UNICOHERENCIA DÉBIL EN CONTINUOS

Autor:

FREDY GIOVANNY ARDILA RUEDA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2016

UNICOHERENCIA DÉBIL EN CONTINUOS

Autor:

FREDY GIOVANNY ARDILA RUEDA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

Director:

JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2016

Agradecimientos

A Dios por el tiempo que me ha regalado en este mundo

A mis padres Joselin Ardila Ariza y Dora Lilia Rueda Velasco por el apoyo incondicional que me han brindado durante toda mi vida. Gracias por su valentia y dedicación

Al profesor Javier Enrique Camargo Garciá por esfuerzo, dedicación y apoyo en el proyecto

Índice general

Índice de figuras

TITULO: UNICOHERENCIA DÉBIL EN CONTINUOS*

AUTOR: FREDY GIOVANNY ARDILA RUEDA**

PALABRAS CLAVES: continuo, unicoherente, débilmente unicoherente, irreducible, localmente conexo, producto.

RESUMEN

Nuestro trabajo se basa en el estudio de espacios continuos. Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. El estudio de estos espacios, se concentra en identificar propiedades importantes en ellos, como es el caso de la unicoherencia en continuos. Un continuo es unicoherente, si al verlo como la unión de dos subcontinuos, se tiene que la intersección de los dos subcontinuos es conexa. Un continuo es débilmente unicoherente, si al verlo como la unión de dos subcontinuos tales que la intersección de los dos subcontinuos tiene interior diferente de vacío, se tiene que la intersección de los dos subcontinuos es conexa. Un arco es un continuo débilmente unicoherente, mientras que una curva cerrada simple no lo es.

Este trabajo se expone en tres capítulos. En el primero, se muestran las definiciones y ejemplos más importantes para nuestro trabajo, además del estudio de herramientas básicas para la construcción de continuos, como lo son la intersección anidada de continuos, el producto numerable de continuos, el límite inverso de una sucesión inversa de continuos, y una breve exposición sobre la descomposición de continuos.

En el segundo capítulo analizamos el concepto de unicoherencia débil, la relación con la unicoherencia y la conexidad local, además de estudiar el producto de continuos débilmente unicoherentes.

Para cerrar el trabajo, y teniendo en cuenta que la unicoherencia débil no se preserva bajo funciones continuas, se exponen las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles y se estudia el comportamiento cuando el dominio es débilmente unicoherente.

---

*Trabajo de grado

**Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph. D Javier Enrique Camargo García

TITLE: WEAKLY UNICOHERENCE AT CONTINUA*

AUTHOR: FREDY GIOVANNY ARDILA RUEDA**

KEYWORDS: continuum, unicoherence, weakly unicoherence, irreducible, locally conected, product.

ABSTRACT

Our job is based in the study of continua spaces. A continuum is a nonempty métric, compact, conected space. The study of this spaces, is concentrated to identify important properties, how unicoherence at continuum. A continuum is called unicoherent, if to see it how the union of two subcontinuum, then the intersection of two subcontinuum is conected. A continuum is called weakly unicoherent, if to see it how the union of two subcontinuum such that the intersection of two subcontinuum have nonempty interior, then the intersection of two subcontinuum is conected. An arc is an weakly unicoherent continuum, while simple closed curve cerrada isn't it.

This job is exposed in three chapters. In the first, is shown definitions and examples more important for our work, also the study of basic tools for the continuum construction, how the nested intersection of continua, the numerable product of continua, the inverse limit of an inverse susesion of continua, and a brief exposition about continuum descomposition.

In the second chapter, we analize the weakly unicoherent concept, the relation with the unicoherence and locally conected, also to study the product of weakly unicoherent of continua.

To close de job and remembering that the weakly unicorerence isn't preserved under continuum functions, is showm the monotone, casimonotone, quasimonotone, freely strongly decomposable and freely decomposable functions, and the behavior when the the domain is weakly unicoherent.

---

*Bachelor Thesis

**Faculty of sciencies. School of Mathematics. Director: Ph. D Javier Enrique Camargo García

Introducción

La topología, considerada como un área de la geometría, se encarga de analizar las propiedades tanto locales como globales de un espacio topológico para caracterizarlo de alguna manera. No en vano, se le considera la geometría del sitio o estudio del lugar, significado etimológico de la palabra topología. Como rama propia de la matemática nació en el siglo XX, con sus orígenes en el proceso de brindarle bases rigurosas al análisis matemático. Su sistema básico fue la teoría de conjuntos creada en el siglo XIX por G. Cantor, y sus conceptos fundamentales derivados de la geometría del espacio Euclidiano $n-$dimensional. La primera clase de espacios abstractos con varias nociones y resultados descubiertos en la infancia de la topología, fueron generalizados con éxito como la clase de espacios métricos. El concepto de espacio métrico fue definido por Fréchet en 1906 en su tesis nombrada *Sur quelmes points du calcul fonctoonel.* El término « espacio métrico» fue introducido por Haussdorff en su trabajo tiulado *Grundzüge der Mengenlenre.* Uno de los conceptos básicos en topología ha sido la conexidad. La presente definición de este concepto fue introducido en 1893 por C. Jordan, para la clase de subconjuntos compactos en el plano. La generalización a espacios abstractos se debe a F. Riesz, N.T Lennes y F. Haussdorff. Los comienzos de la noción de compacidad se remontan al estudio del teorema de Borel demostrado en 1895, el cual indica que cada cubrimiento abierto enumerable de un intervalo cerrado tiene un subcubrimiento finito, y con la observación de Lebesgue en 1905 de que esto ocurre para cualquier cubrimiento abierto de un intervalo cerrado. La presente definición se debe esencialmente a T.S Alexandroff y P.S Urysohn en su trabajo nombrado *Mémorie sur les espaces topologiques compacts.*

La teoría en continuos se dedica al estudio de espacios métricos, conexos y compactos. Una de las propiedades que se estudian en esta rama de la topología, es la unicoherencia. Un continuo X es unicoherente si dados dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Una forma de abordar el estudio de continuos unicoherentes, es por medio de funciones. Particularmente, en [4] se muestra que una función fuertemente libremente descomponible, preserva la unicoherencia. El estudio de las funciones libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles, fue introducido por G. R. Gordh y C. B. Hughes en [4], como una generalización de las funciones monótonas que preservan conexidad local en límites inversos. Después, Hughes en el año de 1977 independientemente en [5] demuestra algunas propiedades adicionales. Otras propiedades básicas de estas clases de funciones fueron establecidas en el 2012, por los profesores J. Camargo y S. Macías en [1]. Entre las propiedades presentadas por Gordh y Hughes está que cada función libremente descomponible de un continuo unicoherente sobre un continuo localmente conexo es monótona. En [1] se mostraron algunas condiciones para que una función fuertemente libremente descomponible sea casimonótona; se probó por ejemplo, que cada función fuertemente libremente descomponible de un continuo unicoherente es casimonótona.

Posteriormente en [2], se define una generalización de la unicoherencia, llamada unicoherencia débil, concepto cuyo estudio es el objetivo de nuestro trabajo. Un continuo X es llamado débilmente unicoherente, si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Naturalmente, $[0, 1]$ es el ejemplo más claro de continuo débilmente unicoherente. Basados en [9], trabajo de grado realizado por Jayson Nova sobre continuos unicoherentes, concluimos en el Capítulo 2 de nuestro trabajo que $[0,1]^n$ y S^n para $n \geq 2$ son espacios débilmente unicoherentes. La noción de unicoherencia débil aparece como una condición suficiente sobre un continuo X para que toda función $f\colon X \to Y$ fuertemente libremente descomponible sobre cualquier continuo Y sea casimonótona, como se muestra en [2]. Por otra parte en este mismo artículo, se prueba que todo continuo irreducible es débilmente unicoherente; de esta forma, la colección de continuos débilmente unicoherentes contiene a los continuos unicoherentes e irreducibles, familias de continuos muy estudiadas en topología, particularmente en teoría de continuos. Sin embargo, la familia de continuos débilmente unicoherentes aún más grande como se muestra en el Ejemplo 2.19

En nuestro trabajo estudiaremos las principales propiedades de los continuos débilmente unicoherentes. En el Capítulo 1, procedemos a mostrar los ejemplos más importantes de continuos que sirven de apoyo para nuestro estudio, definir las clases de continuos que hacen parte de la colección de continuos débilmente unicoherentes , como lo son los continuos indescomponibles y los continuos irreducibles, a parte de dotarnos de herramientas teoricas básicas, que nos permitan la contrucción de continuos, como lo son la intersección anidada de continuos, el producto de continuos y el límite inverso de una sucesión inversa de continuos, herramientas que preservan la conexidad y la compasidad. Concluimos este capítulo, con una breve exposición sobre el espacio descomposición de un continuo y analizamos condiciones necesarias para que dicho espacio descomposición sea un continuo, con el objetivo de apoyarnos posteriormente en este análisis para concluir fácilmente cuando un espacio descomposición es un continuo.

En el Capítulo 2, analizamos detalladamente la noción de continuo débilmente unicoherente. Mostramos ejemplos claves y relacionamos esta clase de continuos con la clase de continuos unicoherentes y la clase de continuos irreducibles, mostrando que la clase de continuos débilmente unicoherentes contiene a la clase de continuos unicoherentes y a la clase de continuos irreducibles y que es aún mayor que la unión de estas dos clases. Planteamos algunas preguntas abiertas y estudiamos el producto de continuos débilmente unicoherentes. Particularmente mostramos que el producto finito de continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos, es débilmente unicoherente y que el limite inverso de una sucesión inversa de continuos débilmente unicoherentes con funciones de ligadura abiertas y sobreyectivas, es débilmente unicoherente, generalizando así los resultados destacados en el Capítulo 3 de [9].

Para culminar nuestro trabajo en el Capítulo 3, definimos las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles, para relacionarlas entre si y mostrar su comportamiento respecto de la composición. Posteriormente mostramos el comportamiento de estas funciones cuando el dominio es débilmente unicoherente y generalizamos algunos resultados de G. R. Gordh y C. B. Hughes en [4] y [5], sobre las funciones libremente y fuertemente libremente descomponibles, usando la unicoherencia débil y haciendo visibles algunas cuestiones abiertas.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo de nuestro estudio en continuos débilmente unicoherentes, precisamos antes de ciertos conocimientos básicos en la teoria de continuos, los cuales se exponen en el transcurso de este capítulo. Comenzamos por mostrar ejemplos de continuos clásicos, para luego definir y utilizar ciertas herramientas que nos permitirán construir nuevos continuos a partir de unos ya conocidos.

Empecemos por definir nuestro universo. Sea X un conjunto dotado de una métrica d. Decimos que X es un continuo si es compacto y conexo; Si $A \subseteq X$ y X es un continuo, decimos que A es subcontinuo de X, si A es conexo y compacto. Existen casos en los cuales aunque no conocemos la métrica, podemos hacer referencia a ella o podemos decir que debe existir. Es decir, durante nuestro trabajo al hablar de espacios continuos haremos referencia a espacios metrizables, conexos y compactos.

1.1. Definiciones y ejemplos

Comencemos esta sección analizando el intervalo $[0, 1]$, el cual bajo la restricción de la métrica usual en $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, nótese tambien que es un subconjuto cerrado y acotado, luego es compacto gracias al Teorema de Heine-Borel. Además es conexo, por lo tanto $[0, 1]$ es un continuo. Como cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $[0, 1]$, tenemos entonces que $[a, b]$ es un continuo en $\mathbb{R}$, para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$. El subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, es también un continuo, ya que es imagen de la función $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = e^{2i\pi\theta}$, la cual es continua. Los anteriores ejemplos permiten definir los siguientes.

Definición 1.1. *Decimos que un arco es cualquier espacio métrico homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1]$. *Análogamente, una curva cerrada simple es cualquier espacio homeomorfo a* S^1.

Naturalmente, se concluye que los arcos y las curvas cerradas simples, son ejemplos de espacios continuos, ya que todo homeomorfimo preserva las características necesarias para que sean continuos (vease [12, Teorema 17.7, pág 119] y [12, Teorema 26.3, pág 192]).

Los ejemplos anteriores son subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Tomemos ahora $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Recordemos que la bola cerrada con centro en el origen, es el conjunto denominado como $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$. Sabemos que una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado, aplicando nuevamente el teorema de Heine-Borel obtenemos la compacidad de B_n. Ahora, para ver que B_n es conexo, nótese que es arcoconexo. Definimos una *n-celda* como cualquier espacio que sea homeomorfo a B_n. Análogamente, una *n-esfera* es cualquier espacio que sea homeomorfo a $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$. Claramente las n-esferas y n-celdas son subespacios continuos de $\mathbb{R}^n$.

Hasta ahora, hemos mostrado espacios que son continuos gracias al Teorema de Heine-Borel, a la arcoconexidad y la invarianza de los espacios conexos y compactos bajo funciones continuas. En adelante necesitamos algunos resultados más, para convencernos de la conexidad de los nuevos ejemplos. Algunos de ellos, los exponemos a continuación, los cuales han sido tomados de [12, cap 8].

Lema 1.2. *Sean X un espacio topológico, Z subconjunto disconexo de X, y U, V abiertos disjuntos de Z tales que $Z = U \cup V$. Si K es un subconjunto conexo tal que $K \subseteq Z$, entonces $K \subseteq U$ o $K \subseteq V$.*

Demostración. Suponga que $K \cap U \neq \emptyset$ y $K \cap V \neq \emptyset$, entonces existen A, B abiertos disjuntos de X tales que $U = A \cap Z$ y $V = B \cap Z$. Así $K \cap A \neq \emptyset$ y $K \cap B \neq \emptyset$, luego $K = (K \cap A) \cup (K \cap B)$ donde $(K \cap A) \cap (K \cap B) = \emptyset$, lo que contradice la conexidad de K. □

Lema 1.3. *Sean X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de subespacios conexos de X tales que $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Procediendo por contradicción, suponga que existen abiertos disjuntos U, V de $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ tales que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = U \cup V$. Sea $\lambda \in \mathcal{A}$, como X_λ es conexo, por el Lema 1.2, $X_\lambda \subseteq U$ o $X_\lambda \subseteq V$. Sea $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} : X_\alpha \subseteq U\}$, entonces $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{B}} X_\alpha \subseteq U$ y $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}} X_\alpha \subseteq V$. Como $U \cap V = \emptyset$, entonces $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \emptyset$ lo que es contradictorio. □

El siguiente ejemplo muestra la importancia del lema anterior.

Ejemplo 1.4. *Un abanico armónico es un continuo.*

Tomemos el intervalo $[0, 1]$. Llamemos $v = (0, 0)$, $x_n = (1, \frac{1}{n})$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = \{(1 - t)x_n \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1]\}$$

Definimos el abanico armonico: $F_H = (\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) \cup [0, 1]$

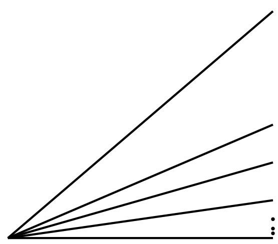


Figura 1.1: Abanico armónico

Gracias al lema anterior, podemos concluir que el abanico armónico es conexo. Además es un subespacio cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$, por lo tanto es compacto y por ende un continuo. Naturalmente llamaremos abanico armónico a cualquier espacio homeomorfo a F_H.

Ejemplo 1.5. *Un triodo simple es un continuo.*

Un *triodo simple* (ver Figura 1.2), que definimos como la unión de tres arcos unidos por un punto extremo en común también es un continuo gracias al Lema 1.3.

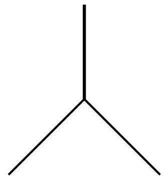


Figura 1.2: Triodo

Lema 1.6. *Sea X un espacio topológico. Sean A, B, C y D subconjuntos de X tales que $A \cup B = C \cup D$, $C \cap D = \emptyset$ y $A \subseteq C$. Entonces $D \subseteq B$.*

Demostración. Procediendo por contradicción suponga que existe $x \in D$ tal que $x \notin B$, luego $x \in A$ y por lo tanto $x \in C$, lo que implica que $C \cap D \neq \emptyset$, lo que contradice nuestra hipótesis. □

Lema 1.7. *Sean X un espacio topológico y K subconjunto conexo de X. Entonces $Cl_X(K)$ es conexo.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $\mathrm{Cl}_X(K)$ es disconexo. Entonces existen U y V abiertos de X, tales que $\mathrm{Cl}_X(K) \subseteq U \cup V$, $\mathrm{Cl}_X(K) \cap U \neq \emptyset$, $\mathrm{Cl}_X(K) \cap V \neq \emptyset$ y $(\mathrm{Cl}_X(U) \cap V) \cap (\mathrm{Cl}_X(V) \cap U) = \emptyset$. De lo anterior, tenemos que $K \subseteq \mathrm{Cl}_X(K) \subseteq U \cup V$, como K es conexo, $K \subseteq U$ o $K \subseteq V$. Supongamos que $K \subseteq U$, entonces $\mathrm{Cl}_X(K) \subseteq \mathrm{Cl}_X(U)$, lo que implica que $\mathrm{Cl}_X(K) \cap V = \emptyset$, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto $\mathrm{Cl}_X(K)$ es conexo. □

Teorema 1.8. *Sean X un espacio topológico conexo, y C subconjunto cerrado conexo de X. Suponga que $X \setminus C = A \cup B$, donde A y B son abiertos disjuntos de X. Entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos cerrados de X.*

Demostración. Primero nótese que $X = C \cup A \cup B$, luego

$$\begin{aligned} X \setminus B &= (C \cup A \cup B) \setminus B \\ &= ((C \cup A) \setminus B) \cup (B \setminus B) \\ &= (C \setminus B) \cup (A \setminus B) \cup \emptyset \\ &= C \cup A \end{aligned}$$

ya que $A \cap B = \emptyset$ y $C \cap B = \emptyset$, por lo tanto $C \cup A$ es cerrado, ya que B es abierto de X. Suponga que $A \cup C$ es disconexo. Entonces existen subconjuntos cerrados no vacios D y E de X tales que $A \cup C = D \cup E$ y$D \cap E = \emptyset$. C es conexo, por lo tanto $C \subseteq D$ o $C \subseteq E$. Suponga que $C \subseteq D$, entonces por el lema anterior $E \subseteq A$. Véase que

$$X = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = (D \cup E) \cup B = (D \cup B) \cup E$$

además, $E \cap B = \emptyset$, ya que $E \subseteq A$ y $A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $(D \cup B) \cap E = \emptyset$, lo cual es contradictorio, ya que X es conexo. De manera análoga se prueba que $B \cup C$ es conexo. $\square$

El siguiente lema es una herramienta utilizada en la invarianza de la unicoherencia débil bajo funciones cuasimonótonas como vemos en en el Teorema 3.17.

Lema 1.9. *Sean X un espacio topológico conexo y $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos cerrados y conexos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces existe $1 \leq j \leq n$, tal que $\bigcup_{i=1, i\neq j}^{n} A_i$ es conexo.*

Demostración. Sea $B_1 = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$. Si B_1 es conexo, se ha obtenido lo buscado. Si lo anterior no ocurre, entonces existen subconjuntos cerrados y disjuntos C_1, D_1 de X tales que $B_1 = C_1 \cup D_1$. Veamos que $C_1 \cup A_1$ y $D_1 \cup A_1$ son conexos. Suponga que existen E y F cerrados disjuntos de X tales que $C_1 \cup A_1 = E \cup F$. Como A_1 es conexo, por el Lema 1.2, $A_1 \subseteq E$ o $A_1 \subseteq F$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $A_1 \subseteq E$, entonces por el Lema 1.6 tenemos que $F \subseteq C_1$. De esta manera,

$$X = B_1 \cup A_1 = D_1 \cup (C_1 \cup A_1) = (D_1 \cup E) \cup F$$

donde $(D_1 \cup E) \cap F = (D_1 \cap F) \cup (E \cap F) \subseteq D_1 \cap C_1 = \emptyset$. Lo que contradice la conexidad de X. Análogamente se muestra que $D_1 \cup A_1$ es conexo. Como B_1 es disconexo, procedemos a verificar que sucede con los demás A_i. Sea A_{k_1} donde $k_1 \neq 1$. Entonces $A_{k_1} \subset C_1 \cup D_1$. Nuevamente por el Lema 1.2, suponga que $A_{k_1} \subset C_1$, entonces $D_1 \subseteq B_2 = (\bigcup_{i=1}^{k_1-1} A_i) \cup (\bigcup_{i=k_1+1}^{n} A_i)$. Si B_2 es conexo, se concluye la prueba. De no serlo, existen subconjuntos cerrados y disjuntos C_2, D_2 de X tales que $B_2 = C_2 \cup D_2$. $A_1 \cup D_1$ es conexo, así que suponga que $(A_1 \cup D_1) \subseteq D_2$ por el Lema 1.2. Nótese que podemos mostrar que $A_{k_1} \cup D_2$ es conexo de forma análoga a como se mostró que $C_1 \cup A_1$ es conexo. Asi, $(A_1 \cup D_1) \subseteq A_{k_1} \cup D_2$. Procediendo de forma análoga, y aprovechando que el conjunto de índices es finito, hallamos $A_{k_l} = E_i$ tal que $B_{j_{k_l}} = (\bigcup_{i=1}^{k_l-1} A_i) \cup (\bigcup_{i=k_l+1}^{n})$ es conexo, ya que si este no existe, se contradice la conexidad de X. $\square$

En el intervalo $[0, 1]$, ocurre que no existe un subcontinuo propio que contenga a los puntos extremos, esto nos da una idea de la familia de continuos que definiremos en breve. Intuitivamente, un continuo es irreducible, cuando existen dos puntos tales que el único subcontinuo que los contiene, es él mismo. Estos continuos fueron definidos por Ludovic Zoretti en 1909.

Definición 1.10. *Sea X un continuo. Decimos que X es irreducible, si existen dos elementos diferentes $x, y \in X$, tales que si A es un subcontinuo de X tal que $\{x, y\} \subseteq A$, entonces $X = A$. Los elementos x y y, son llamados puntos de irreducibilidad de X.*

A partir de la definición concluimos fácilmente que todo arco es irreducible, ya que sus puntos extremos son puntos de irreducibilidad. Podemos deducir también que una curva cerrada simple no es irreducible, ya que dados dos puntos diferentes en la circunferencia, existe un arco que los une, siendo este subcontinuo propio de la circunferencia como se muestra en la Figura 1.3.

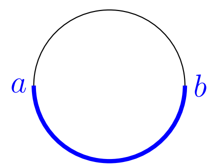


Figura 1.3: Curva cerrada simple no irreducible

Otro ejemplo de continuo no irreducible es cualquier triodo simple. Para ver ello, recuérdese que por la definición en el Ejemplo 1.5, existen $h_i\colon [0,1] \to Y_i$ para $i = 1,2,3$ encajes tales que nuestro triodo simple es $X = h_1([0,1]) \cup h_2([0,1]) \cup h_3([0,1])$. Dados dos puntos x y y en X, analizemos los siguientes casos. Si $\{x, y\} \in h_i([0,1])$ para algún $i \in \{1,2,3\}$, $h_i([0,1])$ es subcontinuo propio de X. En caso de que $x \in h_i([0,1])$ y $y \in h_j([0,1])$ para $i, j \in \{1,2,3\}$, entonces $h_i([0,1]) \cup h_j([0,1])$ es subcontinuo propio de X. Por lo tanto, cualquier triodo simple no es irreducible. No es difícil ver que el abanico armónico es otro ejemplo de continuo no irreducible. Antes de mostrar más ejemplos, nos dedicamos a exponer los resultados sobre continuos irreducibles que utilizamos en el desarrollo de nuestro trabajo, los cuales fueron tomados de [6].

Proposición 1.11. *Sea X un continuo irreducible entre a y b elementos de X. Si A es un subcontinuo propio de X tal que $a \in A$, entonces $X \setminus A$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus A$ es disconexo. Entonces, existen abiertos no vacíos disjuntos U y V de X, tales que $X \setminus A = U \cup V$. Nótese que $b \in X \setminus A$, ya que A es propio, luego $b \in U$ o $b \in V$, ya que U y V son disjuntos. Supongamos que $b \in U$. Por el Teorema 1.8, tenemos que $U \cup A$ es conexo. Además $\{a, b\} \subseteq U \cup A$, luego $X = U \cup A$, ya que X es irreducible, lo que implica que V es vacío, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto $X \setminus A$ es conexo. $\square$

Proposición 1.12. *Sea X un continuo irreducible entre a y b elementos de X. Si A y B son subcontinuos propios de X tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.*

Demostración. Nótese que si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es conexo por el Lema 1.3 y $\{a, b\} \subseteq A \cup B$, luego $X = A \cup B$ y por ende $X \setminus (A \cup B) = \emptyset$ es conexo. Ahora, si $A \cap B = \emptyset$, entonces $B \subseteq X \setminus A$. Por la proposición anterior, tenemos que $X \setminus A$ es conexo. Observese que $(X \setminus A) \setminus B = X \setminus (A \cup B)$. Suponga que $X \setminus (A \cup B)$ es disconexo. Entonces existen U y V abiertos mutuamente separados de X tales que $(X \setminus A) \setminus B = U \cup V$, $((X \setminus A) \setminus B) \cap V \neq \emptyset$ y $((X \setminus A) \setminus B) \cap U \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.8, tenemos entonces que $B \cup U$ y $B \cup V$ son conexos. Nótese que $X = A \cup B \cup \mathrm{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B)$, luego $A \cap \mathrm{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B) \neq \emptyset$, ya que X es conexo. Por lo tanto, $A \cap (\mathrm{Cl}_X(U) \cup \mathrm{Cl}_X(V)) = A \cap (\mathrm{Cl}_X(U \cup V)) \neq \emptyset$. Entonces $A \cap \mathrm{Cl}_X(U) \neq \emptyset$ o $A \cap \mathrm{Cl}_X(V) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $A \cap \mathrm{Cl}_X(U) \neq \emptyset$, entonces $A \cup \mathrm{Cl}_X(U) \cup B$ es conexo por el lema 1.7 y el Teorema 1.8, donde $\{a, b\} \subseteq A \cup \mathrm{Cl}_X(U) \cup B$, luego $X = A \cup \mathrm{Cl}_X(U) \cup B$ y $(X \setminus A) \setminus B \subseteq \mathrm{Cl}_X(U)$, lo que implica que $((X \setminus A) \setminus B) \cap V = \emptyset$, lo que es contradictorio. Por lo tanto, $X \setminus (A \cup B)$ es conexo. $\square$

El siguiente ejemplo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ será de gran utilidad en el transcurso del trabajo.

Ejemplo 1.13. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por:*

$$X = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left(x, \mathrm{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$$

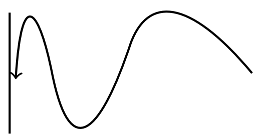


Figura 1.4: Curva senoidal del topólogo

X es denominado *Curva senoidal del topólogo*. La Figura 1.4 muestra una representación de X el cual es un continuo, ya que es un conjunto cerrado, acotado y conexo por el Lema 1.7. Nótese que la Curva senoidal del topólogo es un continuo irreducible, ya que si K es un subcontinuo tal que $\{(0,-1),(1,\operatorname{sen}(1))\} \subseteq K$, entonces por la conexidad de K tenemos que $\{(x,\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))\colon 0 < x \leq 1\} \subseteq K$, pero K también es cerrado, por lo tanto $X \subseteq K$. Otro espacio continuo que se obtiene a partir de la curva senoidal del topólogo es el Círculo de Varsovia, que consiste en unir mediante un arco el punto $(0,-1)$ con $(1,\operatorname{sen}(1))$.

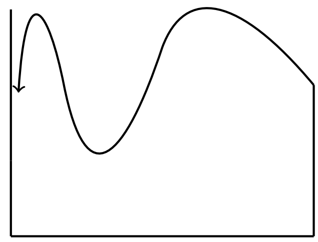


Figura 1.5: Círculo de Varsovia

No es difícil ver que el Círculo de Varsovia no es irreducible. Sean a y b elementos diferentes del Círculo de Varsovia. Si $a = (x,\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$ y $b = (y,\operatorname{sen}(\frac{1}{y}))$, sin pérdida de generalidad suponga que $x < y$. Basta tomar $K = \{(t,\operatorname{sen}(\frac{1}{t}))\colon x \leq t \leq y\}$ el cual es subcontinuo propio de Círculo de Varsovia. Si a y b están en la barra límite, claramente, existe un segmento de la barra que los une. Al suponer que a se encuentra ubicado en la barra límite y $b = (y,\operatorname{sen}(\frac{1}{y}))$, entonces el arco que une $(0,-1)$ con $(1,\operatorname{sen}(1))$, sirve de puente para unir a a y a b por medio de un arco propio del Círculo de Varsovia.

1.2. Construcción de continuos

En la sección anterior definimos continuos que son homeomorfos a la esfera y a un intervalo cerrado en los reales. Lo anterior implica que una función biyectiva y bicontinua es una herramienta que permite reconocer espacios continuos como la imagen continua de espacios conocidos. En esta sección exponemos más herramientas que permiten construir nuevos continuos partiendo de unos anteriormente conocidos.

1.2.1. Intersección anidada

El objetivo de esta subsección es exponer una de las herramientas más importantes de la teoría de continuos, no solo por su aplicación en la construcción de continuos, si no por que es parte fundamental de la desmostración de muchos resultados importantes de nuestro estudio.

Lema 1.14. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos, tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq U$ para cada $n \geq N$. Además si $X_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$, tenemos que $X \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga que existe $x_n \in X_n \setminus U$ para cada $n \in N$. Al tener que $X_n \subseteq X_1$, y como U es abierto de X_1, entonces $X_1 \setminus U$ es cerrado; pero X_1 es compacto métrico, luego $X_1 \setminus U$ es compacto y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $X_1 \setminus U$. Entonces existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \to x$ para algún $x \in X_1 \setminus U$. Por otro lado, como $x_{n_k} \in X_{n_k}$ y X_{n_k} es compacto, se tiene que $x \in X_{n_k}$, luego $x \in X \subseteq U$, lo que es contradictorio.

Para la segunda parte del Lema, nótese que si $X = \emptyset$, tomando $U = \emptyset$, por lo anterior $X_i \subseteq \emptyset$ para algún $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 1.15. *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos, tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Entonces X es un continuo.*

Demostración. Como X_n es compacto y $X_n \subseteq X_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_n es cerrado, luego X es cerrado de X_1, el cual es un espacio métrico y por ende Hausdorff, por lo tanto X es compacto. Ahora suponga que X es disconexo, entonces existen cerrados disjuntos A, B de X_1 tales que $X = A \cup B$. Como X_1 es normal, existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Así obtenemos que $X \subseteq U \cup B$; aplicando el Lema 1.14, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq U \cup B$ para cada $n \geq N$. Lo anterior implica que $X_n = (X_n \cap U) \cup (X_n \cap V)$, lo que contradice la conexidad de X_n. Es decir, X es conexo. $\square$

A partir de los resultados anteriores concluimos que los siguientes ejemplos son continuos.

Ejemplo 1.16. *Figuras de Sierpiński.*

El matemático polaco Waclaw Franciszek Sierpiński (n. 14 de marzo de 1882, Varsovia - m. 21 de octubre de 1969 en Varsovia), contribuyó en la geometría fráctal con ciertos subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los cuales presentó entre otras cosas para mostrar que es posible contruir una curva que se cruza consigo misma en todos su puntos. Estos espacios son continuos gracias al Teorema 1.15 (Las siguientes imagenes fueron construidas en XLOGO. El codigo para estas figuras se puede encontrar en los talleres del libro Introducción a la Geomtría Fractal de la autoría de la Profesora Sonia Sabogal y el profesor Gilberto Arenas).

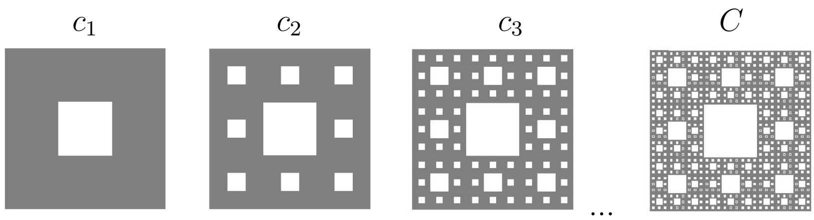


Figura 1.6: Carpeta de Sierpiński

La Figura 1.6 muestra cuatro continuos que están encajados en la 2-celda $c_0 = [0,1] \times [0,1]$. Para construir c_1, dividimos c_0 en nueve partes iguales y quitamos la parte del centro. c_2 se construye, dividiendo cada parte de c_1 en nueve partes iguales y extrayendo la parte del centro. De manera análoga construimos c_3 a partir de c_2, y, recursivamente c_n lo obtenemos de c_{n-1}. Tenemos entonces que $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} c_n$. Teniendo en cuenta que cada c_n es un continuo y que $c_{n+1} \subset c_n$, concluimos que C es un continuo. Es decir, la Carpeta de Sierpiński subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es un continuo. Podemos destacar el hecho de que cualquier curva de dimensión dos que esté en $\mathbb{R}^2$, se puede copiar mediante un homeomorfismo en la Carpeta de Sierpiński, por ello se le conoce también como *La Curva Universal de Sierpiński.*

A continuación mostramos en la Figura 1.7 una modificación a la carpeta de sierpiński, donde construimos s_1 dividiendo c_0, esta vez, en cuatro partes iguales y quitando la parte superior izquierda. Análogamente construimos s_n a partír de s_{n-1}, para obtener aplicando la intersección anidada, una curva con forma triángulo rectángulo. Claramente S es un continuo, conocido como el triángulo de Sierpiński.

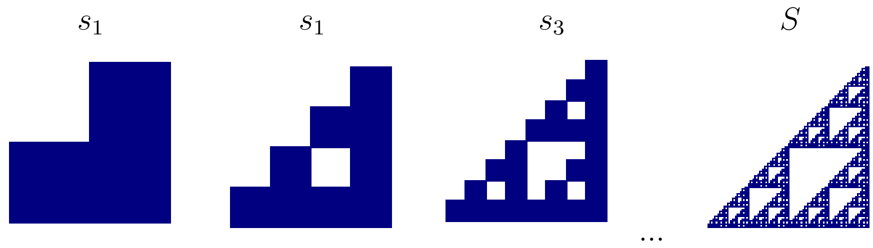


Figura 1.7: Triángulo de Sierpiński

Ejemplo 1.17. *Esponja de Menger-Sierpiński.*

Es un conjunto fractál descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica. Al igual que la Carpeta de Sierpiński constituye una generalización bidimensional del conjunto de Cantor, ésta es una generalización tridimensional de ambos. Es de destacar su propiedad de curva universal, pues es un conjunto topológico de dimensión topológica uno, y cualquier otra curva o grafo es homeomorfo a un subconjunto de la esponja de Menger-Sierpiński. La esponja de Menger-Sierpiński es un continuo.

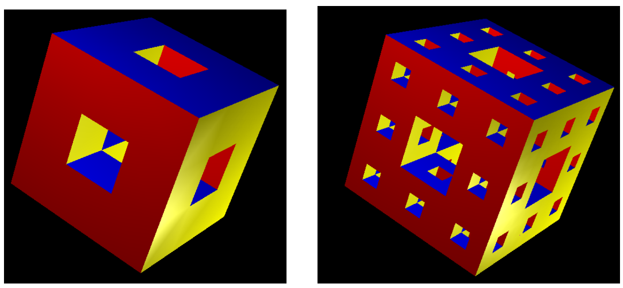


Figura 1.8: Esponja de Menger-Sierpiński

Hasta ahora, hemos dado ejemplos de continuos que se pueden ver como la unión de dos subcontinuos propios, como lo es un arco, una curva cerrada simple, e incluso el Ejemplo 1.13 o los ejemplos desarrollados por Sierpiński. Pero esto no ocurre para todos los continuos como vemos a continuación.

Definición 1.18. *Un continuo X, es llamado descomponible, si existen A y B subcontinuos propios, tales que $X = A \cup B$. Decimos que X es indescomponible, si dados A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$, entonces $A = X$ o $B = X$.*

Naturalmente, todo conjunto degenerado, es decir, todo conjunto con un solo elemento es un continuo indescomponible. A continuación mostramos un ejemplo más interesante, no sin antes dar algunas definiciones previas, que nos permitirán construir el ejemplo.

Definición 1.19. *Sean X un espacio topológico, y $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ es una cadena simple, de x hacia z, a través de y, si:*

1. *$A_i \cap A_j \neq \emptyset$, si y solo si $|i - j| \leq 1$.*
2. *$x \in A_i$, si y solo si $i = 1$.*
3. *$z \in A_i$, si y solo si $i = n$.*
4. *Existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$, tal que $y \in A_j$.*

Los elementos de $\mathcal{A}$, son llamados eslabones de la cadena.

Este ejemplo ha sido tomado de [8, 1.10, pag 7].

Ejemplo 1.20. *Existe un continuo indescomponible no degenerado en* $\mathbb{R}^2$.

Tomemos tres puntos distintos en $\mathbb{R}^2$ denominados a, b y c respectivamente. Sin importar la distancia entre ellos, podemos construir una cadena simple

$$\mathcal{C}_n = \{C_i \colon diam(C_i) < \frac{1}{2^n}, i \in \{1, ..., k_n\} \ para \ un \ k_n \in \mathbb{N}\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde cada C_i es una 2-celda, como en la Figura 1.9, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{C}_{3n+1}$ va de a hacia c, pasando por b, $\mathcal{C}_{3n+2}$ va de b hacia c, pasando por a y $\mathcal{C}_{3n+3}$ va de a hacia b, pasando por c.
2. $\bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} C_i$.

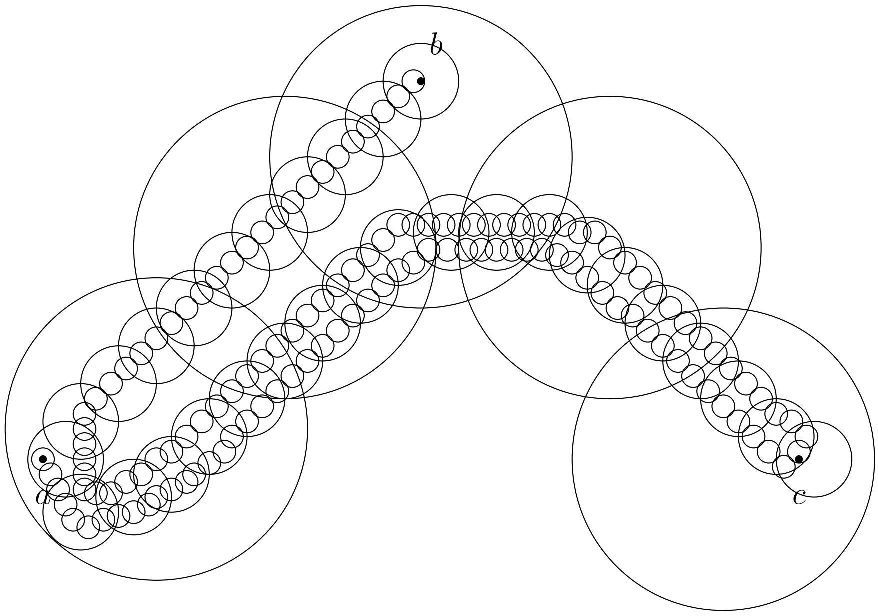


Figura 1.9: Pasos 1, 2 y 3 de continuo indescomponible no degenerado

Consideremos $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i \right)$, el cual por el Teorema 1.15 es un continuo. Nótese que

$$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{k_{3n+1}} C_i \right)$$

y supongamos que X se puede descomponer. Entonces, existen A y B subcontinuos propios no vacíos, tales que $X = A \cup B$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{a, c\} \subseteq A$. Entonces, existe $x \in B$ y $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subseteq X \setminus A \subseteq B$. Por la definición de $\mathcal{C}_n$, existe $N \in \mathbb{N}$, y $j \in \{1, ..., k_{3N+1}\}$, tal que $x \in C_j \subseteq B(x, \delta) \subseteq B$. Así

$$A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k_{3N+1}} C_i \right) \text{ donde } \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=j+1}^{k_{3N+1}} C_i \right) = \emptyset,$$

lo que contradice la conexidad de A. Si $a \in A$ y $c \notin A$, entonces $\{b, c\} \subseteq B$ y podemos mostrar que B es disconexo de manera análoga a la mostrada con A, por lo tanto $X = A$, o $X = B$. Es decir, X es indescomponible. Más interesante aún, es el hecho de que X es irreducible, afirmación que deducimos de [8, Corollary 11.15.1, Pág 203] que nos dice que cualquier continuo indescomponible es irreducible.

1.2.2. Producto numerable

Procedemos a exponer una herramienta importante en la teoría de continuos, la cual es el producto numerable de continuos. La noción de producto cartesiano se extiende a familias de espacios no numerables, pero en este caso reducimos nuestro estudio a sucesiones de continuos, para que el espacio producto sea metrizable, como lo vemos a continuación.

Definición 1.21. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de espacios métricos, definimos el producto cartesiano, denotado por* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *como el conjunto:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \colon x_n \in X_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\} \tag{1.1}$$

Además, para cada entero m, la función;

$$\pi_m \colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_m$$

tal que $\pi_m((x_n)_{n=1}^{\infty}) = x_m$ la cual llamaremos la *m-ésima proyección.*
Nos interesa ver si el producto de espacios métricos es un espacio métrico, lo cual es cierto cuando el producto es numerable. Definamos $d\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \text{ para cualesquiera } (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \tag{1.2}$$

Lo primero que debemos ver, es que la función esté bien definida. Para ello basta ver que $d(x, y)$ siempre es un número real, luego debemos analizar la convergencia de la serie. Nótese que $d(x, y)$ converge si cada $d_n(x_n, y_n)$ es acotada, pero aunque no podemos decir que cada métrica sea acotada, si podemos mostrar que existe una métrica que genera la misma topología y que es acotada, como mostramos en el siguiente lema.

Lema 1.22. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces la función* $\overline{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *definida como:*

$$\overline{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

es una métrica y genera la misma topologia que la métrica original.

Demostración. Sean x, y y z elementos de X. Veamos que $\overline{d}$ es una métrica. Naturalmente, $\overline{d}(x, y) \geq 0$, ya que $d(x, y) \geq 0$. Además, $\overline{d}(x, y) = 0$, si y solo si $d(x, y) = 0$, y esto ocurre si y solo si $x = y$. Ahora, la conmutatividad se cumple debido a que:

$$\begin{aligned} \overline{d}(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \\ &= \min\{1, d(y, x)\} = \overline{d}(y, x) \end{aligned}$$

Por último analicemos la desigualdad triángular. Suponga que $\overline{d}(x, y) = d(x, y)$, $\overline{d}(x, z) = d(x, z)$ y $\overline{d}(y, z) = d(y, z)$. Entonces $\overline{d}(x, y) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) = \overline{d}(x, z) + \overline{d}(y, z)$. por otro lado, si $\overline{d}(x, y) = 1$, tenemos que $1 \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$. Al suponer que

$\overline{d}(x,z)+\overline{d}(y,z)<1$, tendríamos que $d(x,z)+d(y,z)<1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{d}(x,y)\leq\overline{d}(x,z)+\overline{d}(y,z)$. Así $\overline{d}$ es una métrica.

Para la segunda parte del lema, sean τ_d y $\tau_{\overline{d}}$ las topologías generadas por d y $\overline{d}$ respectivamente. Veamos que $\tau_d=\tau_{\overline{d}}$. Primero veamos que $\tau_d\subseteq\tau_{\overline{d}}$. Sean $x\in X$ y $\epsilon>0$. Claramente, si $\epsilon<1$, tenemos que $B_d(x,\epsilon)=B_{\overline{d}}(x,\epsilon)$, y, si $\epsilon\geq 1$, tenemos que $B_{\overline{d}}(x,1)\subseteq B_d(x,\epsilon)$, luego $B_d(x,\epsilon)\in\tau_{\overline{d}}$, y por ende, $\tau_d\subseteq\tau_{\overline{d}}$. Ahora para ver que $\tau_{\overline{d}}\subseteq\tau_d$, tenemos que $B_d(x,\epsilon)=B_{\overline{d}}(x,\epsilon)$ si $\epsilon<1$, y, si $\epsilon\geq 1$, tenemos que $B_d(x,1)\subseteq B_{\overline{d}}(x,\epsilon)$, luego $B_{\overline{d}}(x,\epsilon)\in\tau_d$, y por ende, $\tau_{\overline{d}}\subseteq\tau_d$. $\square$

Lema 1.23. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ es un espacio métrico.*

Demostración. Al ser X_n un espacio métrico para cada $n\in\mathbb{N}$, Veamos que la función d en (1.2), es una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$.

Nótese que por el Lema 1.22, cada métrica respectiva a cada espacio, en caso de no ser acotada, se puede reemplazar por una métrica acotada, luego:

$$\begin{aligned} d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función d está bien definida. Ahora veamos que cumple con las características de una métrica.

1. $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=0$ si y solo si $x=y$.
   No es difícil ver que $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=0$, si y solo si $d_n(x_n,y_n)=0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, como d_n es una métrica para X_n, se tiene que $d_n(x_n,y_n)=0$ si y solo si $x_n=y_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, y lo anterior ocurre si y solo si $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\geq 0$.
   Por definición tenemos que $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$ para $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, donde $d_n(x_n,y_n)\geq 0$, para cada $n\in\mathbb{N}$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}\geq 0$, así $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\geq 0$.

3. $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\leq d((x_n)_{n=1}^{\infty},(z_n)_{n=1}^{\infty})+d((z_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})$.
   Por hipótesis tenemos que para cada natural n,

$$d_n(x_n,y_n)\leq d(x_n,z_n)+d(z_n,y_n)$$

así que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d(x_n,z_n)}{2^n}+\frac{d(z_n,y_n)}{2^n}\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(x_n,z_n)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(z_n,y_n)}{2^n}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) \leq d((x_n)_{n=1}^{\infty},(z_n)_{n=1}^{\infty})+d((z_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})$.

□

Lema 1.24. *π_m es continua para cada entero m.*

Demostración. Sea $\epsilon>0$, tomemos $\delta=\dfrac{\epsilon}{2^m}$. Queda mostrar que $\pi_m(B_d((x_n)_{n=1}^{\infty},\delta))\subseteq B_{d_m}(x_m,\epsilon)$ para cualquier $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$.
Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_d((x_n)_{n=1}^{\infty},\delta)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}=d((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})<\delta$, luego $\frac{d_m(x_m,y_m)}{2^m}<\delta=\frac{\epsilon}{2^m}$, es decir $d_m(x_m,y_m)<\epsilon$, por lo tanto $\pi_m((y_n)_{n=1}^{\infty})\in B_{d_m}(x_m,\epsilon)$. □

Por otro lado con el producto cartesiano se puede definir una topología que se caracteriza por ser la más fina que hace continuas las proyecciones, la cual llamaremos topología producto y tiene una relación especial con la métrica dada en el Lema 1.23.

Definición 1.25. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Definimos*

$$\mathcal{B}=\{\textstyle\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)\colon U_i \text{ es abierto de } X_i,\ y\ n\in\mathbb{N}\}$$

A $\mathcal{B}$ la llamaremos base producto y genera la topología más fina que hace que las proyecciónes sean continuas. Denotaremos por $\tau_{\mathcal{B}}$ a la topología producto, generada por $\mathcal{B}$.

No es difícil probar que en efecto la familia de subconjuntos $\mathcal{B}$ es una base. Nuestro proposito no es abordar el hecho de que $\tau_{\mathcal{B}}$ es la topología más fina que hace posible la continuidad de las proyecciones. En cambio mostraremos que $\tau_{\mathcal{B}}$ y τ_d son equivalentes.

Proposición 1.26. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Entonces $\tau_{\mathcal{B}}$ y τ_d son equivalentes.*

Demostración. veamos que $\tau_{\mathcal{B}}\subseteq\tau_d$. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, $n\in\mathbb{N}$ y $\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)\in\mathcal{B}$. Como X_i es un espacio métrico para cada $i\in\{1,2,...,n\}$, basta tomar los abiertos básicos, luego existe $\epsilon_i>0$ tal que $U_i=B_{d_i}(x_i,\epsilon_i)$, para algún $x_i\in X_i$ tal que $\pi_i((x_n)_{n=1}^{\infty})=x_i$, para cada $i\in\{1,2,...,n\}$. Sea

$$\epsilon=\text{mín}\left\{\frac{\epsilon_i}{2^i}\colon i\in\{1,2,...,n\}\right\}$$

entonces $B_d((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)$. En efecto, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_d((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}<\epsilon<\frac{\epsilon_i}{2^i}$, en particular,

$$\frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}<\frac{\epsilon_i}{2^i}$$

luego $d_i(x_i,y_i)<\epsilon_i$ para cada $i\in\{1,2,...,n\}$, por lo tanto $y_i\in B_{d_i}(x_i,\epsilon_i)$. Así $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)$, es decir, $B_d((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)$ y por ende $\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(U_i)\in\tau_d$.

Ahora para ver que $\tau_d \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\epsilon > 0$. entonces $B_d((x_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon)$ es una abierto básico de τ_d. sean $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\textstyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\epsilon}{2} \text{ y } \epsilon_i = \dfrac{\epsilon}{2^N}$$

Veamos que $\bigcap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(B_{d_i}(x_i, \epsilon_i)) \subseteq B_d((x_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon)$, para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$.
Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(B_{d_i}(x_i, \epsilon_i))$, entonces tenemos que: $d_i(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{2^N}$. Además:

$$\begin{aligned} d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{\epsilon}{2^N} \quad \text{y que} \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < \dfrac{\epsilon}{2}$$

concluimos que:

$$\begin{aligned} d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \\ &< \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\epsilon}{2^N} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \frac{\epsilon}{2^N} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_d((x_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon)$, es decir, $B_d((x_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon) \in \tau_{\mathcal{B}}$, luego $\tau_d \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. □

Hasta aquí podemos concluir que el producto numerable de espacios métricos resulta ser un espacio métrico. Sin embargo nuestro objetivo es ver que el producto numerable de continuos es un continuo, como lo vemos en las siguientes proposiciones, las cuales se pueden encontrar en un curso básico de topología.

Proposición 1.27. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Entonces, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto.*

Demostración. Para ver que el producto numerable de compactos, es compacto, basta mostrar que toda sucesión de elementos del producto cartesiano, admite una subsucesión convergente. Sea $(z_m)_{m=1}^{\infty} \in Z$ una sucesión arbitraria de elementos del producto cartesiano $Z = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Por definición de producto cartesiano tenemos que:

$$z_m = (x_n^m)_{n=1}^{\infty} = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m, ...)$$

Donde $x_n^m \in X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego $(x_n^m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de X_n. Como X_n es compacto, existe $(x_n^{m_{k_n}})_{k_n=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n^m)_{m=1}^{\infty}$, tal que $x_n^{m_{k_n}} \to x_n$ para algún $x_n \in X_n$, para cada entero n. Sea $z = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, entonces $(z_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ es subsucesión de $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ y $z_{m_n} \to z$. Lo anterior implica que toda suceción en Z admite una subsuceción convergente, por lo tanto Z es compacto. □

Proposición 1.28. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos conexos. Entonces, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo.*

Demostración. Comenzemos probando que el producto de dos espacios conexos, es conexo. Sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$, como $X_1 \times \{x_2\}$ es homeomorfo X_1 (véase que $f\colon X_1 \to X_1 \times \{x_2\}$ definida por $f(x) = (x, x_2)$ es un homeomorfismo), y $X_2 \times \{x_1\}$ es homeomorfo X_2 (véase que $g\colon X_2 \to X_2 \times \{x_1\}$ definida por $g(x) = (x, x_1)$ es un homeomorfismo), tenemos que $X_1 \times \{x_2\}$ y $X_2 \times \{x_1\}$, son conexos. Ahora como $(X_1 \times \{x_2\}) \cap (X_2 \times \{x_1\}) \neq \emptyset$, se tiene $(X_1 \times \{x_2\}) \cup (X_2 \times \{x_1\})$ es conexo por el Lema 1.3. Nótese que $X \times Y = \bigcup_{x \in X_1} (X_1 \times \{y\}) \cup (X_2 \times \{x\})$, $\forall y \in X_2$. Aplicando el Lema 1.3 nuevamente, concluimos que $X \times Y$ es conexo. De lo anterior concluimos que el producto finito de espacios conexos, es conexo.

Probemos ahora que el producto numerable de espacios conexos, es conexo. Sea $(x_n^0)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, y definamos para cada entero n, $Y_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \pi_m((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \pi_m((x_n^0)_{n=1}^{\infty})$ para cada $m \geq n\}$. Se tiene entonces que Y_n es homeomorfo a $\prod_{i=1}^{n} X_i$ para cada n ($f\colon Y_n \to \prod_{i=1}^{n} X_i$, definida por: $f((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=1}^{n}$, es un homeomorfismo), por lo tanto Y_n es conexo. Claramente, $(x_n^0)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$, luego por el Lema 1.3, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ es conexo. Veamos que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \mathrm{Cl}_{\prod_{n=1}^{\infty} X_n} (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y U_i abierto de $X_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i)$ es un abierto de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Sea $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Definamos $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ de la siguiente manera:

$$x_m = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad m \leq n \\ \\ x_m & \text{si} \quad m > n \textit{ para un } x_m \in X_m \end{cases}$$

Es claro que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U \cap Y_n$, lo cual implica que para cualquier abierto del producto, la intersección con Y_n, es no vacía, siendo n el número de imágenes inversas de la proyección intersectadas, luego $\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \mathrm{Cl}_{\prod_{n=1}^{\infty} X_n} (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n)$. □

Aplicando el Lema 1.23, la Proposición 1.27 y la Proposición 1.28, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.29. *El producto numerable de espacios continuos, es un espacio continuo.*

Un espacio muy importante en teoría de continuos, es el famoso *cubo de Hilbert*, denotado por $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, el cual es el producto numerable del intervalo $[0, 1]$. Entonces el *cubo de Hilbert* es un espacio continuo.

Ejemplo 1.30. *Toro*

Al principio del capítulo vimos que S^1 es un continuo, así que el producto numerable de S^1 también es un continuo. Un caso particular del anterior resultado, es $S^1 \times S^1$ al que le asignamos el nombre de *Toro*, que proviene del latín *Torus* y que significa elevación curva. Así el *Toro* es un continuo de $\mathbb{R}^4$ y de cierta manera, en $\mathbb{R}^3$ lo podemos ver como una especie de dona, como se muestra en la siguiente imagen.

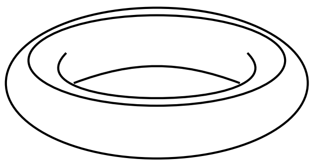


Figura 1.10: Toro

1.2.3. Límite inverso

En esta parte de nuestro trabajo estudiamos un subconjunto del producto cartesiano que nos permitirá contruir continuos interesantes, aparte de brindarnos las bases para el posterior estudio de continuos débilmente unicoherentes. En esta sección se hace nuevamente visible la importancia de la intersección anidada de continuos expuesta anteriormente.

Definición 1.31. *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos y $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ función continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Decimos que la doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, y f_n^{n+1} es llamada función de ligadura.*

Definimos también el conjunto $X_\infty \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ (tambien denotado en algunas ocasiones como, $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$), el cuál llamaremos limite inverso de la doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ como:

$$X_\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \colon f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplo 1.32. *La intersección anidada de continuos, se puede expresar como un límite inverso.*

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ tal que $f_n^{n+1} = I_{X_{n+1}}$, entonces $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa y $X_\infty \cong \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, ya que si $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$, tenemos que $z_n = (x)_{n=1}^{\infty}$, para algún $x \in X_1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, ademas $\phi\colon X_\infty \to \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ definida por $\phi((z_n)_{n=1}^{\infty}) = \pi_1(z) = z_1$ está bien definida y es un homeomorfismo. Por lo tanto $X_\infty = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es un continuo.

Las funciones proyección en el producto cartesiano, son herramienta básica e imprescindible para relacionar el producto cartesiano con cada uno de los continuos de la sucesión. Como podemos darnos cuenta en la definición, el límite inverso de una sucesión de continuos es subconjunto del producto cartesiano, por tanto podemos utilizar la restricción de cada proyección para relacionar el límite inverso con cada uno de los continuos de la sucesión, de esta manera definimos $f_n\colon X_\infty \to X_n$ tal que $f_n = \pi_n|_{X_\infty}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $f_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n$. Además, definamos $f_i^{n+1}(x) = (f_i^{i+1} \circ f_{i+1}^{i+2} \circ ... \circ f_{n-1}^{n} \circ f_n^{n+1})(x)$ para cualquier $i \leq n$.

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[dr, "f_n^{n+1}"'] & & X_\infty \arrow[ll, "f_{n+1}"'] \arrow[dl, "f_n"] \\ & X_n & \end{tikzcd}$$

Lema 1.33. *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$Q_n(X_i, f_i^{i+1}) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \colon f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i \text{ para cada } i \leq n\}$$

Entonces:

1. $Q_{n+1}(X_i, f_i^{i+1}) \subseteq Q_n(X_i, f_i^{i+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ y $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ son homeomorfos.
3. $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.

Demostración. Para probar que $Q_{n+1}(X_i, f_i^{i+1}) \subseteq Q_n(X_i, f_i^{i+1})$, nótese que si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_{n+1}(X_i, f_i^{i+1})$, entonces $f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i$, para cada $i \leq n+1$, luego $f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ para cada $i \leq n$, por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.

Veamos ahora que $Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ y $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ son homeomorfos. Sean $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_n \colon Q_n(X_i, f_i^{i+1}) \to \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \; y \; \psi_n \colon \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \to Q_n(X_i, f_i^{i+1})$$

definidas de la siguiente manera:

$$\rho_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}$$

y

$$\psi_n((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) = (f_1^{n+1}(x_{n+1}), f_2^{n+1}(x_{n+1}), ..., f_n^{n+1}(x_{n+1}), x_{n+1}, ...).$$

Para ver la continuidad de ρ_n, nótese que:

$$(\pi_j \circ \rho_n)((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \pi_j(\rho_n((x_i)_{i=1}^{\infty})) = \pi_j((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) = x_j,$$

para cada $j \leq n+1$. Lo anterior indica que $\pi_j = \pi_j \circ \rho_n$ es continua, para cada $j \leq n+1$, por lo tanto ρ_n es continua.

Ahora, veamos la continuidad de ψ_n. Sean $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ y $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, un abierto básico de $Q_n(X_i, f_i^{i+1})$, tal que $\psi_n((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) \in U$. Debemos ver que existe un abierto V de $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, tal que $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in V$. Para ello, definamos los siguientes subconjuntos:

$$\mathcal{A} = \{n_j : n_j > n+1, j \in \{1, 2, ..., k\}\} \text{ y } \mathcal{B} = \{n_j : n_j \leq n+1, j \in \{1, 2, ..., k\}\}$$

Sea $W = \bigcap_{b\in\mathcal{B}}(f_b^{n+1})^{-1}(U_b) \subseteq X_{n+1}$. Como U_b es abierto de X_b, para cada $b \in \mathcal{B}$, y f_b^{n+1}, composición de funciones continuas, es continua, se tiene que $(f_b^{n+1})^{-1}(U_b)$ es abierto de X_{n+1}, luego W es abierto de X_{n+1}. Tomemos $V = \pi_{n+1}^{-1}(W)\cap(\bigcap_{a\in\mathcal{A}}\pi_a^{-1}(U_a))$ y veamos que $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in V$. Nótese que $\pi_{n+1}((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) = x_{n+1} = (f_b^{n+1})^{-1}(x_{n+1})$, para cada $b \in \mathcal{B}$. Luego $x_{n+1} \in \bigcap_{b\in\mathcal{B}}(f_b^{n+1})^{-1}(U_b) = W$ y así $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in \pi_{n+1}^{-1}(W)$ Además, para cada $a \in \mathcal{A}$, $\pi_a((x_i)_{i=n+1}^{\infty})x_a \in U_a$, es decir, $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in \bigcap_{a\in\mathcal{A}}\pi_a^{-1}(U_a)$. Por lo tanto, $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in V$. Para concluir la continuidad de ψ_n, queda mostrar, que $\psi_n(V) \subseteq U$. Sea $(z_i)_{i=n+1}^{\infty} \in V$. Por la definición de ψ_n, tenemos que

$$\psi_n((z_i)_{i=n+1}^{\infty}) = (f_1^{n+1}(z_{n+1}), f_2^{n+1}(z_{n+1}), ..., f_n^{n+1}(z_{n+1}), z_{n+1}, ...)$$

donde $z_{n+1} \in W$, luego $f_b^{n+1}(z_{n+1}) \in U_b$, para cada $b \in \mathcal{B}$ y $z_a \in U_a$, para cada $a \in \mathcal{A}$, por lo tanto $\psi_n(V) \subseteq U$.

Por último, para mostrar que $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$, es fácil ver, que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_\infty$, si y solo si, tenemos que , $f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$, y esto ocurre si y solo si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$. □

El lema anterior, implica analizar los limites inversos, como intersección anidada de continuos, lo que nos permite concluir el siguiente teorema.

Teorema 1.34. *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces X_∞ es continuo.*

Demostración. En la demostración del Lema 1.33, vimos que ψ_n es una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Notese que su dominio, es un continuo gracias al Corolario 1.29. Además ψ_n es sobreyectiva, por lo tanto $Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ es un espacio continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, concluimos que X_∞ es continuo, aplicando el Lema 1.33 y el Teorema 1.15. □

En la Definición 1.25, mostramos cómo son los abiertos básicos del producto cartesiano. A continuación, veremos una base para el límite inverso de una sucesión inversa.

Proposición 1.35. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, con límite inverso X_∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$B_n = \{(f_n)^{-1}(U_n) : U_n \text{ es abierto de } X_n\} \text{ y } \mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

entonces $\mathfrak{B}$ es una base para la topología de X_∞.

Demostración. Teniendo en cuenta que el límite inverso de una sucesión inversa, es subconjunto del producto cartesiano, tenemos que los abiertos básicos de X_∞, son de la forma,

$$\bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_j})^{-1}(U_{n_j})$$

para algún U_{n_j} abierto de X_{n_j}. Basta mostrar entonces, que existe un elemento $(f_n)^{-1}(U_n)$, de nuestra base $\mathfrak{B}$, tal que $(f_n)^{-1}(U_n) = \bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_j})^{-1}(U_{n_j})$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún U_n, abierto de X_n .

Suponga que $n_k = \text{máx}\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ y definamos $\mathrm{U}_{n_k} = \bigcap_{j=1}^{k}((f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j}))$. Entonces, gracias a la continuidad de las funciones enlace, tenemos que, U_{n_k} es intersección finita de abiertos y por lo tanto abierto de X_{n_k}. Notese que:

$$(f_{n_k})^{-1}(\mathrm{U}_{n_k}) = f_{n_k}^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_j}^{n_k}(U_{n_j}))\right) = \bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_k}^{-1}\circ(f_{n_j}^{n_k})^{-1})(U_{n_j})$$

donde $(f_{n_k}^{-1}\circ(f_{n_j}^{n_k})^{-1})(U_{n_j}) = ((f_{n_j}^{n_k}\circ f_{n_k})^{-1})(U_{n_j}) = f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, luego :

$$(f_{n_k})^{-1}(\mathrm{U}_{n_k}) = \bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$$

lo cual muestra lo requerido. □

Lema 1.36. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Entonces, f_n es una función sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, si y solo si f_n^{n+1} es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que f_n es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f_k^{k+1} no es sobreyectiva. Entonces, $f_k^{k+1}(X_{k+1}) \subsetneq X_k$. Como f_{k+1} es sobre, $f_{k+1}(X_\infty) = X_{k+1}$, de modo que $f_k(X_\infty) = f_k^{k+1}(f_{k+1}(X_\infty)) = f_k^{k+1}(X_{k+1}) \subsetneq X_k$, lo que indica que f_k no es sobreyectiva, contracidiendo nuestra hipótesis. Por lo tanto f_n^{n+1} es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, veamos que f_{n+1} es sobreyectiva, si f_n^{n+1} es sobreyectiva. Sea $y \in X_n$. Como $f_n^{n+1}(X_{n+1}) = X_n$, existe $z \in X_{n+1}$ tal que $f_n^{n+1}(z) = y$. Tomemos $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$x_m = \begin{cases} x \in (f_n^m)^{-1}(z) & \text{si} \quad m \geq n+1 \\ \\ f_m^n(y) & \text{si} \quad m \leq n-1 \end{cases}$$

De esta manera $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in X_\infty$ y $f_n((x_m)_{m=1}^{\infty}) = y$, por lo tanto, f_n es sobreyectiva. Como n es arbitrario, concluimos que f_n es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$. □

El Ejemplo 1.32 nos permite ver cualquier intersección anidada como un límite inverso con funciones de ligadura no sobreyectivas. Tomemos entonces, $X_n = (0, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión anidada de espacios métricos, tales que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset.$$

Lo que nos indica que si las funciones de ligadura no son sobreyectivas, puede que el límite inverso sea vacío. En cambio, si las funciones de ligadura son sobreyectivas y los espacios son no vacíos, por el lema anterior podemos concluir lo siguiente.

Corolario 1.37. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa tal que $X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si f_n es una función sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $X_\infty \neq \emptyset$.*

Proposición 1.38. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos, con funciones de ligadura sobreyectivas. Entonces las proyecciones son abiertas si y solo si las funciones de ligadura son abiertas.*

Demostración. Veamos primero que si las proyecciones son funciones abiertas, entonces las funciones de ligadura también lo son. Sea U_{n+1} abierto de X_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que $f_n = f_n^{n+1} \circ f_{n+1}$, luego $f_n \circ (f_{n+1})^{-1} = f_n^{n+1} \circ f_{n+1} \circ (f_{n+1})^{-1} = f_n^{n+1}$, así que $f_n^{n+1}(U_{n+1}) = f_n((f_{n+1})^{-1}(U_{n+1}))$. Como las proyecciones son continuas, $(f_{n+1})^{-1}(U_{n+1})$ es abierto de X_∞, pero también son abiertas, luego $f_n((f_{n+1})^{-1}(U_{n+1}))$ es abierto de X_n, es decir $f_n^{n+1}(U_{n+1})$ es abierto de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto las funciones de ligadura son funciones abiertas.

Ahora veamos que si las funciones de ligadura son abiertas, entonces las proyecciones lo son. Sean $m \in \mathbb{N}$, U abierto de X_∞ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in U$. Entonces por la Proposición 1.35 existe $N \in \mathbb{N}$ y U_N abierto de X_N tal que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in (f_N)^{-1}(U_N) \subseteq U$. Teniendo en cuenta que $x_m = f_m((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in f_m((f_N)^{-1}(U_N)) \subseteq f_m(U)$, considere los siguientes casos:

1. Si $N \geq m$;

$$f_m((f_N)^{-1}(U_N)) = f_m^N(f_N((f_N)^{-1}(U_N))) = f_m^N(U_N),$$

como las funciones de ligadura son abiertas, $f_m^N(U_N)$ es abierto de X_m, luego $f_m(U)$ es abierto de X_m $m \in \mathbb{N}$.

2. Si $m > N$ recordando que $f_N = f_N^m \circ f_m$, tenemos que $(f_N)^{-1} = (f_m)^{-1} \circ (f_N^m)^{-1}$. Así;

$$f_m((f_N)^{-1}(U_N)) = f_m((f_m)^{-1}((f_N^m)^{-1}(U_N))) = (f_N^m)^{-1}(U_N).$$

Como las funciones de ligadura son continuas y sobreyectivas, $(f_N^m)^{-1}(U_N)$ existe, y es abierto de X_m, es decir $f_m(U)$ es abierto de X_m $m \in \mathbb{N}$.

□

Proposición 1.39. *Sean* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos, con límite inverso* X_∞, *y* A *subconjunto compacto de* X_∞. *Entonces,* $\{f_n(A), g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, *donde* $g_n^{n+1} = f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}$, *es una sucesión inversa, con funciones de enlace sobreyectivas. Además,*

$$\varprojlim\{f_n(A), g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty$$

Demostración. Para ver que que las funciones de ligadura son sobreyectivas, nótese que están definidas de la siguiente manera:

$$g_n^{n+1} \colon f_{n+1}(A) \to f_n(A)$$

Sea $x \in f_n(A)$, entonces existe $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in A$, tal que $a_n = f_n((a_i)_{i=1}^{\infty}) = x$. Como $A \subseteq X_\infty$, tenemos que $f_n^{n+1}(a_{n+1}) = a_n$, por lo tanto $g_n^{n+1}(a_{n+1}) = a_n = x$. Conluyendo que las funciones de ligadura son sobreyectivas.

Ahora, es claro que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(A), g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, si y solo si, $f_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in f_n(A)$ y $g_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego, $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(A), g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, si y solo si, $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)$ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_\infty$. por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(A), g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, si y solo si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in [\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)] \cap X_\infty$.

Para ver que $A = [\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)] \cap X_\infty$, sea $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in A$ un elemento arbitrario. Entonces $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (f_i((a_i)_{i=1}^{\infty}))_{i=1}^{\infty}$, por lo tanto, $A \subseteq [\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)] \cap X_\infty$. Por otro lado, Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in [\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)] \cap X_\infty$. Definamos $K_j \subseteq A$, como:

$$K_j = A \cap \pi_j^{-1}(y_j) \text{ para cada } j \in \mathbb{N}$$

Nótese que $K_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \mathbb{N}$, ya que como $y_j \in f_j(A)$, existe $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in A$ tal que $f_j((a_i)_{i=1}^{\infty}) = y_j$, luego $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in A \cap \pi_j^{-1}(y_j) = K_j$. Además K_j es compacto, ya que es la intersección de dos cerrados y A es compacto. Veamos que $K_{j+1} \subseteq K_j$. Sea $(w_i)_{i=1}^{\infty} \in K_{j+1}$, entonces $w_{j+1} = y_{j+1}$ y $y_j = f_j^{j+1}(y_{j+1}) = f_j^{j+1}(w_{j+1}) = w_j$, por lo tanto $(w_i)_{i=1}^{\infty} \in K_j$. Tenemos que $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ es compacto, ya que es la intersección de cerrados y $K \subseteq A$. Nótese que si $(z_i)_{i=1}^{\infty} \in K$, entonces $(z_i)_{i=1}^{\infty} \in A \cap \pi_j^{-1}(y_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, luego $z_j = y_j$ y por ende $(z_i)_{i=1}^{\infty} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$. Así $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in A$. □

Ahora pensemos en A como la intersección de dos cerrados C, D y $A_n = f_n(C) \cap f_n(D)$. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces por definición $x_n \in A_n$, luego $x_n \in f_n(C)$ y $x_n \in f_n(D)$ y por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(C), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(C)}\}_{n=1}^{\infty}$ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(D), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(D)}\}_{n=1}^{\infty}$. Por la proposición 1.39 concluimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in C \cap D = A$. Nótese que la contrarecíproca tambien la tenemos, ya que si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in A = C \cap D$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n \in f_n(C)$ y $x_n \in f_n(D)$, por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$. Del anterior razonamiento formalmente concluimos que:

Corolario 1.40. *Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, con límite inverso X_∞, y C, D subconjuntos cerrados de X_∞. Entonces, $A = \varprojlim\{A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$, donde $A = C \cap D$ y $A_n = f_n(C) \cap f_n(D)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

La siguiente definición nos muestra la relación entre continuos indescomponibles y límites inversos, además de proporcionarnos una herramienta para construir continuos indescomponibles.

Definición 1.41. *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos.*
Decimos que $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa indescomponible, si para cualesquiera A_{i+1}, B_{i+1} subcontinuos de X_{i+1} tales que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, entonces $f_i^{i+1}(A_{i+1}) = X_i$ o $f_i^{i+1}(B_{i+1}) = X_i$.

Teorema 1.42. *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa indescomponible de continuos, con límite inverso X_∞. Entonces X_∞ es indescomponible.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X_∞ tales que $X_\infty = A \cup B$. Entonces:

$$X_{i+1} = f_{i+1}(X_\infty) = f_{i+1}(A \cup B) = f_{i+1}(A) \cup f_{i+1}(B)$$

Luego $f_i(A) = f_i^{i+1}(f_{i+1}(A)) = X_i$ o $f_i(B) = f_i^{i+1}(f_{i+1}(B)) = X_i$, ya que la sucesión inversa es indescomponible. Supongamos que $f_j(A) = X_j$ para algún $j \geq 2$. Entonces $f_{j-1}(A) = f_{j-1}^{j}(f_j(A)) = f_{j-1}^{j}(X_j) = X_{j-1}$. luego $f_i(A) = X_i$, para cada $i \leq j$. Si ocurriera que $f_k(B) = X_k$, para algún $k \geq j$, entonces podemos concluir que $f_i(B) = X_i$, para cualquier $i \leq k$, por lo tanto podemos concluir que $f_i(A) = X_i$ o $f_i(B) = X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos entonces que $f_i(A) = X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces por la Proposición 1.39, tenemos que:

$$A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} f_i(A)\right] \cap X_\infty = \left[\prod_{i=1}^{\infty} X_i\right] \cap X_\infty = X_\infty$$

Por lo tanto, X_∞ es indescomponible. □

Veamos la aplicación al resultado anterior.

Ejemplo 1.43.

Sean $X_n = [0,1]$ y

$$f_n^{n+1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Por el Teorema 1.34 tenemos que X_∞ es un continuo.

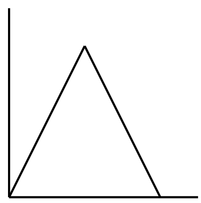


Figura 1.11: Tienda

La Figura 1.11 nos permite ver que $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa indescomponible. Por lo tanto, por el Teorema 1.42 tenemos que X_∞ es un continuo indescomponible.

Ejemplo 1.44. *Solenoide p-ádico.*

Sea $X_n = S^1$ y $f_n^{n+1}(z) = z^p$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in S^1$. Denominamos $\Sigma_p = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ para cualquier número p primo. Veamos que Σ_p es un continuo indescomponible. En virtud del Teorema 1.42, nótese que dados A y B subcontinuos de S^1 tales que $S^1 = A \cup B$, ocurre que $\text{long}(A) \geq \frac{2\pi}{p}$ o $\text{long}(B) \geq \frac{2\pi}{p}$. Así, tenemos que $f_n^{n+1}(A) = S^1$
o $f_n^{n+1}(B) = S^1$. Por lo tanto, Σ_p es un continuo indescomponible.

1.2.4. Espacio descomposición.

A continuación exponemos nuestra última herramienta para la construcción de continuos, la cual es llamada el espacio descomposición. Este concepto posee una estrecha relación con la noción de partición de un conjunto utilizada en teoría de números para referirse a una clase de equivalencia que particiona un conjunto por medio de una relación. En breve, mostramos esta relación de manera mas detallada.

Definición 1.45. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos no vacios de X disjuntos dos a dos, tales que $X = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$. Si ocurre lo anterior, decimos que $\mathcal{D}$ es una descomposición de X. Definamos también $\tau_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D} \colon \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau_X\}$, donde τ_X es la topología de X.*

Naturalemente $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es un espacio topológico. Según la definición anterior podemos definir la relación R en X tal que xRy si y solo si $\{x, y\} \subseteq D$ para algún $D \in \mathcal{D}$ y para cualesquiera $x, y \in X$. No es difícil ver que R es una relación de equivalencia y que la partición que genera es $\mathcal{D}$.

Resulta natural definir $q \colon X \to \mathcal{D}$ por $q(x) = D_x$, para $D_x \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D_x$. Claramente q está bien definida ya que los elementos de $\mathcal{D}$ son disjuntos dos a dos. Para ver que q es continua, tomemos $\mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{D}}$ y veamos que $q^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$. Nótese que:

$$q^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in X \colon x \in U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Como $\mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{D}}$, por definición $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau_X$, por lo tanto $q^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$. Es decir q es continua. Lo anterior implica que si X es compacto o conexo, $\mathcal{D}$ es compacto o conexo respectivamente. Así que lo que falta por ver para nuestros intereses, es la metrizabilidad de nuestro espacio descomposición, hecho que no siempre se preserva como veremos en el siguiente ejemplo, el cual también se puede encontrar en [8].

Ejemplo 1.46. *Existe un espacio métrico X y una descomposición $\mathcal{D}$ de X, tal que $\mathcal{D}$ no es metrizable.*

Tomemos $X = [-1, 1]$ y $\mathcal{D} = \{\{-t, t\} \colon t \in (-1, 1)\} \cup \{-1\} \cup \{1\}$. Recordemos que si un espacio es métrico, es Hausdorff, así que para ver que un espacio no es metrizable basta ver que no es Hausdorff. Veamos entonces que no existen abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ tales que $\{-1\} \in \mathcal{U}$ y $\{1\} \in \mathcal{V}$ respectivamente. Como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $t > 0$ tal que $\{-x, x\} \in \mathcal{U}$ para cualquier $x \in (-1, -1+t)$. Luego $\mathcal{U} = [-1, -1+t) \cup (1-t, 1)$. Análogamente, $\mathcal{V} = (-1, -1+r) \cup (1-r, 1]$ para algún $R > 0$. Como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son arbitrarios, podemos expresarlos de la siguiente manera: $\mathcal{U} = [-1, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1)$ y $\mathcal{V} = (-1, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1]$ para cualquier $\epsilon > 0$. Lo anterior implica que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ para cualquier $\epsilon > 0$. Es decir $\mathcal{D}$ no es Hausdorff y por ende no es metrizable.

El ejemplo anterior nos da una pista de la condición que necesitamos para obtener la metrizabilidad de nuestro espacio descomposición. Para llegar a ello necesitamos de un resultado previo.

Lema 1.47. *Sea $f \colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si X es compacto métrico y Y es Hausdorff, entonces Y es metrizable.*

Demostración. En virtud del Teorema de Urysohn, el cual dice que un espacio es metrizable si es regular y 2-numerable, veamos que Y es regular y 2-numerable. Debido a que X es compacto y f es sobreyectiva, Y es compacto y Hausdorff, por lo tanto es T_4 y por ende regular, así que basta ver que sea 2-numerable. X es 2-numerable ya que es métrico y compacto. Por lo tanto existe $\mathcal{B} = \{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ base numerable para X. Nótese que f es una función cerrada, ya que X es compacto y Y es Hausdorff. De esta manera veamos que

$$\mathcal{V} = \{Y \setminus f(X \setminus \mathcal{L}) \colon \mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{L} \text{ es finito}\}$$

es base para Y. Sean $y \in Y$ y U una vecindad de y. Como f es continua $\mathrm{Int}_X(f^{-1}(U)) \neq \emptyset$. Sea $x \in f^{-1}(y)$, entonces existe $B_{n_z} \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B_{n_z} \subseteq f^{-1}(U)$. Así, $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{z \in f^{-1}(y)} B_{n_z}$. Como $f^{-1}(y)$ es compacto, existen $\{z_1, z_2, ..., z_k\} \subseteq f^{-1}(y)$ tal que $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{n_{z_i}}$. Tomando $V = Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_{n_{z_i}})$, tenemos que $y \in V \subseteq U$. Hemos concluido entonces que $\mathcal{V}$ es base para Y, la cuál es numerable, ya que $\mathcal{B}$ es numerable. Por lo tanto Y es 2-numerable. $\square$

Consecuencia del Lema 1.47 concluimos el siguiente teorema.

Teorema 1.48. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es un continuo si y solo si $\mathcal{D}$ es Hausdorff.*

Hasta ahora hemos hablado de la descomposición de un espacio. A continuación definimos la descomposición para dos espacios disjuntos.

Definición 1.49. *Sean X y Y espacios topológicos disjuntos. Definimos la unión libre, $X \cup Y$ donde U es abierto de $X \cup Y$ si y solo si $U \cap X$ es abierto de X y $U \cap Y$ es abierto de Y. La unión libre es denotada por $X + Y$.*

Definición 1.50. *Sean X y Y espacios topológicos disjuntos, A cerrado de X y $f \colon A \to Y$ una función continua. Sea $\mathcal{D}$ la descomposición de $X + Y$ definida por:*

$$\mathcal{D} = \{\{p\} \cup f^{-1}(p) \colon p \in f(A)\} \cup \{\{x\} \colon x \in X + Y \setminus (A \cup f(A))\}.$$

Esta descomposición es llamada espacio adjunto y se denota por $X \cup_f Y$.

Como consecuencia del Teorema 1.48 concluimos lo siguiente.

Teorema 1.51. *Sean X y Y continuos disjuntos. Entonces $X \cup_f Y$ es un contiuo si y solo si es Hausdorff.*

Ejemplo 1.52. *Espacio adjunto que es un continuo.*

Tomemos X_1 y X_2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left\{\left(x, \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \\ X_2 &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left\{\left(x, \mathrm{sen}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x < -1\right\} \end{aligned}$$

sean $g \colon \{(0,-1), (0,1)\} \to \{(-1,-1), (-1,1)\}$ definida por $g((0,-1)) = (-1,-1)$ y $g((0,1)) = (-1,1)$ y $X = X_1 \cup_g X_2$ el espacio adjunto.

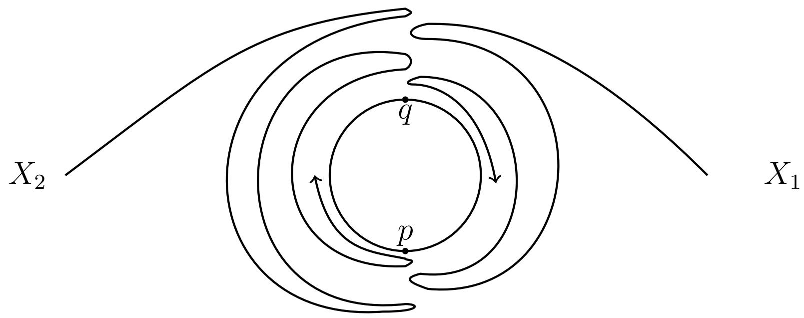


Figura 1.12: Espacio adjunto continuo

La Figura 1.12 nos muestra una representación de nuestro espacio adjunto. En virtud del teorema anterior, veamos que $X_1 \cup_g X_2$ es un espacio de Hausdorff. Sean x y y elementos distintos de $X_1 \cup_g X_2$. Naturalmente, si $\{x, y\} \in X_1$ o $\{x, y\} \in X_2$, existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$. tomemos $x = \{(0, -1), (-1, -1)\}$ y $y = \{(0, 1), (-1, 1)\}$. Entonces $V = \{-1\} \times [\frac{3}{4}, 1] \cup \{0\} \times [\frac{3}{4}, 1]$ y $U = \{-1\} \times [\frac{-3}{4}, -1] \cup \{0\} \times [\frac{-3}{4}, -1]$ son abiertos disjuntos de $X_1 \cup_g X_2$ donde $x \in U$ y $y \in V$. Por lo tanto, $X_1 \cup_g X_2$ es un continuo.

Capítulo 2

Unicoherencia débil

El concepto de unicoherencia débil fue introducido en [2], como una condición suficiente para que toda función fuertemente libremente descomponible sea casimonótona, como veremos en el Teorema 3.25 del siguiente capítulo. Además, como su nombre sugiere, la unicoherencia débil es una noción restrictiva de la unicoherencia. Recordemos que un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. La unicoherencia en continuos ha sido estudiada ampliamente. En [9], se puede encontrar una recopilación de algunas de las principales propiedades de esta clase de continuos. A continuación en este capítulo, definimos unicoherencia débil y estudiamos ejemplos y propiedades.

2.1. Definición y ejemplos

La unicoherencia de un continuo, de una manera intuitiva, determina si un continuo tiene un "hueco" o no. Por ejemplo, la curva cerrada simple $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$ es un continuo que no es unicoherente e intuitivamente podríamos aceptar la existencia de tal "hueco". Por otra parte, un arco o una $n-$celda ($[0,1]$ o $[0,1]^n$) son unicoherentes. Ahora definimos la unicoherencia débil, que bien podríamos dar una interpretación geométrica similar.

Definición 2.1. *Sea X un continuo. Diremos que X es débilmente unicoherente si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $Int_X(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Es claro a partir de la definición, que todo continuo unicoherente es débilmente unicoherente, por lo tanto $[0,1]$ es débilmente unicoherente. El hecho de que cualquier continuo indescomponible sea unicoherente, nos garantiza que cualquier continuo indescomponible es débilmente unicoherente. La siguiente proposición nos permitirá concluir que la unicoherencia débil es un invariante topológico.

Proposición 2.2. *Sean X y Y continuos. Si X y Y son homeomorfos y X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y, tales que $Y = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$, veamos que $A \cap B$ es conexo. Si $Y = A$ o $Y = B$, tenemos que $A \cap B$ es conexo. Así, supongamos que A y B son subcontinuos propios. Como X y Y son homeomorfos, existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$. Al ser h^{-1} continua, tenemos que $h^{-1}(A)$ y $h^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X. Como h es función, $X = h^{-1}(A) \cup h^{-1}(B)$. Además $h^{-1}(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \subseteq h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$, luego $\mathrm{Int}_X(h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)) \neq \emptyset$. Siendo X débilmente unicoherente, podemos concluir que

$h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ es conexo. Utilizando nuevamente la continuidad y la sobreyectividad de h, obtenemos que $h(h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)) = h(h^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$ es conexo. $\square$

Ejemplo 2.3. *Cualquier curva cerrada simple no es débilmente unicoherente.*

Por la Proposición 2.2, basta mostrar que S^1 no es débilmente unicoherente. Sean $A = \{e^{i\theta} \colon \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}\}$ y $B = \{e^{i\theta} \colon \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{4}\}$ subcontinuos de S^1. Claramente, $S^1 = A \cup B$ y $A \cap B = \{e^{i\theta} \colon \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\} \cup \{e^{i\theta} \colon \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}\} = D_1 \cup D_2$, tiene interior no vacío y es disconexo (vease Figura 2.1). Por lo tanto S^1 no es débilmente unicoherente.

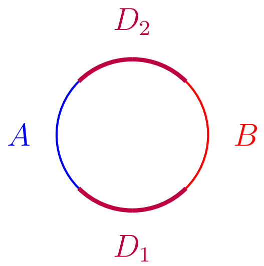


Figura 2.1: Curva Cerrada Simple no Débilmente Unicoherente

Ejemplo 2.4. *La curva senoidal del topólogo, es un continuo débilmente unicoherente.*

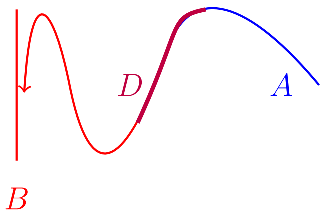


Figura 2.2: Curva senoidal del topólogo débilmente unicoherente

Denotemos por X a la curva senoidal del topólogo y tomemos A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $\text{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$. Si $X = A$, tenemos que $A \cap B = B$ es conexo. Análogamente, si $X = B$, concluimos que $A \cap B$ es conexo, así que supongamos que A y B son subcontinuos propios. Para que la unión de los dos subcontinuos, sea X, uno de ellos debe contener la barra límite. Suponga que $A = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \colon 0 < r \leq x \leq 1\}$ y $B = \text{Cl}_X\{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \colon 0 < x \leq t \leq 1\}$, entonces $X = A \cup B$ para cualesquiera $t, r \in (0, 1]$, tales que $r < t$. Además, $A \cap B = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \colon 0 < t \leq x \leq r \leq 1\} = D$ es un arco (véase Figura 2.2).

Ejemplo 2.5. *El Círculo de Varsovia no es débilmente unicoherente.*

El Círculo de Varsovia, es una modificación a la Curva senoidal del topólogo, en el cual unimos el punto (0,-1), con el punto (1,sen(1)), mediante un arco.

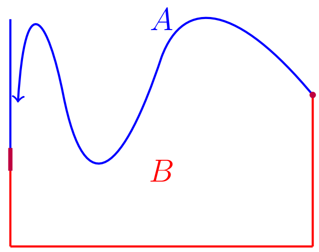


Figura 2.3: Círculo de Varsovia no débilmente unicoherente

La Figura 2.3, muestra una representación del Círculo de Varsovia. Sean A la Curva senoidal del topólogo, y B la unión de los arcos $C = \{(0, y) \colon -2 \leq y \leq \frac{-7}{10}\}$, $D = \{(-2, x) \colon 0 \leq x \leq 1\}$ y $E = \{(-2, y) \colon -2 \leq y \leq \text{sen}(1)\}$. Nótese que $A \cap B = \{(0, y) \colon -1 \leq y \leq \frac{-7}{10}\} \cup \{(1, \text{sen}(1))\}$, tiene interior no vacío, y es disconexo. De lo anterior, el Circulo de Varsovia no es débilmente unicoherente. A continuación, mostramos los resultados que nos permiten analizar ejemplos más interesantes, los cuales han sido tomados de [2].
Ya habíamos dicho que todo continuo unicoherente es débilmente unicoherente. El siguiente teorema nos permite concluir que en un espacio localmente conexo, la unicoherencia y la unicoherencia débil son equivalentes.

Teorema 2.6. *Sea X un continuo débilmente unicoherente. Si X es localmente conexo, entonces X es unicoherente.*

Demostración. Supongamos que existen A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo. Sea C una componente de $A \cap B$ y $x \in (A \cap B) \setminus C$. Nótese que x existe, ya que si para todo $x \in A \cap B$, se tiene que $x \in C$, entonces $A \cap B = C$, luego $A \cap B$ es conexo. Como A y B son cerrados, entonces C es cerrado y por ende, $X \setminus C$ es abierto. Por la conexidad local existe una vecindad K de x cerrada y conexa, tal que $x \in \text{Int}_X(K) \subseteq K \subseteq (X \setminus C)$. De lo anterior, tenemos que $A \cup K$ y $B \cup K$ son subcontinuos de X y $X = (A \cup K) \cup (B \cup K)$, tales que $\text{Int}_X((A \cup K) \cap (B \cup K)) \neq \emptyset$. Por lo tanto $(A \cup K) \cap (B \cup K)$ es conexo, ya que X es débilmente unicoherente. Por otro lado, nótese que $(A \cup K) \cap (B \cup K) = (A \cap B) \cup K = C \cup (((A \cap B) \setminus C) \cup K)$, donde claramente C y $((A \cap B) \setminus C) \cup K$ son cerrados disjuntos. Lo anterior indica que $(A \cup K) \cap (B \cup K)$ es disconexo, lo que contradice la unicoherencia débil de X. □

Nótese que por [8, Teorema 8.23, pág 132], cualquier continuo localmente conexo es arcoconexo, sin embargo el círculo de Varsovia es un continuo arcoconexo que no es localmente conexo. Lo anterior nos permite preguntarnos lo siguiente:

Pregunta 2.7. *Sea X un continuo. ¿Si X es débilmente unicoherente y arcoconexo, entonces X es unicoherente?*

Definición 2.8. *Sea X un continuo. Decimos que X es aposindético si para cualesquiera p y q en X, existe un subcontinuo L de X tal que $p \in Int_X(L)$ y $q \notin L$. Además, diremos que X es* *mutuamente aposindético si para cualesquiera par de puntos p y q de X, existen subcontinuos L y K de X tales que $p \in Int_X(L)$, $q \in Int_X(K)$ y $L \cap K = \emptyset$.*

Nuestro primer ejemplo de continuo mutuamente aposindético es el intervalo $[0,1]$, ya que dados $x, y \in [0,1]$ tales que $x \neq y$, se tiene que $|x-y| = \epsilon > 0$. De esta manera $[x-\frac{\epsilon}{2}, x+\frac{\epsilon}{2}] \cap [0,1]$ y $[y-\frac{\epsilon}{2}, y+\frac{\epsilon}{2}] \cap [0,1]$ son subcontinuos disjuntos de $[0,1]$ que tienen en su interior a x y a y respectivamente. No es difícil ver también que S^1 es mutuamente aposindético. En cambio la curva senoidal del topólogo es un continuo que no es aposindético. Para ver ello sean $z, w \in \{0\} \times [0,1]$, $z \neq w$ y L subcontinuo con interior no vacío tal que $z \in \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^2}(L)$. Como $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^2}(L) \neq \emptyset$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z,\epsilon) \subseteq L$. Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{(2n-1)\pi} < \epsilon$, lo que implica que $(\frac{2}{(2n-1)\pi}, \mathrm{sen}(\frac{(2n-1)\pi}{2})) \in B(z,\epsilon)$. Por la conexidad de L, tenemos que $\{(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})\colon 0 < x \leq \frac{2}{(2n-1)\pi})\} \subseteq L$, pero L también es cerrado, lo que implica que $\{0\} \times [0,1] \subseteq L$. Por lo tanto $w \in L$. De manera análoga, se puede ver que el círculo de Varsovia no es aposindético. Observe que $[0,1]$ es un continuo débilmente unicoherente, mutuamente aposindético y unicoherente, además no es difícil ver que cualquier continuo localmente conexo es mutuamente aposindético, sin embargo de [10] podemos concluir que la aposindes no implica la conexidad local, lo que nos lleva a plantearnos las siguientes preguntas.

Pregunta 2.9. *Sea X un continuo. ¿Si X es débilmente unicoherente y aposindético, entonces X es unicoherente?*

Pregunta 2.10. *Sea X un continuo. ¿Si X es débilmente unicoherente y mutuamente aposindético, entonces X es unicoherente?*

La conexidad local es una propiedad muy útil en teoría de continuos unicoherentes, que nos permitirá concluir los siguientes resultados.

Teorema 2.11. *Sean X y Y continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos. Si $X \cap Y$ es conexo, entonces $X \cup Y$ es débilmente unicoherente.*

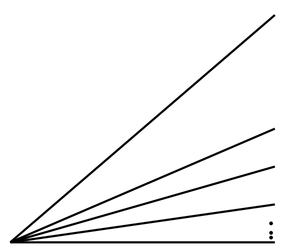
Por el Teorema 2.6, tenemos que X y Y son unicoherentes. De esta manera podemos aplicar [9, Teorema 3.22, pág. 53], para concluir que $X \cup Y$ es unicoherente y por ende débilmente unicoherente.

Corolario 2.12. *Sean X_1, X_2,...,X_n continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos. Si $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ es conexo, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ es débilmente unicoherente.*

Este resultado nos permite concluir que un triodo simple es débilmente unicoherente. Sin embargo, no podemos concluir los mismo del abanico armónico definido en el Ejemplo 1.4 apoyándonos en este resultado, ya que el abanico armónico es la unión de una familia numerable de continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos. De lo anterior, surge la siguiente pregunta.

Pregunta 2.13. *Sea $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ una familia de continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos. ¿ Si $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ es conexo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ es débilmente unicoherente?*

Ejemplo 2.14. *El abanico armónico es débilmente unicoherente.*



Naturalmente, dados A y B subcontinuos de F_H tales que $F_H = A \cup B$ y $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}(A \cap B) \neq \emptyset$, si $A = F_H$ o $B = F_H$ entonces $A \cap B$ es conexo. Supongamos entonces que A y B son subcontinuos propios de F_H. Podemos describirlos de la siguiente manera, bajo la notación del Ejemplo 1.4: $A = \bigcup_{i=1}^{n} e_i$ y $B = \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} e_i\right) \cup \{tv + (1-t)x_k \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t \leq b\}$ para algún $k \in \{1, ..., n\}$ y para algún $b > 0$. De esta manera $A \cap B = \{tv + (1-t)x_k \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t \leq b\}$, el cual claramente es conexo.

Hasta este momento no hemos mostrado un continuo débilmente unicoherente que no sea unicoherente. Para esto mostraremos el siguiente resultado. La prueba la tomamos de [2].

Teorema 2.15. *Sea X un continuo. Si X es irreducible, entonces X es débilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$. Sean a, b los puntos de irreducibilidad de X. Veamos que $A \cap B$ es conexo. Nótese que si $\{a, b\} \subseteq A$ o $\{a, b\} \subseteq B$, entonces $X = A$ o $X = B$, luego $A \cap B$ es conexo. Supongamos que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Por la Proposición 1.11, tenemos que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son conexos. Pero $X \setminus A = (A \cup B) \setminus A = (A \setminus A) \cup (B \setminus A) = B \setminus A$, por lo tanto $B \setminus A$ es conexo. Análogamente, $A \setminus B$ es conexo. Observe que:

$$\begin{aligned}
X \setminus (\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)) &= X \setminus \mathrm{Cl}_X((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\
&= \mathrm{Int}_X(X \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \\
&= \mathrm{Int}_X(X \setminus (A \setminus B)) \cap (X \setminus (B \setminus A)) \\
&= \mathrm{Int}_X(A \cap B)
\end{aligned}$$

Ya que $\{a, b\} \nsubseteq (A \cap B)$, entonces $\{a, b\} \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$, luego $\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = \emptyset$, ya que X es irreducible entre a y b. Así, $\mathrm{Int}_X(A \cap B)$ es conexo por la Proposición 1.12. De lo anterior, $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))$ es continuo y $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \subseteq A \cap B$, ya que $A \cap B$ es cerrado. Al suponer que $A \cap B$ es disconexo, tenemos que existen una componente C tal que $\mathrm{CL}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \subseteq C$ y L componente de $A \cap B$, tal que $C \neq L$. Entonces $L \subseteq (\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A))$, luego $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B)$ o $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$, ya que L es conexo. Supongamos que $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B)$. Como:

$$\begin{aligned}
X &= \mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cup \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \\
&= [\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))] \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)
\end{aligned}$$

y $\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = \emptyset$, debe ocurrir que $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \neq \emptyset$, ya que X es conexo. Lo anterior implica que $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Así, no existe ningún conexo que intersecte a $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B)$ y L, donde $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B)$ es intersección de cerrados, por lo tanto cerrado. De esta manera, podemos aplicar [8, Teorema 5.2, pág. 72], para concluir que existen cerrados disjuntos E y F tales que $A \cap B = E \cup F$, donde $L \subseteq E$ y $(\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B)) \subseteq F$. De lo anterior podemos escribir $B = (A \cap B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) =$

$E\cup(F\cup \mathrm{Cl}_X(B\setminus A))$, donde $E\cap(F\cup \mathrm{Cl}_X(B\setminus A)) = (E\cap F)\cup(E\cap \mathrm{Cl}_X(B\setminus A)) = E\cap \mathrm{Cl}_X(B\setminus A)$. Si ocurriera que $x \in E\cap \mathrm{Cl}_X(B\setminus A)$, entonces $x \in A\cap B$ y $x \in \mathrm{Cl}_X(B\setminus A)$, luego $x \in F$, lo que contradice que $E\cap F = \emptyset$. Por lo tanto, $E\cap \mathrm{Cl}_X(B\setminus A) = \emptyset$, pero esto contradice la conexidad de B. La contradicción se produjo al suponer que $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A\cap B))\cap L = \emptyset$ para cualquier otra componente diferente de C. Así, cada componente de $A\cap B$ intersecta a $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A\cap B))$, luego $A\cap B$ es conexo y por ende X es débilmente unicoherente. □

En general, el recíproco del anterior resultado no es cierto. Por ejemplo, cualquier triodo simple es un continuo que no es irreducible, sin embargo es unicoherente y por ende, débilmente unicoherente. El teorema anterior, junto con la siguiente caracterización, nos permite asegurar la existencia de un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente. La siguiente proposición la tomamos de [2].

Proposición 2.16. *Sea X un continuo débilmente unicoherente. Entonces, X no es unicoherente si y solo si existen A y B subcontinuos de X tales que $A\cap B$ es disconexo y dado cualquier subcontinuo L, tal que $Int_X(L) \neq \emptyset$ y $L\cap(A\cap B) \neq \emptyset$, entonces L intersecta a cada componente de $A\cap B$.*

Demostración. Claramente, de la definición, si existen A y B subcontinuos de X tales que $A\cap B$ es disconexo, entonces X no es unicoherente. Ahora, suponga que X no es unicoherente. Nuevamente por definición, existen A y B subcontinuos de X tales que $A\cap B$ es disconexo. Sea L subcontinuo de X , tal que $\mathrm{Int}_X(L) \neq \emptyset$ y $L\cap(A\cap B) \neq \emptyset$. Por el Lema 1.3, tenemos que $L\cup A$ y $L\cup B$ son subcontinuos de X tales que $X = (L\cup A)\cup(L\cup B)$. Además $\mathrm{Int}_X((L\cup A)\cap(L\cup B)) \neq \emptyset$, ya que $L \subseteq (L\cup A)\cap(L\cup B)$. Como X es débilmente unicoherente, tenemos que $(L\cup A)\cap(L\cup B)$ es conexo. Pero, $(L\cup A)\cap(L\cup B) = L\cup(A\cap B)$, por lo tanto, L debe intersectar a cada componente de $A\cap B$. □

Ejemplo 2.17. *Existe un continuo débilmente unicoherente, que no es unicoherente.*

Tomemos X siendo el continuo del Ejemplo 1.52. No es difícil ver que X es irreducible entre $(-2, \mathrm{sen}(1))$ y $(1, \mathrm{sen}(1))$. Así. por el Teorema 2.15, podemos afirmar que X es débilmente unicoherente. Para ver que X no es unicoherente, escojamos X_1 y X_2 subconjuntos de X, como han sido descritos en el Ejemplo 1.52. Claramente, $X_1 \cap_g X_2$, es disconexo.

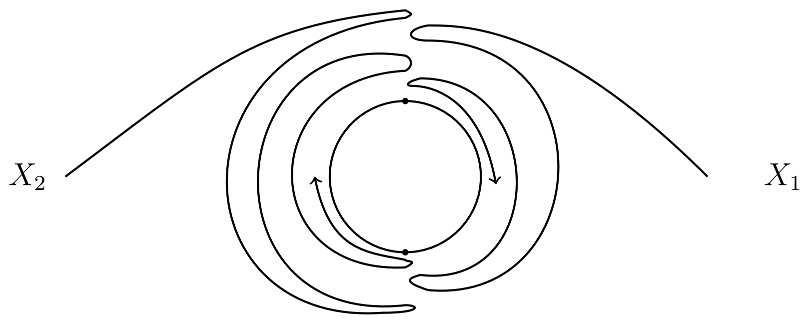


Figura 2.4: Contino débilmente unicoherente y no unicoherente

La siguiente proposición nos permitirá ampliar la clase de continuos débilmente unicoherentes.

Proposición 2.18. *Sean X y Y continuos disjuntos, $p \in X$ y $q \in Y$, tales que X es localmente conexo en p y Y es localmente conexo en q. Sea $Z = X \cup_f Y$ el espacio adjunto, donde $f(p) = q$. Si X y Y son débilmente unicoherentes, entonces Z es débilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Z, tales que $Z = A \cup B$ y $\text{Int}_Z(A \cap B) \neq \emptyset$, veamos que $A \cap B$ es conexo. Primero supongamos que $(A \cap B) \subseteq X$. Entonces $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$, donde $X \cap A$ y $X \cap B$ son cerrados de X por la Definición 1.49 y conexos ya que si $X \cap A = E \cup F$, donde E y F son cerrados disjuntos de X , entonces $A = (X \cap A) \cup (Y \cap A) = (E \cup F) \cup (Y \cap A)$, como A es conexo, $(Y \cap A) \cap E \neq \emptyset$ y $(Y \cap A) \cap F \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que E y F sean cerrados de X. Además $\text{Int}_X(A \cap X \cap B \cap X) = \text{Int}_X(A \cap B \cap X) = \text{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$, ya que $(A \cap B) \subseteq X$. Como X es débilmente unicoherente, podemos concluir que $A \cap B$ es conexo. Análogamente, si $(A \cap B) \subseteq Y$, tenemos que $A \cap B$ es conexo. Supongamos entonces que $(A \cap B) \cap X \neq \emptyset$ y $(A \cap B) \cap Y \neq \emptyset$. Al suponer que $A \cap B$ es disconexo, existe una componente L de $A \cap B$, tal que $\{p, q\} = w \notin L$. Al ser Z localmente conexo en w, ya que X es localmente conexo en p y Y es localmente conexo en q, existe una vecindad, cerrada y conexa K de w, tal que $w \in K \subseteq (Z \setminus L)$. por lo tanto, $C = A \cup K$ y $D = B \cup K$ son subcontinuos de Z, tales que $C \cap D = A \cap B \cup K$. Suponga que $L \subseteq X$, ya que L es conexo. Nótese que $X = Z \cap X = (C \cup D) \cap X = (C \cap X) \cup (D \cap X)$, donde:

$$\begin{aligned}(C \cap X) \cap (D \cap X) &= (C \cap D) \cap X \\ &= ((A \cap B) \cup K) \cap X \\ &= (A \cap B \cap X) \cup (K \cap X)\end{aligned}$$

Como $\text{Int}_Z(K) \neq \emptyset$ tenemos que $\text{Int}_Z((C \cap X) \cap (D \cap X)) \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta que X es débilmente unicoherente, concluimos que $C \cap D \cap X$ es conexo. Por otro lado,

$$\begin{aligned}(C \cap X) \cap (D \cap X) &= ((A \cap B) \cup K) \cap X \\ &= (((A \cap B) \setminus L) \cup L \cup K) \cap X \\ &= ((((A \cap B) \setminus L) \cup K) \cup L) \cap X \\ &= ((((A \cap B) \setminus L) \cup K) \cap X) \cup L\end{aligned}$$

lo que contradice la conexidad de $(C \cap X) \cap (D \cap X)$ y por ende la unicoherencia débil de X. Por lo tanto $A \cap B$ debe ser conexo, es decir Z es débilmente unicoherente. $\square$

Ya vimos que cada continuo unicoherente es débilmente unicoherente. Además cualquier continuo irreducible es débilmente unicoherente. El siguiente ejemplo muestra que la familia de continuos débilmente unicoherentes es aún más grande que la unión de estas dos familias de continuos anteriormente nombradas.

Ejemplo 2.19. *Existe un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente, ni irreducible.*

El Ejemplo 2.17, muestra un espacio que no es unicoherente y es débilmente unicoherente. Sea $A = [2, 3]$ y $g\colon \{(\frac{4}{5}, \operatorname{sen}(\frac{5}{4}))\} \to A$, tal que $g((\frac{4}{5}, \operatorname{sen}(\frac{5}{4}))) = 2$. Tomemos $Z = X \cup_g A$, donde X es como en el Ejemplo 1.52.

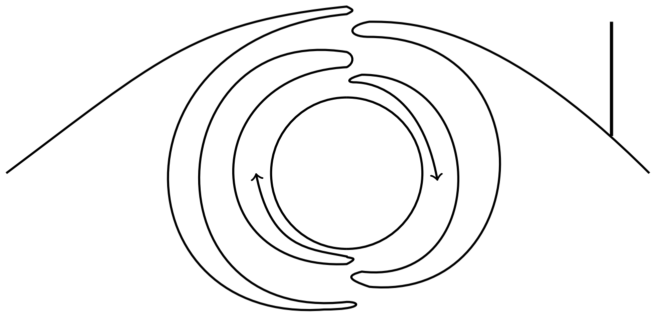


Figura 2.5: Continuo débilmente unicoherente, no unicoherente y no irreducible

Entonces Z es débilmente unicoherente por la proposición anterior, pero no es unicoherente por el Ejemplo 2.17. Veamos que Z no es irreducible. Primero observe que los puntos $(-2, \operatorname{sen}(1))$ y $(1, \operatorname{sen}(1))$ no son puntos de irreducibilidad de Z, ya que tomando X como en el Ejemplo 2.17, claramente $\{(-2, \operatorname{sen}(1)), (1, \operatorname{sen}(1))\} \subseteq X$ y $X \neq Z$. Ahora tomemos $x, y \in Z$ elementos distintos arbitrarios. Naturalmente si $\{x, y\} \subseteq X$, entonces x y y no son puntos de irreducibilidad. Si $\{x, y\} \subseteq A$, A es un subcontinuo propio de Z, por lo tanto x y y no son puntos de irreducibilidad. Así, supongamos que $x \in X$ y $y \in A$. Tomemos $L = [2, y] \cup (X \setminus \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))\colon \frac{4}{5} < x \leq 1\})$. de esta forma $\{x, y\} \subseteq L$ y $L \neq Z$. Por lo tanto Z no es irreducible.
La Proposición 2.18 es muy débil, por eso queda abierta la siguiente generalización.

Pregunta 2.20. *Sean X y Y continuos débilmente unicoherentes, tales que $X \cap Y = \emptyset$ y $g\colon A \to Y$, donde A es cerrado de X. ¿si $Z = X \cup_g Y$, $X \cap_g Y$ es conexo y Z es localmente conexo en cada punto de $X \cap_g Y$, entonces Z es débilmente unicoherente?*

Hasta ahora, podemos concluir que la familia de continuos débilmente unicoherentes contiene a la familia de continuos unicoherentes y a la familia de continuos irreducibles y que es más grande que la unión de estas dos. Pasemos ahora a exponer unos resultados que nos servirán de apoyo en la siguiente sección.

Definición 2.21. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Decimos que f es monótona, si para todo subcontinuo Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo de X.*

Comenzamos el estudio de estas funciones, dando unas propiedades de las funciones monótonas que serán de gran ayuda más adelante.

Proposición 2.22. *Sea $f\colon X \to Y$ una función monótona entre continuos. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$ y $\operatorname{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$, como f función tenemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, donde $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X, ya que f es monótona y continua. Nótese que $\mathrm{Int}_X(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))\neq\emptyset$, ya que $\mathrm{Int}_Y(A\cap B)\neq\emptyset$ y f es continua. Aplicando la unicoherencia débil de X, podemos concluir entonces que $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ es conexo. De manera que $A\cap B=f(f^{-1}(A\cap B))=f(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))$ es conexo, ya que f es continua y sobreyectiva. Por lo tanto Y es débilmente unicoherente. $\square$

Terminamos esta sección con una caracterización de las funciones monótonas.

Proposición 2.23. *Sea $f\colon X\to Y$ una función entre continuos, continua y sobreyectiva. Entonces, f es monotona si y solo si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y\in Y$.*

Demostración. Primero veamos que si f es monótona, entonces $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y\in Y$, lo que es claro, ya que $\{y\}$ es un subcontinuo de Y y por lo tanto, al ser f monótona, entonces $f^{-1}(y)$ es conexo.
Ahora, suponga que existe Q subcontinuo de Y tal que $f^{-1}(Q)$ es disconexo. Entonces existen abiertos A y B de X tales que $f^{-1}(Q)=A\cup B$, $f^{-1}(Q)\cap A\neq\emptyset$, $f^{-1}(Q)\cap B\neq\emptyset$ y $(\mathrm{Cl}_X(A)\cap B)\cap(\mathrm{Cl}_X(B)\cap A)=\emptyset$. Sea $y\in Q$, como $f^{-1}(y)$ es conexo por hipotesis tenemos que $f^{-1}(y)\subseteq A$ o $f^{-1}(y)\subseteq B$. Definamos $U=\{y\in Y\colon f^{-1}(y)\subseteq A\}$ y $V=\{y\in Y\colon f^{-1}(y)\subseteq B\}$. Claramente, $Q=U\cup V$. Al ser Q conexo, se tiene que $(\mathrm{Cl}_X(U)\cap V)\cup(\mathrm{Cl}_X(V)\cap U)\neq\emptyset$. Suponga que existe $y\in\mathrm{Cl}_X(U)\cap V$, entonces existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de U tal que $y_n\to y$. De lo anterior se tiene que existe $x_n\in f^{-1}(y_n)\subseteq A$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por hipótesis sabemos que X es compacto, por lo tanto existen $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $x\in X$ tales que $x_{n_k}\to x$. Lo anterior implica que $x\in\mathrm{Cl}_X(A)$. Por otro lado, debido a la continuidad sabemos que $x_{n_k}\to x$ si y solo si $f(x_{n_k})\to f(x)$, pero $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}=(y_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, luego $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty}\to f(x)$ y $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty}\to y$, al ser subsucesión; es decir $f(x)=y$ y asi $x\in B$, por lo tanto $(\mathrm{Cl}_X(A)\cap B)\neq\emptyset$, lo que
es contradictorio. Por ende $f^{-1}(Q)$ es conexo. $\square$

2.2. Producto y límite inverso

En esta sección nos concentramos en estudiar el comportamiento del producto de continuos débilmente unicoherentes y sus límites inversos. La mayoría de los resultados obtenidos en esta sección se concluyen claramente del estudio de resultados conocidos relacionados con los continuos unicoherentes, apoyándonos en afirmaciones tomadas de [2].

Proposición 2.24. *Sea $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ una familia de continuos. Si $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ es débilmente unicoherente, entonces X_m es débilmente unicoherente para cada $m\in\mathbb{N}$.*

Demostración. La idea es mostrar que la proyección $\pi_m:\prod_{n=1}^{\infty}X_n\mapsto X_m$ es una función monótona para cualquier $m\in\mathbb{N}$ y aplicar el hecho de que toda función monótona preserva la unicoherencia débil. Sean $m\in\mathbb{N}$ y $y_m\in X_m$. Para ver que $\pi_m^{-1}(y_m)$ es conexo, analizemos la siguiente función:

$$f:\pi_m^{-1}(y_m)\mapsto\prod_{n=1,n\neq m}^{\infty}X_n$$

$$f((x_n)_{n=1}^{\infty}) = f((x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, ...)) = (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_{m+1}, ...) = (x_n)_{n=1, n\neq m}^{\infty}$$

Puede verse que f es un homeomorfismo, donde $\prod_{n=1,n\neq m}^{\infty} X_n$ es un conjunto conexo, al ser producto de conjuntos conexos. Asi $\pi_m^{-1}(y_m)$ es homeomorfo a un espacio conexo, por lo tanto $\pi_m^{-1}(y_m)$ es conexo. De lo anterior se concluye que π_m es una función monótona para cada $m \in \mathbb{N}$, luego por la Proposición 2.22, se tiene que X_m es débilmente unicoherente para cada $m \in \mathbb{N}$. $\square$

El recíproco del anterior resultado no se tiene. En [9, Prop 2.13, pág. 37], se muestra que existe un continuo unicoherente X, tal que $X \times X$ no es unicoherente. A continuación veremos que tal producto tampoco es débilmente unicoherente.

Ejemplo 2.25. *Existe un continuo débilmente unicoherente X, tal que $X \times X$ no es débilmente unicoherente.*

En [9, Ej 2.4, pág. 31] se mostró que $X = S^1 \cup R$, donde $R = \{(1 + e^{-\theta})e^{i\theta} \colon \theta \geq 0\}$, es un continuo unicoherente y por lo tanto débilmente unicoherente. Posteriormente en [9, Prop 2.13, pág. 37], se tomarón A, B, H y K subconjuntos de $Y = X \times X$, definidos de la siguiente manera: Sea $r_\theta = (1 + e^{-\theta})$,

$$\begin{aligned}
A &= \{\{(r_\theta e^{i\theta}, r_\alpha e^{i\alpha}) \in R \times R\} \cup \{(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \in S^1 \times S^1\} \colon [(\theta - \alpha)/\pi] \text{ sea par}\} \\
B &= \{\{(r_\theta e^{i\theta}, r_\alpha e^{i\alpha}) \in R \times R\} \cup \{(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \in S^1 \times S^1\} \colon [(\theta - \alpha)/\pi] \text{ sea impar}\} \\
H &= \{\{(r_\theta e^{i\theta}, r_\alpha e^{i\alpha}) \in R \times R\} \cup \{(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \in S^1 \times S^1\} \colon (\theta - \alpha)/\pi \text{ sea par}\} \\
K &= \{\{(r_\theta e^{i\theta}, r_\alpha) e^{i\alpha}) \in R \times R\} \cup \{(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \in S^1 \times S^1\} \colon (\theta - \alpha)/\pi \text{ sea impar}\}
\end{aligned}$$

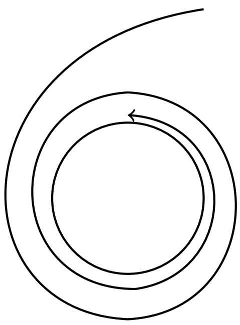


Figura 2.6: X débilmente unicoherente y $X \times X$ no débilmente unicoherente

donde $[\theta]$ fue definido como el mayor entero menor o igual a θ y se mostró que

$$Y = \mathrm{Cl}_Y(A) \cup \mathrm{Cl}_Y(B) \ y \ \mathrm{Cl}_Y(A) \cap \mathrm{Cl}_Y(B) = H \cup K,$$

donde H y K son cerrados disjuntos. Nótese que $R \times R$ es abierto localmente conexo, ya que R es abierto, conexo y localmente conexo. Además $(R \times R) \cap (H \cup K) \neq \emptyset$. Tomando $p = ((1 + e^{-\theta})e^{i\theta}, (1 + e^{-(\theta+2\pi)})e^{i\theta+2\pi})$, para algún $\theta > 0$, tenemos que $p \in Y \setminus K$. Aplicando la conexidad local de $R \times R$ y la normalidad de Y, tenemos que existe una vecindad D de p cerrada y conexa, tal que $p \in \mathrm{Int}_Y(D) \subseteq D \subseteq Y \setminus K$. Consideremos $E = \mathrm{Cl}_Y(A) \cup D$ y

$F = \mathrm{Cl}_Y(B) \cup D$, los cuales son subcontinuos de Y tales que $Y = E \cup F$ y Además,

$$\begin{aligned} E \cap F &= (\mathrm{Cl}_Y(A) \cup D) \cap (\mathrm{Cl}_Y(B) \cup D) \\ &= (\mathrm{Cl}_Y(A) \cap \mathrm{Cl}_Y(B)) \cup D \\ &= (H \cup K) \cup D \\ &= (H \cup D) \cup K \end{aligned}$$

donde $(H \cup D) \cap K = (H \cap K) \cup (D \cap K) = \emptyset$, lo cual implica que $E \cap F$ es disconexo. Además, $D \subseteq E \cap F$, luego $\mathrm{Int}_Y(E \cap F) \neq \emptyset$. Lo anterior implica que Y no es débilmente unicoherente.

El siguiente teorema ha sido concluido a partir de [9, Corolario 3.24, pag 54].

Teorema 2.26. *Sea $\{X_i \colon i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ una familia finita de continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos. Entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es débilmente unicoherente.*

Lo que nos permite concluir que el producto finito de arcos, es débilmente unicoherente. De manera mas formal, de [9, Corolario 3.25, pág. 54] podemos concluir que:

Corolario 2.27. *$[0, 1]^n$ y S^{n+1} son débilmente unicoherentes, para cualquier $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Finalizamos este capítulo mostrando algunos resultados relacionados con límites inversos de continuos. Como se puede ver en [9, Teorema 2.12, pág 37], el límite inverso de continuos unicoherentes es unicoherente. Para concluir el mismo resultado relacionado con los continuos débilmente unicoherentes basta pedir que las funciones de ligadura sean abiertas. Sin embargo, no sabemos si esta condición sea necesaria como lo exponemos en la Pregunta 2.29.

Proposición 2.28. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa donde las funciones de ligadura son abiertas y sobreyectivas. Si X_n es un continuo débilmente unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es débilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A, B subcontinuos propios de X_∞ tales que $X_\infty = A \cup B$ y además $\mathrm{Int}_{X_\infty}(A \cap B) \neq \emptyset$. como las funciones de de ligadura son sobreyectivas, las proyecciones también lo són, por el lema 1.36. De esta manera tenemos que:

$$X_n = f_n(X_\infty) = f_n(A \cup B) = f_n(A) \cup f_n(B)$$

donde $f_n(A)$ y $f_n(B)$ son subcontinuos de X_n gracias a la continuidad de f_n.

Ahora como las funciones ligadura son funciones abiertas, por la Proposición 1.38 las proyecciones también, luego $f_n(\mathrm{Int}_{X_\infty}(A \cap B))$ es un abierto de X_n y;

$$f_n(\mathrm{Int}_{X_\infty}(A \cap B)) \subseteq f_n(A \cap B) \subseteq f_n(A) \cap f_n(B)$$

por lo tanto $\mathrm{Int}_{X_n}(f_n(A) \cap f_n(B)) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Utilizando el hecho de que X_n es débilmente unicoherente , para cada $n \in \mathbb{N}$ concluimos que $f_n(A) \cap f_n(B)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, además es compacto, luego $\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}{}_{/f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de continuos, por lo tanto $\varprojlim\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\}$ es un continuo. Pero por Corolario 1.40 tenemos que:

$$\varprojlim\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\}_{n=1}^{\infty} = A \cap B$$

es decir $A \cap B$ es conexo, luego X_∞ es débilmente unicoherente. $\square$

Pregunta 2.29. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa donde las funciones de ligadura son sobreyectivas. ¿Si* X_n *es un continuo débilmente unicoherente para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* X_∞ *es débilmente unicoherente?*

Capítulo 3

Funciones

No es difícil ver que la imagen continua de un continuo débilmente unicoherente no es necesariamente débilmente unicoherente; por ejemplo, $f\colon [0,1] \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi ti}$ para cada $t \in [0,1]$ es una función continua con dominio débilmente unicoherente, con recorrido no débilmente unicoherente. Sin embargo, como mostramos en la Proposición 2.22 si la función es monótona, entonces la unicoherencia débil se preserva. En este capítulo estudiaremos el comportamiento de esta propiedad topológica bajo diferentes clases de funciones continuas entre continuos, no sin antes brindar una pequeña introducción sobre el surgimiento de estas funciones a través de la historia. En [3] se podrá entontrar información más detallada acerca de este tema.

Las funciónes monótonas fueron definidas en términos de la caracterización mostrada en la Proposición 2.23 en 1925 por R.L. Moore, en su trabajo titulado *Concerning upper semi-continuous collections of continua* y relacionada con la noción de descomposición semi continua superior. A saber, dada una función monótona $f\colon X \to Y$, tomando la descomposición $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y)\colon y \in Y\}$, se puede mostrar que $\mathcal{D}_f$ es una descomposición semi continua superior de X. La clase de funciones monótonas fue introducida en 1934 por G.T. Whyburn en *Non-alternating transformations*, donde mostró que las propiedades de una arco y una curva cerrada simple son invariantes bajo funciones monótonas. Posteriormente fue estudiada en 1942 por Alexander Doniphan Wallace en su trabajo titulado *monotone transformation*. El libro de Whyburn [11, pág 127] contiene diversas caracterizaciones y propiedades de funciones monótonas, especialmente entre continuos localmente conexos.

Existe un gran número de generalizaciones de las funciones monótonas. Una de las más importantes es la noción de función cuasimonótona, definida en 1940 por A.D. Wallace en su trabajo *Quasi-monotone transformations*. Una función continua y sobreyectiva es cuasimonótona, si dado cualquier subcontinuo en el recorrido con interior no vacío, la imagen inversa posee una cantidad finita de componentes. El concepto de función cuasimonótona nació de la idea de relacionar las funciones monótonas con las funciones abiertas. Varias caracterizaciones y propiedades de este tipo de funciones fueron consideradas en continuos localmente conexos, y estudiadas por G.T. Whyburn en [11, pág 151]. Por ejemplo, en continuos localmente conexos, una función abierta es cuasimonótona y adémas, cualquier función cuasimonótona puede ser vista como la composición de una función monótona, seguida de una función abierta.

Posteriormente fue introducido el concepto de funcion libremente descomponible, concepto que generaliza nuevamente la noción de función monótona y que busca preservar conexidad local en limites inversos. Este concepto fue introducido por G. R. Gordh y C. B. Hughes en [4], trabajo en el que muestran que el límite inverso de una sucesión inversa de funciones libremente descomponibles y espacios localmente conexos, es localmente conexo. También se muestra en el trabajo anteriormente citado, que una función libremente descomponible con dominio unicoherente es monótona, resultado que fue generalizado en [2] y será expuesto es este capítulo. Una función continua y sobreyectiva es libremente descomponible, si dada cualquier descomposición por subcontinuos del recorrido, la imagen inversa de cada uno de ellos resulta ser una descomposición del domino de la función. En 1977 en [5] se muestran algunas propiedades de estas funciones.

3.1. Relaciones entre funciones monótonas

Habiendo ya repasado a groso modo la historia de estas funciones, procedemos a definirlas formalmente para su posterior estudio. En la siguiente definición recopilamos las nociones de función casimonótona, cuasimonótona, libremente descomponible y fuertemente libremente descomponible, las cuales relacionamos y comparamos como vemos a continuación.

Definición 3.1. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Decimos que:*

1. f es *casimonótona,* si para todo subcontinuo Q de Y, tal que $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo de X.
2. f es *cuasimonótona,* si para todo subcontinuo Q de Y, tal que $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene una cantidad finita de componentes, y si C es una componente de la imagen inversa de Q, se tiene que $f(C) = Q$.
3. f es *libremente descomponible,* si para cualesquiera subcontinuos propios C y D de Y, tales que $Y = C \cup D$ existen dos subcontinuos propios A y B de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \subseteq f^{-1}(C)$ y $B \subseteq f^{-1}(D)$.
4. f es *fuertemente libremente descomponible,* si para cualesquiera subcontinuos propios C y D de Y, tales que $Y = C \cup D$, se tiene que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos de X.

De la Definición 3.1, es inmediata la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Entonces:*

a) *Si f es monótona, entonces f es casimonótona.*

b) *Si f es casimonótona, entonces f es cuasimonótona.*

c) *Si f es monótona, entonces f es cuasimonótona.*

d) *Si f es fuertemente libremente descomponible, entonces f es libremente descomponible.*

Luego de comprender las anteriores implicaciones, es natural preguntarnos si el recíproco se cumple para algún caso, cuestión que abordamos en los siguientes ejemplos de la autoría del profesor Javier Camargo.

Ejemplo 3.3. *Existe una función libremente descomponible, que no es fuertemente libremente descomponible.*

Este ejemplo ha sido tomado de [4, pág 142], en el cual mostraremos que el recíproco de la parte d) de la Proposición 3.2 no se cumple. Para ello definamos $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, como el triángulo equilátero en $\mathbb{R}^3$, con vértices $a = (1,0,0)$, $b = (0,1,0)$ y $c = (0,0,1)$, donde $X_1 = \{(1-t, 0, t) \colon 0 \leq t \leq 1)\}$, $X_2 = \{(1-t, t, 0) \colon 0 \leq t \leq 1)\}$, $X_3 = \{(0, 1-t, t) \colon 0 \leq t \leq 1)\}$ y $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ donde $Y_1 = \{[0,1] \times \{0\} \times \{0\}\}$, $Y_2 = \{\{0\} \times [0,1] \times \{0\}\}$ y $Y_3 = \{\{0\} \times \{0\} \times [0,1]\}$, como el triodo con centro en $O = (0,0,0)$, cuyos brazos son de longitud 1, y se encuentran situados en los ejes coordenados. Definamos $f \colon X \to Y$ por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (2x-1, 0, 0) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \\ (0, 2y-1, 0) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ \\ (0, 0, 2z-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

No es difícil ver que f es la proyección del triángulo equilatero al triodo simple ubicado en el origen, como lo muestra la Figura 3.1.

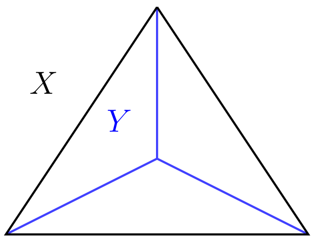


Figura 3.1: Proyección de triángulo equilatero en triodo simple

Para ver que f no es fuertemente libremente descomponible, tomemos los dos subcontinuos $C = Y_1$ y $D = Y_2 \cup Y_3$ como se muestran en la Figura 3.2.

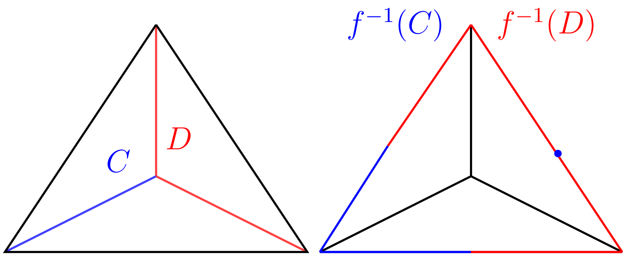


Figura 3.2: Proyeción libremente descomponible, no fuertemente libremente descomponible

Claramente $f^{-1}(C) = \{(\frac{1-r}{2}, 0, \frac{1+r}{2}) \colon 0 \leq r < \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}, 0) \colon 0 \leq r < \frac{1}{2}\} \cup \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ es disconexo, por lo tanto f no es una función fuertemente libremente descomponible. Sin embargo, f es libremente descomponible como vemos a continuación.

Afirmación 3.4. *Sea Q subcontinuo de Y, tal que* $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^3}(Q) \neq \emptyset$. *Si* $|Q \cap \{a, b, c\}| \geq 2$, *entonces* $f^{-1}(Q)$ *es un subcontinuo de X.*

Si $\{a, b, c\} \subseteq Q$, claramente $Y = Q$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\{a, b\} \subseteq Q$. Entonces $Q = Y_1 \cup Y_2 \cup \{\{0\} \times \{0\} \times [0, t]\}$, para algún $t \in [0, 1)$. De esta manera, tenemos que $f^{-1}(Q) = X_2 \cup \{(0, \frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}) \colon 0 \leq r < t\} \cup \{(\frac{1-r}{2}, 0, \frac{1+r}{2}) \colon 0 \leq r < t)\}$, el cual claramente es conexo.

Para ver que f es libremente descomponible, sean C y D subcontinuos de Y tales que $Y = C \cup D$. Entonces debe ocurrir que $|C \cap \{a, b, c\}| = 2$ o $|D \cap \{a, b, c\}| = 2$. Supongamos que $|C \cap \{a, b, c\}| = 2$. Entonces por la afirmación anterior, tenemos que $f^{-1}(C)$ es conexo. Tomemos $B = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^3}(X \setminus f^{-1}(C))$, el cual es conexo ya que X es una curva cerrada simple y $f^{-1}(C)$ es conexo. Además $f(B) \subseteq D$, debido a que $f(X \setminus f^{-1}(C)) \subseteq D$ y D es cerrado.
De lo anterior, f es libremente descomponible.

Ejemplo 3.5. *Existe una función cuasimonótona, que no es casimonótona.*

En este caso, tomemos $f \colon S^1 \to [-1, 1]$ definida por $f(x, y) = x$.

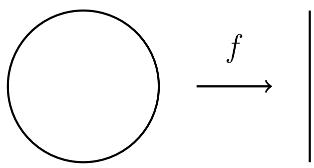


Figura 3.3: Función cuasimonótona que no es casimonótona

Para ver que f no es casimonótona, basta tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $-1 < a < b < 1$. De esta manera, $f^{-1}([a, b]) = A \cup B$, donde $A = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b\}$ y $B = \{(x, -\sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b\}$, es disconexo. Lo anterior no impide que f sea cuasimonótona. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ y $a < b$. veamos que $f^{-1}([a, b])$ posee a lo más dos componentes y la imagen de cada componente es $[a, b]$. Si $a = -1$ y $b = 1$, tenemos que $f^{-1}([a, b]) = S^1$ y $f(S^1) = [a, b]$. Suponga que $a = -1$ y $b \neq 1$, entonces $f^{-1}([a, b]) = A \cup B$ es conexo, ya que $(-1, 0) \in A \cap B$. Además, $f(A \cup B) = [a, b]$. Análogamente ocurre si $a \neq -1$ y $b = 1$. En caso de que $a \neq -1$ y $b \neq 1$, tenemos que $f^{-1}([a, b]) = A \cup B$, A y B son componentes y claramente $f(A) = [a, b]$ y $f(B) = [a, b]$.
Por lo tanto, f es cuasimonótona.

Ejemplo 3.6. *Existe una función casimonótona, que no es monótona.*

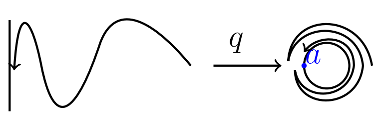


Figura 3.4: Función casimonótona que no es monótona

Tomemos nuestro dominio X, siendo la Curva senoidal del topólogo, como en el Ejemplo 1.13, y $\mathcal{D} = \{\{(0, -1), (0, 1)\} \cup \{\{z\} \colon z \in X \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}\}$ una descomposición de X. Por el Teorema 1.48, el espacio de descomposición $\mathcal{D}$ es un continuo.

Analizemos la función cociente q y veamos que es casimonótona. Sea Q subcontinuo de $\mathcal{D}$ con interior no vacío. Observese que si $Q = \mathcal{D}$, $q^{-1}(\mathcal{D})$ es conexo; así, supongamos que Q es subcontinuo propio de $\mathcal{D}$. Si $Q \subseteq \cup_{x\in(0,1]}\{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))\}$ entonces $q^{-1}(Q) = Q$ es conexo. Por ultimo, Sea $P = q(\{0\}\times[-1,1])$. Si Q es continuo propio de $\mathcal{D}$, tenemos que $P \subseteq Q$, o $P\cap Q = \emptyset$, luego $q^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto, q es casimonótona. Ahora, tomando $a = \{(0,-1),(0,1)\}$, $a \subseteq \mathcal{D}$ y claramente que $q^{-1}(\{a\}) = \{(0,-1)\} \cup \{(0,1)\}$ es
subconjunto disconexo de X (vease Figura 3.4). Por lo tanto q no es monótona.

Hasta aquí hemos visto que las implicaciones inversas de las afirmaciones de la Proposición 3.2 no son ciertas, sin embargo el siguiente lema nos permitirá ver que al agregar conexidad local obtendremos la implicación recíproca de la afirmación b) de la proposición antes nombrada.

Lema 3.7. *Sean $f\colon X \to Y$ una función continua entre continuos y $y \in Y$. Suponga que existe un abierto U de X, tal que $f^{-1}(y) \subseteq U$. Entonces existe $r > 0$, tal que $f^{-1}(B(y,r)) \subseteq U$.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^{-1}(\mathrm{B}(y, \frac{1}{n})) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Entonces existe $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X tal que $x_n \in X \setminus U$ y $f(x_n) \in \mathrm{B}(y, \frac{1}{n})$, para cada entero positivo n. Como f es continua, $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(f(x_n)) \neq \emptyset$ y $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(f(x_n)) \subseteq f^{-1}(y)$. Como $X \setminus U$ es compacto y $(\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(f(x_n)))\cap(X \setminus U) \neq \emptyset$, tenemos que $f^{-1}(y) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, lo que contradice que $f^{-1}(y) \subseteq U$. □

Teorema 3.8. *Sean $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva definida entre continuos, donde Y es localmente conexo. Si f es casimonótona, entonces f es monótona.*

Demostración. Procedamos demostrando que si f no es monótona, entonces, f no es casimonótona. Supongamos que existe K subcontinuo de Y tal que $f^{-1}(K)$ es disconexo. Por tanto, existen U y V abiertos disjuntos de X tales que $f^{-1}(K) \subseteq U \cup V$, $f^{-1}(K) \cap U \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K)\cap V \neq \emptyset$. Tomemos $y \in K$. Entonces $f^{-1}(y) \subseteq U\cup V$. Por el Lema 3.7, existe $r_y > 0$ tal que $f^{-1}(\mathrm{B}(y, r_y)) \subseteq U \cup V$. Como Y es localmente conexo, existe una vecindad L de y conexa y cerrada tal que $y \in \mathrm{Int}_Y(L) \subseteq L \subseteq \mathrm{B}(y, r_y)$. Nótese que $K \cap L \neq \emptyset$, luego $K \cup L$ es un continuo con interior no vacío. Como $L \subseteq \mathrm{B}(y, r_y)$, $f^{-1}(L) \subseteq f^{-1}(\mathrm{B}(y, r_y)) \subseteq U \cup V$, por lo tanto $f^{-1}(L \cup K) = f^{-1}(L) \cup f^{-1}(K) \subseteq U \cup V$, lo que indica que $f^{-1}(R \cup K)$ es disconexo ya que $f^{-1}(K) \cap U \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K) \cap V \neq \emptyset$, y por ende f no es casimonótona. □

Podríamos pensar ahora en obtener un resultado análogo pero esta vez con funciones cuasimonótonas con recorrido localmente conexo. Retomando el Ejemplo 3.5 nótese que el recorrido de esta función, es localmente conexo. Por lo tanto, el hecho de que el recorrido sea localmente conexo y la función cuasimonótona no implica que sea casimonótona o monótona.

Ahora tomemos $f\colon X \to Y$ una función monótona entre continuos y sean C y D subcontinuos de Y, tales que $Y = C \cup D$. Entonces tenemos que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos, por lo tanto, podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Sea $f\colon X \to Y$, una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si f es monótona, entonces f es fuertemente libremente descomponible.*

Mas aún, si f es casimonótona tambien ocurre que sea fuertemente libremente descomponible, como vemos a continuación.

Teorema 3.10. *Sea $f: X \to Y$, una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si f es casimonótona, entonces f es fuertemente libremente descomponible.*

Demostración. Sean C y D subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$. Como D es compacto, tenemos que $Y \setminus D$ es abierto. Nótese que $Y \setminus D \subseteq C$. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_Y(C) \neq \emptyset$. Análogamente, conluimos que $\mathrm{Int}_Y(D) \neq \emptyset$. Al ser f casimonótona, obtenemos que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos, por lo tanto f es fuertemente libremente descomponible. $\square$

No es difícil ver que el Ejemplo 1.43 muestra una función causimonótona que no es fuertemente libremente descomponible. Por otro lado, realizando una pequeña modificación del Ejemplo 3.6, obtenemos que no existe relación directa entre funciones cuasimonótonas y funciones fuertemente libremente descomponibles.

Ejemplo 3.11. *Existe una función fuertemente libremente descomponible que no es cuasimonótona.*

En la Figura 3.5 se puede ver una modificación al Ejemplo 3.6, la cual describimos a continuación. Sean $w_t = (-1,0)t + (1-t)(0,1)$, $z_t = (-1,0)t + (1-t)(0,-1)$, $W = \{w_t : t \in [0,1]\}$ y $Z = \{z_t : t \in [0,1]\}$. Tomemos $Y = X \cup W \cup Z$, donde X es la curva senoidal del topólogo y $\mathcal{D} = \{\{w_t, z_t\} : t \in [0,1]\} \cup \{\{z\} : z \in X \setminus \{(0,1),(0,-1)\}\}$. No es difícil ver que la función cociente en este caso es fuertemente libremente descomponible.

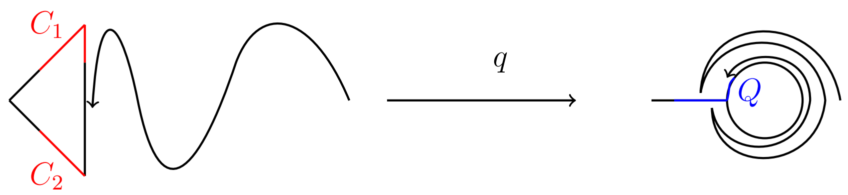


Figura 3.5: Función fuertemente libremente descomponible, no cuasimonótona

Para ver que esta función no es cuasimonótona, tomemos

$$Q = \left(\bigcup_{y \in [\frac{1}{8},1)} \{(0,y)\} \right) \cup \left(\bigcup_{t \in [0,\frac{1}{2})} \{w_t, z_t\} \right)$$

el cual es subcontinuo de $\mathcal{D}$ como se muestra en la Figura 3.5. Nótese que $q^{-1}(Q) = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 = \left(\bigcup_{y \in [\frac{1}{8},1)} (0,y)\right) \cup \left(\bigcup_{t \in [0,\frac{1}{2})} w_t\right)$ y $C_2 = \left(\bigcup_{t \in [0,\frac{1}{2})} z_t\right)$, sin embargo $q(C_2) = \bigcup_{t \in [0,\frac{1}{2})} \{w_t, z_t\} \neq Q$. Por lo tanto, q no es cuasimonótona.

3.2. Propiedad de composición

La composición es de las propiedades más importantes en el estudio de funciones. Por ello procedemos a estudiar dicha propiedad para las funciones definidas anteriormente.

Proposición 3.12. *Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$, funciones monótonas o casimonótonas entre continuos. Entonces, $g \circ f: X \to Z$ es monótona o casimonótona respectivamente.*

Demostración. Sea K subcontinuo de Z. Veamos que $(g \circ f)^{-1}(K)$ es conexo. Sabemos que $(g \circ f)^{-1}(K) = (f^{-1} \circ g^{-1})(K)$. Como g es monótona, tenemos que $g^{-1}(K)$ es conexo. además Como K es continuo, es cerrado, y teniendo en cuenta la continuidad de g tenemos entonces que $g^{-1}(K)$ es subcontinuo de Y. Aplicando el hecho de que f sea una función monótona obtenemos que $(f^{-1}(g^{-1}(K))$ es conexo, por lo tanto $g \circ f$ es monótona.

para el caso de la composición de funciones casimonótonas procedemos de forma análoga, teniendo en cuenta que $g^{-1}(\mathrm{Int}_Z(K)) \subseteq g^{-1}(K)$ y que g es continua. $\square$

Proposición 3.13. *Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$, dos funciones cuasimonótonas entre continuos. Entonces, $g \circ f\colon X \to Z$ es cuasimonótona.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de Z tal que $\mathrm{Int}_Z(K) \neq \emptyset$. Entonces $g^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, donde D_i es componente de $g^{-1}(K)$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $g(D_i) = K$. Veamos que $\mathrm{Int}_Y(D_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Suponga que existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\mathrm{B}(y, r) \cap (Y \setminus D_j) \neq \emptyset$ para cada $y \in D_j$ y cada $r > 0$. Como $g(D_j) = K$ y $\mathrm{Int}_Z(K) \neq \emptyset$, tenemos que existe $\overline{y} \in D_j$ y $\epsilon > o$ tal que $\mathrm{B}(g(\overline{y}), \epsilon) \subseteq K$. Luego existe $y_n \in \mathrm{B}(y, \frac{1}{n}) \cap (Y \setminus D_j)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $g(y_n) \in g(Y \setminus D_j)$, pero g es sobreyectiva, lo que implica que $g(Y \setminus D_j) = Z \setminus g(D_j) = Z \setminus K$. Por lo tanto, $g(y_n) \in Z \setminus K$. Ahora, como $y_n \to \overline{y}$ y g es continua, tenemos que $g(y_n) \to g(\overline{y})$. lo que indica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g(y_n) \in \mathrm{B}(g(\overline{y}), \epsilon)$ para cada $n \geq N$, lo que es contradictorio. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_Y(D_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De esta manera, cada D_i es subcontinuo de Y con interior no vacío. Así, utilizando el hecho de que f es cuasimonótona, tenemos que $f^{-1}(D_i) = \bigcup_{j=1}^{k_i} C_{j,i}$ donde $f(C_{j,i}) = D_i$. Por lo tanto,

$$f^{-1}(g^{-1}(K)) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} C_{j,i} \right) \ \text{y} \ g(f(C_{j,i})) = g(D_i) = K$$

es decir, $g \circ f$ es cuasimonótona. $\square$

Proposición 3.14. *Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$, dos funciones fuertemente libremente descomponibles, o libremente descomponibles entre continuos. Entonces, $g \circ f\colon X \to Z$ es fuertemente libremente descomponible, o libremente descomponible respectivamente.*

Demostración. Veamos que la composición de funciones fuertemente libremente descomponibles es fuertemente libremente descomponible. Sean C y D subcontinuos de Z tales que $Y = C \cup D$, como g es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $g^{-1}(C)$ y $g^{-1}(D)$ son continuos de Y tales que $Y = g^{-1}(C) \cup g^{-1}(D)$. Así, $f^{-1}(g^{-1}(C))$ y $f^{-1}(g^{-1}(D))$ son subcontinuos de X, ya que f es fuertemente libremente descomponible. Por lo tanto $g \circ f$ es fuertemente libremente descomponible. De manera análoga, obtenemos el resultado para la composición de funciones libremente descomponibles. $\square$

3.3. Funciones monótonas con dominio débilmente unicoherente

En esta sección nos dedicamos a analizar el comportamiento del recorrido de las funciones anteriormente mencionadas, cuando el dominio es débilmente unicoherente. De esta manera podremos generalizar ciertos resultados de [1] y [4], que se tienen cuando el dominio es unicoherente, los cuales han sido tomados de [2].

Proposición 3.15. *Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es debilmente unicoherente, entonces Y es debilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$. Si $Y = A$ o $Y = B$, entonces $A \cap B$ es conexo de inmediato. Veamos que $A \cap B$ es conexo cuando A y B son subcontinuos propios. Es claro que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, donde $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X, ya que A y B son subcontinuos propios de Y y f es fuertemente libremente descomponible. Ahora como $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$ y f es continua, $f^{-1}(\mathrm{Int}_X(A \cap B))$ es abierto en X y $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y(A \cap B)) \subseteq f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Por lo tanto $\mathrm{Int}_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \neq \emptyset$. Como X es debilmente unicoherente, tenemos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ es conexo. Utilizando la continuidad de la función nuevamente, obtenemos que $f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$ tambien es conexo. Por ultimo, nótese que $f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(A \cap B))$ y $f(f^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$, ya que f es sobreyectiva. De lo anterior, $f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = A \cap B$, concluyendo entonces que $A \cap B$ es conexo; es decir Y es debilmente unicoherente. $\square$

Sabemos que toda funcion casimonótona es fuertemente libremente descomponible, por lo tanto si el dominio es debilmente unicoherente el recorrido tambien lo será.

Corolario 3.16. *Si $f\colon X \to Y$ es una función casimonótona y X es debilmente unicoherente, entonces Y es debilmente unicoherente.*

Teorema 3.17. *Sea $f\colon X \to Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Si X es debilmente unicoherente, entonces Y es debilmente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios arbitrarios de Y tales que $Y = A \cup B$ y ademas $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$. Como f es función, se tiene que

$$
\begin{aligned}
X &= f^{-1}(A \cup B) \\
&= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} M_j\right)
\end{aligned}
$$

donde $N_1, N_2, .., N_n$ y $M_1, M_2, ..., M_m$ son componentes de $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ respectivamente, donde además, $f(N_i) = A$ y $f(M_j) = B$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$. Suponga que N_1 es tal que $D = (\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} M_j)$ sea conexo (ver Lema 1.9). Entonces N_1 y D son subcontinuos de X, tales que $X = N_1 \cup D$.

Primeros veamos que $f(D \cap N_1) = A \cap B$. Sea $y \in f(D \cap N_1)$, como f es sobreyectiva existe $x \in D \cap N_1$ tal que $f(x) = y$. Como $N_1 \cap N_i = \emptyset$ para cada $i \in \{2, ..., n\}$ y $x \in D$, existe $k \in \{1, ..., m\}$ tal que $x \in M_k$. De esta manera $y = f(x) \in f(N_1) = A$ y $y = f(x) \in f(M_k) = B$, luego $f(x) \in A \cap B$. Así $f(D \cap N_1) \subseteq A \cap B$. Recíprocamente, si $y \in A \cap B$, como $f(N_1) = A$ existe $x \in N_1$ tal que $f(x) = y$, pero $y = f(x) \in B$, por lo tanto $x \in M_k$ para algún $k \in \{1, ..., m\}$. Es decir, $x \in N_1 \cap D$ luego $y = f(x) \in f(D \cap N_1)$. Así, concluimos que $f(D \cap N_1) = A \cap B$.

Veamos ahora que $\text{Int}_X(D \cap N_1) \neq \emptyset$. Supongamos que $\text{B}(x, r) \cap (X \setminus (N_1 \cap D)) \neq \emptyset$ para cada $x \in N_1 \cap D$ y para cada $r > 0$. Como $f(D \cap N_1) = A \cap B$ y $\text{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$, existen $\overline{x} \in D \cap N_1$ y $\epsilon > 0$ tales que $\text{B}(f(\overline{x}), \epsilon) \subseteq A \cap B$. Luego existe $x_n \in \text{B}(x, \frac{1}{n}) \cap (X \setminus (N_1 \cap D))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $x_n \to \overline{x}$ y $f(x_n) \in f(X \setminus (N_1 \cap D)) = Y \setminus f(N_1 \cap D) = Y \setminus (A \cap B)$ ya que f es sobreyectiva, pero esto contradice la continuidad de f. Por lo tanto, $\text{Int}_X(D \cap N_1) \neq \emptyset$. Podemos entonces aplicar la unicoherencia débil de X para concluir que $N_1 \cap D$ es conexo. Por ultimo, teniendo en cuenta que f es continua y $f(D \cap N_1) = A \cap B$, podemos concluir que $A \cap B$ es conexo, por lo tanto, Y es débilmente unicoherente. □

Hasta aquí llevamos resultados alusivos a la invarianza de la unicoherencia débil, concluyendo así que la unicoherencia débil se preserva bajo las funciones monótonas, casimonótonas, cuasi-monótonas y fuertemente libremente descomponibles. Sin embargo, de las funciones libremente descomponibles no tenemos respuesta aún, por eso planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 3.18. *Sea $f\colon X \to Y$ una función libremente descomponible entre continuos. ¿Si X es debilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente?*

A continuación exponemos una respuesta parcial a la pregunta anterior tomada de [2], que generaliza [4, Teorema 10, pág. 143]. Para esto, necesitamos unos resultados previos sobre continuos semi-localmente conexos.

Definición 3.19. *Sea X un continuo. Decimos que X es semi-localmente conexo si dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq B_d(x, \epsilon)$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes.*

Proposición 3.20. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es semi-localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X es continuo localmente conexo, existe V abierto y conexo tal que $x \in V \subseteq \text{Cl}_X(V) \subseteq B_d(x, \epsilon)$. Sea $\{C_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ la familia de componentes de $X \setminus \text{Cl}_X(V)$. Como X es localmente conexo y $X \setminus \text{Cl}_X(V)$ es abierto, tenemos que C_α es abierto para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Nótese que $X \setminus B_d(x, \epsilon) \subseteq X \setminus \text{Cl}_X(V)$, $X \setminus B_d(x, \epsilon)$ es compacto y $\{C_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$es una cubierta abierta de $X \setminus B_d(x, \epsilon)$, luego existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathcal{A}$ tales que $X \setminus B_d(x, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}$. Recordando que $\text{Cl}_X(V) \cap C_{\alpha_i} = \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos que $V \cap C_{\alpha_i} = \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Sea $W = X \setminus \text{Cl}_X(\bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i})$. Así, W es abierto y $V \subseteq W$, por lo tanto, $x \in W$. Nótese que $W \subseteq B_d(x, \epsilon)$, ya que $X \setminus B_d(x, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}$ y $W \cap (\bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}) = \emptyset$. Finalmente, $X \setminus W = \bigcup_{i=1}^{n} \text{Cl}_X(C_{\alpha_i})$, donde cada C_i es conexo. De lo anterior, podemos concluir que $X \setminus W$ tiene un número finito de componentes. □

Proposición 3.21. *Sean X un continuo localmente conexo y $x \in X$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subseteq B_d(x, \epsilon)$ y $X \setminus V$ posee un número finito de componentes.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la proposición anterior existe W abierto tal que $w \in W \subseteq B_d(x, \epsilon)$ y $X \setminus W$ posee una cantidad finita de componentes. De esta manera tenemos que $X \setminus W = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ donde cada C_i es componente de $X \setminus W$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Si W es conexo, obtenemos lo requerido. Así, supongamos que W es disconexo. Entonces existe V componente de W tal que $x \in V \subseteq W \subseteq B_d(x, \epsilon)$. Veamos que $X \setminus V$ posee un número finito de componentes. Recordando el hecho de que $V \subseteq W$, tenemos que $X \setminus W \subseteq X \setminus V$, luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subseteq X \setminus V$. Lo anterior nos indica que $X \setminus V$ posee por lo menos n componentes. Suponga que existe D componente de $X \setminus V$ tal que $D \cap C_i = \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Es decir, $D \cap (\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = X \setminus W = \emptyset$, por lo tanto $D \subseteq W$. De lo anterior tenemos que existe L componente de W tal que $D \subseteq L$ y $L \cap V = \emptyset$, luego $L \subseteq X \setminus V$. Nótese que L es abierto, ya que W es abierto y X es localmente conexo, por lo tanto $\mathrm{Cl}_X(L) \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$ por [8, Teorema 5.7, pág 75]. Por consiguiente, existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $L \cap C_j \neq \emptyset$, luego $L \cup C_j$ es conexo y $L \cup C_j \subseteq X \setminus V$. Pero $D \cap (L \cup C_j) \neq \emptyset$ ya que $D \subseteq L$, y D es componente de $X \setminus V$, por lo tanto $L \cup C_j \subseteq D$ y así $D \cap C_j \neq \emptyset$, lo que es contradictorio. Lo anterior indica que $X \setminus V$ posee a lo más n componentes y así la cantidad de componentes de $X \setminus V$ es finita. $\square$

Lema 3.22. *Sea $f\colon X \to Y$ una función libremente descomponible entre continuos.Si X es débilmente unicoherente, Y es localmente conexo y $y \in Y$ es tal que $Y \setminus \{y\}$ tiene un número finito de componentes, entonces $f^{-1}(y)$ es conexo.*

Demostración. Como Y es localmente conexo, gracias a las dos proposiciones anteriores tenemos que existe una familia $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que:

1. $y \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. C_n es abierto y conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathrm{Cl}_Y(C_{n+1}) \subseteq C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{y\}$.
5. $Y \setminus C_n$ tiene un número finito de componentes.

Sea $C_k \in \mathcal{C}$ y D_1, D_2,..., D_r la componentes de $Y \setminus C_k$. Tomemos $A_1 = (\bigcup_{i=2}^{r} D_i) \cup \mathrm{Cl}_Y(C_k)$. Por el Teorema 1.8, A_1 es subcontinuo de Y, además $Y = A_1 \cup D_1$. Como f es libremente descomponible, existen K_1 y L_1 subcontinuos de X tales que $X = K_1 \cup L_1$, $K_1 \subseteq f^{-1}(A_1)$ y $L_1 \subseteq f^{-1}(D_1)$. Veamos que $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \subseteq f^{-1}(K_1)$. Suponga que $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \cap L_1 \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \in \mathrm{Cl}_Y(C_k) \cap L_1$, lo que implica que $C_k \cap D_1 \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \subseteq K_1$. Similarmente, para cada $m \in \{1, ..., r\}$ tomando $A_m = \left(\bigcup_{i=1, i\neq m}^{r} D_i\right) \cup \mathrm{Cl}_Y(C_k)$ existen K_m y L_m subcontinuos de X tales que $X = K_m \cup L_m$, $K_m \subseteq f^{-1}(A_m)$, $L_m \subseteq f^{-1}(D_m)$ y $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \subseteq K_m$. Por lo tanto,

$f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \subseteq (\bigcap_{m=1}^{r} K_m)$. Queremos ver que $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) = \bigcap_{m=1}^{r} K_m$, así que si $x \in \bigcap_{m=1}^{r} K_m$, entonces $f(x) \notin D_m$ para todo $m \in \{1, ..., r\}$, por lo tanto $f(x) \in \mathrm{Cl}_Y(C_k)$ y por ende $x \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k))$. Ahora, probemos que $X = (\bigcap_{m=2}^{r} K_m) \cup K_1$. Sea $x \in X$. Si $f(x) \in D_1$, como $D_1 \cap D_i = \emptyset$ para cada $i \neq 1$, tenemos que $f^{-1}(D_1) \subseteq \bigcap_{i=2}^{r} K_i$, por lo tanto $x \in \bigcap_{i=2}^{r} K_i$. Ahora, suponga que $f(x) \in D_i$, para algún $i \neq 1$. Entonces $f(x) \in A_1$. Como $D_1 \cap D_i = \emptyset$ para todo $i \neq 1$, $f^{-1}(D_i) \subseteq K_1$, por lo tanto $x \in K_1$. Finalmente si $f(x) \in C_k$, tenemos que $x \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k)) \subseteq K_1$, lo que nos indica que $X = (\bigcap_{m=1}^{r} K_m) \cup K_1$. Nótese que $\bigcap_{m=1}^{r} K_m$ es abierto, ya que $f^{-1}(C_k)$ es abierto. Como X es débilmente unicoherente, concluimos que $\bigcap_{m=1}^{r} K_m$ es conexo y por ende $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_k))$ es conexo. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_Y(C_n) = \{y\}$, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(C_n)) = f^{-1}(\{y\})$. Así, por el Teorema 1.15, $f^{-1}(\{y\})$ es conexo. □

Teorema 3.23. *Sea $f\colon X \to Y$ una función libremente descomponible entre continuos. Si X es débilmente unicoherente y Y es localmente conexo, entonces f es monótona.*

Demostración. En virtud del Teorema 2.23, basta mostrar que $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$. Si $Y \setminus \{y\}$ tiene un número finito de componentes, $f^{-1}(y)$ es conexo por el lema anterior. Suponga que $Y \setminus \{y\}$ tiene un número infinito de componentes. Como Y es localmente conexo, la cantidad de componentes de $Y \setminus \{y\}$ es a lo más numerable, por lo tanto llamemos $\mathcal{Q} = \{Q_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ a la familia de componentes de $Y \setminus \{y\}$. Definamos $g_n\colon Y \to Q_n \cup \{y\}$ por:

$$g_n(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in Q_n \\ \\ y & \text{si} \quad x \notin Q_n \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in Y$. Veamos que g_n es monótona. Claramente $g_n^{-1}(Q_n) = Q_n$ es conexo, además dado cualquier conexo $A \subseteq Q_n$ tenemos que $g_n^{-1}(A) = A$ es conexo. Por otro lado, $g^{-1}(y) = Y \setminus Q_n = \{y\} \cup (\bigcup_{i=1, i\neq n}^{\infty} Q_i)$. Al suponer que $g^{-1}(y)$ es disconexo, por el Teorema 1.8 tenemos entonces que $\{y\} \cup Q_n$ es conexo, lo que es contradictorio ya que $\{y\} \cap Q_n = \emptyset$. Entonces $g_n \circ f\colon X \to Q_n \cup \{y\}$ es una función libremente descomponible por el Teorema 3.9 y la Proposición 3.14. Además $Q_n \cup \{y\}$ es localmente conexo, por lo tanto aplicando el lema anterior tenemos que $(g_n \circ f)^{-1}(y)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $H_1 = (g_1 \circ f)^{-1}(y)$ y, para cada $n \geq 2$ $H_n = (g_n \circ f)^{-1}(y) \cap H_{n-1}$. De lo anterior tenemos que H_n es cerrado. Para ver que H_n es conexo, procedamos por inducción matemática. Claramente $\mathrm{Int}_X(H_2) \neq \emptyset$, ya que $f^{-1}(Q_3) \subseteq f^{-1}(Y \setminus (Q_2 \cup Q_1)) = (g_2 \circ f)^{-1}(y) \cap (g_1 \circ f)^{-1}(y) = H_2$ y Y es localmente conexo. Además, $(g_2 \circ f)^{-1}(y) \cup (g_1 \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(Y \setminus (Q_2 \cap Q_1)) = f^{-1}(Y)$. utilizando el hecho de que X es débilmente unicoherente, tenemos que H_2 es conexo. Ahora supongamos que H_{n-1} es conexo. Nótese que:

$$\begin{aligned}
(g_n \circ f)^{-1}(y) \cup H_{n-1} &= f^{-1}(Y \setminus Q_n) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} f^{-1}(Y \setminus Q_i) \right) \\
&= (X \setminus f^{-1}(Q_n)) \cup \left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} f^{-1}(Q_i) \right) \right) \\
&= X \setminus \left(f^{-1}(Q_n) \cap f^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i \right) \right) \\
&= X
\end{aligned}$$

ya que $Q_n \cap Q_i = \emptyset$ para cada $i \neq n$. Además,

$$f^{-1}(Q_{n+1}) \subseteq f^{-1}(Y \setminus (\bigcup_{1=1}^{n} Q_i)) = (g_n \circ f)^{-1}(y) \cap H_{n-1} = H_n.$$

Como X es débilmente unicoherente y Y es localmente conexo, concluimos que H_n es conexo. Por lo tanto, H_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $H_{n+1} \subseteq H_n$.
Por ultimo tenemos que:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(Y \setminus Q_i) \right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(Y \setminus Q_i) \\
&= f^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (Y \setminus Q_i) \right) \\
&= f^{-1} \left(Y \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right) \right) \\
&= f^{-1}(y)
\end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema 1.15 concluimos que $f^{-1}(y)$ es conexo. $\square$

Corolario 3.24. *Sea $f\colon X \to Y$ una función libremente descomponible entre continuos. Si X es débilmente unicoherente y Y es localmente conexo, entonces Y es débilmente unicoherente.*

En esta parte de nuestro trabajo podremos hacer visible el surgimiento de la noción de unicoherencia débil. Como habiamos dicho en la Introducción, la unicoherencia débil parte de ser una condición necesaria para que una función fuertemente libremente descomponible sea casimonótona, generalizando lo mostrado en [1, Teorema 4.2 pág. 894]. La demostración del siguiente resultado ha sido tomado de [2].

Teorema 3.25. *Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es debilmente unicoherente, entonces f es casimonótona.*

Demostración. Sea K subcontinuo de Y, tal que $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$. Veamos que $f^{-1}(K)$ es conexo. Claramente, si $Y \setminus K$ es conexo $\text{Cl}_Y(Y \setminus K)$ es subcontinuo de Y, donde $Y = \text{Cl}_Y(Y \setminus K) \cup K$. Como f es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $f^{-1}(\text{Cl}_Y(Y \setminus K))$ y $f^{-1}(K)$ son conexos. Suponga entonces que $Y \setminus K$ es disconexo. Sean U y V abiertos disjuntos de Y, tales que $Y \setminus K = U \cup V$, por el Teorema 1.8 tenemos que $K \cup U$ y $K \cup V$ son subcontinuos de Y tales que $Y = (K \cup U) \cup (K \cup V)$. Aplicando nuevamente el hecho de que f es fuertemente libremente descomponible, concluimos que $f^{-1}(K \cup U)$ y $f^{-1}(K \cup V)$ son conexos. Como f es continua, $f^{-1}(K \cup U)$ y $f^{-1}(K \cup V)$ son subcontinuos de X tales que $X = f^{-1}(K \cup U) \cup f^{-1}(K \cup V)$ y

$$\begin{aligned}
f^{-1}(K \cup U) \cap f^{-1}(K \cup V) &= f^{-1}((K \cup U) \cap (K \cup V)) \\
&= f^{-1}(K \cup (U \cap V) \\
&= f^{-1}(K)
\end{aligned}$$

donde $f^{-1}(\text{Int}_Y(K)) \subseteq f^{-1}(K)$, por lo tanto $\text{Int}_Y(f^{-1}(K \cup U) \cap f^{-1}(K \cup V)) \neq \emptyset$. Así $f^{-1}(K)$ es conexo, ya que X es débilmente unicoherente. por lo tanto, f es casimonótona. □

Corolario 3.26. *Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Si X es irreducible, entonces f es casimonótona.*

Aunque la unicoherencia débil es una condición suficiente para que una función fuertemente libremente descomponible sea casimonótona, no es condición necesaria, como lo vemos en el siguiente ejemplo tomado de [2].

Ejemplo 3.27. *Existe un continuo X no débilmente unicoherente, tal que toda función $f\colon X \to Y$ continua hacia cualquier continuo Y que sea fuertemente libremente descomponible, es casimonótona.*

Tomemos dos abanicos armónicos F_1 y F_2 tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Sea $h_i\colon F_H \to F_i$ un homeomorfismo, para $i = 1, 2$ (Vease Ejemplo 1.4). Tenemos entonces que $F_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_i e_{ij}$ donde:

1. $v_i = h_i(v)$
2. $e_{i0} = h_i((1, 0))$
3. $e_{ij} = h_i((1, \frac{1}{j}))$ para $i = 1, 2$

Definamos $g\colon \{v_1, e_{10}\} \to \{v_2, e_{20}\}$ definida por $g(v_1) = e_{20}$ $g(v_2) = e_{10}$ y tomemos el espacio cociente $X = F_1 \cup_g F_2$. Un bosquejo de nuestro nuevo espacio X, lo podemos ver en la Figura 3.6, donde $w = \{v_2, e_{10}\}$ y $z = \{v_1, e_{20}\}$.

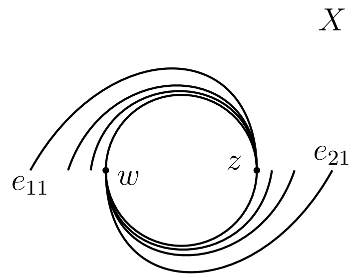


Figura 3.6: Continuo no débilmente unicoherente

Sabemos que cualquier abanico armónico es un continuo débilmente unicoherente, sin embargo, X no es débilmente unicoherente, ya que si tomamos $A = F_1$ y $B = F_2 \cup v_1e_{11}$, tenemos que $X = A \cup B$, $\mathrm{Int}_X(A \cap B) = v_1e_{11}$ y $A \cap B = v_1e_{11} \cup \{w\}$. Por lo tanto X no es débilmente unicoherente. Veamos que cualquier función fuertemente libremente descomponible $f\colon X \to Y$ hacia cualquier continuo Y es casimonótona. Tomemos K subcontinuo de Y tal que $\mathrm{Int}_Y(K) \neq \emptyset$. Si $Y = K$, $f^{-1}(K) = X$ es conexo. Si K es subcontinuo propio de Y y $Y \setminus K$ es conexo, entonces $\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus K)$ es subcontinuo de Y, donde $Y = \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus K) \cup K$. Como f es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus K))$ y $f^{-1}(K)$ son conexos. Así que supongamos que $Y \setminus K$ es disconexo, luego existen U y V abiertos disjuntos de Y tales que $Y \setminus K = U \cup V$. Por el Teorema 1.8 tenemos que $K \cup U$ y $K \cup V$ son subcontinuos de Y tales que $Y = (K \cup U) \cup (K \cup V)$. De lo anterior concluimos lo siguiente:

1. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, ya que $U \cap V = \emptyset$.

2. $f^{-1}(K \cup U)$ y $f^{-1}(K \cup V)$ son subcontinuos propios de X tales que $X = f^{-1}(K \cup U) \cup f^{-1}(K \cup V)$.

3. $f^{-1}(K \cup U) \cap f^{-1}(K \cup V) = f^{-1}(K)$.

Como queremos ver que $f^{-1}(K)$ es conexo, analizemos la situación cuando $f^{-1}(K)$ es disconexo.

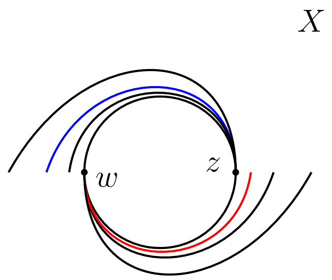


Figura 3.7: Continuo no débilmente unicoherente

Como lo muestra la figura 3.7, la única forma para que $f^{-1}(K)$ sea disconexo es que tenga dos componentes K_w y K_z que contengan a los puntos de identificación respectivamente. Veamos que $f^{-1}(K)$ posee a lo más dos componentes.

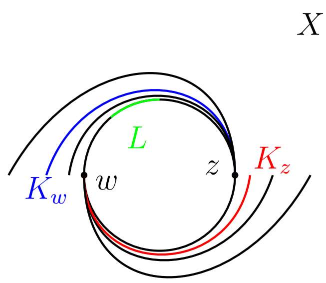


Figura 3.8: Continuo no débilmente unicoherente

Supongamos que existe L componente de $f^{-1}(K)$, aparte de K_w y K_z como se muestra en la Figura 3.8. Entonces $L \subseteq X \setminus \{w, z\}$, por lo tanto $L \subset F_1$ o $L \subset F_2$. Suponga que $L \subset F_1$ y definamos $\alpha_i = h_i(\{tv + (1-t)(1,0) \colon t \in [0,1]\})$, para $i = 1, 2$. Si $L \cap f^{-1}(\text{Int}_Y(K)) \neq \emptyset$, como $f^{-1}(K \cup U)$ y $f^{-1}(K \cup V)$ son conexos y $f^{-1}(K \cup U) \cap f^{-1}(K \cup V) = f^{-1}(K)$ entonces $z \in L$ o $w \in L$, lo que indica que $L = K_z$ o $L = K_w$. Ahora, si $L \cap f^{-1}(\text{Int}_Y(K)) = \emptyset$ ocurre que $\alpha_1 \subset L$ o $\alpha_2 \subset L$, luego $\alpha_1 \subset f^{-1}(K)$ o $\alpha_2 \subset f^{-1}(K)$, lo que implica que $f^{-1}(K)$ es conexo. Por lo tanto si $f^{-1}(K)$ es disconexo, posee únicamente dos componentes.

Observe que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{w, z\}$, luego $\alpha_i \setminus f^{-1}(K) \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$ si $f^{-1}(K)$ es disconexo. Al tener que $\{w, z\} \subset f^{-1}(K)$ y recordando que $f^{-1}(K \cup U)$ es conexo, entonces $\alpha_1 \subset f^{-1}(K \cup U)$ o $\alpha_1 \cup \subset f^{-1}(K \cup V)$. Supongamos que $\alpha_1 \subset f^{-1}(K \cup U)$. Entonces $\alpha_2 \subset f^{-1}(K \cup V)$, ya que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Nótese que $\alpha_1 \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ y $\alpha_2 \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, ya que si $\alpha_1 \subseteq f^{-1}(K)$ o $\alpha_2 \subseteq f^{-1}(K)$, entonces $f^{-1}(K)$ es conexo.

Afirmación 3.28. *U y V son conexos.*

Supongamos que $U = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son abiertos disjuntos de Y. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} Y \setminus K &= (U_1 \cup U_2) \cup V \\ &= U_1 \cup (U_2 \cup V) \\ &= U_2 \cup (U_1 \cup V) \end{aligned}$$

Luego $\alpha_2 \subset f^{-1}(K \cup V) \subseteq f^{-1}(K \cup V \cup U_2)$ y Así, $\alpha_1 \subset f^{-1}(U_1)$. Pero $\alpha_2 \subset f^{-1}(K \cup V) \subseteq f^{-1}(K \cup V \cup U_1)$, lo que implica que $\alpha_1 \subset f^{-1}(U_2)$, contradiciendo el hecho de que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ya que $\alpha_1 \not\subset f^{-1}(K)$. Por lo tanto, U es conexo. De manera análoga, concluimos que V es conexo.

De lo anterior podemos tomar $Y = \text{Cl}_Y(U) \cup (K \cup V) = \text{Cl}_Y(V) \cup (K \cup U)$, ya que $\text{Cl}_Y(U)$ y $\text{Cl}_Y(V)$ son subcontinuos propios de Y. Utilizando nuevamente el hecho de que f es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)$ y $f^{-1}(\text{Cl}_Y(V)$ son subcontinuos de X. Recordando que $\alpha_1 \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ y $\alpha_2 \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, tenemos entonces que $z \in f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)$ y $w \in f^{-1}(\text{Cl}_Y(V)$. Veamos lo siguiente:

1. $f^{-1}(K) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ es finito, ya que si $|f^{-1}(K) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\}| = \infty$, entonces

$\alpha_1 \subseteq f^{-1}(K)$ y como $f^{-1}(K) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\} \subseteq K_z$, entonces $K_z \cap K_w \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que K_zy K_w son componentes de $f^{-1}(K)$.

2. $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(V)) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ es finito, ya que si $|f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(V)) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\}| = \infty$, tenemos que $\alpha_1 \subseteq f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(V))$, luego $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, lo que es contradictorio.

De los dos puntos anteriores, concluimos entonces que $|f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(U)) \cap \{e_{1j} \colon j \in \mathbb{N}\}| = \infty$, por lo tanto $\alpha_1 \subseteq f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(U))$. De forma análoga, concluimos que $\alpha_2 \subseteq f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(V))$ lo que indica que $(f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(U))) \cap (f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(V))) \neq \emptyset$. Así $\mathrm{Cl}_Y(U) \cup \mathrm{Cl}_Y(V)$ es subcontinuo de Y y $Y = K \cup \mathrm{Cl}_Y(U) \cup \mathrm{Cl}_Y(V)$. Utilizando otra vez el hecho de que f es fuertemente libremente descomponible, obtenemos que $f^{-1}(K)$ es conexo. Es decir, f es casimonótona.

Capítulo 4

Conclusiones

La unicoherencia débil es una propiedad topológica de la cual podemos concluir lo siguiente:

1. Todo continuo unicoherente o irreducible, es débilmente unicoherente.
2. Si el producto numerable de continuos es débilmente unicoherente, cada continuo es débilmente unicoherente.
3. Existe un producto finito de continuos débilmente unicoherente, que no es débilmente unicoherente.
4. El producto finito de continuos localmente conexos y débilmente unicoherentes, es débilmente unicoherente.
5. Las funciones fuertemente libremente descomponibles preservan la unicoherencia débil.
6. Las funciones libremente descomponibles con dominio localmente conexo preservan la unicoherencia débil.

Bibliografía

[1] Camargo J. and Macías S., On freely decomposable maps, Topology Appl. 159 (2012), 891-899.

[2] Camargo J. and Villanueva H., On weakly unicoherence on continua, preprint.

[3] Charatonik J. J., History of continuum theory, Kluwer Academic Publisher, Printed in the Netherlands, 2, 1998, 703–789.

[4] Gordh G.R. Jr and Hughes C.B., On freely decomposable mappings of continua, Glas. Mat. Ser. III, 14 (34) (1979), 137-146.

[5] Hughes C.B., Some remarks on freely decomposable mappings, Topology Proc., 2, 1977, 213-217.

[6] K. Kuratowski, *Topology*, vol II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[7] Maćkowiak T., Continuos mappings on continua, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1-95.

[8] Nadler S. Jr.,*Continuum theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*, Vol 158, Marcel dekker, New York, 1992.

[9] Nova J., *Unicoherencia en continuos*, Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2014.

[10] Roger J. T, An aposyndetic homogeneous curve that is not locally connected, Houston f. Math., 9, 1983, 433-440.

[11] Whyburn G. T., *Analitic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol: 28, Providence, R. I. 1942.

[12] Willard S., *General topology*, Dover publications, Inc., New York, 1998.