrés Ríos y a Martha Uribe por sus consejos y palabras de aliento.

Tabla de Contenido

Índice de figuras

pág.

Resumen

TÍTULO: Una Introducción a los Espacios Normados Difusos *

AUTOR: Andrés Felipe Morantes Arciniegas **

PALABRAS CLAVE: Número real difuso, α-nivel, t-norma, t-conorma, Espacio Normado Difuso, Espacio Métrico Difuso, F-Norma, $B-S$-Norma, $B-S$-Antinorma, α-seminorma, Normas Difusas Equivalentes, Teorema de Hahn-Banach en el contexto difuso.

DESCRIPCIÓN: En 1965, Lotfi Zadeh introdujo el concepto de conjunto difuso, una función que asigna a cada elemento de un conjunto X un valor en el intervalo $[0, 1]$, extendiendo así varias áreas de las matemáticas al contexto difuso. Entre estas extensiones, la teoría de espacios métricos y espacios normados ha cobrado especial relevancia.
Este trabajo se enfoca en el estudio de las estructuras de espacios normados difusos, particularmente los F-espacios normados difusos introducidos por Felbin [7] y los B-S-espacios normados difusos propuestos por Bag y Samanta [2]. Analizamos bajo qué condiciones ciertos resultados del análisis funcional clásico pueden ser extendidos al contexto difuso. Además, exploramos las conexiones entre los espacios normados difusos y los espacios métricos difusos, motivados por los trabajos de Kaleva y Seikkala [10], y Michalek y Kramosil mencionados en [5].
El principal aporte de este trabajo consiste en establecer una relación entre la equivalencia de normas clásicas y la equivalencia de normas difusas a través de las α-seminormas asociadas. También complementamos este análisis con resultados sobre la equivalencia de normas difusas en espacios de dimensión finita y la extensión del Teorema de Hahn-Banach al contexto difuso, basándonos en los aportes de Saheli [19].

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar, Doctor en Matemáticas.

Abstract

TITLE: An Introduction to Fuzzy Normed Spaces *

AUTHOR: Andrés Felipe Morantes Arciniegas **

KEYWORDS: Fuzzy real number, α-level, t-norm, t-conorm, Fuzzy Normed Space, Fuzzy Metric Space, F-Norm, $B - S$-Norm, $B - S$-Antinorm, α-seminorm, Equivalent Fuzzy Norms, Hahn-Banach Theorem in the fuzzy context.

ABSTRACT: In 1965, Lotfi Zadeh introduced the concept of fuzzy set, a function that assigns each element of a set X a value in the interval $[0, 1]$, thereby extending various areas of mathematics to the fuzzy context. Among these extensions, the theory of metric and normed spaces has gained particular relevance.
This work focuses on the study of fuzzy normed space structures, particularly the F-fuzzy normed spaces introduced by Felbin [7] and the B-S-fuzzy normed spaces proposed by Bag and Samanta [2]. We analyze under what conditions certain results of classical functional analysis can be extended to the fuzzy context. Additionally, we explore the connections between fuzzy normed spaces and fuzzy metric spaces, motivated by the works of Kaleva and Seikkala [10], and Michalek and Kramosil, as mentioned in [5].
The main contribution of this work is to establish a relationship between the equivalence of classical norms and the equivalence of fuzzy norms through their associated α-seminorms. We also complement this analysis with results on the equivalence of fuzzy norms in finite-dimensional spaces and the extension of the Hahn-Banach Theorem to the fuzzy context, based on Saheli's contributions [19].

---

* Undergraduate thesis.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Michael Alexander Rincón Villamizar, PhD in Mathematics.

Introducción

En 1965, Lotfi Zadeh, matemático e ingeniero eléctrico, introdujo el concepto de conjunto difuso [12]. Un conjunto difuso en un conjunto X se define como una función que asigna a cada elemento de X un valor en el intervalo $[0, 1]$. A partir de esta noción, diversas áreas de las matemáticas, como la teoría de conjuntos, los espacios métricos, los espacios topológicos y las ecuaciones diferenciales, han sido extendidas al contexto difuso.

Este trabajo se centra en el estudio de ciertos aspectos de la teoría de espacios métricos y espacios normados dentro del marco difuso. Entre las contribuciones más relevantes, destacamos el trabajo de Felbin [7], quien introdujo el concepto de espacio normado difuso (F-Espacio Normado) y demostró que todo espacio normado difuso de dimensión finita es completo. También subrayamos el aporte de Bag y Samantha [4], quienes propusieron el concepto de norma difusa (B-S norma). Además, M. Saheli [19] amplió el Teorema de Hahn-Banach al contexto difuso.

El objetivo de este trabajo es explorar diversos aspectos de la teoría de espacios normados difusos, analizando las conexiones con la teoría de espacios métricos difusos desarrollada por Osmo Kaleva y Seikkala [10], así como por Michalek y Kramosil [5, 20, 9, 8, 17]. Presentaremos ejemplos de espacios normados y métricos difusos y discutiremos si toda norma difusa induce una métrica difusa y viceversa. También demostraremos la validez de ciertos resultados clásicos del análisis funcional en el contexto difuso.

Desarrollaremos el trabajo en tres capítulos. En el primer capítulo, se presentan los elementos y conceptos básicos necesarios para la comprensión, estudio y análisis de los espacios normados y métricos difusos.

El segundo capítulo introduce el concepto de espacio normado difuso desde la perspectiva de Felbin [7], así como de Bag y Samanta [2, 3, 4]. A partir de estas definiciones, realizamos un estudio comparativo entre ambos enfoques, analizando sus relaciones y presentando ejemplos de F-normas y B-S normas. También se introduce el concepto de métrica difusa según Kaleva y Seikkala y los autores Michalek y Kramosil, y se examina la relación entre las estructuras de B-S norma y M-K métrica. Finalmente, se comentan algunas aplicaciones de métricas difusas en el análisis y reconstrucción de imágenes [8, 9].

Finalmente, el tercer capítulo se dedica a la extensión del Teorema de Hahn-Banach en el contexto difuso, tal como lo presenta M. Saheli en [19].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos la terminología necesaria para comprender el concepto de espacio normado difuso. Todas las definiciones y resultados que se exponen han sido tomados de [10, 11, 18, 21]. En particular, nuestro interés en este capítulo es introducir el concepto de número real difuso, así como los conceptos de t-norma y t-conorma.

1.1. Conjuntos difusos

A lo largo de este documento I denotará el intervalo $[0,1]$.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto difuso en X es una función de X a I. La colección de conjuntos difusos en X se denota por I^X.

Ejemplo 1.2. Aproximación a un número real: Sea $X = \mathbb{R}$ la recta real y $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$, definamos

$$\mu_x : X \longrightarrow [0,1] : y \to 1 - \text{mín}\{1, \frac{1}{\epsilon}|x-y|\}$$

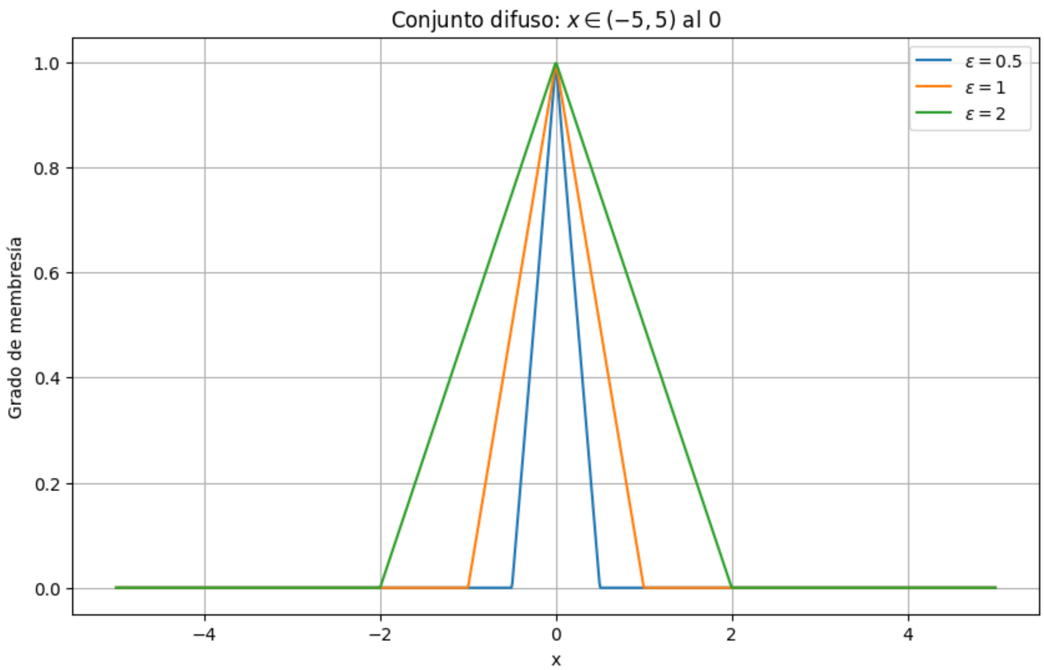

Figura 1.1. Cercanía de un número $x \in (-5,5)$ al 0; $\mu_0(x) = 1 - \text{mín}\{1, \frac{1}{\epsilon}|x|\}$

El ejemplo anterior es un conjunto difuso sobre la recta real que describe la cercanía entre dos números reales x y y, con x dado. En la gráfica podemos observar un caso particular donde $x = 0$ y tomamos algunos valores de ϵ, concretamente $\epsilon = \frac{1}{2}, 1, 2$.
Notemos que si $\text{mín}\left\{1, \frac{|y|}{\epsilon}\right\} = 1$, entonces $1 \leq \frac{|y|}{\epsilon}$. De ahí que $\epsilon \leq |y|$, lo cual implica que la distancia de $y \in (-5,5)$ a 0 es mayor que ϵ. De cierto modo, puede pensarse que este número y está lejos de 0. De igual modo, si $\text{mín}\left\{1, \frac{|y|}{\epsilon}\right\} = \frac{|y|}{\epsilon}$, entonces $\frac{|y|}{\epsilon} \leq 1$. De ahí que $|y| \leq \epsilon$, entonces y estará muy cerca de 0 a medida que $\epsilon \to 0$.

Definición 1.3. Sean $\mu \in I^X$ un conjunto difuso y $\alpha \in (0,1]$. Definamos el *α-nivel* de μ como el conjunto dado por

$$[\mu]_\alpha = \{x \in X : \mu(x) \geq \alpha\}.$$

Si X es un espacio topológico, el soporte de μ se define por:

$$[\mu]_0 = \overline{\{x \in X \,|\, \mu(x) > 0\}}.$$

1.1.1. Números reales difusos y el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Definición 1.4. Un *número real difuso* x es un conjunto difuso sobre $\mathbb{R}$, es decir, una función $x : \mathbb{R} \to I$.

Definición 1.5. Diremos que un número difuso η es:

1. *no negativo* si $\eta(t) = 0$ para cada $t < 0$.

2. *convexo* si satisface que $\eta(t) \geq \min\{\eta(s), \eta(r)\}$ para cada $s \leq t \leq r$.

3. *semicontinuo superiormente* si η es una función semicontinua superiormente en $\mathbb{R}$, esto es, para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|s - t| < \delta$, entonces $\eta(s) < \eta(t) + \epsilon$.

4. *normal* si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(t_0) = 1$.

Denotaremos $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el conjunto de todos números difusos normales, convexos y semicontinuos superiormente. Además, $\mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ denotará el conjunto de todos los elementos no negativos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Observación 1.6. La aplicación $r \in \mathbb{R} \mapsto \overline{r} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, donde

$$\begin{aligned} \overline{r} \colon \mathbb{R} &\to [0,1] \\ t &\mapsto \overline{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r; \\ 0, & t \neq r, \end{cases} \end{aligned}$$

define un encaje.

Observación 1.7. Es inmediato ver que si x un número real difuso, y si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, entonces $[x]_\beta \subset [x]_\alpha \subset [x]_0$.

Observación 1.8. No es difícil verificar que un número real difuso x es convexo si, y solo si, para cada $\alpha \in (0,1]$, el α-nivel $[x]_\alpha$ es convexo. Además, en [21] demuestran que las condiciones de semicontinuidad superior de un número difuso garantizan que el α-nivel $[x]_\alpha$ es un conjunto cerrado. Si x es convexo, entonces el α-nivel es particularmente un intervalo cerrado de la forma $[x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ para cada $\alpha \in (0,1]$, donde los valores $x_\alpha^- = -\infty$ y $x_\alpha^+ = \infty$ son admisibles.

Definición 1.9. Sean $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Diremos que $x \preceq y$ si, y sólo si, $x(t) \leq y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ será útil cuando estudiemos los espacios normados y espacios métricos en el contexto difuso. A continuación introducimos las operaciones cláscias en $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definición 1.10. Las operaciones de $+,-,\cdot$ y / sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R})\times\mathcal{F}(\mathbb{R})$ están dadas por

$$\begin{aligned}(x+y)(t) &= \sup_{s\in\mathbb{R}} \min\{x(s), y(t-s)\}, \quad t\in\mathbb{R},\\ (x-y)(t) &= \sup_{s\in\mathbb{R}} \min\{x(s), y(s-t)\}, \quad t\in\mathbb{R},\\ (x\cdot y)(t) &= \sup_{s\in\mathbb{R}, s\neq 0} \min\{x(s), y\left(\frac{t}{s}\right)\}, \quad t\in\mathbb{R},\\ (x/y)(t) &= \sup_{s\in\mathbb{R}} \min\{x(ts), y(s)\}, \quad t\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

respectivamente.

Las identidades aditiva y multiplicativa en $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ son los conjuntos difusos $\overline{0}$ y $\overline{1}$, respectivamente, definidos como en la Observación 1.6.
Si $y\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, definimos ahora $-y := \overline{0}+(-y)$. Note que $(-y)(t)=y(-t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.
También, si $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, entonces $|x|\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es definido por

$$|x|(t)=\begin{cases}\max\{x(t),x(-t)\}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Definición 1.11. Sean $\eta\in\mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ y $k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces $k\eta$ se define como $(k\eta)(t)=\eta(t/k)$ para cada $t\in\mathbb{R}$. Por definición, $0\eta=\overline{0}$.

Lema 1.12. *Sean $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x,y\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ con $[x]_\alpha=[x_\alpha^-,x_\alpha^+]$ y $[y]_\alpha=[y_\alpha^-,y_\alpha^+]$ para cada $\alpha\in[0,1]$. Entonces*

1. $[x+y]_\alpha=[x_\alpha^-+y_\alpha^-, x_\alpha^++y_\alpha^+]$;
2. $[x\cdot y]_\alpha=[x_\alpha^-y_\alpha^-, x_\alpha^+y_\alpha^+]$;
3. $[x-y]_\alpha=[x_\alpha^--y_\alpha^+, y_\alpha^--x_\alpha^+]$;
4. $\left[\overline{1}/x\right]_\alpha=[1/x_\alpha^+, 1/x_\alpha^-]$;
5. $[|x|]_\alpha=[\max\{0,x_\alpha^-,-x_\alpha\},\max\{|x_\alpha^-|,|x_\alpha^+|\}]$;
6. $[\lambda x]_\alpha=\lambda[x]_\alpha$,

para todo $\alpha\in[0,1]$.

El siguiente lema proporciona un método para construir un conjunto difuso a partir de sus α-niveles. Este resultado es un caso particular del Teorema de Negoita-Ralescu [6, 16, 21].

Lema 1.13. *Sea K_c^n el espacio de todos los subconjuntos no vacíos, convexos y compactos de $\mathbb{R}^n$. Sea $\{N_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que:*

1. *Para cada $\alpha \in I$, $N_\alpha \in K_c^n$;*

2. *Si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, entonces $N_\beta \subseteq N_\alpha$;*

3. *Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$, entonces $N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$.*

Entonces, el conjunto difuso $u : \mathbb{R}^n \to I$ dado por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \notin N_0; \\ \sup\{\alpha \in I : x \in N_\alpha\}, & si\ x \in N_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

satisface que $[u]_\alpha = N_\alpha$ para cada $\alpha \in (0,1]$ y

$$[u]_0 = \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} N_\alpha} \subseteq N_0.$$

1.2. t-Normas y t-Conormas

En esta sección, profundizaremos en los conceptos de t-norma y t-conorma, los cuales son fundamentales en la definición de espacios normados difusos. En secciones anteriores, hemos analizado cómo se pueden extender las operaciones algebraicas clásicas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Siguiendo esta misma línea de ideas, introducimos las t-normas y t-conormas como una generalización de las operaciones clásicas de intersección y unión.
Dado un conjunto no vacío X, es posible trasladar las operaciones de intersección, unión y complementación sobre el conjunto de potencias $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ al contexto difuso, es decir, sobre $(I^X, \preceq)$. Para ilustrar esto, consideremos la intersección de dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(X)$, que en el marco clásico se define como

$$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\},$$

donde χ_A y χ_B representan las funciones características de A y B, respectivamente. De manera análoga, la unión de A y B se puede expresar como

$$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}.$$

Estas expresiones proporcionan una base para generalizar las operaciones de intersección y unión al contexto difuso mediante t-normas y t-conormas.

Definición 1.14 (t-norma)**.** Una función $T\colon I \times I \longrightarrow I$ es una t-norma si satisface las siguientes condiciones:

1. T es creciente, es decir, si $x, y, x', y' \in I$, $x \leq x'$, y $y \leq y'$, entonces $T(x, y) \leq T(x', y')$.

2. T es conmutativa, es decir, si $x, y \in I$, entonces $T(x, y) = T(y, x)$.

3. T es asociativa, es decir, si $x, y, z \in I$, entonces $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$.

4. T posee módulo 1, es decir, si $x \in I$, entonces $T(x, 1) = T(1, x) = x$.

En adición, si T es continua, se dice que T es una t-norma continua.

Observación 1.15. Si $T\colon I \times I \longrightarrow I$ es una t-norma, entonces $T(x, y) \leq \text{mín}\{x, y\}$ para cada $x, y \in I$.

A continuación veremos algunos ejemplos de t-normas.

Ejemplo 1.16 (t-norma mínima)**.** La función mín $:= T\colon I \times I \to I$ dada por $T(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$, $(x, y) \in I \times I$, es una t-norma. Veamos que T es en efecto una t-norma:

1. Creciente: Sean $x, y, z, w \in I$. Supongamos que $x \leq z, y \leq w$, veamos que $T(x, y) \leq T(z, w)$. Por definición tenemos que $\text{mín}\{x, y\} \leq x$ y $\text{mín}\{x, y\} \leq y$. También sabemos que $\text{mín}\{z, w\} \leq z$ y $\text{mín}\{z, w\} \leq w$. De ahí que obtenemos

$$\text{mín}\{x, y\} \leq x \leq z, \quad \text{y} \quad \text{mín}\{x, y\} \leq y \leq w.$$

   Así,

$$\text{mín}\{x, y\} \leq z, \quad \text{y} \quad \text{mín}\{x, y\} \leq w.$$

   Por lo tanto,

$$\text{mín}\{x, y\} \leq \text{mín}\{z, w\}, \quad \text{esto es,} \quad T(x, y) \leq T(z, w).$$

   Por tanto T es creciente.

2. Conmutativa: Se deduce directamente de la definición de T.

3. Asociativa: Las Condiciones 1 y 2 implican que T es asociativa.

4. Módulo 1: En efecto, dado $x \in I$ tenemos que $T(x, 1) = \text{mín}\{x, 1\} = \text{mín}\{1, x\} = x$.

Ejemplo 1.17 (Producto acotado)**.** La función $T_\infty : I \times I \to I$, dada por $T_\infty(x, y) = \text{máx}\{x + y - 1, 0\}$, $x, y \in I$, es una t-norma.

Ejemplo 1.18 (Producto Algebraico)**.** La función $P : I \times I \to I$ dada por

$$P(x, y) = xy, \quad x, y \in I,$$

es una t-norma.

Definición 1.19 (t-conorma)**.** Una función $S\colon I \times I \to I$ es una t-conorma si satisface las siguientes condiciones:

1. S es creciente, es decir, si $x, y, x', y' \in I$, $x \leq x'$, y $y \leq y'$, entonces $S(x, y) \leq S(x', y')$.

2. S es conmutativa, es decir, si $x, y \in I$, entonces $S(x, y) = S(y, x)$.

3. S es asociativa, es decir, si $x, y, z \in I$, entonces $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$.

4. S posee módulo 0, es decir,si $x \in I$, entonces $S(x, 0) = S(0, x) = x$.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de t-conormas.

Ejemplo 1.20 (t-conorma máxima)**.** La función $\Delta : I \times I \to I$ dada por $\Delta(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$, si $(x, y) \in I \times I$, es un t-conorma. Probemos que Δ es una t-conorma.

1. Δ es creciente. En efecto, sean $x, y, z, w \in I$ de tal modo que $x \leq z$ y $y \leq w$, veamos que $\Delta(x, y) \leq \Delta(z, w)$. Por definición tenemos que $\text{máx}\{x, y\} \geq x$ y $\text{máx}\{x, y\} \geq y$. También sabemos que $\text{máx}\{z, w\} \geq z$ y $\text{máx}\{z, w\} \geq w$. De ahí que obtenemos

   $$x \leq z \leq \text{máx}\{z, w\}, \quad \text{y} \quad y \leq w \leq \text{máx}\{z, w\}.$$

   Luego,

   $$\text{máx}\{z, w\} \geq x, \quad \text{y} \quad \text{máx}\{z, w\} \leq y.$$

   En consecuencia,

   $$\text{máx}\{x, y\} \leq \text{máx}\{z, w\}, \quad \text{es decir,} \Delta(x, y) \leq \Delta(z, w).$$

   Por lo tanto, la función Δ es creciente.

2. Δ es conmutativa: Esta se tiene por definición de $\text{máx}\{x, y\}$.

3. Δ es asociativa: Las condiciones 1 y 2 implican que Δ es asociativa.

4. Módulo 0: También se tiene por definición ya que $\text{máx}\{x, 0\} = \text{máx}\{0, x\} = x$ si $x \neq 0$.

Capítulo 2

Espacios normados difusos y espacios métricos difusos

En el ámbito difuso, es común encontrar múltiples definiciones para un mismo objeto o estructura matemática. En este capítulo, exploraremos distintas definiciones, propiedades y ejemplos asociados a los espacios normados difusos y espacios métricos difusos. Tomaremos como referencia los aportes de Felbin [7], Saheli [19], Kaleva y Seikkala [10], Cho, Rassias y Saadati [5], Bag y Samantha [2, 3, 4] y Sorin Nădăban, Ioan Dzitac en [14, 13].

2.1. Espacios normados difusos

Clementina Felbin en su trabajo [7] introduce una definición de espacio normado difuso usando el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Posteriormente, Tarapada Bag y Samanta en [2] presentan otra definición de espacio normado difuso usando t-normas continuas. En esta sección, exploraremos ambas definiciones y daremos ejemplos. Finalmente, mostraremos que ambos enfoques son equivalentes de acuerdo con [4].

2.1.1. Espacios normados difusos en el sentido de Felbin

Recordemos que una norma (en el sentido clásico) en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in X$ tenemos que $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$ si, y solo si, $x = \mathbf{0}$ (vector cero).

3. Para cualesquiera $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|cx\| = |c|\|x\|$.

4. Para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A continuación introducimos una noción de norma en el sentido difuso. Esta idea fue propuesta por Felbin [7].

Definición 2.1. Diremos que $\mu : I \times I \to I$ es

1. Simétrica si para cada $x, y \in I$, $\mu(x, y) = \mu(y, x)$;
2. Creciente si $x \leq w$ y $y \leq z$, entonces $\mu(x, y) \leq \mu(w, z)$ con $x, y, w, z \in I$.

Definición 2.2. Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\| \cdot \| \colon X \to \mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ una función y $L, R : I \times I \to I$ funciones simétricas y crecientes tales que $L(0, 0) = 0$ y $R(1, 1) = 1$. Escribamos $[\|x\|]_\alpha = [\|x\|_\alpha^-, \|x\|_\alpha^+]$ para cada $x \in X$ y cada $\alpha \in (0, 1]$. Supongamos que existe $\alpha_0 \in (0, 1]$ tal que:

A. Para cualesquiera $\alpha \leq \alpha_0$ y $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, tenemos que $\|x\|_\alpha^+ < \infty$;

B. Para todo $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, se cumple que $\inf\{\|x\|_\alpha^- : \alpha \leq \alpha_0\} > 0$.

La cuádrupla $(X, \| \cdot \|, L, R)$ es un espacio normado difuso en el sentido de Felbin (o brevemente F-espacio normado difuso) y $\| \cdot \|$ es una F-norma difusa si

1. $\|x\| = \overline{0}$ si, y solo si, $x = \mathbf{0}$.
2. Para cada $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ se cumple que $\|rx\| = |r|\|x\|$.
3. Para cada $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$, las condiciones $s \leq \|x\|_1^-$, $t \leq \|y\|_1^-$ y $s + t \leq \|x + y\|_1^-$ implican que $\|x + y\|(s + t) \geq L(\|x\|(s), \|y\|(t))$.
4. Para cada $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$, las condiciones $s \geq \|x\|_1^-$, $t \geq \|y\|_1^-$ y $s + t \geq \|x + y\|_1^-$ implican que $\|x + y\|(s + t) \leq R(\|x\|(s), \|y\|(t))$.

Observación 2.3. Las Condiciones A. y B. en la Definición 2.2 son el análogo en el contexto difuso a las condiciones de $\|x\| \neq \infty$ y $\|x\| \neq 0$ para cada $x \neq \mathbf{0}$ del contexto clásico de la definición de norma. Note además que:

1. Si la Condición A vale, entonces $\|x\|_\alpha^+ < \infty$ para cualesquiera $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\alpha > \alpha_0$.
2. La Condición A no vale si, y solo si, existen $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $a > 0$ tales que $\|x\|(t) = 1$ para todo $t \geq a$.
3. La Condición B implica que $\|x\|_\alpha^- > 0$ para todo $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ y cada $\alpha > \alpha_0$. Esto implica que para cada $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe $b > 0$ tal que $\|x\|(t) \neq \overline{0}$ si $t \in [0, b]$.

Veamos la prueba a cada una de estas condiciones.

1. Por la Observación 1.7, se tiene que, la familia $\{\|\cdot\|_\alpha^+ : \alpha \in [0,1]\}$ es decreciente respecto a α. Así, dado $\beta \in (0,1]$ y $\alpha_0 < \beta$, se cumple que $\|x\|_\beta^+ \leq \|x\|_{\alpha_0}^+$ para cada $x \in X$. Por hipótesis, sabemos que si $\alpha \leq \alpha_0$, entonces $\|x\|_\alpha^+ < \infty$. Por transitividad, tenemos que $\|x\|_\beta^+ < \infty$ para cualquier $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\beta \in (0,1]$ tal que $\beta > \alpha_0$.

2. Supongamos que la condición A de la Definición 2.2 no se cumple, es decir, existe $\tilde{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\|\tilde{x}\|_\alpha^+ = \infty$ para cada $\alpha \in (0,1]$. En particular, tomando $\alpha = 1$, se tiene $\|\tilde{x}\|_1^+ = \infty$. Debido a que $\|\cdot\| \in \mathcal{F}^+(\mathbb{R})$, el conjunto $T = \{t \in \mathbb{R} : \|\tilde{x}\|(t) = 1\}$ es no vacío y es un subconjunto de $[0,\infty)$. Como $\|\tilde{x}\|_1^+ = \infty$, entonces existe $a > 0$ tal que $\|\tilde{x}\|(t) = 1$ para cada $t > a$. Recíprocamente, supongamos que existen $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $a > 0$ tales que $\|x\|(t) = 1$ para todo $t \in (a,\infty)$. Por la Observación 1.7, se tiene que $[\|x\|]_1 \subset [\|x\|]_\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$. Por lo tanto, $t \in [\|x\|]_\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$ y $t \in (a,\infty)$. Así $\|x\|_\alpha^+ = \infty$ para cada $\alpha \in (0,1]$.

3. Es claro que $\|x\|_\alpha^- > 0$ para cada $\alpha > \alpha_0$. Ahora veamos que para cada $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ vale que $\|x\|(t) \neq \overline{0}$. Supongamos que no, esto es, existe $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que para todo $b > 0$ vale que $\|x\|(t) = 0$ si $t \in [0,b]$. Entonces

$$\|x\|(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0; \\ 0, & \text{si } t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

   De (2.1) tenemos que para todo $\alpha \in (0,1]$ vale que $\inf\{\|x\|_\alpha^- : \alpha \in (0,1]\} = 0$, lo cual es una contradicción.

En lo que sigue, L y R serán las funciones mín y máx respectivamente. En este caso, el espacio normado $(X, \|\cdot\|, L, R)$ se denotará como $(X, \|\cdot\|)$.

Observación 2.4. La desigualdad triangular en la Definición 2.2(4) con $R = \text{máx}$ es equivalente a la siguiente afirmación:

$$\|x+y\|_\alpha^+ \leq \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+ \quad \text{para cada } x, y \in X \text{ y cada } \alpha \in (0,1]. \tag{2.2}$$

Supongamos que vale (2.2). Sean $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $s \geq \|x\|_1^-$, $t \geq \|y\|_1^-$ y $\alpha = \|x+y\|(s+t)$. Veamos que $\|x+y\|(s+t) \leq \text{máx}\{\|x\|(s), \|y\|(t)\}$. Sabemos que $\|x+y\|_\alpha^+ \leq \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+$. Puesto que $\alpha = \|x+y\|(s+t)$, tenemos que $s+t \in [\|x+y\|]_\alpha$. Por lo tanto,

$$s+t \leq \|x+y\|_\alpha^+ \leq \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+.$$

De lo anterior se sigue que $s \leq \|x\|_\alpha^+$ o $t \leq \|y\|_\alpha^+$. Por hipótesis tenemos que $s \geq \|x\|_\alpha^-$ y $t \geq \|y\|_\alpha^-$, entonces $\|x\|(s) \geq \alpha$ o $\|y\|(t) \geq \alpha$, es decir, $\text{máx}\{\|x\|(s), \|y\|(t)\} \geq \alpha = \|x+y\|(s+t)$. Recíprocamente, supongamos que la Definición 2.2(4) vale para $R = \text{máx}$ y para cada $\alpha \in (0,1]$. Probemos que $\|x+y\|_\alpha^+ \leq \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+$. Si tuviésemos $\|x+y\|_\alpha^+ > \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+$ para algún $\alpha \in (0,1]$, entonces $\|x+y\|_\alpha^+ - \|x\|_\alpha^+ > \|y\|_\alpha^+$. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|x+y\|_\alpha^+ - \|x\|_\alpha^+ > t > \|y\|_\alpha^+.$$

Si $s = \|x+y\|_\alpha^+ - t$, entonces $s+t = \|x+y\|_\alpha^+$, $s > \|x\|_\alpha^+$ y $t > \|y\|_\alpha^+$. Más aún, por propiedades de los α-niveles sabemos que $s > \|x\|_\alpha^+ \geq \|x\|_1^-$, $t > \|y\|_\alpha^+ \geq \|y\|_1^-$ y $s+t = \|x+y\|_\alpha^+ \geq \|x+y\|_1^-$. De la Definición 2.2(4) se sigue que $\|x+y\|(s+t) \leq \text{máx}\{\|x\|(s), \|y\|(t)\}$. Observe que $\alpha \leq \|x+y\|(s+t)$. Así, $\alpha \leq \|x\|(s)$ o $\alpha \leq \|y\|(t)$. Esto es una contradicción ya que $s \notin [\|x\|]_\alpha$ y $t \notin [\|y\|]_\alpha$. Por tanto, $\|x+y\|_\alpha^+ \leq \|x\|_\alpha^+ + \|y\|_\alpha^+$ para todo $\alpha \in (0,1]$.

Observación 2.5. La desigualdad triangular en la Definición 2.2(3) con $L = \text{mín}$ es equivalente a la afirmación

$$\|x+y\|_\alpha^- \leq \|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^- \quad \text{para cada } x, y \in X \text{ y para cada } \alpha \in (0,1]. \tag{2.3}$$

Supongamos que vale (2.3). Sean $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$ de tal modo que $s \leq \|x\|_1^-$, $t \leq \|y\|_\alpha^-$ y $s+t \leq \|x+y\|_1^-$. Veamos que la Definición 2.2(3) vale con $L = \text{mín}$. En efecto, sean $\alpha = \|x\|(s)$ y $\beta = \|y\|(t)$. De la definición de α-nivel tenemos que $\|x\|_\alpha^- \leq s$ y $\|y\|_\beta^- \leq t$. Si $\gamma = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\gamma^- &\leq \|x\|_\gamma^- + \|y\|_\gamma^- \\
&\leq \|x\|_\alpha^- + \|y\|_\beta^- \\
&\leq s+t \\
&\leq \|x+y\|_1^- \\
&\leq \|x+y\|_1^+ \\
&\leq \|x+y\|_\gamma^+,
\end{aligned}$$

ya que $\|\cdot\|_\alpha^-$ es creciente con respecto a la variable α. Por lo tanto, $\|x+y\|(s+t) \geq \gamma = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$.

Recíprocamente, supongamos que la Definición 2.2(3) es válida para $L = \text{mín}$. Debemos probar (2.3). Sean $\alpha \in (0,1]$ y $x, y \in X$, y escribamos $s = \|x\|_\alpha^-$ y $t = \|y\|_\alpha^-$. Por las propiedades de $\|\cdot\|_\alpha^-$, se tiene que $s \leq \|x\|_1^-$ y $t \leq \|y\|_1^-$. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $s+t \geq \|x+y\|_1^-$, entonces $\|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^- \geq \|x+y\|_1^-$. Como $\|\cdot\|_\alpha^-$ es creciente respecto a la variable α, se sigue que $\|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^- \geq \|x+y\|_\alpha^-$.

2. Si $s+t \leq \|x+y\|_1^-$, entonces por la Definición 2.2(3) con $L = \text{mín}$, tenemos que $\|x+y\|(s+t) \geq \text{mín}\{\|x\|(s), \|y\|(t)\} \geq \alpha$. Por tanto, $\|x+y\|_\alpha^- \leq s+t$, es decir, $\|x+y\|_\alpha^- \leq \|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^-$.

Observación 2.6. Afirmamos que si consideramos $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$ en la Definición 2.2, entonces $\|\cdot\|_\alpha^-$ y $\|\cdot\|_\alpha^+$ son normas en el sentido clásico para cada $\alpha \in (0,1]$.

Si $r \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
[\|rx\|]_\alpha &= \{t \in X : \ \|rx\|(t) \geq \alpha\} \\
&= \{t \in X : \ (|r|\|x\|)(t) \geq \alpha\} \\
&= \{t \in X : \ \|x\|(t/|r|) \geq \alpha\},
\end{aligned}$$

por la Definición 1.11. Ahora, si $t/|r| = k$ y $r \neq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[\|rx\|]_\alpha &= \{k|r| : \|x\|(k) \geq \alpha\} \\
&= [|r|\|x\|_\alpha^-, |r|\|x\|_\alpha^+] \\
&= [|r|\|x\|]_\alpha.
\end{aligned}$$

Con esto verificamos que $\|rx\|_\alpha = |r|\|x\|_\alpha$ para cada $x \in X$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ahora, si $r = 0$ por la Definición 1.11 y el Lema 1.12 tenemos que $\|0x\|_\alpha = 0\|x\|_\alpha$. Por lo tanto $\|\cdot\|_\alpha^-$ y $\|\cdot\|_\alpha^+$ son normas en el sentido clásico para cada $\alpha \in (0,1]$ si $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$.

2.1.2. Espacios normados difusos en el sentido de Bag y Samantha

A continuación presentamos la noción de norma difusa en el sentido de Bag y Samantha [4].

Definición 2.7. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $*$ una t-norma continua. Diremos que un conjunto difuso N sobre $X \times \mathbb{R}$ es una B-S-norma difusa (o B-S-norma) si cumple las siguientes propiedades:

1. $N(x,t) = 0$ para cada $t \leq 0$.

2. $x = \mathbf{0}$ si, y solo si, $N(x,t) = 1$ para cada $t > 0$.

3. Si $c \neq 0$ y $x \in X$, entonces $N(cx,t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

4. Si $x, u \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $N(x+u, s+t) \geq N(x,s) * N(u,t)$.

5. Para cada $x \in X$, $N(x, \cdot)$ es una función creciente y $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ (aquí $N(x, \cdot)$ se refiere a dejar fija la primera componente).

La tripla $(X, N, *)$ es llamada *espacio normado difuso* en el sentido de Bag y Samantha, o simplemente B-S-espacio normado difuso.

Observación 2.8. En algunos resultados será conveniente suponer que el conjunto difuso N posee además las siguientes propiedades:

6. Si $N(x,t) > 0$ para cada $t > 0$, entonces $x = \mathbf{0}$.

7. Para $x \neq \mathbf{0}$, $N(x, \cdot)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente en el conjunto $\{t \in \mathbb{R} :\ 0 < N(x,t) < 1\}$.

En lo que sigue el par (X, N) representa un B-S-espacio normado difuso en donde la t-norma es dada por $* = \text{mín}$.

El siguiente teorema puede ser pensado como una descomposición de una norma difusa en términos de normas o seminormas clásicas. Este resultado es tomado de [4, 5, 19].

Teorema 2.9. *Sea (X, N) un espacio normado difuso. Para cada $\alpha \in (0,1)$, definamos*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\alpha \colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_\alpha = \text{ínf}\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Entonces $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha :\ \alpha \in (0,1)\}$ es una familia de seminormas en X. Más aún, se verifican las siguientes propiedades:

1. *Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, entonces $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta$, esto es, la familia de seminormas $\mathcal{S}$ es ascendente.*

2. *Si la Condición (6) de la Observación 2.8 vale, entonces $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha :\ \alpha \in (0,1)\}$ es una familia de normas en X.*

3. *Para todo $x \in X$, $s > 0$ y $\alpha \in (0,1)$ se cumple que*

$$\|x\|_\alpha \leq s \quad \textit{si, y solo si,} \quad N(x,s) \geq \alpha.$$

Demostración. Veamos que en efecto cada elemento en $\mathcal{S}$ es una seminorma. Sea $\alpha \in (0,1)$ dado.

1. Por definición de $\|\cdot\|_\alpha$, tenemos que $\|x\|_\alpha \geq 0$ para cada $x \in X$.

2. Veamos que si $x = \mathbf{0}$, entonces $\|x\|_\alpha = 0$. En efecto, por la Definición 2.7(2) vale que $N(x,t) = 1 \geq \alpha$ para cada $t > 0$. Por lo tanto $\|x\|_\alpha = 0$.

3. Sean $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$. Veamos que $\|cx\|_\alpha = |c|\|x\|_\alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|cx\|_\alpha &= \operatorname{ínf}\{t > 0 : N(cx,t) \geq \alpha\}\\ &= \operatorname{ínf}\{t > 0 : N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \geq \alpha\}\\ &= \operatorname{ínf}\{|c|t' > 0 : N(x,t') \geq \alpha\}\\ &= |c| \operatorname{ínf}\{t' > 0 : N(x,t') \geq \alpha\}\\ &= |c|\|x\|_\alpha.\end{aligned}$$

4. Probemos que si $x, y \in X$, entonces $\|x+y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ dados. Por definición de ínfimo, existen $r > 0$ y $s > 0$ tales que $N(x,r) \geq \alpha$, $N(y,s) \geq \alpha$, $r < \|x\|_\alpha + \varepsilon$ y $s < \|y\|_\alpha + \varepsilon$. Ahora por la Definición 2.7(4), tenemos que

$$N(x+y, s+t) \geq \operatorname{mín}\{N(x,r), N(y,s)\} \geq \alpha.$$

   En consecuencia, $\|x+y\|_\alpha \leq r + s < \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha + 2\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, concluimos que $\|x+y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$.

Por tanto $\mathcal{S}$ es una familia de seminormas.

A continuación probamos los incisos extra del teorema:

1. si $x \in X$ y $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, entonces

$$\{t > 0 : \ N(x,t) \geq \beta\} \subset \{t > 0 : \ N(x,t) \geq \alpha\}.$$

   Así, $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta$.

2. Sea $\alpha \in (0,1)$ fijo. Supongamos que $\|x\|_\alpha = 0$ y sea $t > 0$ dado. Por definición de ínfimo, tenemos que $\|x\|_\alpha \leq t$. De modo que existe $0 < s < t$ tal que $N(x,s) \geq \alpha$. Así, $N(x,t) > 0$ para cada $t > 0$. Por la Observación 2.8(6) concluimos que $x = \mathbf{0}$.

3. Sean $\alpha \in (0,1)$ y $s > 0$. Supongamos que $\|x\|_\alpha \leq s$. Por definición de ínfimo existe $\lambda > 0$ tal que $\|x\|_\alpha \leq \lambda < s$ y $N(x,\lambda) \geq \alpha$. Como $N(x,\cdot)$ es creciente, $N(x,s) \geq N(x,\lambda) \geq \alpha$. Por otro lado, si $N(x,s) \geq \alpha$, es claro que $\|x\|_\alpha \leq s$.

$\square$

Observación 2.10. Por la condición 2 de la Definición 2.7 sabemos que si $x = \mathbf{0}$ no hay problema alguno en extender $\alpha \in (0, 1]$. Sin embargo, si $x \neq \mathbf{0}$ no siempre es válida dicha extensión, salvo el caso de que N sea normal.

El siguiente resultado puede pensarse como un recíproco del teorema anterior. Éste también nos da una manera de construir B-S-normas a partir de una familia de normas.

Teorema 2.11. *Sea $\mathcal{L} = \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ una familia ascendente de normas sobre un espacio vectorial X. Definamos $N : X \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ por*

$$N(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \ \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x,t) \neq (\mathbf{0}, 0); \\ 0, & (x,t) = (\mathbf{0}, 0). \end{cases}$$

Entonces N es una B-S-norma difusa sobre X.

Demostración. Veamos que en efecto N satisface las condiciones de la Definición 2.7.

1. Sean $x \in X$ y $t \leq 0$. Veamos que $N(x,t) = 0$. Si $x = \mathbf{0}$ y $t = 0$, el resultado es claro. Ahora si $t < 0$, el conjunto $\{\alpha \in (0,1) \colon \|x\|_\alpha \leq t\}$ es vacío, lo cual implica que todo $\alpha \in (0,1)$ es cota superior. En consecuencia, $N(x,t) = 0$.

2. Supongamos que $N(x,t) = 1$ para todo $t > 0$ y veamos que $x = \mathbf{0}$. Fijemos $t > 0$. Por definición, $N(x,t) = \sup\{\alpha \in (0,1) \colon \|x\|_\alpha \leq t\} = 1$. Dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\alpha_\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\varepsilon < \alpha_\varepsilon$ y $\|x\|_{\alpha_\varepsilon} \leq t$. Como la familia $\mathcal{L}$ es ascendente, concluimos que $\|x\|_\varepsilon \leq t$. La arbitrariedad de $t > 0$ implica que $\|x\|_\varepsilon = 0$. Por tanto, $x = \mathbf{0}$.

   Recíprocamente, supongamos que $x = \mathbf{0}$ y sea $t > 0$ dado. Entonces

   $$N(\mathbf{0}, t) = \sup\{\alpha \in (0,1) \colon \|\mathbf{0}\|_\alpha \leq t\} = 1.$$

   Esto prueba que $N(\mathbf{0}, t) = 1$ para todo $t > 0$.

3. Sean $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \neq 0$ y $x \in X$ dado. Veamos que $N(cx, t) = N(x, t/|c|)$. En efecto,

   $$\begin{aligned} N(cx,t) &= \sup\{\alpha \in (0,1) \colon \|cx\|_\alpha \leq t\} \\ &= \sup\{\alpha \in (0,1) \colon |c|\|x\|_\alpha \leq t\} \\ &= \sup\{\alpha \in (0,1) \colon \|x\|_\alpha \leq t/|c|\} \\ &= N(x, t/|c|). \end{aligned}$$

4. Sean $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Veamos que $\min\{N(x,s), N(y,t)\} \leq N(x+y, s+t)$. Si $s \leq 0$ o $t \leq 0$, el resultado ya está. Supongamos que $s, t > 0$ y que

$$\min\{N(x,s), N(y,t)\} = N(x,s) > 0.$$

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < N(x,s) \leq N(y,t)$. Por definición de N existen $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $r < \alpha$, $r < \beta$, $\|x\|_\alpha \leq s$ y $\|y\|_\beta \leq t$. Si $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\|_\gamma &\leq \|x\|_\alpha \leq s, \quad \text{y} \\ \|y\|_\gamma &\leq \|y\|_\beta \leq t. \end{aligned}$$

Así,

$$\|x+y\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma + \|y\|_\gamma \leq s+t.$$

Luego, $N(x+y, s+t) \geq \gamma > r$. Haciendo $r \to N(x,s)$, por izquierda encontramos que

$$N(x+y, s+t) \geq N(x,s) = \min\{N(x,s), N(y,t)\}.$$

5. Sea $x \in X$ dado. Veamos que $N(x, \cdot)$ es una función creciente y $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$. En efecto, sean $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq t$. Si $s \leq 0$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $0 < s$. Observe que si $\alpha \in (0,1)$ y $\|x\|_\alpha \leq s$, entonces $\|x\|_\alpha \leq t$. Por lo tanto,

$$\{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq s\} \subset \{\beta \in (0,1) : \|x\|_\beta \leq t\}.$$

De la definición de N obtenemos que $N(x,s) \leq N(x,t)$.

Ahora bien, para probar que $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$, podemos suponer que $x \neq \mathbf{0}$. Dado $\epsilon \in (0,1)$, sea $s > 0$ tal que $\|x\|_{1-\epsilon} \leq s$. Si $1 > t > s$, entonces

$$1 \geq N(x,t) \geq N(x,s) \geq 1-\epsilon.$$

Por tanto, $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$.

De todo lo anterior concluimos que N es una B-S-norma difusa. $\square$

El siguiente resultado muestra que si el conjunto índices en la familia $\mathcal{L}$ se cambia por $(0,1]$, obtenemos una norma difusa *B-S* tal que para cada $x \in X$, el número real difuso $N(x,\cdot)$ es normal. Este resultado es establecido por Bag y Samanta en [4].

Teorema 2.12. *Sea $\mathcal{L}' = \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ una familia ascendente de normas sobre un espacio vectorial X. Definamos $N' : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ por*

$$N'(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1] : \ \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x,t) \neq (\mathbf{0},0); \\ 0, & (x,t) = (\mathbf{0},0). \end{cases}$$

Entonces

- *N' es una B-S-norma difusa sobre X.*
- *Para cada $x \in X$ existe $t_x > 0$ de tal modo que $N'(x,s) = 1$ para todo $s \geq t_x$.*

Demostración. La prueba de que N' es una B-S-norma es la misma de la demostración del Teorema 2.11. Ahora veamos que para cada $x \in X$ existe $t_x > 0$ tal que $N'(x,s) = 1$ para cada $s \geq t_x$. Sea $t_x > 0$ tal que $\|x\|_1 < t_x$. Si $s \geq t_x$, entonces $1 \geq N'(x,s) \geq N'(x,t_x) = 1$. Esto prueba la afirmación. $\square$

Corolario 2.13. *Sean (X, N_1) un espacio normado difuso. Supongamos que N_1 satisface la Condición (6) de la Observación 2.8, y que para cada $x \in X$ existe $t_x > 0$ tal que $N_1(x,s) = 1$ para cada $s \geq t_x$. Para cada $\alpha \in (0,1]$, sea $\|\cdot\|_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|x\|_\alpha = \text{ínf}\{t > 0 : N_1(x,t) \geq \alpha\}.$$

Si $N : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ es definida como

$$N(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1] : \ \|x\|_\alpha \leq t\}, & (x,t) \neq (\mathbf{0},0); \\ 0, & (x,t) = (\mathbf{0},0), \end{cases} \tag{2.5}$$

entonces $N_1 = N$.

Demostración. Por el Teorema 2.9 y la Observación 2.10, tenemos que $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia ascendente de normas. Del teorema anterior se sigue que N es una B-S-norma. Veamos que $N = N_1$. Sean $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ fijos y $\alpha \in (0,1]$ arbitrario. Notemos que si $t = 0$, entonces $N_1(x,t) = 0$ por la condición 1 de la Definición 2.7 y $N(x,t) = 0$ por (2.5). Si $t > 0$, por el Teorema 2.9 concluimos que

$$N(x,t) = \sup\{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha \leq t\} = \sup\{\alpha \in (0,1] : N_1(x,t) \geq \alpha\} \leq N_1(x,t). \tag{2.6}$$

De la anterior relación supongamos que $N(x,t) < N_1(x,t)$. Entonces existe $\alpha \in (0,1]$ tal que $N(x,t) < \alpha_0 < N_1(x,t)$. Entonces si $N_1(x,t) > \alpha_0$, entonces $\|x\|_{\alpha_0} \leq t$. De ahí que $N(x,t) \geq \alpha_0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N_1 = N$.

$\square$

2.1.3. Relaciones entre F y B-S espacios normados difusos

En las secciones anteriores explicamos y analizamos los conceptos de F-espacio normado difuso y B-S-espacio normado difuso. Dos preguntas que surgen son: ¿cómo estos dos conceptos se relacionan? ¿Son estos conceptos equivalentes? En esta sección responderemos estas preguntas siguiendo el enfoque de [4].

A continuación introducimos una noción dual de espacio normado difuso en el sentido de Bag y Samantha.

Definición 2.14. Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que $N^* : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ es una antinorma en el sentido de Bag y Samantha (o B-S-antinorma) si satisface las siguientes condiciones:

1. Si $x \in X$ y $t \leq 0$, entonces $N^*(x,t) = 1$.
2. $x = \mathbf{0}$ si, y solo si, $N^*(x,t) = 0$ para cada $t > 0$.
3. Si $x \in X$, $t > 0$ y $c \neq 0$, entonces $N^*(cx,t) = N^*(x, t/|c|)$.
4. Si $x, u \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $N^*(x+u, s+t) \leq \text{máx}\{N^*(x,s), N^*(u,t)\}$.
5. Para cada $x \in X$, $N^*(x,\cdot)$ es una función decreciente y $\text{lím}_{t\to\infty} N^*(x,t) = 0$.

El par (X, N^*) es llamado B-S-espacio antinormado difuso.

Observación 2.15. Como en la Observación 2.8, en algunos resultados conviene suponer que N^* cumple la siguiente propiedad extra:

6. Si para todo $t > 0$ vale que $N^*(x,t) < 1$, entonces $x = \mathbf{0}$.

Proposición 2.16. *N^* es B-S-antinorma si, y solo si, $1 - N^*$ es una B-S-norma.*

Demostración. Supongamos que N^* es una B-S-antinorma. Probemos que $N : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por $N(x,t) = 1 - N^*(x,t)$ si $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ es una B-S-norma, es decir, satisface las condiciones de la Definición 2.7.

1. Sea $t \leq 0$ y $x \in X$ dados. Como N^* es antinorma, por la Definición 2.14(1) tenemos que $N(x,t) = 1 - N^*(x,t) = 0$.

2. Note que $N(\mathbf{0}, t) = 0$ para todo $t > 0$. Ahora, supongamos que $N(x, t) = 1$ para todo $t > 0$ y veamos que $x = \mathbf{0}$. Observe que $N^*(x, t) = 0$ para todo $t > 0$. Por la Definición 2.14(2) concluimos que $x = \mathbf{0}$.

3. Es inmediato por la Definición 2.14(3).

4. Sean $x, y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Veamos que

$$\text{mín}\{N(x, s), N(y, s)\} \leq N(x + y, s + t).$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $N(x, s) \leq N(y, t)$. Observe que esta última desigualdad es equivalente a $N^*(x, s) \geq N^*(y, t)$. Por la Definición 2.14(4) tenemos que $N^*(x + y, s + t) \leq N^*(x, s)$. En consecuencia, $1 - N^*(x + y, s + t) \geq 1 - N^*(x, s)$. Por lo tanto $\text{mín}\{N(x, s), N(y, t)\} \leq N(x + y, s + t)$.

5. Sea $x \in X$ dado. Por la Definición 2.14(5), si $s \leq t$, entonces $N^*(x, s) \geq N^*(x, t)$. Luego $1 - N^*(x, s) \leq 1 - N^*(x, t)$. Por tanto N es una función creciente. Además es claro que $\text{lím}_{t\to\infty} N(x, t) = 1$ pues $\text{lím}_{t\to\infty} N^*(x, t) = 0$. Por lo tanto, N es una B-S-norma difusa. El recíproco se prueba de igual forma.

□

Observación 2.17. Supongamos que N^* satisface la condición 6 de la Definición 2.14, es decir, dados $x \in X$ y $t > 0$, si $N^*(x, t) < 1$, entonces $x = \mathbf{0}$. Esto último equivale a que $1 - N^*(x, t) > 0$ para cada $t > 0$. Por tanto, N^* cumple la condición 6 de Observación 2.15 si, y solo si, $1 - N^*$ cumple el condición 6 de Observación 2.8.

El próximo teorema es la versión del Teorema 2.9 para antinormas.

Teorema 2.18. *Sea (X, N^*) un espacio antinormado difuso. Dado $\alpha \in (0, 1)$, sea $\|\cdot\|_\alpha^* \colon X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|x\|_\alpha^* = \text{ínf}\{t > 0 : N^*(x, t) < \alpha\}.$$

Entonces $\mathcal{J} = \{\|\cdot\|_\alpha^* : \alpha \in (0, 1)\}$ es una familia de seminormas sobre X. Más aún, valen las siguientes propiedades:

1. *Si $0 < \alpha \leq \beta < 1$, entonces $\|\cdot\|_\beta^* \leq \|\cdot\|_\alpha^*$, es decir, la familia $\mathcal{J}$ es descendente.*

2. *Si N^* verifica la condición (6) de la Observación 2.15, entonces $\mathcal{J}$ es una familia de normas sobre X.*

Demostración. La demostración de que $\|\cdot\|_\alpha^*$ es norma es análoga a la prueba del Teorema 2.9. Note que si $x \in X$ es dado y $0 < \alpha \leq \beta < 1$, entonces

$$\{s > 0 : N^*(x,s) < \alpha\} \subset \{t > 0 : N^*(x,t) < \beta\}.$$

Concluimos que $\|x\|_\beta^* \leq \|x\|_\alpha^*$. Así $\mathcal{J}$ es una familia descendente de normas.

Finalmente, supongamos que vale la Condición 6 de la Observación 2.15 y veamos que $\mathcal{J}$ es una familia de normas. Fijemos $\alpha \in (0,1)$. Si $\|x\|_\alpha^* = 0$ y $t > 0$ es dado, existe $s > 0$ tal que $N^*(x,s) < \alpha < 1$. Como la función $N^*(x,\cdot)$ es decreciente, se sigue que $N^*(x,t) < 1$. En consecuencia, $x = \mathbf{0}$. □

A continuación mostramos cómo construir antinormas a partir de una familia de normas. Este resultado es el análogo del Teorema 2.12.

Teorema 2.19. *Sea* $\{\|\cdot\|_\alpha^* : \alpha \in (0,1]\}$ *una familia descendente de normas sobre un espacio vectorial* X*. Definamos* $N' : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ *por*

$$N'(x,t) = \begin{cases} \inf\{\alpha \in (0,1] : \ \|x\|_\alpha^* \leq t\}, & \textit{si } (x,t) \neq (\mathbf{0},0), \\ 1, & \textit{si } (x,t) = (\mathbf{0},0). \end{cases}$$

Entonces N' *es una* B*-*S*-antinorma difusa en* X*. Más aún,* N' *tiene la siguiente propiedad: para cada* $x \in X$ *con* $x \neq \mathbf{0}$*, existe* $t_x > 0$ *tal que* $N'(x,t_x) = 1$*.*

Demostración. Para cada $\beta \in [0,1)$ defina $\|\cdot\|'_\beta := \|\cdot\|^*_{1-\beta}$ y considere la familia $\mathcal{L} = \{\|\cdot\|'_\beta : \ \beta \in [0,1)\}$. Note que $\mathcal{L}$ es una familia ascendente de normas. Por el Teorema 2.11, la función $N\colon X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$N(x,t) = \begin{cases} \sup\{\beta \in [0,1) : \ \|x\|'_\beta \leq t\}, & \text{si } (x,t) \neq (\mathbf{0},0), \\ 0, & \text{si } (x,t) = (\mathbf{0},0), \end{cases}$$

es una B-S-norma. Por la Proposición 2.16, $1 - N$ es una B-S-antinorma. Observe que

$$1 - N(x,t) = \begin{cases} \inf\{1-\beta : \ \beta \in [0,1), \|x\|^*_{1-\beta} \leq t\}, & \text{si } (x,t) \neq (\mathbf{0},0), \\ 1, & \text{si } (x,t) = (\mathbf{0},0) \end{cases} = N'(x,t).$$

Por lo tanto, N' es una B-S-antinorma.

Notemos que si $x \in X$ y $x \neq \mathbf{0}$, entonces $\|x\|_1^* > 0$. Sea $t_x > 0$ tal que $\|x\|_1^* > t_x$. Así, para cada $\alpha \in (0,1]$ tenemos que $\|x\|_\alpha^* > t_x$ pues la familia $\{\|\cdot\|_\alpha^* : \alpha \in (0,1]\}$ es decreciente. En consecuencia, $N'(x,t_x) = 1$. □

El próximo teorema relaciona los conceptos de F-espacio normado difuso y B-S-espacio normado difuso.

Teorema 2.20. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un* F*-espacio normado difuso. Escribamos* $[\|x\|]_\alpha = [\|x\|_\alpha^-, \|x\|_\alpha^+]$ *para cada* $\alpha \in (0,1]$*. Definamos* $N, N^* : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ *por*

$$N(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^- \leq t\}, & (x,t) \neq (\mathbf{0},0); \\ 0, & (x,t) = (\mathbf{0},0). \end{cases}$$

$$N^*(x,t) = \begin{cases} \text{ínf}\{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^+ \leq t\}, & (x,t) \neq (\mathbf{0},0); \\ 1, & (x,t) = (\mathbf{0},0). \end{cases}$$

Entonces N *es una* B*-*S*-norma y* N^* *es una* B*-*S*-antinorma. Además, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. N *satisface la condición* 6 *de la Observación 2.8.*

2. N^* *satisface la condición* 6 *de la Observación 2.15.*

3. *Para cada* $x \neq \mathbf{0}$*, existe* $t_x > 0$ *tal que* $N(x,s) = 1$ *si* $s \geq t_x$*.*

4. *Para cada* $x \neq \mathbf{0}$*, existe* $r_x > 0$ *tal que* $N(x, r_x) = 0$*.*

5. *Si* $N^*(x,t) < 1$*, entonces* $N(x,t^+) := \text{lím}_{s \to t^+} N(x,s) = 1$*.*

Demostración. Notemos que por las Observaciones 2.4 y 2.5, $\|\cdot\|_\alpha^-$ y $\|\cdot\|_\alpha^+$ son normas en el sentido clásico para cada $\alpha \in (0,1]$. Note que $\{\|\cdot\|_\alpha^- : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia ascendente de normas y $\{\|\cdot\|_\alpha^+ : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia descendente de normas. Por los Teoremas 2.12 y 2.19, N es una B-S-norma y N^* es una B-S-antinorma. Veamos se cumplen los incisos del teorema.

1. Supongamos que $N(x,t) > 0$ para cada $t > 0$. Queremos ver que $x = \mathbf{0}$. Supongamos que $x \neq \mathbf{0}$. Por definición de N,

$$\sup\{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^- \leq t\} > 0, \quad \text{para cada } t > 0.$$

Por la condición B de la Definición 2.2 sabemos que existe $\alpha_0 \in (0,1]$ tal que $\text{ínf}\{\|x\|_\alpha^- : \alpha \leq \alpha_0\} > 0$. Luego, dados $\epsilon \in (0,1)$ y $t > 0$ existe α_t de tal modo que $\epsilon < \alpha_t \leq 1$ y $\|x\|_\epsilon^- \leq t$, para cada $t > 0$. Así, $\text{ínf}\{\|x\|_\alpha^- : \alpha \leq \alpha_t\} = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x = \mathbf{0}$.

2. Se verifica de forma análoga al ítem anterior.

3. Esta se obtiene directamente del Teorema 2.12.

4. Sea $x \neq \mathbf{0}$. Veamos que existe un $r_x > 0$ de tal modo que $N(x, r_x) = 0$. En efecto, por la condición B. de la Definición 2.2 existe $\alpha_0 \in (0,1]$ de tal modo que $\inf\{\|x\|_\alpha^- : \alpha \in (0,1]\} > 0$ para cada $\alpha \leq \alpha_0$. De ahí existe $r_x > 0$ tal que $\|x\|_\alpha^- \geq r_x$. Por definición de α-nivel, $N(x, r_x) \leq \alpha$ para cada $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Por lo tanto $N(x, r_x) = 0$.

5. Sean $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ de tal modo que $N^*(x,t) < 1$. Veamos que $N(x, t^+) = 1$. Por definición de N^* sabemos que

$$\inf\{\alpha \in (0,1] : \|x\|_\alpha^+ \leq t\} < 1.$$

Por lo tanto, existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que $0 < \alpha_0 < 1$ y $\|x\|_{\alpha_0}^+ \leq t$. En consecuencia, $\|x\|_1^+ \leq t$. Por propiedades de α-niveles,

$$\|x\|_\alpha^- \leq \|x\|_1^- \leq \|x\|_1^+ \leq t, \quad \text{para cada } \alpha \in (0,1].$$

Por lo tanto $N(x,t) = 1$. Dado que $N(x,\cdot)$ es creciente (ver la condición 5 de la Definición 2.7) concluimos que $N(x, t^+) = 1$.

$\square$

En la siguiente proposición mostramos que los conceptos de B-S-norma y F-norma son equivalentes.

Proposición 2.21. *Sean X un espacio vectorial, N una B-S-norma difusa y N^* una B-S-antinorma difusa. Supongamos que N y N^* verifican las Condiciones 1-5 del teorema 2.20. Entonces existe una F-norma sobre X.*

Demostración. Dados $x \in X$ y $\alpha \in (0,1]$, definamos

$$\begin{aligned} \|x\|'_\alpha &= \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}, \quad \text{y} \\ \|x\|''_\alpha &= \inf\{t > 0 : N^*(x,t) < \alpha\}. \end{aligned}$$

Por los Teoremas 2.9 y 2.18, sabemos que $\{\|\cdot\|'_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia ascendente de normas en X y $\{\|\cdot\|''_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia descendente de normas en X.
Veamos que $\|x\|'_\alpha \leq \|x\|''_\alpha$ para cada $x \in X$ y cada $\alpha \in (0,1]$. Fijemos $x \in X$ y $\alpha \in (0,1]$. Por definición de $\|\cdot\|''_1$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \|x\|''_1$ y $N^*(x,t_n) < 1$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ es fijo, por la Condición 5 de la Proposición 2.20 tenemos que $N(x, t_n+) = 1$. En consecuencia, $N(x, t_n + 1/n) = 1$ pues N es creciente y $t_n \leq t_n + 1/n$. Por ende, $\|x\|_1^{'} \leq t_n + \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\|x\|_1^{'} \leq \|x\|_1^{''}$. De la definición de $\|\cdot\|_\alpha^{'}$ y $\|\cdot\|_\alpha^{''}$ concluimos que

$$\|x\|_\alpha^{'} \leq \|x\|_1^{'} \leq \|x\|_1^{''} \leq \|x\|_\alpha^{''} \quad \text{para cada } \alpha \in (0,1].$$

Por lo tanto, vemos que la familia $\{[\|x\|_\alpha^{'}, \|x\|_\alpha^{''}] : \alpha \in (0,1]\}$ es una familia de intervalos encajados. Ahora bien, sean $\alpha \in (0,1]$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $(0,1]$ tal que $\alpha_n \to \alpha$. Veamos que $\|x\|_{\alpha_n}^{'} \to \|x\|_\alpha^{'}$ y que $\|x\|_{\alpha_n}^{''} \to \|x\|_\alpha^{''}$ para cada $x \in X$. Fijemos $x \in X$. Sabemos que $\|x\|_{\alpha_n}^{'} \leq \|x\|_\alpha^{'}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $(\|x\|_{\alpha_n}^{'})$ es una sucesión creciente y acotada. Por lo tanto $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{'}$ existe. Veamos que $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{'} = \|x\|_\alpha^{'}$. Supongamos que $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{'} < \|x\|_\alpha^{'}$. De ahí que existe $s \in \mathbb{R}$ con

$$\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{'} < s < \|x\|_\alpha^{'}.$$

Luego, $\|x\|_{\alpha_n}^{'} < s$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por definición de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n < s$ tal que $N(x, t_n) \geq \alpha_n$. Así, $N(x, s) \geq \alpha_n$. Tomando $n \to \infty$ encontramos que $N(x, s) \geq \alpha$, es decir, $\|x\|_\alpha^{'} \leq s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{'} = \|x\|_\alpha^{'}$. De forma similar, podemos verificar que $\text{lím}_{n\to\infty} \|x\|_{\alpha_n}^{''} = \|x\|_\alpha^{''}$. Notemos que si $N_\alpha = [\|x\|_\alpha^{'}, \|x\|_\alpha^{''}]$ para cada $\alpha \in (0,1]$ y $N_0 = \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} N_\alpha}$, el Lema 1.13 nos dice que N_α es el α-nivel de un número difuso para cada $\alpha \in [0,1]$. Denotemos por $\|\cdot\|^*$ el número difuso definido el Lema 1.13. Veamos que $\|\cdot\|^*$ define una F-norma difusa con $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$. En efecto, por la condición 4 del Teorema 2.20 tenemos que dado $x \in X$ tal que $x \neq \mathbf{0}$, existe $t_x > 0$ tal que $N(x, t_x) = 0 < \alpha$ para cada $\alpha \in (0,1]$. Por la condición 3 del Teorema 2.9 tenemos que $\|x\|_\alpha^{'} \geq t_x > 0$. De ahí que $\text{ínf}\{\|x\|_\alpha^{'} : \alpha \in (0,1]\} > 0$. Por tanto la condición B. de la Definición 2.2 es válida. Por otra parte, como $\|\cdot\|_\alpha^{''}$ es una norma clásica, $\|x\|_\alpha^{''} < \infty$, con lo cual se cumple la condición A. de la Definición 2.2. Finalmente, sabemos que $\|\cdot\|_\alpha^{'}$ y $\|\cdot\|_\alpha^{''}$ son normas clásicas. Así las condiciones $1-2$ de la Definición 2.2 son válidas. Por la Observaciones 2.4 y 2.5 tenemos que las condiciones $3-4$ en la Definición 2.2 también se cumplen. Por tanto, $\|\cdot\|^*$ define una F-norma con $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$. $\square$

2.1.4. Ejemplos de normas difusas

Ejemplo 2.22. Sea $X = \mathbb{R}^n$. Definamos $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^+(\mathbb{R}) \\ (x_1, \cdots, x_n) &\mapsto \|(x_1, \cdots, x_n)\|(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un F-espacio. En efecto, veamos que $(X, \|\cdot\|)$ satisface las condiciones de la Definición 2.2.

1. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\|x\| = \overline{0}$. Si tuviésemos que $x \neq \mathbf{0}$, para $t = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} > 0$ tendríamos que $\|x\|(t) = 1$, pero esto es imposible. Por tanto, $x = \mathbf{0}$.

   Recíprocamente, supongamos que $x = \mathbf{0}$, entonces

   $$\|x\|(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0; \\ 0, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

   Así, $\|x\| = \overline{0}$.

2. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, y probemos que $\|rx\| = |r|\|x\|$. Si $r = 0$, ya está por inciso anterior. Si $r \neq 0$, dado $t \in \mathbb{R}$ tenemos

   $$\|rx\|(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = \sqrt{(rx_1)^2 + \cdots + (rx_n)^2}; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } \dfrac{t}{|r|} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Por otra parte,

   $$|r|\|x\|(t) = \|x\|(t/|r|) = \begin{cases} 1, & \text{si } \dfrac{t}{|r|} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Por lo tanto, $\|rx\|(t) = |r|\|x\|(t)$. En consecuencia, $\|rx\| = |r|\|x\|$.

3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $s, t \in \mathbb{R}$ dados, y supongamos que $\|x\|_1^- \geq s$, $\|y\|_1^- \geq t$ y $\|x + y\|_1^- \geq s + t$. Veamos que para cada $\alpha \in (0, 1]$ vale que $\|x + y\|_\alpha^- \leq \|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^-$. Notemos que

con las condiciones dadas vale afirmar que

$$\|x+y\|_\alpha^- = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2}$$

$$\|x\|_\alpha^- = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|y\|_\alpha^- = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Esto es, directamente las norma euclídea de los vectores $x+y$, x e y. Por tanto, tenemos que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Es decir $\|x+y\|_\alpha^- \leq \|x\|_\alpha^- + \|y\|_\alpha^-$. Por la Observación 2.5 concluimos que el ítem 3 con $L = \text{mín}$ es válida.

4. El ítem 4 se verifica de forma análoga al ítem anterior.

Por lo tanto $(X, \|\cdot\|)$ es un F-espacio normado.

Ejemplo 2.23. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definamos

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\|x\|}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Verificaremos que $(X, N, *)$ es un B-S-espacio normado difuso con la t-norma mínima $*$ (vea Ejemplo 1.16).

1. Si $t \leq 0$, entonces $N(x,t) = 0$ por la definición de N.

2. Veamos que $N(x,t) = 1$ para todo $t > 0$ si, y solo si, $x = \mathbf{0}$. Supongamos que $N(x,t) = 1$ para todo $t > 0$. Dado $t > 0$, por definición de N tenemos que

$$1 = \frac{t}{t+\|x\|}.$$

Así, $\|x\| = 0$, y con esto $x = \mathbf{0}$. El recíproco es claro de la definición de N.

3. Veamos que $N(cx,t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ si $c \neq 0$, $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$. La igualdad se da si $t \leq 0$ por la definición de N. Supongamos que $t > 0$. Note que

$$N(cx,t) = \frac{t}{t + \|cx\|} = \frac{t}{t + |c|\|x\|} = \frac{\frac{t}{|c|}}{\frac{t}{|c|} + \|x\|} = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right).$$

4. Veamos que $N(x+u, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(u,t)\}$ si $x, u \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$. En efecto, si $s \leq 0$ o $t \leq 0$, no hay nada que mostrar. Supongamos que $s > 0$, $t > 0$ y que

$$\min\{N(x,s), N(u,t)\} = N(x,s). \tag{2.7}$$

De la Ecuación (2.7) tenemos que $s(t + \|u\|) \leq t(s + \|x\|)$. Luego, $s\|u\| \leq t\|x\|$. Así, $s\|u\| + s\|x\| \leq t\|x\| + s\|x\|$. De esto último obtenemos $s(\|u\| + \|x\|) \leq (s+t)\|x\|$. Se sigue que $s\|x+u\| \leq (s+t)\|x\|$. Adicionando $s(s+t)$ en la anterior desigualdad encontramos que

$$s\left[(s+t) + \|x+u\|\right] \leq (s+t)\left[s + \|x\|\right],$$

o equivalentemente

$$\frac{s}{s + \|x\|} \leq \frac{s+t}{s+t+\|x+u\|}.$$

5. Fijemos $x \in X$ y probemos que $N(x, \cdot)$ es creciente. Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 \leq t_2$. Tenemos que $t_1 + \|x\| \leq t_2 + \|x\|$. Luego

$$\frac{\|x\|}{t_2 + \|x\|} \leq \frac{\|x\|}{t_1 + \|x\|}.$$

Multiplicando por -1 y sumando 1 en la última desigualdad obtenemos el resultado. Finalmente, es claro de la definición de N que $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$.

Note que N no verifica la Condición 6 de la Observación 2.8 puesto que $N(x,t) > 0$ para cualesquiera $x \in X$ y $t > 0$. Sin embargo, N sí cumple la Condición 7 de la Observación 2.8. En efecto, dado $x \in X$, la función $N(x, \cdot)$ es continua y, por lo que probamos anteriormente, es estrictamente creciente en el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : 0 < N(x,t) < 1\} = \mathbb{R}^+$.

Si $X = \mathbb{R}$ y lo dotamos con la norma usual, obtenemos la siguiente gráfica para valores $-10 \leq x, t \leq 10$.

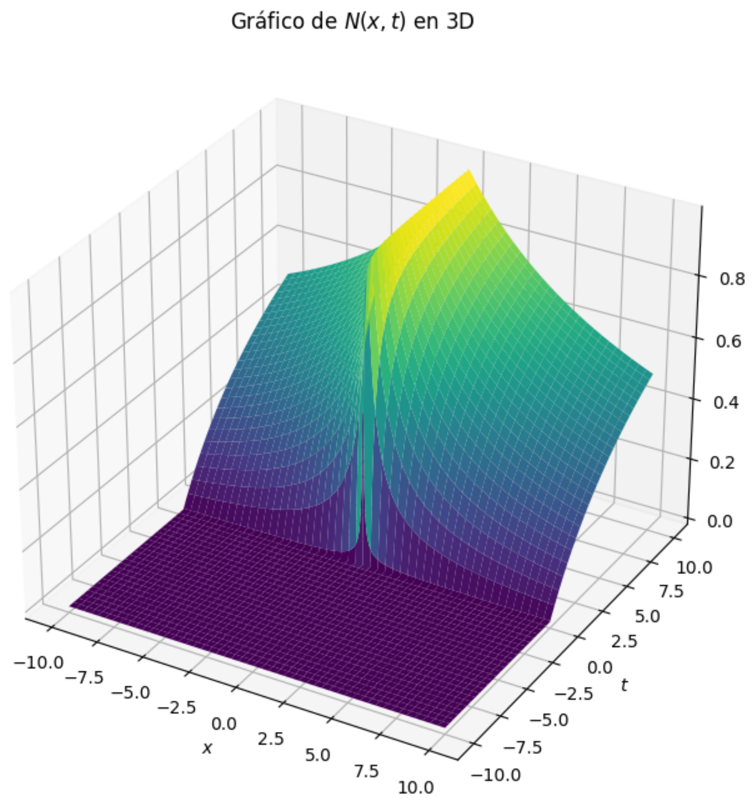

Figura 2.1. Caso particular del Ejemplo 2.23

Observación 2.24. Note que la seminorma del Teorema 2.9 asociada a N es dada por

$$\begin{aligned}\|x\|_\alpha &= \text{ínf}\{t>0:\ N(x,t)\geq\alpha\}\\ &= \text{ínf}\{t>0:\frac{t}{t+\|x\|}\geq\alpha\}\\ &= \frac{\|x\|}{\frac{1}{\alpha}-1},\end{aligned}$$

para cada $x\in X$ y $\alpha\in(0,1)$.

Tomando $X=\mathbb{R}$ con la norma usual $|\cdot|$, $\alpha=1/2$ y $x=\sqrt{2}$ tenemos que $\|\sqrt{2}\|_{1/2}=\sqrt{2}$.

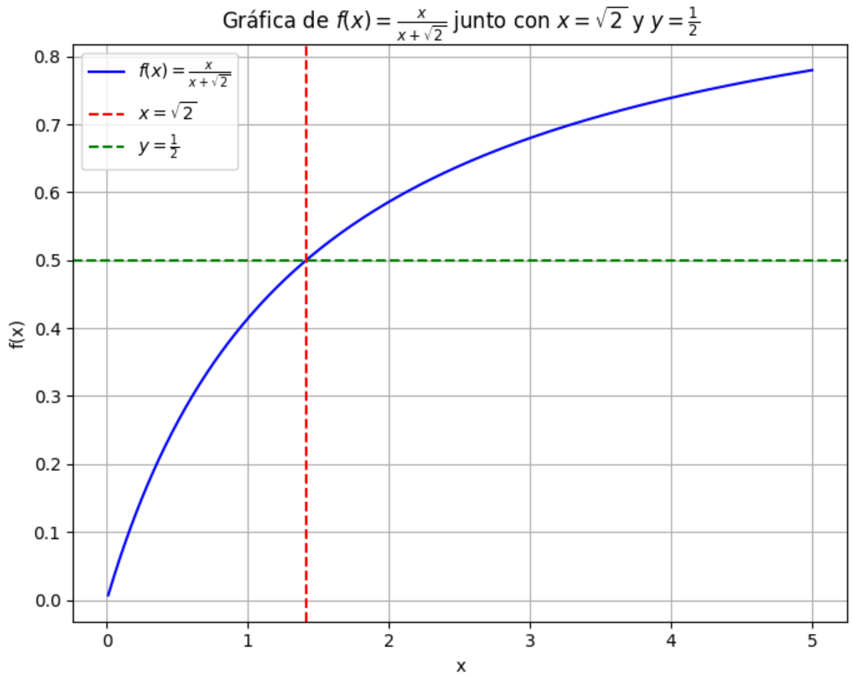

Figura 2.2. Caso particular de la Observación 2.24

Ejemplo 2.25. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita y $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base para X. Definamos $N_0\colon X \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ por

$$N_0(x,t) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq t; \\ 0, & t < \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \end{cases} \quad \text{si } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Entonces (X, N_0) es un espacio normado difuso.

Demostración. Es fácil ver que N_0 satisface las Propiedades 1-3 de la Definición 2.7. También se puede verificar que N_0 no satisface las propiedades 6-7. Veamos en cuestión que efectivamente N_0 satisface las propiedades 4-5 de la Definición 2.7.

4. Sean $x, u \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Veamos que

$$N_0(x+u, s+t) \geq \text{mín}\{N_0(x,s), N_0(u,t)\}. \tag{2.8}$$

Supongamos que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $u = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i$, donde $\lambda_i, \rho_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ y que

$$\text{mín}\{N_0(x,s), N_0(u,t)\} = N_0(x,s),$$

es decir,

$$N_0(x,s) \leq N_0(u,t).$$

Notemos que si $s < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, la Desigualdad (2.8) se cumple ya que $N_0(x, s) = 0$. Si $s \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ implica que $t \geq \sum_{i=1}^{n} |\rho_i|$, por definición de N_0. De ahí que

$$s + t \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + \sum_{i=1}^{n} |\rho_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + |\rho_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \rho_i|$$

Así, $N_0(x+u, s+t) = 1 \geq \text{mín}\{N_0(x, s), N_0(u, t)\}$. Por tanto, N_0 satisface la condición 4 de la Definición 2.7.

5. a. Sea $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in X$ fijo y $s, t \in \mathbb{R}$ con $s \leq t$. Probemos que $N_0(x, s) \leq N_0(x, t)$. Si $t < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, tenemos que $s < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, y en tal caso $N_0(x, s) = N_0(x, t) = 0$. Si $t \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, entonces $N_0(x, t) = 1 \geq N_0(x, s)$. Así concluimos lo deseado.

   b. Observe que $N(x, \cdot)$ es una función creciente para todo $x \in X$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, entonces $N(x, t) = 1$ para todo $t > \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$. Así, $\text{lím}_{t \to \infty} N_0(x, t) = 1$. □

Observación 2.26. Observamos que la seminorma definida en el Teorema 2.9 asociada a la norma difusa del Ejemplo 2.25 es dada por

$$\|x\|_\alpha^0 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|, \quad \text{para todo } x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X \text{ y } \alpha \in (0, 1].$$

En efecto, recordemos que si $\alpha \in (0, 1]$, entonces

$$\|x\|_\alpha^0 = \text{ínf}\{t > 0 : N_0(x, t) \geq \alpha\}.$$

Sean $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in X$ y $\alpha \in (0, 1]$ dados. Si $x = \mathbf{0}$, de acuerdo con la condición 2 de la Definición 2.7, $N(x, t) = 1$ para todo $t > 0$. Por lo tanto, $\|x\|_\alpha^0 = 0$. Si $x \neq \mathbf{0}$ y $0 < t < \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$, entonces $N_0(x, t) = 0$. Por otro lado, si $t \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_j|$, entonces $N_0(x, t) = 1 \geq \alpha$. Así

$$\|x\|_\alpha^0 = \text{ínf}\{t > 0 : N_0(x, t) \geq \alpha\} = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

2.1.5. Normas difusas equivalentes

Al igual que en el contexto clásico, cuando se trabaja bajo la estructura de (X, N) es de interés saber cuando dos normas difusas N_1 y N_2 poseen en cierto sentido la misma estructura. Bajo esta motivación se introduce el concepto de equivalencia entre normas difusas. Este fue propuesto por Saheli en [19]. Como trabajo nuestro, mostraremos una caracterización de este concepto via el Teorema 2.9. También veremos que en espacios de dimensión finita, toda norma difusa es equivalente a la norma dada en el Ejemplo 2.25.

Definición 2.27. Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y N_1 y N_2 B-S-normas difusas definidas en X. Diremos que N_1 y N_2 son equivalentes si existen familias $\{M_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ y $\{m_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ en $(0,\infty)$ tales que para todo $x\in X$, $t\in\mathbb{R}$ y $\alpha\in(0,1)$, se cumple que

$$\text{si } N_1(x,t)\geq\alpha, \text{ entonces } N_2(x,m_\alpha t)\geq\alpha,$$

y

$$\text{si } N_2(x,t)\geq\alpha, \text{ entonces } N_1(x,M_\alpha t)\geq\alpha.$$

Teorema 2.28. *Sean X un espacio vectorial, N_1 y N_2 B-S-normas difusas sobre X. Para cada $\alpha\in(0,1)$, sean $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ las seminormas asociadas a N_1 y N_2, respectivamente, dadas por el Teorema 2.9. Entonces N_1 y N_2 son equivalentes si, y solo si, para cada $\alpha\in(0,1)$ las seminormas $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que N_1 y N_2 son equivalentes. Probemos que para cada $\alpha\in(0,1)$, las seminormas $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ son equivalentes, es decir, que existen constantes $A_\alpha, B_\alpha>0$ tales que $A_\alpha\|x\|_\alpha^2\leq\|x\|_\alpha^1\leq B_\alpha\|x\|_\alpha^2$ para todo $x\in X$. En efecto, por definición de normas difusas equivalentes, existen familias $\{M_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ y $\{m_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ en $(0,\infty)$ tales que para todo $x\in X$, $t\in\mathbb{R}$ y $\alpha\in(0,1)$, se cumple que si $N_1(x,t)\geq\alpha$, entonces $N_2(x,m_\alpha t)\geq\alpha$, y si $N_2(x,t)\geq\alpha$, entonces $N_1(x,M_\alpha t)\geq\alpha$.
Fijemos $\alpha\in(0,1)$. Si $x\in X$ es dado, entonces

$$\{t>0:\ N_1(x,t)\geq\alpha\}\subset\{t>0:\ N_2(x,m_\alpha t)\geq\alpha\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|x\|_\alpha^1&\geq\operatorname{ínf}\{t>0:\ N_2(x,m_\alpha t)\geq\alpha\}\\&=\operatorname{ínf}\{s/m_\alpha:\ s>0, N_2(x,s)\geq\alpha\}\\&=\frac{1}{m_\alpha}\|x\|_\alpha^2.\end{aligned}$$

Se sigue que $\|x\|_\alpha^2\leq m_\alpha\|x\|_\alpha^1$. Del mismo modo se argumenta que $\|x\|_\alpha^1\leq M_\alpha\|x\|_\alpha^2$. Como $x\in X$ fue arbitrario, concluimos que $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ son equivalentes.
Recíprocamente supongamos que para cada α, las seminormas $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ son equivalentes. Esto significa que para cada $\alpha\in(0,1)$ existen $A_\alpha, B_\alpha>0$ tal que $A_\alpha\|x\|_\alpha^2\leq\|x\|_\alpha^1\leq B_\alpha\|x\|_\alpha^2$ para todo $x\in X$. Fijemos $x\in X$ y $t>0$ tal que $N_1(x,t)\geq\alpha$. Por definición de N_1, $\|x\|_\alpha^1\leq t$.

Luego, $\|x\|_\alpha^2 \leq t/A_\alpha$. Por el Teorema 2.9, $N_2(x, t/A_\alpha) \geq \alpha$. Hemos probado así que si $x \in X$ y $t > 0$ verifican que $N_1(x,t) \geq \alpha$, entonces $N_2(x, t/A_\alpha) \geq \alpha$. Análogamente se cumple que si $x \in X$ y $t > 0$ son tales que $N_2(x,t) \geq \alpha$, entonces $N_1(x, t/B_\alpha) \geq \alpha$. De lo anterior se sigue que las familias $\{1/A_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ y $\{1/B_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$ cumplen la Definición 2.27. $\square$

Observación 2.29. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas sobre un $\mathbb{R}$ espacio vectorial X. Consideremos N_1 y N_2 como las normas difusas asociadas a $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente, como en el Ejemplo 2.23. Entonces, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes (en el sentido clásico). si, y solo si, N_1 y N_2 son equivalentes.
En efecto, por la Observación 2.24 tenemos que

$$\|x\|_\alpha^1 = \frac{\|x\|_1}{\frac{1}{\alpha} - 1} \quad \text{y} \quad \|x\|_\alpha^2 = \frac{\|x\|_2}{\frac{1}{\alpha} - 1} \tag{2.9}$$

para cada $x \in X$ y $\alpha \in (0,1)$. Por el Teorema 2.28, las B-S-normas difusas N_1 y N_2 son equivalentes si, y solo si, las seminormas $\|\cdot\|_\alpha^1$ y $\|\cdot\|_\alpha^2$ son equivalentes para cada $\alpha \in (0,1)$. De (2.9) concluimos que N_1 y N_2 son equivalentes si, y solo si, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes en el sentido clásico.

2.1.6. Espacios normados difusos de dimensión finita

Parte de la motivación para estudiar los espacios normados difusos (X, N) radica en la investigación sobre la validez de ciertas propiedades, definiciones y teoremas clásicos del análisis funcional en el contexto difuso. En este sentido, veremos que dos normas difusas sobre un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.
Para enunciar el próximo resultado, recordemos que si X es un espacio normado de dimensión finita y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para X, entonces el conjunto difuso $N_0\colon X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ dado por

$$N_0(x,t) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq t; \\ 0, & t < \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \end{cases} \quad \text{si } x = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

es una B-S-norma. Además, si N es una B-S-norma y $\alpha \in (0,1)$, entonces la función $\|\cdot\|_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ definida como

$$\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : \; N(x,t) \geq \alpha\}, \quad x \in X,$$

es una seminorma (vea el Teorema 2.9).

Proposición 2.30. *Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y N una B-S-norma difusa. Supongamos que N cumple la condición 7 de la Observación 2.8. Entonces para cada*

$\alpha \in (0,1)$ *existen* $m_\alpha, M_\alpha \in \mathbb{R}^+$ *tales que*

$$m_\alpha \|x\|_\alpha^0 \leq \|x\|_\alpha \leq M_\alpha \|x\|_\alpha^0,$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Fijemos $\alpha \in (0,1)$ y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X. Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in X$ y $\alpha \in (0,1)$, por la Observación 2.26 tenemos que

$$\|x\|_\alpha = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|_\alpha \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|e_i\|_\alpha = M_\alpha \|x\|_\alpha^0, \tag{2.10}$$

donde $M_\alpha = \text{máx}\{\|e_i\|_\alpha : 1 \leq i \leq n\}$.
Ahora, supongamos que para cada $m > 0$ existe $x_m \in X$ con $\|x_m\|_\alpha^0 = 1$ tal que $\|x_m\|_\alpha < m$. De esta manera, existe una sucesión (x_n) en X tal que $\|x_n\|_\alpha^0 = 1$ y $\|x_n\|_\alpha < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X tiene dimensión finita, el conjunto $\{x \in X : \|x\|_\alpha^0 = 1\}$ es compacto (recordemos que $\|\cdot\|_\alpha^0$ es una norma para cada $\alpha \in (0,1)$). Luego, podemos suponer que $\|x_n - x_0\|_\alpha^0 \to 0$ donde $x_0 \in X$ satisface que $\|x_0\|_\alpha^0 = 1$. Por (2.10), $\|x_n - x_0\|_\alpha \to 0$. Se sigue que $\|x_0\|_\alpha = 0$. Note que $x_0 \neq \mathbf{0}$ ya que $\|x_0\|_\alpha^0 = 1$. De la definición de $\|\cdot\|_\alpha$ tenemos que $N(x_0, t) \geq \alpha$ para cada $t > 0$. Por la condición 7 de la Observación 2.8, la función $N(x_0, \cdot)$ es continua. Así, $0 = N(x_0, 0) \geq \alpha$, lo que nos da una contradicción.
Lo anterior demuestra que existe $m_\alpha > 0$ tal que si $\|x\|_\alpha^0 = 1$, entonces $\|x\|_\alpha \geq m_\alpha$. Ahora si $y \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ es dado, tenemos que $\|\frac{y}{\|y\|_\alpha^0}\|_\alpha^0 = 1$. Luego, $\|\frac{y}{\|y\|_\alpha^0}\|_\alpha \geq m_\alpha$, es decir, $m_\alpha \|y\|_\alpha^0 \leq \|y\|_\alpha$. Note que esta última desigualdad también es válida para $y = \mathbf{0}$. Esto completa la prueba la proposición. □

Teorema 2.31. *Sea (X, N) un B-S espacio normado difuso de dimensión finita. Supongamos que N cumple la condición 7 de la Observación 2.8. Entonces N es equivalente a la B-S-norma difusa N_0.*

Demostración. Afirmamos que las familias $(1/m_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ y $(M_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ atestiguan que N y N_0 son equivalentes (vea la Definición 2.27).
Sean $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0,1)$ dados, y supongamos que $N(x,t) \geq \alpha$. Del Teorema 2.9 sabemos que $\|x\|_\alpha \leq t$. Por la Proposición 2.30 tenemos que existe $m_\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $m_\alpha \|x\|_\alpha^0 \leq \|x\|_\alpha \leq t$, es decir, $\|x\|_\alpha^0 \leq \frac{t}{m_\alpha}$. Por consiguiente $N_0(x, \frac{t}{m_\alpha}) \geq \alpha$.
Ahora supongamos que $N_0(x,t) \geq \alpha$, es decir, $\|x\|_\alpha^0 \leq t$ (por el Teorema 2.9). Por la Proposición 2.30 existe $M_\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_\alpha \leq M_\alpha \|x\|_\alpha^0$. De aquí, $\|x\|_\alpha \leq M_\alpha t$, lo cual es equivalente a $N(x, M_\alpha t) \geq \alpha$ por el Teorema 2.9.Así N y N_0 son normas difusas equivalentes. □

No es difícil mostrar que si N_1 y N_2 son normas difusas sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial X, y N_1 y N_2 son equivalentes respectivamente a una norma difusa N, entonces N_1 y N_2 son equivalentes. Con esto en mente y el anterior teorema, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.32. *Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si N_1 y N_2 son normas difusas que cumplen la condición 7 de la Observación 2.8, entonces N_1 y N_2 son equivalentes.*

2.2. Espacios Métricos Difusos

Kaleva y Seikkala en [10] introducen la noción de espacio métrico difuso utilizando elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, específicamente definiendo la distancia entre dos puntos como un número difuso no negativo (vea la Definición 1.5). Por otro lado, Michalek y Kramosil proponen una definición de espacio métrico difuso basada en una generalización de los espacios métricos probabilísticos [5, 8, 9, 17, 20]. En esta sección exploramos estas definiciones. Veremos que la definición de Kaleva y Seikkala se asemeja a definición de F-espacio normado difuso, mientras que la definición de Michalek y Kramosil es semejante a la definición de B-S-espacio normado difuso.

2.2.1. Espacio métricos difusos en el sentido de Kaleva y Seikkala

Definición 2.33. Sean X un conjunto no vacío, $d : X \times X \to \mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ y $L, R : I \times I \to I$ funciones crecientes y simétricas de tal modo que $L(0,0) = 0$ y $R(1,1) = 1$. Supongamos que $[d(x,y)]_\alpha = [d(x,y)^-_\alpha, d(x,y)^+_\alpha]$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in (0,1]$. Diremos que d es una métrica difusa en el sentido de Kaleva y Seikkala (o brevemente K-S-métrica difusa) si

1. $d(x,y) = \overline{0}$ si, y solo si, $x = y$.
2. Para cada $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$.
3. Para cada $x, y \in X$ y cada $s, t \in \mathbb{R}$, las condiciones $s \leq d(x,z)^-_1$, $t \leq d(z,y)^-_1$ y $s + t \leq d(x,y)^-_1$, implican que $d(x,y)(s+t) \geq L(d(x,z)(s), d(z,y)(t))$.
4. Para cada $x, y \in X$ y cada $s, t \in \mathbb{R}$, las condiciones $s \geq d(x,z)^-_1$, $t \geq d(z,y)^-_1$ y $s + t \geq d(x,y)^-_1$, implican que $d(x,y)(s+t) \leq R(d(x,z)(s), d(z,y)(t))$.

La cuádrupla (X, d, L, R) es llamada espacio métrico difuso en el sentido de Kaleva y Seikkala y (o simplemente K-S-espacio métrico difuso).

Observación 2.34 ([17])**.** Si en la definición anterior, $L(x,y) = 0$ para cada $x, y \in X$ y R es un t-conorma continua, diremos que X es un K-S espacio simple (brevemente K-S*-espacio).

Al igual que con el F-espacio, si tomamos $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$ obtenemos una equivalencia entre la desigualdad triangular clásica y la desigualdad triangular en el sentido de la Definición 2.33.

Observación 2.35. La desigualdad triangular en la Definición 2.33 (4) con $R = \text{máx}$ es equivalente a

$$d(x,y)^+_\alpha \leq d(x,z)^+_\alpha + d(z,y)^+_\alpha \quad \text{para cada } x,y,z \in X \text{ y cada } \alpha \in (0,1].$$

Observación 2.36. La desigualdad triangular en la Definición 2.33 (3) con $L = \text{mín}$ es equivalente a

$$d(x,y)^-_\alpha \leq d(x,z)^-_\alpha + d(z,y)^-_\alpha \quad \text{para cada } x,y,z \in X \text{ y cada } \alpha \in (0,1].$$

Las demostraciones de las observaciones anteriores son análogas a las presentadas en las Observaciones 2.4 y 2.5, respectivamente. Así, al seleccionar $L = \text{mín}$ y $R = \text{máx}$, las condiciones 4 y 3 de la Definición 2.33 se reducen a:

$$d(x,z) \preceq d(x,y) + d(y,z),$$

donde $\preceq$ es la relación de orden parcial descrita en la Definición 1.9. Con esta elección de L y R, al fijar un valor $t \in \mathbb{R}$, la función d se comporta como una métrica en el sentido clásico.

2.2.2. Espacios métricos difusos en el sentido de Michalek y Kramosil

Definición 2.37. Sean X un conjunto no vacío, $M : X^2 \times [0,\infty) \to I$ un conjunto difuso y $*$ una t-norma continua. Diremos que M una M-K-métrica difusa si

1. Para cada $x,y \in X$ tenemos que $M(x,y,0) = 0$.
2. Para cada $x,y \in X$ tenemos que $M(x,y,t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ si, y solo si, $x = y$.
3. Para cualesquiera $x,y \in X$ y $t \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $M(x,y,t) = M(y,x,t)$.
4. Para todo $x,y,z \in X$ y $t,s \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$.
5. Dados $x,y \in X$, la función $\varphi : [0,\infty) \to [0,1]$ dada por $\varphi(t) = M(x,y,t)$ es continua a izquierda.

La tripla $(X,M,*)$ es llamada M-K-espacio métrico difuso.

Observación 2.38. Dados $x, y \in X$, la función $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ dada por $\varphi(t) = M(x, y, t)$ es creciente en $(0, \infty)$. En efecto, si $0 < t < s$, por la condición 4 de la Definición 2.37 tenemos que

$$M(x, y, t) = M(x, y, t) * 1 = M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s).$$

Definición 2.39. Sean X un conjunto no vacío, $M : X^2 \times (0, \infty) \to I$ un conjunto difuso y $*$ una t-norma continua. Diremos que M una G-V-métrica difusa si

1. Para cada $x, y \in X$ tenemos que $M(x, y, 0) > 0$.
2. Para cada $x, y \in X$, tenemos que $M(x, y, t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ si, y solo si, $x = y$.
3. Para cualesquiera $x, y \in X$ y $t \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $M(x, y, t) = M(y, x, t)$.
4. Para todo $x, y \in X$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$.
5. Dados $x, y \in X$, la función $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1]$ dada por $\varphi(t) = M(x, y, t)$ es continua.

La tripla $(X, M, *)$ es llamada G-V-espacio métrico difuso.

Observación 2.40. Como la Observación 2.38, vemos que si $x, y \in X$, entonces la función $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1]$ dada por $\varphi(t) = M(x, y, t)$ es creciente en $(0, \infty)$.

La siguiente proposición nos muestra que todo G-V-espacio métrico difuso induce un M-K-espacio métrico difuso.

Proposición 2.41. *Sean $X \neq \emptyset$, $*$ una t-norma continua y $M\colon X^2 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ una G-V métrica difusa. Entonces existe una M-K-métrica difusa $\hat{M}\colon X^2 \times [0, \infty) \to [0, 1]$ tal que $\hat{M} \restriction X^2 \times (0, \infty) = M$.*

Demostración. Definamos $\hat{M} : X^2 \times [0, \infty) \to [0, 1]$ por

$$\hat{M}(x, y, t) = \begin{cases} M(x, y, t), & t > 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Probaremos que la función $\hat{M}$ es una M-K métrica difusa. La condición 1 de la Definición 2.37 se cumple por como se define $\hat{M}$. Como $\hat{M}(x, y, t) = M(x, y, t)$ para cada $x, y \in X$ y $t > 0$, vemos que las condiciones 2,3 y 4 de la Definición 2.37 se cumplen automáticamente. Fijemos ahora $x, y \in X$, y definamos $\hat{\varphi}\colon [0, \infty) \to [0, 1]$ por $\hat{\varphi}(t) = \hat{M}(x, y, t)$ si $t \geq 0$. Como $\varphi = \hat{\varphi} \restriction (0, \infty)$, vemos que $\hat{\varphi}$ es continua en $(0, \infty)$. Note que φ es creciente. Por tanto,

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} \hat{M}(x, y, t) = \inf\{\hat{M}(x, y, t) : t \geq 0\} = \hat{M}(x, y, 0).$$

De ahí que $\hat{\varphi}$ es continua a izquierda en $[0,\infty)$. Así, $\hat{M}$ es una M-K métrica. $\square$

A continuación presentamos ejemplos de métricas difusas. Con el siguiente ejemplo mostramos forma de construir métricas difusas a partir de métricas clásicas. Este fue tomado de [1].

Ejemplo 2.42. Sean (X,d) un espacio métrico y $G:[0,\infty)\to I$ una función creciente, continua a izquierda, y tal que $G(0)=0$, $G(a)<1$ para todo $a>0$ y $\lim_{r\to\infty} G(r)=1$. Defina $M: X^2\times[0,\infty)\to I$ por

$$M(x,y,t)=\begin{cases} G\left(\dfrac{t}{d(x,y)}\right), & \text{si } x\neq y \text{ y } t\geq 0;\\ 0, & \text{si } x=y \text{ y } t=0;\\ 1, & \text{si } x=y \text{ y } t>0.\end{cases}$$

Verifiquemos que si $*$ es una t-norma continua, entonces $(X,M,*)$ es un M-K-espacio métrico difuso.

1. Por definición, $M(x,y,0)=0$ para cada $x,y\in X$.
2. Supongamos que $M(x,y,t)=1$ para todo $t>0$. La definición de M nos asegura que $x=y$.
3. De la definición de M tenemos que $M(x,y,t)=M(y,x,t)$ para todo $x,y\in X$ y $t\geq 0$.
4. Sean $s,t\in\mathbb{R}^+$ y $x,y,z\in X$ dados. Si ocurre alguno de los casos $x=y$, $x=z$ o $y=z$, la desigualdad se verifica por la definición de M. Supongamos que $x\neq y$, $x\neq z$ y $y\neq z$. Veamos que $M(x,y,s)*M(y,z,t)\leq M(x,z,s+t)$. Por definición de M, tenemos:

$$M(x,y,s)=G\left(\frac{s}{d(x,y)}\right),\quad M(y,z,t)=G\left(\frac{t}{d(y,z)}\right),\quad \text{y}\quad M(x,z,s+t)=G\left(\frac{s+t}{d(x,z)}\right).$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\dfrac{s}{d(x,y)}\leq\dfrac{t}{d(y,z)}$. Como G es creciente, $G\left(\dfrac{s}{d(x,y)}\right)\leq G\left(\dfrac{t}{d(y,z)}\right)$. Por la Observación 1.15 tenemos que

$$G\left(\frac{s}{d(x,y)}\right)*G\left(\frac{t}{d(y,z)}\right)\leq \min\left\{G\left(\frac{s}{d(x,y)}\right),G\left(\frac{t}{d(y,z)}\right)\right\}=G\left(\frac{s}{d(x,y)}\right).$$

Por otra parte, como $d(y,z)s \leq d(x,y)t$, tenemos que:

$$d(x,z)s \leq d(x,y)s + d(y,z)s \leq d(x,y)s + d(x,y)t = d(x,y)(s+t).$$

Por lo tanto $d(x,z)s \leq d(x,y)(s+t)$, es decir, $\dfrac{s}{d(x,y)} \leq \dfrac{s+t}{d(x,z)}$. Como G es creciente,

$$G\left(\frac{s}{d(x,y)}\right) \leq G\left(\frac{s+t}{d(x,z)}\right) = M(x,z,s+t).$$

5. Como G es continua a izquierda, es claro que se satisface la condición 5 de la Definición 2.37.

En el anterior ejemplo tomemos $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $t=\pi$ y $G(r)=\frac{r}{r+1}$.

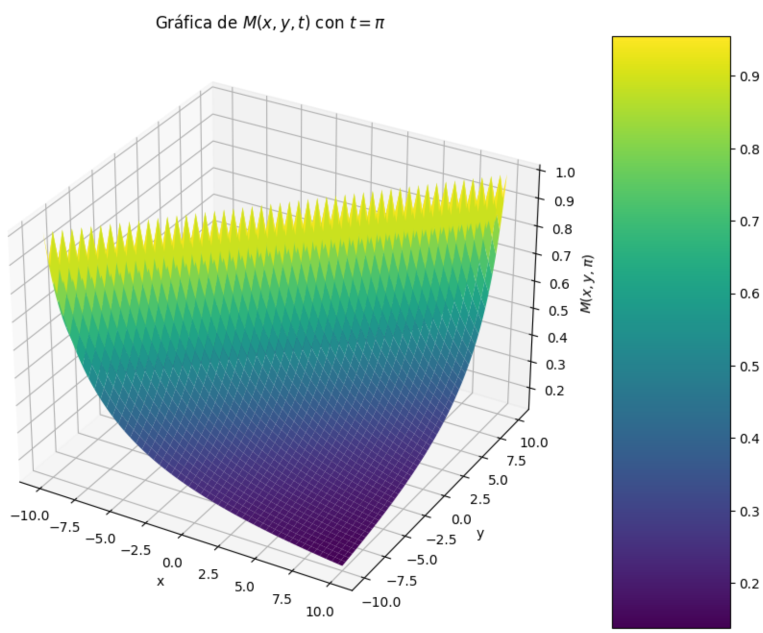

Figura 2.3. Caso particular del Ejemplo 2.42.

El siguiente ejemplo fue tomado de [9].

Ejemplo 2.43. Sean X un conjunto no vacío, $f: X \to \mathbb{R}^+$ una función inyectiva y $g: \mathbb{R}^+ \to [0,\infty)$ una función continua creciente. Sea $*$ la t-norma continua definida en el Ejemplo 1.18. Entonces $M: X^2 \times \mathbb{R}^+ \to I$ dada por

$$M(x,y,t) = \left(\frac{(\text{mín}\{f(x),f(y)\})^\alpha + g(t)}{(\text{máx}\{f(x),f(y)\})^\alpha + g(t)}\right)^\beta, \quad \text{donde } \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+ \text{ son fijos,}$$

es una G-V métrica.

Por como se definición de M es claro ver que las condiciones 1 y 3 de la Definición 2.39 se satisfacen. Para la condición 2, note que si $M(x,y,t)=1$, entonces $\max\{f(x),f(y)\}=\min\{f(x),f(y)\}$, lo cual ocurre si, y solo si, $f(x)=f(y)$. La inyectividad de f nos da que $x=y$. Veamos que las condiciones 4 y 5 también son válidas.

4. Sean $x,y,z\in X$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x)<f(y)<f(z)$. Luego,

$$\begin{aligned} M(x,z,s+t)) &= \left(\frac{f(x)^\alpha+g(s+t)}{f(z)^\alpha+g(s+t)}\right)^\beta \\ &= \left(\frac{f(x)^\alpha+g(s+t)}{f(y)^\alpha+g(s+t)}\right)^\beta \left(\frac{f(y)^\alpha+g(s+t)}{f(z)^\alpha+g(s+t)}\right)^\beta . \end{aligned}$$

   Afirmamos que

$$\frac{f(x)^\alpha+g(s)}{f(y)^\alpha+g(s)} \leq \frac{f(x)^\alpha+g(s+t)}{f(y)^\alpha+g(s+t)}. \tag{2.11}$$

   En efecto, como g es creciente, $(f(y)^\alpha-f(x)^\alpha)\,g(s) \leq (f(y)^\alpha-f(x)^\alpha)\,g(s+t)$. Reordenando esta desigualdad encontramos que $f(x)^\alpha g(s+t)+f(y)^\alpha g(s)\leq f(x)^\alpha g(s)+f(y)^\alpha g(s+t)$. Sumando en ambos miembros de la anterior desigualdad $g(s)g(s+t)+f(x)^\alpha f(y)^\alpha$ tenemos que

$$(f(x)^\alpha+g(s))\,(f(y)^\alpha+g(s+t)) \leq (f(y)^\alpha+g(s))\,(f(x)^\alpha+g(s+t))\,.$$

   Esta última desigualdad es equivalente a (2.11). De igual modo podemos concluir que

$$\frac{f(y)^\alpha+g(s)}{f(z)^\alpha+g(s)} \leq \frac{f(y)^\alpha+g(s+t)}{f(z)^\alpha+g(s+t)}.$$

   Por tanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)^\alpha+g(s)}{f(y)^\alpha+g(s)}\right)^\beta \left(\frac{f(y)^\alpha+g(s)}{f(z)^\alpha+g(s)}\right)^\beta &\leq \left(\frac{f(x)^\alpha+g(s+t)}{f(y)^\alpha+g(s+t)}\right)^\beta \left(\frac{f(y)^\alpha+g(s+t)}{f(z)^\alpha+g(s+t)}\right)^\beta \\ &= M(x,z,s+t). \end{aligned}$$

5. Si $x,y\in X$ son fijos, como g es continua en $\mathbb{R}^+$, $M(x,y,\cdot)$ es continua sobre $\mathbb{R}^+$.

Por tanto $(X,M,*)$ es un G-V espacio.

En el anterior ejemplo tomemos $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ y $t = e$.

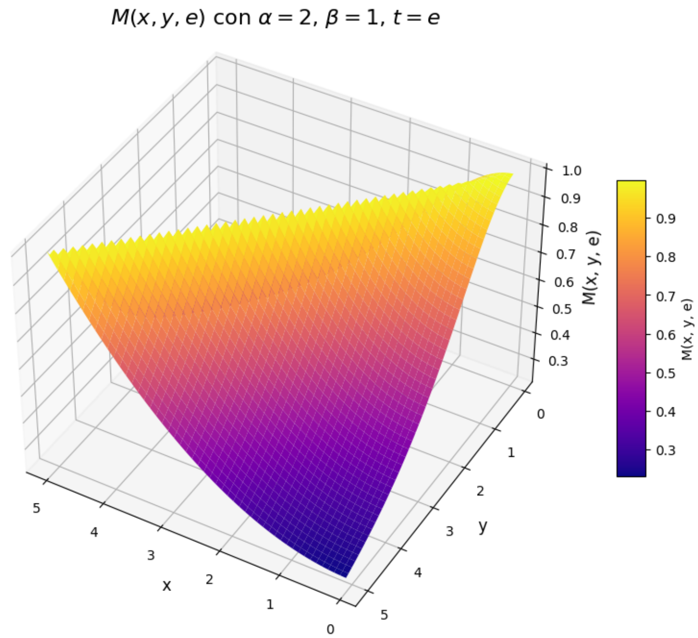

Figura 2.4. Caso particular del Ejemplo 2.43

El próximo ejemplo es presentado en [10].

Ejemplo 2.44. Sea $X = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $d : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})^+$ dada por

$$d(x, y)(t) = \begin{cases} |x - y|(t) & \text{si } x \neq y, \\ \overline{0} & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Entonces $(X, d, L, \text{máx})$ con $L(a, b) = 0$ es un K-S espacio.

Demostración. Notemos que si $x, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ por la Definición 1.10 tenemos que $|x - y| \in \mathcal{F}(\mathbb{R})^+$. Si L es la t-norma nula, es claro que la desigualdad triangular en la Definición 2.33 se satisface. Ahora por la Observación 2.35 concluimos que d satisface la condición 4 con $R = \text{máx}$. Así, $(X, d, L, \text{máx})$ es un K-S* espacio. $\square$

Para el anterior ejemplo, consideremos los números difusos trapezoidales (vea [21, p.61]) dados a continuación:

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [1, 7]; \\ \frac{x-1}{3-1}, & \text{si } x \in [1, 3]; \\ 1, & \text{si } x \in (3, 5); \\ \frac{7-x}{7-5}, & \text{si } x \in [5, 7], \end{cases} \quad u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [-2, 4]; \\ \frac{x+2}{0+2}, & \text{si } x \in [-2, 0]; \\ 1, & \text{si } x \in (0, 2); \\ \frac{4-x}{4-2}, & \text{si } x \in [2, 4], \end{cases} \quad \text{y} \quad u_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [-1, 6]; \\ \frac{x+1}{2+1}, & \text{si } x \in [-1, 2]; \\ 1, & \text{si } x \in (2, 4); \\ \frac{6-x}{6-4}, & \text{si } x \in [4, 6]. \end{cases}$$

Veamos las gráficas de d para $|u_1 - u_2|$,$|u_1 - u_3|$ y $|u_2 - u_3|$.

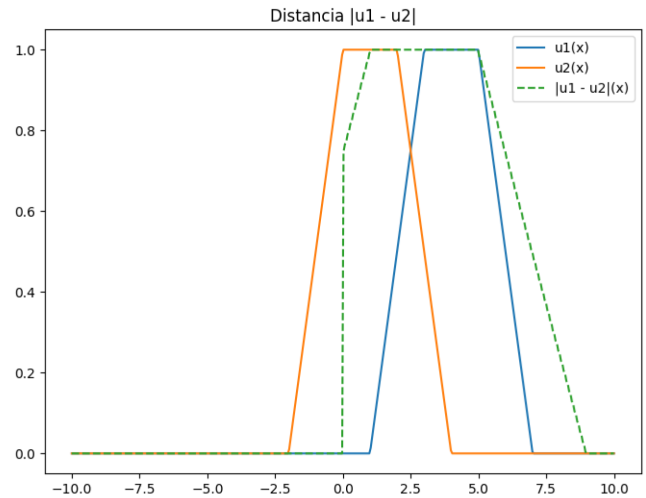

Figura 2.5. $|u_1 - u_2|$

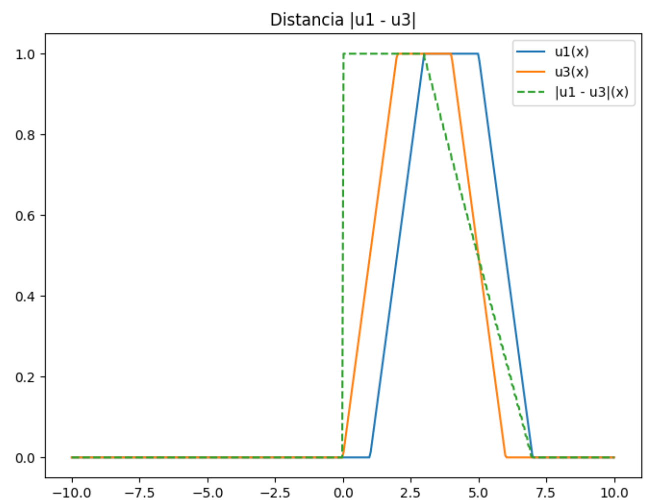

Figura 2.6. $|u_1 - u_3|$

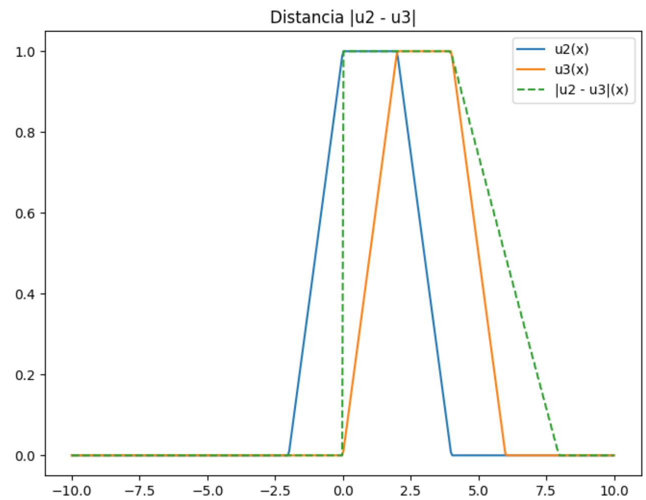

Figura 2.7. $|u_2 - u_3|$

2.2.3. Relación entre K-S Espacios y M-K Espacios

Teniendo como objetivo establecer una conexión entre los espacios normados según Felbin y los espacios métricos según Kaleva y Seikkala, en esta sección estudiaremos la relación entre los conceptos de K-S-espacio métrico difuso y M-K-espacio métrico difuso. Lo anterior lo realizaremos basándonos en los resultados propuestos en [17], donde se estudia la conexión entre los K-S*-espacios y M-K-espacios (ver Observación 2.34).

Definición 2.45. Sea $*$ una t-norma continua. Notaremos por $*' = 1 - *$ a la t-conorma inducida por $*$.

Teorema 2.46. *Sean X conjunto no vacío, $*$ una t-norma continua, $*'$ la t-conorma inducida por $*$. Sea $M : X^2 \times [0, \infty) \to I$ dada y defina $d : X^2 \to I^{\mathbb{R}}$ como*

$$d(x,y)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - M(x,y,t), & t \geq 0, \end{cases} \quad \textit{para cada } x, y \in X \textit{ y } t \in [0, \infty).$$

Entonces $(X, M, *)$ es un M-K-espacio si, y solo si, $(X, d, L = 0, R = *')$ es un K-S Espacio.*

Demostración. Supongamos que $(X, M, *)$ es un M-K-espacio métrico difuso y veamos que $(X, d, L = 0, R = *')$ es un K-S*-espacio métrico difuso. Probaremos que $d(x,y) \in \mathcal{F}^+(\mathbb{R})$ para cada $x, y \in X$, esto es, d es normal, no negativa, convexa y semicontinua superiormente.

1. Si $t = 0$, por la condición 1 de la Definición 2.37 tenemos que $d(x,y)(0) = 1$ para todo $x, y \in X$. Por tanto d es normal.

2. En efecto, por definición de d tenemos que $d(x,y)(t) = 0$ para cada $t < 0$ y $x, y \in X$. Por tanto, d es no negativa.

3. Sean $x, y \in X$ fijos y $s, t, r \in \mathbb{R}$ tales que $s \leq t \leq r$. Probemos que $d(x,y)(t) \geq \min\{d(x,y)(s), d(x,y)(r)\}$. El caso $s < 0$ es trivial. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s > 0$. Entonces por la Observación 2.38 tenemos que $M(x,y,\cdot)$ es creciente en $[0,\infty)$. Entonces $d(x,y)(\cdot)$ es decreciente sobre $[0,\infty)$. De ahí que $d(x,y)(r) \geq d(x,y)(t) \geq d(x,y)(s)$. Por tanto d es convexa.

4. Veamos que d es semicontinua superiormente en $\mathbb{R}$. Notemos que si $(X, M, *)$ es un M-K-espacio, entonces $M(x,y,\cdot)$ es continua a izquierda en $[0,\infty)$ y creciente en $\mathbb{R}^+$ con $x, y \in X$. Entonces, d es continua a izquierda y decreciente, es decir, para $s, t \in [0,\infty)$ y $x, y \in X$ de tal modo que $s \leq t$ vale que $d(x,y)(t) \leq d(x,y)(s)$. Dado $\epsilon > 0$ y $t \in [0,\infty)$, veamos que existe $\delta > 0$ de tal modo que si $|s-t| < \delta$, entonces $d(x,y)(s) < d(x,y)(t) + \epsilon$. En efecto, por continuidad a izquierda sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $t - \delta < s < t$, entonces $d(x,y)(s) < d(x,y)(t) + \epsilon$. Ahora, si $t < s < t + \delta$, entonces $d(x,y)(s) \leq d(x,y)(t) < d(x,y)(t) + \epsilon$, por lo tanto $d(x,y)(s) < d(x,y) + \epsilon$. Entonces d es semicontinua superiormente.

Verifiquemos ahora que las condiciones de la Definición 2.33.

1. Sean $x, y \in X$, veamos que $d(x,y) = \overline{0}$ si, y solo si, $x = y$. Si $d(x,y) = \overline{0}$, entonces $d(x,t)(t) = 0$ si $t < 0$. Si $t > 0$, entonces $0 = 1 - M(x,y,t)$. Así, $1 = M(x,y,t)$ para todo $t > 0$. Por la condición 2 de la Definición 2.37, concluimos que $x = y$. Recíprocamente, si $x = y$, entonces $M(x,y,t) = 1$ para cada $t > 0$. Por tanto $d(x,y) = \overline{0}$.

2. La conmutatividad es inmediata.

3. Sean $x, y \in X$ dados. Veamos que $d(x,y)_1^- = 0$. Si no, ocurren dos casos:

   1. $d(x,y)_1^- < 0$. Por definición de α-nivel, existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que

   $$d(x,y)_1^- < r_0 < 0, \quad \text{y} \quad d(x,y)(r_0) \geq 1.$$

   Esto es una contradicción pues por definición de d, tenemos que si $r_0 < 0$, entonces $d(x,y)(r_0) = 0$.

   2. $d(x,y)_1^- > 0$. Por la normalidad de d, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

   $$0 < d(x,y)_1^- < s_0 \quad \text{y} \quad d(x,y)(s_0) = 1.$$

Por definición tenemos que $d(x,y)(s_0) = 1 - M(x,y,s_0) = 1$, lo cual implica que $M(x,y,s_0) = 0$, pero esto es una contradicción dado que $M(x,y,\cdot)$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

Finalmente, notemos que para cada $x,y,z \in X$ y $s,t \in [0,\infty)$ vale que $M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t) * M(y,z,s)$, es decir,

$$1 - d(x,z)(s+t) \geq 1 - d(x,y)(t) * 1 - d(y,z)(s).$$

Como $*'$ es la t-conorma inducida por $*$ entonces tenemos

$$d(x,z)(s+t) \leq d(x,y)(t) *' d(y,z)(s).$$

De esta manera, concluimos que d es una K-S* métrica difusa, y por lo tanto $(X,d,L = 0, R = *')$ es un K-S*-espacio.

Recíprocamente, supongamos que $(X,d,L = 0, R = *')$ es un K-S* espacio, veamos que $(X,M,*)$ es un M-K espacio, es decir, veamos que se cumplen las condiciones de la Definición 2.37. Las condiciones 1-4 se verifican directamente de nuestra hipótesis y por definición de d. La condición 6 también se deduce directamente de la definición de d. Falta ver de que en efecto $M(x,y,\cdot)$ es continua a izquierda sobre $[0,\infty)$. Sabemos que d es semicontinua superiormente sobre $\mathbb{R}$. Sean $t_0 \geq 0$ $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $t_0 - \delta < t \leq t_0$, entonces $d(x,y)(t) \leq d(x,y)(t_0) + \epsilon$. Ahora,

$$\begin{aligned} d(x,y)(t) &= 1 - M(x,y,t), \quad \text{y} \\ d(x,y)(t_0) &= 1 - M(x,y,t_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M(x,y,t_0) \leq M(x,y,t) + \epsilon$. Ahora, consideramos que para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $t_0 - \delta < t \leq t_0$, se cumple que $M(x,y,t) \geq M(x,y,t_0) - \epsilon$. En consecuencia, $M(x,y,t_0) - \epsilon \leq M(x,y,t) \leq M(x,y,t_0) + \epsilon$. Esto muestra que $M(x,y,t) \to M(x,y,t_0)$ cuando $t \to t_0$ por la izquierda, es decir, M es continua a izquierda en t_0. Dado que $t_0 \geq 0$ es arbitrario, hemos demostrado que M es continua a izquierda en todos los puntos $t \geq 0$. Por lo tanto $(X,M,*)$ es un M-K-espacio. $\square$

2.2.4. Relación entre normas y métricas difusas

Hasta el momento hemos expuesto algunas propiedades y generalidades de los espacios normados difusos (F-espacios y B-S-espacios) y los espacios métricos difusos (M-K-espacios y G-V-espacios). En esta sección abordaremos las siguientes preguntas:

- ¿Toda B-S Norma induce una M-K Métrica?
- ¿Toda M-K métrica proviene de una B-S Norma?

El próximo resultado establece como en el contexto clásico que toda norma difusa induce una métrica difusa. Más precisamente, una B-S-norma difusa N induce una M-K métrica difusa.

Proposición 2.47. *Sea $(X, N, *)$ un B-S-espacio normado difuso. Supongamos que N satisface la condición 7 de la Observación 2.8. Entonces la función $M\colon X^2 \times [0, \infty) \to [0, 1]$ dada por*

$$M(x, y, t) = N(x - y, t) \quad \textit{para cada } x, y \in X \textit{ y } t \geq 0$$

es una M-K-métrica difusa.

Demostración. Veamos que M satisface cada uno de las condiciones en la Definición 2.37.

1. Sean $x, y \in X$ dados. Tenemos que $M(x, y, 0) = N(x - y, 0) = 0$ por la condición 1 de la Definición 2.7.

2. Veamos que $M(x, y, t) = 1$ para todo $t > 0$ si, y solo si $x = y$. Supongamos que $M(x, y, t) = 1$ para todo $t > 0$. Por definición esto equivale a tener que $N(x-y, t) = 1$. Por la condición 2 de la Definición 2.7 tenemos que $x - y = \mathbf{0}$, es decir, $x = y$.

3. Veamos que $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ si $x, y \in X$ y $t \in [0, \infty)$ Por la condición 3 de la Definición 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &= N(x - y, t) \\ &= N(-(y - x), t) \\ &= N(y - x, t/|-1|) \\ &= N(y - x, t) \\ &= M(y, x, t). \end{aligned}$$

4. Sean $x, y, z \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}^+$. Veamos que

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s).$$

Por definición, $M(x, y, t) = N(x-y, t)$ y $M(y, z, t) = N(y-z, s)$. Usando la condición

4 de la Definición 2.7 encontramos que

$$\begin{aligned} M(x,y,t) * M(y,z,t) &= N(x-y,t) * N(y-z,s) \\ &\leq N((x-y)+(y-z),t+s) \\ &= N(x-z,t+s) = M(x,z,t+s). \end{aligned}$$

5. Sean $x, y \in X$ dados. Mostremos que $M(x,y,\cdot)$ es continua a izquierda en $\mathbb{R}^+$. Por la condición 5 de la Definición 2.7 se tiene que la función $N(x-y,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$. En particular, $M(x,y,\cdot) = N(x-y,\cdot)$ es continua en $[0,\infty)$. Note también que $M(x,y,\cdot)$ es creciente en $(0,\infty)$ ya que $N(x-y,\cdot)$ también lo es. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que, como en el caso clásico, no toda métrica difusa proviene de una norma difusa.

Ejemplo 2.48. Sean $X = \mathbb{R}$ junto con la métrica discreta d y $M : X^2 \times [0,\infty) \to [0,1]$ dada por

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \text{ y } t > 0; \\ \dfrac{t}{t+1}, & \text{si } t > 0 \text{ y } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y \text{ y } t \leq 0 \end{cases}$$

Entonces M es una M-K métrica, pero esta no proviene de una B-S norma

Demostración. Considere la función $G : [0,\infty) \to I$ dada por $G(r) = r/r+1$, $r \geq 0$. El Ejemplo 2.42 nos da que (X, M) es un M-K espacio con $* = \text{mín}$.
Ahora bien, supongamos que existe una B-S-norma difusa $N : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $M(x,y,t) = N(x-y,t)$ para cada $x, y \in X$ y $t \geq 0$. Observe que si $x \in X \setminus \{0\}$ y $t > 0$ tenemos que $M(2x,0,t) = \dfrac{t}{t+1}$. Por otra parte,

$$M(2x,0,t) = N(2x,t) = N(x,t/2) = M(x,0,t/2) = \frac{t}{t+2}.$$

Lo anterior es una contradicción. Por tanto M no proviene de una B-S-norma difusa. $\square$

2.2.5. G-V métricas para el análisis de imágenes

Para finalizar el capítulo, mencionaremos a modo de comentario ciertas aplicaciones y ventajas de las métricas difusas en el sentido de Gregori y Veramani respecto al uso de métricas clásicas. Además en las referencias correspondientes podemos ver otros documentos donde se comentan algunas aplicaciones de los conjuntos difusos [12] y los espacios normados difusos [14, 13, 15].

En el artículo de Gregori, Morillas y Sapena, titulado *"Examples of fuzzy metrics and applications"* [9], se destacan dos ventajas principales de las métricas difusas en comparación con las métricas clásicas. Primero, las métricas difusas normalizan las distancias a valores en el intervalo $(0, 1]$, lo que facilita la combinación de diferentes criterios de distancia que originalmente pueden estar en rangos muy distintos. Segundo, las métricas difusas se integran de manera natural en sistemas difusos, ya que los valores obtenidos pueden interpretarse directamente como grados de certeza.

Estas métricas han demostrado ser útiles en diversas aplicaciones y, en particular, recientemente se han aplicado al filtrado de imágenes en color, mejorando el rendimiento de algunos filtros al sustituir las métricas clásicas por métricas difusas. Para abordar la escasez de ejemplos en la literatura, [9] proporciona una amplia variedad de nuevos ejemplos de métricas difusas, clasificadas en varios tipos, y muestra cómo aplicarlas en métodos de ingeniería. En particular, se propone un filtro para procesamiento de imágenes que combina dos criterios de proximidad, la similitud de color y la cercanía espacial, logrando mejores resultados que los filtros clásicos.

Capítulo 3

Teorema de Hahn-Banach en el contexto difuso

A lo largo de este documento, hemos visto algunas nociones y resultados de la teoría de espacios normados extendidos al contexto difuso. M. Saheli en su trabajo titulado *''Hahn Banach Theorem on Fuzzy Normed Spaces''* [18] presenta una versión del Teorema de Hahn-Banach para el contexto difuso. Como sabemos, este resultado tiene gran importancia en matemáticas no solamente desde el punto de vista teórico sino también desde el punto de vista aplicado. El objetivo de este capítulo es exponer el resultado de Saheli y su demostración.

3.1. El teorema de Hahn-Banach para B-S-espacios normados difusos

Antes de enunciar el resultado, recordemos que la aplicación $N_0\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ dada por

$$N_0(x,t)=\begin{cases}1, & |x|\leq t;\\ 0, & t<|x|,\end{cases}$$

es una B-S-norma difusa en $\mathbb{R}$ (vea el Ejemplo 2.25).

Teorema 3.1 (Teorema de Hahn Banach para Espacios Normados Difusos)**.** *Sean (X,N) un B-S-espacio normado difuso, Z un subespacio de X y $f:Z\to\mathbb{R}$ un funcional lineal tal que para alguna familia creciente $(\eta_\alpha)_{\alpha\in(0,1)}\subset(0,\infty)$ se cumple que*

$$\textit{si } (z,t,\alpha)\in Z\times\mathbb{R}\times(0,1) \textit{ y } N(z,t)\geq\alpha, \textit{ entonces } N_0(f(z),\eta_\alpha t)\geq\alpha.$$

Entonces existe un funcional lineal $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $\hat{f} \upharpoonright Z = f$, *y*

$$\textit{si } (x,t,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \times (0,1) \textit{ y } N(x,t) \geq \alpha, \textit{ entonces } N_0(\hat{f}(x), \eta_\alpha t) \geq \alpha.$$

Demostración. Sean

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(Y,g) : Y \text{ es un subespacio de } X \text{ con } Z \subset Y, \text{ y } g\colon Y \to \mathbb{R} \text{ es lineal y } g \upharpoonright Z = f\},$$

y

$$\mathcal{A} = \{(Y,g) \in \tilde{\mathcal{A}} : \text{ si } (x,t,\alpha) \in Y \times \mathbb{R} \times (0,1) \text{ y } N(x,t) \geq \alpha, \text{ entonces } N_0(g(x), \eta_\alpha t) \geq \alpha\}.$$

Definamos sobre $\mathcal{A}$ la relación dada por

$$(Y_1, g_1) \leq (Y_2, g_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad Y_1 \subset Y_2, \quad \text{y} \quad g_2 \upharpoonright Y_1 = g_1. \tag{3.1}$$

Note que $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$. Veamos que $(\mathcal{A}, \leq)$ tiene un elemento maximal. Sea $\mathcal{C} = \{(Y_\beta, g_\beta)\}_{\beta \in I}$ una cadena de $\mathcal{A}$. Definamos $Y = \bigcup_{\beta \in I} Y_\beta$. Como en la prueba del Teorema de Hahn-Banach en el caso clásico, puede mostrarse que Y es subespacio de X y que la aplicación $\hat{g} : Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{g}(y) = g_\beta(y) \quad \text{si } y \in Y_\beta \text{ para algún } \beta \in I \tag{3.2}$$

es un funcional lineal tal que $\hat{g} \upharpoonright Y_\beta = g_\beta$ para todo $\beta \in I$.
Veamos que $(Y, \hat{g}) \in \mathcal{A}$. Sean $\alpha \in (0,1)$, $y \in Y$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $N(y,t) \geq \alpha$. Entonces $y \in Y_\beta$ para algún $\beta \in I$. Como $(Y_\beta, g_\beta) \in \mathcal{A}$, tenemos que $N_0(\hat{g}(y), \eta_\alpha t) = N_0(g_\beta(y), \eta_\alpha t) \geq \alpha$. De lo anterior concluimos que $\mathcal{C}$ es acotada en $\mathcal{A}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ admite un elemento maximal, digamos $(Y, \hat{f}) \in \mathcal{A}$. Antes de probar que $Y = X$, veamos que $|\hat{f}(y)| \leq \eta_\alpha \|y\|_\alpha$ para cada $(y, \alpha) \in Y \times (0,1)$. Fijemos $(y,\alpha) \in Y \times (0,1)$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Por definición de $\|\cdot\|_\alpha$, existe $t > 0$ tal que $\|y\|_\alpha + \epsilon > t$ y $N(y,t) \geq \alpha$. Luego, $N_0(\hat{f}(y), \eta_\alpha t) \geq \alpha$. Por la Observación 2.26, $|\hat{f}(y)| \leq \eta_\alpha t < \eta_\alpha(\|y\|_\alpha + \epsilon)$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ encontramos que $|\hat{f}(y)| \leq \eta_\alpha \|y\|_\alpha$, tal como queríamos.
Probaremos ahora que $Y = X$. Supongamos que $Y \neq X$ y tome $x_0 \in X \setminus Y$. Si $x, y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| = |\hat{f}(x-y)| &\leq \eta_\alpha \|x - y\|_\alpha \\ &\leq \eta_\alpha \|x - x_0\|_\alpha + \eta_\alpha \|x_0 - y\|_\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto

$$-\eta_\alpha\|x_0 - y\|_\alpha - \hat{f}(y) \leq \eta_\alpha\|x - x_0\|_\alpha - \hat{f}(x), \quad \text{para cada } x, y \in Y \text{ y } \alpha \in (0,1). \tag{3.3}$$

Consideremos la sucesión de reales positivos $(\alpha_n = 1/(n+1))$. De la Desigualdad (3.3) tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{y\in Y}(-\eta_{\alpha_n}\|x_0 - y\|_{\alpha_n} - \hat{f}(y)) \leq c_n \leq \inf_{x\in Y}(\eta_{\alpha_n}\|x - x_0\|_{\alpha_n} - \hat{f}(x)). \tag{3.4}$$

La Desigualdad (3.3) implica $-\eta_{\alpha_1}\|x_0\| \leq -\eta_{\alpha_n}\|x_0\| \leq c_n \leq \eta_{\alpha_n}\|x_0\| \leq \eta_{\alpha_1}\|x_0\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, (c_n) es acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weiertrass (c_n) posee una subsucesión (c_{n_k}) tal que $c_{n_k} \to c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Afirmamos que

$$\sup_{y\in Y}(-\eta_\alpha\|x_0 - y\|_\alpha - \hat{f}(y)) \leq c \leq \inf_{x\in Y}(\eta_\alpha\|x - x_0\|_\alpha - \hat{f}(x)) \quad \text{para todo } \alpha \in (0,1). \tag{3.5}$$

Fijemos $\alpha \in (0,1)$. Por definición de convergencia, existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_k} < \alpha$ para todo $n_k > N_\alpha$. Recordemos que el Teorema 2.9 nos dice que la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ es ascendente. Si $x, y \in Y$, de la Desigualdad 3.4 se sigue que

$$\begin{aligned}
-\eta_\alpha\|x_0 - y\|_\alpha - \hat{f}(y) &\leq -\eta_{\alpha_{n_k}}\|x_0 - y\|_{\alpha_{n_k}} - \hat{f}(y) \\
&\leq c_{n_k} \\
&\leq \eta_{\alpha_{n_k}}\|x_0 - x\|_{\alpha_{n_k}} - \hat{f}(x) \\
&\leq \eta_\alpha\|x_0 - x\|_\alpha - \hat{f}(x),
\end{aligned}$$

para todo $n_k > N_\alpha$. Así,

$$\sup_{y\in Y}(-\eta_\alpha\|x_0 - y\|_\alpha - \hat{f}(y)) \leq c_{n_k} \leq \inf_{x\in Y}(\eta_\alpha\|x - x_0\|_\alpha - \hat{f}(x)), \quad \text{si } n_k > N_\alpha.$$

Luego,

$$\sup_{y\in Y}(-\eta_\alpha\|x_0 - y\|_\alpha - \hat{f}(y)) \leq c \leq \inf_{x\in Y}(\eta_\alpha\|x - x_0\|_\alpha - \hat{f}(x)).$$

Ahora la prueba continua como en el caso del Teorema de Hahn-Banach clásico. Incluimos aquí el argumento.

De la Desigualdad 3.5 tenemos que para cada $x \in Y$ y $\alpha \in (0,1)$, $|\hat{f}(x) + c| \leq \eta_\alpha\|x + x_0\|_\alpha$. Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $x \in Y$, entonces $|\hat{f}(x/\lambda) + c| \leq \eta_\alpha\|x/\lambda + x_0\|_\alpha$ si $\alpha \in (0,1)$. En consecuencia,

$$|\hat{f}(x) + \lambda c| \leq \eta_\alpha\|\lambda x_0 + x\|_\alpha, \quad \text{si } x \in Y \text{ y } \alpha \in (0,1). \tag{3.6}$$

Definamos $W = \{y + \lambda x_0 : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $\hat{g} : W \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{g}(x + \lambda x_0) = \hat{f}(x) + \lambda c, \quad \text{si } x \in Y \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es claro que $\hat{g}$ es lineal y $\hat{g} \restriction Z = f$. De modo que $(W, \hat{g}) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Además, por la Desigualdad (3.6), $|\hat{g}(x + \lambda x_0)| \leq \eta_\alpha \|x + \lambda x_0\|_\alpha$ para cualesquiera $x \in Y$ y $\alpha \in (0, 1)$. Para concluir la demostración, veamos que $(W, \hat{g}) \in \mathcal{A}$ (observe que $W \neq Y$ pues $x_0 \in W \setminus Y$).
Sean $x \in Y$, $\lambda, t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0, 1)$, y supongamos que $N(x + \lambda x_0, t) \geq \alpha$. Por el Teorema 2.9, tenemos que $\|x + \lambda x_0\|_\alpha \leq t$. Así, $|\hat{g}(x + \lambda x_0)| \leq \eta_\alpha t$. Por definición de la norma difusa N_0 se sigue que $N_0(\hat{g}(x + \lambda x_0), \eta_\alpha t) = 1 \geq \alpha$. Como $x \in Y$, $\lambda, t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0, 1)$ fueron arbitrarios, concluimos que $(W, \hat{g}) \in \mathcal{A}$. Finalmente, note que $(Y, \hat{f}) \leq (W, \hat{g})$ pues $Y \subset W$ y $\hat{g} \restriction Y = \hat{f}$. Esto es una contracción pues $(Y, \hat{f})$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}$ y $(Y, \hat{f}) \neq (W, \hat{g})$. De esta forma deducimos que $Y = X$ y con esto terminamos la prueba del teorema. $\square$

Bibliografía

[1] N. Abbasi and H. Mottaghi Golshan. On best approximation in fuzzy metric spaces. *Kybernetika*, 51:374–386, 05 2015.

[2] T. Bag and S. Samanta. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 11:687–705, 2003.

[3] T. Bag and S. Samanta. Fuzzy bounded linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 151:513–547, 2005.

[4] T. Bag and S. Samanta. A comparative study of fuzzy norms on a linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(6):670–684, 2008. Theme: Generalized Measures and Metrics.

[5] Y. J. Cho, T. M. Rassias, and R. Saadati. *Fuzzy Normed Spaces and Fuzzy Metric Spaces*, pages 11–43. Springer International Publishing, Cham, 2018.

[6] P. Diamond and P. Kloeden. Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 35(2):241–249, 1990.

[7] C. Felbin. Finite dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, 48(2):239–248, 1992.

[8] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena. On a class of completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(16):2193–2205, 2010. Theme: Mathematics.

[9] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena. Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170(1):95–111, 2011. Theme: Information processing.

[10] O. Kaleva and S. Seikkala. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(3):215–229, 1984.

[11] R. Lowen. *Fuzzy Set Theory: Basic Concepts, Techniques and Bibliography*. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] F. M. McNeill and E. Thro. *Fuzzy Logic: A Practical Approach*. Elsevier Science & Technology, 1994.

[13] S. Nădăban, S. Dzitac, and I. Dzitac. *Fuzzy Normed Linear Spaces*, pages 153–174. Springer International Publishing, Cham, 2020.

[14] S. Nădăban and I. Dzitac. Atomic decompositions of fuzzy normed linear spaces for wavelet applications. *Informatica*, 25(4):643–662, 2014.

[15] E. Pap. *Artificial Intelligence: Theory and Applications*. Studies in Computational Intelligence. Springer, Cham, 1 edition, 2021. Published: 16 July 2021 (hardcover), 17 July 2022 (softcover), 15 July 2021 (eBook).

[16] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114(2):409–422, 1986.

[17] A. Roldan-López-de Hierro, J. Martinez-Moreno, and C. Roldan. On interrelationships between fuzzy metric structures. *Iranian journal of fuzzy systems*, 10:133–150, 04 2013.

[18] M. Saheli. A comparative study of fuzzy norms of linear operators on fuzzy normed linear spaces. In *Journal of Mathematical Modeling (JMM)*, volume 2, pages 217–234. Kyung Moon Sa Co., 2015.

[19] M. Saheli. Hahn banach theorem on fuzzy normed linear spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, x(x):1–xx, 2015.

[20] B. Schweizer, A. Sklar, et al. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math*, 10(1):313–334, 1960.

[21] E. J. Villamizar Roa and G. Arenas Díaz. *Introduccion a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, Buracamanga, 2018.