

DIGRAFOS LOCALMENTE TRANSITIVOS

JUANA STELLA FUENTES GAMBOA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS
BUCARAMANGA

2004

DIGRAFOS LOCALMETE TRANSITIVOS

JUANA STELLA FUENTES GAMBOA

Monografía presentada como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Sofía Pinzón Durán

Directora

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2004

Agradecimientos

Mis mas profundos agradecimientos:

- A mi madre, quien con esfuerzo y sacrificio confió en mi y me brindo su apoyo incondicional;
- A mi padre, a quien admiro por su gran inteligencia, capacidad y esfuerzo por salir adelante;
- A Fabián, mi apoyo incondicional y sin el cual no hubiera sido posible este gran logro;
- A mi directora Sofía, por su gran calidad humana e intelectual y por su colaboración;
- A mis hermanas, quienes han sacrificado muchas cosas para que yo alcanzara la meta que me propuse;
- A mi abuela Juana, quien desde el cielo nunca me ha desamparado;
- A Isnardo Arenas por su colaboración en la realización del programa, por su compañerismo y su disposición para siempre ayudarme;
- A mis profesores por sus enseñanzas, en especial a Rafael Issacs por su aprecio y calidad humana;

- A quienes de una forma u otra me colaboraron para dar este gran paso de mi vida;
- A Colciencias, por brindarme los medios para el desarrollo de la monografía.

TÍTULO: DIGRAFOS LOCALMENTE TRANSITIVOS*

AUTOR: JUANA STELLA FUENTES GAMBOA**

PALABRAS CLAVES: Grafos
Digrafos
Isomorfismo
Localmente transitivos
Subdigrafo
Nauty

DESCRIPCIÓN:

Un grafo simple es un par $G=(V,A)$ donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y A es un conjunto de pares ordenados de elementos de V llamados aristas (ordenados o no ordenados). En particular un dígrafo simple, aquí lo llamaremos simplemente dígrafo, es un grafo simple dirigido, es decir las aristas son pares de vértices ordenados. Los dígrafos localmente transitivos son nuestro tema central y calcular específicamente cuantos de estos dígrafos existen para un determinado número de vértices, en la tesis doctoral de la Profesora Sofía Pinzón aparece el cálculo para $n=2,3,4$, nuestro objetivo es calcularlos para 5 vértices.

La condición para que un digrafo sea localmente transitivo es que no contenga alguno de los seis 4-digrafos que aparecen en la figura 4.5, para ello nuestro primer trabajo consistió en encontrar las clases de isomorfismos existen para 5 vértices para lo cual estudiamos el programa Nauty del profesor Brendan McKay de la Universidad de Australia y que es de uso libre y plataforma Unix. Luego por observación clasificamos cuales eran o no localmente transitivos.

Un ejemplo de digrafos son los torneos, los cuales se han estudiado ampliamente. La inquietud que nos queda es si es posible encontrar una fórmula como la que existe para los torneos localmente transitivos.

* Monografía

** Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Pinzón Sofía.

TITLE: LOCALLY TRANSITIVE DIGRAPHS*

AUTHOR: JUANA STELLA FUENTES GAMBOA**

KEY WORDS: Graphs
Digraphs
Isomorphism
Locally transitive
Subdigraph
Nauty

DESCRIPTION:

A simple graph is a pair $G=(V,A)$ where V is a non empty set of elements called vertexes and A it is a set of orderly couples of elements of V called edges (orderly or not orderly). In particular a simple digraph, here we will simply call it digraph, is a directed simple graph, that is edges are pairs of ordered vertexes. Locally transitive digraphs is our central topic and calculate how many of these digraph specifically exists for a certain number of vertexes, Sofía Pinzón's doctoral thesis calculation appears for $n=2,3,4$, our objective is to calculate them for 5 vertexes.

The condition for a digraph be locally transitive is that it doesn't contain some of the six 4-digraph that appear in the Figure 4.5, for that our first work consisted on finding the isomorphism classes that exist for 5 vertexes for that we study Brendan McKay's program Nauty, it is free use and platform Unix. Then for observation we classify which were or not locally transitive.

One example of digraphs are the tournaments, which have been studied thoroughly. We direct still let question about if it is possible, in the digraphs case, to find a formula like the one that exists for the locally transitive tournament.

* Monograph.

** Faculty of sciences. Department of mathematics. Licentiate in mathematics. Pinzón Sofía.

Introducción

Un digrafo es un grafo orientado finito. Esto es, un digrafo es un par $\mathcal{G} = (V, A)$, donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas orientadas que unen pares de vértices de V . El tema central de esta monografía es la noción de digrafo localmente transitivo, la cual fué introducida en [PI] en el contexto de la geometría diferencial y específicamente relacionada con un cierto tipo de estructuras diferenciales definidas sobre variedades bandera; eliminando este contexto, resta un problema interesante dentro la teoría de grafos: calcular la cantidad de digrafos localmente transitivos que existen dado el número de vértices del digrafo. Un ejemplo de digrafos son los torneos, o sea, los digrafos completos, Brouwer en [BRO] demuestra que la cantidad de torneos localmente transitivos con n vértices es dada por la siguiente fórmula:

$$\sum_{d|n} \left(\frac{2^{d-1}}{d} \text{odd}\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{e|\frac{n}{d}} \frac{\mu(e)}{e} \right), \quad (1)$$

donde μ es la función de Möbius y $\text{odd}(j)$ es 1 o cero dependiendo si j es impar o par, respectivamente. En [PI] fue caracterizada la condición para un digrafo ser localmente transitivo, y esta fue que el digrafo no posea como subdigrafo alguno de los 6 cuatro-digrafos que aparecen en la Figura 4.5, así por ejemplo, se muestra que para $n = 2, 3, 4$ existen 2, 7, 36 clases de isomorfismos de digrafos localmente transitivos respectivamente, donde n corresponde al número de vértices del grafo dado. Hasta

el momento no existe una fórmula para calcular la cantidad de digrafos localmente transitivos, así que nuestro trabajo principal, en esta monografía fue calcular las clases de isomorfismo de digrafos localmente transitivos cuando $n = 5$. Al comienzo parece una ardua tarea si se piensa que existen $3^{\binom{5}{2}}$. Afortunadamente pudimos contar con la ayuda del programa Nauty, este programa diseñado en lenguaje C moderno por el profesor Brendan McKay de la Universidad Nacional de Australia y de libre uso fue de gran utilidad. Primero fue necesario dedicar un tiempo considerable para entender como funcionaba este programa y en que forma podría ser de utilidad en este trabajo. Nauty es una herramienta bastante eficaz en el estudio de isomorfismos entre grafos, cálculo de clases de isomorfismo, entre otras.

Con este programa fue posible calcular la cantidad de clases de isomorfismo para $n = 5, 6, 7$, (vea la Figura 45) a partir de $n = 8$ no fue posible hacer los cálculos debido a falta de recursos necesarios, (un computador con mejores especificaciones de las existentes).

Luego entraremos a estudiar más específicamente algunos conceptos sobre digrafos y para ello también utilizaremos algunas aplicaciones del programa Nauty.

Para poder entender esta noción empezaremos con una breve reseña histórica de la teoría de grafos, algunas definiciones importantes sobre grafos las cuales están acompañadas por ejemplos sencillos que las ilustran y ayudan a comprenderlas mejor. Para el estudio de algunas definiciones de grafos haremos uso del programa Nauty el cual es una herramienta muy eficaz en el estudio de isomorfismos entre grafos, cálculo de clases de isomorfismo, entre otras.

Luego entraremos a estudiar más específicamente algunos conceptos sobre digrafos y para ello también utilizaremos algunas aplicaciones del programa Nauty.

Por último presentaremos la clasificación de los digrafos localmente transitivos para n -digrafos, con $n \leq 5$.

Esta monografía se desarrollo dentro del proyecto de investigación: Geometría de variedades homogéneas asociadas a grupos semisimples complejos, financiado por Colciencias.

ÍNDICE GENERAL

1. Problemas típicos de la teoría de grafos	1
1.1. Los siete puentes de Königsberg	2
1.2. Teorema de los 4 colores	3
1.3. Redes eléctricas	5
1.4. Isómeros químicos	6
1.5. Alrededor del mundo	8
1.6. Las casas de campo de los 3 hermanos	9
1.7. Teoría de grafos en el siglo XX	10
2. Preliminares	13
2.1. Relaciones	13
2.1.1. Propiedades de las Relaciones	15
2.2. Grafos	16
2.2.1. Generalidades	16
2.2.2. Grafos Eulerianos	20
2.2.3. Grafos Hamiltonianos	21
2.2.4. Grafos Completos	22
2.2.5. Árboles	22
2.2.6. Grafos bipartitos	23

2.2.7. Grafos isomorfismos	24
3. Digrafos	30
3.1. Propiedades de los digrafos	31
3.2. Matriz de Adyacencia	35
3.3. Digrafos Eulerianos	38
3.4. Digrafos Hamiltonianos	39
3.5. Isomorfismos	39
3.5.1. Clases de isomorfismos	45
4. Digrafos localmente transitivos	46
A. Digrafos para $n=5$	51

ÍNDICE DE FIGURAS

- 1.1. Los 7 puentes de Königsberg 2
- 1.2. Grafo correspondiente a los 7 puentes de Königsberg 3
- 1.3. Mapa coloreado de Sur América 5
- 1.4. Red Eléctrica 6
- 1.5. Grafo y árbol correspondiente al circuito 6
- 1.6. Isómeros para $n = 1$ y 2 para $n = 4$ 7
- 1.7. Isómeros para $n = 5$ y $n = 6$ 8
- 1.8. Grafo del juego alrededor del mundo 9
- 1.9. Diseño de Diego y Pablo 10
- 1.10. Mapa de las actividades y grafo de las relaciones interpersonales 11

- 2.1. Ejemplo de grafo simple 17
- 2.2. Grado de un vértice 17
- 2.3. Grafos conexo y desconexo 19
- 2.4. Grafo euleriano 20
- 2.5. Grafo semieuleriano y grafo noeuleriano 21
- 2.6. Grafos no hamiltoniano, semihamiltoniano y hamiltoniano 22
- 2.7. k_4 y k_5 22
- 2.8. Árbol 23

2.9. Grafo bipartito	23
2.10. Grafos isomorfos	24
3.1. Ejemplo de digrafo	31
3.2. Digrafo irreflexivo	32
3.3. Digrafo asimétrico	32
3.4. Digrafo transitivo	32
3.5. Grado de salida y grado de entrada de un vértice	33
3.6. Digrafo	34
3.7. 3 subdigrafos	34
3.8. Torneos para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ vértices	35
3.9. Digrafos conexo y fuertemente conexo	37
3.10. Digrafo no relativamente conexo	38
3.11. Digrafos no euleriano, euleriano y semieuleriano	38
3.12. Digrafos semihamiltoniano, hamiltoniano y no hamiltoniano	39
3.13. Digrafos homomorfos	40
3.14. Digrafos isomorfos	41
4.1. Digrafo	47
4.2. Digrafo $\mathcal{G}^-(c)$ y $\mathcal{G}^+(e)$	47
4.3. Clases de isomorfismos para $n = 3$	48
4.4. Digrafos localmente transitivos para $n = 4$	48
4.5. Digrafos no localmente transitivos para $n = 4$	49

CAPÍTULO 1

Problemas típicos de la teoría de grafos

La teoría de grafos ha sido considerada un área de la matemática aplicada, la más temprana mención de este asunto ocurre en los trabajos de Euler sobre los siete puentes de Königsberg, sin embargo el problema original era considerado como un rompecabezas algo frívolo, el cual surgió de inquietudes reales de los pobladores de dicha ciudad. Subsecuentes redescubrimientos de la teoría de grafos por Kirchhoff y Cayley también tuvieron sus raíces en el mundo físico, las investigaciones de Kirchhoff sobre redes eléctricas, llevaron al desarrollo de conceptos básicos y teoremas concernientes a árboles, mientras Cayley consideró los árboles desde la enumeración de isómeros en química orgánica. Otro enigma propuesto por Sir William Hamilton sobre grafos fue un juego llamado Alrededor del mundo, el cual no tuvo mucho éxito. Detrás de esto, la famosa Conjetura de los cuatro colores vino en prominencia y ha sido desde entonces notorio el interés despertado entre la comunidad matemática. En el siglo pasado, hubo grandes descubrimientos de teoría de grafos que sólo mencionaremos brevemente en la siguiente reseña histórica.

1.1. Los siete puentes de Königsberg

Euler(1707-1782) se convirtió en el padre de la teoría de grafos así como el de la topología, cuando en 1736 estableció que el famoso problema de los siete puentes de Königsberg no tenía solución. Esta ciudad estaba conectada por siete puentes con dos islas ubicadas sobre el Río Pregel como se muestra en la Figura 1.1. El problema consistía en atravesar los siete puentes una y solo una vez regresando al punto de partida. Empíricamente se puede intentar resolver este problema, pero todos los esfuerzos serán infructuosos.

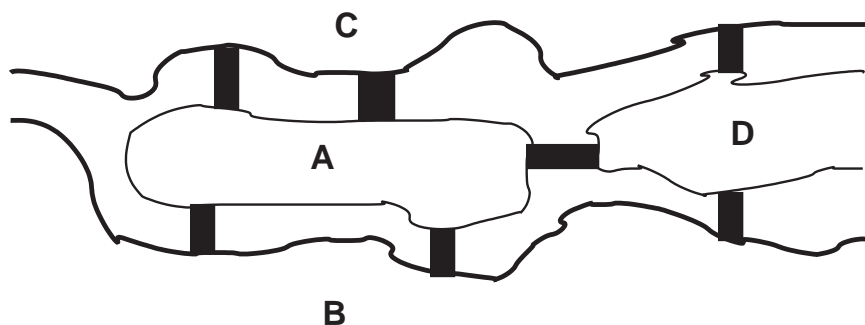


Figura 1.1: Los 7 puentes de Königsberg

Para demostrar que el problema no tiene solución, Euler reemplazó cada porción de tierra por un punto y cada puente por una línea que une los puntos correspondientes, produciendo así un grafo (ver Figura 1.2), donde los puntos representan las cuatro regiones de tierra de la Figura 1.1. Decir que el problema es irresoluble, o que el grafo no es atravesable es equivalente a mostrar que el grafo de la Figura 1.2 no puede dibujarse de forma continua sin repasar alguna línea.

En lugar de tratar esta situación específica, Euler generalizó el problema y desarrolló un criterio para saber si un grafo dado puede ser atravesable: a cada punto debe incidir un número par de líneas, además, si en el grafo hay solamente dos puntos en los que incida un número impar de líneas el grafo se puede recorrer partiendo de uno de estos puntos y terminando en el otro. Observamos que en el grafo de la Figura 1.2

en cada punto el número de líneas incidentes no es par y además existen mas de dos puntos en los que el número de líneas incidentes es impar por lo tanto no es posible realizar la travesía propuesta.

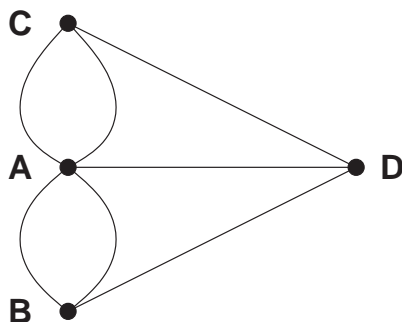


Figura 1.2: Grafo correspondiente a los 7 puentes de Königsberg

1.2. Teorema de los 4 colores

En un plano o en una esfera no se necesitan mas de cuatro colores para colorear un mapa de manera que dos regiones vecinas, es decir, que compartan una frontera y no únicamente un punto, no queden coloreadas del mismo color.

El teorema de los cuatro colores tiene una interesante historia, pero su origen permanece algo vago. Los cartógrafos renacentistas sabían ya que les bastaban cuatro colores para iluminar sus mapas de manera que dos países vecinos quedaran iluminados de distinto color. Ha habido informes de que Möebius estaba familiarizado con este problema en 1840, pero sólo está definido que el problema fue comunicado, aproximadamente en 1850, a Augustus De Morgan por Frederick Guthrie a quien su hermano Francis se le ocurrió que este hecho tenia que ver con matemáticas e intuyó podía ser demostrado. De Morgan no pudo solucionarlo pero le pareció interesante enviarlo a Sir William Hamilton, quien no lo considero muy interesante, pero en realidad no se sabe si es que no pudo resolverlo o solo le pareció intrascendente.

El problema de los cuatro colores se hizo tan famoso en el medio matemático, que en 1878 el matemático inglés Arthur Cayley lo propuso oficialmente a la Sociedad Matemática de Londres, una de las sociedades de matemáticos más importantes del mundo en esa época. La primera de muchas pruebas erróneas de la conjetura fue entregada por Kempe en 1879. La conjetura fue demostrada por Ore y Stemple para todos los mapas con menos que 40 países.

Con el paso de los años se logro demostrar dos cosas fundamentales:

1. Tres colores son insuficientes para colorear cualquier mapa.
2. Con cinco colores se puede colorear cualquier mapa correctamente.

En 1976 dos matemáticos de la Universidad de Illinois de Estados Unidos, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, usando una computadora Cray de segunda generación, analizaron 1900 tipos distintos de mapas. La computadora tardó 1200 horas y para todos los mapas encontró una coloración en la que se usaban únicamente cuatro colores. Aunque muchos matemáticos aceptaron esto como prueba irrefutable, muchos otros argumentaron que eso no era una demostración matemática.

La discusión continuo, hasta que en 1996, los matemáticos Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas, de la Escuela de Matemáticas del Instituto de Georgia, en Estados Unidos, publicaron una demostración, aparentemente correcta, ya que hasta el momento nadie la ha refutado.

A continuación un ejemplo sencillo de este teorema:



Figura 1.3: Mapa coloreado de Sur América

1.3. Redes eléctricas

Kirchoff desarrolló la teoría de árboles en 1847 para resolver sistema de ecuaciones lineales simultáneas de una red eléctrica que transporta corriente en cada rama del circuito. Aunque era físico, pensaba como matemático, al abstraer una red eléctrica con condensadores, resistencias, inductancias, etc., reemplazándola por una correspondiente estructura combinatorial consistente solo en puntos y líneas sin ninguna indicación del tipo de elemento, el cual es representado mediante líneas individuales.

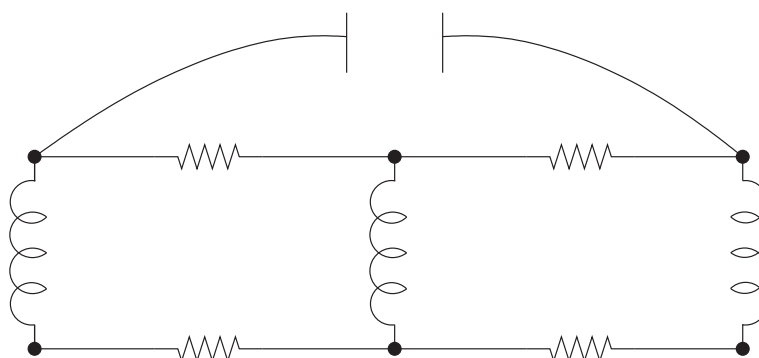


Figura 1.4: Red Eléctrica

Así, en efecto, Kirchoff reemplazó cada red eléctrica por un grafo asociado y mostró que no es necesario considerar cada ciclo en el grafo separadamente de una red eléctrica para resolver el sistema de ecuaciones, en cambio él señaló una simple pero poderosa construcción que se ha vuelto procedimiento normal: los ciclos independientes de un grafo determinado por cualquiera de sus “árboles generadores” será suficiente, es decir, del grafo correspondiente a la red eléctrica se puede extraer un “árbol generador” que proporciona un sistema de ecuaciones linealmente independientes que son suficientes para resolver el circuito.

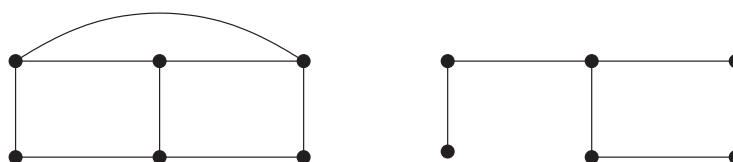


Figura 1.5: Grafo y árbol correspondiente al circuito

1.4. Isómeros químicos

En 1857, Cayley descubrió una clase importante de grafos, los llamados árboles. Al enumerar los isómeros de los hidrocarburos saturados C_nH_{2n+2} , donde n es el número

de átomos de carbono. Los primeros términos de la serie no presentan ninguna complicación, sin embargo, a partir de $n = 4$ surge el llamado isomerismo. Este fenómeno consiste en que dos sustancias cuyas moléculas tienen igual número de átomos de cada elemento pueden presentar diferentes características fisicoquímicas. La explicación del isomerismo se basa en que la estructura geométrica (o distribución de los átomos en el espacio) de las respectivas moléculas es diferente. Es decir, con el mismo número de átomos de carbono e hidrógeno, son posibles dos estructuras moleculares diferentes. Para el caso $n = 4$ se tiene dos isómeros como se aprecia en la Figura 1.6.

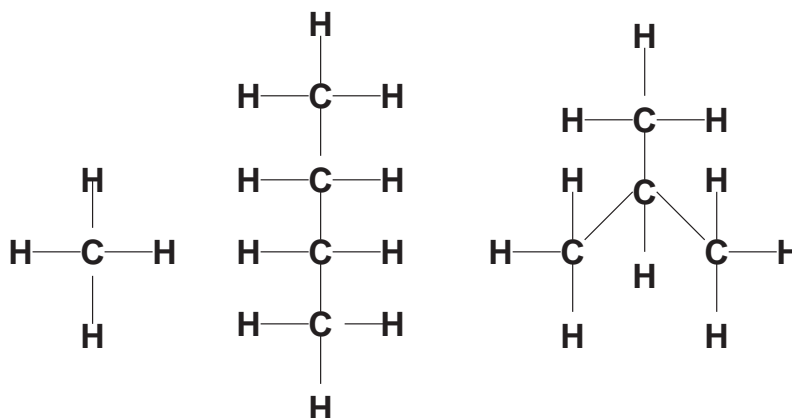


Figura 1.6: Isómeros para $n = 1$ y 2 para $n = 4$

La dificultad radica en que al aumentar el número de carbonos aumenta el número de isomerismos, entonces lo esencial es la configuración adoptada por estos con sus enlaces de hidrógeno respectivos. Las configuraciones que se obtienen son tipos especiales de grafos que se denominan árboles. Por lo tanto, el problema de catalogar isómeros de hidrocarburos parafínicos se reduce a contar árboles. Para simplificar, se omiten los átomos de hidrógeno y los de carbono se simbolizan por puntos como se observa en la Figura 1.7 para las posibles configuraciones de $n = 5$ y $n = 6$.

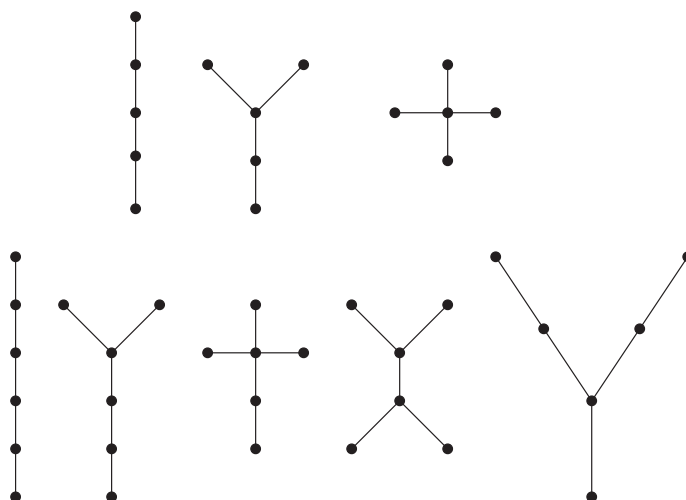


Figura 1.7: Isómeros para $n = 5$ y $n = 6$

1.5. Alrededor del mundo

El juego inventado por Sir William Hamilton en 1859 usando del dodecaedro cuyos 20 vértices son etiquetados con los nombre de ciudades famosas. El juego fue llamado “alrededor del mundo” y consiste en encontrar un circuito que contenga todos los vértices. Hamilton vendió su idea a una marca de juegos por 25 guineas, esto fue un movimiento astuto ya que el juego no fue un éxito financiero.

En términos de grafos, el objetivo del juego es encontrar un circuito en el grafo del dodecaedro mostrado en la Figura 1.8. Los vértices del grafo que están marcados con $1, 2, \dots, 20$ (en lugar de Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapest, Dublin, Edinburgo, Jerusalem, Londres, Melbourne, Moscú, Novosibirsk, Nueva York, Paris, Pekin, Praga, Rio de Janeiro, Roma, San Francisco, Tokio y Varsovia), así la existencia del circuito es evidente.

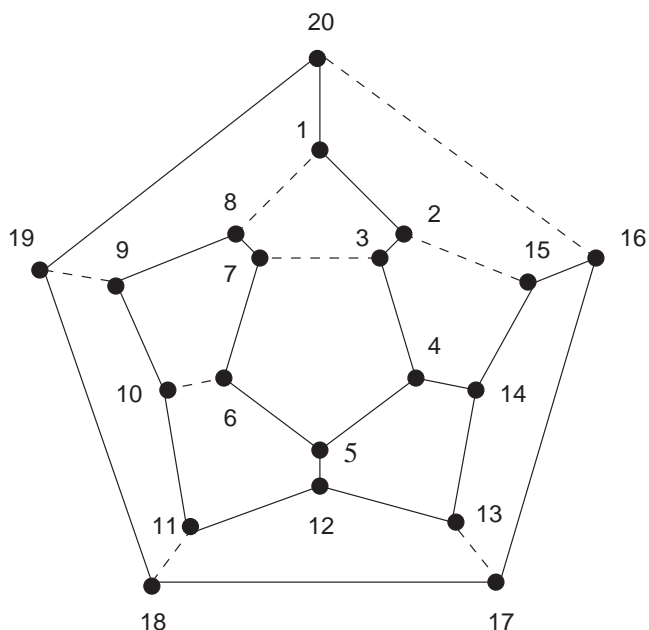


Figura 1.8: Grafo del juego alrededor del mundo

1.6. Las casas de campo de los 3 hermanos

Pablo, Diego y Fernando son 3 hermanos a los cuales les gusta salir de campo los fines de semana para alejarse del trajín de la ciudad y la falta de espacio. Adquieren una parcela a las afueras de la ciudad en una zona rural no muy distante y se proponen construir tres casas de campo para sus respectivas familias.

La primera dificultad del proyecto es que las tres empresas (agua, luz y teléfono) les comunica que solo puede colocar una conexión por parcela, pero que no hay inconveniente en que ellos subdividan la conexión. No hay problema dice pablo, basta con que ubiquemos convenientemente las tres casa y los medidores, nadie nos obliga a que los conductores sean rectos, pueden ser curvos.

Al dibujar las conexiones siendo tres cuadrados la representación de las casas y 3 círculos la de cada uno de los medidores(Figura 1.9). Diego traza rápidamente 8 de las 9 conexiones necesarias, pero la novena se cruza siempre con alguna de las anteriores,

al cabo de un tiempo se da por vencido.

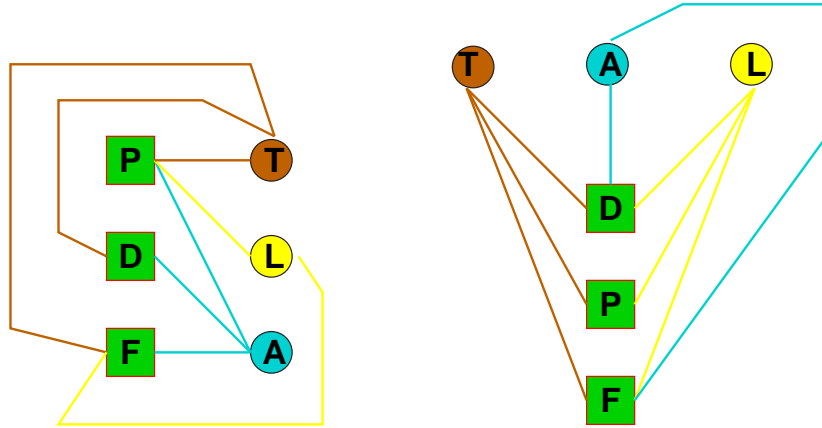


Figura 1.9: Diseño de Diego y Pablo

Pablo, el cual observó el procedimiento utilizado por Diego, dice, tu error consiste en la ubicación de los medidores, no es necesario que estén alineados en una fila paralela a la de las casas.

Pablo coloca ahora la fila de medidores perpendicular a la fila de casas e intenta dibujar las conexiones llegando al mismo punto que su hermano.

Creo que la dificultad, interviene Fernando, reside en limitar la conexión al plano, sin tener en cuenta que podemos hacerla en tres dimensiones. Bastará con hacer una de las conexiones eléctricas por el aire en vez de hacerla subterránea.

Pero, ¿será realmente posible resolver el problema sin salirse del plano?.

1.7. Teoría de grafos en el siglo XX

El psicólogo Lewin propuso en 1936 que el “espacio de vida” de un individuo puede ser representado por un mapa planar¹. En tal mapa, las regiones representarían las actividades varias de una persona, como su ambiente de trabajo, su casa, y sus aficiones.

¹Lewin solo usa mapas planares porque siempre dibujó sus figuras en el plano.

Esta teoría es representada con grafos como los mostrados en la Figura 1.10. Este punto de vista llevó a los psicólogos del Research Center for Group Dynamics a otra interpretación psicológica de un grafo, en el que las personas son representadas por puntos y las relaciones interpersonales por líneas. Tales relaciones incluyen amor, odio, comunicación, y poder. De hecho, fue precisamente este acercamiento el que llevó al autor a un descubrimiento personal de la teoría de grafos, ayudado e incitado por los psicólogos L. Festinger y D. Cartwright.

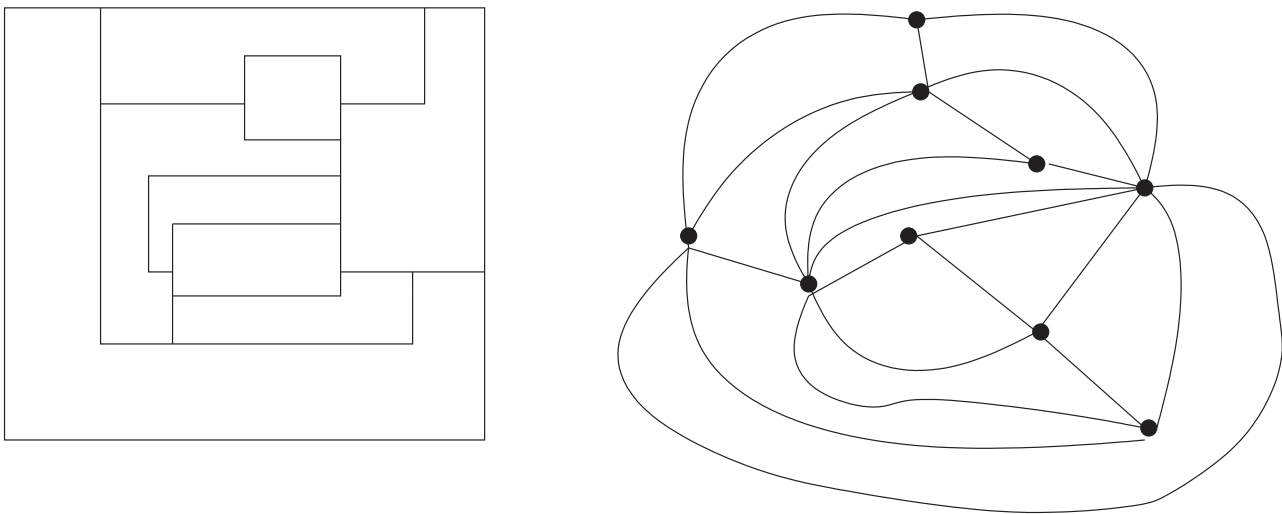


Figura 1.10: Mapa de las actividades y grafo de las relaciones interpersonales

El mundo de la física teórica descubrió la teoría de grafos más de una vez para sus propósitos, por ejemplo en el estudio de mecánica estadística por Uhlenbeck, los puntos simbolizan moléculas y dos puntos adyacentes indican la existencia de interacción de tipo físico, por ejemplo, atracción magnética o repulsión. En una interpretación similar por Lee y Yang, los puntos simbolizan cubos pequeños en el espacio euclidiano, donde cada cubo puede o no ser ocupado por una molécula. Entonces dos puntos son adyacentes siempre que ambos espacios estén ocupados.

El estudio de las cadenas de Markov, en la teoría de probabilidad, involucra grafos dirigidos en el sentido de que los eventos son representados por puntos, y una línea

dirigida de un punto a otro indica una probabilidad positiva de ocurrencia de un evento. Una cadena de Markov se define como una red con la suma de los valores de las líneas dirigidas de cada punto igual a 1.

En el rápido crecimiento en los campos de la programación lineal y la investigación operacional también se ha hecho uso de la teoría de grafos en el estudio de flujos en redes. Los puntos de un grafo indican posiciones físicas donde ciertos productos pueden guardarse o enviarse, y una línea dirigida de un lugar a otro, junto con un número positivo asignado a esta línea, indican la ruta de envío de productos y la cantidad máxima que puede ser enviada cada vez.

CAPÍTULO 2

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas de la teoría de grafos y explicaremos brevemente algunas aplicaciones importantes del programa Nauty[NA] en los grafos.

2.1. Relaciones

Definición 1. Si A y B son dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto de pares ordenados (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo 1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Ejemplo 2. Otro ejemplo que podemos considerar es si $A = B = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que también se escribe como \mathbb{R}^2 , es el conjunto de todos los puntos en un plano. El par ordenado (a, b) es un punto en el plano.

Definición 2 (Relación). Sean A y B conjuntos no vacíos. Una relación \mathcal{R} de A en B es un subconjunto de $A \times B$, es decir $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

Ejemplo 3. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ entonces

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

es una relación de A en B .

Si tenemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ y a está relacionada con b por \mathcal{R} lo denotaremos $(a, b) \in \mathcal{R}$ o $a\mathcal{R}b$, además si $A = B$ y $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ se dice que \mathcal{R} es una relación en A .

Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación de A en B , existen dos importantes conjuntos asociados con \mathcal{R} , el dominio de \mathcal{R} , el cual es el conjunto de los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B y el recorrido de \mathcal{R} , que es el conjunto de los elementos de B que están relacionados con algún elemento de A . El dominio de \mathcal{R} lo denotamos como $D(\mathcal{R})$ y el recorrido como $R(\mathcal{R})$.

Ejemplo 4. Sean A y B subconjuntos del conjunto de los números naturales. Se define la siguiente relación \mathcal{R} de A en B :

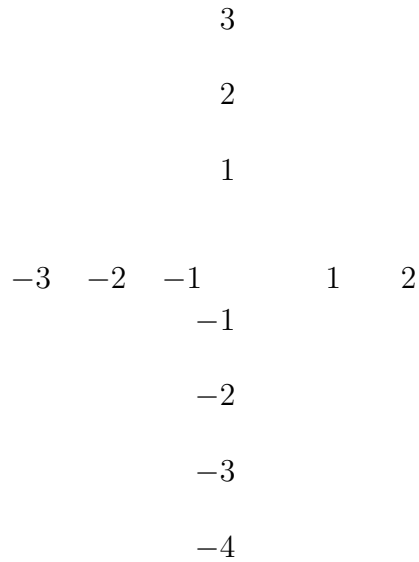
$$a\mathcal{R}b \text{ si y sólo si } a = b$$

Entonces $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (n,n)\}$ donde $n \in \mathbb{N}$, el $D(\mathcal{R}) = A = \mathbb{N}$ y $R(\mathcal{R}) = B = \mathbb{N}$

Ejemplo 5. Sean $A = B = \mathbb{R}$, se define la siguiente relación \mathcal{R} en A :

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } x \text{ y } y \text{ satisfacen la ecuación } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

El conjunto \mathcal{R} consta de todos los puntos en la elipse que se muestra en la siguiente figura:



El $D(\mathcal{R}) = [-2,2]$ y el $R(\mathcal{R}) = [-3,3]$.

2.1.1. Propiedades de las Relaciones

Sea A un conjunto no vacío y \mathcal{R} una relación en A , decimos que \mathcal{R} es:

Reflexiva: Si $(a, a) \in \mathcal{R}$, para todo $a \in A$.

Irreflexiva: Si $(a, a) \notin \mathcal{R}$, para toda $a \in A$.

Simétrica: Si se cumple que cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, a) \in \mathcal{R}$, para todo $a, b \in A$.

Asimétrica: Si se cumple que cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, a) \notin \mathcal{R}$, $\forall a, b \in A$.

Antisimétrica: Si se cumple que cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ entonces $a = b$, $\forall a, b \in A$.

Transitiva: Si se cumple que $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $(a, c) \in \mathcal{R}$, $\forall a, b, c \in A$.

Ejemplo 6. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ veamos algunas relaciones \mathcal{R}_i en A que cumplen las propiedades reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva:

$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (b, c), (a, d), (b, b), (d, a), (c, c), (d, d), (a, b)\}$ es reflexiva,

$\mathcal{R}_2 = \{(a, b), (a, c), (d, c), (b, d)\}$ es irreflexiva,

$\mathcal{R}_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c), (d, c), (c, d)\}$ es simétrica,

$\mathcal{R}_4 = \{(a, b), (c, d), (a, c), (b, d)\}$ es una relación asimétrica sobre A,

$\mathcal{R}_5 = \{(a, b), (c, b), (d, a), (c, d)\}$ es una relación antisimétrica sobre A y

$\mathcal{R}_6 = \{(a, b), (c, b), (d, c), (d, a), (d, b)\}$ es transitiva.

2.2. Grafos

2.2.1. Generalidades

Definición 3. Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consta de un conjunto finito no vacío V de elementos llamados vértices y A una familia finita de pares no necesariamente ordenados de elementos de V llamados aristas.

Obsérvese que el uso de la palabra “familia” permite la existencia de aristas múltiples. Un grafo es llamado simple, si no existen aristas múltiples.

Cuando una arista es un par ordenado (v_1, v_2) , se dice que es una arista dirigida; en caso contrario, se denomina arista no dirigida. En los diagramas, las aristas dirigidas se representan por flechas que indican su dirección, es decir si tenemos una arista (a, b) entonces la flecha sale del vértice a y termina en el vértice b , pero en el caso de las aristas no dirigidas la representación en el grafo del par $\{a, b\}$ se hace mediante una línea que une los dos vértices.

Ejemplo 7. Sea el grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{a_1 = \{a, b\}, a_2 = \{a, e\}, a_3 = \{b, e\}, a_4 = \{c, e\}, a_5 = \{c, d\}, a_6 = \{d, e\}$ y $a_7 = \{b, d\}\}$. Entonces \mathcal{G} se representa de la siguiente manera:

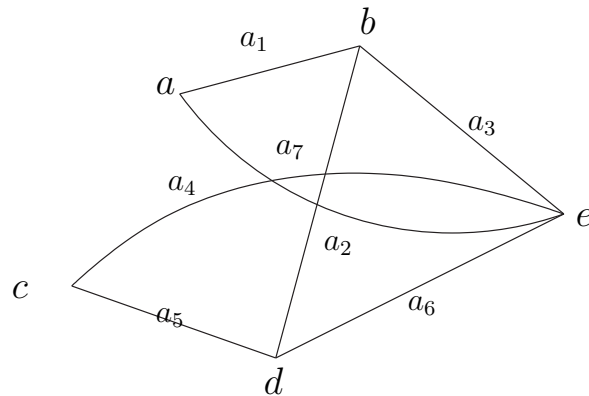


Figura 2.1: Ejemplo de grafo simple

Un grafo en el cual todas sus aristas son dirigidas se denomina grafo dirigido o digrafo; en caso contrario, se denomina grafo no dirigido o simplemente grafo, y en aquellos que hay aristas dirigidas y no dirigidas los llamamos grafos mixtos.

Se dice que dos vértices v, w son adyacentes si el grafo contiene una arista que los une, es decir existe la arista $\{v, w\}$, se dice también, que dicha arista es incidente en cada uno de estos dos vértices.

Definición 4 (Grado de un vértice). *En un grafo, el grado de un vértice v es igual al número de aristas que inciden en v , y lo notamos $\rho(v)$.*

Ejemplo 8. Veamos el grado de cada vértice del siguiente grafo:

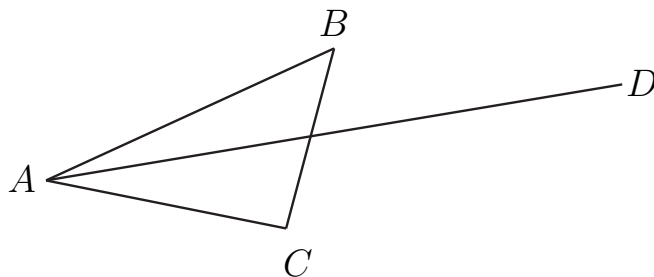


Figura 2.2: Grado de un vértice

El grado del vértice A es $\varrho(A) = 3$, $\varrho(B) = 2$, $\varrho(C) = 2$ y $\varrho(D) = 1$.

En lo que sigue denotaremos una arista (a, x_1) como ax_1 .

Definición 5 (Trayectoria en un grafo). Una trayectoria en un grafo \mathcal{G} del vértice a al vértice b es una sucesión finita de aristas de \mathcal{G} de la forma

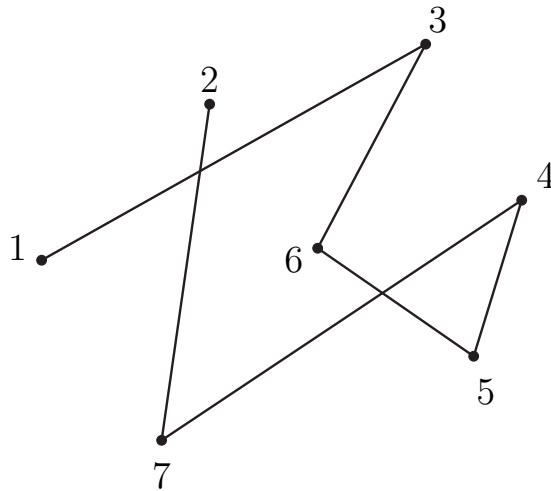
$$(ax_1), (x_1x_2), \dots, (x_{n-2}x_{n-1}), (x_{n-1}b).$$

Para resumir al escribir la trayectoria de a a b , la notaremos como:

$$a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, b.$$

La longitud de una trayectoria es el número de aristas que intervienen en la trayectoria. Una trayectoria de longitud n involucra a $n + 1$ vértices, no necesariamente distintos.

Ejemplo 9. Examinemos algunas trayectorias en el siguiente grafo.



Veamos la trayectoria del vértice 1 al vértice 4: 1, 3, 6, 5, 4 la cual tiene longitud 4, una trayectoria de longitud 3 es 2, 7, 4, 5 del vértice 2 al vértice 5.

Una trayectoria en un grafo es cerrada cuando empieza y termina en el mismo vértice, este tipo de trayectoria se llama circuito. En el ejemplo anterior no existen circuitos.

Definición 6 (Grafo conexo). *Un grafo se dice conexo si para cualquier par de vértices v, w de \mathcal{G} existe una trayectoria de v a w .*

También podemos decir que un grafo es conexo si no puede ser expresado como la unión de dos grafos disjuntos, en caso contrario será denominado desconexo.

Ejemplo 10. En los siguientes grafos analicemos cual es conexo y cual es desconexo:

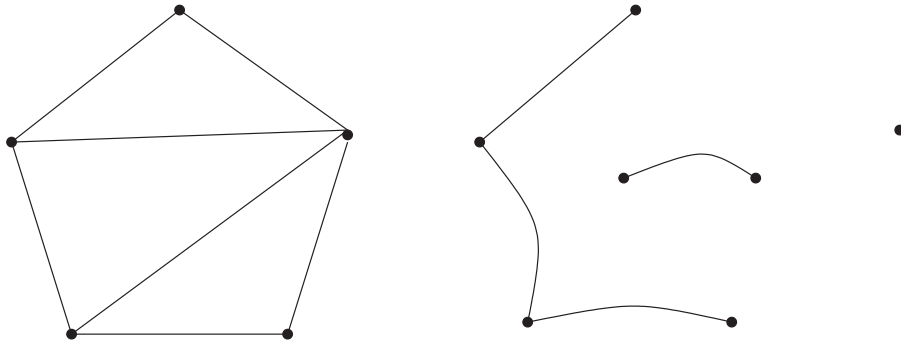


Figura 2.3: Figura 2.3a y Figura 2.3b

Podemos decir que el grafo de la Figura 2.3b es claramente desconexo ya que el grafo se puede expresar como la unión de dos grafos y el grafo de la figura 2.3a se observa que es conexo porque para cada par de vértices existe una trayectoria.

Definición 7 (Matriz de adyacencia). *La matriz de adyacencia $A = [a_{ij}]$ de un grafo \mathcal{G} es una matriz $n \times n$ la cual esta definida de la siguiente manera:*

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{si } a_i \text{ es adyacente a } b_j, \\ a_{ij} = 0, & \text{si } a_i \text{ no es adyacente a } b_j. \end{cases}$$

Veamos como es la matriz de adyacencia correspondiente a los grafos conexo y disconexo de la Figura 2.3:

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Grafos Eulerianos

Un grafo conexo \mathcal{G} es euleriano si existe una trayectoria cerrada o circuito que incluya todas las aristas de \mathcal{G} las cuales deben ser recorridas una y solo una vez.

El grafo que se observa a continuación es un grafo euleriano ya que existe el circuito que recorre todas las aristas; por ejemplo: a, b, c, d, e, c, f, b, e, f, a.

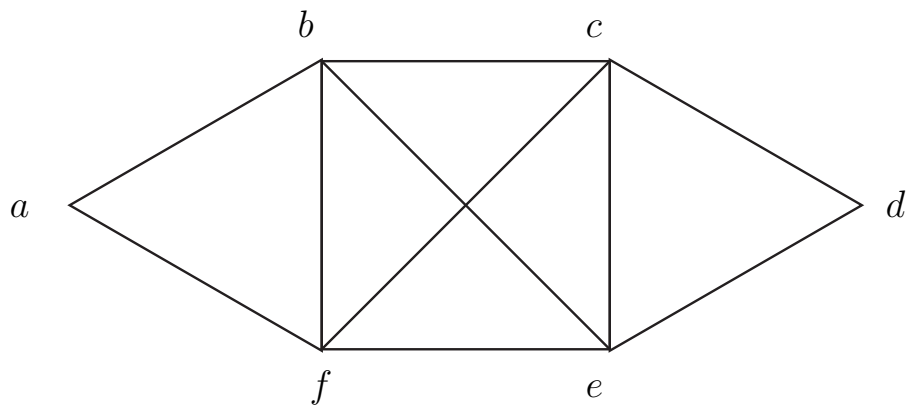


Figura 2.4: Grafo euleriano

También podemos encontrar los grafos semieulerianos, a los cuales se les admite que la trayectoria no sea cerrada. Un ejemplo muy conocido, es el de dibujar la casa

sin levantar el lápiz del papel sin repetir ninguna línea. Este ejemplo que tal vez todos conocemos es un grafo semieuleriano.

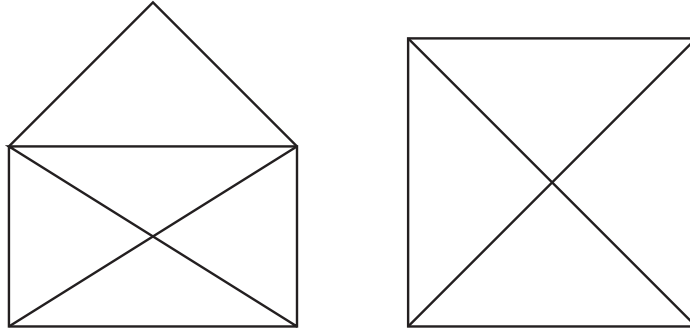


Figura 2.5: Grafo semieuleriano y grafo noeuleriano

Lema 1. Si \mathcal{G} es un grafo conexo en el que ningún vértice tiene $g(v) \leq 2$, entonces \mathcal{G} contiene un circuito.

Demostración. Sea $\mathcal{G} = (V, A)$ y $v \in V$, podemos construir una sucesión de aristas vv_1, v_1v_2, \dots inductivamente eligiendo cualquier vértice adyacente a v como v_1 , y cualquier vértice adyacente a v_i (excepto v_{i-1}) como v_{i+1} para $i \geq 1$. Como \mathcal{G} tiene un número finito de vértices y además podemos elegir un vértice específico y la sucesión de aristas comprendida entre v_k es el circuito que buscábamos. ■

2.2.3. Grafos Hamiltonianos

Un grafo \mathcal{G} es hamiltoniano si existe un circuito que recorra todos los vértices del grafo una sola vez y \mathcal{G} es semihamiltoniano si existe una trayectoria que recorra todos los vértices.

A continuación se muestra en la figura 2.6 un grafo no hamiltoniano, semihamiltoniano y hamiltoniano respectivamente.

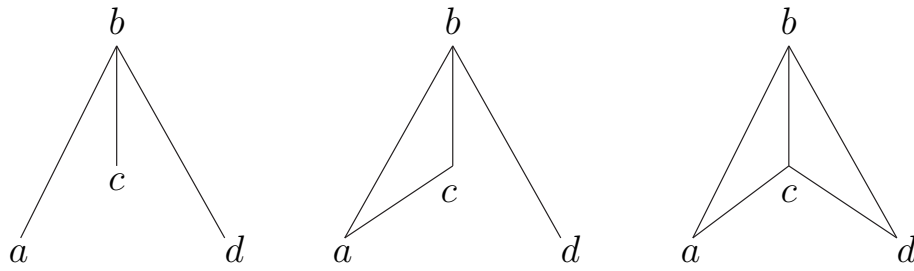


Figura 2.6: Grafos no hamiltoniano, semihamiltoniano y hamiltoniano

2.2.4. Grafos Completos

Se denomina grafo completo a un grafo simple en el que cualquier par de vértices son adyacentes. Un grafo completo de n vértices es designado, normalmente, por k_n . En la Figura 2.7 se ilustran k_4 y k_5 . Se puede comprobar que k_n tiene exactamente $\frac{1}{2}n(n-1)$ aristas.

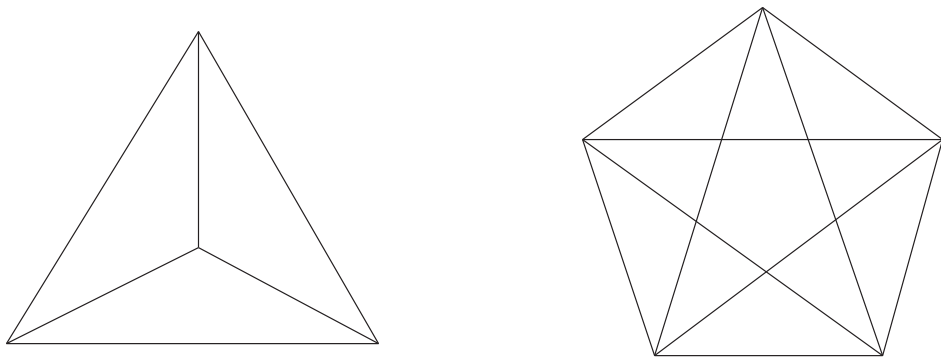


Figura 2.7: k_4 y k_5

2.2.5. Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no posee circuitos y posee $n-1$ aristas.

Ejemplo 11. El árbol de la Figura 2.8 evidentemente es conexo ya que entre cualquier

par de vértices podemos encontrar una trayectoria que los une, además no posee circuitos.

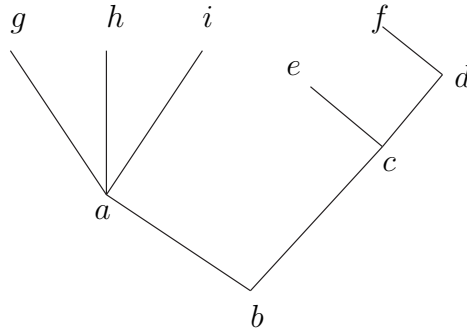


Figura 2.8: Árbol

2.2.6. Grafos bipartitos

Se dice que un grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ es bipartito si puede ser dividido en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tal que todo $v \in V_1$ es adyacente con algún $w \in V_2$.

En la Figura 2.9 el grafo es bipartito ya que se puede dividir en los conjuntos disjuntos $V_1 = \{b, d\}$ y $V_2 = \{a, c, e\}$.

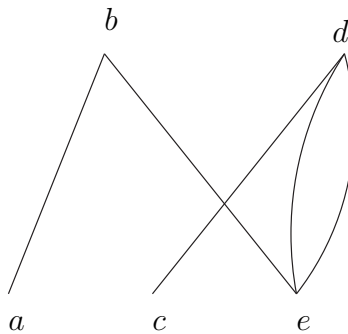


Figura 2.9: Grafo bipartito

2.2.7. Grafos isomorfismos

Si observamos los grafos de la Figura 2.10, en un primer momento parecen diferentes; pero al observarlos detenidamente nos damos cuenta que tienen semejanzas tales como igual número de vértices, de aristas y de pronto nos detenemos a pensar serán el mismo grafo; prácticamente lo son, a estos grafos se les denomina grafos isomorfos.

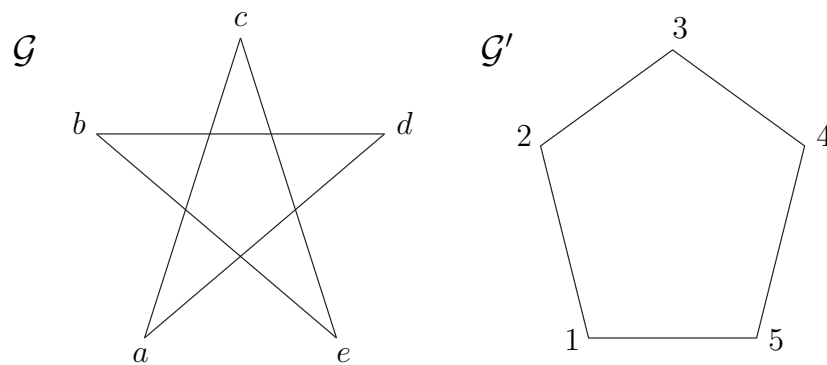


Figura 2.10: Grafos isomorfos

Definición 8. Dos grafos $\mathcal{G} = (V, A)$ y $\mathcal{G}' = (V', A')$ son isomorfos si existe una biyección $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\{a, b\} \in A_1$ si y sólo si $\{\phi(a), \phi(b)\} \in A_2$.

Ejemplo 12. Veamos si efectivamente los dos grafos de la Figura 2.10 son isomorfos. Sean los grafos $\mathcal{G} = (V, A)$ donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{G}' = (V', A')$ donde $V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definamos la función ϕ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi : V &\longrightarrow V' \\ a &\mapsto 1, \\ b &\mapsto 4, \\ c &\mapsto 2, \\ d &\mapsto 5, \\ e &\mapsto 3. \end{aligned}$$

Claramente ϕ es biyectiva y para todo elemento $xy \in A$ entonces $\phi(xy) \in A'$, luego \mathcal{G} y \mathcal{G}' son isomorfos.

Una herramienta muy eficaz y rápida para hallar las clases de isomorfismos para grafos es el programa **Nauty** desarrollado por el profesor Brendan McKay de la Universidad Nacional de Australia. El programa Nauty está escrito en lenguaje moderno **C** altamente portable.

Este programa tiene una serie de paquetes denominados **gtools** que se distribuyen junto con Nauty. Estos programas son eficientes al procesar archivos de grafos que estén en formato graph6 o sparse6, también los resultados obtenidos los guarda en estos formatos que están definidos dentro del formato .txt. El soporte de gtools esta limitado a Unix por esta razón solo se puede correr en sistemas cuya base es Unix, por ejemplo en Linux.

Para compilar gtools o cualquier paquete de Nauty debemos realizar los siguientes pasos:

1. Descargar el archivo **nauty22b6.tar.gz** que se encuentra en la página web <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty> .
2. Descomprimir el archivo y ejecutar en consola cuando nos encontremos dentro de la carpeta nauty22 **./configure**.
3. Para compilar los archivos ejecutamos **make**.

Algunos de los programas que se encuentran en gtools son:

geng: Genera pequeños grafos.

genrang: Genera grafos aleatoriamente.

listg: Muestra los grafos en diferentes formas.

copyp: Cambia de formato.

directg: Genera pequeños digrafos dado su grafo elemental.

amtog: Lee los grafos que están en forma de su matriz de adyacencia.

dreto: Lee grafo que tiene formato dreadnaut.

Para tener una descripción de que datos debo ingresar y como ingresarlos tengo la opción **-help** que se ejecuta después de el programa que se quiere utilizar. Por ejemplo, si queremos saber como utilizar el programa digitamos **./geng -help** y obtendremos lo siguiente:

```

root@sofia: /juanita/nauty22# ./geng -help
Usage: geng [-cCmtfbd#D#] [-uygsnh] [-lvq] [-x#X#] n [mine[:maxe]] [res/mod] [file]

Generate all graphs of a specified class          Genera la clase de isomorfismo de un grafo.
n: the number of vertices (1..32)                Número de vértices de 1 hasta 32.
mine:maxe: a range for the number of edges       Rango para el número de aristas.
-c: only write connected graphs                  Solo escribe los grafos conexos.
-C: only write biconnected graphs                 Solo escribe los grafos biconexos.
-t: only generate triangle-free graphs           Genera solamente grafos libres de triangulos.
-f: only generate 4-cycle-free graphs            Genera solamente grafos libres 4-ciclos.
-b: only generate bipartite graphs (-t, -f       Genera solamente grafos bipartitos.
and -b can be used in any combination)
-m: save memory at the expense of time (only     Guarda en una memoria temporal.
makes a difference in the absence
of -b, -t, -f and n <= 28).
-d#: a lower bound for the minimum degree        Grado minimo.
-D#: a upper bound for the maximum degree        Grado máximo.
-v: display counts by number of edges            Lista el número de aristas.
-g: use graph6 output (default)                  Formato de salida graph6(por defecto).
-s: use sparse6 output                           Formato de salida sparse6.

```

Veamos como se utilizan algunas opciones de cada programa:

```

root@sofia: /juanita/nauty22# ./geng 5 0:10 ejemplo.g6
>A ./geng -d0D4 n=5 e=0-10
>Z 34 graphs generated in 0.00 sec
Genera todas las clases de isomorfismos para n=5 y las guarda en el archivo ejemplo.g6

```

```
root@sofia: /juanita/nauty22# ./genrang -e5 -g 5 4 ejemplo2.g6
```

Genera aleatoriamente 4 grafos con 5 vértices y 5 aristas.

```
root@sofia: /juanita/nauty22# ./listg ejemplo2.g6
```

Graph 1, order 5.

```
0 : 2 3;
1 : 3 4;
2 : 0;
3 : 0 1 4;
4 : 1 3;
```

Graph 2, order 5.

```
0 : 1;
1 : 0 2 3 4;
2 : 1 4;
3 : 1;
4 : 1 2;
```

Graph 3, order 5.

```
0 : 2;
1 : 2 3;
2 : 0 1 3;
3 : 1 2 4;
4 : 3;
```

Graph 4, order 5.

```
0 : 1 2 4;
1 : 0 3 4;
2 : 0;
3 : 1;
4 : 0 1;
```

Lista los grafos del archivo ejemplo2.g6.

```
root@sofia: /juanita/nauty22# ./listg -a ejemplo2.g6
```

Graph 1, order 5.

```
00110
```

```
00011
10000
11001
01010
```

Graph 2, order 5.

```
01000
10111
01001
01000
01100
```

Graph 3, order 5.

```
00100
00110
11010
01101
00010
```

Graph 4, order 5.

```
01101
10011
10000
01000
11000
```

Lista los grafos en forma de matriz de adyacencia del ejemplo2.g6.

```
root@sofia: /juanita/nauty22# ./directg -T -o ejemplo.g6 ejemplod.txt
>A directg -oT ejemplo.g6 ejemplod.g6
>Z 34 graphs read from ejemplo.g6; 582 digraphs written to ejemplod.g6; 0.01 sec
Genera todas las clases de isomorfismos para digrafos con n=5 y las guarda en ejemplod.txt.
```

```
root@sofia: /juanita/nauty22# ./dretog -g ejemplo4.dre ejemplo4.g6
>Z 1 graphs converted from ejemplo4.dre to ejemplo4.g6
root@sofia: /juanita/nauty22# ./listg ejemplo4.g6
```

Graph 1, order 4.

0 : 1 2 3;

1 : 0 2 3;

2 : 0 1 3;

3 : 0 1 2;

Lee archivos que estén en formato .dre y los convierte en formato .g6.

Conociendo algunas de las opciones utilizamos geng para conocer las clases de isomorfismos para grafos con vértices $n = 1, 2, \dots, 10$, dando como resultado la siguiente tabla:

n	G(n)	t
3	4	0
4	11	0
5	34	0
6	156	0
7	1044	0
8	12346	0.04
9	274668	0.47
10	12005168	19.9

Cuadro 2.1: $G(n)$ = número de clases de isomorfismos de n -grafos

CAPÍTULO 3

Digrafos

Este capítulo está dedicado al estudio de grafos dirigidos o digrafos y algunas de sus propiedades. A su mismo estudiamos una manera de establecer isomorfismo entre digrafos para lo cual utilizamos la aplicación de Nauty llamada Dreadnaut la cual es una herramienta muy eficaz en este proceso.

Definición 9. *Un digrafo simple es un grafo simple orientado finito, esto es, un digrafo es un par $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas orientadas no repetidas, que unen pares de vértices.*

En lo que sigue, cuando nos referimos a digrafos estamos hablando de digrafos simples, por lo cual todas las definiciones y teoremas están dadas solo para digrafos simples. Para tener una mejor comprensión de todas las definiciones y propiedades a estudiar tendremos la siguiente nomenclatura:

$i \rightarrow j$: Significará que hay un arco del vértice i al vértice j .

$i \leftrightarrow j$: Quiere decir que $i \rightarrow j$ ó $j \rightarrow i$.

$i \nleftrightarrow j$: No existen aristas entre i y j .

Observemos el siguiente digrafo $\mathcal{G} = (V, A)$:

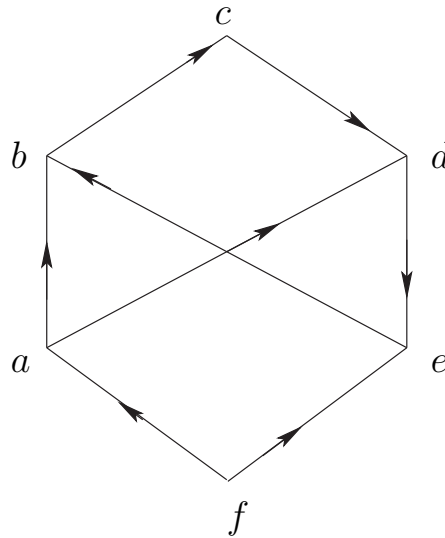


Figura 3.1: Ejemplo de digrafo

donde $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $A = \{ab, bc, cd, de, fe, fa, ad, eb\}$.

Definición 10. Podemos decir que un digrafo es trivial si el conjunto de aristas tiene cardinalidad cero.

3.1. Propiedades de los digrafos

Un digrafo también cumple algunas propiedades de las relaciones por ser el conjunto A de aristas una relación en V .

Definición 11 (Irreflexivo). No tiene ciclos de longitud 1 en cada uno de sus vértices, esto es $i \not\leftrightarrow i$.

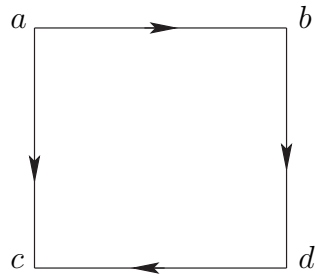


Figura 3.2: Digrafo irreflexivo

Definición 12 (Asimétrico). No puede tener simultáneamente una arista del vértice a al vértice b y una arista del vértice b al vértice a , esto es $(a \rightarrow b \implies b \nrightarrow a) \wedge a \nleftrightarrow a$.

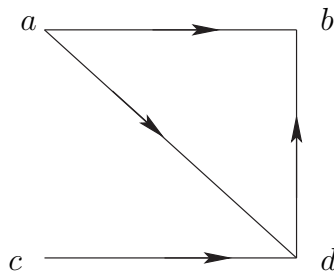


Figura 3.3: Digrafo asimétrico

Definición 13 (Transitivo). Si para todo $a, b, c \in V$ se cumple $a \rightarrow b \wedge b \rightarrow c \implies a \rightarrow c$.

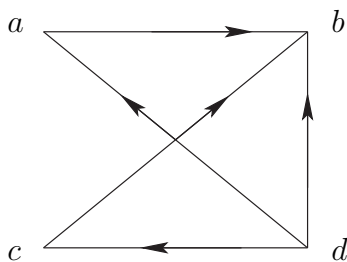


Figura 3.4: Digrafo transitivo

Definición 14 (Grado de salida y entrada de un vértice). En un digrafo el grado de salida de un vértice v es igual al número de aristas que tiene como vértice inicial a v denotado por $od(v)$ y el grado de entrada es el número de aristas que finalizan en el vértice v denotado por $id(v)$. La suma de ambos grados se le denomina grado total del vértice v que denotamos como $\rho(v) = od(v) + id(v)$.

Ejemplo 13. Hallemosle a algunos vértices del digrafo siguiente el grado de salida, el grado de entrada y el grado total:

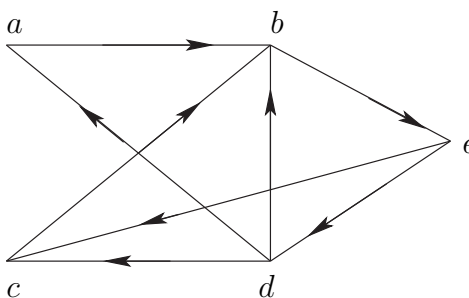


Figura 3.5: Grado de salida y grado de entrada de un vértice

Para el vértice a : $od(a) = 1$, $id(a) = 1$ y $\rho(a) = 2$, el vértice b : $od(b) = 1$, $id(b) = 3$ y $\rho(b) = 4$ y el vértice d : $od(d) = 3$, $id(d) = 1$ y $\rho(d) = 4$.

Definición 15 (Trayectoria en un digrafo). Una trayectoria en un digrafo \mathcal{G} del vértice a al vértice b es una sucesión $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, b$ donde se cumple

$$a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow, \dots, \rightarrow x_{n-1} \rightarrow b.$$

En el digrafo de la Figura 3.5 una trayectoria de a a d es: a, b, e, d porque cumple:

$$a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow d.$$

Definición 16 (Subdigrafo). Dado un grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ decimos que $\mathcal{G}' = (V', A')$ es un digrafo de \mathcal{G} si $V \subseteq V'$ y $A \subseteq A'$.

Ejemplo 14. Dado el siguiente digrafo hallemos algunos subdigrafos.

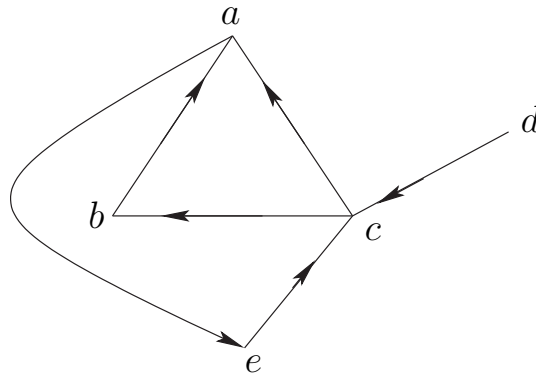


Figura 3.6: Digrafo

Algunos subdigrafos son:

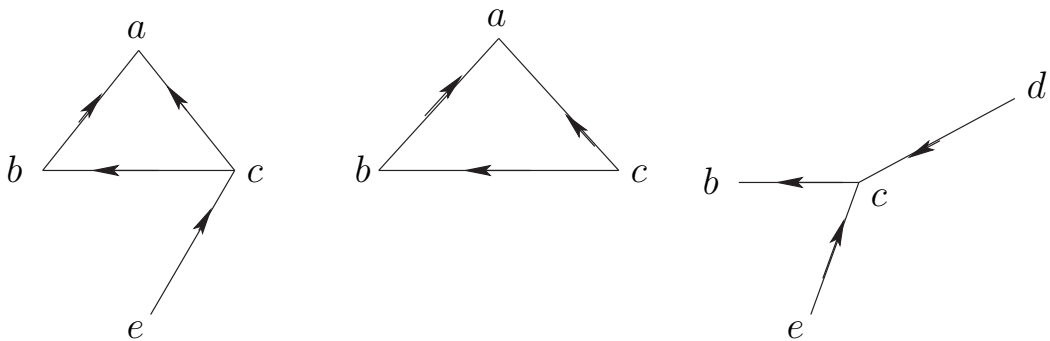


Figura 3.7: 3 subdigrafos

Un digrafo determina un vector resultado (s_1, s_2, \dots, s_n) , donde s_i es el grado de salida $od(v)$ del vértice v_i . Esta n -upla se ordena de tal forma que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$.

Ejemplo 15. El vector resultado del digrafo en la Figura 3.6 es: $(1, 1, 1, 1, 2)$ y está dado por $s_1 = 1$ es la cardinalidad del vértice a , $s_2 = 1$ la cardinalidad de b , $s_3 = 1$ la cardinalidad de e , $s_4 = 1$ la cardinalidad de d y $s_5 = 2$ la cardinalidad de c .

Así como en los grafos vimos que una clase muy importante de grafos son los grafos completos k_n , en los digrafos también podemos encontrar una definición para los digrafos completos también llamados torneos, llamados así porque son utilizados para registrar el resultado por ejemplo de una sesión de un torneo de tenis.

Definición 17 (Digrafo Completo o Torneo). *Un torneo \mathcal{T} es un digrafo en el cual cada par de vértices distintos está unido por exactamente una arista; esto es, dados $v, w \in V$, entonces se tiene que*

$$x \rightarrow y, \text{ ó, } y \rightarrow x.$$

Para el lector interesado en torneos vea específicamente Flórez [FL], Paredes [PA] y [Moon].

Algunos ejemplos de torneos:

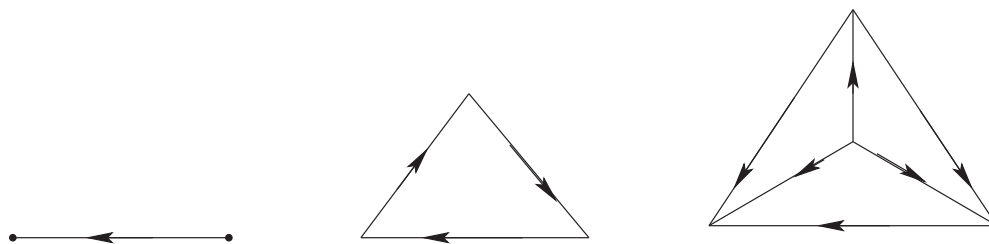


Figura 3.8: Torneos para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ vértices

Proposición 1. *En un digrafo de n vértices, existen $3^{\binom{n}{2}}$ posibles digrafos.*

Demostración: En un digrafo con n vértices existen $\binom{n}{2}$ pares de vértices i, j , y cada par tiene 3 posibilidades, $i \rightarrow j$ o que $j \rightarrow i$ y por ultimo $i \leftrightarrow j$, cada una dando lugar exactamente a un digrafo diferente. Por lo tanto, hay $3^{\binom{n}{2}}$. ■

3.2. Matriz de Adyacencia

Un método alternativo de representar los digrafos es por medio de la matriz de adyacencia, lo cual hace mas fácil de manejar los digrafos porque utiliza las operaciones

del álgebra de matrices y posee ventajas al momento de querer manipular un digrafo en una computadora.

Es importante para el manejo de la matriz suponer un orden en los vértices, es decir enumerarlos, porque la representación matricial del digrafo depende del orden de los vértices.

Definición 18. Sea $\mathcal{G} = (V, A)$ un digrafo en el cual $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La matriz $n \times n$, cuyos elementos $M(\mathcal{G}) = (a_{ij})$ con $i < j$ están dados por

$$M(\mathcal{G}) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \rightarrow j, \\ -1, & \text{si } j \rightarrow i, \\ 0, & \text{si } i \leftrightarrow j \end{cases}$$

se denomina matriz de adyacencia del digrafo \mathcal{G} .

Veamos las matrices de adyacencia y el vector resultado de los digrafos antisimétrico y transitivo de la Figura 3.4.

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y los vectores marcador son:

$$s_a = (0, 1, 1, 2) \quad y \quad s_t = (0, 1, 1, 3)$$

. Observe que si se suman los unos positivos en cada fila de la matriz de adyacencia, la resultante de cada fila es una componente de la n -upla del vector marcador del digrafo.

Definición 19 (Digrafo conexo). Se dice que un digrafo es conexo o débilmente conexo si es conexo como grafo no dirigido, es decir despreciando los sentidos de las aristas; y fuertemente conexo si para todo par de vértices v, w existe una trayectoria orientada de v a w .

Es evidente que todo digrafo fuertemente conexo es conexo, pero la recíproca no es cierta.

Ejemplo 16. En la Figura 3.9 observamos que el primero es débilmente conexo, ya que del vértice a al vértice b no existe una trayectoria orientada, pero en cambio si despreciamos los sentidos de las aristas existe la trayectoria para cualquier par de vértices.

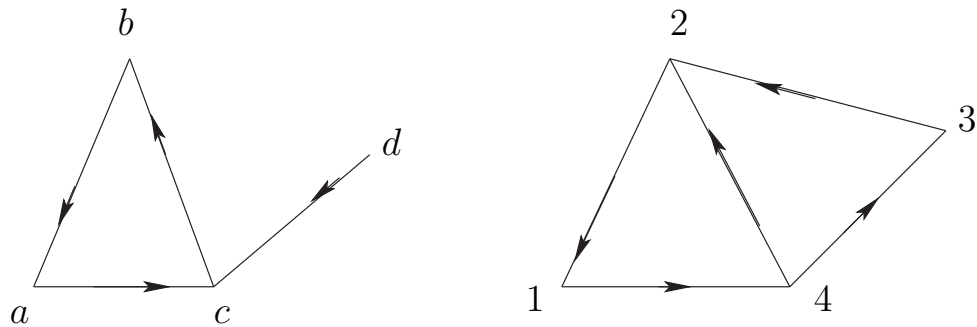


Figura 3.9: Digrafos conexo y fuertemente conexo

Si analizamos el segundo podemos ver que es fuertemente conexo ya que se cumple que para cualquier par de vértices existe una trayectoria orientada, veamos algunas de las trayectorias:

$$1, 4, 3, 2; \quad 4, 2, 1 \quad y \quad 3, 2, 1, 4.$$

Definición 20 (Relativamente conexo). Un digrafo $\mathcal{G} = (V, A)$ es relativamente conexo, si para cualesquier $i, j, k \in V$ se cumple que $i \rightarrow j \implies i \leftrightarrow k$ o $j \leftrightarrow k$

Ejemplo 17. El siguiente digrafo no es relativamente conexo, ya que para los vértices a, c y d se tiene que $a \rightarrow d$ y $(a \leftrightarrow c$ y $d \leftrightarrow c)$.

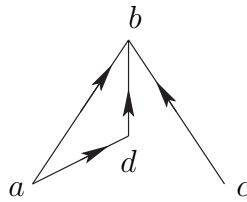


Figura 3.10: Digrafo no relativamente conexo

3.3. Digrafos Eulerianos

Se dice que un digrafo conexo \mathcal{D} es euleriano si existe un circuito que incluya todas las aristas de \mathcal{D} .

Por ejemplo el primer digrafo de la Figura 3.10 no es un digrafo euleriano aunque su grafo base si es un grafo euleriano, el segundo es un digrafo euleriano y el tercero semieuleriano. Es claro que si un digrafo es euleriano su grafo base también lo es.

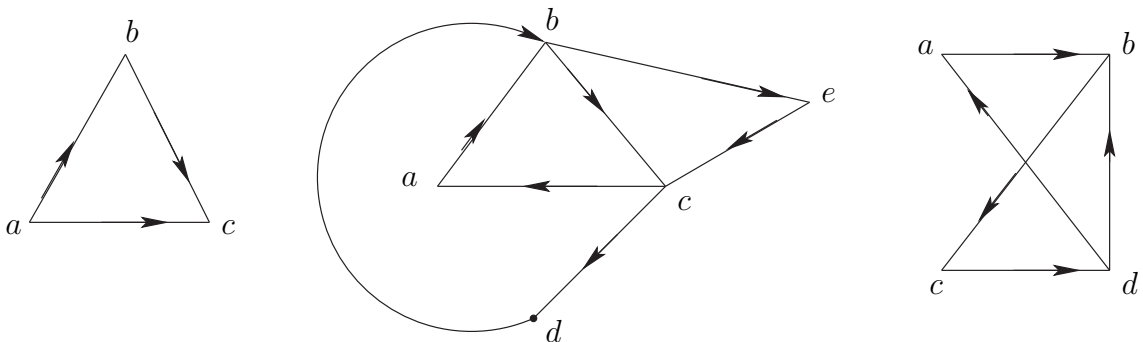


Figura 3.11: Digrafos no euleriano, euleriano y semieuleriano

Definamos fuente y sumidero en un digrafo \mathcal{D} ; un vértice cuyo grafo de entrada es cero se dice fuente de \mathcal{D} y el vértice cuyo grado de salida es cero se denomina sumidero de \mathcal{D} .

Obsérvese que los digrafos eulerianos no pueden tener ni fuentes ni sumideros. En el ejemplo anterior se ve que el grafo euleriano no tiene ni fuentes ni sumideros y el grafo

no euleriano tiene un vértice que es fuente y otro que es sumidero.

Luego basándonos en la definición de grafo semieuleriano, podemos definir entonces al digrafo semieuleriano como el digrafo conexo que admite una trayectoria que recorre todas las aristas.

3.4. Digrafos Hamiltonianos

Un digrafo \mathcal{D} se llama hamiltoniano si existe un circuito orientado que incluye todos los vértices de \mathcal{D} , y un digrafo que contiene una trayectoria (no cerrada) que pasa por cada vértice es llamado semihamiltoniano.

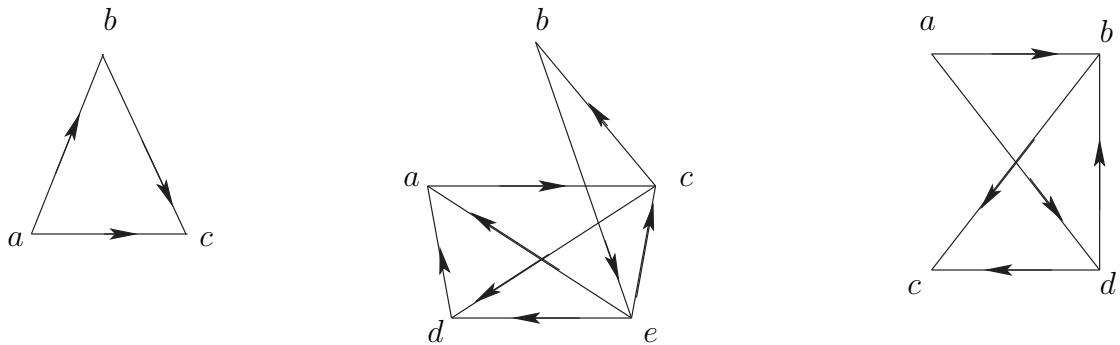


Figura 3.12: Digrafos semihamiltoniano, hamiltoniano y no hamiltoniano

3.5. Isomorfismos

Como vimos en el capítulo anterior dos grafos pueden ser isomorfos, extenderemos esta definición para digrafos.

Definición 21. Sean \mathcal{G}_1 un digrafo con n vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ y \mathcal{G}_2 un digrafo con m vértices $\{1, 2, \dots, m\}$. Un homomorfismo entre \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 es una aplicación $\Phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \Rightarrow \Phi(s) \xrightarrow{\mathcal{G}_2} \Phi(t) \quad \text{o} \quad \Phi(s) = \Phi(t)$$

y si

$$s \xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \Rightarrow \Phi(s) \xrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t)$$

Si ϕ es biyectiva decimos que \mathcal{G}_1 es isomorfo a \mathcal{G}_2 .

Ejemplo 18. Veamos dos grafos que son homomorfos:

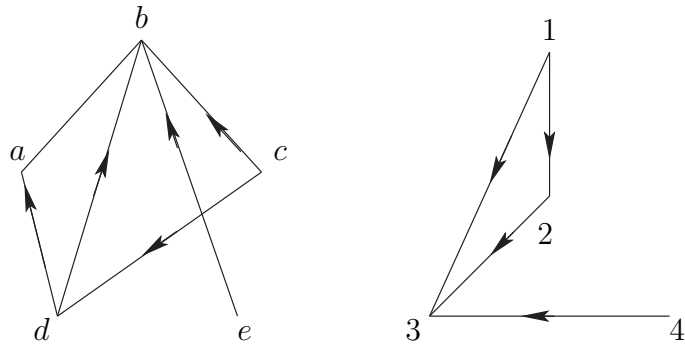


Figura 3.13: Digrafos homomorfos

Y su homomorfismo esta dado por:

$$\phi : V_1 \longrightarrow V_2$$

$$1 \mapsto d$$

$$2 \mapsto a$$

$$3 \mapsto b$$

$$4 \mapsto e$$

Verifiquemos algunas correspondencias:

Si $1 \rightarrow 2 \Rightarrow \phi(1) = d \rightarrow \phi(3) = b$, y si $4 \rightarrow 3 \Rightarrow \phi(4) = e \rightarrow \phi(3) = b$

Ejemplo 19. Encontramos ahora el isomorfismo de los digrafos siguientes :

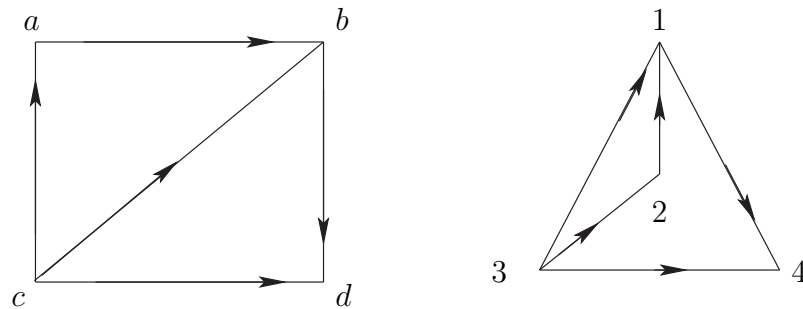


Figura 3.14: Digrafos isomorfos

Y ϕ se define como:

$$\begin{aligned} \phi : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ a &\mapsto 4 \\ b &\mapsto 3 \\ c &\mapsto 1 \\ d &\mapsto 2 \end{aligned}$$

ϕ es claramente biyectiva.

Con relación al vector marcador podemos decir que digrafos isomorfos tienen el mismo vector marcador, pero no podemos afirmar que, si dos digrafos tienen el mismo vector marcador son isomorfos, por ejemplo en la Figura 4.4 del capítulo 4 claramente los digrafos 14 y 15 no son isomorfos, sin embargo su vector marcador es el mismo.

Veamos otra aplicación de Nauty, el programa **Dreadnaut**, un programa simple que ayuda a estudiar grafos y digrafos. Es una interfaz primitiva y con algunas facilidades.

Para ejecutar dreadnaut debe haberse compilado Nauty, si Usted ya lo compiló ejecute las siguientes instrucciones en consola:

```
>CD nauty22
>nauty22# ./dreadnaut
```

Entonces usted se encontrara con la interfaz de dreadnaut.

Veamos algunos comandos útiles de `dreadnaut` para el estudio de digrafos y en especial para decir si dos digrafos son isomorfos y establecer el isomorfismo.

Para ejecutar antes de introducir el digrafo o grafo:

c: Opción indispensable para encontrar el isomorfismo, la cual significa que se va a encontrar un isomorfismo.

d: Para especificar que vamos a introducir un digrafo.

\$=: Establece el origen para los vértices numerados. Por defecto es 0.

\$\$=: Restablece la numeración original de los vértices cambiada con el comando \$.

Para ejecutar junto con el digrafo:

n=: Numero de vértices que tiene el digrafo.

g: Para que en la siguiente línea se introduzca en digrafo.

; : Incrementa de vértice.

. : Para el ingreso de más vértices al digrafo.

Para después de introducido el digrafo:

x: Ejecutar el digrafo introducido, es indispensable para isomorfismo y para guardar el digrafo.

e: Para editar el digrafo.

v: Halla el grado de salida de cada vértice del digrafo.

@: Guarda en una memoria temporal el digrafo para introducir el otro digrafo para saber si son o no isomorfos.

##: Compara los dos digrafos y halla el isomorfismo, si existe.

> nombre.dre T - >: Guarda el digrafo por si se quiere ejecutar después.

< nombre.dre : Para invocarlo y ejecutarlo después.

q: Para salir de dreadnaut.

Veamos algunos ejemplos de isomorfismos con el programa dreadnaut:

```
>$=1
>c d
>n=6 g
1 : 2;
2 : 3;
3 : 1 4;
4 : 5;
5 : 6;
6 : 4.
>x v @
6 orbits; grpsize=1; 0 gens; 1 node; maxlev=1
tctotal=0; canupdates=1; cpu time = 0.00 seconds
1-2:1 3:2 4-6:1
>g
1 : 4;
2 : 1;
3 : 6;
4 : 3;
5 : 4;
6 : 5.
>x
(3 5)(4 6)
level 1: 4 orbits; 4 fixed; index 2
4 orbits; grpsize=2; 1 gen; 3 nodes; maxlev=2
tctotal=2; canupdates=1; cpu time = 0.00 seconds
>##
```

h and h' are different.

>e

1 : 6 2;

2 : 1;

3 : 6;

4 : 3;

5 : 4;

6 : 1.

>x v

6 orbits; grpsize=1; 0 gens; 1 node; maxlev=1

tctotal=0; canupdates=1; cpu time = 0.00 seconds

1:3 2-5:1 6:2

># #

h and h' are different.

>\$ \$

>n=4 g

0 : 1 2 3;

1 : 2;

2 : 3;

3 : .

>x @

level 1: 3 cells; 4 orbits; 1 fixed; index 1/2

4 orbits; grpsize=1; 0 gens; 3 nodes; maxlev=2

tctotal=2; canupdates=2; cpu time = 0.00 seconds

>g

0 : 1 2 3;

1 : ;

2 : 1;

3 : 2.

>x

```

level 1: 3 cells; 4 orbits; 2 fixed; index 1/2
4 orbits; grpsize=1; 0 gens; 3 nodes (1 bad leaf); maxlev=2
tctotal=2; canupdates=1; cpu time = 0.00 seconds
>##
h and h' are identical.
0-0 1-3 2-2 3-1

```

3.5.1. Clases de isomorfismos

Los digrafos también pueden clasificarse en clases de isomorfismo, y con la ayuda de Nauty con sus programas geng y directg pudimos calcular las clases de isomorfismos para digrafos con $n=1,2,\dots,7$ (para $n=1,\dots,4$ vea [PI]) y obtuvimos la siguiente tabla:

n	$\mathcal{D}(n)$	$t[s]$	$\mathcal{T}(n)$
3	7	0	2
4	42	0	4
5	582	0	12
6	21.480	0,15	56
7	2'142.288	16,89	456

Cuadro 3.1: $\mathcal{D}(n)$ = número de clases de isomorfismos de n -digrafos y $\mathcal{T}(n)$ = número de clases de isomorfismos de n -torneos

Note la diferencia entre el crecimiento de las clases de isomorfismo de los digrafos con respecto a los torneos, es mucho mas rápido el crecimiento de los digrafos. Debemos tener en cuenta que en los digrafos también están incluidas las clases de isomorfismos de los torneos.

CAPÍTULO 4

Digrafos localmente transitivos

En este capítulo introducimos la noción de digrafo *localmente transitivo* como aparece en [PI] y presentaremos los resultados obtenidos al estudiar los digrafos localmente transitivos para n menor e igual a 5, en [PI] aparece la clasificación para $n \leq 4$, nosotros, aquí presentamos también una clasificación para $n = 5$.

Definición 22. Dado un digrafo $\mathcal{G} = (V, A)$ y un vértice $v \in V$, se definen los subconjuntos de V :

$$\mathcal{G}^+(v) = \{w \in V : v \rightarrow w\}, \quad \mathcal{G}^-(v) = \{w \in V : w \rightarrow v\}$$

Definición 23. Dado un digrafo $\mathcal{G} = (V, A)$ y un vértice $v \in V$, se definen los subdigrafos ganador $\mathcal{G}_g(v)$ y perdedor $\mathcal{G}_p(v)$ de v como el subdigrafo cuyos vértices están determinados por los conjuntos $\mathcal{G}^-(v)$ y $\mathcal{G}^+(v)$ respectivamente y las aristas son las mismas que existían en \mathcal{G} , es decir $\mathcal{G}_g(v)$ ($\mathcal{G}_p(v)$) es la restricción de \mathcal{G} a $\mathcal{G}^-(v)$ ($\mathcal{G}^+(v)$). Si $\mathcal{G}^-(v) = V \setminus \{v\}$ ($\mathcal{G}^+(v) = V \setminus \{v\}$) diremos que v es un ganador (perdedor).

Ejemplo 20. Observe que para el digrafo de la Figura 4.1 $\mathcal{G}^+(e) = \{b, c, d\}$ y $\mathcal{G}^-(c) = \{a, b, e\}$.

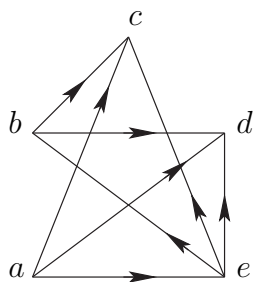
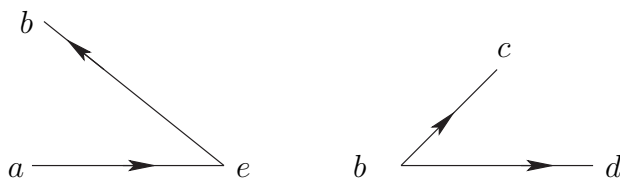


Figura 4.1: Digrafo

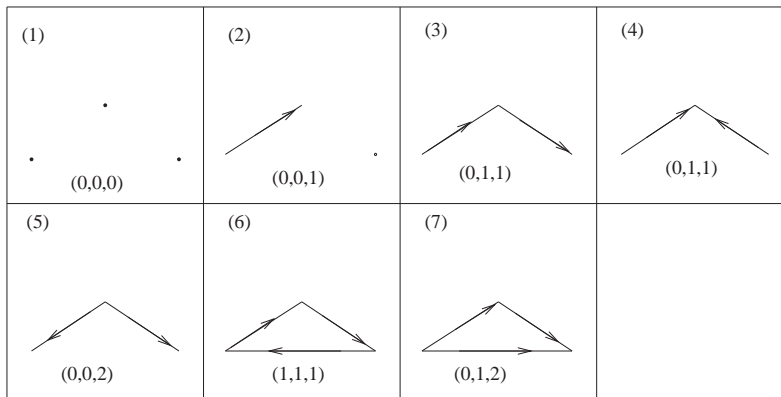
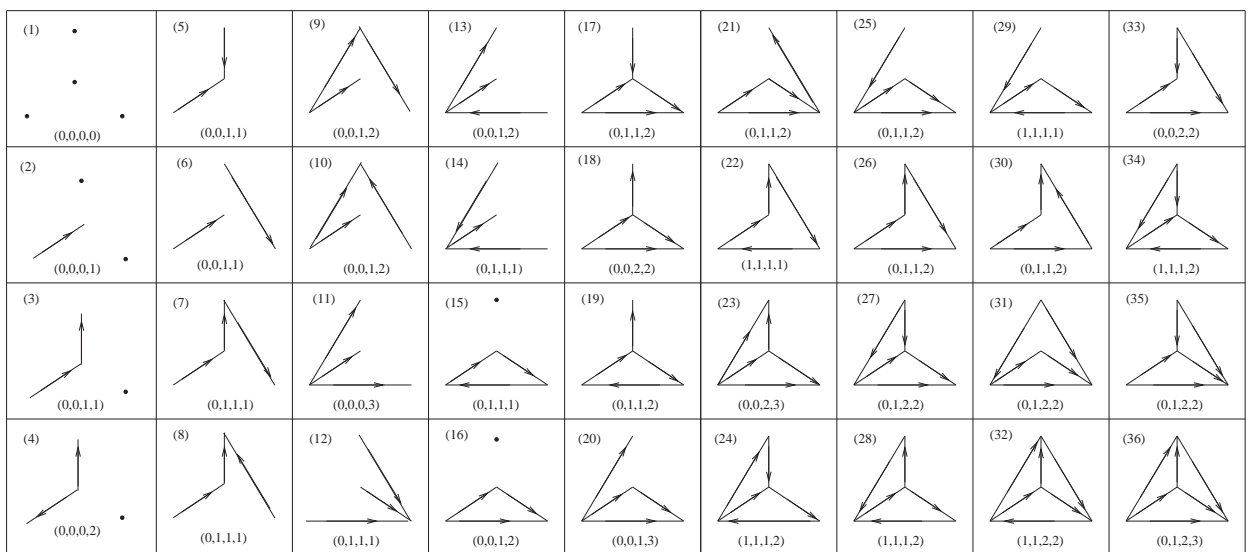
Donde el primer digrafo corresponde a $\mathcal{G}_g(c)$ y el segundo a $\mathcal{G}_p(e)$:

Figura 4.2: Digrafo $\mathcal{G}^-(c)$ y $\mathcal{G}^+(e)$

Definición 24. Un digrafo $\mathcal{G} = (V, A)$ es localmente transitivo, si para todo $v \in V$, cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}_g(v)$ y $\mathcal{G}_p(v)$ es transitivo (Definición 13) y relativamente conexo (Definición 20).

Para las 7 clases de isomorfismos de los digrafos con $n = 3$ vértices es fácil verificar que todos son localmente transitivos (ver Figura 4.3).

En el caso de los digrafos con $n = 4$, de las 42 clases de isomorfismos existentes, 36 son localmente transitivos (ver Figura 4.4) y 6 no son localmente transitivos (ver Figura 4.5).

Figura 4.3: Clases de isomorfismos para $n = 3$ Figura 4.4: Digrafos localmente transitivos para $n = 4$

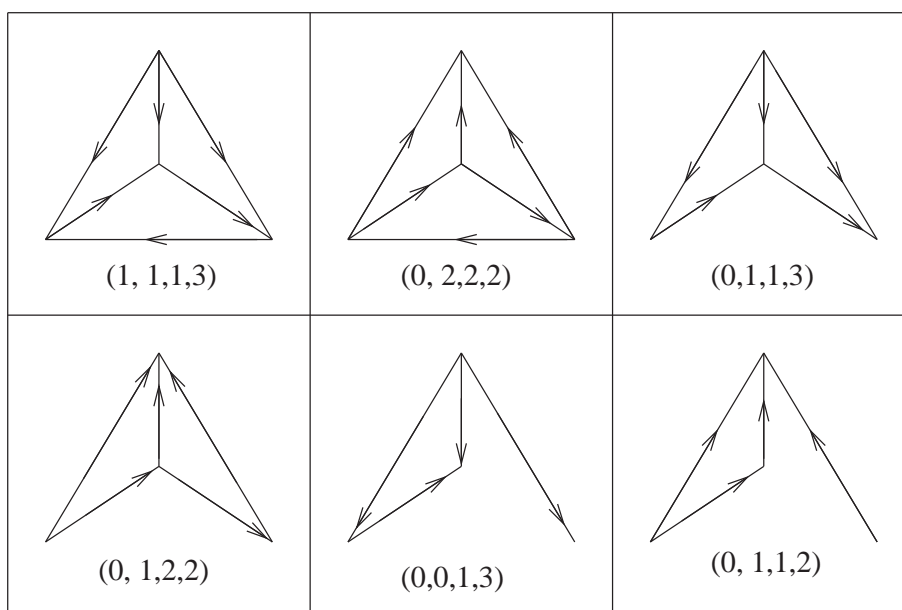


Figura 4.5: Digrafos no localmente transitivos para $n = 4$

Observación 1. De la Definición 24 podemos decir que:

- Ser localmente transitivo significa que el digrafo $\mathcal{G}_g(v)$ o $\mathcal{G}_p(v)$ contiene únicamente 4-subdigrafos de la Figura 4.4. Observando detenidamente, en cada uno de los 4-digrafos que aparecen en esta figura, siempre aparece un vértice ganador o perdedor y un subconjunto no vacío de aristas de un 3 – *circuito*.
- Para el caso de los no completos, la Definición 24 es más flexible: esta definición permite que alguno de estos subdigrafos, digamos, $\mathcal{G}_p(v)$, puede ser trivial, mientras que $\mathcal{G}_g(v)$ puede ser transitivo o relativamente conexo.
- Si el $\max\{|\mathcal{G}^+(v)|, |\mathcal{G}^-(v)|\} \leq 2, \quad \forall v \in V$, entonces \mathcal{G} es localmente transitivo.

Teorema 1. Un digrafo \mathcal{G} es localmente transitivo si y solo si todo 4-subdigrafo de \mathcal{G} es localmente transitivo.

Demostración: \implies : Si \mathcal{G} es localmente transitivo, entonces todos los subdigrafos de \mathcal{G} son localmente transitivos, en particular los 4-subdigrafos.

\impliedby : Supongamos que \mathcal{G} no es localmente transitivo; entonces tenemos dos casos:

Caso 1: Si existe un $v \in V$ tal que uno de los dos digrafos $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ no es transitivo.

Esto quiere decir que existe $j, k, l \in V$ tal que $jk, kl \in A$ mas $jl \notin A$. Podemos verificar que con las condiciones anteriores si lj no pertenece a A , el 4-*subdigrafo* de \mathcal{G} con vértices $\{v, j, k, l\}$ corresponde a uno de los cuatro primeros digrafos de la Figura 4.5 y, por tanto, no es localmente transitivo.

Caso 2: Si existe un $v \in V$ tal que uno de los dos digrafos $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ no es relativamente conexo. Esto es, que los digrafos contienen $j, k, l \in V$ tal que $jk \in A$ mas $jl, kl, lj, lk \notin A$. Aquí también el 4-*subdigrafo* con vértices $\{v, j, k, l\}$ con las anteriores condiciones es uno de los dos últimos digrafos de la Figura 4.5. Por tanto no es localmente transitivo.

■

Para 5-digrafos, primero apoyados con el programa Nauty calculamos las clases de isomorfismo para $n = 5$ (ver tabla 3.1), luego por observación y apoyados en los digrafos que no son localmente transitivos analizamos cada digrafo para saber si contenían los digrafos de la Figura 4.5 y obtuvimos 326 digrafos localmente transitivos(ver Anexo A).

APÉNDICE A

Digrafos para $n=5$

Basados en los resultados obtenidos en Nauty al calcular las clases de isomorfismo para $n=5$, se hizo un programa en C que leyera el archivo donde se encontraban todas las clases de isomorfismos generadas en Nauty y lo transformara a comandos de Latex para poder visualizar los digrafos. A continuación el código fuente del programa en C:

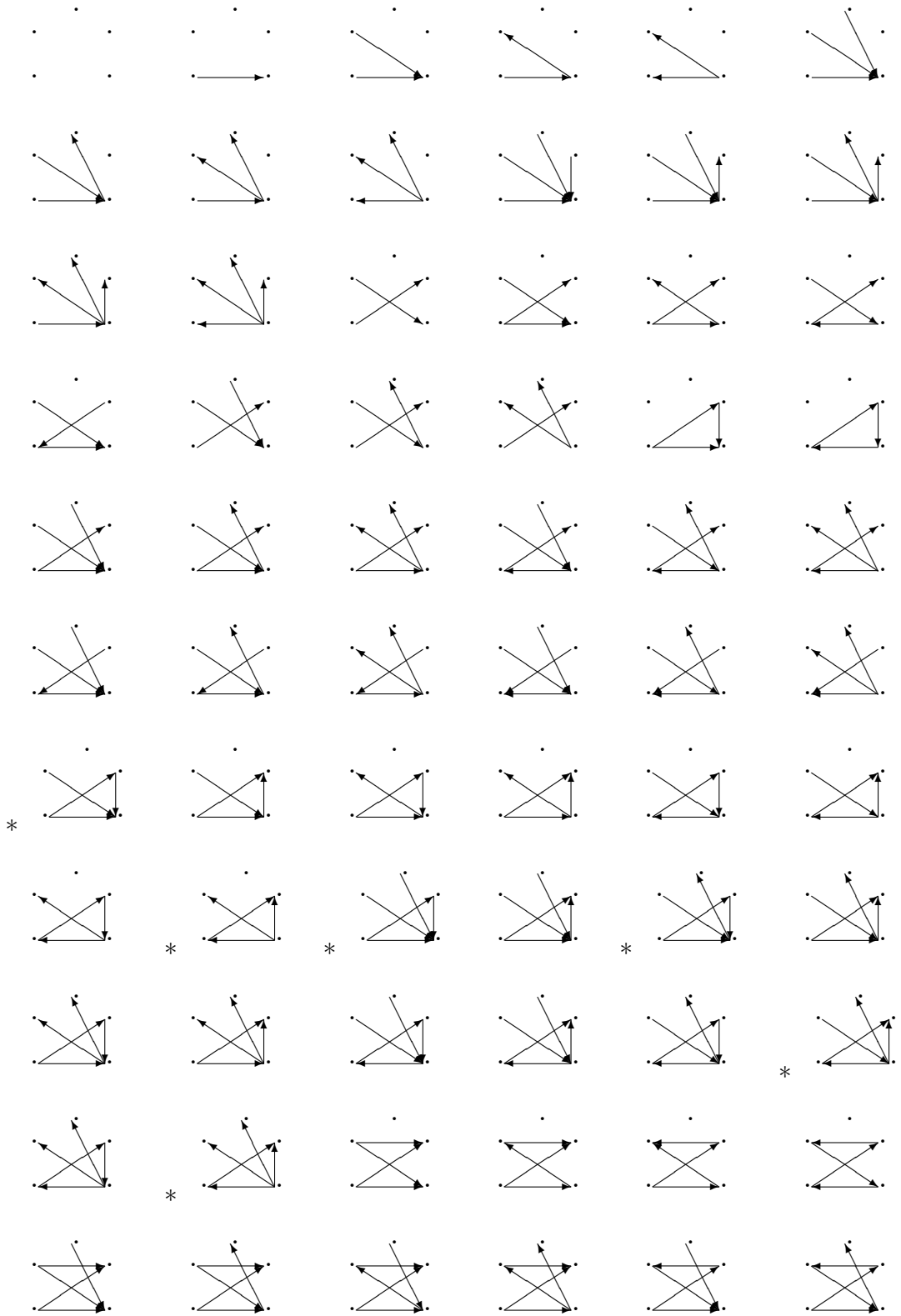
```
#include<stdio.h>
#include<ctype.h>
#include<stdlib.h>
#include<iostream.h>
#include<fstream.h>
#define P0 “\put(6,10){\Large.}\n”
#define P1 “\put(6,30){\Large.}\n”
#define P2 “\put(25,40){\Large.}\n”
#define P3 “\put(40,30){\Large.}\n”
#define P4 “\put(40,10){\Large.}\n”
#define V01 “\put(10,10){\vector(0,1){20}}\n”
#define V10 “\put(10,30){\vector(0,-1){20}}\n”
```

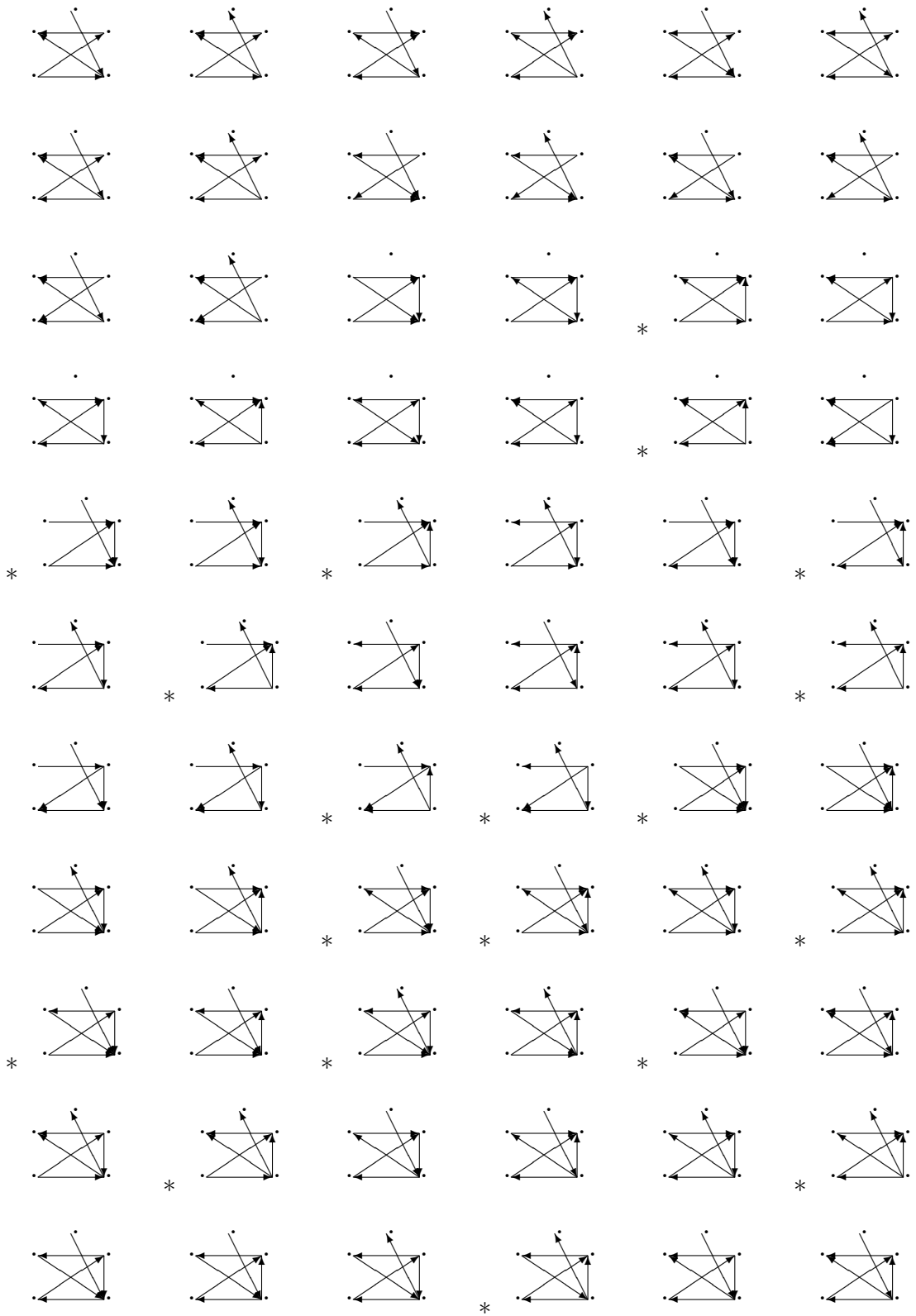
```
#define V02 “\put(10,10){\vector(1,2){15}}\n”
#define V20 “\put(25,40){\vector(-1,-2){15}}\n”
#define V03 “\put(10,10){\vector(3,2){30}}\n”
#define V30 “\put(40,30){\vector(-3,-2){30}}\n”
#define V04 “\put(10,10){\vector(1,0){30}}\n”
#define V40 “\put(40,10){\vector(-1,0){30}}\n”
#define V12 “\put(10,30){\vector(3,2){15}}\n”
#define V21 “\put(25,40){\vector(-3,-2){15}}\n”
#define V13 “\put(10,30){\vector(1,0){30}}\n”
#define V31 “\put(40,30){\vector(-1,0){30}}\n”
#define V14 “\put(10,30){\vector(3,-2){30}}\n”
#define V41 “\put(40,10){\vector(-3,2){30}}\n”
#define V23 “\put(25,40){\vector(3,-2){15}}\n”
#define V32 “\put(40,30){\vector(-3,2){15}}\n”
#define V24 “\put(25,40){\vector(1,-2){15}}\n”
#define V42 “\put(40,10){\vector(-1,2){15}}\n”
#define V34 “\put(40,30){\vector(0,-1){20}}\n”
#define V43 “\put(40,10){\vector(0,1){20}}\n”
int main(void)
{int p,p1,p2,i,d,cont,conpa;
cont=0;
conpa=0;
char no;
FILE *datos;
ofstream sale(“grafo0.tex ”);
sale<<“\begin{tabular}{cccc}\n”;
if((datos=fopen(“digrafo.txt ”,“r”))!=NULL)
{while(!feof(datos))
{cont++;
fscanf(datos,“%d ”,&p);
```

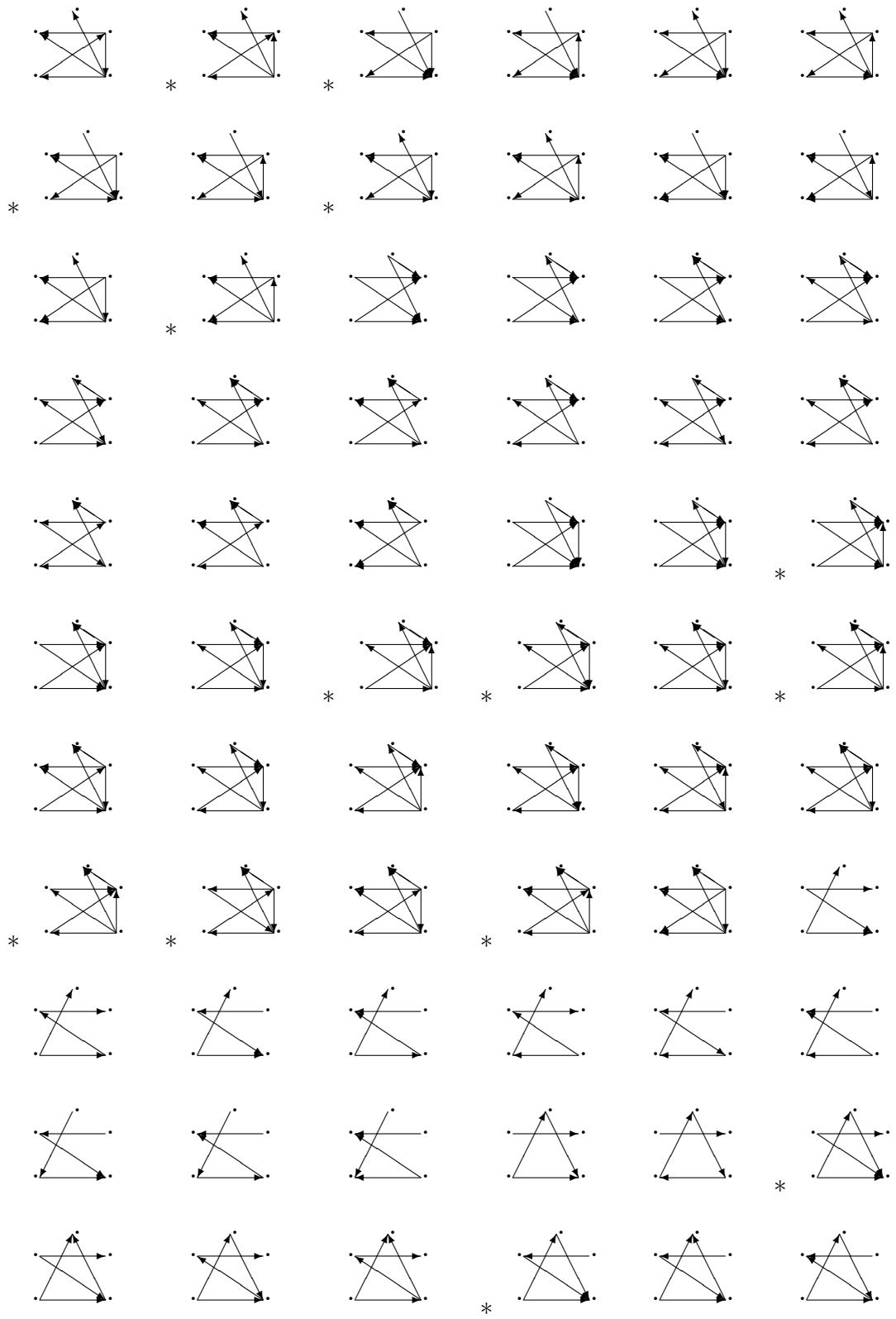
```
fscanf(datos, "%d ", &d);
sale << "\\begin{picture}(50, 50)\n";
sale << P0 << P1 << P2 << P3 << P4;
for(i=0; i<d; i++)
{fscanf(datos, "%d ", &p1);
fscanf(datos, "%d ", &p2);
switch(p1)
{case 0: {switch(p2)
{case 1: {sale << V01; break;}
case 2: {sale << V02; break;}
case 3: {sale << V03; break;}
case 4: {sale << V04; break;}
}
break;}
case 1: {switch(p2)
{case 0: {sale << V10; break;}
case 2: {sale << V12; break;}
case 3: {sale << V13; break;}
case 4: {sale << V14; break;}
}
break;}
case 2: {switch(p2)
{case 0: {sale << V20; break;}
case 1: {sale << V21; break;}
case 3: {sale << V23; break;}
case 4: {sale << V24; break;}
}
break;}
case 3: {switch(p2)
{case 0: {sale << V30; break;}}
```

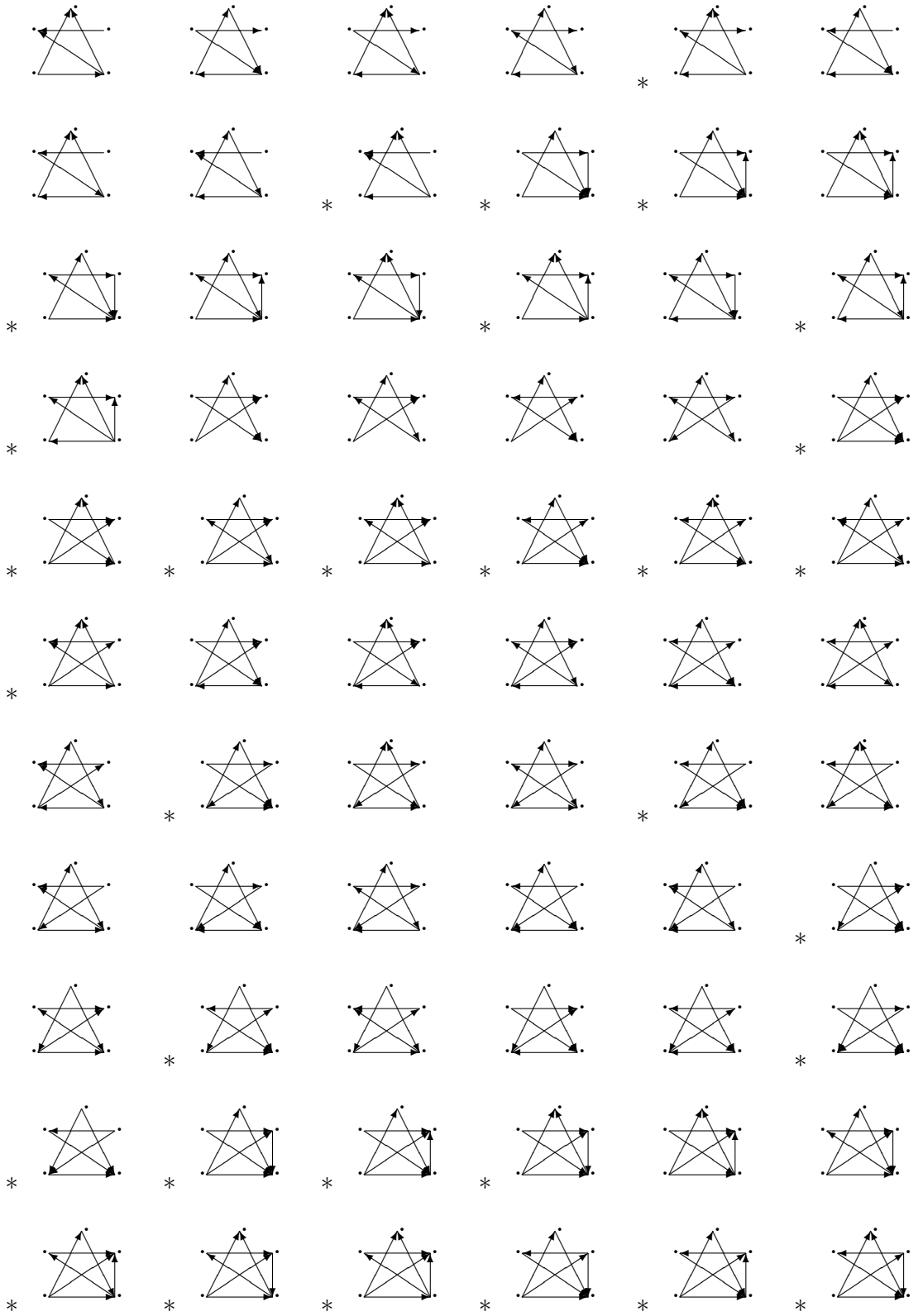
```
case 1:{sale<<V31;break;}
case 2:{sale<<V32;break;}
case 4:{sale<<V34;break;}
}
break;}
case 4:{switch(p2)
{case 0:{sale<<V40;break;}
case 1:{sale<<V41;break;}
case 2:{sale<<V42;break;}
case 3:{sale<<V43;break;}
}
break;}
}
}
sale<<“\end{picture}\n\par\n”;
if(cont==7){cont=0;conpa++;sale<<“\\\\\\n”;}
else sale<<“ \n”;
if(conpa==11)
{conpa=0;sale<<“\end{tabular}\n\newpage\n\nbegin{tabular}{cccc}\n”;}
}
fclose(datos);
}
sale<<“\end{tabular}\n”;
sale.close();
return 0;
}
```

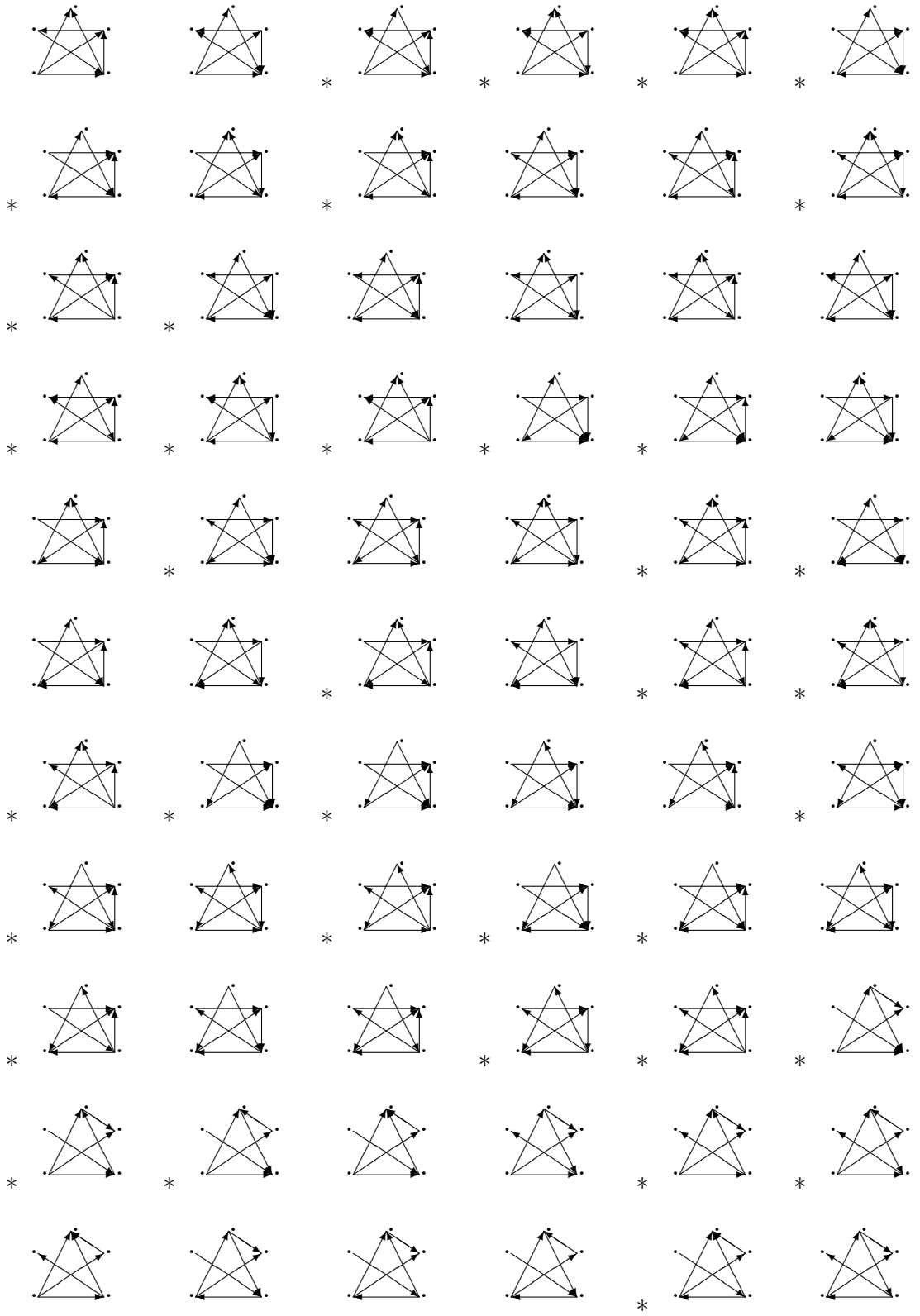
Presentamos a continuación las gráficas de las clases de isomorfismos para $n=5$, los digrafos que no son localmente transitivos tendrán un asterisco al lado izquierdo.

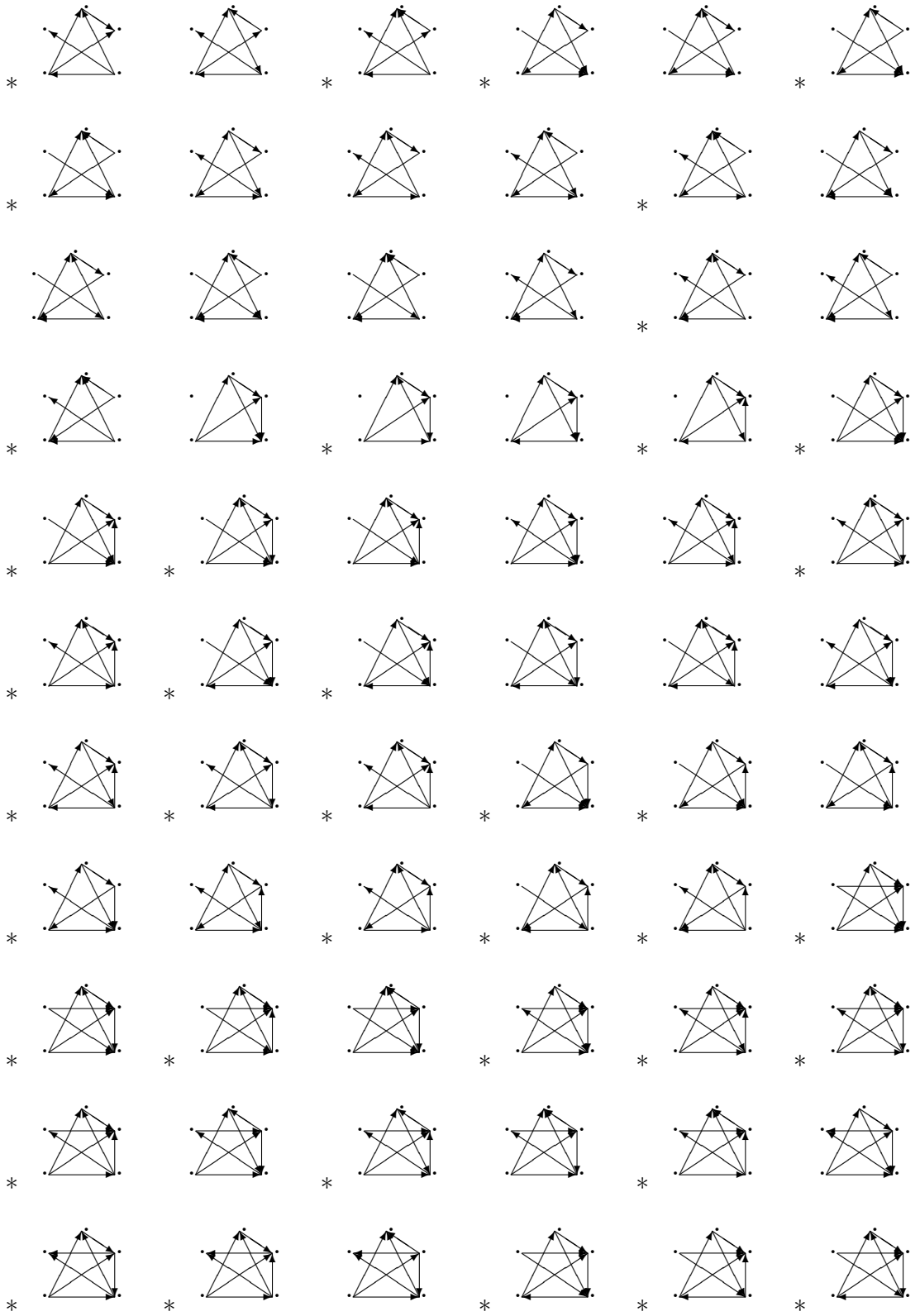


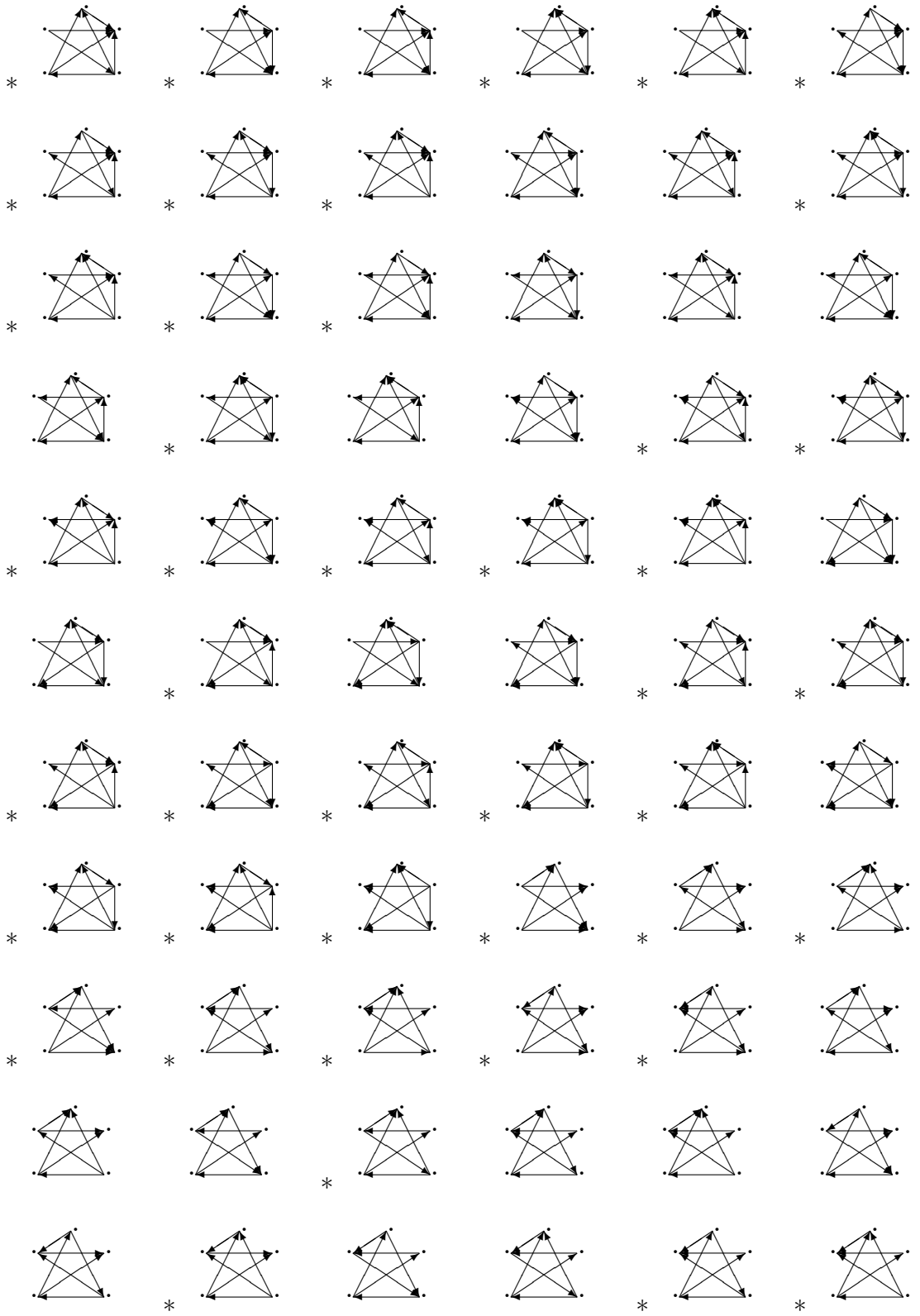


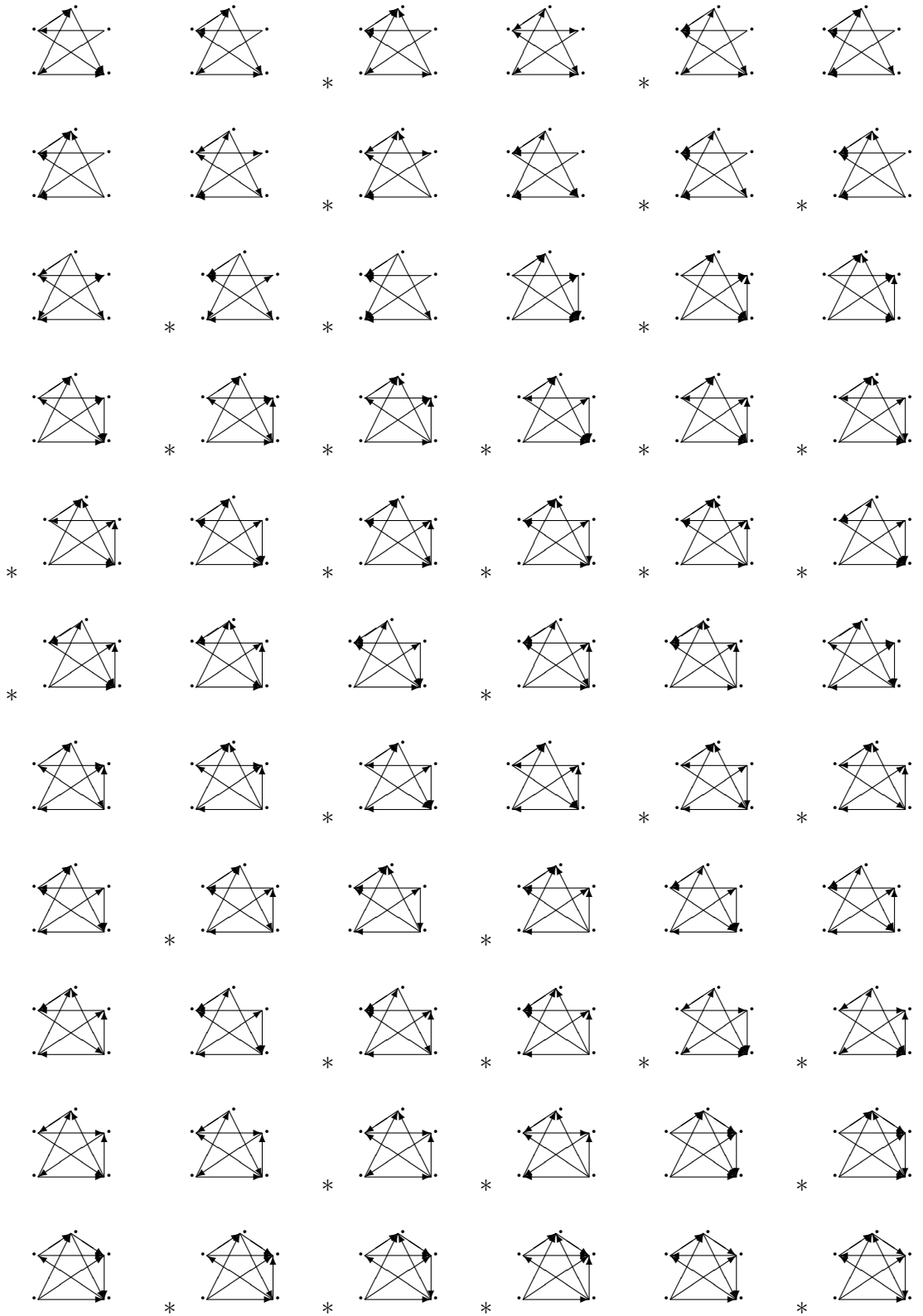


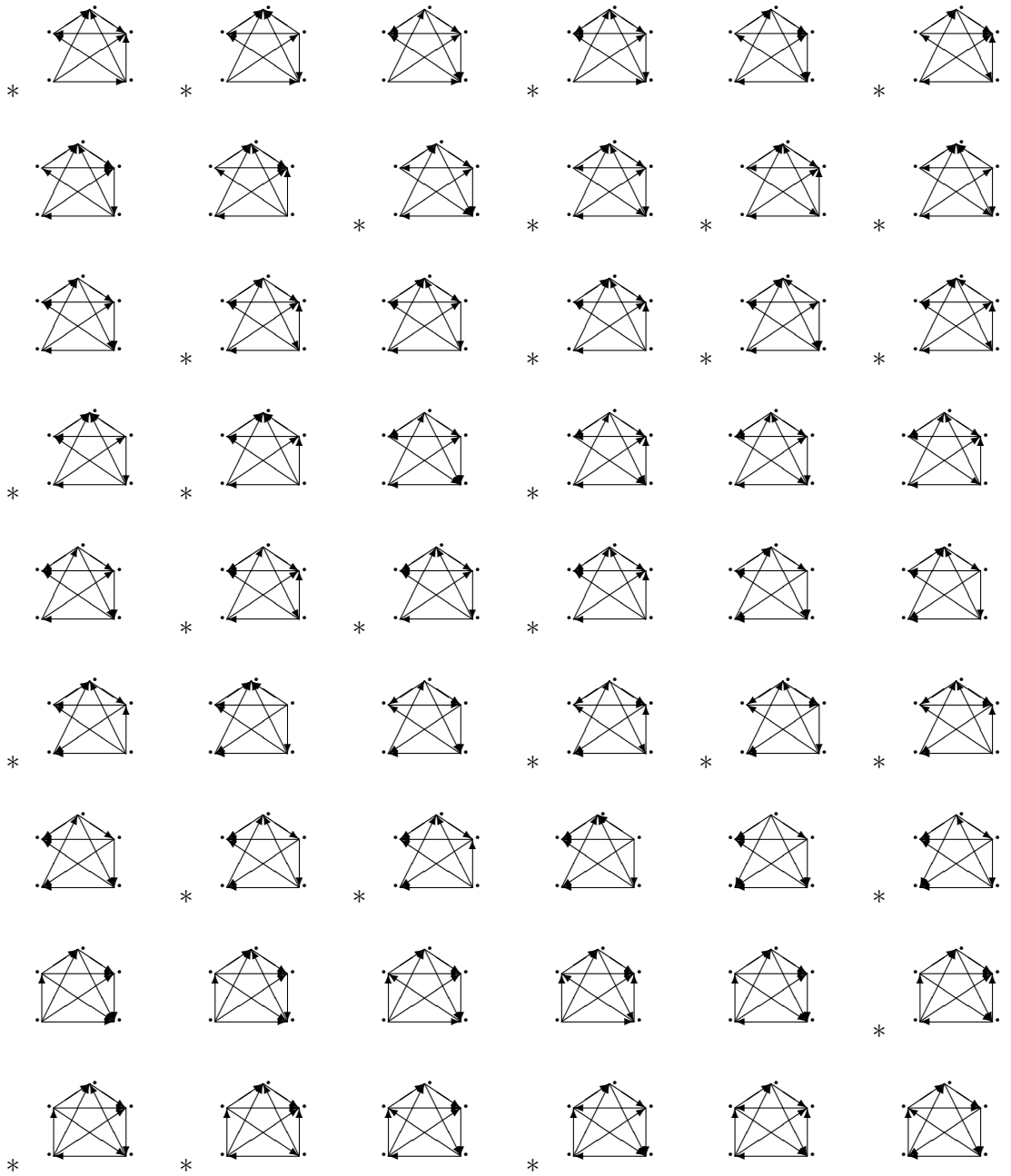












BIBLIOGRAFÍA

- [BRO] A.E. Brouwer, The enumeration of locally transitive tournaments. Technical Report ZW 138/80, Mathematische Centrum, Amsterdam, April 1980.
- [PI] PINZÓN S, *Variedades Bandeira, f -Estructuras e Métricas $(1,2)$ -Simpléticas*. Brasil, 2003. Tesis Doctoral. Universidad Estadual de Campinas.
- [HA] HARARY F, *Graph Theory*. Addison-Weley Editorial 1969.
- [TO] TORAZOS F, *Introducción a la teoría de grafos*. Washington, 1976. Monografías de la OEA.
- [RE] REYES E, *Teoría de grafos*. Ocaña, 1986. V Coloquio regional de matemáticas.
- [WI] WILSON R, *Introducción a la teoría de grafos*. Madrid, 1983. Editorial Alianza.
- [FL] FLÓREZ E, *Algunos aspectos de la teoría de Torneos*. Bucaramanga, 2003. Tesis de Pregrado, UIS.
- [PA] PAREDES M, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*. Brasil, 2000. Tesis Doctoral. Universidad Estadual de Campinas.
- [Moon] W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Reinhart and Winston, 1968.

[CPP] COHEN, N., PAREDES, M., PINZÓN S., *Locally transitive tournaments and the classification of (1,2)-symplectic metrics on maximal flag manifolds*. Aceptado para publicación en Illinois Journal of Mathematics.

[NA] <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty>