

Propagación lenta de discontinuidades en ambientes de hidrodinámica y radiación en esferas
relativistas

Ludwin Fabián Castañeda Godoy

Trabajo de Grado para optar al título de magíster en física

Director

PhD. Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez

Codirector

PhD. Justo Hernán Ospino Zúñiga

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

Este trabajo va dedicado a mi familia por acompañarme durante el tiempo que duré en su realización, en especial a mi mamá: Alicia Godoy.

Agradecimientos

Agradezco a mis directores del trabajo de grado, el profe Luis y el profe Justo por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de este proyecto.

También agradezco a los compañeros del grupo de investigación de quienes tuve la oportunidad de ser guiado en mi proceso formativo tanto académico como moral.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1. Formulación de escalares	15
1.1. Ecuaciones de Einstein y escalares	15
1.2. Superficies de discontinuidad	19
1.3. Primera y segunda forma fundamental	20
2. Condiciones de acoplamiento	22
2.1. Condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot	22
2.2. Tensor de energía-momentum para un fluido radiante	27
2.3. Tensor de energía-momentum para un fluido perfecto	37
2.4. Tensor de energía-impulso de polvo	43
3. Evolución lenta	50
3.1. Aproximación cuasiestática (régimen de evolución lenta)	50
3.2. Fluido radiante	50
3.3. Tensor de fluido perfecto	56
3.4. Tensor de polvo	60
4. Conclusiones	64

Superficies de discontinuidad	5
4.1. Conclusiones	64
Referencias Bibliográficas	67
Apéndice	75

Lista de Figuras

- Figura 1. Clasificación de las superficies de discontinuidad modeladas para los tres tipos diferentes de fluidos: fluido radiante, fluido perfecto y polvo. 26
- Figura 2. Clasificación de las superficies de discontinuidad para los tres diferentes tipos de fluidos: fluido radiante, fluido perfecto y polvo bajo el régimen de evolución lenta 51

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Equivalencia entre tétradas	75

Resumen

Título: PROPAGACIÓN LENTA DE DISCONTINUIDADES EN AMBIENTES DE HIDRODINÁMICA Y RADIACIÓN EN ESFERAS RELATIVISTAS *

Autor: Ludwin Fabián Castañeda Godoy **

Palabras Clave: Superficies de discontinuidad, Relatividad General.

Descripción: Los eventos explosivos estelares han sido analizados desde hace décadas, debido a que éstos pueden describir escenarios tan variados como explosiones de supernovas o estallidos de rayos gamma. Estos eventos extremos en Relatividad General pueden ser descritos mediante una superficie de discontinuidad que se propaga y a su vez separa dos regiones diferentes del espacio-tiempo. En la distribución material donde ocurre la explosión, se pueden producir cuatro diferentes superficies de discontinuidad, las cuales se clasifican como choques impulsivos, capas, ondas de choque y fronteras.

Los cuatro diferentes tipos de superficie se caracterizan mediante dos parámetros: (ausencia) presencia de contenido material y (dis)continuidad de la velocidad de propagación. Se analizó el caso particular cuando la superficie divide una distribución material esféricamente simétrica descrita mediante un fluido anisótropo radiante. Las hipersuperficies que poseen un contenido material se modelaron para tres diferentes tipos de tensores de energía-impulso (fluido radiante, fluido perfecto y polvo). A partir de estos tipos de fluidos, se hallan las condiciones de acoplamiento que deben cumplir cada una de las cuatro superficies. Se demostró que a partir de las condiciones de acoplamiento que cumple un fluido radiante, se pueden hallar las condiciones para el caso de fluido perfecto y polvo. Por último, se analizó la evolución de la distribución material dentro de la aproximación cuasiestática o régimen de evolución lenta, con el fin de encontrar las restricciones que esta aproximación impone sobre la discontinuidad en las variables físicas.

* Trabajo de Maestría

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: PhD. Luis Núñez, codirector: Phd. Justo Ospino.

Abstract

Title: SLOW PROPAGATION OF DISCONTINUITIES IN HYDRODYNAMIC AND RADIATION ENVIRONMENTS ON RELATIVISTIC SPHERES *

Author: Ludwin Fabián Castañeda Godoy **

Keywords: Discontinuity Surfaces, General Relativity.

Description: Stellar explosive events have been analyzed for decades, because they can describe scenarios as varied as supernova explosions or gamma ray bursts. These extreme events in General Relativity can be described by a surface discontinuity that propagates and in turn separates two different regions of space-time. In the material distribution where the explosion occurs, four different discontinuity surfaces can be produced, which are classified as impulsive shocks, layers, shock waves and boundaries.

The four different surface types are characterized by two parameters: (absence) presence of material content and (dis)continuity of propagation velocity. The particular case was analyzed when the surface divides a spherically symmetric material distribution described by a radiating anisotropic fluid. Hypersurfaces possessing a material content were modeled for three different types of energy-pulse tensors (radiative fluid, perfect fluid and dust). From these fluid types, the coupling conditions that each of the four surfaces must satisfy are found. It was shown that from the coupling conditions fulfilled by a radiant fluid, the conditions for the case of perfect fluid and dust can be found. Finally, the evolution of the material distribution within the quasi-static approximation or slow evolution regime was analyzed in order to find the restrictions that this approximation imposes on the discontinuity in the physical variables.

* Master thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. PhD. Luis Núñez, codirector: Phd. Justo Ospino.

Introducción

El análisis de las ondas de choque en fluidos radiantes para la descripción de escenarios astrofísicos ha sido de gran relevancia para la hidrodinámica relativista durante las últimas décadas. Esto es debido a que las ondas de choque describen algunos fenómenos estelares violentos como los jets relativistas, las explosiones de supernovas o estallidos de rayos gamma. Además de estos eventos, los choques describen otros fenómenos naturales tales como las explosiones de volcanes o los truenos generados durante una tormenta. Asimismo, las ondas de choques también pueden ser originadas por sucesos artificiales, tales como los estallidos producidos por un avión supersónico. Así, una vez las ondas de choque son formadas, se propagan a una velocidad diferente a la del fluido que la rodea, generando una serie discontinuidades en las variables físicas del fluido.

Los fenómenos explosivos estelares deben ser descritos mediante fluidos radiantes, con el fin de describir escenarios astrofísicos de una manera mas realista. Así, los fluidos astrofísicos deben contener una gran parte de la energía, la densidad de momentum, la presión y el flujo de energía en términos de la radiación. De este modo, los fluidos radiantes estelares se pueden modelar como una combinación entre dos tipos de fluidos, una parte hidrodinámica mas una parte de radiación.

Un caso particular ocurre cuando las ondas de choque producidas en estos procesos violentos radiantes se propagan a una fracción no despreciable de la velocidad de la luz. Estas ondas de choque relativistas en fluidos radiantes han sido analizados por diversos autores, comenzando con Zeldovich en 1957 Zeldovich (1957) y seguido por Raizer en ese mismo año Raizer (1957).

Luego, varios investigadores han estudiado el efecto que produce la radiación en la evolución de los choques relativistas Zeldovich and Raizer (1966); Mihalas and Mihalas (2013); Lacey (1988); Lowrie et al. (1999); Lowrie and Edwards (2008); Ferguson et al. (2017).

Las ondas de choques en Relatividad General, pueden ser descritas como una superficie de discontinuidad permeable¹ sin contenido material que separa dos regiones distintas del espacio-tiempo. Para acoplar estas dos regiones, es necesario que se cumplan una serie de condiciones sobre las variables físicas y geométricas. El propósito de estas condiciones es evitar la aparición de singularidades en las variables a través de la superficie Herrera (1996). La primera persona que halló las condiciones de acoplamiento para una onda de choque relativista fue A.H. Taub Taub (1948). Estas condiciones implican la continuidad de la proyección del tensor de energía-impulso a lo largo de un vector normal a la superficie de discontinuidad, generalizando así las condiciones de Rankine-Hugoniot² para las ondas de choque relativistas. Estas condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas han sido aplicadas a algunos fenómenos astrofísicos violentos: explosiones de supernovas Colgate and White (1964), discos de acreción en agujeros negros Akizuki and Fukue (2008), implosión de estrellas masivas Núñez et al. (2007) y ondas de combustión relativistas Gao and Law (2012).

¹ Una superficie permeable es aquella donde la velocidad de propagación \dot{c} difiere de la velocidad con la que evoluciona el fluido que la rodea, dando lugar a un flujo de materia y/o radiación a través de la superficie.

² Las condiciones de Rankine-Hugoniot fueron propuestas por W.Rankine en 1870 y P.H.Hugoniot en 1887, para describir las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las variables físicas de dos fluidos Newtonianos que están separados por una onda de choque.

Además de la radiación emitida por los fenómenos explosivos, la presencia de anisotropía en la presión parece jugar un rol muy importante en la evolución de dichos fenómenos (Maharaj et al. (2012); Brassel et al. (2021)). De hecho, la anisotropía en la presión ha sido ampliamente estudiada para modelar una gran variedad de objetos compactos como estrellas de neutrones, estrellas de quarks, estrellas de bosones, gravastares entre otras (Ivanov (2017)). Recientemente se ha descubierto que ciertas distribuciones de fluidos radiantes inicialmente isotrópicas abandonan tal condición, generando una anisotropía en la presión luego de un determinado tiempo (Herrera (2020)). Por este motivo, si se desea estudiar procesos estelares violentos aún más realistas se puede imponer la condición de anisotropía en la presión sobre los fluidos.

Sin embargo, las ondas de choque en Relatividad General son un caso particular de una superficie de discontinuidad más general denominada *choque impulsivo*. De esta manera, los choques impulsivos se describen como una superficie de discontinuidad permeable que posee un contenido material.

Por ejemplo, los choques impulsivos pueden surgir con la aparición de burbujas y vacíos en modelos cosmológicos inflacionarios en el universo temprano (Esculpi and Herrera (1992)). Estos choques también han sido propuestos para explicar la evolución de estrellas solitónicas³ no topológicas compuesta por fluidos radiantes (Chiu (1990)). En este caso, la región interior de la estrella está compuesta por un solitón escalar y la región exterior por un gas de Fermi altamente relati-

³ Las estrellas solitónicas son un tipo de estrellas hipotéticas de gran masa, donde la materia en el núcleo se encuentra en un estado cuántico coherente de campos con espín 0 ó 1/2.

vista Esculpi and Herrera (1994). En la superficie donde se delimita el solitón se crea una tensión superficial que puede ser modelada mediante un choque impulsivo.

Al igual que las ondas de choque, los choques impulsivos también cumplen las condiciones de acoplamiento con el fin de evitar la aparición de singularidades en las variables físicas y/o geométricas. Estas condiciones son conocidas como *Condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot* y fueron halladas primeramente por A.H. Taub Taub (1980). Taub propuso en este caso que la discontinuidad en la proyección del tensor de energía-impulso del fluido a lo largo del vector normal debía ser igual a la derivada covariante del tensor de energía-momentum de la superficie. Las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot claramente se reducen a las condiciones de Rankine-Hugoniot usuales para una onda de choque si la superficie no posee contenido material.

A partir del choque impulsivo se puede deducir un caso particular de superficie si se impone la continuidad de la velocidad i.e. si la velocidad de propagación de la superficie y del fluido son iguales Herrera and Nunez (1989). Este tipo de superficie material impermeable es llamada usualmente *Capa*. W. Israel, fue el primero en hallar las condiciones de acoplamiento que ésta debe cumplir en el caso cuando se encuentra compuesta por una capa de polvo Israel (1966). Asimismo, demostró que si la capa no posee contenido material, se obtiene el caso de *Frontera*.

De esta manera, en Relatividad General existen cuatro diferentes tipos de superficies de discontinuidad: Choques impulsivos, Capas, Ondas de choque y Fronteras. Estas superficies de discontinuidad se pueden clasificar mediante dos parámetros únicamente: (ausencia)presencia de contenido material de la superficie y/o (dis)continuidad de la velocidad.

En este trabajo, se presenta una deducción unificada de las cuatro superficies de disconti-

nidad, así como las condiciones de acoplamiento que debe cumplir cada superficie. Para cada una de las cuatro superficies de discontinuidad se modela la hipersuperficie mediante diferentes tipos de fluido: polvo, fluido perfecto, fluido radiante. Además, se escriben las condiciones de acoplamiento que deben cumplir cada una de las superficies en términos de una tétrada unitaria ortogonal de vectores y sus respectivas derivadas. Por último, se analiza la evolución de las superficies de discontinuidad en el caso particular de evolución lenta. Este régimen tiene validez cuando la distribución cambia lentamente en una escala de tiempo típica que es muy grande comparada con la escala característica dentro de la cual la esfera reacciona a una perturbación Herrera et al. (2016).

La monografía está dividida en cinco capítulos: En el primero, se escriben las ecuaciones de Einstein en términos de una tétrada unitaria de vectores y sus respectivas derivadas. Además se describe el tipo de fluido del que están compuestas las regiones separadas por la superficie de discontinuidad. En el segundo, se definen de manera rigurosa la superficie de discontinuidad, así como el conjunto de condiciones de acoplamiento que éstas debe cumplir. En el siguiente capítulo, se hallan las condiciones de acoplamiento para cada tipo de superficie, modelándola mediante tres diferentes tipos de fluido: fluido radiante, fluido perfecto y polvo. En el cuarto capítulo, se hallan estas condiciones bajo el régimen de evolución lenta para cada tipo de superficie planteada. Por último, se define una serie de conclusiones que se pueden extraer a partir de las condiciones halladas para las diferentes superficies de discontinuidad.

1. Formulación de escalares

1.1. Ecuaciones de Einstein y escalares

Cualquier métrica $g_{\alpha\beta}$ definida en una variedad de espacio-tiempo (\mathcal{M}) en Relatividad General, se puede escribir en términos de una tétrada ortogonal de vectores unitarios de la siguiente manera Ospino et al. (2017, 2018)

$$g_{\alpha\beta} = -V_\alpha V_\beta + K_\alpha K_\beta + L_\alpha L_\beta + S_\alpha S_\beta. \quad (1)$$

Los vectores de la tétrada unitaria satisfacen las siguientes condiciones de ortonormalidad

$$-V_\alpha V^\alpha = K_\alpha K^\alpha = L_\alpha L^\alpha = S_\alpha S^\alpha = 1 \quad \text{y} \quad V_\alpha K^\alpha = V_\alpha L^\alpha = V_\alpha S^\alpha = K_\alpha L^\alpha = K_\alpha S^\alpha = L_\alpha S^\alpha = 0. \quad (2)$$

Si se considera un espacio-tiempo con simetría esférica, el elemento de línea en \mathcal{M} está dado por

$$ds^2 = -A(r,t)^2 dt^2 + B(r,t)^2 dr^2 + R(r,t)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \quad (3)$$

donde las coordenadas están dadas como $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$. La tétrada de vectores asociada a la métrica (3) es

$$V_\alpha = (-A, 0, 0, 0), \quad K_\alpha = (0, B, 0, 0), \quad L_\alpha = (0, 0, R, 0) \quad \text{y} \quad S_\alpha = (0, 0, 0, R \text{sen}(\theta)). \quad (4)$$

A partir de la tétrada unitaria (4), se puede construir la derivada covariante de cada uno de estos vectores en términos de los escalares J_1 , J_2 , σ_1 , σ_2 y a_1 de la siguiente manera

$$V_{\alpha;\beta} = -a_1 K_\alpha V_\beta + \sigma_1 K_\alpha K_\beta + \sigma_2 (L_\alpha L_\beta + S_\alpha S_\beta), \quad (5)$$

$$K_{\alpha;\beta} = -a_1 V_\alpha V_\beta + \sigma_1 V_\alpha K_\beta + J_1 (L_\alpha L_\beta + S_\alpha S_\beta), \quad (6)$$

$$L_{\alpha;\beta} = \sigma_2 V_\alpha L_\beta - J_1 K_\alpha L_\beta + J_2 S_\alpha S_\beta \quad y \quad (7)$$

$$S_{\alpha;\beta} = \sigma_2 V_\alpha S_\beta - J_1 K_\alpha S_\beta - J_2 L_\alpha S_\beta. \quad (8)$$

Los cinco escalares pueden ser escritos en términos de las funciones métricas y sus derivadas como

$$J_1 = \frac{1}{B} \frac{R'}{R}, \quad J_2 = \frac{1}{R} \cot(\theta), \quad \sigma_1 = \frac{1}{A} \frac{\dot{B}}{B}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{A} \frac{\dot{R}}{R} \quad y \quad a_1 = \frac{1}{B} \frac{A'}{A}, \quad (9)$$

con los puntos y las primas representando las derivadas temporales y radiales, respectivamente.

Por otro lado, la distribución material se describirá mediante un tensor de energía-momentum (radiación + hidrodinámica) asociado a un fluido anisótropo escrito como

$$T_{\alpha\beta} = (\bar{\rho} + \bar{P}) V_\alpha V_\beta + \bar{P} g_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} + \mathcal{F}_\alpha V_\beta + \mathcal{F}_\beta V_\alpha. \quad (10)$$

donde se han usado las variables intermedias (la barra representa la contribución total: Hidrodinámica + Radiación)

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_R, \quad \bar{P} = P + \mathcal{P}, \quad \bar{P}_\perp = P_\perp + \mathcal{P}_\perp \quad y \quad \mathcal{P}_\perp = \frac{\rho_R - \mathcal{P}}{2}. \quad (11)$$

El tensor de anisotropía $\Pi_{\alpha\beta}$ puede ser expresado como

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_1 \left(K_\alpha K_\beta - \frac{h_{\alpha\beta}}{3} \right), \quad (12)$$

con

$$\Pi_1 = \bar{P} - \bar{P}_\perp, \quad (13)$$

donde \bar{P}_\perp indica la presión tangencial total del fluido.

Las variables físicas medidas en un marco local de referencia (Marco de Eckart donde los elementos del fluido se encuentran en reposo) están definidas como

$$\bar{\rho} = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \quad \mathcal{F}_\alpha = -\rho V_\alpha - T_{\alpha\beta} V^\beta, \quad (14)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \quad \Pi_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (T_{\mu\nu} - P h_{\mu\nu}), \quad (15)$$

con $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu$.

Mientras que ρ_R , \mathcal{P} y \mathcal{F} son la densidad de radiación, la presión isotrópica de radiación y el flujo de radiación.

Es importante señalar que las variables radiantes se expresan en términos de los momentos de la intensidad específica del campo de radiación, $\mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)$ –medida en un punto r en un tiempo t , viajando en la dirección \vec{n} , con una frecuencia ν – y para el caso de simetría esférica pueden ser

escritas como Lindquist (1966); Mihalas and Mihalas (2013):

$$\rho_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty dv \int_1^{-1} d\mu \mathbf{I}(r,t;\vec{n},\mathbf{v}), \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dv \int_1^{-1} d\mu \mu \mathbf{I}(r,t;\vec{n},\mathbf{v}) \quad (16)$$

y

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dv \int_1^{-1} d\mu \mu^2 \mathbf{I}(r,t;\vec{n},\mathbf{v}). \quad (17)$$

El cuadvivector flujo de energía \mathcal{F}_α cumple la condición de ortogonalidad $\mathcal{F}^\alpha V_\alpha = 0$, además debido a la simetría esférica, las ecuaciones de Einstein implican $T_{03} = 0$, lo cual conlleva

a

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F} K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_\alpha = (0, \mathcal{F}, 0, 0). \quad (18)$$

Por último, las variables cinemáticas (la quadri-aceleración, el escalar de expansión y el escalar de deformación) para el fluido autogravitante están dados como:

$$a_\alpha = V^\beta V_{\alpha;\beta} = a_1 K_\alpha = \left(0, \frac{A'}{A}, 0, 0\right), \quad (19)$$

$$\Theta = V^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{2\dot{R}}{R}\right) = \sigma_1 + 2\sigma_2 \quad \text{y} \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{1}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{R}}{R}\right) = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (21)$$

1.2. Superficies de discontinuidad

De manera general, las superficies de discontinuidad en Relatividad General pueden ser catalogadas mediante dos parámetros: (ausencia) presencia del contenido material de la superficie y/o (dis)continuidad de la velocidad. Por lo tanto, existen cuatro tipos diferentes de superficie que se pueden encontrar utilizando estos dos parámetros: Choque impulsivo, Capa, Onda de choque y Frontera. Con el fin de acoplar las dos regiones que se encuentran separadas para alguna de estas superficies es necesario imponer las *condiciones de acoplamiento*.

Considérese que la distribución material se encuentra dividida en dos variedades de espacio-tiempos diferentes, \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- , con métricas dadas por $g_{\alpha\beta}^+(x_+^\alpha)$ y $g_{\alpha\beta}^-(x_-^\alpha)$ definidas como (3). Las variedades están acopladas por una superficie de discontinuidad Σ , definida de la siguiente manera,

$$\Sigma \equiv r - c(t) = 0. \quad (22)$$

El vector unitario normal a la superficie se define claramente como,

$$N_\alpha = \frac{\partial_\alpha \Sigma}{(-\partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma g^{\mu\nu})^{(1/2)}}. \quad (23)$$

Así, el vector normal se puede escribir en términos de la tétrada de vectores (en este caso particular por los vectores V_α y K_α) como,

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{\dot{c}}{A}\right)^2 + \left(\frac{1}{B}\right)^2}} \left(\frac{\dot{c}}{A} V_\alpha + \frac{1}{B} K_\alpha \right). \quad (24)$$

La ecuación (24) se reduce a una forma mas compacta utilizando las variables ξ_1 y ξ_2 , cumpliendo además que la norma sea unitaria se obtiene

$$N_\alpha = \xi_1 V_\alpha + \xi_2 K_\alpha, \quad N_\alpha N^\alpha = -\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \quad (25)$$

con

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{\dot{c}}{A}\right)^2 + \left(\frac{1}{B}\right)^2}} \frac{\dot{c}}{A} \quad \text{y} \quad \xi_2^2 = 1 + \xi_1^2. \quad (26)$$

Los vectores ortonormales al vector N_α y que se encuentran sobre la superficie de discontinuidad son

$$T_\alpha = \xi_2 V_\alpha + \xi_1 K_\alpha, \quad L_\alpha \quad \text{y} \quad S_\alpha. \quad (27)$$

1.3. Primera y segunda forma fundamental

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir una superficie de discontinuidad en Relatividad General fueron definidas rigurosamente primeramente por Darmois. De acuerdo con Darmois Darmois (1927), para acoplar dos regiones del espacio-tiempo a través de una superficie de discontinuidad $\Sigma = r - c(t) = 0$, se requiere que tanto la métrica como la derivada covariante del vector normal proyectado sobre dicha superficie, sean continuas. Años después, Lichnerowicz

propuso unas condiciones de acoplamiento⁴ que como demostraron Bonnor y Vickers Bonnor and Vickers (1981) son equivalentes a las propuestas por Darmois Lichnerowicz (1955). Recientemente, K. Lake ha propuesto que estas condiciones de Darmois y Lichnerowicz son equivalentes únicamente en un sistema de coordenadas normales Gaussianas Lake (2017).

En 1983, L. Herrera y J. Jiménez propusieron un conjunto alterno de condiciones equivalentes a las propuestas por Lichnerowicz y Darmois Herrera and Jiménez (1983a). De acuerdo con Herrera y Jiménez se pueden acoplar dos espacio-tiempos a través de una hipersuperficie únicamente en términos de una tétrada nula de vectores y sus respectivas derivadas direccionales.

Siguiendo la idea propuesta por Herrera-Jiménez, mostraremos que las superficies de discontinuidad se pueden acoplar mediante una tétrada unitaria de vectores y sus respectivas derivadas covariantes. Estas condiciones de acoplamiento propuestas serán equivalentes a las obtenidas por Herrera-Jiménez y por lo tanto equivalentes a las dadas por Lichnerowicz y Darmois (ver apéndice).

⁴ De acuerdo con Lichnerowicz, la condición suficiente para acoplar dos regiones sobre una superficie, es que exista un sistema de coordenadas tal que tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuas a través de la superficie de acoplamiento.

2. Condiciones de acoplamiento

2.1. Condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot

La variedad global, \mathcal{M} , se obtiene uniendo \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- a través de la superficie de discontinuidad Σ , i.e, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$, con lo cual la métrica inducida sobre Σ implica

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} e_{(\alpha)}^{\mu} e_{(\beta)}^{\nu} \quad \text{con} \quad e_{\alpha} \in (T_{\alpha}, L_{\alpha}, S_{\alpha}). \quad (28)$$

La métrica inducida o primera forma fundamental de la superficie se puede definir en términos de los vectores T_{α}, L_{α} y S_{α} como

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = -T_{\alpha}T_{\beta} + L_{\alpha}L_{\beta} + S_{\alpha}S_{\beta}. \quad (29)$$

El elemento de línea asociado a la métrica inducida está dado por lo tanto de la siguiente manera

$$ds_{\Sigma}^2 = -dT^2 + dL^2 + dS^2, \quad (30)$$

o en términos de las variables métricas A, B y R como

$$ds_{\Sigma}^2 = \left(A^2 - B^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) dt^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (31)$$

Si la primera forma fundamental es continua sobre la superficie de discontinuidad Σ se

cumple

$$[A^2 - B^2 \dot{c}^2]_c = 0, \quad (32)$$

donde \dot{c} es la velocidad de propagación de la superficie y el corchete $[A]_c = A_+ - A_-$ indica la resta de la cantidad evaluada sobre $r = c(t)$ en la variedad \mathcal{M}_+ y \mathcal{M}_- , respectivamente.

La segunda forma fundamental se define matemáticamente mediante el tensor de curvatura extrínseca $\kappa_{\alpha\beta}$, el cual está relacionado con el vector normal (24) de la siguiente manera

$$\kappa_{\alpha\beta} = N_{\mu;\nu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu}. \quad (33)$$

Las superficies con un contenido material (choques impulsivos y capas) poseen un tensor de energía-impulso $\tau_{\alpha\beta}$, relacionado con la discontinuidad del tensor de curvatura extrínseca mediante la ecuación de Lanczos Lanczos (1924)

$$\tau_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - \kappa \tilde{h}_{\alpha\beta}, \quad (34)$$

donde κ es la traza del tensor de curvatura extrínseca.

Los choques impulsivos son superficies con contenido material y fueron estudiados rigurosamente por A.H.Taub de la siguiente manera Taub (1980)

$$[T_{\alpha\beta} N^{\alpha}]_c = \tau_{\beta;\alpha}^{\alpha}, \quad (35)$$

con la siguiente restricción sobre el tensor de energía-impulso de la superficie

$$\tau_{\alpha\beta}N^\alpha = 0. \quad (36)$$

La ecuación (35) es denominada *Condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot* y contiene información acerca de la (dis)continuidad de la segunda forma fundamental. La discontinuidad de la segunda forma fundamental en las superficies con contenido material está introducida en la parte derecha de las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot Taub (1980). Debido a la simetría esférica, las proyecciones de las condiciones generalizadas a lo largo de L_α y S_α son nulas. Sin embargo, las proyecciones a lo largo de los vectores T_α y N_α sobreviven y están definidas como

$$\left[T_{\alpha\beta}N^\alpha T^\beta \right]_c = -\tau_{\beta;\alpha}^\alpha T^\beta \quad y \quad \left[T_{\alpha\beta}N^\alpha T^\beta \right]_c = \tau_{\beta;\alpha}^\alpha N^\alpha. \quad (37)$$

De esta manera mostraremos que las superficies de discontinuidad se pueden clasificar dependiendo entonces de la (ausencia)presencia de contenido material y/o de la velocidad relativa de la superficie con respecto a la velocidad en la región anterior (U_-) y posterior del fluido (U_+):

- **Choque impulsivo:** Son superficies permeables con contenido material donde la velocidad del choque difiere de la velocidad del fluido en la región antes y después del choque, i.e.

$$\tau_{\alpha\beta} \neq 0 \quad y \quad \dot{c} \neq U_{c-} \neq U_{c+};$$

- **Capas:** Son superficies impermeables con contenido material donde la velocidad de la capa es igual a la velocidad del fluido en la región antes y después de la capa, i.e.

$$\tau_{\alpha\beta} \neq 0 \text{ y } \dot{c} = U_{c-} = U_{c+};$$

- **Ondas de choque:** Son superficies permeables ausentes de contenido material donde la velocidad del choque difiere de la velocidad del fluido en la región antes y después de la onda de choque, i.e.

$$\tau_{\alpha\beta} = 0 \text{ y } \dot{c} \neq U_{c-} \neq U_{c+} \text{ y}$$

- **Frontera:** Son superficies impermeables ausentes de contenido material donde la velocidad de la capa es igual a la velocidad del fluido en la región antes y después de la capa, i.e.

$$\tau_{\alpha\beta} = 0 \text{ y } \dot{c} = U_{c-} = U_{c+}.$$

Debido a que los choques impulsivos y las capas son superficies con un contenido material ($\tau_{\alpha\beta} \neq 0$), dependen del tipo de fluido del que estén compuestos. Por este motivo, el tensor de energía-impulso de la superficie puede ser modelado de diversas maneras siempre y cuando se cumpla la restricción de ortogonalidad (36). Así, en este proyecto se plantea utilizar tres tipos diferentes de $\tau_{\alpha\beta}$ para describir las superficies de discontinuidad con contenido material: fluido radiante, fluido perfecto y polvo.

La velocidad U con la que se propaga el fluido en las dos regiones separadas por el fluido puede ser escrita en términos de los escalares de expansión (Θ) y deformación (σ) de la siguiente manera

$$U = \frac{1}{3}(\Theta - \sigma), \quad (38)$$

donde la velocidad del fluido está relacionada con el escalar σ_2 como $\frac{U}{R} = \sigma_2$.

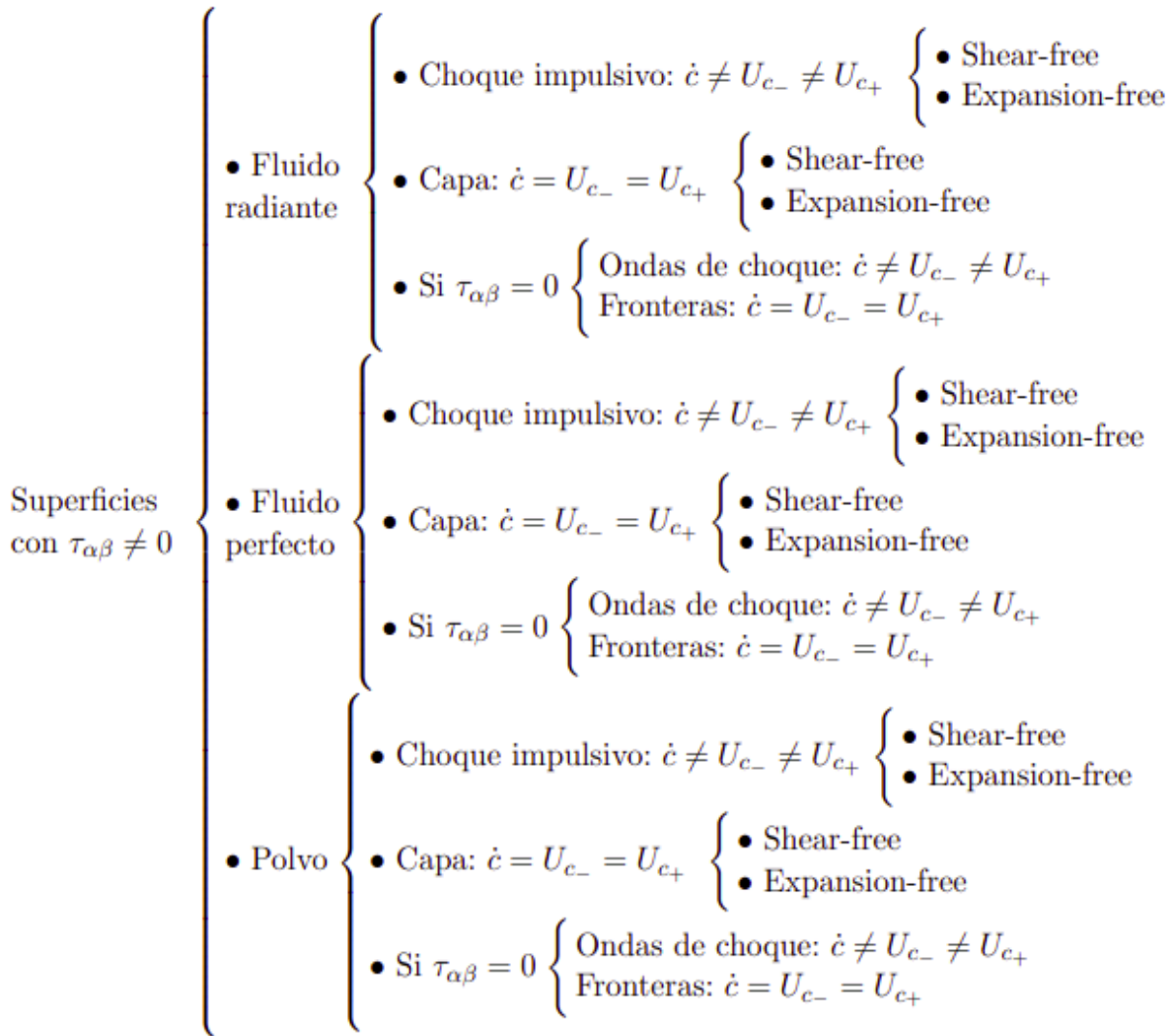


Figura 1. Clasificación de las superficies de discontinuidad modeladas para los tres tipos diferentes de fluidos: fluido radiante, fluido perfecto y polvo.

En el caso de las superficies permeables (choque impulsivo y onda de choque), la velocidad de propagación \dot{c} es diferente de la velocidad del fluido ($3\dot{c} \neq \Theta - \sigma$). Por el contrario, cuando las superficies son impermeables (capas y fronteras) la velocidad de propagación \dot{c} está relacionada con los escalares Θ y σ como $\dot{c} = U = \frac{1}{3}(\Theta - \sigma)$

2.2. Tensor de energía-momentum para un fluido radiante

Con el fin de cumplir las condiciones de acoplamiento (37), los choques impulsivos pueden ser modelados de manera general por un fluido que presente algún tipo de radiación. El tensor mas simple que se puede construir con esta restricción es aquel donde haya un flujo de energía en la dirección radial \mathcal{F}_α de la siguiente manera

$$\tau_{\alpha\beta} = (\rho_\Sigma + P_\Sigma) T_\alpha T_\beta + P_\Sigma \tilde{h}_{\alpha\beta} + (\mathcal{F}_\Sigma)_\alpha T_\beta \quad \text{con} \quad T_\alpha T^\alpha = -1. \quad (39)$$

Donde el cuadrivector flujo de energía sobre la superficie $(\mathcal{F}_\Sigma)_\alpha$ es radial, además ρ_Σ y P_Σ representan la densidad y la presión de la superficie. Este tensor de fluido radiante (39) está inspirado en los trabajos realizados por D.Mihalas y B.W. Mihalas Mihalas and Mihalas (2013).

■ Choque impulsivo

La condición generalizada de Rankine-Hugoniot proyectada a lo largo de T^β que deben cumplir los choques impulsivos para el caso cuando la superficie está modela por el tensor (39) es

$$\begin{aligned} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c &= \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \sqrt{1 + \xi_1^2} (\rho_\Sigma \sigma_1 + 2(P_\Sigma + \rho_\Sigma) \sigma_2 + \rho_\Sigma^\bullet) \\ &+ \xi_1 \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma + \mathcal{F}_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + a_1 \mathcal{F}_\Sigma + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma + \mathcal{F}_\Sigma^\dagger \end{aligned} \quad (40)$$

donde los puntos (\bullet) y las dagas (\dagger) indican derivadas direccionales a lo largo de la dirección del vector V_α y K_α , respectivamente.

La anterior ecuación se puede agrupar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c \end{aligned} \quad (41)$$

donde $U \neq \dot{c}$ está dada como $U = \frac{\dot{R}}{A}$ y el término entre corchetes se define como el flujo de momentum a través del choque impulsivo a lo largo del vector normal a la superficie.

De manera general, la condición (41) se puede expresar en términos de los escalares de expansión (Θ) y deformación (σ) (ecuaciones 20 y 21) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) (\Theta - \sigma) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3} (2\sigma + \Theta) + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} (\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \quad (42) \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c, \end{aligned}$$

donde se ha usado la definición de la función masa introducida por Misner y Sharp Hernandez Jr and Misner (1966) para despejar el escalar J_1

$$m(r,t) = \frac{R^3}{2} R_{23}^{23} = \frac{R}{2} (1 + R^2 \sigma_2^2 - J_1^2) \implies J_1 = \pm \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R} + R^2 \sigma_2^2}. \quad (43)$$

El hecho de expresar la anterior condición en términos de la función masa y los escalares de

expansión y deformación se debe a los diferentes escenarios que éstos describen Misner and Sharp (1964); Herrera et al. (2014); Di Prisco et al. (2011); Joshi et al. (2003).

La segunda condición generalizada de Rankine-Hugoniot proyectada a lo largo del vector N^β para un choque impulsivo compuesto por un fluido radiante está definida como

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \xi_1 (\rho_\Sigma \sigma_1 - 2P_\Sigma \sigma_2) \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} (-2J_1 P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_\Sigma \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \mathcal{F}_\Sigma \sigma_1. \end{aligned} \quad (44)$$

La anterior condición se reduce al caso de una onda de choque propuesto por A.M. Anile cuando $\mathcal{F} = \rho_\Sigma = P_\Sigma = \mathcal{F}_\Sigma = 0$ Anile (2005). Al igual que la primera condición para un fluido radiante, la segunda condición se puede escribir en términos de la función masa y los escalares de expansión y deformación así

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (\rho_\Sigma (2\sigma + \Theta) - 2P_\Sigma (\Theta - \sigma)) \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}(\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_\Sigma \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ &+ \frac{\mathcal{F}_\Sigma}{3} (2\sigma + \Theta). \end{aligned} \quad (45)$$

- **Shear-free:** Un caso particular en el cual se pueden estudiar las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo es el escenario de shear-free. La relevancia del tensor de deformación en la evolución de sistemas autogravitantes así como las consecuencias que surgen cuando este se anula ha sido discutido por diversos

autores Joshi et al. (2002); Collins and Wainwright (1983); Herrera et al. (2014). La condición generalizada (42) que cumple un choque impulsivo compuesto por un fluido radiante cuando el tensor de deformación se anula ($\sigma = 0$) está dada como

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{1}{3} (2P_{\Sigma} + 3\rho_{\Sigma}) \Theta + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} \Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \quad (46) \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned}$$

La segunda condición generalizada de Rankine-Hugoniot (45) para este escenario da como resultado

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma} + \frac{\xi_1}{3} (\rho_{\Sigma} - 2P_{\Sigma}) \Theta \\ & + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2 \sqrt{\frac{1}{9} \Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma} \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_{\Sigma} \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \quad (47) \\ & \quad \quad \quad + \frac{\mathcal{F}_{\Sigma}}{3} \Theta. \end{aligned}$$

- **Expansion-free:** Del mismo modo que en el caso anterior, las condiciones generalizadas para un choque impulsivo pueden ser analizadas cuando la expansión es nula sobre la superficie⁵. El caso de expansion-free ha sido propuesto para describir algunos es-

⁵ El caso de expansion-free describe una superficie de discontinuidad que mantiene su volumen invariante en el tiempo.

cenarios astrofísicos, entre ellos estudiar las características de estrellas dinámicas sin expansión en Relatividad General Sherif et al. (2019). La condición generalizada de Rankine-Hugoniot (40) para el caso ($\Theta = 0$) queda escrita como

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} - \frac{2}{3}P_{\Sigma}\sigma + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{\sigma^2}{9} + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \quad (48) \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned}$$

Al igual que la ecuación anterior, la condición (45) puede ser analizada en el caso cuando se anula la expansión de la superficie dando como resultado

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma} + \frac{\xi_1}{3} (2\rho_{\Sigma}\sigma + 2P_{\Sigma}\sigma) + \frac{2\sigma \mathcal{F}_{\Sigma}}{3} \\ & + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2 \sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma} \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_{\Sigma} \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \quad (49) \end{aligned}$$

■ Capas

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las capas para un fluido radiante se deducen de (40) y (44) imponiendo la continuidad de la velocidad ($\dot{c} = U_{c+} = U_{c-} = \sigma_2 R$).

La condición de acoplamiento para la capa proyectada a lo largo de T^B en el caso de un

fluido radiante se deduce de (41) y queda definida así

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2\dot{c}}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (50)$$

La ecuación anterior escrita en términos de los escalares de expansión, deformación y la función masa está dada como

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) (\Theta - \sigma) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3} (2\sigma + \Theta) + \frac{a_1 \mathcal{F}_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} (\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \quad (51) \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned}$$

Por otro lado, la condición de acoplamiento que debe cumplir la capa proyectada a lo largo del vector N^{β} está dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\rho_{\Sigma} \sigma_1 - \frac{2P_{\Sigma} \dot{c}}{R} \right) \\ + \sqrt{1 + \xi_1^2} (-2J_1 P_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma}) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_{\Sigma} \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \mathcal{F}_{\Sigma} \sigma_1. \end{aligned} \quad (52)$$

Al igual que la condición de una capa proyectada a lo largo del vector T^{β} , la condición (52)

se puede escribir en términos de Θ , σ y m de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (\rho_\Sigma (2\sigma + \Theta) - 2P_\Sigma (\Theta - \sigma)) \\ + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}(\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) &+ \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_\Sigma \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ &+ \frac{\mathcal{F}_\Sigma}{3} (2\sigma + \Theta). \end{aligned} \quad (53)$$

Al escribir las dos condiciones de acoplamiento para una capa en términos de la expansión, el tensor de deformación y la función masa surgen dos casos particulares para analizar: Shear-free y Expansion-free. Estos casos han sido arduamente estudiados (así como las consecuencias físicas que estas imponen sobre la evolución de fluidos relativistas) para describir diferentes escenarios tales como la evolución de distribuciones materiales esféricamente simétricas compuestas por un fluido anisótropo Di Prisco et al. (2011).

- **Shear-free:** Al igual que en el choque impulsivo, la condición generalizada (51) puede ser analizada en el caso de shear-free dando como resultado

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma^\bullet + \frac{1}{3} (2P_\Sigma + 3\rho_\Sigma) \Theta + \mathcal{F}_\Sigma^\dagger + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{a_1 \mathcal{F}_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma + \mathcal{F}_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) &= \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (54)$$

Por otro lado, la segunda condición generalizada (53) para el caso $\sigma = 0$ esta dada

como

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (\rho_\Sigma - 2P_\Sigma) \Theta \\ & + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R-2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_\Sigma \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\mathcal{F}_\Sigma}{3} \Theta. \end{aligned} \quad (55)$$

- **Expansion-free:** Del mismo modo que en el caso anterior, la primera condición generalizada (51) en el caso de expansion-free se define como

$$\begin{aligned} & \rho_\Sigma^\bullet - \frac{2}{3} P_\Sigma \sigma + \mathcal{F}_\Sigma^\dagger + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{a_1 \mathcal{F}_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{\sigma^2}{9} + \frac{R-2m}{R^3}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma + \mathcal{F}_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) = \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (56)$$

La segunda condición analizada para este caso ($\Theta = 0$) da como resultado

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (2\rho_\Sigma \sigma + 2P_\Sigma \sigma) + \frac{2\sigma \mathcal{F}_\Sigma}{3} \\ & + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R-2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\mathcal{F}_\Sigma \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Cabe resaltar que las dos condiciones de acoplamiento que debe cumplir una capa para los casos de *shear-free* y *expansion-free* son las mismas que cumple un choque impulsivo

cumpliendo la restricción $\dot{c} = U_{c_+} = U_{c_-}$.

■ Ondas de choque

Las ondas de choque son superficies de discontinuidad permeables que no poseen contenido material, con lo cual la primera y segunda forma fundamental son continuas a través de este. Las condiciones de Rankine-Hugoniot para una onda de choque se obtiene a partir de las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot si $\tau_{\alpha\beta} = 0$. Así, las condiciones de Rankine-Hugoniot proyectadas a lo largo del vector T^α y N^α para el caso de un fluido radiante están definidas como

$$\left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c = 0 \quad \text{y} \quad (58)$$

$$\left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = 0. \quad (59)$$

Las condiciones de Rankine-Hugoniot (58) y (59), pueden ser escritas en términos de la velocidad de propagación de la superficie \dot{c} utilizando la definición de ξ_1 . De esta manera, las condiciones (58) y (59) están dadas por

$$\dot{c}^2 [\bar{\rho} B^2]_c - 2\dot{c} [\mathcal{F} AB]_c + [\bar{P} A^2]_c = 0 \quad (60)$$

y

$$\dot{c}^2 [\mathcal{F}B^2]_c - \dot{c} [(\bar{P} + \bar{\rho})AB]_c + [\mathcal{F}A^2]_c = 0, \quad (61)$$

donde se ha usado la condición $\dot{c}_+ = \dot{c}_- = \dot{c}$.

La velocidad de propagación de la superficie se puede deducir de las ecuaciones (60) y (61) obteniéndose las siguientes condiciones

$$2 \frac{[\mathcal{F}AB]_c}{[\bar{\rho}B^2]_c} = \frac{[(\bar{P} + \bar{\rho})AB]_c}{[\mathcal{F}B^2]_c} \quad \text{y} \quad \frac{[\bar{P}A^2]_c}{[\bar{\rho}B^2]_c} = \frac{[\mathcal{F}A^2]_c}{[\mathcal{F}B^2]_c}. \quad (62)$$

La velocidad de la onda de choque se puede hallar utilizando la condición (35) para el caso cuando $\tau_{\alpha\beta} = 0$. Así la velocidad de la onda de choque está dada como $\dot{c}^2 = \frac{[\bar{P}A^2]_c}{[\bar{\rho}B^2]_c}$ Núñez et al. (2007).

■ Fronteras

Las fronteras al igual que las ondas de choque también presentan continuidad tanto en la primera como en la segunda forma fundamental debido a que son superficies sin contenido material. Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las fronteras, se pueden deducir por lo tanto de las condiciones de las capas si se impone que $\tau_{\alpha\beta} = 0$. Otra manera de hallar las condiciones de acoplamiento, es imponer la continuidad de la velocidad sobre las condiciones de Rankine-Hugoniot en una onda de choque $\dot{c} = U$. De esta manera, las

condiciones de Rankine-Hugoniot para una frontera están definidas como

$$[\bar{P}A^2]_c + U^2 [\bar{\rho}B^2]_c - 2U [\mathcal{F}AB]_c = 0 \quad \text{y} \quad U^2 [\mathcal{F}B^2]_c - U [(\bar{P} + \bar{\rho})AB]_c + [\mathcal{F}A^2]_c = 0. \quad (63)$$

Al igual que en el caso de las ondas de choque, la velocidad de propagación de las fronteras en (63) debe ser la misma, con lo cual se cumple las restricciones (62).

2.3. Tensor de energía-momentum para un fluido perfecto

Un caso particular que se puede deducir del fluido radiante es la superficie modelada por un fluido perfecto, i.e, cuando el flujo de radiación es nulo sobre la superficie ($\mathcal{F}_\Sigma = 0$). Estas superficies tienen por lo tanto un tensor de energía-momentum definido como Poisson (2002)

$$\tau_{\alpha\beta} = (\rho_\Sigma + P_\Sigma) T_a T_b + P_\Sigma h_{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad \tau_{\alpha\beta} N^\alpha = 0. \quad (64)$$

Este tipo de superficie (64) ha sido propuesta para analizar la estabilidad mecánica de una capa, esféricamente simétrica, infinitamente delgada, estática o dinámica alrededor de un agujero negro de Schwarzschild Brady et al. (1991); Lobo and Crawford (2005).

■ Choque impulsivo

La condición generalizada de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo compuesto por

un fluido perfecto proyectada a lo largo del vector T^β esta dada por

$$\left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c = \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \sqrt{1 + \xi_1^2} (\rho_\Sigma \sigma_1 + 2(P_\Sigma + \rho_\Sigma) \sigma_2 + \rho_\Sigma^\bullet) + \xi_1 \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma. \quad (65)$$

La anterior ecuación se puede agrupar de la siguiente manera

$$\rho_\Sigma^\bullet + \frac{2U}{R} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \rho_\Sigma \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \quad (66)$$

Al igual que en el choque impulsivo conformado por un fluido radiante, el término entre corchetes de la ecuación (66) implica el flujo de momentum a lo largo del vector normal.

De la misma manera que en el caso de fluido radiante, la superficie modelada por un fluido perfecto se puede escribir en términos de la función masa (m) y los escalares de expansión (Θ) y deformación (σ) así

$$\rho_\Sigma^\bullet + \frac{2}{3} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) (\Theta - \sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_\Sigma}{3} (2\sigma + \Theta) + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} (\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \quad (67)$$

La condición generalizada de Rankine-Hugoniot proyectada a lo largo del vector N^α para un choque impulsivo compuesto por un fluido perfecto se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \xi_1 (\rho_\Sigma \sigma_1 - 2P_\Sigma \sigma_2) \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} (-2J_1 P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (68)$$

La anterior ecuación se puede escribir en términos de m , Θ y σ quedando escrita como

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (\rho_\Sigma (2\sigma + \Theta) - 2P_\Sigma (\Theta - \sigma)) \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}(\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (69)$$

En el caso cuando el choque impulsivo se encuentra modelado por un fluido perfecto, las dos condiciones pueden ser analizadas para los casos de shear-free y expansion-free Joshi et al. (2002); Herrera et al. (2014).

- **Shear-free:** En este escenario particular, la ecuación (67) bajo la condición $\sigma = 0$ queda escrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2}{3} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) \Theta + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_\Sigma}{3} \Theta + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) = \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (70)$$

Al igual que en la primera condición generalizada, la ecuación (69) puede ser analizada cuando $\sigma = 0$ dando como resultado

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{\xi_1}{3} (\rho_\Sigma - 2P_\Sigma) \Theta \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R-2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (71)$$

- **Expansion-free:** Al igual que en el caso anterior, la primera condición generalizada para un choque impulsivo (67) puede ser analizada cuando $\Theta = 0$ quedando como

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma^\bullet - \frac{2}{3} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) \sigma + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{2\rho_\Sigma}{3} \sigma + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R-2m}{R^3}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) &= \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F}(1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (72)$$

La segunda condición generalizada (69) bajo el caso de expansion-free queda escrita así

$$\begin{aligned} \left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{2\xi_1}{3} (\rho_\Sigma + P_\Sigma) \sigma \\ &+ \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2\sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R-2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (73)$$

■ Capas

Similar al caso de una capa compuesta por un fluido radiante, las condiciones de acoplamiento para una capa modelada por un fluido radiante se pueden deducir a partir de las

condiciones de un choque impulsivo. Estas condiciones de acoplamiento deben cumplir la restricción de impermeabilidad ($\dot{c} = U_{c+} = U_{c-}$), con lo cual la primera condición de acoplamiento proyectada a lo largo del vector T_α es

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2\dot{c}}{R} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \rho_\Sigma \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) \\ + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (74)$$

Un caso particular sucede cuando $R \rightarrow r = c(t)$, $\sigma_1 = a_1 = J_1 = \xi_1^\bullet = \xi_1^\dagger = \rho_\Sigma^\dagger = 0$ y el flujo de momentum nulo, lo que implica que (74) queda dada como

$$\rho_\Sigma^\bullet + \frac{\dot{c}}{c} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) = 0 \iff (\rho A)^\bullet + P_\Sigma \frac{dA}{dt} = 0, \quad \text{con } A = 4\pi c^2 \quad (75)$$

donde el primer término representa la variación de la energía interna de la capa y el segundo término es el trabajo interno hecho por la capa Lobo and Crawford (2005); Pereira et al. (2014). La segunda condición de acoplamiento para una capa que se encuentra modelada mediante un fluido perfecto está dada como

$$\begin{aligned} \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \xi_1 \left(\rho_\Sigma \sigma_1 - \frac{2P_\Sigma \dot{c}}{R} \right) \\ + \sqrt{1 + \xi_1^2} (-2J_1 P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (76)$$

- **shear-free:** Del mismo modo que los choques impulsivos compuestos por un fluido

perfecto, la primera condición para una capa (74) en el caso de shear-free esta dada como

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) \Theta + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3} \Theta + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} \Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (77)$$

La segunda condición de acoplamiento que debe cumplir una capa compuesta por un fluido perfecto cuando $\sigma = 0$ es

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma} + \frac{\xi_1}{3} (\rho_{\Sigma} - 2P_{\Sigma}) \Theta \\ & + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2 \sqrt{\frac{1}{9} \Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma} \right) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (78)$$

- **Expansion-free:** Al igual que en el caso anterior, la primera condición (74) puede ser analizada para el caso de expansion-free dando como resultado

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} - \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) \sigma + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{2\rho_{\Sigma}}{3} \sigma + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{1}{9} \sigma^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (79)$$

La condición (76) analizada para el cuando el escalar de expansión se anula ($\Theta = 0$) se

obtiene como resultado

$$\begin{aligned} \left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2 \mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c &= \xi_1^\bullet \rho_\Sigma + \frac{2 \xi_1}{3} (\rho_\Sigma + P_\Sigma) \sigma \\ + \sqrt{1 + \xi_1^2} \left(\left(\mp 2 \sqrt{\frac{1}{9} \sigma^2 + \frac{R - 2m}{R^3}} \right) P_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma \right) &+ \frac{\xi_1 \xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Las condiciones bajo los casos de shear-free y expansion-free que cumple una capa compuesta por un fluido perfecto difieren de las que describen los choque impulsivos debido a $\dot{c} \neq U$.

■ Ondas de choque y Fronteras

Debido a que las ondas de choque y las fronteras son superficies ausentes de contenido material, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, las condiciones de Rankine-Hugoniot son las mismas que las propuestas para un fluido radiante (ver ecuaciones 60, 61 y 63).

2.4. Tensor de energía-impulso de polvo

Las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo (35) dependen del tipo de fluido del que este se encuentra compuesto. Así, en Relatividad General la superficie de discontinuidad mas simple posible es aquella que este compuesta por polvo Israel (1966). Este tipo de fluido se puede deducir a partir de un fluido perfecto si la presión es nula ($P_\Sigma = 0$) y tiene un tensor de energía-impulso asociado como

$$\tau_{\alpha\beta} = \rho_\Sigma T_\alpha T_\beta, \quad (81)$$

donde ρ_Σ es la densidad de energía de la superficie. Este tipo de fluido ha sido propuesto para analizar variados escenarios tales como modelos homogéneos del universo Tolman (1934) o el colapso gravitacional de un capa esférica Israel (1966); Poisson (2002).

■ Choques impulsivos

En este caso, donde se considera una superficie compuesta por *polvo*, la condición generalizada de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo proyectada a lo largo del vector T^α

(37) es

$$\begin{aligned} & \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c = \xi_1 \rho_\Sigma^\dagger + \sqrt{1 + \xi_1^2} \rho_\Sigma^\bullet \\ & + \frac{\rho_\Sigma \xi_1 \xi_1^\bullet}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \rho_\Sigma \left(a_1 \xi_1 + 2J_1 \xi_1 + \xi_1^\dagger + (\sigma_1 + 2\sigma_2) \sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

La anterior condición generalizada para el caso de un choque impulsivo se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2U}{R} \rho_\Sigma + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \rho_\Sigma \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 \rho_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + \\ & \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c, \end{aligned} \quad (83)$$

donde el término entre corchetes indica el flujo de momentum a lo largo del vector normal.

Nótese que en el caso particular cuando $[\bar{P}]_c = -[\bar{\rho}]_c$, el flujo de momentum depende únicamente de la discontinuidad en el flujo de radiación. La ecuación (83) se puede escribir en

términos de la función masa y los escalares de expansión y deformación obteniéndose

$$\begin{aligned}
& \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3}\rho_{\Sigma}(\Theta - \sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3}(2\sigma + \Theta) + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\
& + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}(\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger}} \right) = \\
& \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F}(1 + 2\xi_1^2) + \xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c.
\end{aligned} \tag{84}$$

La condición generalizada de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo compuesto por polvo proyectada a lo largo del vector N^{α} esta definida por

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_{\Sigma} \left(\frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^{\bullet} + \xi_1\sigma_1 + a_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \tag{85}$$

La segunda condición de Rankine-Hugoniot (85) también se puede expresar en términos de m , Θ y σ como

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_{\Sigma} \left(\frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^{\bullet} + \frac{\xi_1}{3}(2\sigma + \Theta) + a_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \tag{86}$$

Si el término entre corchetes en (86) es nulo pero $\rho_{\Sigma} \neq 0$, la cuadiaceleración debe cumplir la siguiente restricción

$$a_1 = \frac{\xi_1^{\bullet}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger}}{1 + \xi_1^2} - \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}(2\sigma + \Theta). \tag{87}$$

- **Shear-free:** Al igual que en los casos de fluido radiante y fluido perfecto, la ecuación

(84) puede ser analizada para la condición $\sigma = 0$ quedando como

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma}\Theta + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R-2m}{R^3}\rho_{\Sigma}} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (88)$$

La condición (86) para el caso de shear-free esta dada como

$$\left[\bar{P} (1 + \xi_1^2) + \bar{\rho} \xi_1^2 - 2\mathcal{F} \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_{\Sigma} \left(\frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^{\bullet} + \frac{\xi_1}{3}\Theta + a_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \quad (89)$$

- **Expansion-free:** La ecuación (84) bajo la condición de expansion-free ($\Theta = 0$) se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R-2m}{R^3}\rho_{\Sigma}} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (90)$$

De forma similar a los escenarios de fluido radiante y fluido perfecto, la ecuación (86)

se puede analizar para el caso de expansion-free obteniendo

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_\Sigma \left(\frac{\xi_1 \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^\bullet + \frac{\xi_1}{3} 2\sigma + a_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \quad (91)$$

■ Capas

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las capas se pueden deducir de las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot para el choque impulsivo si se impone la continuidad de la velocidad. Ésta se da cuando se impone que la superficie sea impermeable ($U_{c-} = U_{c+} = \dot{c}$). Así, la primera condición de acoplamiento que debe cumplir una capa está dada como

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2\dot{c}}{R}\rho_\Sigma + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \rho_\Sigma \sigma_1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(2J_1 \rho_\Sigma + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + \\ \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F} (1 + 2\xi_1^2) + \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (92)$$

De manera similar al choque impulsivo, la primera condición de acoplamiento para una capa

se escribe en términos de los escalares σ y Θ como

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3}\rho_{\Sigma}(\Theta - \sigma) + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3}(2\sigma + \Theta) + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \\ & + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}(\Theta - \sigma)^2 + \frac{R - 2m}{R^3}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger}} \right) = \\ & \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F}(1 + 2\xi_1^2) + \xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (93)$$

A su vez, la segunda condición de acoplamiento queda escrita en términos de los escalares de expansión y deformación como

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_{\Sigma} \left(\frac{\xi_1 \xi_1^{\dagger}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^{\bullet} + \frac{\xi_1}{3}(2\sigma + \Theta) + a_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \quad (94)$$

- **Shear-free:** La primera condición para una capa compuesta por polvo puede ser analizada para el caso de shear-free dando como resultado

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma}\Theta + \frac{\xi_1 \xi_1^{\bullet} \rho_{\Sigma}}{1 + \xi_1^2} + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\Theta^2 + \frac{R - 2m}{R^3}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger}} \right) \\ & + \frac{\xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F}(1 + 2\xi_1^2) + \xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \end{aligned} \quad (95)$$

Del mismo modo, la segunda condición (94) en el caso $\sigma = 0$ queda como

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_\Sigma \left(\frac{\xi_1 \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^\bullet + \frac{\xi_1}{3}\Theta + a_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \quad (96)$$

- **Expansion-free:** La primera condición generalizada (92) en el caso de expansion-free queda definida de la siguiente manera

$$\rho_\Sigma^\bullet + \frac{\xi_1 \xi_1^\bullet \rho_\Sigma}{1 + \xi_1^2} + \frac{\xi_1^\dagger \rho_\Sigma}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\pm 2\sqrt{\frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{R - 2m}{R^3}\rho_\Sigma} + a_1\rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[-\mathcal{F}(1 + 2\xi_1^2) + \xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c. \quad (97)$$

Por otro lado, la segunda condición (94) cuando el escalar de expansión se anula ($\Theta = 0$) queda definida como

$$\left[\bar{P}(1 + \xi_1^2) + \bar{\rho}\xi_1^2 - 2\mathcal{F}\xi_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right]_c = \rho_\Sigma \left(\frac{\xi_1 \xi_1^\dagger}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \xi_1^\bullet + \frac{\xi_1}{3}2\sigma + a_1\sqrt{1 + \xi_1^2} \right). \quad (98)$$

■ Ondas de Choque y Fronteras

Al igual que en el caso de las superficies modeladas por un fluido radiante o un fluido perfecto, las condiciones que deben cumplir las ondas de choque y fronteras en el caso de polvo están dadas por (58), (59) y (63), respectivamente.

3. Evolución lenta

3.1. Aproximación cuasiestática (régimen de evolución lenta)

El régimen de evolución lenta o aproximación cuasiestática es el siguiente paso fuera del equilibrio hidrostático de un fluido que compone una distribución material. En este régimen, el fluido evoluciona lentamente en una escala de tiempo que es muy grande comparada con el tiempo típico en el que la esfera reacciona a una ligera perturbación del equilibrio hidrostático Herrera (1996).

Esta suposición de evolución lenta no es tan restrictiva como parece, ya que el tiempo hidrostático (τ_h) es pequeño en la evolución estelar. Así τ_h para el sol es de alrededor de 27 minutos, para una enana blanca 4.5 segundos y 10^{-4} segundos para una estrella de neutrones de 1 masa solar y 10 Km de radio Hansen et al. (2012).

Matemáticamente, el régimen de evolución lenta se puede escribir como

$$\xi_1^2 = \sigma_1^2 = \xi_1 \sigma_1 = \xi_1^\bullet = \xi_1 \xi_1^\dagger = \xi_1 \sigma_2 = \mathcal{F}_\Sigma \xi_1 = \xi_1 U = \Theta^2 = \sigma^2 = 0 \quad \text{y} \quad \xi_1 \approx \frac{\dot{c}B}{A}. \quad (99)$$

Así, los tres casos antes mencionados de tensores que modelan la superficie de discontinuidad (fluido radiante, fluido perfecto y polvo) pueden ser analizados bajo esta aproximación.

3.2. Fluido radiante

■ Choque impulsivo

Los choques impulsivos compuestos por un fluido radiante pueden ser analizadas bajo el

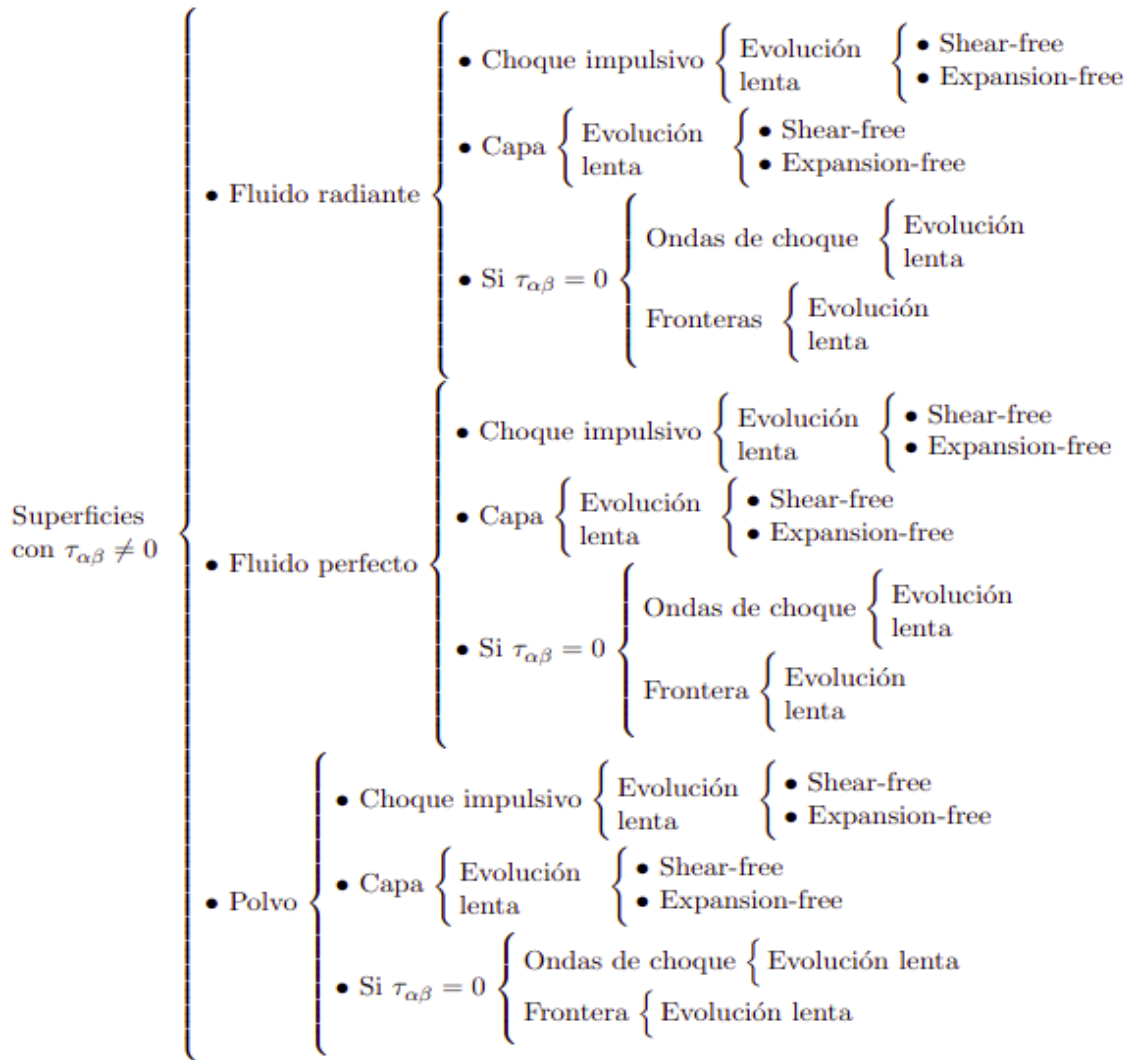


Figura 2. Clasificación de las superficies de discontinuidad para los tres diferentes tipos de fluidos: fluido radiante, fluido perfecto y polvo bajo el régimen de evolución lenta

régimen de evolución lenta imponiendo las restricciones (99). En este caso, la primera condición generalizada de Rankine-Hugoniot (42) bajo la aproximación cuasiestática da como

resultado

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + \xi_1 \left(2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma} = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1 - \mathcal{F}]_c . \end{aligned} \quad (100)$$

La ecuación (100) escrita en términos de m , Θ y σ queda como

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) (\Theta - \sigma) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3} (2\sigma + \Theta) + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma} \\ + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] = -[\mathcal{F}]_c . \end{aligned} \quad (101)$$

Nótese que la discontinuidad en el flujo de radiación depende de las variables físicas de la superficie ρ_{Σ} , P_{Σ} y \mathcal{F}_{Σ} , así como de los escalares σ , Θ , a_1 y la función masa m . Bajo el régimen de evolución lenta, la segunda condición generalizada de Rankine-Hugoniot da como resultado

$$[\bar{P}]_c = a_1 (2P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) \mp \frac{2P_{\Sigma}}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} , \quad (102)$$

donde se puede observar que la discontinuidad en la presión total no depende del flujo de radiación de la superficie \mathcal{F}_{Σ} , la velocidad de propagación \dot{c} ni de los escalares de expansión y deformación.

- **Shear-free:** Si el choque impulsivo se analiza para el caso cuando $\sigma = 0$, la ecuación

(101) se convierte en

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) \Theta + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \frac{\rho_{\Sigma}}{3} \Theta + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma} \\ & + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] = -[\mathcal{F}]_c. \end{aligned} \quad (103)$$

- **Expansion-free:** Por otro lado, si el choque impulsivo cumple la condición $\Theta = 0$ la ecuación (101) queda escrita como

$$\begin{aligned} & \rho_{\Sigma}^{\bullet} - \frac{2}{3} P_{\Sigma} \sigma + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ & - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] = -[\mathcal{F}]_c. \end{aligned} \quad (104)$$

La condición (102) queda igual para los casos de shear-free y expansion-free debido a que no depende de los escalares σ y Θ .

La ecuación (100) se puede escribir en términos de \dot{c} así

$$\begin{aligned} & \dot{c} \left(\left(\frac{B^{\dagger}A - A^{\dagger}B}{A^2} \right) \rho_{\Sigma} + \left(\left[\frac{B}{A} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c - \frac{B}{A} \left(2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1 \rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \right) \right) \\ & + \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + [\mathcal{F}]_c = 0. \end{aligned} \quad (105)$$

A partir de la ecuación anterior se puede despejar la velocidad de propagación del choque

impulsivo cuando este se encuentra compuesto por un fluido radiante dando como resultado

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2} (B^{\dagger} A - A^{\dagger} B) + \left[\frac{B}{A} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c - 2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1 \rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}}. \quad (106)$$

■ Capas

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las capas bajo la aproximación cuasiestática se obtienen al imponer la restricción (99) sobre las condiciones (50) y (52). La primera condición de acoplamiento para una capa bajo la aproximación cuasiestática está definida como

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2\dot{c}}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + \xi_1 \left(2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma} + \mathcal{F}_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + \xi_1^{\dagger} \rho_{\Sigma} = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1 - \mathcal{F}]_c. \end{aligned} \quad (107)$$

La anterior ecuación escrita en términos de los escalares de expansión, deformación y la función masa queda definida de la misma manera que (101). La velocidad para una capa puede ser hallada de la ecuación (107) y está dada como

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \mathcal{F}_{\Sigma}^{\dagger} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2} (B^{\dagger} A - A^{\dagger} B) + \left[\frac{B}{A} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c + \frac{2}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - 2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1 \rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}}. \quad (108)$$

La segunda condición de acoplamiento para una capa modelada por un fluido radiante bajo

el régimen de evolución lenta está dada de la siguiente manera

$$[\bar{P}]_c = a_1 (2P_\Sigma + \rho_\Sigma) \mp \frac{2P_\Sigma}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}}. \quad (109)$$

Al igual que en el caso de un fluido radiante, la discontinuidad de la presión total a través de una capa no depende del flujo de radiación \mathcal{F}_Σ ni de la velocidad de propagación \dot{c} .

- **Shear-free:** La discontinuidad en el flujo de radiación (107) para una capa en el caso de shear-free está definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -[\mathcal{F}]_c &= \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2}{3} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) \Theta + \mathcal{F}_\Sigma^\dagger + \frac{\rho_\Sigma}{3} \Theta + a_1 \mathcal{F}_\Sigma + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma \\ &+ \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1]. \end{aligned} \quad (110)$$

- **Expansion-free:** Por otro lado, la discontinuidad en el flujo de radiación para una capa en el caso cuando el escalar de expansión se anula esta dado como

$$\begin{aligned} -[\mathcal{F}]_c &= -[(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] + \rho_\Sigma^\bullet - \frac{2}{3} P_\Sigma \sigma + \mathcal{F}_\Sigma^\dagger + a_1 \mathcal{F}_\Sigma + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma \\ &+ \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right). \end{aligned} \quad (111)$$

La condición (109) no se ve alterada para los casos de shear-free y expansion-free debido a que no depende de σ y Θ .

■ Ondas de choque

Al igual que para los choques impulsivos y las capas, las condiciones de Rankine-Hugoniot en el caso de una onda de choque se pueden analizar bajo el régimen de evolución lenta. En este caso, las condiciones de Rankine-Hugoniot quedan definidas como

$$[(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1 - \mathcal{F}]_c = 0 \quad \text{y} \quad [\bar{P}]_c = 0. \quad (112)$$

La segunda condición de Rankine-Hugoniot indica que la presión total es continua a través de la onda de choque Castañeda-Godoy et al. (2021). La velocidad de la onda de choque se puede deducir de las condiciones (112) dando como resultado

$$\dot{c} = \frac{[\mathcal{F}]_c}{\left[(\bar{P} + \bar{\rho}) \frac{B}{A} \right]_c} \quad \text{con} \quad [\bar{P}]_c = 0. \quad (113)$$

Nótese que en el caso particular cuando $[\bar{P}]_c = -[\bar{\rho}]_c$, la velocidad de la onda de choque no está definida, esto implica que la densidad total deber ser discontinua ($[\bar{\rho}]_c \neq 0$).

■ Frontera

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las fronteras bajo la aproximación cuasiestática están dadas por (112) imponiendo la condición $\dot{c} = U_{c-} = U_{c+}$. Al igual que las ondas de choque, la velocidad de las fronteras está definida por (113).

3.3. Tensor de fluido perfecto

■ Choque impulsivo

Las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot para el caso cuando la superficie está constituido por un fluido perfecto (ecuaciones 67 y 69) también se pueden analizar bajo el régimen de evolución lenta. En esta aproximación, la primera condición generalizada de Rankine-Hugoniot proyectada a lo largo del vector T^β esta dada como

$$\rho_\Sigma^\bullet + \frac{2U}{R} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + \rho_\Sigma \sigma_1 + \xi_1 \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1 - \mathcal{F}]_c. \quad (114)$$

La primera condición para un choque impulsivo (114) en términos de la función masa (m) y los escalares Θ y σ se define como

$$\begin{aligned} & \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2}{3} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) (\Theta - \sigma) + \frac{\rho_\Sigma}{3} (2\sigma + \Theta) + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma \\ & + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1]_c - [\mathcal{F}]_c, \end{aligned} \quad (115)$$

donde se puede ver claramente que el flujo de radiación es discontinuo a través del choque impulsivo.

La segunda condición generalizada de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo modelado por un fluido perfecto en el régimen de evolución lenta se define como

$$[\bar{P}]_c = a_1 (2P_\Sigma + \rho_\Sigma) \pm \frac{2P_\Sigma}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}}, \quad (116)$$

donde se ve claramente que la discontinuidad en la presión total no depende de la velocidad de propagación \dot{c} ni de los escalares σ y Θ .

- **Shear-free:** De la misma manera que en los escenarios anteriores, la ecuación (115) puede ser analizada cuando $\sigma = 0$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3}(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma})\Theta + \frac{\rho_{\Sigma}}{3}\Theta + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ = [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1 - \mathcal{F}]_c. \end{aligned} \quad (117)$$

- **Expansion-free:** En el caso de expansion-free, la ecuación (115) queda definida como

$$\rho_{\Sigma}^{\bullet} - \frac{2}{3}P_{\Sigma}\sigma + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1]_c - [\mathcal{F}]_c. \quad (118)$$

La condición (116) queda de la misma manera para los casos de shear-free y expansion-free debido a que no depende de los escalares σ y Θ .

La ecuación (114) puede ser escrita en términos de la velocidad \dot{c} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{c} \left(\left(\frac{B^{\dagger}A - A^{\dagger}B}{A^2} \right) \rho_{\Sigma} + \left(\left[\frac{B}{A}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c - \frac{B}{A} \left(2J_1(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1\rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \right) \right) \\ + \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R}(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + [\mathcal{F}]_c = 0, \end{aligned} \quad (119)$$

donde la velocidad del choque impulsivo está dado como

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R}(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2}(B^{\dagger}A - A^{\dagger}B) + \left[\frac{B}{A}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c - 2J_1(P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1\rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}}. \quad (120)$$

■ Capas

Las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las capas bajo la aproximación cuasiestática se deducen de (74) y (76) imponiendo (99). La primera condición de acoplamiento queda definida como

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2\dot{c}}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + \rho_{\Sigma} (\sigma_1 + \xi_1^{\dagger}) + \xi_1 (2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger}) + a_1 \mathcal{F}_{\Sigma} \\ = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] - [\mathcal{F}]_c. \end{aligned} \quad (121)$$

donde al igual que en el choque impulsivo, se observa que el flujo de radiación es discontinuo.

La velocidad para una capa compuesta por un fluido perfecto bajo el régimen de evolución lenta está dada como

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma} \sigma_1 + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2} (B^{\dagger} A - A^{\dagger} B) + \left[\frac{B}{A} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c + \frac{2}{R} (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - 2J_1 (P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) - a_1 \rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}}. \quad (122)$$

La segunda condición de acoplamiento que debe cumplir una capa compuesta por un fluido perfecto bajo el régimen de evolución lenta están dadas como

$$[\bar{P}]_c = a_1 (2P_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}) \pm \frac{2P_{\Sigma}}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}}. \quad (123)$$

A partir de la ecuación anterior se deduce que la discontinuidad en la presión total en una capa bajo el régimen de evolución lenta depende únicamente de la presión, la densidad y la

masa de la superficie.

- **Shear-free:** La discontinuidad en el flujo de radiación para una capa modelada por un fluido perfecto está dada como

$$\begin{aligned}
 -[\mathcal{F}]_c = & -[(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1]_c + \rho_\Sigma^\bullet + \frac{2\dot{c}}{R} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + \rho_\Sigma (\sigma_1 + \xi_1^\dagger) \\
 & + \xi_1 \left(2J_1 (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right) + a_1 \mathcal{F}_\Sigma.
 \end{aligned} \tag{124}$$

- **Expansion-free:** Por otro lado, la discontinuidad en el flujo de radiación para una capa cuando $\Theta = 0$ es

$$\begin{aligned}
 -[\mathcal{F}]_c = & \rho_\Sigma^\bullet - \frac{2}{3} P_\Sigma \sigma + \xi_1^\dagger \rho_\Sigma - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1]_c \\
 & + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} (P_\Sigma + \rho_\Sigma) + a_1 \rho_\Sigma + \rho_\Sigma^\dagger \right),
 \end{aligned} \tag{125}$$

donde la condición (123) queda de la misma forma para los casos de shear-free y expansion-free debido a que no depende de los escalares de expansión ni deformación.

■ Ondas de choque y Fronteras

Debido a que las ondas de choque y fronteras no poseen un contenido material ($\tau_{\alpha\beta} = 0$), las condiciones de Rankine-Hugoniot que éstas deben cumplir bajo la aproximación cuasi-estática están definidas por (112).

3.4. Tensor de polvo

■ Choque impulsivo

En el caso de una superficie modelada por un tensor de polvo, la primer condición generalizada de Rankine-Hugoniot (84) bajo la aproximación cuasiestática está dada como

$$\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R}\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + \xi_1 \left(2J_1\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} = [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1 - \mathcal{F}]_c. \quad (126)$$

En términos de Θ , σ y m , la anterior condición para un choque impulsivo queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2}{3}\rho_{\Sigma}(\Theta - \sigma) + \frac{\rho_{\Sigma}}{3}(2\sigma + \Theta) + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) \\ = [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1] - [\mathcal{F}]_c, \end{aligned} \quad (127)$$

donde al igual que en los fluidos radiante y fluido perfecto, el flujo de radiación es discontinuo a través del choque impulsivo.

La segunda condición generalizada de Rankine-Hugoniot para el caso de un choque impulsivo compuesto por polvo (86) bajo el régimen de evolución lenta se define de la siguiente manera

$$[\bar{P}]_c = a_1\rho_{\Sigma}. \quad (128)$$

Un caso particular que se puede deducir de la anterior condición es cuando la presión total es continua $[\bar{P}]_c = 0$. Si $\rho_{\Sigma} \neq 0$, la continuidad de la presión total implica que la cuadrilación sea nula ($a_1 = 0$).

- **Shear-free:** Si el choque cumple la condición de *shear-free*, la ecuación (127) esta

dada como

$$\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma}\Theta + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} \rho_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] = -[\mathcal{F}]_c . \quad (129)$$

- **Expansion-free:** Por otro lado, si el choque impulsivo compuesto por polvo implica la condición $\Theta = 0$, la ecuación (127) está definida como

$$\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{2m}{R}} \rho_{\Sigma} + a_1 \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) = [(\bar{P} + \bar{\rho}) \xi_1] - [\mathcal{F}]_c , \quad (130)$$

donde la discontinuidad en el flujo de radiación no depende del escalar de deformación.

La condición (128) queda de la misma manera para los casos de shear-free y expansion-free.

Al igual que en el caso de las superficies modeladas por un fluido radiante o un fluido perfecto, la velocidad de propagación \dot{c} puede ser deducida de la ecuación (127) dando como resultado

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2U}{R} \rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2} (B^{\dagger}A - A^{\dagger}B) + \left[\frac{B}{A} (\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c - 2J_1 \rho_{\Sigma} - a_1 \rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}} . \quad (131)$$

■ Capas

Las condiciones de acoplamiento de una capa compuesta por un polvo bajo la aproximación cuasiestática se derivan de las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot de un choque

impulsivo quedando como

$$\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \frac{2\dot{c}}{R}\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + \xi_1 \left(2J_1\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} = [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1 - \mathcal{F}]_c. \quad (132)$$

La anterior ecuación puede ser escrita en términos de los escalares de deformación, expansión y la función masa quedando de la misma manera que (127). La velocidad de la capa se halla de (132) quedando como

$$\dot{c} = \frac{\rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma}\sigma_1 + [\mathcal{F}]_c}{\frac{\rho_{\Sigma}}{A^2}(B^{\dagger}A - A^{\dagger}B) + \left[\frac{B}{A}(\bar{P} + \bar{\rho}) \right]_c + \frac{2}{R}\rho_{\Sigma} - 2J_1\rho_{\Sigma} - a_1\rho_{\Sigma} - \rho_{\Sigma}^{\dagger}}. \quad (133)$$

La segunda condición de acoplamiento para una capa constituida por polvo es idéntica a la condición (128), lo cual implica que la presión total total es discontinua a través de ésta.

- **Shear-free:** Si la capa compuesta por polvo se analiza en el caso de shear-free, la discontinuidad en el flujo de radiación está dada como

$$-[\mathcal{F}]_c = \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \rho_{\Sigma}\Theta + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1]_c. \quad (134)$$

- **Expansion-free:** Por otro lado, la discontinuidad en el flujo de radiación para una capa cuando $\Theta = 0$ se define como

$$-[\mathcal{F}]_c = \rho_{\Sigma}^{\bullet} + \xi_1^{\dagger}\rho_{\Sigma} + \xi_1 \left(\pm \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}\rho_{\Sigma} + a_1\rho_{\Sigma} + \rho_{\Sigma}^{\dagger} \right) - [(\bar{P} + \bar{\rho})\xi_1], \quad (135)$$

La discontinuidad en la presión para una capa compuesta por polvo en los casos de shear-free y expansion-free está dada como $[\bar{P}]_c = a_1 \rho_\Sigma$.

■ Ondas de choque y Fronteras

Ya que las ondas de choque y las fronteras son superficies donde se cumple ($\tau_{\alpha\beta} = 0$), las condiciones de acoplamiento que éstas deben cumplir están definidas por (112).

4. Conclusiones

4.1. Conclusiones

Los cuatro tipos de superficies de discontinuidad en Relatividad General (choque impulsivo, capa, onda de choque y frontera) abarcan un amplio espectro de escenarios astrofísicos donde estas se pueden hallar. Cada una de las hipersuperficies pueden explicar diversos fenómenos que van desde capas infinitamente delgadas producidas alrededor de agujeros negros de Schwarzschild hasta ondas de choque generadas durante el colapso gravitacional de una estrella Brady et al. (1991); Núñez et al. (2007). En la mayoría de estos eventos, la materia que colisiona con la superficie es calentada y emite radiación en el proceso. Recientemente, las ondas de choques producidas en discos de acreción esféricos alrededor de un objeto compacto han sido analizadas con el fin de hallar el efecto que produce la radiación sobre su evolución Fukue (2019b,a,c).

De manera general, las superficies de discontinuidad se pueden describir a través de dos variables: (ausencia)presencia de contenido material, descrito por el tensor de energía-impulso $\tau_{\alpha\beta}$ y por la (dis)continuidad de la velocidad de propagación de la superficie. Así, las condiciones de acoplamiento que debe cumplir cada superficie se pueden hallar de manera unificada y deductiva

dependiendo del tipo de hipersuperficie que se quiera analizar. Se encontró que a partir de las superficies modeladas por un fluido radiante se pueden deducir las condiciones de las superficies compuestas por un fluido perfecto y polvo. Este conjunto de condiciones se pueden escribir en términos de una tétrada unitaria de vectores y de sus respectivos escalares, siendo estas condiciones equivalentes a las propuestas por Herrera-Jiménez.

Las superficies con un contenido material se pueden producir en diversos escenarios astrofísicos violentos e.g., durante la implosión que forma objetos compactos relativistas (estrellas de neutrones, estrellas híbridas entre otros) o en los discos de acreción alrededor de objetos compactos. Además de la formación de hipersuperficies, durante estos eventos hay una copiosa emisión de radiación (fotones y/o neutrinos) que tiende a abandonar la configuración material, sin embargo la absorción y dispersión en el medio le impiden escapar libremente Núñez et al. (2007).

Cuando se forma una estrella híbrida, el núcleo de esta puede estar compuesto por quarks desconfiados separados de una región modelada por materia hadrónica mediante una superficie con contenido material Glendenning (2012). La hipersuperficie que separa las dos regiones está compuesta por una mezcla entre materia hadrónica y quarks libres, con lo cual se puede describir por un tensor de energía-impulso $\tau_{\alpha\beta}$. De manera general, el tensor $\tau_{\alpha\beta}$ puede modelar esta mezcla de quarks y materia hadrónica mediante un fluido no viscoso con un flujo de radiación \mathcal{F}_Σ asociado (ecuación 39). Si la superficie no emite radiación \mathcal{F}_Σ , se pueden encontrar dos diferentes tipos de fluido: fluido perfecto y polvo. Este último tipo de fluido es una buena aproximación solamente en el caso de un fluido con una densidad extremadamente baja.

En el caso particular de una superficie con contenido material (choque impulsivo y capa),

se observa que la discontinuidad de la segunda forma fundamental no desaparece al anular la masa de la hipersuperficie ($m = 0$). Esto se debe a que surge unos fenómenos superficiales asociados a los escalares de cuadriaceleración (a_1), expansión (Θ) y deformación (σ), además de las derivadas direccionales de las componentes de $\tau_{\alpha\beta}$. Estos fenómenos superficiales fueron descritos inicialmente por Herrera e Ibáñez y hallados en términos de los coeficientes de espín asociados a una tétrada nula de vectores Herrera and Ibáñez (1989). Se demostró que en el régimen de evolución lenta, el flujo de radiación y la presión total en los choques impulsivos y las capas es discontinua debido al contenido material que éstas poseen, así como a la discontinuidad en la presión y densidad total del fluido.

Por otro lado, las condiciones de acoplamiento para las ondas de choque y las fronteras implican una serie de restricciones sobre la discontinuidad del flujo de radiación, presión y densidad total del fluido (ecuación 62), las cuales son independientes de la velocidad \dot{c} . Si las condiciones de acoplamiento para una frontera (63) son analizadas en el caso estático ($\dot{c} = 0$) y a su vez es acoplada con una solución exterior de vacío, se deduce la condición $P(r_b) = 0$ (donde r_b es el radio de la distribución material esférica) Suárez-Urango et al. (2022). En el régimen de evolución lenta, se encontró que la velocidad de las ondas de choque (y las fronteras) deben cumplir con las condiciones $[\bar{P}]_c \neq -[\bar{\rho}]_c$ y $[\bar{\rho}]_c \neq 0$.

Adicionalmente, se concluye que las condiciones de acoplamiento planteadas en términos de una tétrada unitaria son equivalentes a las propuestas por Herrera-Jiménez (ver Apéndice). Esta equivalencia se debe a que existe una relación entre las tétradas de vectores (tétrada nula y unitaria), así como entre los coeficientes de espín y los escalares, respectivamente.

Por último, se puede concluir que las condiciones propuestas por Herrera-Jiménez Herrera and Jiménez (1983b) son un caso particular de las condiciones propuestas por Taub para el caso de escalares (o en su defecto coeficientes de espín) constantes Taub (1980). Esta equivalencia surge debido a la relación que existe entre el tensor de energía-impulso $\tau_{\alpha\beta}$ y el tensor de curvatura extrínseca $\kappa_{\alpha\beta}$ mediante la ecuación de Lanczos (ver Apéndice).

Referencias Bibliográficas

- Akizuki, C. and Fukue, J. (2008). Spherical relativistic radiation flows with variable eddington factor. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 60(2):337–343.
- Anile, A. M. (2005). Relativistic fluids and magneto-fluids. *Relativistic Fluids and Magneto-fluids*.
- Bonnor, W. and Vickers, P. (1981). Junction conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13(1):29–36.
- Brady, P. R., Louko, J., and Poisson, E. (1991). Stability of a shell around a black hole. *Physical Review D*, 44(6):1891.
- Brassel, B. P., Maharaj, S. D., and Goswami, R. (2021). Inhomogeneous and radiating composite fluids. *Entropy*, 23(11):1400.
- Castañeda-Godoy, L., Ospino, J., and Núñez, L. (2021). Radiating jump conditions in general relativity. *arXiv preprint arXiv:2102.00507*.
- Chiu, H.-Y. (1990). Massive soliton stars. *The Astrophysical Journal*, 354:302–309.
- Colgate, S. A. and White, R. H. (1964). The hydrodynamic behavior of supernovae explosions. Technical report, Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore.
- Collins, C. and Wainwright, J. (1983). Role of shear in general-relativistic cosmological and stellar models. *Physical Review D*, 27(6):1209.

- Darmois, G. (1927). Mémorial des sciences mathématiques. *Fascicule XXV (Gauthier-Villars, Paris, 1927)*.
- Di Prisco, A., Herrera, L., Ospino, J., Santos, N., and Viña-Cervantes, V. (2011). Expansion-free cavity evolution: some exact analytical models. *International Journal of Modern Physics D*, 20(12):2351–2367.
- Esculpi, M. and Herrera, L. (1992). Radiating soliton stars in the thin-wall approximation. *Physical Review D*, 45(10):3341.
- Esculpi, M. and Herrera, L. (1994). Radiating scalar soliton-like stars in a pressurized environment. *The Astrophysical Journal*, 437:317–331.
- Ferguson, J. M., Morel, J. E., and Lowrie, R. (2017). The equilibrium-diffusion limit for radiation hydrodynamics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 202:176–186.
- Fukue, J. (2019a). Radiative shocks in disk accretion. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 71(2):38.
- Fukue, J. (2019b). Radiative shocks in spherical accretion. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 71(5):99.
- Fukue, J. (2019c). Relativistic radiative shocks revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(2):2538–2546.

- Gao, Y. and Law, C. K. (2012). Rankine–hugoniot relations in relativistic combustion waves. *The Astrophysical Journal*, 760(2):122.
- Glendenning, N. K. (2012). *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. Springer Science & Business Media.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C. and Quevedo, H. (2019). C3 matching for asymptotically flat spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 36(13):135003.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C. and Quevedo, H. (2022). Darmois matching and c 3 matching. *Classical and Quantum Gravity*, 39(3):035015.
- Hansen, C. J., Kawaler, S. D., and Trimble, V. (2012). *Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution*. Springer Science & Business Media.
- Hernandez Jr, W. C. and Misner, C. W. (1966). Observer time as a coordinate in relativistic spherical hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 143:452.
- Herrera, L. (1996). Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda. *H. Rago y A. Melfo editor*.
- Herrera, L. (2020). Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*, 101(10):104024.
- Herrera, L., Di Prisco, A., and Ospino, J. (2014). Shear-free axially symmetric dissipative fluids. *Physical Review D*, 89(12):127502.

- Herrera, L., Di Prisco, A., Ospino, J., and Carot, J. (2016). Axially symmetric dissipative fluids in the quasi-static approximation. *International Journal of Modern Physics D*, 25(03):1650036.
- Herrera, L. and Ibáñez, J. (1989). Junction conditions on surface layers for radiating fluid spheres with heat flow. *Physics Letters A*, 138(1-2):1–4.
- Herrera, L. and Jiménez, J. (1983a). Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity. *Physical Review D*, 28(12):2987.
- Herrera, L. and Jiménez, J. (1983b). Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity. *Physical Review D*, 28(12):2987.
- Herrera, L. and Nunez, L. (1989). Modeling 'hydrodynamic phase transitions' in a radiating spherically symmetric distribution of matter. *The Astrophysical Journal*, 339:339–353.
- Israel, W. (1966). Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1):1–14.
- Ivanov, B. (2017). Analytical study of anisotropic compact star models. *The European Physical Journal C*, 77(11):1–12.
- Joshi, P. S., Dadhich, N., and Maartens, R. (2002). Why do naked singularities form in gravitational collapse? *Physical Review D*, 65(10):101501.
- Joshi, P. S., Goswami, R., and Dadhich, N. (2003). The critical role of shear in gravitational collapse. *arXiv preprint gr-qc/0308012*.

- Lacey, C. G. (1988). The structure of shocks with thermal conduction and radiative cooling. *The Astrophysical Journal*, 326:769–778.
- Lake, K. (2017). Revisiting the darmois and lichnerowicz junction conditions. *General Relativity and Gravitation*, 49(10):1–11.
- Lanczos, K. (1924). Flächenhafte verteilung der materie in der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 379(14):518–540.
- Lichnerowicz, A. (1955). Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. *Masson-Paris*, 8(10):24.
- Lindquist, R. W. (1966). Relativistic transport theory. *Annals of Physics*, 37(3):487–518.
- Lobo, F. S. and Crawford, P. (2005). Stability analysis of dynamic thin shells. *Classical and Quantum Gravity*, 22(22):4869.
- Lowrie, R., Morel, J., and Hittinger, J. (1999). The coupling of radiation and hydrodynamics. *The astrophysical journal*, 521(1):432.
- Lowrie, R. B. and Edwards, J. D. (2008). Radiative shock solutions with grey nonequilibrium diffusion. *Shock waves*, 18(2):129–143.
- Maharaj, S., Govender, G., and Govender, M. (2012). Radiating stars with generalised vaidya atmospheres. *General Relativity and Gravitation*, 44(4):1089–1099.

- Mihalas, D. and Mihalas, B. W. (2013). *Foundations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation.
- Misner, C. W. and Sharp, D. H. (1964). Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Physical Review*, 136(2B):B571.
- Núñez, L. et al. (2007). General relativistic radiant shock waves in the post-quasistatic approximation. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 66, page 012042. IOP Publishing.
- Ospino, J., Hernández-Pastora, J., Hernández, H., and Núñez, L. (2018). Are there any models with homogeneous energy density? *General Relativity and Gravitation*, 50(11):1–13.
- Ospino, J., Hernández-Pastora, J., and Núñez, L. (2017). An equivalent system of einstein equations. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 831, page 012011. IOP Publishing.
- Pereira, J. P., Coelho, J. G., and Rueda, J. A. (2014). Stability of thin-shell interfaces inside compact stars. *Physical Review D*, 90(12):123011.
- Poisson, E. (2002). An advanced course in general relativity. *University of Guelph*, 174:96.
- Raizer, I. P. (1957). On the structure of the front of strong shock waves in gases. *Soviet Phys. JETP*, 5.
- Sherif, A., Goswami, R., and Maharaj, S. (2019). Properties of expansion-free dynamical stars. *Physical Review D*, 100(4):044039.

- Suárez-Urango, D., Ospino, J., Hernández, H., and Núñez, L. A. (2022). Acceptability conditions and relativistic anisotropic generalized polytropes. *The European Physical Journal C*, 82(2):1–22.
- Taub, A. (1948). Relativistic rankine-hugoniot equations. *Physical Review*, 74(3):328.
- Taub, A. (1980). Space–times with distribution valued curvature tensors. *Journal of Mathematical Physics*, 21(6):1423–1431.
- Tolman, R. C. (1934). Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America*, 20(3):169.
- Zeldovich, Y. B. (1957). The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent fluid. *Sov. Phys. JETP*, 4:460–462.
- Zeldovich, Y. B. and Raizer, Y. P. (1966). Elements of gasdynamics and the classical theory of shock waves. *New York: Academic Press*.

Apéndice

Apéndice A. Equivalencia entre tétradas

El problema de acoplar en Relatividad General dos regiones diferentes del espacio-tiempo mediante una superficie de discontinuidad ha sido de gran interés. Esto se debe al hecho que las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein en una región puede representar la fuente de la métrica en la otra región solamente si están acopladas mediante una superficie. Es por este motivo, que el entendimiento de las condiciones de acoplamiento juegan un rol muy importante para encontrar una solución interior apropiada Herrera and Jiménez (1983a).

Algunos investigadores han propuesto un conjunto diverso de condiciones que estas superficies deben cumplir con el fin de evitar la aparición de singularidades en las variables físicas y/o geométricas. El primero en proponer un conjunto de condiciones mediante las cuales acoplar dos regiones del espacio-tiempo a través de una superficie de discontinuidad sin contenido material fue Darmois Darmois (1927).

Este conjunto de condiciones requiere que tanto la métrica proyectada como la derivada covariante de un vector normal proyectada sobre la superficie sea continua. Luego, Lichnerowicz propuso un conjunto alternativo de condiciones para acoplar dos regiones diferentes a través de una superficie de discontinuidad. De acuerdo con Lichnerowicz, la condición suficiente para acoplar dos regiones sobre una superficie, es que exista un sistema de coordenadas tal que tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuas a través de la superficie. Seguidamente, W. Israel extendió el trabajo propuesto por Darmois, para estudiar las condiciones de acoplamiento

to que deben cumplir las superficies permeables con contenido material Israel (1966). Algunos años después, Bonnor y Vickers demostraron que las condiciones de acoplamiento propuestas por Lichnerowicz y Darmois son equivalentes Bonnor and Vickers (1981).

Seguidamente, Herrera y Jiménez propusieron un conjunto de condiciones alternas que deben cumplir las superficies de discontinuidad. Estas condiciones proponen que se puede acoplar dos regiones del espacio-tiempo a través de una superficie utilizando una tétrada nula de vectores y sus respectivos coeficientes de espín Herrera and Jiménez (1983b). Las condiciones de acoplamiento propuestas por Herrera-Jiménez son equivalentes a las dadas por Darmois y Lichnerowicz.

Recientemente, se han propuesto un conjunto alterno de condiciones de acoplamiento en términos de los autovalores del tensor de curvatura de Riemann Gutiérrez-Piñeres and Quevedo (2019, 2022). Estas condiciones de acoplamiento proponen encontrar la distancia mínima en que una solución interior de las ecuaciones de Einstein pueda ser acoplada con una solución exterior asintóticamente plana.

Por otro lado, A.H.Taub propuso una serie de condiciones que deben cumplir las superficies permeables con presencia de contenido material en términos del tensor de energía-impulso de la superficie Taub (1980). Estas condiciones propuestas por Taub, generalizan las condiciones de Rankine-Hugoniot que cumple una onda de choque relativista Taub (1948).

De esta manera, para escribir las condiciones de acoplamiento utilizando el método propuesto por Herrera-Jiménez es necesario conocer la equivalencia entre la tétrada nula y la tétrada

unitaria de vectores

$$\begin{aligned} l^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V^\alpha - K^\alpha), & n^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V^\alpha + K^\alpha), \\ m^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(L^\alpha - iS^\alpha) & \text{y} & \quad \bar{m}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(L^\alpha + iS^\alpha), \end{aligned} \quad (136)$$

con los vectores de la tétrada nula satisfaciendo las condiciones $l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1$ y $l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0$, donde la barra indica el complejo conjugado de los vectores: $m^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu$.

Así, los coeficientes de espín correspondientes a la tétrada nula se pueden escribir en términos de las derivadas covariantes de los vectores de la tétrada unitaria proyectada a lo largo estos mismos vectores. En el caso particular de simetría esférica, los únicos coeficientes de espín para la métrica (1) que no se anulan están dados como

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{R'A - \dot{R}B}{BAR} \right), & \mu &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{R'A - \dot{R}B}{BAR} \right), \\ \gamma &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\dot{B} + B'}{BA} \right), & \varepsilon &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\dot{B} - B'}{BA} \right), \\ \alpha &= \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{4R \sin \theta} & \text{y} & \quad \beta = -\frac{\sqrt{2} \cos \theta}{4R \sin \theta}. \end{aligned} \quad (137)$$

Los anteriores coeficientes de espín (137) se pueden escribir por lo tanto en términos de los escalares (9) obteniendo las siguiente condiciones

$$-\sqrt{2}(\gamma + \varepsilon) = a_1, \quad \sqrt{2}(\varepsilon - \gamma) = \sigma_1, \quad \rho + \mu = \sqrt{2}J_1, \quad \mu - \rho = \sqrt{2}\sigma_2 \quad \text{y} \quad \sqrt{2}(\alpha - \beta) = J_2. \quad (138)$$

A partir de las anteriores condiciones se pueden hallar las condiciones generalizada de Rankine-Hugoniot para un choque impulsivo como las propuestas en Castañeda-Godoy et al. (2021). La parte izquierda (PI) de esta condición generalizada por el método de Herrera-Jiménez queda escrita por lo tanto como

$$PI = 2 \left(J_1 \xi_1 \left(\sigma_1 \xi_1 + \sqrt{1 + \xi_1^2} a_1 \right) \right)_{\Sigma} + \mathcal{O}(\sigma_2, J_1, \sigma_2^2, J_1^2, a_1), \quad (139)$$

donde se ha proyectado a lo largo del vector T^β . El término $\mathcal{O}(\sigma_2, J_1, \sigma_2^2, J_1^2, a_1)$ hace referencia a todas las posibles combinaciones que se puedan dar entre los escalares así como con sus derivadas.

Por otro lado las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot propuestas por Taub Taub (1980) y proyectadas a lo largo de los vectores T^β y N^β se definen como

$$\left[T_{\alpha\beta} N^\alpha T^\beta \right]_c = -\tau_{\beta;\alpha}^\alpha T^\beta \quad y \quad \left[T_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta \right]_c = \tau_{\beta;\alpha}^\alpha N^\beta. \quad (140)$$

La anterior ecuación se puede escribir en términos de la curvatura extrínseca $\kappa_{\alpha\beta}$ de la superficie, utilizando la ecuación de lanzos Lanczos (1924)

$$\tau_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - \kappa \tilde{h}_{\alpha\beta}. \quad (141)$$

Así, las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot se pueden escribir en términos del tensor

de curvatura extrínseca de la siguiente manera

$$\left[T_{\alpha\beta} N^\alpha T^\beta \right]_c = \kappa_{\beta;\alpha}^\alpha T^\beta - \kappa_{;\beta} T^\beta \quad \text{y} \quad \left[T_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta \right]_c = \kappa_{\beta;\alpha}^\alpha N^\beta - \kappa_{;\beta} N^\beta. \quad (142)$$

La primera condición de (142) para el caso de la métrica (1) y el vector normal (24) queda escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[T_{\alpha\beta} N^\alpha T^\beta \right]_c &= J_1 \xi_1 \left(\sqrt{1 + \xi_1^2} a_1 + \xi_1 \sigma_1 \right) + (1 + \xi_1^2) a_1 \sigma_2 - J_1 \sigma_2 (1 + \xi_1^2) - J_1 \sigma_2 \xi_1^2 \\ &+ \xi_1 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 + \xi_1^2} - \xi_1 J_1^2 \sqrt{1 + \xi_1^2} - \xi_1 \sigma_2^2 \sqrt{1 + \xi_1^2} - \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} J_1^\dagger - (1 + \xi_1^2) J_1^\bullet - \sigma_2^\dagger \xi_1^2. \end{aligned} \quad (143)$$

Las condiciones generalizadas de Rankine-Hugoniot halladas utilizando el método de Herrera-Jiménez y las que se hallan mediante el método de Taub son equivalentes. La diferencia entre las condiciones (139) y (143) radica principalmente es que las halladas por el método de Taub tiene en cuenta tanto los escalares como sus respectivas derivadas direccionales.