MATEMÁTICA MAYA: UNA NUEVA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE CUARTO GRADO

MAYRA ZULAY SUÁREZ RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009

MATEMÁTICA MAYA: UNA NUEVA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE CUARTO GRADO

MAYRA ZULAY SUÁREZ RODRÍGUEZ

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Director:
WILSON OLAYA LEÓN
Magíster en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009

A Dios por brindarme la
oportunidad de escuchar más y
por las alegrías inmensas que tengo:
mis padres, mis hermanos, mi nonita
y por supuesto, mi gran amor: Jhonny

AGRADECIMIENTOS

A Dios todo poderoso por enseñarme que la vida es maravillosa y que con Fe las cosas se pueden lograr.

A mis padres, que con su esfuerzo y dedicación lograron que se cumplieran mis sueños, que ahora son realidad.

A Jhonny, por su lindo amor, su grata y encantadora compañía y sus palabras de aliento.

A mi nonita, por su apoyo incondicional.

A mis hermanos Carlos y Zaydi, por sus alegrías y ganas de salir adelante.

Al profesor Wilson, por su colaboración y sus orientaciones en la realización de esta investigación.

A los niños del grado cuarto uno de primaria de la Institución Educativa Las Américas del año 2008, por hacer posible esta investigación.

Al profesor Hernando, por brindarme el espacio de compartir con los niños.

A los profesores de la Licenciatura en Matemáticas, que contribuyeron en mi formación como docente.

A Lizeth y Diana J., por su compañerismo y momentos de alegría a lo largo de estos años.

Y por supuesto…

A la UIS, por abrirme las puertas y formarme como persona ejemplar.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: MATEMÁTICA MAYA: UNA NUEVA MIRADA A LA ARITMÉTICA DE CUARTO GRADO*

AUTOR: MAYRA ZULAY SUÁREZ RODRÍGUEZ**

PALABRAS CLAVES:
1. Civilización maya. 2. Aritmética. 3. Sistema de numeración maya.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo presenta una propuesta de aula con una visión constructivista sobre cómo se aprende y se enseña el algoritmo de cada una de las operaciones fundamentales en el sistema maya. El objetivo de esta investigación es identificar y analizar la influencia de la aritmética maya como una fuente de motivación en los niños de cuarto grado para aprender y reforzar las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales; y de esta manera el estudiante aumente su interés por aprender matemáticas.

Esta investigación de aula se realizó en la Institución Educativa Las Américas con 42 estudiantes de cuarto primaria. Consistió en implementar una prueba diagnóstica y cuatro talleres con una variedad de actividades dinámicas que los estudiantes primero las desarrollaron en el material recreativo (tablero, palos de paleta, fríjoles y conchas hechas en papel), y después las resolvieron en los talleres. Las actividades fueron diseñadas con el fin de observar y analizar la evolución de los estudiantes ante este tema nuevo y a partir de él afianzar las operaciones aritméticas básicas.

Los resultados de esta investigación muestran las destrezas y debilidades de los estudiantes, desde la prueba diagnóstica hasta el último taller, después de haber sido sometidos a un tema nunca visto, donde los estudiantes pudieron adquirir nuevos conocimientos, concepciones, y principalmente, aptitud matemática. Se crearon ambientes lúdicos e histórico-matemáticos que permitieron un crecimiento en la estimulación de la actividad mental del estudiante.

---

*Proyecto de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León. Magíster en Ciencias Matemáticas.

SUMMARY

TITLE: MAYAN MATHEMATIC: A NEW LOOK TO THE ARITHMETIC OF 4^{th} LEVEL*

AUTHOR: MAYRA ZULAY SUÁREZ RODRÍGUEZ**

KEY WORDS:
1. Mayan civilization. 2. Arithmetic. 3. Mayan numbers system.

DESCRIPTION:

This paper presents a propusal of classroom with a constructivist point abount how to learn and how to teach the algorithm of the basic operations of the mayan system. The main goal of this propusal is to identify and analize the influence of the mayan aritmethic as a source of motivation for fourth graders to learn and support the basic operations such as the sum, the substraction , the multiplication and division of natural numbers; in such a way that the student delights in his/her interest to learn mathematics.

This research was carried out in The Americas School with forty two students of 4^{th} level (primary school). It consisted of implementing a diagnosis test and four workshops with a great variety of dynamic activities which were solved by the students by means of board, sticks, beans, shells and then in workshops. The activities were designed to observe and analize the improvement of the students in order to learn how to face a new topic.

The results of this research show the skills and weakness of the students, from the diagnosis test to the last workshop, after being faced to a new theme, in which students could acquire new know ledge, conceptions and the most important, a great variety of history and math environment was created in order to create a better growth in the stimulation of the mental activity of the student.

---

*Grade Work.

**Faculty of Science, Mathematics School. Director: Wilson Olaya León. Magíster in Mathematical Sciences.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación como su nombre lo indica "Matemática Maya: Una Nueva Mirada a la Aritmética de Cuarto Grado", es una opción para que otros maestros que inician en el apasionante estudio de la historia de las matemáticas tengan la posibilidad de reconocer los recursos de la matemática precolombina, y puedan crear o recrear situaciones histórico-matemáticas en sus propias aulas, claro está adaptándolos a las necesidades de su escuela.

En la aplicación de la historia precolombina de uno de los pueblos más atractivos de América: la civilización maya, al tema de la aritmética tradicional, más específicamente, las cuatro operaciones fundamentales del plan curricular del área de matemáticas del grado cuarto de primaria, se presentan situaciones históricas y recursos variados que llevaron a nuestros aborígenes a la creación intelectual de conceptos y significados de objetos matemáticos.

La importancia de esta investigación radica en brindar un enfoque histórico para la enseñanza de la aritmética tradicional, que posibilite la comprensión de algunos aspectos de este tema por los estudiantes, y de esta manera motivarlos al mundo matemático, despertando el interés, el esfuerzo personal, la creatividad y la curiosidad; pues como bien se sabe, la matemáticas no son las preferidas por la mayoría de estudiantes en un aula de clases. Pero ¿cómo hacer que ellos gusten de ellas?, ¿qué hacer ante esta realidad si precisamente algunos de los objetivos generales de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 41) aspira a que el estudiante active su propia capacidad mental y manipule los objetos matemáticos?

El interés, la motivación y la curiosidad es lo que promueve la capacidad mental y manipula objetos matemáticos! Pero ¿cómo promover el interés por las matemáticas si existe la creencia de que para estudiarlas se necesita de un don especial? Las matemáticas es para "cocos", dicen los estudiantes. Más que privilegiados los que saben algo de ellas se deben simplemente a una excepcional capacidad de trabajo y voluntad de estudio; pero ¿a qué se debe este interés y esta voluntad de estudio?, sencillamente porque les gusta! Pero ¿cómo lograr que aquellos niños gusten de las matemáticas tanto como de un partido de fútbol?

Es por eso que, como educadores, lo menos que podemos hacer es crear en el estudiante actitudes positivas hacia las matemáticas, mostrarlas más que como una colección de algoritmos, como un aspecto de la cultura, como un lenguaje, una forma de sentir la realidad, una tradición y no un arbitrario repertorio de símbolos.

La historia de las matemáticas ayuda al proceso de aprendizaje de los estudiantes y aumenta el interés por ellas. Como muestra de ello, en la práctica docente que se realizó para el Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I[1], con estudiantes de séptimo grado, se realizó una introducción a la historia de los números enteros, y se resaltaron los diferentes sistemas de numeración, entre ellos el sistema de numeración maya. Este sistema llamó mucho la atención de los estudiantes, en la que demostraron un gran entusiasmo por aprenderla.

Es por las razones anteriores que esta investigación hace relación con la historia matemática precolombina, más exactamente la aritmética maya, y desencadena la pregunta de investigación: ¿Cómo influye la aritmética maya como una fuente de motivación en el aprendizaje y reforzamiento de las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división en niños de cuarto grado de primaria? Definiéndose, consecuentemente, el objetivo del trabajo: **Identificar y analizar la influencia de la aritmética maya como una fuente de motivación en los niños de cuarto grado para aprender y reforzar las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales.**

Buscando cumplir este objetivo, en la experiencia de aula, la cual fue la fuente principal para la recolección de datos, se realizó talleres que contienen diferentes

[1] Materia de la carrera Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, en la cual se realiza una práctica docente durante cuatro meses.

actividades. En ellas se encuentra una variedad de ejercicios; estos fueron resueltos por los niños, quienes disfrutaron de completa libertad de solucionarlos, según la estrategia que consideraban conveniente. Para ello, en cada taller propuesto se realizó una interacción didáctica docente-alumno, debido a que el tema de la aritmética maya no hace parte del plan curricular de matemáticas, y de esta manera, analizar las potencialidades y falencias en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de este tema como fuente de motivación en los niños.

A continuación se explica brevemente cómo está estructurado el trabajo escrito:

En el primer capítulo: *PRELIMINARES*, muestra una breve historia de la civilización maya; destacando su cultura, su sistema de numeración y su sistema de calendarios: gran aporte a las ciencias astronómicas y matemáticas.

En el segundo capítulo: ***ARITMÉTICA MAYA,*** trata de dos aspectos elementales: primero, la conversión del sistema maya al decimal, y viceversa; y segundo, los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división en el sistema de numeración maya.

En el tercer capítulo: *PRUEBA DIAGNÓSTICA*, presenta la implementación, la descripción y el análisis de la prueba diagnóstica, concluyendo con las destrezas y debilidades que tenían los estudiantes del grado cuarto de primaria.

En el cuarto capítulo: *LA INVESTIGACIÓN*, está dividido en cuatro talleres, en los que presentan las actividades propuestas, las cuales fueron la base de este trabajo. Se narra las experiencias y el análisis junto a los resultados obtenidos.

En el quinto capítulo: *CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES*, se plasman todos los pensamientos y aportes que se consideran importantes, surgidos durante la investigación; esperando sea de gran utilidad, en búsqueda de una enseñanza y aprendizaje significativos.

Para finalizar, la metodología empleada para llevar a cabo el proyecto fue “investigación en el aula”, la cual, según Bastidas, mencionado en Múnevar, Quintero y Yepes (2006), es el proceso sistemático, creativo y crítico, fruto del análisis y la reflexión de los propios docentes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en el salón de clases, con miras a resolver problemas que surgen de la misma práctica.

1. PRELIMINARES

"Cuando se nos otorga la enseñanza se debe percibir como un valioso regalo y no como una dura tarea, aquí está la diferencia de lo trascendente".
Albert Einstein

El conocimiento matemático en las instituciones educativas es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven, y al ser considerado como una actividad social la tarea del maestro conlleva a una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, y por el hecho de ser una de las asignaturas poco preferidas por los estudiantes. Luego la responsabilidad del maestro es buscar varias alternativas de aprendizaje de una manera muy dinámica, y más si se trata de niños de primaria, ya que para ellos su medio principal de aprendizaje es el juego. En este respecto, la matemática maya es un recurso natural para una buena alternativa de aprendizaje, en donde el estudiante se motive por aprender matemáticas de una manera lúdica y recreativa.

1.1. BREVE HISTORIA DE LA CIVILIZACIÓN MAYA

Para integrar la historia de la matemática maya de manera apropiada en el proceso educativo es necesario conocerla, por consiguiente, a continuación se expone una breve historia de la civilización maya. Esta información histórica fue recopilada por Guirao, P. (1989) y Ospina, A. (2001).

1.1.1. La Cultura Maya

Son muchos los beneficios que las distintas civilizaciones antiguas han brindado a la humanidad, y mediante sus aportes se ha logrado consolidar un mundo lleno de conocimientos, y de no ser por ellos no hubiera existido una variedad de avances de todo tipo.

La civilización maya –famosa por la invención del cero antes que ninguna otra cultura en el mundo–, se conoce por sus magníficos logros culturales, arquitectónicos y astronómicos; constituyéndose en uno de los pueblos precolombinos más atractivos de América a los ojos de la actual sociedad globalizada.

La falta de amplias pruebas arqueológicas y detalles históricos sobre el sorprendente florecimiento de los mayas, igualmente, sobre las razones del decaimiento cultural y el abandono de sus principales centros ceremoniales y ciudades, ha permitido que alrededor de esta cultura se haya tejido todo tipo de especulaciones descabelladas: desde planteamientos absurdos sobre su procedencia de la Atlántida[2], hasta tomarse la libertad de observar astronautas encapsulados en sus estelas funerarias[3], pasando por el origen extraterrestre de sus dioses, quienes supuestamente les entregaron conocimientos especiales que aún se podrían encontrar en su astrología.

La verdad es que sobre su origen y decaimiento existen muchas dudas y vacíos históricos, y como dice el arqueólogo Hammond (1986, p. 90), *"Y lo que resulta todavía más destacable es que ese cambio [la colonización de América], que constituye una verdadera revolución en nuestros conocimientos acerca de los orígenes de la civilización maya, se ha producido en poco más de una década".*

La colonización de América refleja el inmenso daño hecho por los conquistadores españoles a la historia original de ella y sus pueblos. Los reyes católicos europeos del cristianismo de la época estaban convencidos de su superioridad cultural y creían que los indígenas tenían pactos con el demonio, por tanto, quemaron en público estatuillas, códices (manuscritos), esculturas, estelas funerarias y cualquier otro símbolo. En julio de 1572 en la ciudad de Maní, península de Yucatán (México), el obispo franciscano y cronista español, Fray Diego de Landa, ordenó quemar en una sola ceremonia más de cinco mil piezas de ídolos y

[2] Atlántida: Nombre de una legendaria isla desaparecida en el mar.
[3] En una definición más específica las estelas funerarias son monumentos funerarios conmemorativos con retratos del difunto, con forma de lápida que se erige sobre el suelo.

deidades, y 27 libros o rollos jeroglíficos mayas de papel de maguey[4]. Esta no fue la única ocasión en que Landa destruyó libros, y a él se debe que hoy en día sean muy pocos los ejemplares de la jeroglífica maya.

Los Códices Mayas que sobrevivieron a la conquista española contienen datos astronómicos y de predicción de eventos. No se sabe si existieron manuscritos mayas con contenidos literarios o históricos, como el Popol Vuh[5], el cual fue rescatado oralmente por Landa. Los Códices existentes a la fecha son: el *Códice de Dresde,* a través del cual se puede conocer la astronomía y la religión, actualmente se encuentra en la biblioteca de la ciudad de Dresde (Alemania); el *Códice Peresiano* o *Códice de París* por encontrarse en la Biblioteca Nacional de la capital francesa, también de carácter astronómico; y el *Códice Tro-Cortesiano* (a veces denominado *Códice Matritense maya*), de carácter mágico-religioso, y que, como su nombre indica, consta de dos fragmentos diferentes que estuvieron separados durante siglos, hoy se encuentra en el Museo de América de Madrid. Por ellos se sabe una milésima parte de lo que sabían los mayas, con lo que basta para poder asegurar que, en astronomía, por ejemplo, sabían más que los europeos de la época.

Los mayas vivieron en una vasta zona geográfica que comprende, en México, lo que actualmente son los estados de Yucatán, Campeche, Quintana Roo y la parte oriental de Chiapas; en Centroamérica lo que hoy son Belice, Guatemala y el área occidental de Honduras y El Salvador.

Se desconoce en absoluto el origen de los mayas. Sus antepasados –según se cree–, formaron parte de una inmigración que entró al continente americano en una fecha bastante lejana o quizás formaron parte de la cultura olmeca[6]. Este grupo, quizás reforzado por nuevas oleadas migratorias, logró imponerse y

[4] Maguey: planta oriunda de México, con hojas gruesas en forma de pirámide triangular.
[5] Popol Vuh: libro sagrado de los mayas, en el que trata de explicar de alguna manera el origen del mundo, la civilización y los diversos fenómenos que ocurren en la naturaleza.
[6]Olmecas: cultura que se desarrolló en las planicies tropicales de la Costa del Golfo de México alrededor de 1250 a.C., y establecieron la primera civilización avanzada en Mesoamérica (región que actualmente ocupan México, Guatemala, Belice, Honduras y El Salvador).

dominar a la población aborigen, y posiblemente, de esta manera surgieron los mayas.

Según Hammond (1986, p. 92), *"[…] la fecha real [del inicio de los mayas] está entre los años 2500 y 1250 a.C."*, en la que comenzaron su historia. Su imperio abarcó aproximadamente cuatro mil años en el tiempo, comprendido entre los periodos Pre-Clásico, Clásico y Pos-Clásico.

El período Pre-Clásico Temprano comenzó alrededor de los años 2500 y 2000 a.C. Durante él se dio el desarrollo agrícola y la sedentarización. Cuando la agricultura alcanzó un mayor adelanto se diversificaron los cultivos y se destinó parte de los excedentes al comercio con pueblos vecinos. Se inició la edificación de las primeras ciudades y centros ceremoniales con sus pirámides y templos característicos, lo que favoreció el desarrollo de una cerámica en calidad y las bases de una escritura jeroglífica. Los mayas de este período, que concluyó hacia el año 1250 a.C., construyeron también plataformas para viviendas con superficies enyesadas alrededor de plazas, y edificaron sobre ellas habitaciones con estructura de madera y pajón. Hicieron cerámica fina de diversos colores y formas.

Durante el período siguiente, el Pre-Clásico Medio, que se extendió desde el 1250 al 450 a.C., se creció el comercio interregional. A pesar del incremento del comercio se mantenía el carácter de aldeas de agricultores, sin embargo, más tarde, se produjeron cambios transcendentales que comenzaron a elevar a la sociedad maya por encima del nivel de las aldeas agrícolas, y aumentaba el número de habitantes. El trabajo de la tierra dio prioridad al cultivo del maíz, el fríjol y la calabaza; en tanto, la caza, la pesca y la recolección quedaron como actividades complementarias; por eso a este período se le conoce también como agrícola. El principal desarrollo durante esta época se dio en las tierras altas y llegó a su máximo esplendor en la ciudad de Kaminaljuyú, hoy sepultada por Ciudad de Guatemala.

La religión maya era politeísta y contaba con un numeroso panteón representado por divinidades vinculadas con la naturaleza. Los dioses representaban a los cuatro elementos (agua, fuego, aire y tierra) y a otras diversas manifestaciones naturales como astros o fenómenos atmosféricos. Las creencias mayas partían del enfrentamiento entre el bien y el mal. Los dioses vinculados con el bien producían cosas buenas y provechosas como la lluvia o las cosechas abundantes, mientras que las divinidades relacionadas con el mal causaban desastres, hambrunas y otras calamidades.

En el período Pre-Clásico Tardío (450 a.C. – 250 d.C.), alrededor del 200 a.C., debido al crecimiento demográfico, surgieron migraciones desde la zona alta hacia la zona selvática y las altiplanicies de El Salvador; y desde la región central selvática del Petén (Guatemala) hacia las zonas bajas del norte de la península de Yucatán. Aparece una sociedad sustancialmente diferente de la sociedad de agricultores aldeanos, como afirma Hammond (1986, p. 93), *"[…] a mediados del Pre-Clásico Tardío (o no mucho antes del nacimiento de Cristo), se había asentado el poder político real"*.

Los mayas desarrollaron técnicas para drenar campos y construir terrazas en las laderas de las colinas, con lo que consiguieron elevar su agricultura a niveles superiores a los de tala y quema. Existía una economía manufacturera organizada que proporcionaba el material necesario para el mantenimiento de una red comercial de ámbito regional. La educación de los mayas era exclusiva de las autoridades como los sacerdotes, los jefes y los guerreros; en cuanto al resto de la comunidad, la educación se restringía a su casa donde los padres enseñaban a sus hijos los conocimientos que ellos tenían.

Durante el Pre-Clásico Temprano y Medio, los centros ceremoniales eran unidades relativamente pequeños situados en el centro de las aldeas agrícolas; durante el Pre-Clásico Tardío se engrandecieron y se levantaron en el centro de las ciudades, prefigurando la organización espacial y demográfica de la sociedad clásica. Y fue así como comenzaron los cambios culturales y artísticos que, unidos al aumento de población, marcaron el comienzo del período Clásico maya.

En el período Clásico, transcurrido entre el 250 d.C. y el 900 d.C., se enriquecieron las influencias externas, y evolucionaron las características propias de sus sistemas político, económico, religioso y artístico. Aumentó el número de ciudades y centros ceremoniales, y en los ya existentes hubo desarrollos arquitectónicos, artesanales y culturales de importancia. Los mayas extendieron su influjo por la zona sur de la península de Yucatán y el noroeste de los actuales territorios de Guatemala y Honduras.

En su época de máximo esplendor, durante este período, la sociedad maya estaba muy estratificada, con un gobernante situado en la cúspide de una pirámide formada por seis o siete clases sociales nítidamente definidas; disponía de una compleja cosmología en la que tenían cabida los dioses, las fuerzas de la naturaleza y los antepasados; contaba con elaborados calendarios que proporcionaba la estructura adecuada a los acontecimientos rituales e históricos. Los rituales se celebraban en centros ceremoniales que constituían el corazón de las grandes ciudades. Esta superestructura cultural descansaba sobre el cultivo del maíz, y se habían desarrollado técnicas que permitían la explotación de las tierras pantanosas y las escarpadas laderas de los montes.

Este período se giró especialmente en torno a la religión y a las especulaciones sobre el destino, actitudes y capacidades de los hombres, interpretadas diariamente gracias a los calendarios solar y lunar. El conocimiento que tenían acerca de los fenómenos naturales, entre ellos, los eventos astronómicos, fueron convertidos por los sacerdotes en un instrumento de dominación para mantener el poder.

El saber astronómico y matemático tan avanzado, que al parecer nunca superó las barreras de los templos y sacerdotes iniciados, permitió llevar la astrología a su máxima expresión, pero la preocupación permanente sobre el destino introdujo demasiada rigidez a una sociedad en crecimiento, y es claro que sin grados de libertad, el sistema se hizo poco práctico para resolver los problemas materiales de la sociedad y su supervivencia.

El comercio, la acumulación y redistribución del ingreso, y la guerra –que son medios de ascenso social en las comunidades–, se controlaban estrictamente por la nobleza y los sacerdotes. Ante la ausencia de guerras internas y externas, y por la actitud obediente de la población, su forma de oponerse a un régimen, pudo haberse manifestado por medio de la emigración como estrategia. Sin tener a quienes produjeran bienes y servicios en la base de la pirámide social, pronto la nobleza y la clase gobernante debieron optar por el mismo camino de la emigración. Toda la organización social no fue suficiente para su supervivencia. A partir del 900 d.C. colapsó de forma abrupta y hasta ahora inexplicable el período Clásico. Los arqueólogos no han encontrado una prueba contundente sobre su colapso.

El período Pos-Clásico se puede ubicar desde el 975 d.C. hasta el 1500 d.C. Se caracterizó por la conquista del territorio por parte de grupos étnicos externos que venían de la meseta central de México: los toltecas[7] provenientes de Tula y los aztecas[8] de Tenochtitlán. Los recién llegados, que eran cazadores-recolectores, se mezclaron con los pueblos sedentarios de los mayas asimilando muchos elementos de sus culturas clásicas y se adueñaron de sus poblados, conocimientos y tradiciones. Hubo cambios religiosos, cambios en el gobierno, se afianzó el carácter urbano; la base de la riqueza a partir de la producción agrícola se cambió por una economía dependiente de los tributos y los botines de la guerra. Lo anterior condujo a la aparición de nuevos preceptos alrededor de la sociedad: la religión y la guerra, reflejados en la arquitectura con la construcción de murallas defensivas; la ubicación estratégica de centros ceremoniales para beneficio de los combates; y la captura de prisioneros con destino al sacrificio en instrumento para la supervivencia de la sociedad.

[7] Toltecas: cultura indígena que tuvo su centro cívico-religioso en Tula. Fue la etnia dominante de un estado cuya influencia se extendía hasta el actual estado de Zacatecas (México) y al sureste en la península de Yucatán. La relación entre los toltecas y los mayas del período Pos-Clásico ha sido objeto de grandes controversias.

[8] Aztecas: cultura indígena que fundó su capital Tenochtitlán, y hacia el siglo XV en el periodo Pos-Clásico tardío se convirtió en el centro de uno de los Estados más extensos que conoció Mesoamérica.

El fin del período Pos-Clásico se marca aproximadamente en el año 1500 cuando se cierra el capítulo histórico de los mayas originales, y se inicia la historia de conquista y mestizaje que involucra a los españoles en América.

1.1.2. Sistema de Numeración Maya

Entre los objetos culturales del Pre-Clásico Tardío estaban la escritura y el sistema de numeración. Las funciones de estos eran representar a los dioses, y mostrar la relación entre ellos y los hombres de la comunidad maya. Uno de los objetos culturales de este período es la orejera de jade[9] de Pomona (ciudad del Clásico maya en Tabasco, México). Las orejeras de jade eran ornamentos de forma circular y en forma de bocina que utilizaban los mayas de rango elevado. Los signos grabados en ellas muestran que el sistema de numeración maya se había desarrollado hacia el año 100 d.C. Y como afirma Hammond en su expedición de la National Geographic Society entre 1978 y 1980:

> *Nosotros encontramos un ejemplo del mismo sistema de barras y puntos en Cuello [ciudad del Pre-Clásico maya en el norte de Belice]. Una tumba situada en el interior de una pirámide guardaba diversos sellos de aproximadamente la misma antigüedad que el jade de Pomona. Uno de los sellos tenía el número 9: una barra y cuatro puntos. Ese hallazgo refuerza la hipótesis según la cual la numeración formaba parte del emergente complejo intelectual del Pre-Clásico Tardío.* (Hammond 1986, p. 99)

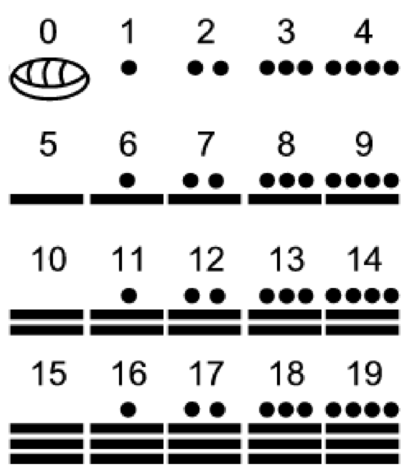
Los mayas tenían una inmensa capacidad de abstracción, la que les dejó convertirse en los primeros creadores de uno de los más grandes inventos del género humano: el cero, como punto inicial de escalas y mediciones. Su noción y manejo les permitió, por encima de culturas como la griega y romana, tener un práctico sistema vigesimal de numeración, el cual los condujo a inferir ciclos astronómicos que involucran cifras enormes de años solares[10]; que no solamente

[9] Jade: mineral de color blanco verdoso y de textura fibrosa que se utiliza en joyería, se encuentra principalmente en Birmania, Tíbet y China.

[10] Año solar: tiempo que tarda la Tierra en completar su órbita alrededor del Sol teniendo en cuenta dos pasos consecutivos y reales de la Tierra por el equinoccio (momento del año en que los días tienen una duración igual a la de las noches en todos los lugares de la Tierra).

sobrepasan la vida de una o de varias generaciones de hombres, sino incluso de toda su existencia como nación.

Desde el siglo II a.C., los mayas empezaron a representar los números mediante la utilización de un sistema de rayas y puntos. El punto no se repetía más de cuatro veces; si se necesitaban cinco puntos, entonces se sustituían por una raya y no aparecía más de tres veces, entonces quiere decir, que solamente podían escribir un número menor que 20. Pero los mayas, que tenían una capacidad intelectual grandiosa, le agregaron a este sistema de numeración dos grandes inventos en la historia de las matemáticas: el cero –como se mencionó anteriormente– y el valor posicional. Y así formaron los demás números. Los griegos y los romanos no lograron descubrir estos principios, y los hindúes lo hicieron muchísimo después; como afirman Lam, Magaña y Oteyza (2005, p. 8): *"[la civilización maya] fue la primera cultura en el mundo en conocer la abstracción de dicho número [el cero], 450 años antes de nuestra era, anticipándose en seiscientos años a las culturas de la India en este descubrimiento".* Los mayas dieron representación simbólica al cero por medio de una figura ovalada, un ojo humano o una concha marina. El siguiente gráfico se observa los números del 1 al 19 junto con el cero:



El sistema de cálculo de los mayas tenía una base vigesimal, es decir, el valor de los números aumenta de 20 en 20 unidades según su posición. Pierre Ivanoff plantea en su libro *En el país de los mayas*, citado por Guirao (1989, p. 83) lo siguiente:

> *Pero, ¿cuál es el origen del sistema vigesimal? Los mayas pueden dárnoslo, puesto que en su lengua "veinte" se dice uinal, y "hombre" uninic. ¿Qué más natural, por otra parte, sino considerar al hombre, es decir, un todo, con la palabra veinte, dado que tiene cuatro miembros, todos terminados por cinco dedos?*

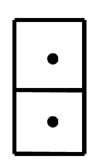
El número 20 es muy importante, como podría ser también el 5, ya que son cinco dedos los que tiene el ser humano en cada mano y en cada pie; y puede que por esto, el número cinco ya no representa puntos, sino una línea en el sistema de numeración maya.

Los mayas contaban desde el cero hasta el diecinueve antes de empezar de nuevo en el siguiente orden. Esto tal vez, se deba a que usaban los dedos de las manos y los pies para llevar la cuenta.

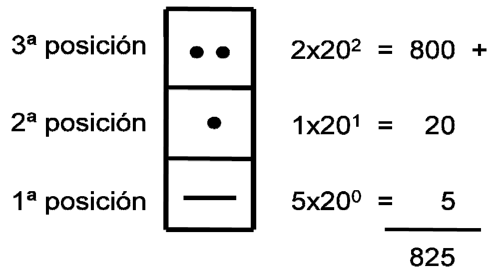
En el sistema decimal se empieza a escribir los números de izquierda a derecha horizontalmente, pero los mayas los escribían –en el sistema vigesimal– de abajo hacia arriba. Así, en la posición más baja los puntos y las líneas tenían su valor propio (el punto significaba una unidad y la línea cinco puntos), en la siguiente posición cada valor se multiplicaba por 20, en la siguiente era 20 por 20, y así sucesivamente. Por tanto se puede decir, que se multiplica el valor de cada posición por $20^{(n-1)}$, donde *n* es la posición que se está trabajando, y al final, se suman todos los productos.

Ejemplos:

- El número 21 tiene una unidad en la primera posición y una en la segunda, luego se escribe como dos puntos uno encima del otro:



- El número 825:



1.1.3. Sistema Calendárico Maya

Los mayas parece que fueron los primeros en comprender la necesidad de un calendario, es decir, disponer de un punto de partida para medir su era cronológica. Con este fin, generalmente se ha determinado el punto inicial, o bien usando un evento histórico (el nacimiento de Nuestro Señor Jesucristo) o por un evento hipotético (la fecha de la creación del mundo).

Los mayas también descubrieron la necesidad de tal fecha, y así, probablemente usando un evento astronómico significativo ubicaron ese día inicial el 13 de agosto de 3113 a.C. En el *Códice de Dresde* y en numerosas estelas se encuentran los cálculos de los ciclos lunar, solar, venusiano y las tablas de periodicidad para predecir con exactitud eclipses lunares, solares y la conjunción de Venus con otros planetas[11].

> *Para los mayas, el tema por excelencia siempre fue el paso del tiempo, es decir, ese dilatado concepto del misterio de la eternidad, y la idea más estrecha ya, de la división del propio tiempo en lo que serían sus equivalencias de los siglos, los años, los meses y los días. El ritmo del tiempo, pues, fascinó a los mayas. Los maravillaba el interminable flujo de los días deslizándose de la eternidad del futuro a la otra eternidad del pasado*. (Thompson (1986) citado por Ospina (2001, p. 90)).

Al hablar del calendario maya, la mayoría de los investigadores se refiere a todo un sistema calendárico, pues esta cultura desarrolló varios instrumentos y formas

[11] La conjunción de Venus con otros planetas es la alineación de Venus con dos o más planetas dentro de la misma longitud geocéntrica desde el punto de vista del observador de un tercero (generalmente la Tierra).

para medir el tiempo, todos relacionados entre sí. Antes de indagar sobre su sistema calendárico, veamos cómo esta cultura contaba los días.

> *La unidad del calendario maya era el día o kín. Al segundo orden de unidades, compuesto por 20 kines, se dio el nombre de uinal. En un sistema perfecto de numeración vigesimal, el tercer término debería ser 400 (20x20x1), pero al llegar a este punto los mayas introdujeron una variante para cálculos calendáricos. El tercer orden del sistema maya era el tún y se componía de 18 (en lugar de 20) uinales o 360 (en lugar de 400) kines. Este se aproximaba más a la duración del calendario solar*[12]. (Morley (1975) citado por Guirao (1989, p. 94)).

A continuación se registra los valores de los períodos:

1 *kín* = 1 día o unidad básica del calendario maya.

20 *kines* = 1 *uinal* o 20 días.

18 *uinales* = 1 *tún* o 360 días.

20 *tunes* = 1*katun* o 7200 días.

20 *katunes* = 1 *baktun* o 144000 días.

20 *baktunes* = 1 *pictun* o 2880000 días.

20 *pictunes* = 1 *calabtun* o 57600000 días.

20 *calabtunes* = 1 *kinchiltun* o 1152000000 días.

20 *kinchiltunes* = 1 *alautun* o 23040000000 días.

Los nueve períodos de tiempo tenían su representación pictográfica (ver Figura 1) en los monumentos o estelas, y se usaban para expresar la fecha correspondiente. Cada jeroglífico representaba alguna deidad, animal o una criatura mitológica.

[12] Más adelante se hablará del calendario solar maya.

Figura 1. Representación pictórica de los nueve períodos.[13]

1.1.3.1. El Calendario Sagrado de 260 días: Tzolkín

El *tzolkín* en yucateco significa "desenvolvimiento de los días". Los mayas lo usaban para regir los tiempos de su quehacer agrícola, su ceremonial religioso y sus costumbres familiares, pues la vida del hombre maya estaba predestinada por el día del *tzolkín* que correspondía a la fecha de su nacimiento.

Este calendario constaba de los números del 1 al 13, y 20 nombres para los días representados por glifos o jeroglíficos (ver Figura 2). Los veinte nombres en su orden continuo eran: *imix, ik, akbal, kan, chicchan, cimi, manik, lamat, muluc, oc, chuen, eb, ben, ix, men, cib, caban, etznab, cauac, ahau.*

Figura 2. Representación pictórica de los 20 días del *Tzolkín*.[14]

[13] Fuente: http://www.uacam.mx/campeche/maya/cronmay.htm
[14] Fuente: http://www.telefonica.net/web2/paramahamsa/mayancalenderspanish.htm

Al llegar al decimocuarto día, el número del día regresaba al 1 continuando la sucesión del 1 al 13. Es decir, 1 *imix,* 2 *ik,* 3 *akbal,* 4 *kan,* 5 *chicchan,* 6 *cimi,* 7 *manik,* 8 *lamat,* 9 *muluc,* 10 *oc,* 11 *chuen,* 12 *eb,* 13 *ben,* entonces el siguiente: *ix*, que es el decimocuarto día, se le asignaba el número 1; y volvía, y se comenzaba la secuencia de 13 unidades (1 *ix,* 2 *men,* 3 *cib,* 4 *caban,* 5 *etznab,* 6 *cauac,* 7 *ahau,* 8 *imix,* 9 *ik,*…) hasta que el número 1 se volviera a encontrar con el primer día: *imix*. Por tanto, transcurrían 260 días, ya que 260 es el mínimo común múltiplo de 13 y 20. Después, el ciclo de 260 días a su vez se repetía. A cada período de los 20 días se le considera un mes, luego este calendario tenía 13 meses.

Cada uno de los 20 días tenía su deidad o dueño, el cual influía sobre las personas dadas a luz en dicho día. Los sacerdotes se encargaban de leer el destino de las personas y el rumbo de los acontecimientos de la vida, de una manera sistemática y precisa. Además, este calendario era usado para pronosticar la llegada y duración del período de lluvias, de cacería y de pesca.

1.1.3.2. El Calendario Civil Solar de 365 días: Haab

El *haab* en yucateco significa "medida de tiempo". Era usado principalmente para la administración de fechas comunitarias y ceremonias religiosas. Constaba de 18 meses o *uinales* de 20 días o *kines*, más 5 días complementarios que llamaban *uayeb.*

$$18 \times 20 + 5 = 360 + 5 = 365 \text{ días}$$

Los 365 días eran completos, a diferencia del calendario gregoriano[15] que considera: 365 días, 5 horas, 48 minutos y 12 segundos.

> *En la escala vigesimal hemos visto cómo cada piso lleva un nombre y que el paso a un piso superior multiplica la cifra dada por 20. Ahora bien, en el tercer piso, el multiplicador ya no es 20, sino 18. Puesto que se trata de contar el tiempo, aquella astucia permitía acercarse al total, el tun, del año civil solar de 365 días, o sea: 18x20=360*. (Ivanoff (1979) citado por Guirao (1989, p. 98)).

[15] Este calendario originario de Europa es actualmente utilizado de manera oficial en todo el mundo. Su nombre se debe a su promotor el Papa Gregorio XIII en 1582.

Los meses en orden continuo eran: *pop, uo, zip, zotz, zec, xul, yaxkin, mol, chen, yax, zac, ceh, mac, kankin, muan, pax, kayab, kumku, uayeb.* Estos también eran representados por glifos (ver Figura 3).

Figura 3. Representación pictórica de los meses del *haab*.[16]

Este calendario empezaba el año con el día 0 *pop*, y no con el 1 *pop*. Como el primer mes del año era pop y la primera posición se escribía con 0, así aunque los meses mayas tenían 20 días de duración, las posiciones se enumeraban del 0 al 19 (0 *pop*, 1 *pop*, 2 *pop*,...,19 *pop*, 0 *uo*, 1 *uo*,…, 19 *uo*,…, 0 *kumku*,…, 19 *kumku*, 0 ***uayeb***, 1 ***uayeb***, 2 ***uayeb***, 3 ***uayeb***, y 4 ***uayeb***).

Los 5 días complementarios, que se llamaban ***uayeb***, se consideraban como días sin nombre, y no debían ser nombrados, ya que para los mayas, éstas fechas se consideraban como fatídicas durante las que nadie podía salir de sus casas; se encomendaban a los dioses, no se aseaban, y ni siquiera comían, porque además *uayeb* significaba envenenamiento. Tenían miedo de que si salían a sus campos a trabajar podían ser heridos por un árbol o les podía suceder alguna desgracia.

1.1.3.3. La Rueda Calendárica-Ciclo de 52 años

La *rueda calendárica* se formó combinando los calendarios *tzolkín* y *haab*. Esta combinación da un total de 18980 días (el mínimo común múltiplo de 260 y 365).

[16] Fuente: http://www.telefonica.net/web2/paramahamsa/mayancalenderspanish.htm

Una vez comenzaba el movimiento de la rueda calendárica transcurrían 18980 días, es decir, 52 años para que el ciclo se cumpliera y volviera a coincidir los días del *tzolkín* y del *haab,* que se combinaron en el primer día de inicio del tiempo. Mientras que el ciclo de la rueda calendárica se cumplía cada 52 años según el calendario *haab*, para el *tzolkín* debían pasar 73 años. Cada ciclo de 52 años, llamado siglo mesoamericano, estaba compuesto por 4 períodos de 13 años.

Lo extraordinario del período de 52 años –demostración de los profundos conocimientos de las sistemáticas mediciones y de las observaciones astronómicas que hacían los mayas–, es que no es un resultado de un juego matemático, sino que está ligado a un ciclo astronómico real del que ellos eran conscientes, y que aún sigue ocurriendo y se puede ver, como es el paso de las Pléyades por el cenit[17], precisamente cada 52 años. Ellos creyeron ver una serpiente enroscada de cascabel en esta constelación, por lo que la llamaron *Tzab*.

El número 13 era sagrado para los mayas, era el símbolo del tiempo, el hombre al nacer combina el 13 con el 20, de lo cual surge el calendario de 260 días (13 x 20 = 260). Cuatro veces 13 era igual a 52, este número era considerado como el término medio de la vida de un hombre; probablemente para ellos, eran 13 años de niño, 13 de joven, 13 de adulto y 13 de anciano. Según Ivanoff (1979) citado por Guirao (1989, p. 98), el ciclo de 52 años era la imagen del hombre, que se situaba por debajo de la sociedad, el mundo, y su organización; ya que éstos debían estar en un nivel superior; en el sistema de los calendarios se situaba en el nivel de arriba, es decir, que era multiplicado por 20. Los mayas estimaban que el promedio de vida del hombre era de 52 años y la vida de un mundo, por lo tanto, era 52 x 20 = 1040, y que la vida del universo era la suma de 1040 de cinco mundos, es decir, 5200 años.

[17] Las Pléyades, que significa "palomas" en griego, es un cúmulo estelar situado en la constelación de Tauro; visible a simple vista en el cielo nocturno que pasa por el cénit: punto situado directamente sobre la cabeza del observador, 90º sobre el horizonte. El paso de las Pléyades por el cenit a medianoche señalaba para los mayas que el mundo continuaría durante otros 52 años.

1.1.3.4. La Cuenta Larga

Como una fecha de la *rueda calendárica* se repite cada 52 años, lapso suficiente para marcar los eventos de una vida humana, pero insuficiente, en su ambigüedad, para describir fenómenos astronómicos, los mayas recurrieron a un sistema más perfecto de notación cronológica para solucionar el problema.

La *cuenta larga* era el método usado por los mayas para contar el número de días que han transcurrido desde el inicio de una era Maya. Fue la forma de expresión del calendario maya más completa, la cual permite, a su vez, una combinación con nuestro calendario en el que identifica cualquier fecha de la misma. Fue empleada para registrar sucesos importantes en la vida política de varias ciudades, especialmente en el sureste de Mesoamérica.

El entendimiento de la *cuenta larga* se debe al bibliotecario e historiador alemán Ernst Förstemann, que se dedicó por completo a la interpretación del *Códice de Dresde*. Mediante este texto original, y una copia de la *Relación de las cosas de Yucatán* del obispo Fray Diego de Landa, logró interpretar la forma de numeración vigesimal y las fechas consignadas allí. Así determinó que el inicio de la *cuenta larga* tenía la fecha 4 *ahau* 8 *kumku*[18] de la *rueda calendárica*. La *cuenta larga* no es infinita, es sólo la contabilidad de un ciclo o período sorprendentemente largo.

Eric Thompson, el más renombrado y famoso entre los estudiosos de la cultura maya, de origen inglés, revisó el funcionamiento de la *cuenta larga* y estableció fuera de toda duda que todas las fechas de esta cuenta contenían cinco numerales con la cantidad de *baktunes, katunes, tunes, uinales y kines*, transcurridos desde "el inicio del tiempo". El comienzo de la era Maya había ocurrido –según el sistema maya–, el 13.0.0.0.0 4 *ahau* 8 *kumku*, equivalente a 0.0.0.0.0 4 *ahau* 8 *kumku*, que corresponde a la fecha gregoriana del 13 de agosto de 3113 a.C. Y como dice Morley (1975) citado por Guirao (1989, p. 91): "*Es posible que haya comenzado con un acontecimiento supuesto, como la*

[18] Esta fecha corresponde al número 4 del día *ahau* del calendario *tzolkín* y el día 8 del mes *kumku* del calendario *haab.*

creación del mundo o puede haber tenido su principio en la fecha imaginaria del nacimiento de sus dioses. La cuestión no ha podido ser resuelta”.

Antes de proseguir veamos que significa la numeración 13.0.0.0.0. Para mayor brevedad y claridad, actualmente, se acostumbra transliterar las fechas mayas escribiendo con números arábigos separados por puntos.

Empecemos observando los números de derecha a izquierda; el primer cero representa el número de *kines* (días); el segundo, el de *uinales* (meses); el tercero, el de *tunes*; el cuarto, el de *katunes*; y el número 13, el de *baktunes*. Es decir, una era Maya dura 13 *baktunes*.

Ahora veamos los valores de los períodos[19] para saber cuántos días tiene 13 *baktunes*:

$$13\ baktunes \quad x \quad \frac{144000\ días}{1\ baktun} \quad = \ 1872000\ días$$

$$0\ katunes \quad x \quad \frac{7200\ días}{1\ katun} \quad = \ 0\ días$$

$$0\ tunes \quad x \quad \frac{360\ días}{1\ tún} \quad = \ 0\ días$$

$$0\ uinales \quad x \quad \frac{20\ días}{1\ uinal} \quad = \ 0\ días$$

$$0\ kines \quad x \quad \frac{1\ día}{1\ kín} \quad = \ 0\ días$$

La suma de los productos es 1872000 días. Luego 13.0.0.0.0 representa 1872000 días, es decir, una era Maya dura aproximadamente 5125 años y 134 días –según calendario gregoriano–. La era Maya actual terminará el 23 de diciembre de 2012 (5125 – 3113 = 2012) que corresponde –según el sistema maya–, el 13.0.0.0.0 4 *ahau* 3 *kankin*. Será el día en el que se completará el gran ciclo de los *baktunes*,

[19] Se recuerda al lector los valores de los períodos en la página 27.

luego se abrirá una nueva era Maya en blanco: 0.0.0.0.0 (0 *baktun*, 0 *katun*, 0 *tun*, 0 *uinal*, 0 *kín*). Esto no significa que para los mayas el mundo termina en dicha fecha, sino que el ciclo de 13 *baktunes* forma parte de uno de los mayores ciclos del tiempo, los *pictunes*.

En general, en las inscripciones, estelas y monumentos de piedra, las fechas están inscritas en forma de doble columna de jeroglíficos; una de las dos se compone de la parte numérica mediante el código de barras y puntos, y la otra, de glifos o símbolos del período correspondiente. Las estelas encontradas describen las fechas exactas de rituales políticos celebrados por la clase dominante, como son las ascensiones al trono, las guerras, la toma de prisioneros, los sacrificios, y los recordatorios de hechos de ancestros y dioses. Estas fechas se encuentran grabadas o pintadas. Generalmente, en las estelas aparece un jeroglífico introductor, que significa: *"vamos a leer la fecha que conmemoramos hoy"*, y los cinco numerales de la *cuenta larga*.

Uno de los objetos mayas fechados de mayor antigüedad que se conoce es la famosa placa de Leyden, que se cree que procede de Tikal[20], aunque fue encontrada en Puerto Barrios, Guatemala, en 1864. La placa de Leyden es una estatuilla de jade puro natural que está dibujada y tallada en ambos lados. En una cara presenta la figura de un personaje artísticamente, y en la otra, se encuentran los numerales que describen la fecha (ver Figura 4).

[20] El Tikal fue la ciudad más grande del período Clásico. Sus ruinas están situadas en la región del Petén. Esta ciudad tenía los principales centros culturales, religiosos, científicos y políticos de la civilización maya.

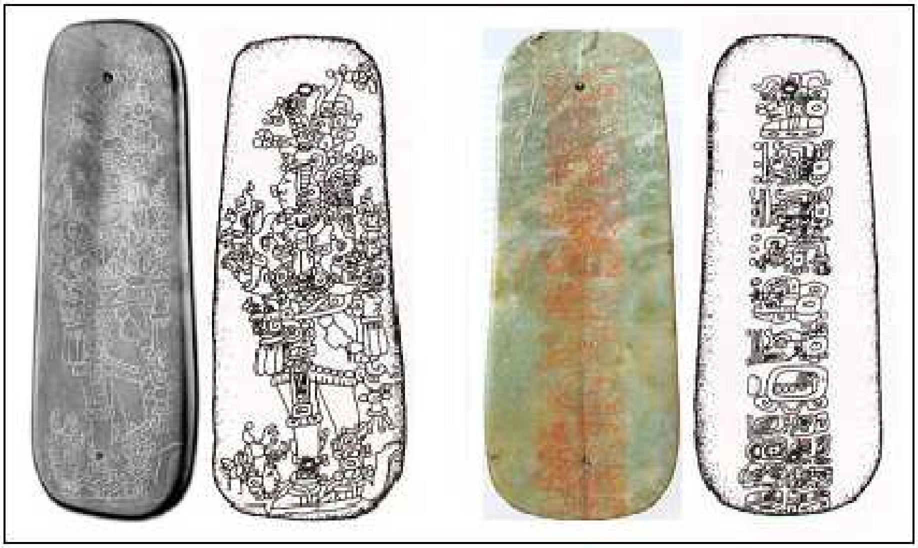


Figura 4. Placa de Leyden.[21]

En la placa de Leyden, después de leer el jeroglífico introductor se lee la fecha inscrita de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo (ver la parte derecha de la Figura 4): 8 *baktunes* (el glifo que corresponde al número 8 es el *baktun*, y así sucesivamente con los demás), 14 *katunes*, 3 *tunes*, 1 *uinal* y 12 *kines*; es decir, 8.14.3.1.12 que significa que desde el año cero maya (3113 a.C.) hasta esa fecha habían transcurrido1253912 días.

Luego, 1253912 ÷ 365,242 = 3433,1 años, y 3433,1- 3113 = 320,1. Por lo tanto, realizando cálculos, la fecha ilustrada en la placa de Leyden fue grabada, aproximadamente, en el sexto día del primer mes del año 320 d.C.

[21] Fuente: http://www.sugermontano.edu.gt/addfisicc/turismo/cursos/sm/sms09/sms09.htm

2. ARITMÉTICA MAYA

"Una razón por la que las matemáticas gozan de especial estima, sobre todas las demás ciencias, es que sus leyes son absolutamente ciertas e indiscutibles, mientras que las de las otras ciencias son hasta cierto punto debatibles y en peligro constante de ser derrocadas por hechos recién descubiertos".
Albert Einstein

A continuación, se mostrará una breve reseña histórica sobre cómo los mayas realizaban las operaciones fundamentales de la aritmética según la opinión de varios expertos en el tema.

Otto Neugebauer, historiador de la ciencia, citado por Coe (1997), considera que la numeración empleada por los mayas es uno de los inventos más fértiles de la humanidad. Desafortunadamente, debido a la destrucción sistemática de los manuscritos mayas no se pueden saber los conocimientos adquiridos por los mayas en otras ramas de la matemática, como el álgebra, donde las culturas mesopotámicas alcanzaron gran desarrollo, llegando a resolver ecuaciones de segundo y tercer grado empleando un sistema numérico sexagesimal.

Landa (1938, p. 112), describe que los mayas hacían las cuentas en el suelo o lugares planos, y utilizaban piedras y ramas. Morley (1968, p. 256), registra la forma de la adición en el sistema de numeración maya. Según León-Portilla (1988, p. 2), la adición, y posiblemente las otras operaciones de la aritmética, se trabajaban sobre una tabla o en el suelo, en ella se colocaban frijoles y palitos, y propuso que en el *Códice de Dresde* (44-b) se encuentra la representación de una multiplicación. También, Calderón (1966), describe en forma muy didáctica las cuatro operaciones de la aritmética, además de la raíz cuadrada y la raíz cúbica, el único inconveniente es que no indica las fuentes que utilizó.

En la actualidad, apunta Magaña (1990), ya se tienen los conocimientos necesarios para establecer que los mayas realizaron operaciones aritméticas, y que su sistema numérico con facilidad se extiende hasta números no enteros.

Según Flores (1976) y Magaña (1990), el sistema de numeración maya que es posicional, vertical (aunque también fue empleado de manera horizontal en algunas inscripciones) y vigesimal, permite realizar operaciones aritméticas con menos información memorizada que en nuestro sistema de numeración, es decir, en el sistema de numeración maya solo se emplean tres símbolos y en el sistema decimal, diez.

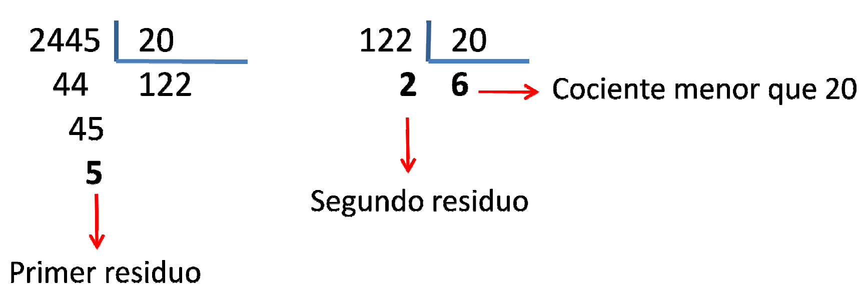
2.1. CONVERSIÓN DE SISTEMA DE NUMERACIÓN

2.1.1. Conversión del sistema decimal al sistema maya

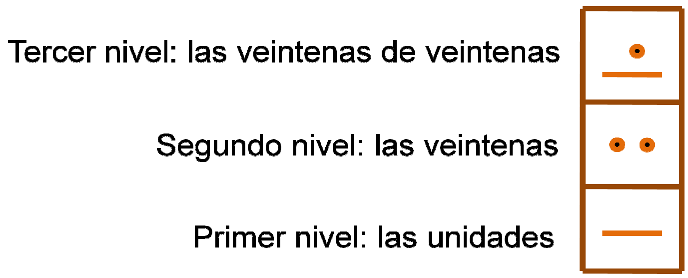
Para cambiar un número cualquiera del sistema decimal al sistema maya se realiza lo siguiente:

Se divide el número entre veinte (la base del sistema de numeración maya); si se obtiene un cociente mayor o igual a veinte, se continúa dividiendo dicho cociente entre veinte, hasta obtener un cociente menor que él. El nuevo número en el sistema maya se forma escribiendo de abajo hacia arriba en las pociones o niveles de la columna cada uno de los residuos, aunque sean ceros. Luego se coloca el cociente menor que veinte en el siguiente nivel, que será el último.

Ejemplo: escribir el número 2445 en el sistema de numeración maya:



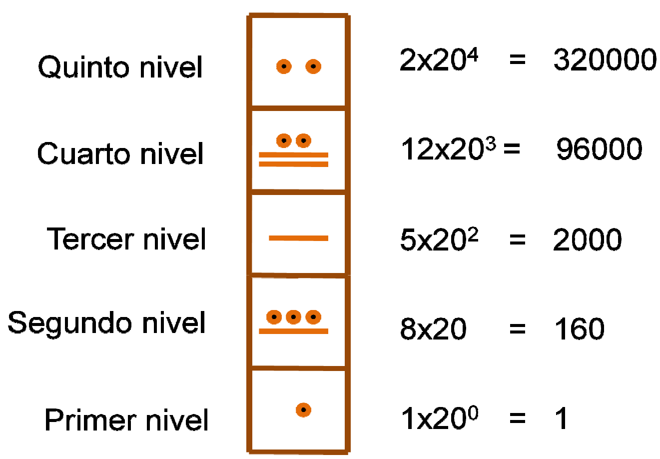
El residuo 5 (una raya) va en el primer nivel, el de las unidades. El residuo 2 (dos puntos) va en el segundo nivel, el de las veintenas; pero ahora, el cociente 6 es menor que 20, y no se puede seguir dividiendo, por lo tanto, el número 6 (un punto y una raya) va en el tercer nivel, el de las veintenas de veintenas. Se puede apreciar mejor en el siguiente gráfico:



2.1.2. Conversión del sistema maya al sistema decimal

Para pasar un número escrito en el sistema maya al decimal se multiplica el valor de cada nivel por $20^{(n-1)}$, donde *n* es el nivel en que se encuentra dicho valor, enumerados de abajo hacia arriba, y se suman todos los productos.

Por ejemplo, el número representado en escritura maya del siguiente gráfico es denotado por: 1.8.5.12.2 (de abajo hacia arriba y cada cifra separada por puntos), al convertirlo al sistema decimal:



tiene como suma de sus productos: $1 \times 20^0 + 8 \times 20 + 5 \times 20^2 + 12 \times 20^3 + 2 \times 20^4 = 418161$. Luego 1.8.5.12.2 en el sistema de numeración decimal es 418161.

2.2. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA

Un elemento importante para entender la sencillez y precisión con la que los mayas realizaron las operaciones y los cálculos es sin duda alguna el tablero; sobre esta cuadrícula se realizaban las operaciones y los cálculos con los que contabilizaron desde las pertenencias, los impuestos y la repartición de las cosechas, hasta los eventos astronómicos y los ciclos del tiempo.

Como todos los objetos artísticos de la cultura maya, el tablero –que es una cuadrícula semejante a la del ajedrez–, es un objeto lleno de significaciones relacionadas con su cosmovisión; este elemento representaba, en un sentido místico, la intriga del universo, el tiempo y el espacio.

Antes de dar inicio a cada una de las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética se tiene en cuenta el uso de las siguientes reglas:

1. Máximo en cada nivel del resultado de una operación debe haber cuatro puntos y tres rayas (19 unidades), excepto en el proceso de la operación.
2. Cuatro rayas en un nivel de una columna equivalen a un punto en el nivel inmediato superior.
3. Un punto en un nivel de una columna equivale a cuatro rayas en el nivel inmediato inferior.
4. Cinco puntos en un nivel equivalen a una raya.

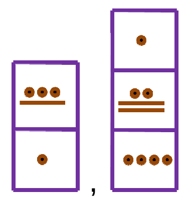
Observaciones:

- No es correcto poner cuatro rayas en un nivel, cuando esto suceda después de efectuar una operación se usa la regla 2.
- No es correcto poner más de cinco puntos en un nivel, cuando esto suceda como resultado de una operación se usa la regla 4.
- Si hace falta un nivel en la columna del resultado para completarla, simplemente se construye dicho nivel.

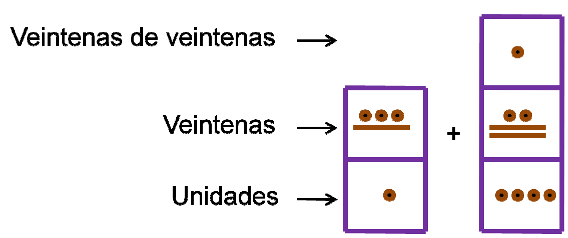
2.2.1. La Adición

Para efectuar la suma de dos o más números en el sistema de numeración maya, se propone un algoritmo que consiste en construir una nueva columna que agrupe en cada nivel los símbolos del mismo nivel de cada uno de los sumandos, y a continuación se efectúan las simplificaciones necesarias de abajo hacia arriba según las reglas establecidas.

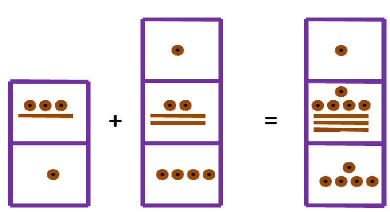
Ejemplo: realizar la suma de los siguientes numerales:



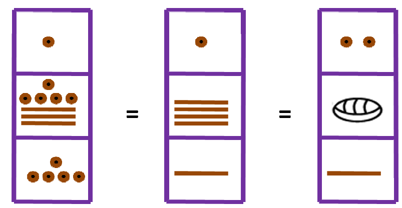
Primero se ubica los símbolos de forma que coincidan el nivel de las unidades, el de las veintenas y el de las veintenas de veintenas:



Después se agrupan todos los puntos y las rayas de cada nivel en una tercera columna que será el resultado:

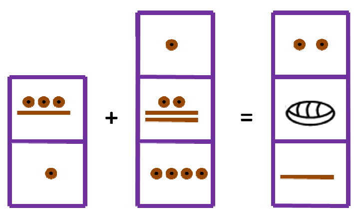


Seguidamente se aplican las reglas, empezando en el nivel de las unidades:



Observe que en el nivel de las veintenas las cuatro rayas se convirtieron en un punto del nivel de las veintenas de veintenas (regla 2) y no quedó nada, por lo tanto, se coloca un cero.

Finalmente,



$$\begin{aligned} 2\text{x}20^2 &= 800\ + \\ 0\text{x}20 &= 0 \\ 5\text{x}20^0 &= 5 \\ \hline &\ \ 805 \end{aligned}$$

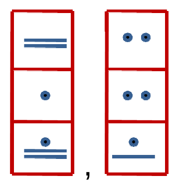
Lo que en nuestro sistema decimal efectivamente es: 161 + 644 = 805

2.2.2. *La Sustracción*

Como el trabajo está enfocado a niños de cuarto de primaria es necesario hacer hincapié en que para la resta el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. Para esto, una forma fácil de saber cuál es el mayor de dos números en el sistema maya (sin necesidad de pasarlos al sistema decimal), es igualar el mismo número de niveles en cada columna y observar en el último nivel de cada una cuál cifra es mayor que la otra, y la que sea mayor será el número mayor. En el caso de que las cifras sean iguales, se observa en el nivel inmediato inferior; y si ocurre lo mismo se observará en el siguiente nivel inferior, y así sucesivamente; de persistir el mismo fenómeno hasta el final se concluye que los números son iguales.

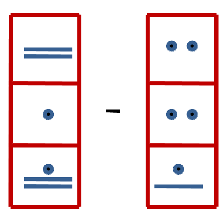
Para restar dos números en el sistema maya se colocan los símbolos de forma que coincidan los niveles (el minuendo a la izquierda del signo menos y el sustraendo a la derecha), después se empieza a sustraer en el primer nivel, y posteriormente, hacia arriba consecutivamente hasta llegar al último nivel; durante este proceso se van sustituyendo rayas por puntos (si es necesario) para facilitar mejor la sustracción. Se quita tantos puntos y rayas al minuendo como haya en el sustraendo, y se va colocando el resultado en una nueva columna. En el caso en que no sea posible restar en algún nivel puesto que la cantidad es menor en la posición del minuendo que en el sustraendo, entonces es necesario "prestar" al nivel siguiente, tal cual se hace en el sistema decimal.

Ejemplo: realizar la resta de los siguientes numerales:

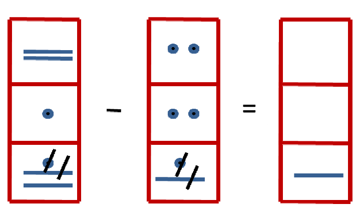


Ambos numerales tienen la misma cantidad de niveles, por tanto, el numeral mayor en el sistema maya es el de la izquierda, ya que la cifra del último nivel es mayor.

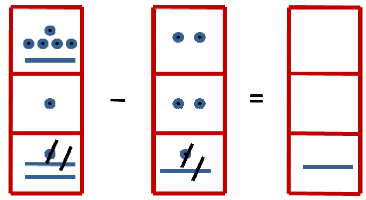
Se procede a realizar la resta:



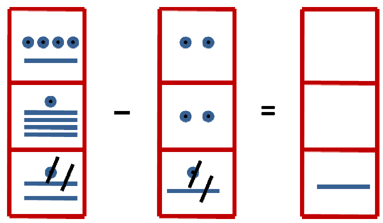
Se comienza a sustraer en el primer nivel. Se quita tantos puntos y rayas al minuendo como haya en el sustraendo:



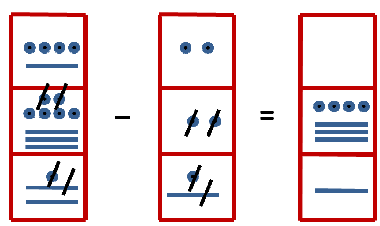
Se observa que en el segundo nivel no se puede restar, ya que solo hay un punto en el minuendo; para ello, en el minuendo se baja o "presta" un punto del nivel inmediato superior y se convierte en cuatro rayas (regla 3); pero antes, para facilitar mejor la operación se convierte una de las dos rayas en cinco puntos (regla 4) en el tercer nivel.



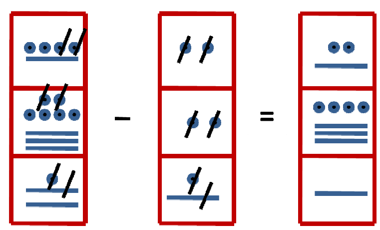
Luego,



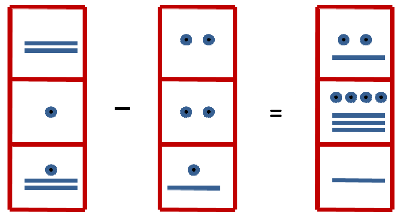
En el segundo nivel, nuevamente, se quita tantos puntos y rayas al minuendo como haya en el sustraendo, pero antes para facilitar mejor la operación se sustituye una raya por los cinco puntos (regla 4).



Finalizando,



Luego,



$7 \times 20^2 = 2800 +$

$19 \times 20 = 380$

$5 \times 20^0 = 5$

3185

Lo que en nuestro sistema decimal efectivamente es: 4031 – 846 = 3185

2.2.3. La Multiplicación

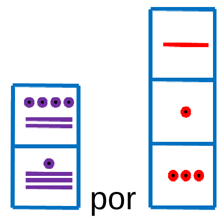
Para efectuar la operación aritmética de la multiplicación los mayas emplearon un algoritmo diferente al utilizado en nuestro sistema de numeración decimal.

Los mayas utilizaron un tablero y los factores se situaban en la parte externa de él, uno verticalmente en el lado izquierdo de abajo hacia arriba y el otro arriba horizontalmente de derecha a izquierda, ambos empezando con el primer nivel. El tamaño del tablero es *nxm* o *mxn* –dependiendo de la ubicación de los factores–, donde *n* es el número de niveles que tiene el mayor factor y *m* el del menor.

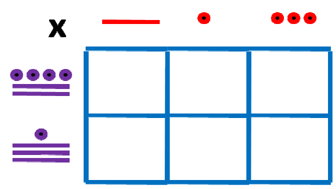
Después de situar los factores en el exterior del tablero, se pone en cada casilla el símbolo del nivel correspondiente al numeral que está en la parte izquierda tantas veces como indica el símbolo de la columna correspondiente al numeral que está en la parte superior; o viceversa.

Se trazan las diagonales en el tablero. Para hacerlo, sencillamente en cada casilla o cuadro se traza la diagonal desde el vértice derecho superior hasta el vértice izquierdo inferior. Cada diagonal del tablero representa un nivel en el resultado de la multiplicación. Se agrupan los símbolos de cada diagonal o nivel de derecha a izquierda, y se escribe en forma vertical lo que se observa por niveles. Seguidamente, se simplifica el resultado según las reglas establecidas.

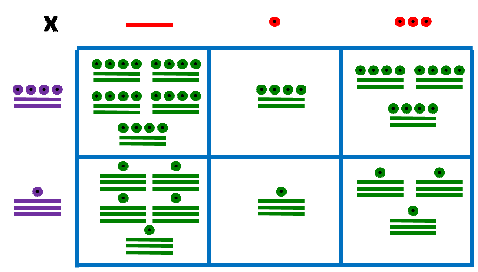
Ejemplo: realizar la siguiente multiplicación:



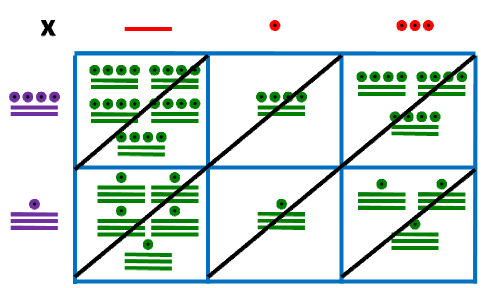
El tablero que se trabajará a continuación será de *mxn*. El menor factor tiene dos niveles y el mayor tiene tres, luego el tamaño del tablero será de *2x3*. En seguida se sitúan los factores fuera del tablero:



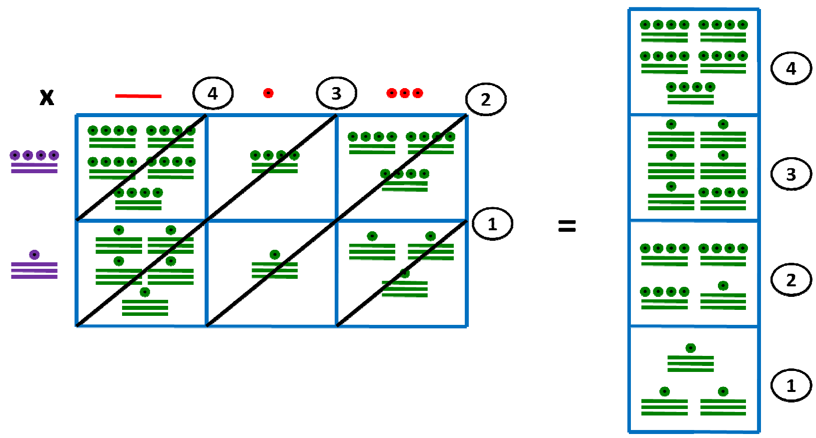
En la primeras casillas inferior y superior se repiten cinco veces los números 16 y 14 respectivamente, en las segundas casillas se repiten una sola vez, y en las terceras, tres veces.



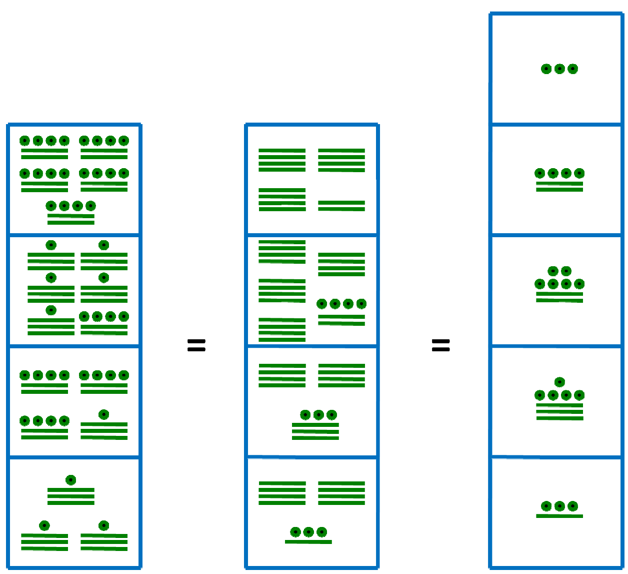
Se trazan las diagonales en el tablero:



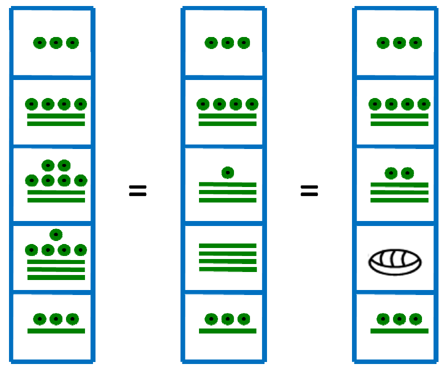
Luego el tablero tiene cuatro diagonales que serán, posiblemente, todos los niveles del resultado, esto se obtiene agrupando los símbolos de los cuadros de cada diagonal como se puede apreciar mejor en el siguiente gráfico:



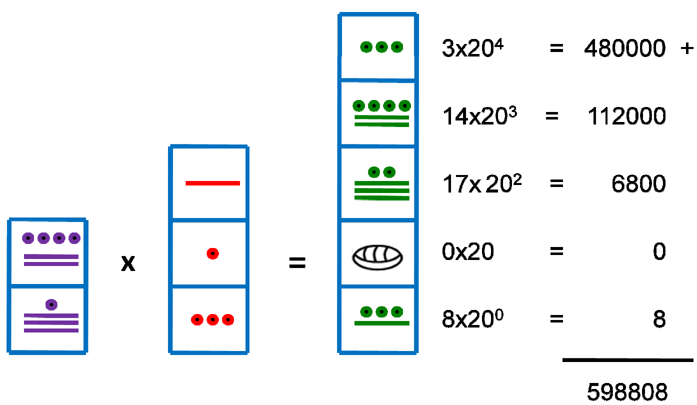
Ahora se simplifica este numeral utilizando las reglas establecidas. Primero se aplica la regla 4, y se forman grupos de cuatro rayas. Una forma rápida de hacerlo es, por ejemplo, en el cuarto nivel hay 20 puntos que representan cuatro rayas; luego hay catorce rayas en total, lo cual da tres grupos de cuatro rayas y sobran dos. Seguidamente se aplica la regla 2.



Observe que la última columna tiene cinco niveles, cuando originalmente eran cuatro. Esto se debe a que en el último nivel se convierten grupos de cuatro rayas en puntos de un nivel inmediato superior, luego se construye dicho nivel.[22] Y se continúa realizando los cambios de acuerdo a las reglas:



Luego,



Lo que en nuestro sistema decimal efectivamente es: 296 x 2023 = 598808

2.2.4. La División

En el presente trabajo sólo se trabajará con la división exacta. La división se hace de una manera similar a la multiplicación, y como dicen Lam, Magaña y Oteyza (2005, p. 44), *"Pensaremos en la división como en el proceso inverso a la multiplicación"*.

[22] Esto es lo mismo que ocurre en el sistema de numeración decimal, por ejemplo, el resultado de la multiplicación de 222 por 9 no va a ser de tres cifras sino de cuatro.

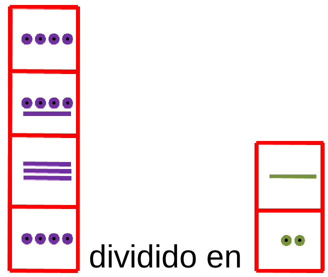
Se utiliza un tablero de tamaño mxk, donde m es el número de niveles del divisor y $k = n - \left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]$ con n el número de niveles del dividendo. Se sitúa el divisor en la parte externa izquierda y se trazan las diagonales en cada casilla del tablero (como en la multiplicación). Puesto que el dividendo es el resultado de la multiplicación del divisor con el cociente –el número que se desea buscar–, entonces se ubica sobre las diagonales los símbolos de cada nivel del dividendo, desde la esquina inferior derecha hasta la esquina superior izquierda del tablero.

Se comienza el proceso por la diagonal izquierda superior, que siempre será de una sola casilla; en esta se hacen grupos de la misma cantidad que se encuentra en la parte izquierda. Si no se puede hacer esto se coloca un cero en la casilla y se bajan todas las unidades a la diagonal inmediatamente inferior, o en el otro caso solo se bajan las unidades que no alcanzan a formar otro grupo. Recuerde que al bajar un punto de nivel se convierte en cuatro rayas en el nivel inmediatamente inferior y al bajar una raya se convierte en veinte rayas. Dependiendo del número de grupos en esta casilla se coloca dicho número en la parte externa superior (primera casilla del número buscado) del tablero. Se continúa de manera similar el proceso en la siguiente diagonal inferior, y así hasta concluir. En las casillas del número buscado sólo deben haber 19 unidades, excepto durante el procedimiento.

Finalmente, el número obtenido –que se encuentra en la parte superior–, se lee de derecha a izquierda.

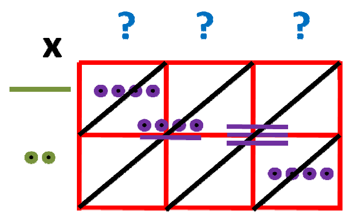
Comentario: en algunos casos, en alguna(s) diagonal(es) del tablero hace falta símbolos para completar la operación en dicha(s) diagonal(es); para ello, se baja un punto o los que sean necesarios de la diagonal inmediatamente superior, así en esta diagonal la operación sea cierta, luego, se acomodan los símbolos de tal manera que las operaciones sean correctas en el tablero. Esto es lo mismo que ocurre en el sistema de numeración decimal, cuando en una división se coloca un cero en el cociente para seguir efectuando la operación.

Ejemplo: realizar la siguiente división:

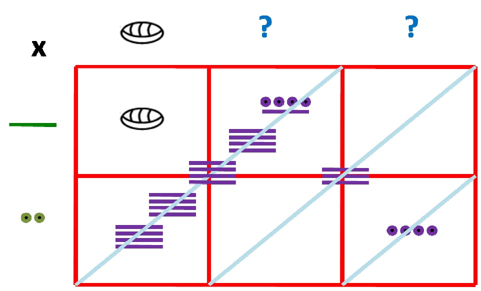


El tamaño del tablero será de *2x3,* puesto que el divisor tiene dos niveles y *k* = 3.

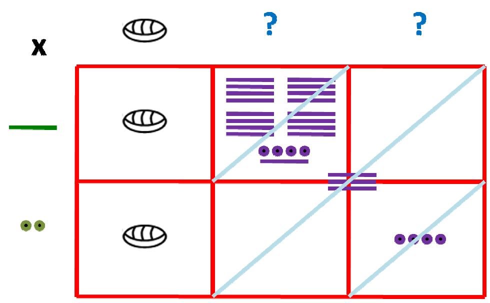
Se trazan las diagonales. Se ubican el divisor y el dividendo en el tablero:



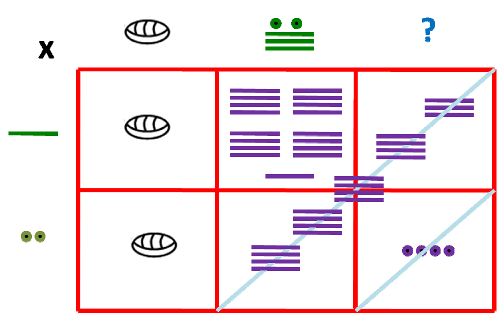
Se observa que en la primera casilla superior no hay un número que al reproducirlo cinco veces dé cuatro puntos o algo menor, entonces arriba y en esta casilla se colocan ceros y los cuatro puntos bajan a la siguiente diagonal convirtiéndose en cuatro grupos de cuatro rayas (se aplicó la regla 3).



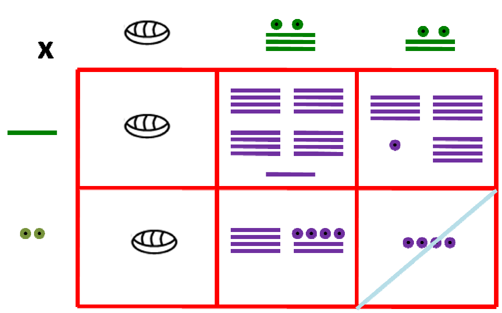
Como hay un cero en la parte externa superior de la primera columna entonces la casilla que falta por llenar se completa de cero, ya que el cero al reproducirse tantas veces da cero. Luego, los símbolos de la tercera diagonal de derecha a izquierda se ubican en la segunda casilla superior.



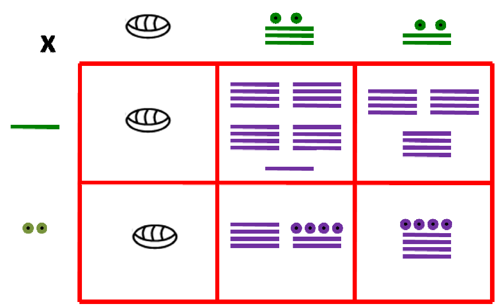
Se continúa el proceso en la segunda columna, en la casilla superior se colocan todas las rayas posibles –pues es el número que indica dicha fila en la parte externa izquierda del tablero–, para seguidamente ver cuántas veces se reproduce. Luego hay 17 rayas y sobran cuatro puntos, estos puntos bajan a la siguiente diagonal como cuatro grupos de cuatro rayas. Por tanto, la posición correspondiente externa superior es 17.



Una vez colocado el 17 sabemos que la casilla que falta por llenar en la columna es 34. Se toman 34 unidades de 95 que tiene en la diagonal correspondiente. El restante queda en la tercera casilla de la primera fila.

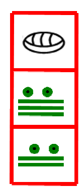


En esta misma casilla se colocan todas las rayas posibles; luego hay 12 rayas y sobra un punto, este punto baja a la siguiente diagonal como un grupo de cuatro rayas. Por tanto, la posición correspondiente externa superior es 12, y en la tercera casilla de la segunda fila se deja tal como está, ya que dos veces doce es 24.

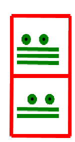


(*)

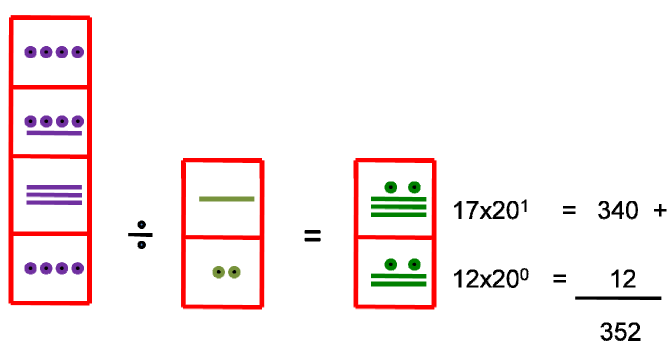
Finalmente, el resultado se escribe verticalmente de abajo hacia arriba conforme se lee de derecha a izquierda:



Como el nivel de las veintenas de veintenas es cero se puede borrar dicho nivel, luego este numeral maya es lo mismo que escribirlo así:[23]



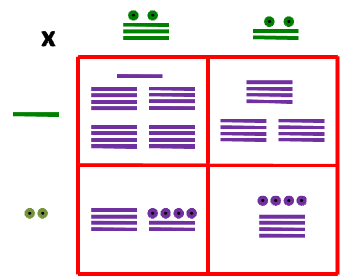
Luego,



[23] Esto es análogo al sistema de numeración decimal, por ejemplo, es lo mismo escribir 352 que 0352.

Lo que en nuestro sistema decimal efectivamente es: 35904 ÷102 = 352

Si se realiza la multiplicación entre 102 y 352 en el sistema de numeración maya se tiene lo siguiente:



Y esto es lo mismo que se obtuvo en (*), con la diferencia de que no existe la primera columna de ceros.

Comentario: si no se puede realizar una división entre dos numerales mayas entonces significa que la división es inexacta. Actualmente no se encuentran registros de cómo lo mayas realizaban las divisiones inexactas.

3. PRUEBA DIAGNÓSTICA

"No se preocupen por sus dificultades en matemáticas,
les aseguro que las mías son mayores".
Albert Einstein

Esta prueba diagnóstica se planteó para conocer las destrezas y debilidades que tienen los estudiantes del grado cuarto sobre la forma tradicional de aprendizaje de la aritmética, más exactamente, las operaciones fundamentales como la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales.

Los resultados de la prueba diagnóstica orientaron el diseño y la elaboración de los talleres, que contribuyeron en el proceso de adquisición de significados válidos acerca de la aritmética, además, se permitió observar y caracterizar las percepciones que van adquiriendo sobre las mismas en los estudiantes. Los nombres de ellos fueron cambiados para conservar la privacidad de los mismos.

Implementación de la Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica se implementó en el grupo del grado cuarto uno de básica primaria de la Institución Educativa Las Américas de la ciudad de Bucaramanga (Colombia). El grupo era conformado por 42 estudiantes de edades entre 9 y 11 años, y de estratos uno y dos. Esta prueba se desarrolló el día martes 14 de octubre del año 2008; fue programada para ser resuelta en un tiempo máximo de dos horas. Se llevó a cabo de manera individual, y los niños la desarrollaron en el tiempo que estaba programado en el lugar y horario habitual de clases de matemáticas. Se les aclaró que no era una evaluación, pues muchos lo pensaron, y se permitió sacar las tablas de multiplicar.

Durante el desarrollo de esta prueba se pasó por los puestos de cada uno de ellos observando lo que hacían, y se iba preguntando por su proceso en algún ejercicio. En esta situación se quiere resaltar la importancia de permitir al niño que exprese sus estrategias, porque mediante ellas, se puede distinguir los conceptos que son significativos para él, escuchar lo que comprenden, lo que ellos saben hasta el momento, no sólo basarse en el escrito que los niños hacen en la prueba diagnóstica.

A continuación se presenta el formato de la prueba diagnóstica[24].

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre: ____

Hola amiguitos!!!! Hoy vamos a reforzar un poco sobre el desarrollo de las operaciones fundamentales……. y acompañaremos a mis amiguitos TIGGER, PLIGET, EL BURRITO Y LOS DEMÁS AMIGUITOS DEL BOSQUE a resolver este taller-diagnóstico...ÁNIMO!!!!!

PRIMERA SECCIÓN

Resuelva las siguientes operaciones:

Amiguitos resolvamos las sumitas…¡¡A ver cómo nos va!!

a. 1 2 5 6 +
 5 6 3 4

b. 9 2 0 6 +
 8 7 3 9

Ahora las resticas

c. 8 9 9 -
 1 2 2

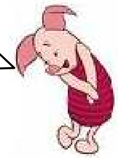
d. 1 0 0 0 1 -
 9 9 9 7

---

[24] Se aclara al lector, que todos los talleres sufrieron unos cambios en los espacios entre los párrafos, los ejercicios, tamaño de letra y dibujos, con el fin de crear una armonía en su presentación en la investigación.

e. 8 9 5 2 3 4
x 2 6

Niños acompáñenme a realizar la multiplicación



f. 7 9 6 8 3 | 6

No sé dividir… si me ayudan aprenderé…

g. 6 7 8 5 | 3 4

h. 5 4 7 6 | 5 3

SEGUNDA SECCIÓN

Resuelva los siguientes problemas:

Pooh no sé resolver estos problemitas…

No te preocupes, le diremos a los amiguitos que te ayuden…

a. Un comerciante de frutas vende a diario $4875; si hoy sólo ha vendido $2346, ¿en cuánto disminuyó la venta?

b. De un rollo de alambre que mide 148 cm. se cortan 3 trozos de 40 cm. cada uno, ¿cuánto miden los tres trozos?, ¿cuánto alambre queda en el rollo?

c. En la clase de cuarto de primaria se han colocado las sillas en cuatro filas con cuatro sillas cada una, ¿cuántas sillas se han colocado en total?

3.1. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

A continuación se presenta un análisis de las respuestas y los razonamientos dados por treinta y nueve niños del grado cuarto a la prueba diagnóstica.

3.1.1. Primera sección

Consta de varios ejercicios de suma, resta, multiplicación y división; con el objetivo de conocer e identificar las destrezas y debilidades que tienen los niños del grado cuarto sobre la forma de realizar las operaciones fundamentales.

Cinco estudiantes (12.8%) desarrollaron muy bien todos los ejercicios, incluyendo la forma correcta de colocar las cifras del resultado en la posición adecuada como regla fundamental para la solución correcta del algoritmo (ver Figura 5). En este respecto, Baroody (2000, p. 212) menciona entre las reglas de procedimiento en el cálculo escrito, la importancia de la alineación de los números por la derecha para que las cifras de las unidades formen una columna, las cifras de las decenas otra columna, y así sucesivamente.

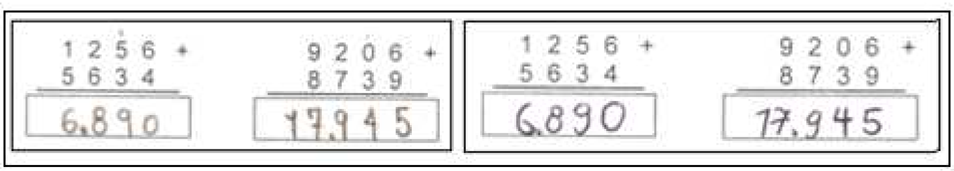


Figura 5. Respuestas de dos estudiantes en los ejercicios *a.* y *b.* (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

A estos cinco estudiantes se les indagó sobre el significado de cada columna de las sumas, inmediatamente señalaron cuál es la posición de las unidades, decenas, centenas, unidades de mil y decenas de mil.

En el ejercicio *e.*, al multiplicar 895234 por 2, estos mismos estudiantes ubicaron el resultado debajo del producto de 895234 por 6 y lo corrieron un lugar hacia la izquierda, ya que 2 representa las decenas. Sin embargo, se les preguntó por qué dicho resultado se corre un lugar hacia la izquierda, y cuatro estudiantes manifestaron que simplemente así era. Solo Silvia tuvo el argumento correcto, y mostró sorprendentemente lo que plasmó (ver Figura 6). Se le indagó qué había hecho a la izquierda del ejercicio, a lo que respondió: *"Para multiplicar este [895234] por 2 toca multiplicar por 20, porque 2 representa dos decenas"*. Ella moldeó el buen uso del algoritmo de la multiplicación, además, multiplicó abreviadamente.

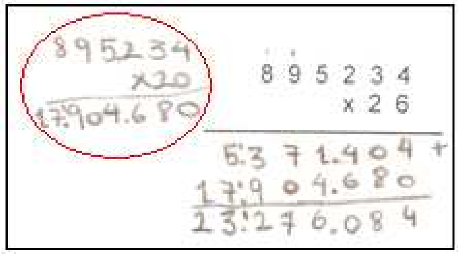


Figura 6. Respuesta del ejercicio *e.* por Silvia (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

El resto de los estudiantes (87.2%) le quedó incorrecto la mayoría de los ejercicios. A varios (76.9%) se les dificultó el ejercicio *d.*, debido a que no asociaban la noción del proceso de la resta "prestando". Por ejemplo, el ejercicio resuelto por uno de estos estudiantes, el de Jennifer (ver Figura 7).

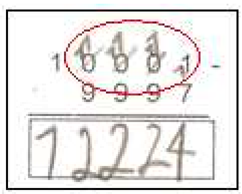


Figura 7. Respuesta del ejercicio *d*. por Jennifer (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

Observando en la Figura 7, la resta en la posición de las unidades está bien, pero la de las decenas y de ahí en adelante está mal hecha. Jennifer no manejó conceptos acerca del sistema de numeración decimal como la obtención de unidades de orden superior (decenas, centenas, unidades de mil, etc.). Ella mencionó: *"Dejé el 10 quieto, pues cuando hay un cero es un 10 y toca seguir prestando"*; por esta razón escribió "11" encima de cada cero, y no dio ninguna respuesta cuando se le preguntó el por qué tocaba seguir prestando. Jennifer no tuvo en cuenta que en el momento de realizar la resta en las decenas el minuendo no tenía decenas, solo asimilaba el número 10 como diez unidades, y no noventa unidades, que es lo que queda cuando "pide prestado" una centena a la decena de mil para luego prestar una decena a la posición de las unidades.

Otro inconveniente en este mismo ejercicio fue el de Angélica (ver Figura 8). Se le indagó por su respuesta, y mientras expresaba: *“Es que yo resté así”,* iba indicando con su mano derecha que había restado del sustraendo el minuendo; enseguida agregó: *“Ay no! así no es!”*, inmediatamente se le dijo que dejara así, que igual no representa una nota de calificación. Angélica se dio cuenta del error, pues había tomado como número mayor el 9997, es decir, el sustraendo, y manifestó que confundía mucho la resta con la suma.

Figura 8. Respuesta del ejercicio *d*. por Angélica (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

El caso de Angélica no fue el único, hubo varios estudiantes, por ejemplo, María y Karol (ver Figura 9), con el mismo inconveniente. Sus argumentos fueron los mismos de los de Angélica.

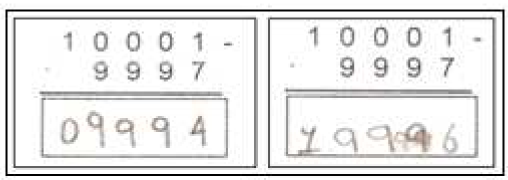


Figura 9. Respuestas de María y Karol en el ejercicio *d*. (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

De lo anterior se puede inferir, que a los estudiantes les genera confusión el orden de las partes de la resta con el de la suma, y no identifican en forma clara y correcta las partes de la resta, especialmente el minuendo y el sustraendo. La mayoría de los alumnos tiene problemas con los algoritmos de esta operación fundamental, sobre todo cuando hay ceros intermedios.

El ejercicio *e.* les generó problemas al 56.4% de los estudiantes, debido a que situaron el resultado de 895234 por 6 debajo del otro producto en la misma posición (ver Figura 10).

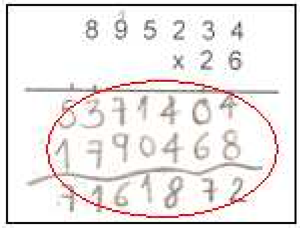


Figura 10. Respuesta del ejercicio *e*. por un estudiante (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

El ejercicio *f.* les presentó dificultades a veinte estudiantes (51.3%). Por ejemplo, el ejercicio resuelto por Jhon (ver Figura 11). Se observa que inicialmente iba desarrollando bien la división, luego no supo realmente cuántas veces caben seis en 48, aún mirando las tablas de multiplicar. Se le preguntó por esto, y respondió que pensó en 6x6=36, y no dio ninguna razón por esta escogencia; pero, volvió y cometió un error, pues al hacer la resta de “48 menos 36” se confundió o se le olvidó que eran 36 los que tenía que restar a 48, por lo tanto, hizo la resta de 48 menos otro número:46. Después se le cuestionó por la multiplicación que había hecho, y dijo: *“Es para probar si la división está bien”*, se le volvió a cuestionar que si en realidad había multiplicado bien, se quedó pensando, como tratando de decir que no, y con su mano derecha señaló que tenía que dar el dividendo como resultado.

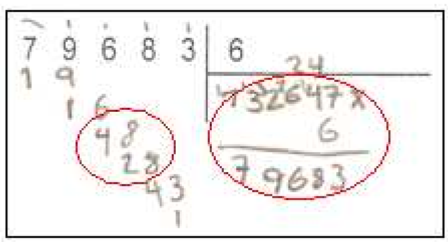


Figura 11. Respuesta del ejercicio *f*. por Jhon (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

Aquí se puede decir que a Jhon no le interesó realizar la multiplicación, solamente quiso escribir el dividendo como resultado para demostrar que la división estaba bien hecha sin importar si había residuo o no. Esto último, nuevamente pasó en el ejercicio *g.* del mismo estudiante (ver Figura 12).

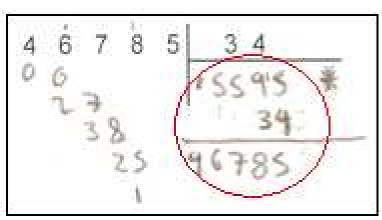


Figura 12. Respuesta del ejercicio *g*. por Jhon (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

De los estudiantes que resolvieron incorrectamente la mayoría de ejercicios, todos resolvieron deficientemente el ejercicio *g.,* y veinticuatro (61.5%) el ejercicio *h.* Algunos argumentos dados por ellos fueron: *"No me gusta"*, *"no sé dividir"*, *"es que es más difícil"*, *"no me han enseñado"*, *"me parece aburrido"*, *"es que cuando esto es de dos [divisor de dos cifras] no sé"*, *"es más pesado"*.

Por los argumentos dados se puede derivar que la división entre un número de dos cifras les parece compleja, generando una predisposición negativa hacia ella en el proceso de aprendizaje.

No obstante, se les preguntó a los pocos estudiantes que resolvieron correctamente estas divisiones sobre el proceso de estas, y se concluyó –con respecto a sus respuestas–, que realizaron todos los pasos necesarios para desarrollar una división; pero, de una forma muy mecánica, es decir, se sabían de memoria cómo dividir un número entre un divisor de dos cifras: se mira la primera cifra –en otros casos junto a la segunda también– del dividendo, y la primera del divisor, luego se observa cuántas veces está la primera cifra del dividendo entre la primera del divisor. En este apartado se les indagó el por qué de esta manera, y solo decían que así era. Cuando el estudiante realiza este proceso, olvida, que realmente lo que se busca es cuántas veces están las dos primeras cifras –en otros casos junto a la tercera también– del dividendo, entre el divisor de dos cifras, o cuántas veces está todo el dividendo entre el divisor. Y por esta razón, varios estudiantes no sabían cómo empezar a dividir entre un número de dos cifras, pues solo tomaban la primera cifra del dividendo y ya no eran capaces de proseguir (ver Figura 13).

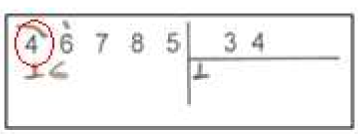


Figura 13. Respuesta del ejercicio *g*. por un estudiante (1ª sec. Prueba Diagnóstica).

Es claro que, el método descrito anteriormente está bien estructurado para dividir entre un número de dos cifras, sin embargo, no se puede olvidar la esencia[25] del proceso de la división.

3.1.2. Segunda sección

Consta de tres situaciones problema que poseen una estructura sencilla. Son problemas aritméticos, en donde se quiere que los niños pongan en práctica lo ilustrado en la primera parte de la prueba diagnóstica. Tiene el mismo objetivo mencionado en la primera sección.

Veintidós estudiantes (56.4%) respondieron correctamente el primer problema. A los diecisiete estudiantes (43.6%) que no obtuvieron buenos resultados se evidenció en la dificultad que tenían para resolver, nuevamente, la resta "prestando". Por ejemplo, el ejercicio resuelto por Jessica (ver Figura 14), se le preguntó el por qué de la respuesta en las unidades, ella indicó: *"El 5 es menor que el 6, entonces el 7 le presta uno a 5 y queda convertido en 15, y 15 menos 6 da uno, ¿si?"*; a lo que se volvió a cuestionarla: *¿Y 15 menos 6 da uno?*; Jessica se quedó pensando mientras miraba su hoja, e hizo la resta con los dedos de sus manos, luego, manifestó que daba "uno". Se le pidió sacar una hoja aparte para que dibujara quince palitos, tachara seis y contara cuántos quedaron; efectivamente lo hizo y se dio cuenta del error. De Inmediato se le dijo que dejara lo descrito en la hoja de la prueba diagnóstica, y guardara la hoja aparte para que tuviera en cuenta el error.

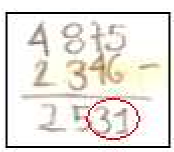


Figura 14. Respuesta de Jessica en el problema *a*. (2ª sec. Prueba Diagnóstica).

Casos como estos se siguen presentando en grados superiores, como muestra de ello, en el Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I, que se realizó con

[25] Aquí la palabra esencia se refiere a qué es lo que busca realmente el proceso de una división, es decir, busca repartir toda la cantidad del dividendo en tantas veces como indique la del divisor, y observar si sobra algo o no (residuo).

estudiantes de grado séptimo, se presentaron muchos errores de este tipo en algunos estudiantes, y aún usaban el conteo con los dedos de la mano.

Veinte estudiantes (51.3%) respondieron correctamente el segundo problema, nueve (23.1%), lo dejaron en blanco y diez (25.6%), lo respondieron deficientemente.

De los estudiantes que respondieron correctamente, catorce (35.9%) resolvieron la primera pregunta con una multiplicación (40x3=120), y los demás estudiantes sumaron tres veces el número 40 (ver Figura 15). A estos se les preguntó el por qué de la suma, sus consideraciones fueron: *“Es más fácil sumar que multiplicar”*, *“es más rápido”*, *“es más corto”*.

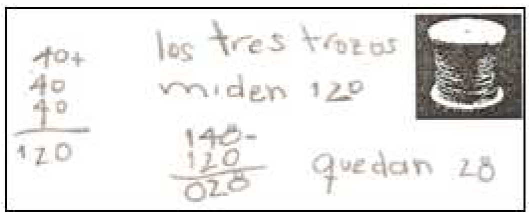


Figura 15. Respuesta de un estudiante en el problema *b*. (2ª sec. Prueba Diagnóstica).

Ante estas consideraciones, se puede inferir que algunos estudiantes se limitan a dar solución a los problemas precipitadamente, en donde no se dan una oportunidad de razonar más en ellas y ver otras formas de salida, a pesar de que tengan otras alternativas para dar solución a los problemas aritméticos; además, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 55), el niño reconoce que con frecuencia existen diferentes estrategias de solución para un problema dado.

No obstante, el inconveniente radica en que los niños no ven la multiplicación como una suma, y pierden la definición de lo que es en sí la multiplicación. Para estos estudiantes, el hecho de sumar tantas veces es más rápido; cuando en realidad, multiplicar, lo es aún más.

Una de las razones por la que algunos estudiantes dejaron en blanco el segundo problema fue no entender el enunciado del mismo, y también dejaron así el siguiente.

Estas actitudes negativas por parte de estos estudiantes se deben a la desmoralización que tienen hacia las matemáticas, les parece algo dificultoso, no les gusta, y lo más triste es que no les interesan si pasa la asignatura de matemáticas o no. Estos argumentos se obtuvieron del profesor que estuvo a cargo de la asignatura, y era el director del grupo cuarto uno. Él se refirió a aquellos niños como “niños-problema”, ya que aparte del bajo rendimiento académico tenían serios problemas de disciplina y se distraían con facilidad.

También hubo respuestas sin coherencia en el segundo problema por parte de los estudiantes (ver Figura 16). Quizás se deban a la falta de esfuerzo personal, desmotivación para deducir y entender el problema, o posiblemente malos razonamientos al hacer cálculos.

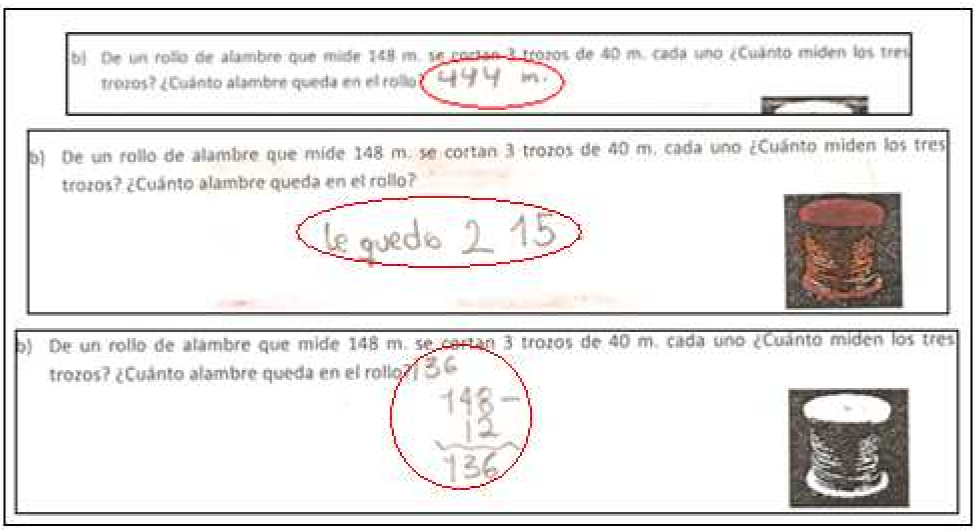


Figura 16. Respuestas de tres estudiantes en el problema *b*. (2ª sec. Prueba Diagnóstica).

El 59% de los estudiantes respondió muy bien el problema *c.* Algunos plasmaron dibujos para la realización de la operación (ver Figura 17), mientras que otros, sin la necesidad de los dibujos (ver Figura 18).

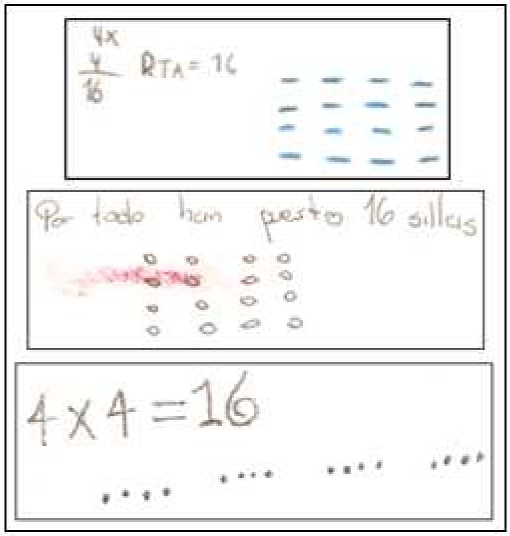


Figura 17. Respuestas de tres estudiantes en el problema *c*. (2ª sec. Prueba Diagnóstica).

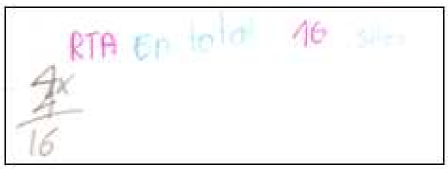


Figura 18. Respuesta de un estudiante en el problema *c*. (2ª sec. Prueba Diagnóstica).

Sus explicaciones ante los dibujos se resume en una sola frase: *"Es para comprobar si la multiplicación está bien"*. Aquí el estudiante utiliza métodos informales[26], como el dibujo, para la base de la solución de una operación; como afirma los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 53), *"Los niños no utilizan los algoritmos aprendidos en la escuela, sino que más bien los integran en su propia estructura mental para inventar métodos basados en la aritmética escrita y codificada y en parte en su enfoque característico"*.

[26] El método informal, según Baroody (2000, p. 41), es aquel que es adquirido por el niño en el ambiente que reside, se desarrolla en las necesidades prácticas y en las experiencias que realiza diariamente.

3.2. CONCLUSIONES DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

Después de las observaciones y del análisis realizado a las respuestas y consideraciones dadas por los estudiantes del grado cuarto uno a la prueba diagnóstica, se presenta a continuación las destrezas y debilidades que tienen sobre la forma tradicional de aprendizaje de la aritmética.

Destrezas

- Los estudiantes poseen una capacidad elemental y significativa al sumar correctamente, ya sean números pequeños o grandes. Identifican el orden en que deben sumar: primero las unidades, luego las decenas, y así sucesivamente.

- Algunos estudiantes hacen uso de los métodos informales como las representaciones gráficas para dar solución a los problemas, y de esta manera comprueban la veracidad de las operaciones realizadas. Lo anterior deduce que, estos estudiantes, no solo se limitan a las concepciones y percepciones hechas por el profesor de la asignatura, sino buscan otras alternativas de solución.

- En general se mostró una muy buena disciplina por parte de los estudiantes, atendiendo a los ejercicios propuestos de la prueba diagnóstica.

- Algunos estudiantes son muy dinámicos e interactivos, demuestran habilidad, exploración mental con gran imaginación, se apropian del problema y construyen soluciones.

Debilidades:

- Se presenta una numerosa dificultad en el proceso de la resta “prestando”, y la mala identificación de las partes de la resta; para efectuarla no se manejan nociones acerca del sistema de numeración decimal como la obtención de unidades de orden superior: decenas, centenas, unidades de mil, etc.

- Los estudiantes no tienen en cuenta que los números se pueden representar de diferentes maneras, junto con el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones, y esto es valioso y esencial para desarrollar pensamiento numérico[27].

- Los estudiantes que saben multiplicar por dos cifras desarrollan muy bien los pasos en forma correcta para obtener el resultado; pero evaden las concepciones y significados del algoritmo de la multiplicación que lo fundamenta, pues recurren a una forma muy memorizada, olvidando en sí la naturaleza del mismo.

- Algunos estudiantes requerían necesariamente las tablas de multiplicar para el desarrollo de los cálculos aritméticos, sin embargo, con esta ayuda cometían numerosos errores.

- La mayoría de estudiantes desarrolla –al igual que la multiplicación por dos cifras–, la división entre un divisor de dos cifras en forma mecánica, dejando de lado la esencia de la misma.

[27] Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998. p. 43), el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad para desarrollar estrategias útiles al manejar situaciones problema.

4. LA INVESTIGACIÓN

"Ningún niño tiene conciencia de vivir en un mundo mítico,
solo de adulto se dará cuenta de haberlo vivido".
Cesare Pavese

En todos los momentos de la vida, cuando se traza un propósito, se comienza una búsqueda para lograrlo, el ser humano se compromete a luchar persistentemente por lo que se propone, a vencer todos los obstáculos que se presentan, a buscar los medios necesarios que ayuden en esa senda y confiar en las capacidades que tiene. Cuando se traza el tema de *La Investigación*, pasa lo mismo, conlleva a responsabilidades que no se pueden omitir, y se compromete fervientemente en todo.

Este capítulo presenta los talleres en los que muestran algunos de los saberes de la cultura matemática maya, plasmando solo aquellos aspectos históricos que facilitan el tema de la aritmética maya.

Cada taller está dividido en dos partes. La primera parte es una descripción corta y precisa del taller y la forma cómo se llevó a cabo en el aula de clases, y muestra los objetivos específicos propuestos. La segunda parte narra las experiencias, en las que se pretendió cumplir los siguientes objetivos de la investigación:

- Diseñar actividades adecuadas con material recreativo (tablero, palos de paleta, granos del fríjol y conchas hechas en papel cartulina) para ser realizadas por estudiantes de cuarto grado.

- Conocer las destrezas y debilidades que los estudiantes de cuarto grado forman acerca de la aritmética maya para fortalecer su aprendizaje matemático.

- Observar y analizar la evolución de la aritmética maya en los niños de cuarto grado.

A medida que se relataron las experiencias se describieron de manera implícita lo que se propuso en cada uno de los objetivos anteriores.

Implementación de los talleres

La experiencia didáctica en la que se puso a prueba el modelo pedagógico de integrar la historia con la educación matemática se llevó a cabo a mediados del mes de octubre de 2008 y durante el mes de noviembre del mismo año, sin ningún inconveniente.

El escenario de trabajo donde se realizaron las actividades siempre fue el salón de clases del grupo cuarto uno. El horario para la realización de los talleres por parte de los estudiantes fueron los martes y jueves de 12:45 a 2:30 p.m. Cabe aclarar que la realización de cada taller se demoró más de dos horas, por lo tanto, no se realizaron en un solo día sino en varios.

Las actividades didácticas se iniciaron con la aplicación de la prueba diagnóstica, y una vez se concluyó el análisis de los resultados de la prueba se diseñaron los talleres con el material recreativo, de tal manera que los estudiantes obtengan una concentración total, creen un intenso entusiasmo que pudiera ser difícil persuadirles de que abandonaran las actividades, y generen actitudes positivas hacia las matemáticas.

El material recreativo se basó en veintiún tableros rectangulares, de 50 cm por 35 cm, conformados por doce casillas cada uno, hechos en papel cartulina. Cada tablero iba acompañado de cuarenta palos de paleta de helado para la representación de las rayas del sistema de numeración maya; treinta y cinco granos de fríjol para la representación de los puntos; y tres conchas hechas en papel cartulina del tamaño de dos dedos de la mano para la representación del cero (ver Figura 19).

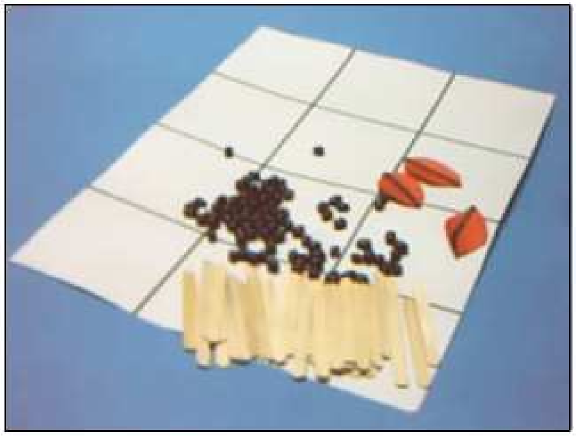


Figura 19. Material recreativo.

El material recreativo se trabajó por parejas. En algunas actividades de los talleres se desarrolló con este material, y en otras sin él, pues los estudiantes dibujaron los tableros necesarios para la realización de las operaciones en sus hojas de respuestas.

Una vez se terminó la implementación de las actividades de cada taller se prosiguió a hacer un análisis de la experiencia didáctica teniendo presentes los objetivos de la investigación.

En el análisis de los resultados de las actividades se tuvo en cuenta las opiniones generalizadas en el grupo, considerando tres aspectos: las actitudes de los estudiantes, el desempeño de estos en los talleres y el logro de los objetivos específicos propuestos de cada taller.

4.1. TALLER Nº 1: NUMERACIÓN MAYA

Objetivos:

- Conocer la importancia de la numeración maya.
- Transformar un número del sistema de numeración decimal al sistema maya, y viceversa.
- Establecer comparaciones entre el sistema de numeración decimal y el sistema de numeración maya.

Desarrollo del taller:

Antes de dar inicio a las actividades del taller, se enfocó en dar a conocer a los estudiantes, en síntesis, quienes fueron los mayas, destacando su origen, la importancia de su legado cultural –como los calendarios y el sistema de numeración vigesimal–, los aportes que dejaron a la humanidad, y esencialmente mostrar a la civilización maya como la cultura más representativa de Centroamérica.

Seguidamente, se continuó con la realización de las actividades de cada sección, y en cada una de estas se desarrolló un ejemplo. En la primera sección los estudiantes conocieron cómo los mayas representaban los números del 1 al 20 junto con el cero. En la segunda y tercera sección, asimilaron el valor posicional de un numeral maya y aprendieron cómo transformar un número del sistema decimal al sistema maya, y viceversa.

La realización de las actividades fue individual, y para las inquietudes generadas por los estudiantes se resolvieron en el tablero con la participación de todos.

A continuación se presenta el formato del primer taller.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

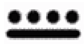
TALLER Nº 1: NUMERACIÓN MAYA

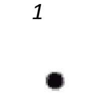
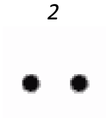
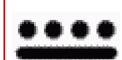
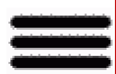
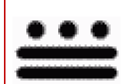
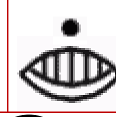
Nombre: ____

PRIMERA SECCIÓN

Complete el siguiente cuadro representando cada número en el sistema de numeración maya:

Recuerda: El punto no se repite más de 4 veces. Si se necesitan 5 puntos, entonces se sustituyen por una raya. La raya no aparece más de 3 veces.

Ejemplo:  *Este símbolo me representa el número **9**, porque hay una raya que vale 5 puntos o 5 unidades, y encima de la raya hay 4 puntos o 4 unidades, entonces 5+4=9.* ***¡¡¡¡Luego tenemos el número 9 al estilo maya!!!!***

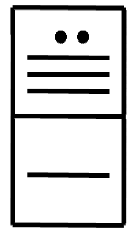
1 	2 	3	4	5	6 	7 	8	9 	10 
11	12	13 	14	15 	16	17	18 	19	20 

SEGUNDA SECCIÓN

Cambie los números que se encuentran después del siguiente ejemplo al sistema de numeración maya:

*Veamos un ejemplo: escribamos el número 345 en el sistema de numeración maya. Dividamos el número 345 entre 20, esto da como cociente 17 y residuo 5. Esto indica que en el primer nivel, que llamaremos el nivel de las unidades, se escribirá una raya (5: el residuo). Ahora como el cociente (17) es menor que 20, hasta ahí terminamos de dividir y en el siguiente nivel, que lo llamaremos el nivel de las veintenas, colocaremos tres rayas y dos puntos que representan al 17. Pero **OJO** si el cociente hubiera sido mayor que 20, seguimos dividiendo entre 20, y colocamos cada residuo en los siguientes niveles hasta que en algún cociente nos salga menor que 20, y dicho cociente lo colocamos en el último nivel. La figura que está debajo es el número 345 en el sistema de numeración maya.*

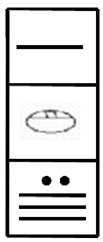
a. 58
b. 360
c. 421
d. 2356
e. 6956
f. 2245



TERCERA SECCIÓN

Cambie del sistema maya al sistema decimal los siguientes numerales:

Veamos un ejemplo:

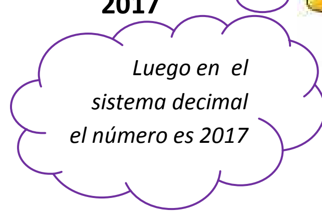


5x20x20 = **2000**

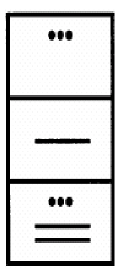
0x20 = **0**

17x1 = **17**

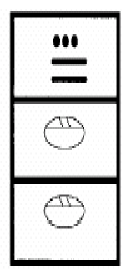
2000 +
0
17
2017



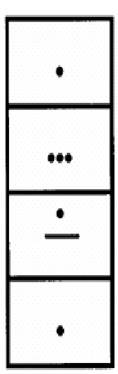
a.



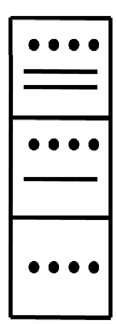
b.



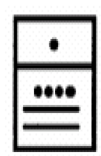
c.



d.



e.



4.1.1 Análisis y resultados del Taller Nº 1

A continuación se presentan las experiencias y el análisis de las respuestas y los razonamientos dados por cuarenta y un niños del grado cuarto al taller Nº 1.

4.1.1.1. Primera sección

La finalidad de la primera sección del taller es que el niño tenga el primer reconocimiento del sistema de numeración maya. Esta sección consta de un cuadro en el que el estudiante tiene que completarlo con los números del 1 al 20 en numeración maya.

Los estudiantes estuvieron muy atentos, este nuevo tema les era algo novedoso e interesante; les causaba extrañeza, pues en cierto modo les parecía raro trazar rayas y puntos en una clase de matemáticas para sólo simbolizar números.

Solo cinco estudiantes (12.2%) representaron erróneamente el número 18 en la numeración maya (ver Figura 20); después de la indagación se evidenció que por el afán, estos estudiantes pensaron que esta representación estaba correcta, por eso, no dibujaron la raya que hacía falta para completar dicho símbolo.

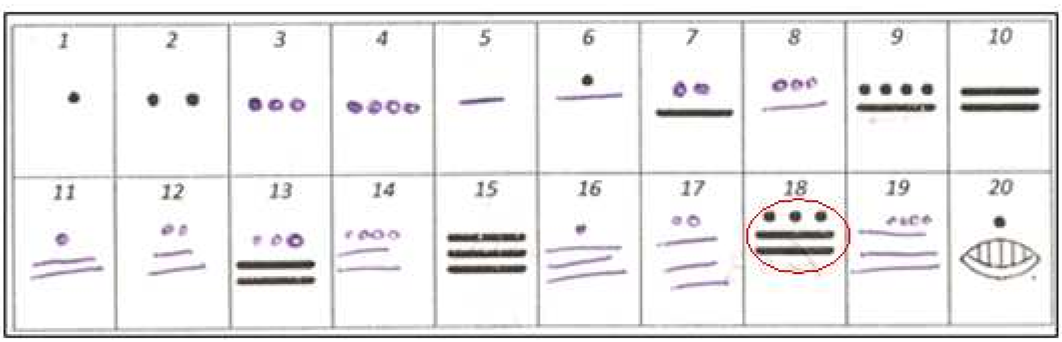


Figura 20. Respuesta de un estudiante en la actividad de la primera sección (Taller Nº 1).

Treinta y seis estudiantes (87.8%) plasmaron y completaron muy bien los símbolos en el cuadro. Se escuchaban voces como: *"En el 7 se tiene una rayita, faltan dos punticos"*, *"el 10 está bien"*, *"al 13 le faltan tres puntos"*.

De los anteriores argumentos se concluye que el niño de cuarto de primaria está inmerso en una nueva colección de ideas interesantes, mientras descubra las nociones de la numeración maya.

Esta primera etapa de reconocimiento fue superada rápidamente por el estudiante; hasta ahora él ha aprendido los significados de la raya, el punto y la concha como cinco unidades, una unidad y el cero respectivamente.

4.1.1.2. Segunda sección

La finalidad de la segunda sección del taller es que el niño tenga el segundo reconocimiento del sistema de numeración maya en el que hace énfasis el valor posicional.

Se hizo la lectura de esta sección del taller por un estudiante, se volvió a leer mientras se explicaba el ejemplo en el tablero del salón de clases. En algunos estudiantes se notó un poco de seriedad al ver que se trataba de divisiones entre un divisor de dos cifras. Se mencionó que esta división es muy sencilla y que era primordial para el transcurso de las actividades. Al principio no fue fácil trabajar en esta parte del taller, pero paulatinamente, el ánimo de ellos volvió a aumentar al darse cuenta de la dinámica de transformar un número –dado en el sistema decimal– a la numeración maya, y les llamó la atención los nombres de los niveles de este último (unidades, veintenas, veintenas de veintenas, etc.).

Veinticuatro estudiantes (58.5%) efectuaron muy bien la mayoría de los ejercicios, pero cuatro de estos estudiantes desarrollaron correctamente la totalidad de los ejercicios de la sección, aunque no dibujaron bien las casillas (ver Figura 21); sin embargo, esto es normal mientras que van percibiendo la posición correcta al dibujar un numeral maya.

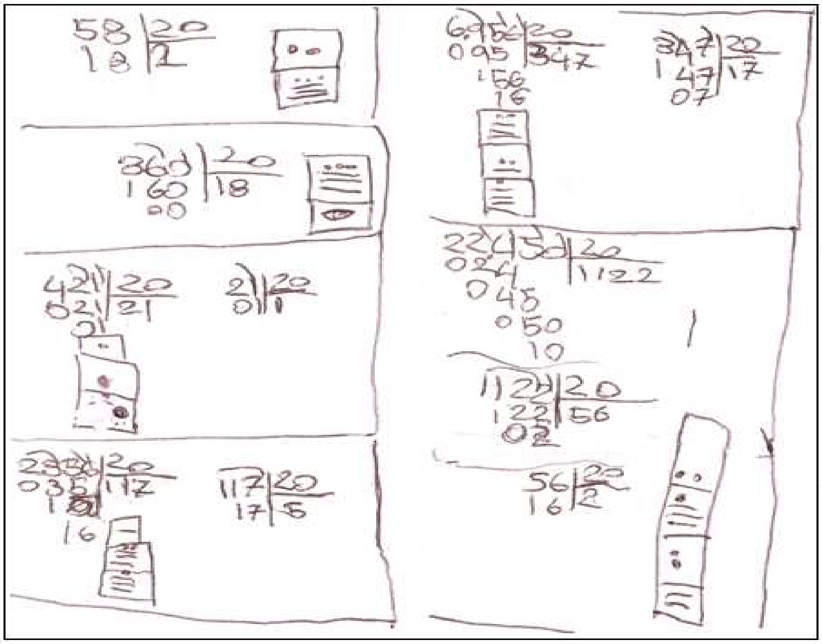


Figura 21. Ejercicios resueltos por un estudiante en la segunda sección (Taller Nº 1).

Los niños se divertían académicamente, es decir, se esmeraban y trataban de efectuar muy bien las divisiones para representar las cantidades en la numeración maya. Poco a poco se daban cuenta que las divisiones entre 20 son muy sencillas, para ellos era como “dividir entre 2”.

El ejercicio que más les costó a la mayoría fue el *b.*, por lo que el residuo es cero en la división de 360 entre 20; muchos preguntaron por ello, algunos dudaban si dibujar una concha en el primer nivel, otros decían que solo se representaba el cociente: 18. Estaban muy confundidos, en consecuencia, se volvió al ejemplo descrito en esta sección del taller para dar solución a las dudas que surgieron.

Algunas divisiones se plasmaron en el tablero, hechas por los estudiantes; se aclaraban las inquietudes, se recalcaba el buen uso del algoritmo de la división. Para varios estudiantes, el nivel de dificultad en cuanto al proceso de la división fue disminuyendo paulatinamente a medida que iban desarrollando la actividad.

Se establecieron semejanzas en ambos sistemas de numeración con respecto al tema del valor posicional de un número. Los niños percibieron que el valor del punto en el nivel de las unidades es diferente al valor del punto en el nivel de las veintenas, llegaron a la conclusión de que el valor tanto del punto como de la raya varía de acuerdo el nivel donde se encuentren. Se les indagó: *¿En el sistema decimal, el valor del número 1 en la posición de las unidades es diferente al valor de este mismo número en la posición de las decenas?* Algunos estudiantes se quedaron pensando, no sabían que responder, hasta que Silvia respondió que el número 1 en la posición de las decenas representa una decena o diez unidades mientras que en la posición de las unidades representa solamente una unidad.

De esta manera, la enseñanza de las matemáticas consiste en traducirlas a una forma en que los niños puedan comprender, descubrir relaciones, construir significados, y crear oportunidades para desarrollar y ejercer el pensamiento numérico.

Hasta ahora el estudiante ha reconocido esta segunda etapa de reconocimiento y ha aprendido los nombres de los niveles de un numeral maya.

4.1.1.3. Tercera sección

Esta última parte del taller exigía la representación de potencias de 20, pero como el tema de la potenciación no hace parte del currículo de cuarto grado de primaria, fue necesario hacer una explicación más larga del proceso, como se verá a continuación. Los niños escribieron lo siguiente en sus cuadernos:

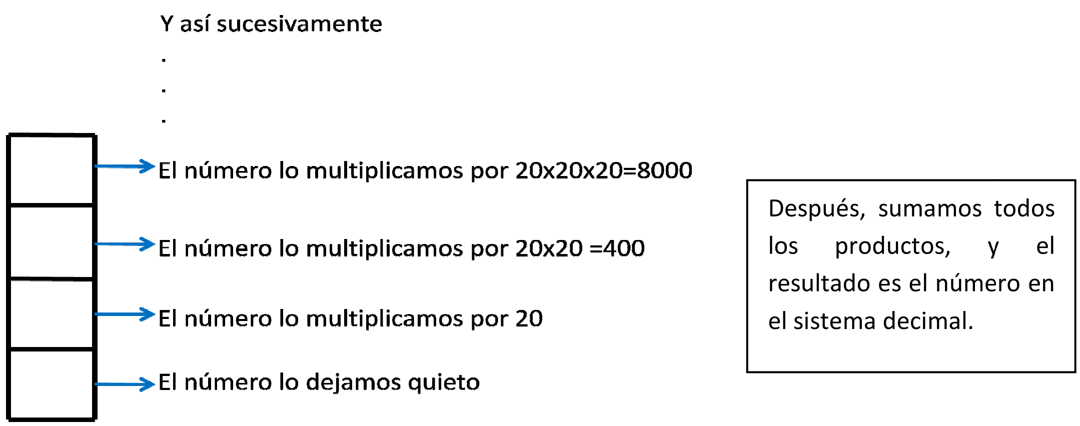
La conversión del sistema maya al decimal
Se puede hacer de dos métodos:
A. *Primer método*

Nivel	**Valor del punto**	**Valor de la raya**
Primero o de Unidades	Una unidad	5 unidades
Segundo o de Veintenas	20 unidades (1x20=20)	100 unidades (5x20=100)
Tercero o de Veintenas de Veintenas	400 unidades (1x20x20=400)	2000 unidades (5x20x20=2000)

Cuarto o de Veintenas de Veintenas de Veintenas	8000 unidades (1x20x20=400)	40000 unidades (5x20x20x20=40000)
Y así sucesivamente…		

O simplemente,

B. *Segundo método*



En seguida muchos preguntaron: *"¿Por qué todo en 20?"*, a lo que se respondió: *Posiblemente los mayas atribuyeron la cantidad 20 por el número de dedos que posee el ser humano.*

Después de la explicación, algunos niños no entendieron el tema de la conversión del sistema maya al decimal; para ello, se procedió a leer y entender el ejemplo descrito en esta sección del taller. Terminado esto, pudieron comprender mejor las ideas que se encuentran tanto en el ítem *A* como en el *B*; además, según el Primer Seminario Nacional sobre "Aprendizaje de Nociones Lógico-Matemáticas" [PSNALNM] (1986, p. 21), todo lo que el niño pueda aprender de la explicación, ya sean conceptos elementales, debe llegar a ser capaz de rehacer este razonamiento elemental.

Veintiocho estudiantes (68.3%) efectuaron muy bien la mayoría de los ejercicios, pero cuatro de estos estudiantes desarrollaron correctamente la totalidad de los ejercicios de la sección. Algunos, aplicaron el método *A* (ver Figura 22), ya que de una vez asignaron, según el nivel, el valor a cada cantidad de cada uno de los numerales maya; y otros, el método *B* (ver Figura 23).

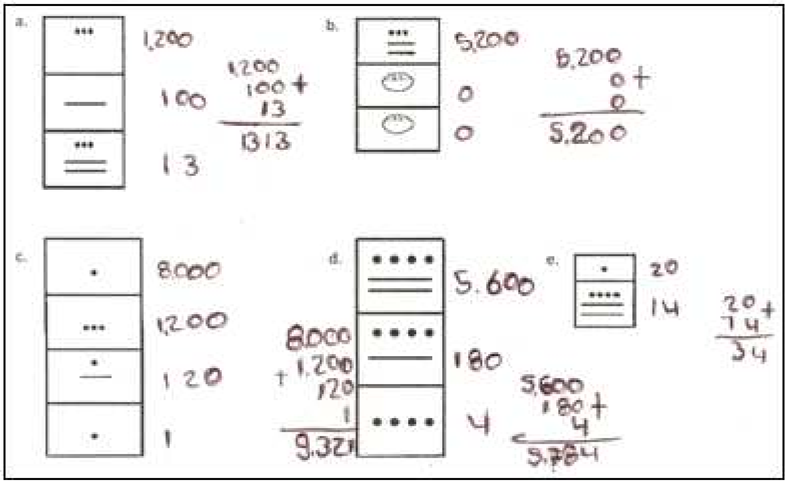


Figura 22. Ejercicios resueltos por un estudiante, en los que aplicó el ítem *A* en la tercera sección (Taller Nº 1).

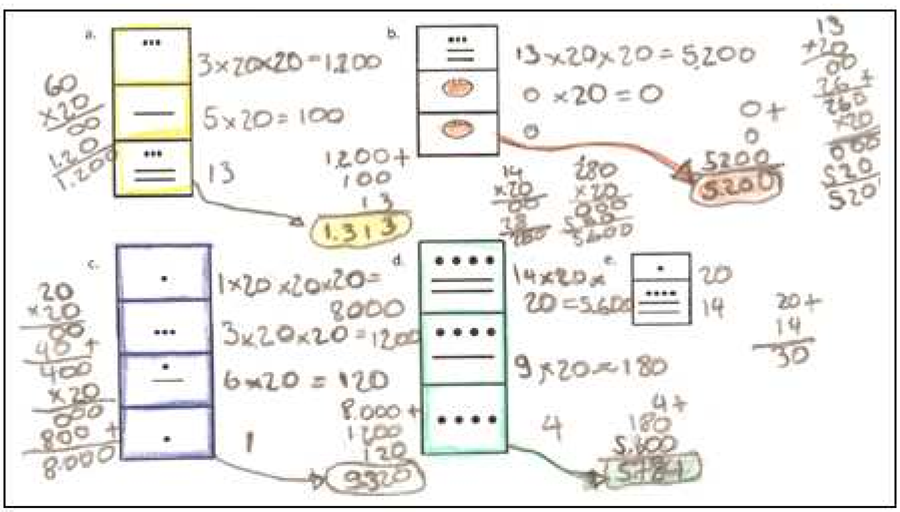


Figura 23. Ejercicios resueltos por un estudiante, en los que aplicó el ítem *B* en la tercera sección (Taller Nº 1).

La finalidad de esta sección es observar, no solamente en este taller sino en los siguientes, cuál método les parece mejor a los niños en el tema de la conversión del sistema maya al decimal.

Tres estudiantes (7.3%) presentaron errores en el ejercicio *b.*, debido a que aparecen dos ceros consecutivos en el numeral maya, y solo escribieron la cantidad del tercer nivel: 13. Dos estudiantes (4.9%) desarrollaron mal todos los ejercicios, en algunos escribieron a la derecha del numeral maya la cantidad de cada nivel y luego sumaron (ver Figura 24). La justificación ante esto fue no haber entendido. Para ello, se les dijo que observaran el ejemplo y trataran de resolverlos en otra hoja, y dejaran lo que habían escrito en los talleres. Efectivamente lo hicieron y mejoraron.

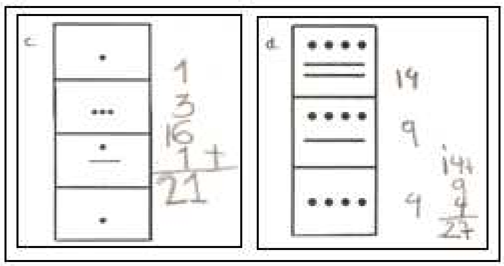


Figura 24. Ejercicios *c*. y *d*. resueltos cada uno por un estudiante distinto (3ª sec. Taller Nº 1).

La siguiente interacción muestra cómo se desarrolló la clase en el momento en que se establecieron comparaciones entre ambos sistemas.

Docente: *¿Cuántos símbolos usaron los mayas para representar los números?*

Estudiantes más pilosos: *¡Tres!*

Docente: *¿Cuáles son?*

Estudiantes más pilosos: *La raya, el punto y el cero*.

Docente: *Bien, ahora ¿cuántos dígitos tiene el sistema de numeración decimal para formar cualquier cantidad?*

Camilo: *¡Nueve!*

Diana: *Sí, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9!*

Docente: *Pero nos hace falta un dígito.*

Los niños no entendieron, luego se les indagó a través de un ejemplo.

Docente: *Por ejemplo, ¿cuáles dígitos utilizamos cuando escribimos la cantidad 100?*

Karen: *¡El uno y el cero!*

Docente: *Muy bien, entonces el dígito que hace falta es…*

Mayoría de estudiantes: *¡El cero!*

(Diario de campo, 3ª sec. Taller Nº 1)

Con respecto a lo anterior, los estudiantes fueron asimilando las diferencias entre los dos sistemas. Se llegó a la conclusión de que en la numeración maya se ahorra espacio y tiempo para representar un número o cantidad cualquiera, pero se requiere un poco de práctica.

Para finalizar, la implementación del taller Nº 1 se consideró relevante la actitud positiva de los estudiantes, muchos se veían concentrados, mostraron curiosidad al saber que se trataba de un tema nuevo y distinto a los contenidos que veían en las clases de matemáticas.

4.2. TALLER N º 2: APRENDIENDO A SUMAR Y RESTAR AL ESTILO MAYA

Objetivos:

- Conocer y manejar el algoritmo tanto de la adición como de la sustracción maya.
- Distinguir cuál de dos numerales mayas es mayor que el otro.

Desarrollo del taller:

Antes de continuar con las actividades, los estudiantes recibieron en sus manos una guía en la que se enuncian las reglas y observaciones para efectuar las operaciones fundamentales en el sistema de numeración maya[28].

El taller se compone de tres secciones; la primera, trata del aprendizaje de la adición maya; la segunda, del aprendizaje de la sustracción maya; y la tercera, de recreación matemática con el fin de afianzar más los conceptos que vayan generando los estudiantes en las dos anteriores secciones.

[28] Las reglas y observaciones fueron mencionadas en el capítulo 2 de la Aritmética Maya (página 39).

Tanto en la primera como en la segunda sección, el estudiante hizo la lectura descrita del taller; seguidamente, con ayuda de la docente, se dio a entender mejor los algoritmos de la adición y sustracción maya a través de un ejemplo. En ambas secciones se trabajó con el material recreativo.

Las actividades se desarrollaron en un ambiente lúdico en el que los estudiantes no eran observadores pasivos, sino que a través de sus propios actos construyeran sistemas de operaciones mentales.

A continuación se presenta la guía –mencionada anteriormente–, y el formato del segundo taller.

Guía:

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

TENGA EN CUENTA QUE…

Para efectuar las operaciones en la numeración maya se usan las siguientes reglas:

1. Máximo en cada casilla del tablero deben haber cuatro puntos y tres rayas (19 unidades), excepto en el proceso de la operación.
2. Cuatro rayas en un nivel de una columna equivalen a un punto en el nivel inmediato superior.
3. Un punto en un nivel de una columna equivale a cuatro rayas en el nivel inmediato inferior.
4. Cinco puntos en un nivel equivalen a una raya.

Observaciones:

- No es correcto poner cuatro rayas en un nivel, cuando esto suceda después de efectuar una operación se usa la regla 2.
- No es correcto poner más de cuatro puntos en un nivel, cuando esto suceda como resultado de una operación se usa la regla 4.
- Si hace falta un nivel en la columna del resultado para completarla, simplemente se construye dicho nivel.

Taller Nº 2:

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

TALLER Nº 2: APRENDIENDO A SUMAR Y RESTAR AL ESTILO MAYA

Nombre: ____

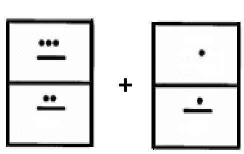
APRENDIENDO A SUMAR AL ESTILO MAYA

Para sumar de dos o más números se construye una nueva columna que agrupe en cada nivel los símbolos del mismo nivel de cada uno de los sumandos, y a continuación se efectúan las simplificaciones necesarias de abajo hacia arriba según las reglas establecidas. Le pediremos al docente que nos ayude a entender mejor mediante un ejemplo.

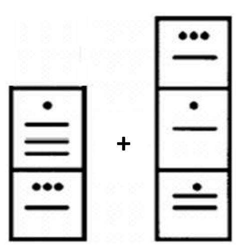
Resuelva las siguientes sumas

Resuélvalas primero con el material recreativo y después dibuja todo el proceso de cada suma en su taller.

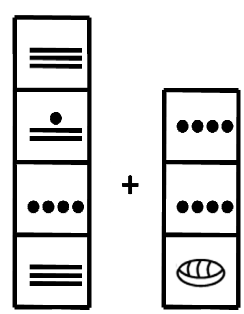
a.



b.



c.



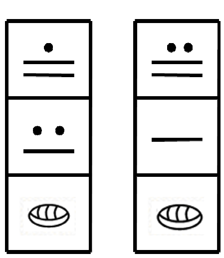
APRENDIENDO A RESTAR AL ESTILO MAYA

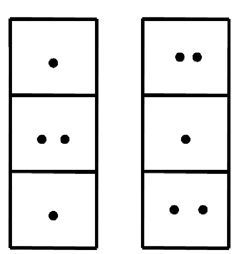
Una forma fácil de saber cual de dos numerales maya es mayor que el otro y sólo si tienen la misma cantidad de niveles, es observar en el último nivel de cada uno cuál cifra es mayor que la otra, y la que sea mayor será el numeral mayor. En el caso de que las cifras sean iguales se observa en el nivel inmediato inferior; y si ocurre lo mismo se observará en el siguiente nivel inferior, y así sucesivamente.

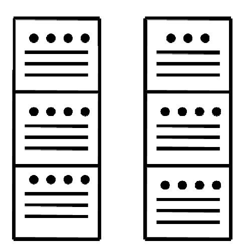
Para restar dos números se colocan los símbolos de forma que coincidan los niveles (el minuendo a la izquierda del signo menos y el sustraendo a la derecha), después se empieza a sustraer en el primer nivel, y posteriormente, hacia arriba consecutivamente hasta llegar al último nivel; durante este proceso se van sustituyendo rayas por puntos (si es necesario) para facilitar mejor la sustracción. Se quita tantos puntos y rayas al minuendo como haya en el sustraendo, y se va colocando el resultado en una nueva columna. No olvidemos decir al docente que nos ayude a entender mejor mediante un ejemplo.

En cada ítem señale cuál de las dos numeraciones mayas es mayor que el otro y por qué, después realice la resta

Resuélvalas primero con el material recreativo y después dibuja todo el proceso de cada resta en su taller.

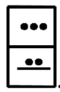
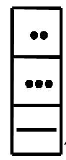
a.  ,

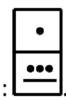
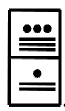
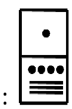
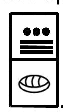
b.  ,

c.  ,

RECREÁNDONOS........

EL ADIVINO........

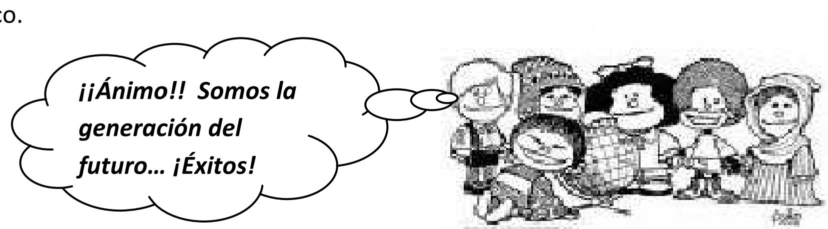
Un mago amigo mío, llamado Andrés, me dijo ayer por la tarde: *"Escribe un número de dos niveles en notación maya"*. Yo escribí: . *"Vamos a escribir cuatro números más, todos de dos niveles; tú eliges dos y yo otros dos"*, me dijo *"y verás que la suma al final va a ser:* ".

Por supuesto que no le creí, por lo que dije: *¿Estás seguro que yo puedo elegir el que quiera?* A lo que él respondió muy seguro: *"Sí"*. El segundo número que di fue: . Inmediatamente escribió el tercer número: . Yo me apresuré a escribir el cuarto número: , y Andrés con toda calma escribió el quinto número: .

En seguida tomé mi tablero para hacer la suma…pero… ¡Niños ayúdenme a resolver la suma a ver si mi amigo Andrés tiene la razón!

	+	+	+	+	
					=

Para terminar me dijo: *"Si encuentras el truco, puedes decírselo a sus amigos"*. Niños intentemos encontrar el truco.



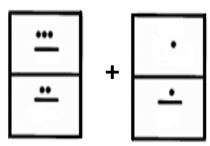
4.2.1. Análisis y resultados del Taller Nº 2

A continuación se presentan las experiencias y el análisis de las respuestas y los razonamientos dados por cuarenta y dos estudiantes del grado cuarto al taller Nº 2.

4.2.1.1. Primera sección

APRENDIENDO A SUMAR AL ESTILO MAYA

Esta sección se planeó para dar a conocer el algoritmo de la adición en el sistema de numeración maya. Se inició el tema con la lectura hecha por un estudiante. Para entender mejor lo que se había leído se tomó como ejemplo el primer ejercicio propuesto:



Se indagó a los estudiantes: *¿Cuántas rayas y puntos hay en total en el primer nivel de los dos numerales mayas?* Muchos respondieron en coro: *"¡Hay dos rayas y tres puntos!"*. *¿Y en el segundo?*, se volvió a indagarles. *"¡Una raya y cuatro puntos!"*, manifestaron. Luego, se preguntó si alguien quería pasar a representar el resultado en el tablero del salón de clases; en seguida pasó Camilo y dibujó una columna de dos niveles, en el primero ilustró dos rayas y tres puntos, y en el segundo una raya y cuatro puntos.

A continuación se preguntó por el nombre de los niveles; la mayoría de los estudiantes solamente sabían del primero, y un estudiante mencionó el nombre del segundo: *"Profe, el segundo se llama veintenas"*. Para ello, es necesario recordarles los nombres de los niveles durante el transcurso de las actividades.

Posteriormente, los estudiantes continuaron con la realización de los ejercicios propuestos. Primero los hicieron en el tablero con los palos de paleta, los granos de fríjol y las conchas. Después, plasmaron lo realizado con el material recreativo en sus talleres.

Diecisiete estudiantes (40.5%) tuvieron deficiencias en los ejercicios *b.* y *c.* Dos estudiantes (4.8%) presentaron dificultad en el ejercicio *b.* (ver Figura 25) mientras que tres (7.1%) la presentaron en el ejercicio *c.* (ver Figura 26), y el resto de los estudiantes (47.6%) desarrolló correctamente los ejercicios *b.* y *c.*

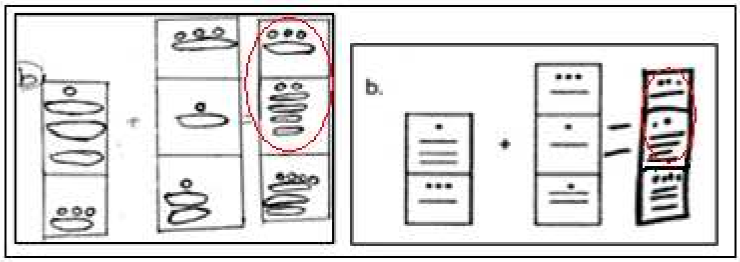


Figura 25. Respuestas del ejercicio *b*. por dos estudiantes (1ª sec. Taller Nº 2).

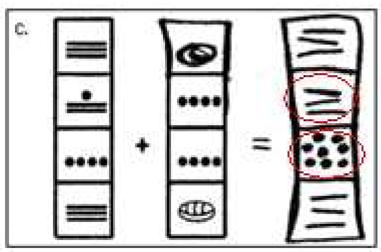


Figura 26. Respuesta del ejercicio *c*. por un estudiante (1ª sec. Taller Nº2).

El hecho de que se hayan presentado dificultades se debió más que todo a la ausencia de las reglas establecidas para efectuar operaciones –como se puede observar en los resultados de las Figuras 26 y 27–, a pesar de que los estudiantes tenían la guía de las reglas; y además, querían mostrar rápidamente su procedimiento y continuar con la segunda sección del taller, pues les parecía innovador y llamativo. Como afirma Baroody (2000, p. 55), *"Muchos niños realizan las matemáticas escolares a la ligera"*.

En la Figura 26, se observa que en el segundo nivel del resultado, el estudiante no aplicó las reglas para efectuar operaciones mientras en el tercero sí. Según el PSNANLM (1986 p. 41), la dificultad aquí radica en el hecho de que es necesario que el niño comprenda muy bien, que en lugar de trabajar con unidades, se va a trabajar con otros objetos matemáticos: las veintenas, las veintenas de veintenas, etc. Se puede decir que los estudiantes tienden a olvidar ciertos detalles que son importantes para el cálculo escrito, pero hasta ahora están asimilando el algoritmo de la adición maya, y es muy común que se presente este tipo de cuestiones.

Los estudiantes aprovecharon el uso del material recreativo, manipularon bien los objetos a la hora de efectuar una operación; en las Figuras 27 y 28 se observa el desarrollo correcto del ejercicio *c*.

Figura 27. Uso del material recreativo en el ejercicio *c*. (1ª sec. Taller Nº 2).

Figura 28. Uso del material recreativo en el ejercicio *c*. (1ª sec. Taller Nº 2).

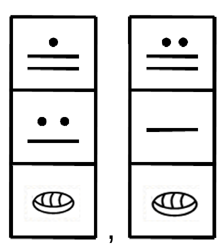
Se resalta la importancia el uso del material recreativo. Los niños comprenden las características de numeración cuando han jugado un papel importante en el empleo del material manipulable junto con otras formas de representación simbólica y pictórica. La construcción del sistema de numeración maya con apoyo de actividades didácticas, probablemente, podría avanzar en los niños la comprensión de diferentes sistemas de numeración, ir más allá del simple reconocimiento, llegar a entender que en la actualidad se utiliza varios sistemas de numeración, por ejemplo, el sistema binario utilizado en la computación en el que los estudiantes pueden pasar de la sola representación de cantidades a efectuar cálculos usando la aritmética binaria.

4.2.1.2. *Segunda sección*

APRENDIENDO A RESTAR AL ESTILO MAYA

La primera sección del taller despertó mucho el interés de los estudiantes aunque al principio fue un poco difícil por lo de las reglas, no obstante, hubo varios que querían continuar con esta sección. Esta sección fue estructurada para dos fines; el primero, saber cuál de dos numerales mayas es mayor que el otro; y el segundo, aprender a restar al estilo maya.

Al igual que la primera sección se inicia el tema de la sustracción maya con la primera lectura descrita de esta sección del taller; para que los niños entendieran mejor esta lectura se ilustró como ejemplo el primer ejercicio propuesto:



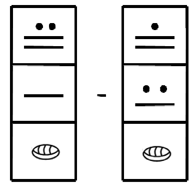
Se les preguntó cuál es el mayor de los dos numerales mayas; los estudiantes se quedaron pensando, les fue un poco difícil comprender la lectura; así que se comenzó preguntando cuántos niveles tienen ambos numerales; los niños respondieron que tres. Luego, se les dijo que observaran el tercer nivel para posteriormente indagarles: *¿Cuál número es el mayor?* Después de hacer la pregunta, inmediatamente manifestaron que el doce. *Como doce es mayor que once, entonces el mayor numeral maya es el de la derecha, ahora, ¿cuál es el minuendo?*, se les preguntó. *"¡El de la derecha!"*, respondieron enérgicamente.

Volviendo al tema del valor posicional, se les indagó: *¿Cómo se llama el segundo nivel? "¡Veintenas!"*, contestaron algunos estudiantes. *¿Y el primero?*, se les volvió a indagar. *"¡Unidades!"*, manifestaron ágilmente. Cuando se preguntó por el tercero, varios estudiantes miraron en sus cuadernos y de una vez dijeron: *"¡Veintenas de veintenas!"*. *¿Y por qué se llama veintenas de veintenas?*, nuevamente se preguntó; en ese momento no sabían que decir, por lo tanto, se les recordó que el número que aparece en dicho nivel se multiplica por 20x20 y por esta razón llevan ese nombre. Por último, se les preguntó: *¿Y el segundo nivel por qué se llama veintenas? "Porque se multiplica por 20"*, contestó Fabián, uno de los estudiantes más pilosos.

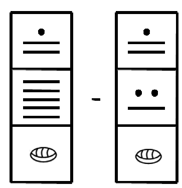
De esta manera, el estudiante logra entender el significado de los números, donde la comunicación juega un papel fundamental al ayudarlos a construir sus nociones matemáticas, ya que esto es una función clave para que ellos tracen importantes conexiones entre las representaciones pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas; igualmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) plantean al maestro la necesidad de brindar la oportunidad a los estudiantes de realizar experiencias en las que construyen sus propios significados:

> *El contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento, por tanto, para la adquisición del sentido numérico es necesario proporcionar situaciones ricas y significativas para los alumnos.* (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 44).

Continuando con la actividad se procedió a realizar la resta en el mismo ejemplo:



Para ello, se realizó la segunda lectura descrita en la segunda sección del taller. Terminada la lectura, se les preguntó qué es lo primero que se hace para efectuar la resta. Fabián manifestó: *"Cero menos cero da cero"*; a lo que se respondió: *Muy bien Fabián, primero empezamos restando en el nivel de las unidades, ahora continuamos con el nivel de las veintenas*. *"No se puede restar cinco menos siete"*, nuevamente habló Fabián. Inmediatamente se les mencionó que en el minuendo se pide prestado un punto del tercer nivel para convertirse en cuatro rayas en el segundo. En seguida Claudia dijo que se aplicó la regla 3 de la guía dada.



Lo anterior, es lo mismo que sucede en la resta "prestando" en nuestro sistema decimal cuando la posición de las centenas presta una de ellas a la posición de las decenas para convertirse en diez decenas. En el sistema de numeración maya, el nivel de las veintenas de veintenas presta un punto (400 unidades) al nivel de las veintenas para convertirse en cuatro rayas[29].

La siguiente interacción (docente-estudiantes) muestra la continuación de la actividad en el mismo ejemplo:

Docente: *Bien, ahora hacemos la resta en el nivel de las veintenas, para facilitar mejor la operación vamos a sustituir, en el minuendo, una rayita por… ¿cuántos puntos?*
Karol: *¡Por cinco!*

[29] Se recuerda que la raya en el nivel de las veintenas vale 100 unidades.

Docente: *Muy bien, ahora si quitamos tantos puntos y rayas al minuendo como haya en el sustraendo… ¿cuántos quedan?*

Mayoría de estudiantes: *¡Tres rayas y tres puntos!*

Docente: *Muy bien, ¿cuál es ese número en el sistema decimal?*

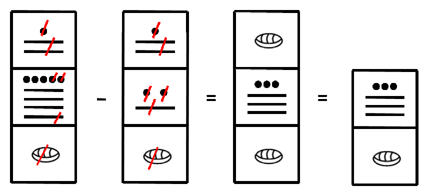
Fabián: *Dieciocho.*

Docente: Bien, ahora ¿qué hacemos en el nivel de las veintenas de veintenas?

Fabián: *Nada profe, once menos once da cero.*

(Diario de campo, 2ª sec. Taller Nº 2)

Terminado esto, se termina de plasmar el desarrollo del ejercicio en el tablero del salón de clases:



Finalmente, se les pidió borrar el cero del tercer nivel porque sencillamente dicho nivel no tiene veintenas de veintenas; es lo mismo que ocurre, por ejemplo, en el resultado de 120 menos 110 no tiene centenas:

$$\begin{array}{r} 120- \\ \underline{110} \\ 010 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 120- \\ \underline{110} \\ 10 \end{array}$$

↑

No hay centenas

Los estudiantes al estar en contacto con un sistema diferente al ya memorizado y aceptado sistema de numeración decimal, se dan la posibilidad de tener más claridad acerca de las características de dicho sistema, en este caso, el maya; pero ellos no dejan de lado el sistema de numeración decimal al demostrar que lo asocian con el maya, ya que las nociones matemáticas y las operaciones que adquieren se deben mucho más a lo que han construido hasta ahora mientras vayan desenvolviendo nuevos conocimientos. Esto se evidencia, por ejemplo, cuando Fabián dice: "*No se puede restar cinco menos siete*", de una vez piensa en los números cinco y siete como tales, mas no como rayas y puntos de la numeración maya. No obstante, a medida que van desarrollando el pensamiento numérico, los estudiantes asocian los conocimientos antiguos con los nuevos.

> *El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversa maneras de acuerdo con el desarrollo con el pensamiento matemático.* (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 43).

Los estudiantes continuaron realizando los ejercicios propuestos en esta sección; hubo mejoría con respecto a la anterior, ya que practicaron mucho con el material recreativo, se divertían e iban aprendiendo. La didáctica del tema de la aritmética maya era una nueva etapa de la enseñanza de las matemáticas, en la que las experiencias y la intuición suministran las primeras ideas al alumno.

Durante la exploración con el material recreativo se observó una pequeña interacción entre Juliana y Angélica acerca del ejercicio *c.*:

Angélica: *No Juliana, el mayor es el 19.*

Juliana murmuró, como queriendo decir que no entendió cuando Angélica se refirió a las cantidades del tercer nivel en ambos numerales mayas.

Angélica: *Sí, mira aquí hay cuatro puntos y acá tres.*

Ella señaló primero la cantidad de puntos del tercer nivel en el minuendo y luego, en el sustraendo.

Juliana: *Ah ya entendí.*

Angélica: *Vea este ejercicio es fácil, quitamos todos los palos y todos los fríjoles, y solo queda este frijolito.*

Juliana: *Entonces ponemos las conchas acá y acá.*

Ella colocó las conchas en el tercer nivel de ambos numerales.

(Diario de campo, 2ª sec. Taller Nº 2)

En esta interacción se puede decir que Angélica notó, en el ejercicio *c*., que tanto en el primero como en el segundo nivel hay la misma cantidad de palos y fríjoles en ambos numerales mayas, mientras que en el último nivel sobra un fríjol.

Mediante la didáctica con el material recreativo, los niños interactuaron entre ellos con el fin de dar origen a nuevas y mejores estrategias, puesto que pueden tener niveles distintos de comprensión de los mismos, y unos supuestos diferentes. Esto puede llevar a un conflicto de pareceres, en el que las percepciones de un niño cuestionen directamente las del otro –como ocurrió en la interacción entre Angélica y Juliana–, y así, estos conflictos ejercen sobre los niños una presión fuerte para que cambien sus concepciones y desarrollen nuevas estrategias.

Veinte estudiantes (47.6%) realizaron todos los pasos del proceso de la sustracción maya, es decir, tuvieron en cuenta su algoritmo en los ejercicios *b.* y *c.* (ver Figura 29), y no los resolvieron "mecánicamente". Además, ubicaron el numeral mayor a la izquierda del signo menos y por ende, reconocieron que es el minuendo. De esta manera, el niño demuestra sus aptitudes matemáticas, por lo tanto, es competente en lo que hace, es capaz de razonar y explicar lo que hace y por qué lo hace. Es así como se construyen los fundamentos sólidos para el desarrollo del espíritu matemático[30].

Cuatro estudiantes (9.5%) colocaron encima del tablero ilustrado –en sus hojas– los signos mas e igual (ver Figura 30); pero, a pesar de que obtenían el resultado ágilmente, omitían los pasos de la sustracción maya aunque tendían a demostrar el algoritmo, ya que de una vez tacharon un punto en el tercer nivel, escribieron las cuatro rayas en el segundo y efectuaron la resta.

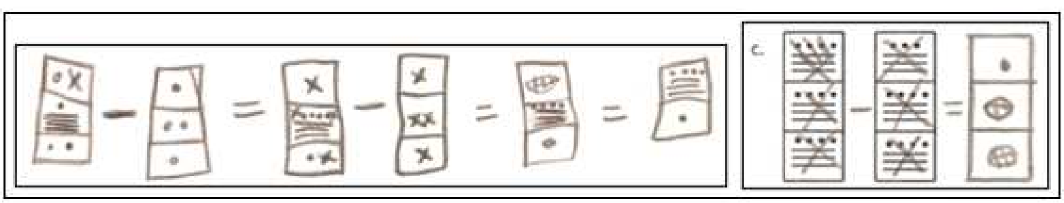


Figura 29. Ejercicios *b*. y *c*. resueltos cada uno por un estudiante distinto (2ª sec. Taller Nº 2).

[30] Aquí el espíritu matemático se refiere a las nociones que tiene el niño para hacer matemáticas.

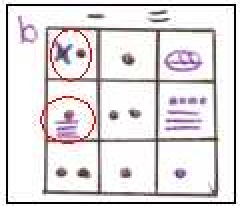


Figura 30. Respuesta del ejercicio *b*.por un estudiante (2ª sec. Taller Nº 2).

4.2.1.3. Tercera sección

RECREÁNDONOS........

EL ADIVINO........

Esta sección recreó al estudiante con el fin de practicar lo visto en las dos secciones anteriores, de tal manera que se promueva el interés y la curiosidad; como dice Arias (1986, p. 94), *"La mejor forma de motivar al alumno es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, por ejemplo: un pasatiempo, un truco mágico, una paradoja, un modelo, un trabalenguas, etc."*

En general, los estudiantes aplicaron muy bien el algoritmo tanto de la adición como la sustracción maya. Solamente se presentó dificultades en el resultado de la suma (el del tablero de la actividad), puesto que este es de tres niveles y todos los sumandos son de dos. Se les mencionó lo siguiente: *En el caso de que en un resultado haga falta un nivel, simplemente se construye. Sucede lo mismo en las sumas que efectuamos en nuestro sistema decimal, por ejemplo, 100 mas 900 da 1000, lo que hacemos es construir las unidades de mil.*

Los niños más pilosos realizaron rápidamente la suma del tablero de la actividad (ver Figura 31) y dijeron que el resultado representa el número 865. Se les preguntó: *Silvia, ¿cómo sabes que son 865?* A lo que ella respondió: *"Porque los dos puntos de arriba [los del tercer nivel] valen 800, ahora, hay 20, 40, 60, y 60 mas 800 son 860, y 5, son 865"*.

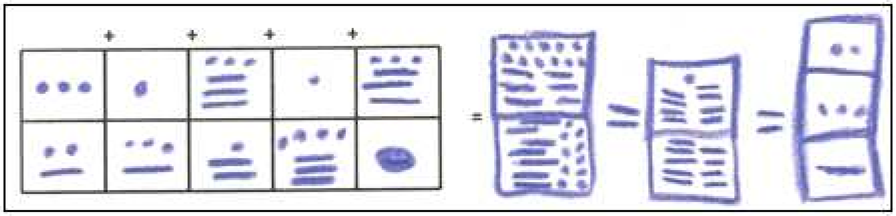


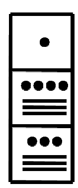
Figura 31. Respuesta de la actividad de la tercera sección por un estudiante (Taller Nº 2).

Gradualmente el estudiante va transformando rápidamente un número del sistema de numeración maya al decimal. A medida que los estudiantes obtenían más experiencia, más iban percibiendo los conceptos matemáticos de la aritmética maya, como por ejemplo, el valor posicional, ya que asimilaban los significados de la raya y del punto dependiendo del nivel donde se encuentren.

Nadie encontró el truco de la actividad, y todos estaban muy ansiosos esperando conocerlo. Realmente les era un poco complicado resolverlo solos, así que en estos casos, la mejor estrategia es darla a conocer, pero estimulándoles su pensamiento matemático de tal manera que participen.

La siguiente interacción muestra la continuación de la actividad en la que participaron varios estudiantes:

Docente: *Una vez nos dan el primer número de dos niveles, lo leemos, y debemos sumarlo con este numeral:*



Se dibujó este número en el tablero del salón de clases.
Docente: *¿Qué número es éste en el sistema decimal?*
Silvia: *100, 200, 300, 320, 340, 360, 380 mas 18 da 398… ¿cuánto es que vale el punto de arriba [el del tercer nivel]?*
Jhon: *¡400!*
Silvia: *Entonces 398 mas 400 da 698... Ay no, 798.*

(Diario de campo, 3ª sec. Taller Nº 2)

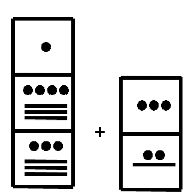
De lo anterior, se puede decir que para los niños es más fácil contar el valor de cada raya y cada punto dependiendo del nivel donde se encuentren, que multiplicar el número de cada nivel por las potencias de veinte. Para ellos, el método del conteo era más enriquecedor y no interesaba en donde empezaran, sea en el segundo o en el primer nivel; como afirma los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998):

> *La destreza de contar es uno de los indicadores que los niños comprenden conceptos numéricos; […]. Contar hacia adelante, contar hacia atrás y contar a saltos son aspectos sucesivos que hay que hay que tener en cuenta en este proceso.* (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 47)

Continuando con la actividad Jhon preguntó: *“Pero profe, ¿por qué ese número [798]?”*. A lo que se respondió: *Más adelante ustedes mismos descifrarán de dónde sale.*

Ante esto, se puede deducir que los estudiantes mantienen actitudes positivas, en las que generan progreso y esfuerzo por aprender matemáticas; un papel primordial del maestro es buscar todos los medios necesarios para estimular el pensamiento matemático y aumentar la autoestima para obtener nuevos conocimientos.

Se prosiguió con la actividad, se les dijo que sumaran lo mencionado anteriormente, es decir, la suma del primer número dado de la actividad con el numeral escrito en el tablero del salón de clases:



Seguidamente los estudiantes efectuaron la suma; veintiséis (61.9%) la realizaron correctamente (ver Figura 32).

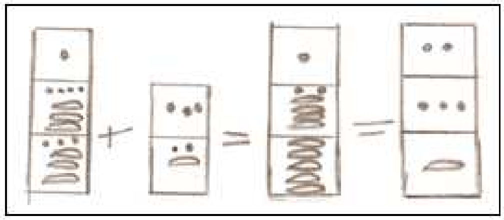


Figura 32. Suma de 798 mas 67 en el sistema maya, realizada por un estudiante (3º sec. Taller Nº 2).

De inmediato se les dijo: *Observemos que el resultado de la suma que ustedes realizaron es la suma final que aparece en el tablero de la actividad; después pedimos que nos den el segundo número, en este caso es 28; para escribir el tercero, restamos 399 menos 28, y más adelante miramos de donde salió el número 399.*

En el momento en que los estudiantes iban a realizar la resta de 399 menos 28 en numeración maya, se les había olvidado como era el procedimiento de la conversión del sistema decimal al maya para poder escribir el número 399 en este último sistema; de modo que se les recordó que tenían que dividir entre veinte. Inmediatamente se acordaron y desarrollaron el procedimiento (ver Figura 33). Esto es frecuente en los niños, pues para ellos era algo nuevo lo que estaban aprendiendo.

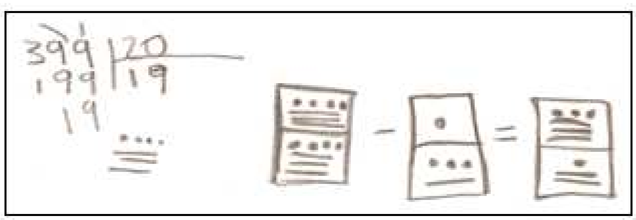
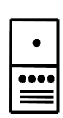


Figura 33. Resta de 399 menos 28 en el sistema maya, realizada por un estudiante (3ª sec. Taller Nº 2).

Finalizando la interacción de la actividad:

Docente: *Ahora tenemos el tercer número, 371[resultado de 399 menos 28]; después pedimos que nos den el cuarto número, y escribimos el quinto número de la misma forma que el tercero, es decir, restamos 399 menos el cuarto número. En este caso, el cuarto número dado en la actividad es:*



Docente: *¿Qué número es éste en el sistema decimal?*

María: *20, 25, 30, 35, ¡39!*

Docente: *Muy bien María, ahora realizamos la resta de 399 menos 39.*

Posteriormente, los niños efectuaron la resta (ver Figura 34).

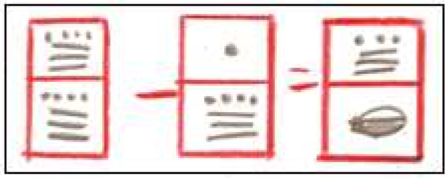


Figura 34. Resta de 399 menos 39 en el sistema maya, realizada por un estudiante (3ª sec. Taller Nº 2).

Los estudiantes se dieron cuenta que los cinco números están en la actividad y la suma efectivamente da 865.

Docente: *Ahora veamos la razón por la que el resultado es el esperado.*

Se hizo lo siguiente en el tablero:

$$\begin{array}{r} 399\ + \\ \underline{399} \\ 798 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 798\,+ & \\ \underline{67} & \longrightarrow \text{Primer número} \\ 865 & \end{array}$$

Docente: *Observemos que si sumamos 399 dos veces nos da 798, y 798 mas 67, que es el primer número dado, nos da 865.*

Fabián: *Ahora si… ¿por qué 399?*

Docente: *Bien, el máximo numeral maya de dos niveles es 399, ¿si?*

Hubo un silencio, realmente no habían entendido lo dicho.

Docente: *Es decir, hay máximo 19 unidades tanto en el primero como en el segundo nivel, pues sabemos que el número máximo que puede tener cada nivel es 19.*

Varios estudiantes afirmaron que sí. En seguida se realizó lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} 28\ + & \longrightarrow \text{Segundo número} \\ \underline{371} & \longrightarrow \text{Tercer número} \\ 399 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 39\,+ & \longrightarrow \text{Cuarto número} \\ \underline{360} & \longrightarrow \text{Quinto número} \\ 399 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67\ + \\ 28 \\ 371 \\ 39 \\ \underline{360} \\ 865 \end{array}$$

Docente: *Como podemos darnos cuenta, la suma del segundo y el tercer número es 399, y la del cuarto y el quinto también; ahora, si sumamos los últimos cuatro números nos da 798, y sumado con el primero nos da 865; por esta razón son cinco números.*

Sergio: *Ahh… ¿por eso fue que se restó 399 menos 28 y 399 menos 39?*

Docente: *Exactamente, se realizó la resta para saber cuánto nos falta para completar el número 399.*

(Diario de campo, 3ª sec. Taller Nº 2)

Los estudiantes copiaron el truco de la actividad en sus cuadernos, para repasarlo y practicarlo.

De esta manera se finaliza el taller Nº 2. La satisfacción, la alegría y la disciplina mostrada por los estudiantes durante la realización del taller es una prueba de que no es descabellado intentar esta metodología.

4.3. TALLER N º 3: APRENDIENDO A MULTIPLICAR Y DIVIDIR AL ESTILO MAYA

Objetivos:

- Conocer y comprender el algoritmo tanto de la multiplicación como de la división maya.
- Mediante el algoritmo de la multiplicación maya, hacer ver al estudiante la multiplicación como una suma repetida en los números naturales.

Desarrollo del taller:

El taller se compone de dos secciones; la primera, trata del aprendizaje de la multiplicación maya; y la segunda, del aprendizaje de la división maya.

Tanto en la primera como en la segunda sección, se inició una interacción didáctica entre la docente y los alumnos, con el fin de ver las fortalezas y deficiencias en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje del tema, ya que el tema es nuevo para los alumnos, inclusive, para el profesor que estuvo a cargo del grupo. Se realizó de esta manera por el hecho de que el tema del algoritmo de la multiplicación y de la división maya es un poco más difícil que la suma y la resta, y el deber de un maestro de matemáticas es llevar al niño a enfrentar situaciones que le permitan probar cosas nuevas para ver qué pasa, manejar objetos, manejar símbolos, plantear interrogantes y buscar sus propias respuestas; como dice Arias (1986, p. 27), *“El papel del maestro es el de un explorador del conocimiento de los estudiantes, el maestro no es sólo aquel que transmite información, sino también el que facilita la interacción”*.

En ambas secciones se trabajó con el material recreativo (por parejas), y después los estudiantes trabajaron individualmente en sus talleres.

A continuación se presenta el formato del tercer taller.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

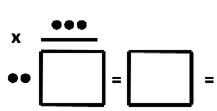
TALLER Nº 3: APRENDIENDO A MULTIPLICAR Y DIVIDIR AL ESTILO MAYA

Nombre: ____

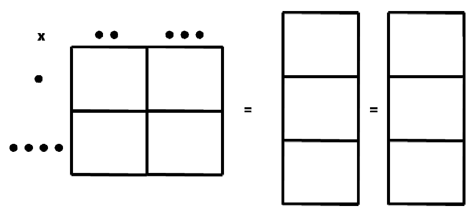
APRENDIENDO A MULTIPLICAR AL ESTILO MAYA

Un día o unidad básica del calendario maya se llamaba kín; los mayas colocaron el nombre de uinal a 20 días, el nombre de tún a 360 días; el nombre de katún a 7200 días; el nombre de baktún a 144000 días; ahora averigüemos el nombre que los mayas le dieron a 2880000 días. Para averiguar este nombre, resuelva las siguientes multiplicaciones y tacha el resultado en el cuadro adjunto. Las casillas no tachadas te darán el nombre de los 2880000 días.

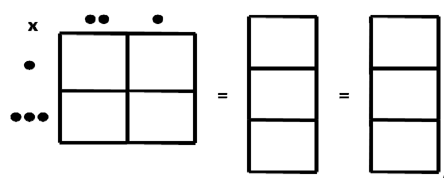
a.

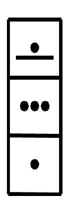
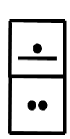


b.



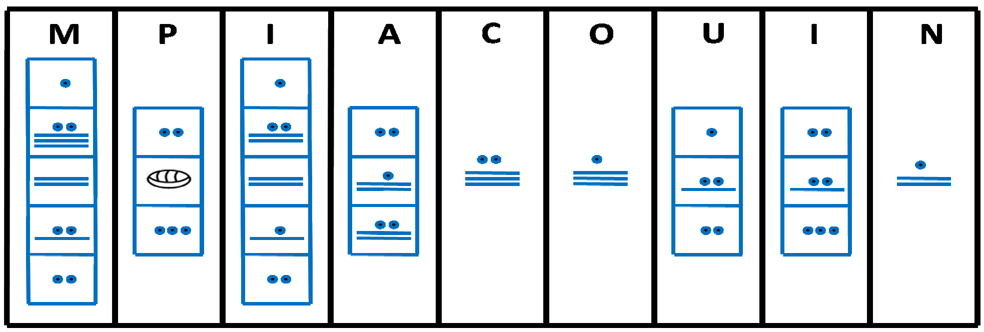
c.



d. Multiplique  por 

No olvidemos que para saber el número de casillas que tendrá el tablero, multiplicamos la cantidad de niveles de un factor por la cantidad de niveles del otro factor, y así obtenemos el número de casillas.

¡¡Averigua el nombre de los 2880000 de la cultura maya!!

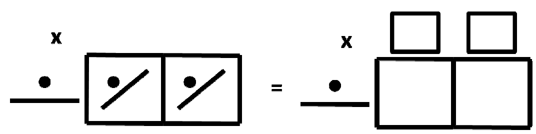


APRENDIENDO A DIVIDIR AL ESTILO MAYA

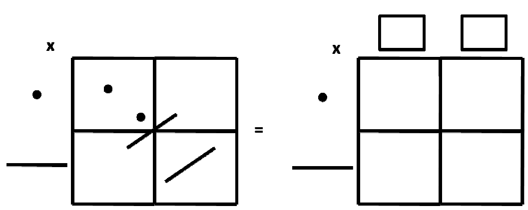
Pensaremos en la división como en el proceso contrario a la multiplicación…

Observas las siguientes figuras; lo que está dibujado en las diagonales de cada tablero es el resultado del producto del número que se encuentra a la izquierda por el de arriba, que es el que vamos a hallar. Acomoda los símbolos en las casillas para que la operación sea cierta.

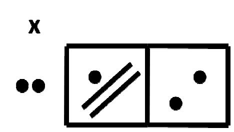
a.

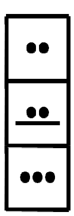
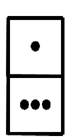


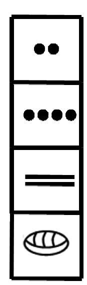
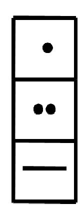
b.



c.



d. Dividir  entre 

e. Dividir  entre 

4.3.1. Análisis y resultados del Taller Nº 3

A continuación se presentan las experiencias y el análisis de las respuestas y los razonamientos dados por treinta y ocho estudiantes del grado cuarto al taller Nº 2.

4.3.1.1. Primera sección

APRENDIENDO A MULTIPLICAR AL ESTILO MAYA

La finalidad de esta sección tuvo lugar el aprendizaje de la multiplicación maya. Esta sección tiene cuatro ejercicios para resolver, tres de ellos exhiben el tablero junto con las columnas inicial y final del proceso, con el propósito de que el estudiante vaya asimilando la construcción de los mismos y la ubicación de los factores; y así, lo pueda realizar en el cuarto ejercicio.

Se realizó mediante un ejemplo la comprensión y el conocimiento del tema en el que se enunció un problema particular:

Mónica fue a la tienda y compró tres caramelos a 50 pesos cada uno; ¿cuánto pagó por los tres caramelos?

De inmediato, algunos estudiantes dijeron: *"¡150!"*. A lo que se respondió: *Muy bien, vamos a resolver el problema en notación maya, el problema se puede resolver de dos formas aritméticamente*[31]*… ¿cuáles son las dos formas?* Los estudiantes no entendieron la pregunta, así que se optó por cuestionarles cómo habían resuelto el problema, y manifestaron que hicieron la multiplicación de cincuenta por tres; asimismo se preguntó si había otra manera de resolverlo, solamente tres estudiantes dijeron que sí. *"50 mas 50 mas 50"*, respondió uno de los que afirmaron. Se les mencionó lo siguiente: *Bien, por lo tanto, hay dos operaciones aritméticas para resolver el problema; una es la suma y la otra es la multiplicación. Primero representaremos la suma en notación maya*. Los estudiantes la realizaron en sus talleres. Mientras se pasaba por los puestos de

[31] Aquí la "forma aritmética" se refiere a las operaciones aritméticas con las que se puede resolver el problema.

cada uno de ellos se observó lo que describió Sergio a la izquierda de la operación (ver Figura 35).

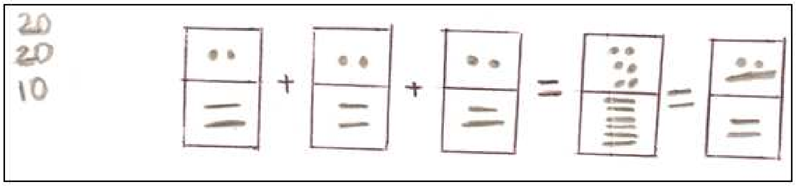
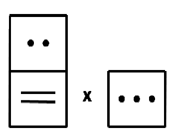


Figura 35. Suma de tres veces 50 en el sistema maya, realizada por Sergio (1ª sec. Taller Nº 3).

Él comentó que había escrito los números 20, 20, y 10, indicando que eran un punto, un punto y dos rayas respectivamente, para simbolizar el número 50; Sergio de una vez manejó el significado del valor de los símbolos de la numeración maya según el nivel, en vez de realizar la división entre 20 para cambiar el número al sistema maya. Una vez más, se demuestra que para los niños es más fácil utilizar el conteo para la conversión del sistema decimal al maya, y viceversa.

Veintinueve estudiantes (76.3%) efectuaron correctamente la suma. Los demás (23.7%) presentaron dificultad, debido a que no contaron bien la cantidad de puntos y rayas en el momento de agruparlos.

Finalizados los ejercicios de suma se dio paso a la realización de la segunda forma de resolver el problema en notación maya: la multiplicación. Se escribió lo siguiente:



En esta etapa de los niños, es difícil hacerles entender sobre el tamaño del tablero, y más aún la palabra “tamaño” en términos matemáticos. Sencillamente en estos casos, lo mejor es que el niño se deje llevar por la intuición y con el tiempo descubra, por sí solo, la noción de estos términos matemáticos; al igual, pasará lo mismo con la división –como se verá más adelante–. Se recreó la mente del niño de cuarto grado de primaria de la siguiente forma:

Docente: *Bueno niños, ¿cuántos niveles tiene cada factor?*

Camilo: *El 50 tiene dos niveles y el 3 tiene uno.*

Docente: *Muy bien, entonces, multiplicaremos 2 por 1 y nos da 2, quiere decir, que el tablero tendrá 2 casillas.*

Fabián: *O sea que si un factor tiene tres niveles y el otro dos, ¿yo multiplico 3 por 2?*

Docente: *Exactamente y… ¿cuántas casillas tendría el tablero?*

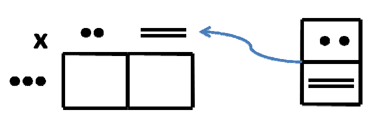
Fabián: *¡Seis!*

Docente: *Sencillamente, para saber el número de casillas multiplicamos la cantidad de niveles de un factor por la cantidad del otro factor.*

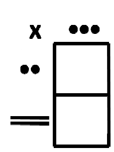
(Diario de campo, 1º sec. Taller Nº 3)

Con respecto a lo anterior, no hace falta poner al alumno en condiciones de inferioridad con una enseñanza verbal, porque así su aprendizaje será pasivo. Mediante la experiencia directa, la actividad, la concepción por sí sola a través de los sentidos, de los objetos y las operaciones sobre los objetos, es como nacerá el concepto en el alumno, primero ambiguo y apenas esbozado, después más preciso, consistente y claro.

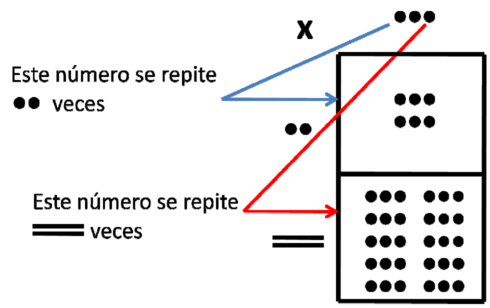
Se continuó la explicación con la ubicación de los factores en la parte externa del tablero de dos casillas, para ello, se hizo lo siguiente:



Se les indicó que el factor de arriba se ubica de derecha a izquierda empezando con el nivel de las unidades, y como el orden de los factores no altera el producto también se puede colocarlos de la siguiente manera:



Para dar a conocer a los niños la forma como los mayas multiplicaban, se les expuso su procedimiento a través del siguiente gráfico:



En ese momento, Andrés preguntó: *"Hay 30 puntos, ¿y no podemos colocar de una vez 6 rayas?",* se refería a la casilla inferior. Se le preguntó: *¿Por qué de una vez 6 rayas?* A lo que respondió: *"Pues sí profe, 10 por 3, 30; y 6 rayas son 30"*, en seguida agregó: *"Y también podíamos colocar de una vez una raya y un punto, pues 2 por 3, 6"* (se refería a la casilla superior).

Ante esto, el niño desarrolla los cálculos en forma rápida y natural, con esto demuestra sus habilidades matemáticas como la destreza y la eficacia. No obstante, a muchos estudiantes pareciera que olvidaran en realidad lo que es una multiplicación, o simplemente durante la enseñanza de la multiplicación los docentes se limitan solamente a explicar todos los pasos para efectuarla, y no tratan de hacer ver al alumno que la multiplicación es en realidad una suma. En este grupo de estudiantes de grado cuarto, el profesor hizo énfasis en la multiplicación de números naturales como una suma repetida, y prueba de ello se evidenció en algunos niños durante la realización de la prueba diagnóstica.

Prosiguiendo con la actividad se le respondió a Andrés que estaba muy bien lo que había dicho. Seguidamente, se les dijo a los estudiantes:

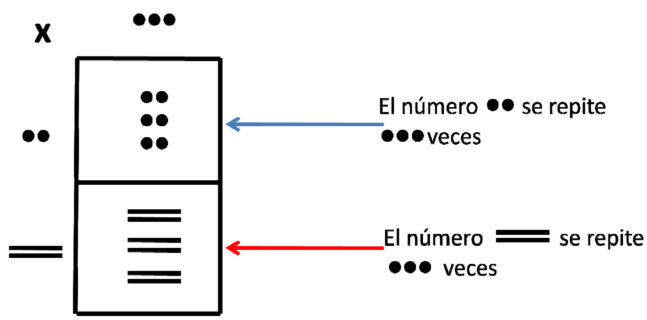
El objetivo del proceso de la multiplicación maya es ver en realidad lo que es una multiplicación, por ejemplo, sabemos que 3 por 10 da 30, pero esto, significa que si sumamos 10 veces el número 3 nos da 30, que es lo que tenemos planteado en la casilla inferior del tablero; lo mismo pasa con 2 por 3 de la casilla superior.

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\textbf{10 veces el número 3}} = 30$$

Pero notemos que es lo mismo si sumamos 3 veces el número 10:

$$\underbrace{10 + 10 + 10}_{\textbf{3 veces el número 10}} = 30$$

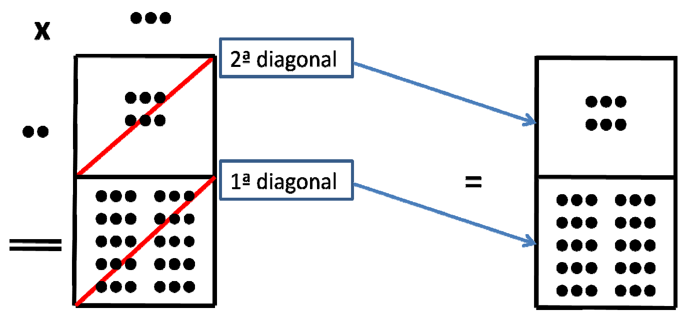
Posteriormente, se preguntó a los niños cómo aplicarían esto último en el tablero del ejemplo. Nathalia respondió: "*Se colocan 6 rayas*"; luego se hizo lo siguiente:



Se recalcó a los niños no olvidar que la multiplicación se puede expresar como una suma repetida y que para cifras grandes ya es muy tediosa realizarla, como por ejemplo, la multiplicación de 345 por 1523.

> *Modelar la multiplicación como una adición repetida suministra una forma concreta de ayudar a los alumnos a pensar en la multiplicación así como también en cómo resolverla. Es importante explorar varios modelos para la multiplicación para que los estudiantes vean tanto el poder de un modelo como sus limitaciones.* (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 52).

Se les explicó que trazaran las diagonales de cada casilla o cuadrito, y se iba indicando en el ejemplo. Para la época, los niños ya manejaban el concepto de la diagonal de un cuadrado, por lo tanto, no hubo dificultad. También se les dijo cómo construir la columna del resultado a través del ejemplo:



Después de la representación pictórica del ejemplo, la mayoría de los estudiantes presentaron mejoría en cuanto al entendimiento del tema. Los docentes debemos sembrar en el estudiante la mentalidad de comprender la necesidad de una búsqueda permanente y cultivar una actitud abierta al cambio, creativa, de descubrimiento y de aprendizaje continuo. El docente debe saber expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas, y así el estudiante logra interpretar mejor dichas ideas. Sin embargo, esto no sucede en todos los casos, puede que el estudiante, al final, aún no haya asimilado las ideas; como afirma Arias (1986):

> *Es muy fácil escoger una definición, exponerla con cuidado a los alumnos, acompañarla con ejemplos, pero también es muy raro que junto a la explicación verbal, con el dibujo y la definición, el concepto sea comprendido y asimilado perfecta y rápidamente.* (Arias, 1986, p.30).

Para finalizar la actividad del ejemplo, los estudiantes realizaron todas las simplificaciones según las reglas establecidas en el resultado (ver Figura 36).

Figura 36. Resultado de la multiplicación de 50 por 3, realizado por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

Observando en la Figura 37, el estudiante solo cometió un error pequeño, fue en el momento en que tachó las cuatro rayas –aún teniéndolas allí– colocó de una vez el punto en el nivel de las veintenas. Muy pocos estudiantes cometen este tipo de errores y llegan al resultado correcto. Muchas veces no se daban cuenta, a pesar de que, por lo general, realizaban en orden los pasos.

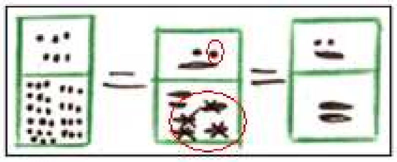


Figura 37. Resultado de la multiplicación de 50 por 3, realizado por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

Posteriormente, los niños realizaron los ejercicios propuestos de esta sección. Primero los desarrollaron, por parejas, con el material recreativo, y después, individualmente en el taller. Para el desarrollo de los ejercicios en el tablero del material, los niños colocaron los factores dentro de él, ya que las multiplicaciones propuestas no necesitaban del tablero completo.

Veinticuatro estudiantes (63.2%) obtuvieron el resultado correcto en los ejercicios *a.*, *b.*, y *c.* De estos veinticuatro, nueve, aplicaron el algoritmo de la multiplicación maya (ver Figura 38); los veinte restantes, lo aplicaron en algunos ejercicios y en otros no, es decir, de una vez asociaron el sistema de numeración decimal con el sistema maya (ver Figuras 39 y 40).

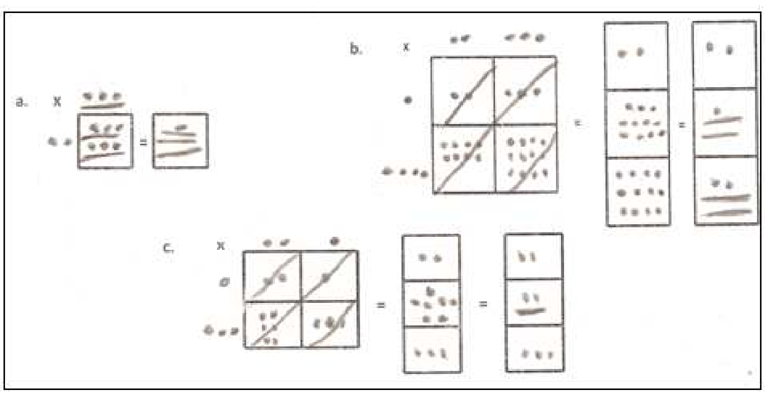


Figura 38. Ejercicios *a*., *b*. y *c*, resueltos por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

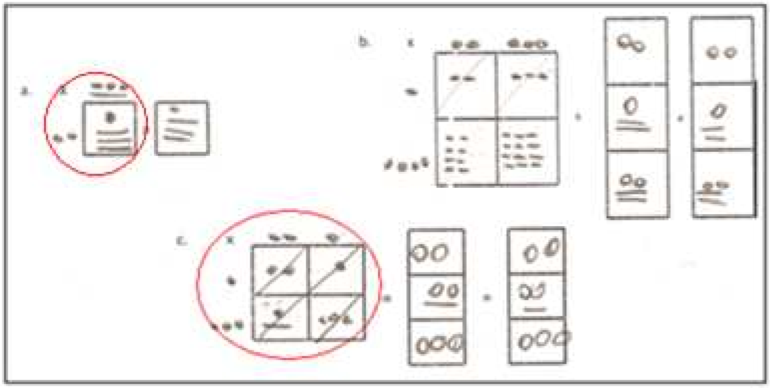


Figura 39. Ejercicios *a*., *b*. y *c*, resueltos por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

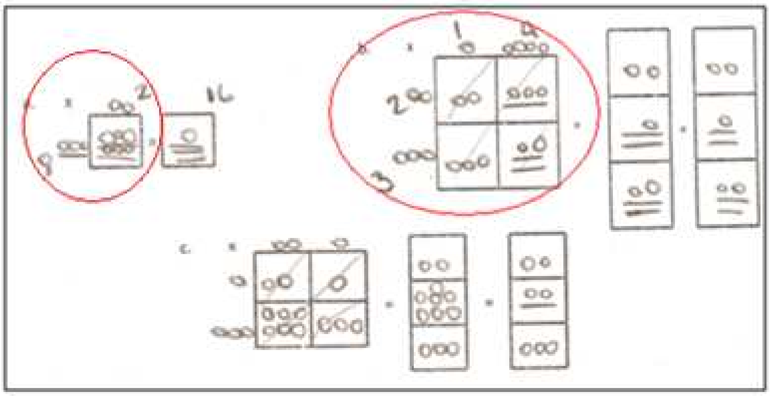


Figura 40. Ejercicios *a*., *b*. y *c*, resueltos por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

Observando en la Figura 39, el estudiante de una vez colocó el resultado en el ejercicio *a*. Muchos estudiantes hicieron esto; el argumento dado por ellos fue colocarlo de una vez sin hacer los pasos de la multiplicación maya, pero de esta manera se evidencia que efectuaron la multiplicación en el sistema decimal; asimismo pasó en el ejercicio *c.* del mismo estudiante. Algunos situaron los números en el sistema de numeración decimal cerca a cada símbolo de los factores (ver Figura 40), y obtenían el resultado correcto.

Aquí el estudiante reconoce que algunas representaciones (sistema decimal) son más útiles que otras (sistema maya) en ciertas situaciones, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 43), el estudiante comprende el significado de los números en diferentes interpretaciones y representaciones para dar solución a un problema.

Los estudiantes (23.7%) que no obtuvieron el resultado correcto se debió al mal uso del conteo de los puntos y las rayas en el momento de aplicar las reglas.

Durante el desarrollo del material recreativo, los niños se divertían al cambiar el orden de los factores en el tablero, aunque, algunos presentaron dificultad al ubicar un factor de dos niveles en la parte superior del tablero, ya que lo colocaban de izquierda a derecha empezando con el nivel de las unidades, es decir, el nivel de las unidades en la primera columna, cuando lo correcto, en este caso, es que el nivel de las unidades va en la segunda columna y el de las veintenas en la primera; esto generó confusión en los niños. Para resolver las inquietudes, se les comentó que en la primera columna siempre va lo que corresponda al último nivel; en la segunda, lo que corresponda al penúltimo, y así sucesivamente hasta llegar al primer nivel. Con base en esto, poco a poco se fueron resolviendo las incertidumbres. Otros estudiantes llegaron a realizar ejercicios distintos a los del taller, demostrando así un gran empeño en el aprendizaje del tema.

En general, durante el trabajo realizado con el material, las actitudes de los estudiantes mostraron un cambio impresionante en este taller con respecto al anterior, debido a que se generó un ambiente optimista, descubriendo que la exploración de la imaginación es una fuente para las aptitudes matemáticas.

Para el cuarto ejercicio (*d*.), muchos niños preguntaron si el tablero es de nueve casillas; la siguiente interacción muestra como se resolvió esta inquietud:

Docente: *¿De dónde obtienen la cantidad nueve?*

Jhon: *Tres por tres.*

Docente: *¿Por qué tres por tres?*

Karol: *Sí porque el factor más grande tiene tres niveles.*

Docente: *Muy bien y… ¿cuál es ese número en el sistema decimal?*

Se refiere al numeral maya de tres niveles del ejercicio *d*. Esta pregunta se hizo con la intención de saber cómo se encontraban los niños en cuanto a la conversión del sistema maya al decimal.

Algunas voces: *60, 65, 65 mas 400 son 465, la raya… ¿cuánto es que vale la raya?"*
En ese momento, varios estudiantes miraron en sus cuadernos buscando el valor de la raya en el nivel de las veintenas de veintenas.
Andrea: *¡El número es 2465!*

(Diario de campo, 1ª sec. Taller Nº 3)

Se resalta la interacción docente-alumno, puesto que proporciona valiosas experiencias para escuchar a los niños y reaccionar ante sus respuestas, pues la interacción o la comunicación son la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas. De esta manera, el estudiante adquiere seguridad para explicar su razonamiento, para argumentar, discutir con los demás, se motiva a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreve a exteriorizar. La interacción permite la generación de un clima apropiado para lograr un buen desarrollo en el aprendizaje del niño en el aula; esto es especialmente necesario y prioritario en el área de educación matemática, en virtud de reducir los indicadores negativos que acompañan a una considerable mayoría de estudiantes a lo largo de todo su proyecto de formación.

Veinticinco estudiantes (65.8%) obtuvieron el resultado correcto en el ejercicio *d*. De estos estudiantes, once aplicaron el algoritmo de la multiplicación maya y el resto asoció el sistema de numeración decimal con el maya; un ejemplo claro de esto, es el ejercicio resuelto por Karol (ver Figura 41). A ella se le preguntó por lo descrito debajo del tablero; ella manifestó que multiplicó en el sistema decimal cada símbolo del numeral que está en la parte externa izquierda del tablero por cada símbolo del numeral que está en la parte superior, e inmediatamente colocó el resultado; por ejemplo, en la multiplicación de seis por seis, colocó el número 36 como siete rayas y un punto, pero no aplicó el paso de repetir seis veces el símbolo seis.

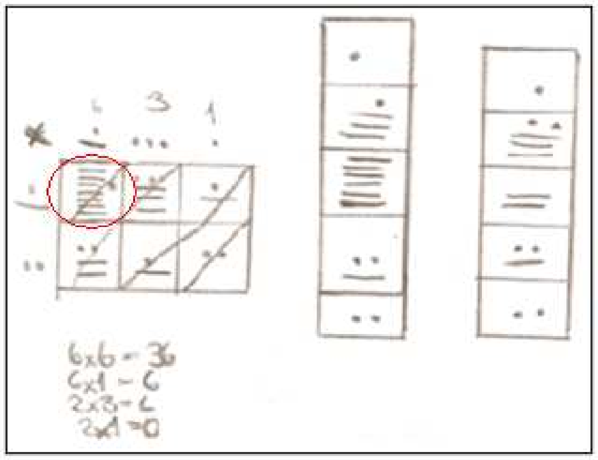


Figura 41. Respuesta del ejercicio *d*. por Karol (1ª sec. Taller Nº 3).

Los trece estudiantes (34.2%) que obtuvieron el resultado incorrecto en el ejercicio *d*., se debió, nuevamente, al mal uso del conteo de los puntos y las rayas, a pesar de que realizaron todos los pasos de la multiplicación maya (ver Figura 42). El argumento dado a lo anterior, fue el afán de resolverlo, y por consiguiente averiguar el nombre de los 2880000 días de la cultura maya que requería al final de la actividad en esta sección; y así, cuando no encontraban el resultado en el cuadro de respuestas, se daban cuenta del error, y volvían a realizar la operación; pero de nuevo les quedó mal y la razón fue la misma. Para solucionar esta dificultad en el aprendizaje del estudiante, no basta con la simple repetición de ejercicios. El verdadero mérito pedagógico, en estos casos, estriba, no solamente en saber lo que se ha de enseñar, sino entablar una comunicación con el estudiante para que perciba y explore lo que está haciendo, y ayude a minimizar errores.

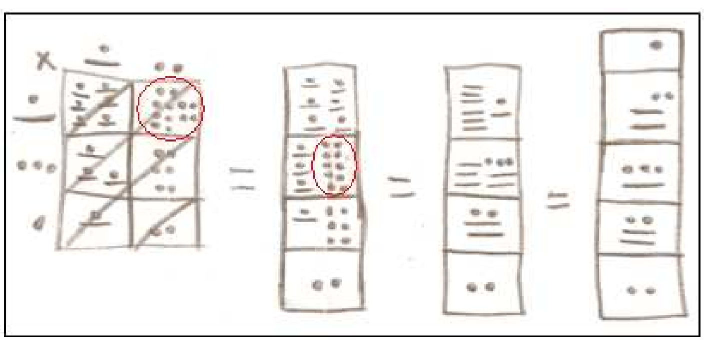


Figura 42. Respuesta del ejercicio *d*. por un estudiante (1ª sec. Taller Nº 3).

Generalmente, a los estudiantes no se les dificultó el proceso de la multiplicación maya, poco a poco el deseo de aprender y adquirir nuevos conocimientos se forjaba cada vez más. Para ellos, la didáctica de un tema nuevo les llamaba mucho la atención, en la que ayudaba a estimular sus capacidades mentales.

Figura 43. Niños realizando las operaciones en sus talleres (1ª sec. Taller Nº 3).

4.3.1.2. Segunda sección

APRENDIENDO A DIVIDIR AL ESTILO MAYA

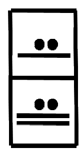
Esta sección tiene como finalidad el aprendizaje de la división maya. Se compone de cinco ejercicios para resolver; dos de ellos exhiben los tableros inicial y final del proceso; uno, exhibe solamente el inicial. La realización de estos tres ejercicios tiene el propósito de que el estudiante vaya asimilando la construcción del tablero para ubicar el divisor y el dividendo, y así, lo pueda realizar en los dos últimos ejercicios.

A los estudiantes se les indicó que en el transcurso de la actividad se trabajará la división exacta, y que el proceso de la división maya es “contrario” al de la multiplicación. Se utilizó la palabra “contrario” para que entendieran mejor, puesto que la palabra “inverso” aún no la conocían.

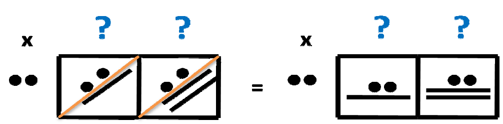
Como los estudiantes de cuarto grado de primaria todavía no están en la capacidad de interpretar una fórmula matemática, y más aún la del tamaño del tablero[32], simplemente se les dijo el número de casillas que tiene este –de manera horizontal– para la realización de cada uno de los dos últimos ejercicios.

> *Es cierto que no se puede, según las edades, explicar todo al niño; el papel del educador es por lo tanto, cada vez que esto sea posible, cada que se presente la ocasión, hacer funcionar la inteligencia del niño, estimularla, incitarla y ayudar al niño a ir hasta el máximum de sus posibilidades*. (PSNANLM, 1986, p. 20.).

Al igual que en la anterior sección, se inició el tema con un ejemplo para facilitar la destreza en el estudiante.

Dividir  entre 

Se les indicó cómo ubicar el divisor y el dividendo, y el trazo de las diagonales en el tablero:



Observe que los símbolos dentro del tablero de la izquierda están en una posición oblicua, la razón ante esto, es una representación didáctica para que los niños logren adquirir el significado de la ubicación del dividendo en el tablero. La siguiente interacción muestra cómo se desarrolló la clase en ese momento:

Docente: *¿Cómo hacemos para comprobar si una división exacta quedó correcta?*
Silvia: *Se multiplica el divisor por el cociente, y cero en el residuo, ¿sí profesora?*
Docente: *Muy bien Silvia, o sea que… nos tiene que dar el…*
Silvia: *¡Dividendo!*

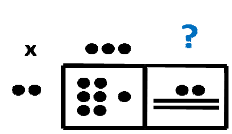
[32] Se recuerda el tamaño del tablero para la realización del proceso de la división maya en la página 48.

Docente: *Por esta razón, el dividendo se ubica de esa forma dentro del tablero, pues es el resultado de la multiplicación del número 2 por el que está arriba, que es el que vamos a buscar; ¿cómo se llama el número que vamos a buscar?*

Los niños se quedaron pensando, parece ser que se salieron del contexto cuando en realidad, no hace mucho se mencionaron las partes de la división. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 28), a veces el niño, en el momento en que está ocupando un problema en una situación particular no se da cuenta que la solución está en dicha situación. Muy a menudo sucede esto en la básica primaria, después los estudiantes llegan a la básica secundaria con muy pocas bases, por tanto, se ven resultados no muy alentadores en el área de las matemáticas.

Continuando con la interacción…

Docente: *El número que deseamos buscar arriba se llama cociente.*
Mayoría de estudiantes: *Ahhh.*
Mariela: *¿Y las diagonales para qué?*
Docente: *Recordemos que las diagonales corresponden a los niveles del resultado de una multiplicación, ¿sí?*
Mayoría de estudiantes: *Ah… Sí!*
Docente: *Bien, ¿cuántas veces repite el número 2 en la primera casilla?*
Andrés: *7 dividido en 2 da… 3, caben 3.*
Docente: *Muy Bien, esto quiere decir que el símbolo tres lo colocamos arriba, pero para entender mejor, podemos reemplazar la raya que está en la casilla por… ¿cuántos puntos?*
Mayoría de estudiantes: *¡Cinco puntos!*
Se realizo la siguiente gráfica:



Docente: *De esta manera vemos, mejor, que se repite tres veces el número 2 y sobra un punto.*

Jhon: *¿El punto queda ahí?*

Él se refirió al punto que sobró.

Docente: *No, el punto que sobra baja a la diagonal siguiente como cuatro rayas, ¿por qué se puede hacer esto?*

Andrea: *Porque las diagonales representan niveles.*

(Diario de campo, 2ª sec. Taller Nº 3)

Los niños terminaron de realizar el ejercicio en sus talleres. El 65.8% les fue muy bien, no se presentaron irregularidades (ver Figura 44).

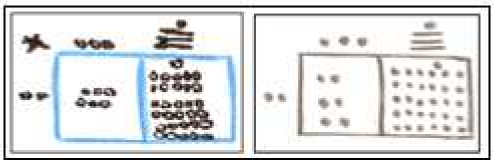


Figura 44. División de 152 entre 2 en el sistema maya, realizadas por dos estudiantes (2ª sec. Taller Nº 3).

Para finalizar, se les manifestó a los estudiantes que recordaran como se "lee" el numeral maya en la parte superior del tablero cuando se vio el tema de la multiplicación.

Terminada la interacción docente-alumno, los estudiantes continuaron con el desarrollo de los ejercicios propuestos de esta sección del taller. No mostraron mayores dificultades en el ejercicio *a.* El 50% resolvió correctamente el ejercicio *b.* y la otra mitad presentó dificultad para ubicar del símbolo en la segunda diagonal, ya que algunos ubicaron todo el símbolo en la primera casilla inferior del tablero (ver primer recuadro de la Figura 45) y los demás, en la segunda casilla superior (ver segundo recuadro de la Figura 45).

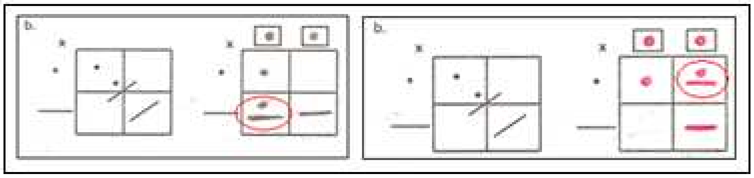


Figura 45. Respuestas del ejercicio *b*. por dos estudiantes (2ª sec. Taller Nº 3).

Dieciséis estudiantes (42.1%) obtuvieron el resultado correcto en el ejercicio *c.*; de estos estudiantes, diez, aplicaron correctamente el algoritmo de la división maya (ver primer recuadro de la Figura 46) y seis, asociaron el sistema de numeración decimal con el sistema maya. Estos seis estudiantes manifestaron que como repetía dos veces un número, entonces dejaron las dos rayas, y que así, la raya repite dos veces, y que además, esta raya, es el resultado de dividir diez entre dos (ver segundo recuadro de la Figura 46). A algunos niños se les olvidaba ubicar el signo de la multiplicación por fuera del tablero.

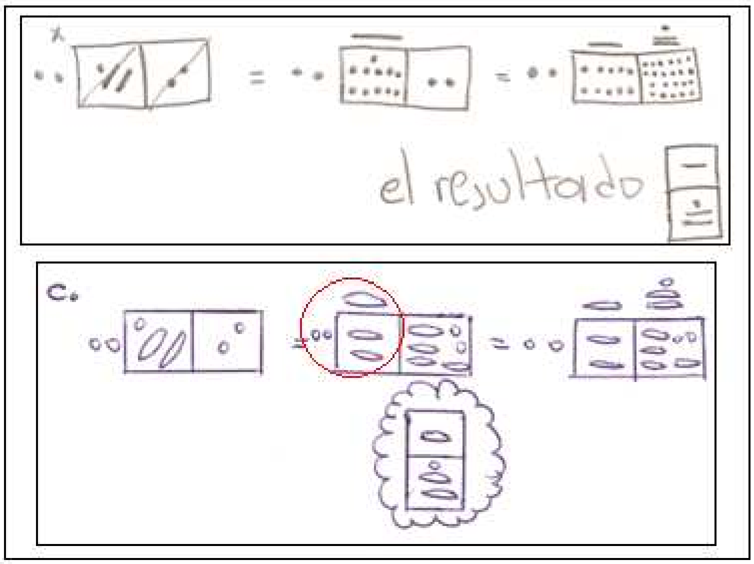


Figura 46. Respuestas del ejercicio *c.* por dos estudiantes (1ª sec. Taller Nº 3)

El resto de los estudiantes (57.9%) que desarrolló el proceso incorrecto en el ejercicio *c.* se debieron a varias atribuciones: algunos dejaron el símbolo como tal en la primera casilla, es decir, no borraron el punto que sobra cuando colocaron las cuatro rayas en la segunda, y aún así, también colocaron el resultado correcto (ver primer recuadro de la Figura 47); otros –la mayoría–, se confundieron al situar el resultado en forma vertical ubicando el nivel de las unidades en el segundo nivel, a pesar de que aplicaron muy bien el algoritmo la división maya (ver segundo recuadro de la Figura 47); y unos últimos, no entendían cómo realizar la operación, para ello, se acercó a estos estudiantes para ofrecer apoyo académico, además, según el PSNANLM (1986, p. 71), *“El niño que no aprende, es casi* *siempre un niño que puede aprender si se le brinda la ayuda y el tratamiento adecuados y oportunos".*

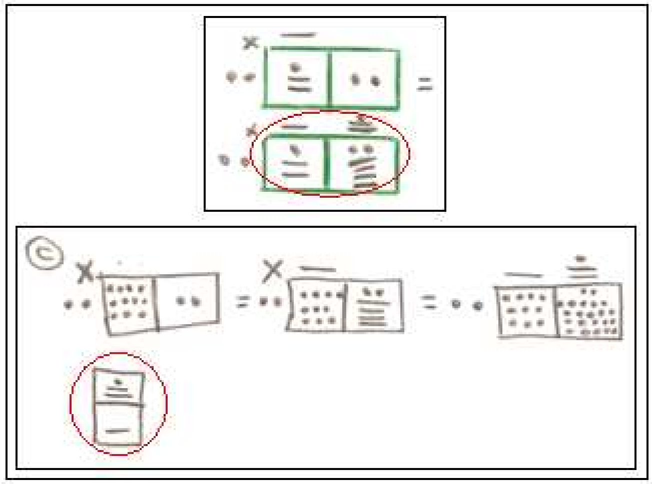


Figura 47. Respuestas del ejercicio *c*. por dos estudiantes (2ª sec. Taller Nº 3).

Posiblemente, el hecho de que el niño escriba incorrectamente la colocación de los niveles del resultado en forma vertical se deba a la escritura de un número en el sistema decimal puesto que se empieza de izquierda a derecha, es decir, el niño escribió el resultado de abajo hacia arriba conforme lo leía de izquierda a derecha.

Para el ejercicio *d.,* se les dijo que utilizaran un tablero de cuatro casillas. Diecisiete estudiantes (44.7%) realizaron muy bien este ejercicio (ver primer recuadro de la Figura 48), y los demás (55.3%), ubicaron incorrectamente el dividendo en el tablero, pues escribieron en la diagonal de la primera casilla superior el símbolo del nivel de las unidades y en la diagonal de la segunda casilla inferior, el de las veintenas de veintenas (ver segundo recuadro de la Figura 48). Estos niños mencionaron que lo hicieron así porque pensaron que se escribía de esa forma; para ello, se les recordó cómo ubicar el dividendo en el tablero.

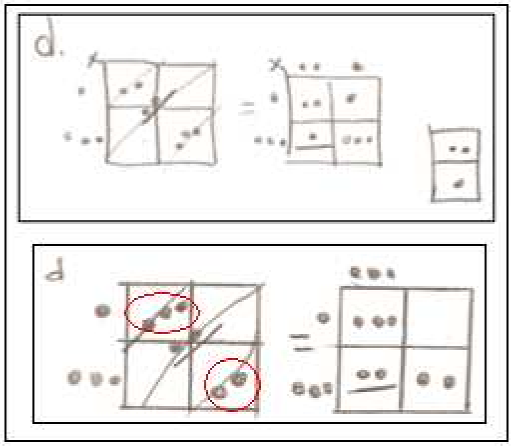


Figura 48. Respuestas del ejercicio *d*. por dos estudiantes (2ª sec. Taller Nº 3).

Para el ejercicio *e*., se les dijo que utilizaran un tablero de nueve casillas. Siete estudiantes (18.4%) realizaron correctamente este ejercicio (ver Figura 49) y el resto de los estudiantes (81.6%) presentó dificultad, nuevamente, en la ubicación del dividendo, pues colocaron los símbolos de este numeral maya empezando con el cuarto nivel desde la esquina inferior derecha hasta la esquina superior izquierda del tablero (ver Figura 50).

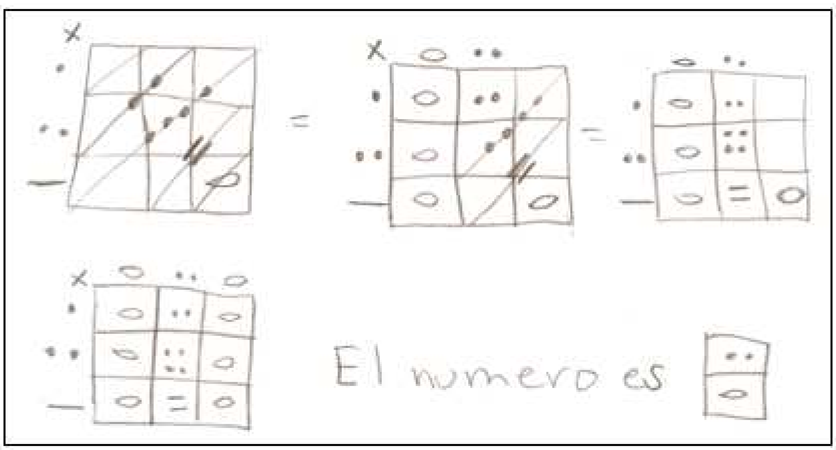


Figura 49. Respuesta del ejercicio *e*. por un estudiante (2ª sec. Taller Nº 3).

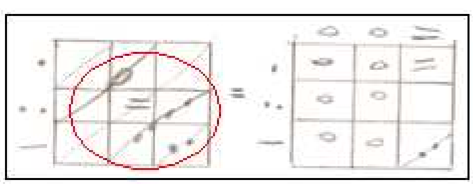


Figura 50. Respuesta del ejercicio *e*. por un estudiante (2ª sec. Taller Nº 3).

Algunos estudiantes preguntaron qué hacer en la primera casilla de la primera fila, para ello, se les dijo que como no hay ningún número, entonces se coloca un cero y en consecuencia, en la parte superior de la primera columna del tablero va un cero.

Los estudiantes comprobaron las divisiones, la mayoría, supo cómo comprobarlas: hacer la multiplicación del divisor por el cociente da como resultado todos los símbolos ubicados dentro del tablero, es decir, los símbolos del dividendo. La idea principal al verificar los resultados de un procedimiento, es que los estudiantes sean capaces de hacerlo por ellos mismos en lugar de confiar en las respuestas o en la verificación que haga el docente; como dice los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, p. 105), *“Resulta especialmente importante la situación en que un alumno descubre que una respuesta es falsa después de comprobarla, y por tanto repasa la ejecución del procedimiento original”*.

Los estudiantes participaron activamente, en que la comprensión de los conocimientos se hicieron cada vez más sencillos y naturales para dar solución a los problemas que se les presentaron, no obstante, no dejan de existir estudiantes que no cumplan este papel, ya que hubo varios que se vieron reflejados por el desánimo, debido a que el tema les fue un poco complejo y les pareció algo confuso, especialmente, la ubicación del dividendo en el tablero y la acomodación de los símbolos en las casillas.

> *No encontrará la fórmula salvadora para enseñar mejor, ni la regla mágica para facilitar la comprensión de las matemáticas, pero se dará cuenta de su responsabilidad como profesor de matemáticas a cualquier nivel y de la importancia que tiene hoy una cultura matemática, entendiéndola como un hábito mental matemático más que como una suma de conocimientos.* (Arias, 1986, p. 26).

En el manejo del material recreativo, los estudiantes se divirtieron mucho, manipularon adecuadamente los objetos como son los palos de paleta, los granos del fríjol y las conchas cuando realizaban una operación; pero, en algunos estudiantes, al plasmar en sus talleres lo manipulado algo les quedaba mal, es como si dicho material ayudara mejor con la actividad mental del niño, y el hecho de escribir símbolos en un papel es una mera ayuda.

En general, se puede decir que los estudiantes se esforzaron al máximo, cada vez les llamaba más la atención hacer operaciones con los tres símbolos del sistema de numeración maya: el punto, la raya y la concha.

Figura 51. Niños trabajando en sus talleres (2ª sec. Taller Nº 3).

4.4. TALLER N º 4: REFORZANDO EN LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS SISTEMAS MAYA Y DECIMAL

Objetivo:

- Evaluar al estudiante sus aptitudes matemáticas en el desarrollo de las operaciones fundamentales de la aritmética tanto en el sistema maya como en el decimal.

Desarrollo del taller:

El taller se compone de dos secciones. La primera sección se divide en dos partes; en la primera parte se encuentra un cuadro en el que los estudiantes colocaron los signos (mas, menos, por, dividido) de tal manera que la operación sea correcta en cada renglón y en cada columna; y en la segunda parte, se encuentran seis ejercicios que resolvieron los niños para llenar el crucigrama descrito.

La segunda sección del taller muestra un camino donde se encuentran varios ejercicios aritméticos en el sistema decimal.

Fue opcional trabajar con el material recreativo en la segunda parte de la primera sección. La mayoría de estudiantes lo hicieron, luego, resolvieron las actividades en sus talleres individualmente.

A continuación se presenta el formato del cuarto taller.

Universidad Industrial de Santander

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS
GRADO CUARTO

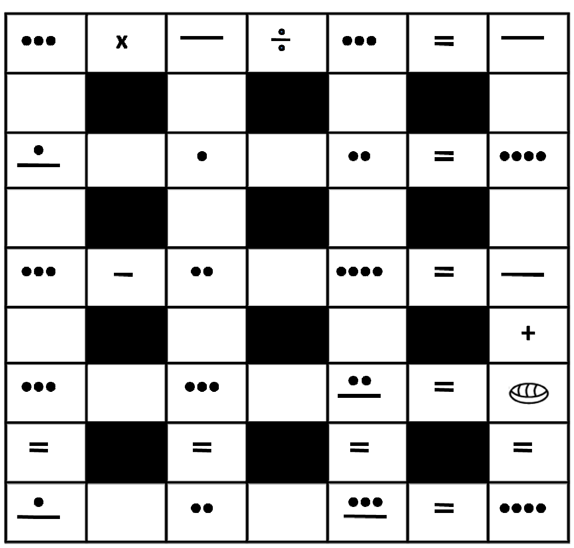
TALLER Nº 4: REFORZANDO EN LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS SISTEMAS MAYA Y DECIMAL

Nombre: ____

EN EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA..........

Horizontales y Verticales:.......

Escribe en cada una de las casillas vacías el signo de la operación (**+**, **-**, **x**, ÷) que corresponda, de tal manera que las operaciones sean correctas tanto horizontal como verticalmente.

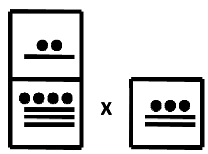


Cuadradito.......

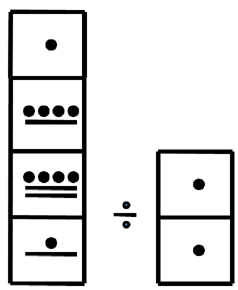
Resuelva el crucigrama que se encuentra abajo. Primero haz las operaciones y luego escribe el resultado usando una casilla para cada nivel. Después, suma los símbolos de cualquier renglón o columna y observa lo que se obtiene.

Horizontales:

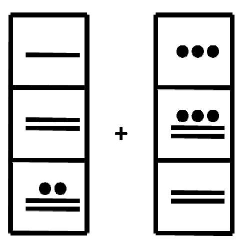
1



4

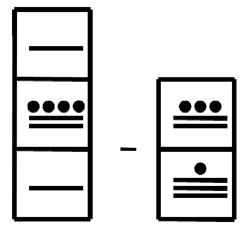


5

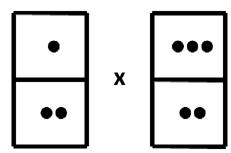


Verticales:

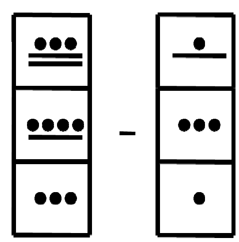
1



2



3

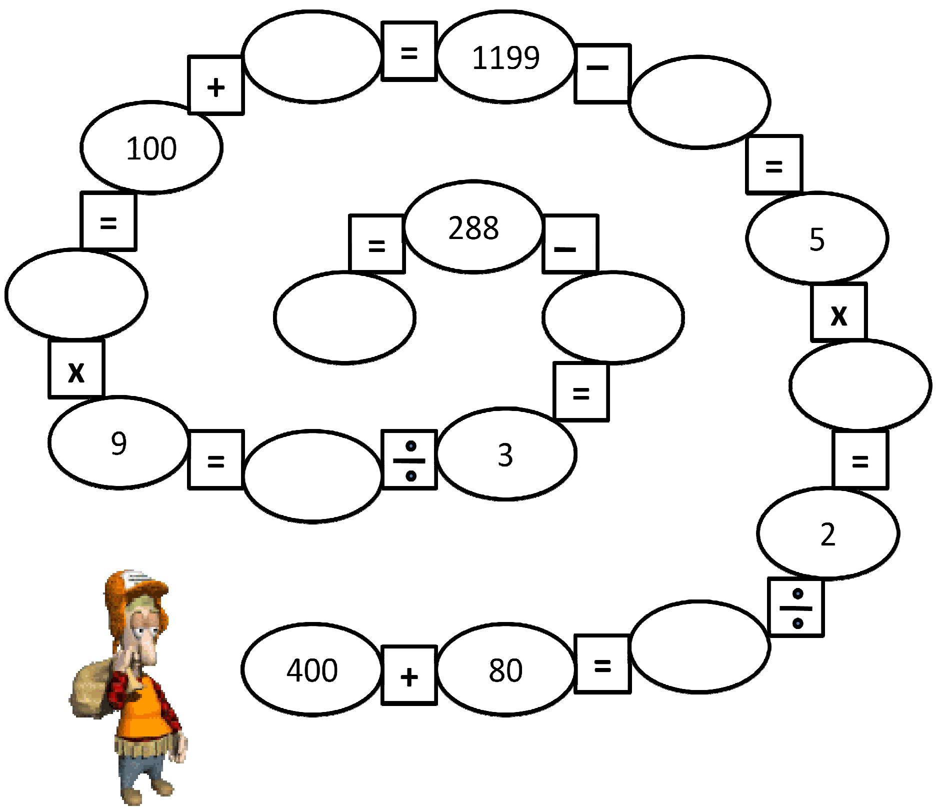


1	2	3
4		
5		

EN EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL..........

Camino..........

Ayuda a Pepito a recorrer el camino para averiguar el número de pelotas que lleva en su bolsa, pues no las quiere sacar para contarlas!!!!!



Pregunticas.......

¿Te gustó trabajar con el sistema maya?, ¿por qué?

¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división en números naturales?

4.4.1. Análisis y resultados del Taller Nº 4

A continuación se presentan las experiencias y el análisis de las respuestas y los razonamientos dados por cuarenta y dos estudiantes del grado cuarto al taller Nº 4.

4.4.1.1. Primera sección

EN EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA..........

Horizontales y Verticales:.......

En esta primera parte de la sección los niños se animaron mucho al llenar los símbolos que hacían falta para completar el cuadro. No se presentaron mayores dificultades.

Treinta y cuatro estudiantes (80.9%) lo realizaron correctamente (ver Figura 52).

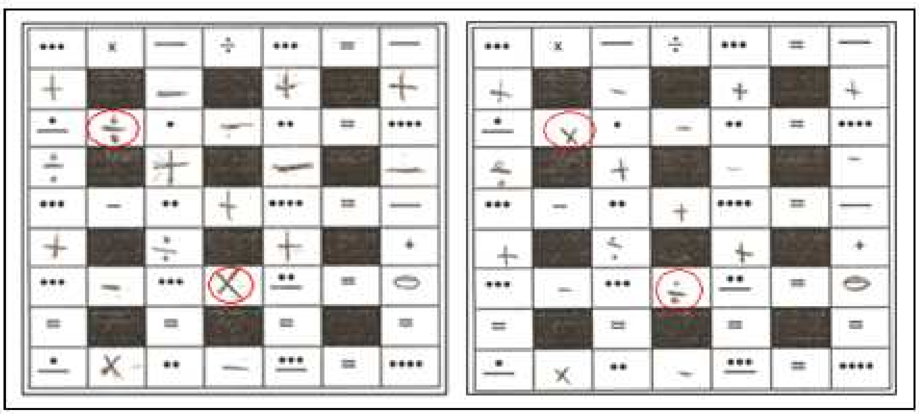


Figura 52. Respuestas de dos estudiantes en la primera parte de la 1ª sección (Taller Nº 4).

Observando en el primer cuadro de la Figura 52, el estudiante podría confundir la escritura de la raya de la numeración maya con el signo menos de la operación, sin embargo, este aspecto es muy común que se presente en los niños mientras van aprendiendo a moldear la escritura tanto de los signos como de los números a medida que hagan uso de la práctica. Los estudiantes cada vez adquieren más destrezas a la hora de desarrollar su capacidad matemática, por ejemplo, observemos que en la tercera fila de ambos cuadros de la Figura 52 no se tienen los mismos signos y la operación es correcta, igualmente pasa en la séptima fila.

Los estudiantes que no realizaron correctamente este ejercicio (19%) se debió a la mala colocación de los signos (ver Figura 53), el afán fue el motivo ante esto, pues querían pasar rápidamente a la segunda parte de la sección.

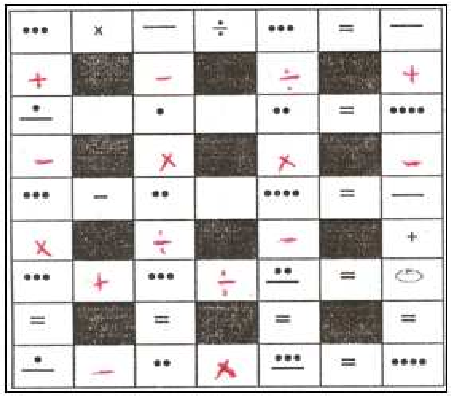


Figura 53. Respuesta de un estudiante en la primera parte de la 1ª sección (Taller Nº 4).

Cuadradito.......

Treinta y uno estudiantes (73.8%) realizaron correctamente la mayoría de ejercicios, y concluyeron que la suma de las cifras de cada renglón y cada columna es 15 en el crucigrama (ver Figura 54). Más de la mitad de estos estudiantes aplicaron el algoritmo correspondiente en cada ejercicio, inclusive en los ejercicios de multiplicación (ver Figura 55), y muy pocos, en la división (ver Figura 56). Para la división se les dijo que utilizaran un tablero horizontal de seis casillas.

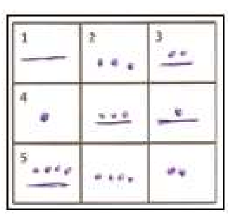


Figura 54. Crucigrama resuelto por un estudiante (2ª parte, 2ª sec. Taller Nº 4).

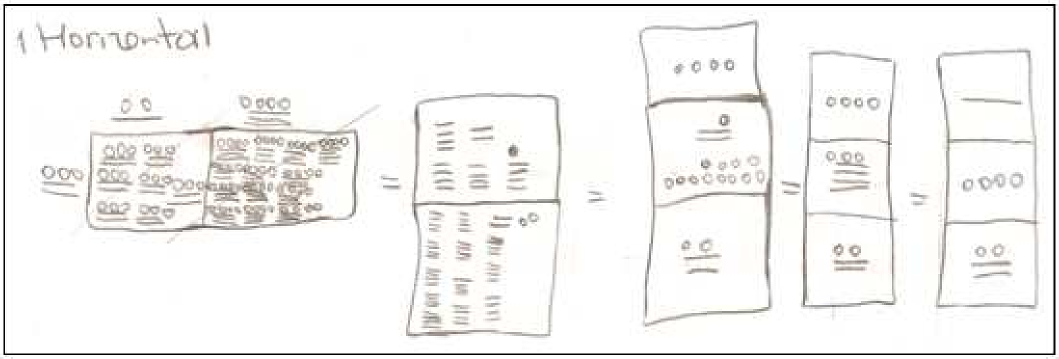


Figura 55. Ejercicio *1. Horizontal* resuelto por un estudiante (2ª parte, 2ª sec. Taller Nº 4).

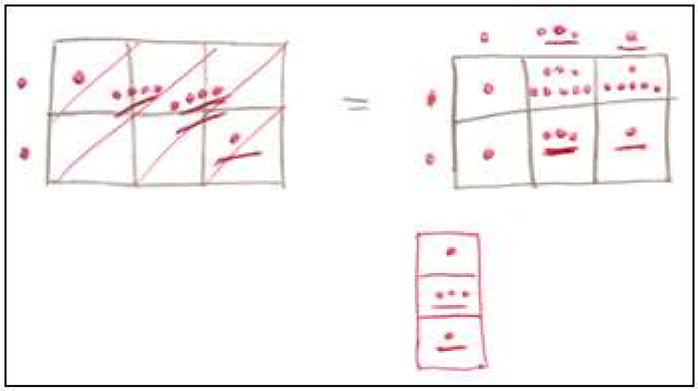


Figura 56. Ejercicio *4. Horizontal* resuelto por un estudiante (2ª parte, 2ª sec. Taller Nº 4).

Esta vez se presentaron menos dificultades en el desarrollo de la aplicación de los algoritmos de las operaciones fundamentales de la aritmética maya. A medida que los niños realizaban experiencias con el material recreativo para luego ser forjadas en sus talleres se presentaba menos incomprensiones, y se dejaban llevar por sus intuiciones y descubrimientos. Poco a poco los niños fueron instruyendo las nociones del algoritmo de la división maya –tema que les pareció un poco confuso al principio–, y cada vez, las inquietudes eran menores.

4.4.1.2. Segunda sección

EN EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL……….

Camino………..

A treinta y tres estudiantes (78.6%) les fue muy bien en la mayoría de ejercicios que hay en el camino. Muchos ubicaron correctamente las cifras según el valor posicional en el desarrollo de las operaciones (ver Figura 57). Los estudiantes que no obtuvieron el resultado correcto (21.4%) se debió, generalmente, a la realización de malos cálculos en varias operaciones.

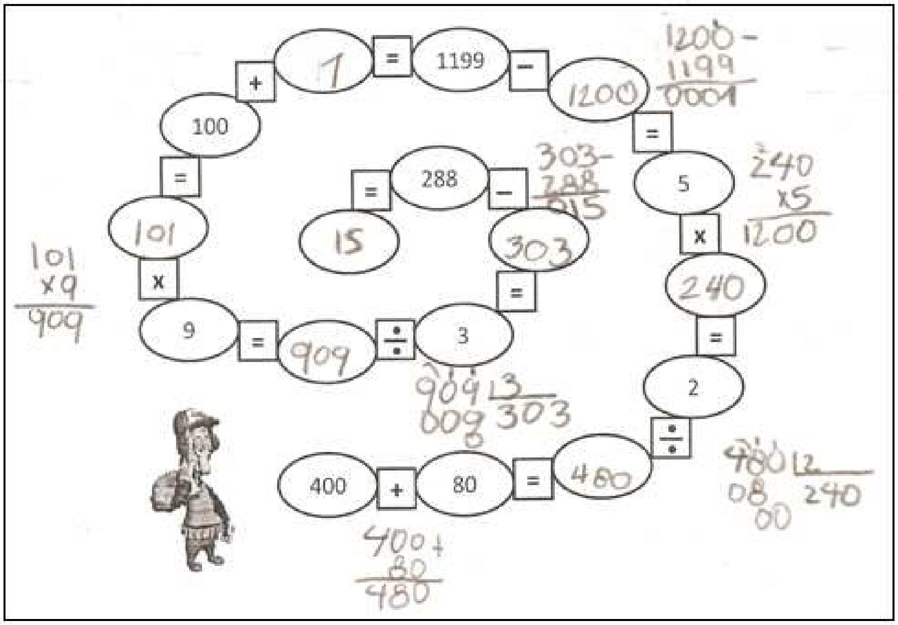


Figura 57. Respuesta de la actividad de la segunda sección por un estudiante (Taller Nº 4).

En general, se puede decir que los estudiantes estuvieron muy atentos, se dieron cuenta de la importancia del proceso correcto para efectuar una operación. Lograron profundizar más en las nociones acerca del sistema de numeración decimal como la obtención de unidades de orden superior: decenas, centenas, unidades de mil, etc. en el algoritmo de la resta “prestando”. Otros aspectos importantes fueron la concepción de que la multiplicación se representa como una suma repetida y la identificación de las partes de la suma y la resta.

Terminado esta actividad, los estudiantes resolvieron las dos preguntas que se encuentran al final del taller. Las siguientes fueron las respuestas de algunos estudiantes (ver Figura 58):

¿Te gustó trabajar con el sistema maya? ¿Por qué?
Si por q' es chebre
¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división?
Si

¿Te gustó trabajar con el sistema maya? ¿Por qué?
Si porque es muy fácil
¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división?
un poco

¿Te gustó trabajar con el sistema maya? ¿Por qué?
Si Porque Apredo esos numeros
¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división?
Si

¿Te gustó trabajar con el sistema maya? ¿Por qué? Si
Poq que es muy divertido
¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división? Si

Figura 58. Respuestas de cuatros estudiantes en las dos preguntas al final del Taller Nº 4.

A los estudiantes les gustó mucho la didáctica del aprendizaje de la aritmética maya. Solo muy pocos, no deleitaron esta temática por la razón de que les pareció confuso, no obstante, les ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales en el sistema decimal (ver Figura 59).

¿Te gustó trabajar con el sistema maya? ¿Por qué? por que me confundo un poco mas omenos
¿El sistema maya te ayudó a realizar mejor las operaciones fundamentales como son la suma, la resta, la multiplicación y la división? Si

Figura 59. Respuesta de un estudiante en las dos preguntas al final del Taller Nº 4.

Finalizando este capítulo, se concluye que la motivación escolar es un proceso que depende del interés y esfuerzo no solo del estudiante sino también del maestro. Es necesario que el maestro reflexione, experimente y valide sus técnicas motivadoras del aprendizaje, y examine los resultados positivos y las condiciones en que estos se producen para que pueda hacer uso de estas técnicas cuando necesite y crea conveniente, y así producir un clima de aprendizaje óptimo y favorable para los estudiantes; como se evidenció en el entusiasmo de los niños de cuarto grado con la nueva numeración para realizar operaciones fundamentales de la aritmética, en donde les pareció algo enriquecedor y fascinante.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES

A través de la integración de la historia de la cultura maya en la educación matemática, se tuvo la oportunidad de acceder a la creación matemática de esta cultura. De este modo, se generó un ambiente optimista fomentando pensamientos positivos en los estudiantes hacia la matemática, descubriendo que la creatividad y el esfuerzo humano juegan un papel fundamental en el quehacer matemático. Por otro lado, la aritmética maya repercutió en los estudiantes la formación de conceptos y significados de cada una de las operaciones fundamentales, no solo en el sistema de numeración maya sino también en el sistema decimal.

La experiencia didáctica constituyó un ejemplo del uso de la historia de la matemática maya llevada al aula de clase, indicando la forma como puede dinamizarse la enseñanza de ella, a pesar de la existencia de factores inherentes al proceso educativo como son los ritmos de aprendizaje, la problemática social y cultural, entre otros. A continuación, se plasma las habilidades y debilidades en cuanto al desarrollo y evolución de los estudiantes ante un tema nuevo:

> La representación gráfica (tableros hechos por los estudiantes en sus talleres) como habilidad de solución, brinda a los niños herramientas para comprender, interpretar y analizar las operaciones aritméticas en el sistema maya. Cuando los niños dibujan explican con claridad sus ideas, pues lo hacen a través de un lenguaje que para ellos es familiar.
>
> Una herramienta útil para modelar, observar y realizar con mayor exactitud y rapidez, el conocimiento y el análisis realizado para dar solución a una operación aritmética en el sistema maya, es el material recreativo. Esta es exitosa cuando los niños logran percibir característicamente los procesos y las reglas que deben seguir en el desarrollo de una operación.

Los niños fueron muy curiosos, mostraron una gran facilidad para el auto-aprendizaje, por ende, generó motivación y despertó el interés hacia algo que ellos nunca habían visto: la aritmética maya; y más aún que trató de una actividad didáctica con un tablero, palos de paleta, fríjoles y conchas hechas en papel, en los que interactuaron fácilmente.

La aritmética maya permite al niño comprender, de manera propia, el algoritmo de cada operación fundamental, especialmente el de la multiplicación y división en el sistema maya, y con base en esto, el niño asimila mejor estos algoritmos en el sistema decimal. En este aspecto, Arias (1986, p. 92) resalta la importancia del significado de los procedimientos al realizar una operación: *"Un cambio en la enseñanza de la matemática busca minimizar la memorización y hacer énfasis en el «Por qué» los procedimientos aritméticos funcionan"*.

El olvido fue la principal característica que provocó el bloqueo en algunos niños durante el desarrollo de las actividades, causando al mismo tiempo desaciertos en las respuestas; pero esto se va superando a medida en que los niños perfeccionan con la práctica, aunque no desaparece del todo.

Los estudiantes hacen buen uso tanto del sistema decimal como el maya a la hora de realizar una operación en este último sistema. Con esto, demuestran agilidad y empeño por aprender, donde logran relacionar los símbolos matemáticos, y se apropian de los conceptos de suma, resta, multiplicación y división de una manera natural.

El proceso de la división maya les pareció un poco confuso a algunos estudiantes, probablemente se le atribuyó al hecho de que el tiempo dado para darlo a conocer fue muy corto, ya que el tema de la aritmética maya no hace parte del currículo de la educación básica primaria y secundaria en el área de matemáticas.

Los niños que le temen a la forma como regularmente les enseñan el procedimiento de cada una de las operaciones fundamentales en el sistema decimal, encuentran en la aritmética maya una salida al miedo y a las dificultades, aumentando su confianza en la lectura y escritura de los números, así como también en los cálculos realizados.

El uso del material didáctico como el tablero, permitió modelar la orientación en la posición de los niveles de los numerales mayas, ya que refleja la estructura de la concepción de los algoritmos, y consecuentemente, facilitó a los estudiantes a usar la estructura de representación para construir un modelo mental de dichas concepciones.

Frente a todas las habilidades y debilidades que dispone el niño, se considera importante presentar mediante esta investigación diferentes reflexiones en la labor del maestro para que pueda construir una enseñanza y aprendizaje significativos. Es importante crear actividades que sean agradables y no se encuentren fuera del contexto del niño, y asegurar que cada niño tenga el máximo provecho de sus actividades, como afirma PSNANLM (1986, p. 48): *"El educador debe preguntarse cuáles son los ejercicios que hay que inventar, cuáles son las nuevas situaciones que es necesario crear, cuáles son las nuevas experiencias que es necesario permitir al niño para que comprenda y triunfe"*.

Es necesario que brindemos la oportunidad a los niños de explicar sus estrategias a la hora de efectuar una operación, dado que a veces no son minuciosos en el desarrollo y presentación de las mismas, por esta razón si no damos oportunidad para brindar este espacio, no conoceremos sus procesos de razonamientos. Además, al permitirles expresar sus ideas, interactúan con sus compañeros y con el maestro, y así los niños podrán transformar y construir nuevas herramientas de solución.

Como bien es sabido, los niños a menudo olvidan las reglas que rigen los algoritmos en el sistema decimal; frente a este caso, se considera que si el maestro las introduce de tal modo que ellas puedan hacer una conexión con la aritmética maya, estos algoritmos serían más sencillos de recordar; es decir, si el maestro conoce la aritmética maya, este tema puede servir como punto de partida para ofrecer un aprendizaje significativo frente a los algoritmos que propone el currículo educativo.

Se observó que los niños encuentran una actitud abierta al cambio, creativa, de descubrimiento y de aprendizaje continuo, y especialmente, una actitud motivadora por aprender matemáticas. Por esta razón, se considera importante que el maestro permita la implementación de la aritmética maya en los últimos grados de la básica primaria, como fuente de motivación; y así, el niño progresivamente pueda relacionarla con la aritmética tradicional. Se considera que la experiencia que se vivió en el aula pueda enriquecer la metodología empleada normalmente por el maestro, ya que, como se mostró, es útil la realización de talleres que aborden esta temática, en los que los estudiantes pueden sentirse identificados realizando actividades que no carecen de sentido para ellos.

Es así como esta investigación resalta la importancia que el maestro debe dar a la aritmética maya como una forma lúdica, de ideas, diversión, enriquecimiento personal y recreo intelectual para aprender y reforzar la suma, la resta, la multiplicación y la división en primaria; y de esta manera el niño cultive satisfacción y deleite por las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, C. (1986). *Pedagogía de la matemática.* Bucaramanga, Colombia: Ed. UIS.

Baroody, A. (2000). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para los maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. (Sánchez, G. Trad.). Madrid, España: Ed. Visor Distribuciones. (Trabajo original publicado en 1988).

Ca*pítulo1: Aritmética Maya.* (s.f.). pp. 10, 14. Recuperado el 26 de septiembre de 2008, de http://www.matematicaparatodos.com/varios/mayas01.pdf

Castañeda, S. (1996). *La historia de las matemáticas como instrumento didáctico.* Tesis de grado de Especialización en Educación Matemática no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Díaz, R. (2006, diciembre). Apuntes sobre la aritmética Maya. *Educere*, *10*, (*35*), 621-627. Recuperado el 26 de septiembre de 2008, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1316-49102006000400007&script=sci_arttext

Guirao, P. (1989). *El enigma de los mayas: una civilización superior en la América Pre-colombina.* Barcelona, España: Ed. Libroxprés.

Hammond, N. (1986, octubre). El nacimiento de la civilización maya. *Investigación y Ciencia,* (*121*), 90-100.

Lam, E., Magaña, L., & Oteyza, E. (2005). *Puntos, rayas y caracoles. Matemáticas rápidas y divertidas con ayuda de los mayas*. 1ª ed. Ciudad de México, México: Ed. Distribuciones Litoral, S.A.

Martínez, J. (2007). *Las matemáticas precolombinas como recurso pedagógico*. Tesis de grado de Licenciatura en Matemáticas no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Mendoza, J. (2000). *Evolución histórica de la notación matemática.* Tesis de grado de Licenciatura en Matemáticas no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

MEN, Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ed. Libros & Libres S.A.

Múnevar, R., Quintero, J., & Yepes, J. (2006). *¿Qué significa aula investigativa?* Recuperado el 2 de octubre de 2008 de http://www.educrea.cl/documentacion/articulos/aprendizaje/13_aula_investigativa_construir_saber_pedagogico.html

Ospina, A. (2001). *El legado maya. Los aportes de un pueblo sorprendente a las matemáticas y la astronomía.* Bogotá, Colombia: Ed. Planeta Colombiana S.A.

Poveda, S., & Alemán, J. (2006). *Matemática Maya: operaciones fundamentales en la aritmética maya*. Tesis de grado del Departamento de Matemática no publicada. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Recuperado el 8 de septiembre de 2008, de *www.galeon.com/profedemateyfisica/matematicamaya.doc*

Primer Seminario Nacional sobre “Aprendizaje de Nociones Lógico-Matemáticas”. (1986). Bogotá, Colombia: Ed. Guadalupe LTDA.

Thornton, S. (1998). *La resolución infantil de problemas.* Madrid, España: Ed. Morata.