

**ESTUDIO CUANTITATIVO DE TRES APLICACIONES DIFERENTES DEL
PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP) EN LA UNIVERSIDAD
INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**JESSICA TATIANA GALVIS MEJÍA
GLADYS ANDREA JAIMES MONSALVE
NATALY JHOANA QUIROGA BERDUGO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA**

2011

**“ESTUDIO CUANTITATIVO DE TRES APLICACIONES DIFERENTES DEL
PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP) EN LA UNIVERSIDAD
INDUSTRIAL DE SANTANDER”**

**JESSICA TATIANA GALVIS MEJÍA
GLADYS ANDREA JAIMES MONSALVE
NATALY JHOANA QUIROGA BERDUGO**

**Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniera Industrial**

**Director
JAVIER EDUARDO ARIAS OSORIO
Ingeniero de Sistemas
Magister en Administración**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA**

2011

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecemos a Dios por ser nuestro guía y soporte permanente, por brindarnos la sabiduría, la salud y la fortaleza necesaria para cumplir a cabalidad con nuestros objetivos y metas.

A la Universidad Industrial de Santander, especialmente a la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, por formarnos como ingenieras industriales integrales y ofrecernos un acompañamiento constante durante toda la carrera universitaria.

Al profesor Javier Eduardo Arias Osorio por su apoyo, asesorías y enseñanzas durante el desarrollo de este proyecto, los cuales fueron muy importantes en nuestro proceso de aprendizaje y formación profesional.

Al grupo OPALO por darnos su respaldo y apoyo en todo momento y permitirnos realizar este proyecto y compartirlo con los nuevos miembros del grupo.

A las divisiones de Correspondencia, Bienestar Universitario y Planta Física, por colaborarnos en la obtención de información y realización del proyecto.

A todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron e hicieron posible este proyecto.

Nataly Quiroga, Jessica Galvis y Andrea Monsalve.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	23
1. GENERALIDADES	25
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	25
1.2 ALCANCE DEL TRABAJO	27
1.3 OBJETIVOS	28
1.3.1 <i>Objetivo general</i>	28
1.3.2 <i>Objetivos específicos</i>	28
1.4 METODOLOGÍA	29
2. DIAGNÓSTICO DE LOS CASOS DE ESTUDIO	31
2.1 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	31
2.2 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	32
2.3 CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	35
3. ESTUDIO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS: TSP Y SUS VARIACIONES, VRP Y SUS VARIACIONES, MÉTODO DE SOLUCIÓN EXACTO, HEURÍSTICAS CLÁSICAS Y METAHEURÍSTICA.	37
3.1 EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP)	37
3.1.1 <i>Heurísticas utilizadas para solucionar el TSP</i>	42
3.1.1.1 Algoritmo Árbol de Expansión Mínima	43
3.1.1.2 Algoritmo Vecino Más Cercano	47
3.2 PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO PARA m AGENTES (m-TSP)	51
3.3 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP)	51
3.4 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON VENTANAS DE TIEMPO (VRPTW)	55
3.5 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON CAPACIDAD (CVRP)	58
3.5.1 <i>Heurísticas utilizadas para solucionar el CVRP</i>	60
3.5.1.1 Algoritmo de Barrido	60
3.5.1.2 Algoritmo de Ahorros	62
3.5.1.3 Mejora del Algoritmo de Ahorros	65

3.5.1.4	Algoritmo k-opt	66
3.6	METAHEURÍSTICAS	68
3.6.1	<i>Búsqueda Tabú</i>	70
3.7	TRABAJOS DE GRADO RELACIONADOS CON LA TEMÁTICA DEL VRP Y LAS TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN UTILIZADAS	72
4.	APLICACIÓN DE MODELOS A LOS CASOS DE ESTUDIO	76
4.1	CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	76
4.1.1	<i>Modelamiento usando métodos exactos</i>	76
4.1.1.1	Aplicación del método de Branch and Bound para el problema del vendedor viajero (TSP)	76
4.1.1.2	Aplicación del método de Branch and Bound para el problema del vendedor viajero para m agentes (m-TSP)	78
4.1.2	<i>Modelamiento usando heurísticas clásicas</i>	80
4.1.2.1	Aplicación del Algoritmo árbol de expansión mínima	80
4.1.2.2	Aplicación del algoritmo vecino más cercano	81
4.1.2.3	Aplicación del algoritmo de barrido	81
4.1.2.4	Aplicación del algoritmo de ahorros	82
4.1.2.5	Aplicación del algoritmo de ahorros mejorado	82
4.1.2.6	Aplicación del algoritmo 2-opt	83
4.1.3	<i>Aplicación de la metaheurística Búsqueda Tabú</i>	85
4.2	CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	87
4.2.1	<i>Modelamiento usando métodos exactos</i>	87
4.2.1.1	Aplicación del método de Branch and Bound para el problema de ruteo de vehículos con capacidad (CVRP)	87
4.2.1.2	Aplicación del método de Branch and Bound para el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW)	90
4.2.2	<i>Modelamiento usando heurísticas clásicas</i>	91
4.2.2.1	Aplicación del Algoritmo vecino más cercano	91
4.2.2.2	Aplicación del algoritmo de barrido	92
4.2.2.3	Aplicación del algoritmo de ahorros	92
4.2.2.4	Aplicación del Algoritmo de Ahorros Mejorado	93

4.2.2.5	Aplicación del algoritmo 2-opt	96
4.2.3	<i>Aplicación de la metaheurística Búsqueda tabú</i>	98
4.3	CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	100
4.3.1	<i>Modelamiento usando métodos exactos</i>	100
4.3.1.1	Aplicación del método de Branch and Bound para el problema del vendedor viajero para un agente (TSP)	100
5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	103
5.1	CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA	103
5.1.1	<i>Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.</i>	103
5.1.2	<i>Ruta propuesta para el caso de la distribución de la correspondencia.</i>	103
5.1.3	<i>Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.</i>	104
5.2	CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	105
5.2.1	<i>Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.</i>	105
5.2.2	<i>Ruta propuesta para el caso de la distribución de los almuerzos.</i>	105
5.2.3	<i>Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.</i>	106
5.3	CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	107
5.3.1	<i>Ruta actual para el caso de la recolección de residuos sólidos.</i>	107
5.3.2	<i>Ruta propuesta para el caso de la recolección de residuos sólidos.</i>	107
5.3.3	<i>Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual</i>	107
6.	MANUAL DEL PROGRAMA MHVRP	108
6.1	DESCRIPCIÓN GENERAL	108
6.1.1	<i>Alcance</i>	109
6.1.2	<i>Usuarios finales</i>	109
6.2	REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA	110
6.3	PASOS PARA EL FUNCIONAMIENTO DE LA INTERFAZ	110
6.3.1	<i>Conociendo el programa</i>	110
6.3.2	<i>Menú</i>	110

6.3.3	<i>Métodos</i>	111
6.3.4	<i>Datos de entrada</i>	111
6.3.4.1	Inclusión de los parámetros directamente en el programa	112
6.3.4.2	Importación de los datos requeridos desde Microsoft Office Excel	112
6.3.5	<i>Ubicación y organización de los datos en archivo de microsoft office excel</i>	113
6.3.5.1	Distancias.	113
6.3.5.2	Demandas.	114
6.3.5.3	Coordenadas.	114
6.3.5.4	Solución inicial.	115
6.3.6	<i>Procesamiento de datos y solución de los algoritmos</i>	115
6.3.7	<i>Botón de reinicio</i>	116
7.	CONCLUSIONES	118
8.	RECOMENDACIONES	120
	BIBLIOGRAFIA	121
	ANEXOS	123

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Demandas obtenidas para cada día de la semana del 21 al 25 de Febrero de 2011.	34
Tabla 2. Comparación de los resultados para el caso de la correspondencia.	84
Tabla 3. Soluciones de partida para el algoritmo 2-opt.	84
Tabla 4. Soluciones mejorados por el algoritmo 2-opt.	85
Tabla 5. Soluciones de partida para la metaheurística Búsqueda Tabú.	86
Tabla 6. Soluciones mejoradas por la metaheurística Búsqueda Tabú.	87
Tabla 7. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros mejorado para el día martes para todos los valores de λ utilizados.	94
Tabla 8. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros Mejorado para el día miércoles para todos los valores de λ utilizados.	95
Tabla 9. Comparación de los algoritmos utilizados en el caso de distribución de almuerzos.	96
Tabla 10. Soluciones de partida para el Algoritmo 2-opt.	97
Tabla 11. Soluciones mejoradas por el Algoritmo 2-opt.	98
Tabla 12. Soluciones de partida para la metaheurística Búsqueda Tabú.	99
Tabla 13. Soluciones mejoradas por la metaheurística Búsqueda tabú.	99
Tabla 14. Comparativo de los algoritmos y métodos utilizados para el caso de la distribución de la correspondencia.	104
Tabla 15. Comparativo de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.	104
Tabla 16. Comparativo de las rutas halladas por los diferentes métodos utilizados en el caso de la distribución de los almuerzos.	106
Tabla 17. Comparativo de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.	106
Tabla 18. Comparación de la ruta propuesta y la actual para el caso de la recolección de residuos.	107

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Ciclo hamiltoniano en un TSP de ocho ciudades.	39
Figura 2. Ciclo Hamiltoniano.	40
Figura 3. Restricción 1 para el TSP.	41
Figura 4. Restricción 2 del TSP.	41
Figura 5. Representación del teorema de Inequidad triangular.	46
Figura 6. Teorema de Inequidad Triangular para grafos.	46
Figura 7. Diagrama de flujo del Algoritmo de Kruskal.	47
Figura 8. Diagrama de flujo del Algoritmo del vecino más cercano.	49
Figura 9. Diagrama de flujo del Vecino más cercano con la restricción de capacidad para los repartidores.	50
Figura 10. Variantes del VRP.	52
Figura 11. Representación de una solución obtenida mediante el algoritmo de barrido.	61
Figura 12. Algoritmo de Barrido.	62
Figura 13. Diagrama de flujo del Algoritmo de barrido.	63
Figura 14. Dos rutas antes y después de ser unidas.	64
Figura 15. Rutas circulares y Rutas radiales.	65
Figura 16. Diagrama de flujo del Algoritmo de ahorros.	67
Figura 17. Diagrama de flujo del algoritmo 2-opt.	69
Figura 18. Diagrama de flujo de la metaheurística Búsqueda tabú.	73
Figura 19. Ventana que muestra los algoritmos y parámetros necesarios para el funcionamiento del programa MHVRP.	111
Figura 20. Ventana emergente para buscar e importar los datos que están en Microsoft Office Excel.	113
Figura 21. Matriz de Distancias guardada en un archivo de Excel.	114
Figura 22. Vector de Demandas guardado en un archivo de Excel.	115
Figura 23. Tabla de Coordenadas guardada en un archivo de Excel.	116
Figura 24. Vector de la Solución Inicial guardada en un archivo de Excel.	116
Figura 25. Ventana emergente que muestra la solución obtenida por el programa para el algoritmo Vecino más cercano.	117

LISTA DE ECUACIONES

	Pág.
Ecuación 1. Función Objetivo del TSP.	40
Ecuación 2. Restricción de entrada a las ciudades o dependencias.	41
Ecuación 3. Restricción de salida de las ciudades o dependencias.	41
Ecuación 4. Restricción para romper subtours.	42
Ecuación 5. Restricciones que aseguran que los vehículos que salgan del origen deben regresar a él.	51
Ecuación 6. Función objetivo del VRPTW.	56
Ecuación 7. Restricción de visita a los clientes.	57
Ecuación 8. Restricción que indica que cada vehículo debe entrar y salir de 0 (depósito) una vez.	57
Ecuación 9. Restricción que asegura que para todo vehículo $k \in K$, cada cliente debe ser visitado una vez.	57
Ecuación 10. Restricción de capacidad.	57
Ecuación 11. Restricción que asegura que el cliente i es servido por el vehículo k dentro del límite de tiempo establecido.	58
Ecuación 12. Restricción que indica que si un vehículo va de i a j , antes de servir a j debe haber servido a i .	58
Ecuación 13. Función objetivo del CVRP.	59
Ecuación 14. Restricciones que aseguran que cada cliente sea visitado una vez por un vehículo.	59
Ecuación 15. Restricción que asegura que los vehículos que salgan del origen regresen a él.	60
Ecuación 16. Ecuación para calcular los ahorros.	64
Ecuación 17. Ecuación para calcular la mejora del algoritmo de ahorros.	65
Ecuación 18. Ecuación utilizada para el cálculo del número de repartidores a utilizar.	88
Ecuación 19. Ecuación utilizada para calcular el número de rutas a realizar en un día.	89

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1. MAPA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER CON LOS NODOS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA Y REPARTICIÓN DE LOS ALMUERZOS	123
ANEXO 2. DESCRIPCIÓN DE LOS NODOS UTILIZADOS EN EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA Y REPARTICIÓN DE LOS ALMUERZOS	124
ANEXO 3. DEMANDA DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO DEL MES DE MARZO DE 2011	125
ANEXO 4. MAPA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER CON LOS NODOS PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	128
ANEXO 5. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO DE KRUSKAL	129
ANEXO 6. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO DEL VECINO MÁS CERCANO	131
ANEXO 7. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO SUBVIAJE INVERSO	133
ANEXO 8. MATRIZ DE DISTANCIAS PARA EL CASO DE LA ENTREGA DE CORRESPONDENCIA Y DISTRIBUCIÓN DE LOS ALMUERZOS	135
ANEXO 9. SOLUCIÓN OBTENIDA CON EL MÉTODO EXACTO INCLUYENDO LAS RESTRICCIONES DE SUBTOURS PARA EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP) PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	137
ANEXO 10. SOLUCIÓN FINAL OBTENIDA CON EL MÉTODO EXACTO PARA EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP) PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	138
ANEXO 11. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	139

ANEXO 12. PROCESO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INEQUIDAD TRIANGULAR PARA EL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA DEL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	140
ANEXO 13.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA SEGUNDA FASE DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	144
ANEXO 14.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE VECINO MÁS CERCANO PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA PARA 3 REPARTIDORES	145
ANEXO 15.SECUENCIA OBTENIDA A PARTIR DEL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	146
ANEXO 16.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	147
ANEXO 17. MATRIZ DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	148
ANEXO 18.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	150
ANEXO 19. MATRICES DE AHORROS MEJORADOS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA	151
ANEXO 20. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,1$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	157
ANEXO 21. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,4$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	158
ANEXO 22. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,8$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	159

ANEXO 23.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE 2-OPT PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	160
ANEXO 24.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR BÚSQUEDA TABÚ PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA	161
ANEXO 25. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL MÉTODO EXACTO PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON CAPACIDAD (CVRP) PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	162
ANEXO 26. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE VECINO MÁS CERCANO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	167
ANEXO 27. SECUENCIA GENERADA POR EL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS	172
ANEXO 28. APLICACIÓN ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	173
ANEXO 29. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	176
ANEXO 30. MATRICES DE AHORROS PARA LA SEMANA DEL 21 AL 25 DE FEBRERO DE 2011	181
ANEXO 31. SOLUCIONES OBTENIDAS POR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS	183
ANEXO 32. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	185
ANEXO 33. RUTAS OBTENIDAS AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS MEJORADO ($\lambda= 0,1$) PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	190
ANEXO 34. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	192

ANEXO 35. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE 2-OPT PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	197
ANEXO 36. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR BÚSQUEDA TABÚ PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	201
ANEXO 37. MATRIZ DE DISTANCIAS PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	205
ANEXO 38. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL MÉTODO EXACTO PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS	207
ANEXO 39. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE PARA LA ENTREGA DE CORRESPONDENCIA	208
ANEXO 40. MAPA DE LA RUTA ACTUAL EMPLEADA EN LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	210
ANEXO 41. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE EN LA REPARTICIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	211
ANEXO 42. MAPAS DE LAS RUTAS UTILIZADAS ACTUALMENTE POR LOS REPARTIDORES ENCARGADOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO	213
ANEXO 43. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE PARA LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	218
ANEXO 44. RUTA ACTUAL UTILIZADA POR LA DIVISIÓN DE PLANTA FÍSICA PARA LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.	219
ANEXO 45. MAPA DE LA RUTA ACTUAL EMPLEADA EN LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	221

ANEXO 46. MAPA DE LA RUTA PROPUESTA PARA EL CASO DE LA
RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD
INDUSTRIAL DE SANTANDER

222

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO CUANTITATIVO DE TRES APLICACIONES DIFERENTES DEL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP) EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER¹

AUTORES: JESSICA TATIANA GALVIS MEJÍA²
GLADYS ANDREA JAIMES MONSALVE²
NATALY JHOANA QUIROGA BERDUGO²

DIRECTOR DE PROYECTO: JAVIER EDUARDO ARIAS OSORIO³

PALABRAS CLAVE: Distribución, ruteo de vehículos, programación lineal entera binaria, heurísticas, metaheurística.

DESCRIPCIÓN:

Las técnicas de optimización cuantitativas como herramientas ingenieriles utilizadas para el mejoramiento de los procesos tanto administrativos como productivos y logísticos de las organizaciones propias del sector industrial y del sector comercial, están siendo estudiadas desde hace más de cinco décadas y aplicadas ampliamente en los países desarrollados con grandes ahorros en costos importantes para mejorar aspectos como la productividad y la competitividad.

Este trabajo inspecciona las técnicas exactas de programación lineal entera binaria, algunas heurísticas clásicas propias del proceso de distribución física de cualquier empresa (en el ámbito científico se denota como el Problema de Ruteo de Vehículos o VRP) y la metaheurística Búsqueda tabú como método transversal a los casos de estudio. Debido a las particularidades del VRP, los tres casos de distribución estudiados al interior de la Universidad Industrial de Santander deben modelarse a través de un grafo, y a partir de éste se realiza la aplicación de la variación del VRP apropiado de acuerdo a sus características específicas: La distribución de la correspondencia se caracteriza por su capacidad ilimitada; la distribución de almuerzos presenta capacidad limitada y debido a sus características propias se hace necesaria la iteración diaria para determinar las rutas que se deben seguir para optimizar el tiempo y la distancia; la recolección de residuos sólidos se caracteriza por su capacidad ilimitada y por contar con un grafo asimétrico, dirigido e incompleto originado por los sentidos de las vías de la universidad (a diferencia de los otros dos casos en que se utilizan grafos completos, simétricos y no dirigidos).

¹ Proyecto de grado modalidad Trabajo de Investigación.

² Estudiante Ingeniería Industrial. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Universidad Industrial de Santander.

³ Docente Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: QUANTITATIVE STUDY OF THREE DIFFERENT APPLICATIONS OF THE VEHICLE ROUTING PROBLEM (VRP) AT THE UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER⁴.

AUTHORS: JESSICA TATIANA GALVIS MEJÍA⁵
GLADYS ANDREA JAIMES MONSALVE²
NATALY JHOANA QUIROGA BERDUGO²

DIRECTED BY: JAVIER EDUARDO ARIAS OSORIO⁶

KEY WORDS: distribution, vehicles routing, binary integer linear programming, heuristics, metaheuristic.

DESCRIPTION:

The quantitative techniques of optimization used as engineering tools for the improvement of administrative, productive and logistical processes of the organizations from the industrial and commercial sectors, have been studied for more than five decades and widely applied in the developed countries with wide savings in important costs to improve aspects such as the productivity and the competitiveness.

This work researches the exact techniques of binary integer linear programming, some classic heuristics within the physical distribution process of any company (in science is denoted as Vehicle Routing Problem or VRP) and the tabu search metaheuristic as a traverse method to the cases of study. Due to the particularities of the VRP, the three cases of distribution studied inside of Universidad Industrial de Santander should, in the first place, be modeled through a graph and starting from it the application of the appropriate VRP is made according to their own characteristics: The distribution of the correspondence is characterized by its limitless capacity; the distribution of lunches that presents limited capacity and due to their own characteristics it becomes necessary the daily iteration to determine the routes that should be taken to optimize the time and distance; and the solid waste disposal is characterized by its unlimited capacity and to have an asymmetric, directed and incomplete graph originated by the senses of the roads of the university (unlike the other two cases where complete, symmetrical and undirected graphs are used).

⁴ Degree Project. Modality: Research Project.

⁵ Students- School of Industrial and Business studies. Universidad Industrial de Santander.

⁶ Professor – School of Industrial and business studies. Universidad Industrial de Santander.

INTRODUCCIÓN

La distribución, tanto a nivel interno como externo de las organizaciones, ha sido tema de estudio desde hace ya varias décadas, identificándose el papel fundamental que ésta representa en la gestión de los sistemas logísticos. Básicamente, el manejo eficiente de la distribución puede generar considerables ahorros en costos, tiempo y distancias, convirtiéndose así en parte estratégica de las empresas y por consiguiente, en una ventaja competitiva para las mismas. Con el fin de obtener estos ahorros, muchas compañías han optado por utilizar la *Investigación de Operaciones* como herramienta para alcanzar un nivel óptimo dentro de su desempeño corporativo. Asimismo, dentro de esta rama de las matemáticas se encuentra el *Problema de Ruteo de Vehículos (VRP)*, el cual es fundamentalmente un problema de optimización combinatoria.

Dicho problema se puede resolver por medio de programación lineal entera binaria. Sin embargo, como es del tipo *NP-Hard*, no se garantiza que se encontrará la solución óptima en un tiempo computacionalmente adecuado, pues a medida que un problema cuenta con gran cantidad de variables y condiciones, la posibilidad de encontrar una solución óptima se reduce drásticamente debido a la naturaleza combinatoria que hace poco práctica la evaluación de todas las soluciones del problema. Por lo tanto, se han desarrollado algunos procedimientos como son los *métodos heurísticos*, los cuales permiten la incorporación de condiciones de difícil modelamiento e igualmente proporcionan una buena solución.

El libro consta de ocho capítulos, los cuales se encuentran distribuidos de la siguiente forma: En el primer capítulo se ubican los objetivos a alcanzar, las especificaciones y la metodología a aplicar en el desarrollo y ejecución de este proyecto. En el segundo capítulo se encuentran los tres casos de distribución planteados en la Universidad Industrial de Santander, con su respectivo grafo y

análisis de sus características. En el tercer capítulo está la revisión del marco teórico relacionado al tema del VRP y sus variaciones (TSP, m-TSP y el CVRP), algunas de las heurísticas relacionadas con el tema (*el Vecino más Cercano*, *el Árbol de Expansión Mínima*, *el Algoritmo de Ahorros*, *Algoritmo k-opt*, *Algoritmo de Barrido*, *entre otros*), al igual que la metaheurística *Búsqueda Tabú*. En el cuarto capítulo se presenta la aplicación de los métodos y algoritmos mencionados anteriormente, mientras que en el capítulo cinco se analizan los resultados obtenidos y se identifican las mejores soluciones para cada uno de los casos de aplicación del Problema de Ruteo de Vehículos.

En el capítulo seis se encuentra el manual del software programado en Matlab, en el cual se incluyen las heurísticas: *Vecino más cercano*, *Algoritmo de Barrido*, *Algoritmo de Ahorros*, *Algoritmo de Ahorros mejorado* y *Algoritmo 2-opt* y la metaheurística *Búsqueda Tabú*, utilizada para el análisis de los casos. Finalmente, en el capítulo siete y ocho se encuentran las conclusiones y recomendaciones.

1. GENERALIDADES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al iniciar en el semillero de investigación del grupo OPALO, se elige estudiar y profundizar sobre el Problema de Ruteo de Vehículos, identificando ejemplos reales para la posterior aplicación de los conceptos relacionados con el tema.

Al definir el presente proyecto se escogen tres casos dentro de la Universidad Industrial de Santander, para los cuales posteriormente buscan las soluciones a través del uso de métodos de optimización.

Para los tres casos, la investigación teórica parte del problema del agente viajero (TSP – por su sigla en inglés) como problema sencillo que se mueve sobre la complejidad de la formulación y resolución matemática hacia el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP – por su sigla en inglés). Cabe mencionar que al analizar cada caso de estudio se asocia de forma individual la variación del VRP más acorde. Los casos a estudiar son:

- Distribución de correspondencia. Ésta es una actividad realizada por la División de Correspondencia de la universidad, para lo cual se utilizan tres rutas tanto para entregar como para recibir todos los documentos y cartas de cada una de las escuelas y divisiones que lo requieran. Para cada una de estas rutas se recurre a un mensajero diferente, el cual hace su recorrido respectivo dos veces al día (uno en la mañana y otro en la tarde) utilizando unas bolsas de cuero (denominadas chuspas) para transportar la correspondencia. Debido a la periodicidad con que se realizan los recorridos, para este caso no se considera que estas bolsas tengan una capacidad limitada.

El estudio de este caso inicia con la variante del problema del agente viajero y con una generalización del mismo hacia el problema de los m agentes viajeros (m-TSP).

- La distribución de almuerzos de la División de Bienestar Universitario. Dentro de su amplia gama de servicios que brinda a la comunidad universitaria, Bienestar Universitario cuenta con el servicio de cafetería, en el cual se ofrece el servicio de almuerzo tanto en las instalaciones de la misma como a domicilio al interior de la universidad. Existen dos tipos de almuerzos a repartir: los almuerzos especiales (a la carta) y los almuerzos de cafetería (corriente).

Actualmente, para los domicilios se cuenta con el siguiente personal: tres personas para la repartición de los almuerzos especiales que generalmente son para la cafetería de profesores (Edificio Camilo Torres). Adicionalmente, se cuenta con dos personas más para la repartición de los almuerzos de la cafetería (corrientes), quienes distribuyen los almuerzos sin rutas definidas explícitamente, sólo teniendo en cuenta el orden de las llamadas y la cercanía de los edificios a los cuales se llevan los almuerzos, es decir, se distribuyen del edificio más cercano al más lejano. La dependencia de Bienestar Universitario encuentra problemas en el diseño de rutas principalmente debido a:

- La infraestructura de la Universidad, ya que muchos de los edificios no cuentan con rampas o ascensores que faciliten el trabajo de los repartidores, razón por la cual los repartidores encuentran dificultades para llegar a su cliente en un menor tiempo.
- El número de repartidores disponibles, pues muchas veces por altas demandas, los repartidores no son suficientes para atenderlas.

El estudio de este caso inicia con la variante del VRP: Problema de Ruteo de Vehículos con Capacidad (CVRP) con demanda conocida.

- La recolección de residuos sólidos. La división encargada de esta labor es la División de Planta Física, la cual dispone de un vehículo que pasa por cada uno de los puntos de recolección establecidos en la universidad y finalmente los deposita en el centro de acopio para posteriormente realizar su disposición final.

El recorrido comienza a las 7 de la mañana y termina aproximadamente a las 10 de la mañana.

Debido a que este caso presenta demandas pequeñas y sus recorridos son diarios, se considera que el vehículo utilizado para la recolección de residuos sólidos tiene capacidad infinita. Por tal motivo, este caso parte del estudio del problema del agente viajero (TSP).

Con este trabajo se espera brindar una herramienta objetiva que permita elegir las rutas que proporcionen menores distancias, tiempos o costos y que apoye la labor de las personas que trabajan en cada una de estas divisiones. Por lo tanto, se busca facilitar el proceso de distribución y selección de rutas que mejor se ajusten para la recolección y entrega de los diferentes elementos.

1.2 ALCANCE DEL TRABAJO

Se aplican técnicas cuantitativas, específicamente de programación matemática, en donde se involucra el estudio de tres variaciones, comenzando con la indagación y análisis del estado del arte hasta la verificación de resultados, aplicando programación lineal entera binaria (utilizando el método de Branch and Bound), algunas heurísticas clásicas (dentro de las que se pueden mencionar: el algoritmo de ahorros, el algoritmo de barrido, entre otros) y la metaheurística Búsqueda Tabú.

Los resultados a entregar mediante la realización de este trabajo son modelos de programación matemática y/o algunos algoritmos programados en MATLAB, que permitan identificar las mejores opciones como respuesta para cada uno de los casos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Estudiar la distribución de correspondencia, la distribución de almuerzos de la división de bienestar universitario y la recolección de residuos sólidos en la Universidad Industrial de Santander como aplicaciones diferentes del problema del ruteo de Vehículos (VRP) utilizando diferentes técnicas cuantitativas para evaluar su solución.

1.3.2 Objetivos específicos

- Recolectar y documentar la información sobre la situación presentada en la Universidad Industrial de Santander con relación a los tres casos de aplicación: Distribución de correspondencia, la distribución de almuerzos de la división de bienestar universitario y la recolección de residuos sólidos.
- Conocer la contextualización del Problema del Ruteo de Vehículos (VRP).
- Aplicar modelos utilizando la programación lineal entera binaria, verificando su ajuste en cada caso de aplicación del Problema de Ruteo de Vehículos.

- Abordar cada uno de los casos de estudio utilizando algunas heurísticas clásicas.
- Aplicar un algoritmo teniendo en cuenta la metaheurística “Búsqueda Tabú” para determinar las mejores soluciones en cada uno de los casos estudiados en el presente proyecto.
- Comparar y analizar los tres casos planteados, así como los resultados obtenidos usando los diferentes métodos de solución (programación lineal entera binaria (Branch and Bound por medio del Solver de Excel), heurísticas y metaheurística).

1.4 METODOLOGÍA

El proyecto se realiza teniendo en cuenta las siguientes etapas que garantizan el cumplimiento de los objetivos propuestos y el avance en el estudio de las tres aplicaciones del Problema de Ruteo de Vehículos en la Universidad Industrial de Santander:

ETAPA INICIAL: Conocimiento del tema y de los métodos a utilizar.

DESCRIPCIÓN:

- Leer y conocer la bibliografía relacionada con el Problema del Ruteo de Vehículos.
- Realizar ejercicios prácticos para comprender la teoría relacionada con las variaciones del Problema de Ruteo de Vehículos.
- Indagar y conocer el manejo y la distribución que se le da actualmente a los elementos de las divisiones de: Certificación y Gestión documental (encargada de la recepción y entrega de la correspondencia), Bienestar Universitario (con respecto al reparto de los almuerzos) y Planta Física (en la recolección de los residuos sólidos de la universidad).

- Realizar el mapa con los respectivos puntos de recolección y distancias para cada uno de los casos de estudio.

ETAPA INTERMEDIA: Utilización de la programación lineal entera binaria para la aplicación del método de Branch and Bound en los diferentes casos.

DESCRIPCIÓN:

- Estudiar el caso de la distribución de correspondencia como un problema de m agentes viajeros.
- Analizar el caso de la distribución de almuerzos como un Problema de Ruteo de Vehículos con Capacidad y un problema con ventanas de tiempo.
- Abordar el caso de recolección de residuos como un problema del agente viajero.

ETAPA FINAL: Modelamiento de los casos usando las heurísticas y la metaheurística y comparación los resultados de los métodos de solución utilizados.

DESCRIPCIÓN:

- Abordar cada uno de los casos utilizando el método de solución del algoritmo de vecino más cercano, algoritmo de barrido, el algoritmo de ahorros, el algoritmo de ahorros mejorado y el algoritmo 2-opt.
- Estudiar cada uno de los casos utilizando la metaheurística Búsqueda Tabú.
- Analizar y establecer las diferencias entre los tres casos planteados y los resultados obtenidos a través del método exacto, heurísticas y metaheurística.

2. DIAGNÓSTICO DE LOS CASOS DE ESTUDIO

Al iniciar el estudio de los tres casos de aplicación del Problema de Ruteo de Vehículos es importante conocer las características propias de cada caso con el objetivo de identificar los métodos que se adaptan mejor a cada uno de ellos al hacer la revisión teórica, para determinar la efectividad de la forma como se realizan las entregas y recolecciones en cada una de las dependencias.

2.1 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

Según la información suministrada por la directora de Certificación y Gestión documental de la División de Correspondencia de la universidad, María Carmen Salamanca Godoy, actualmente se cuenta con tres rutas trazadas para realizar la recolección y entrega de la correspondencia en cada una de las dependencias de la UIS. Para cada una de las rutas se requiere de un repartidor diferente, por lo que se tiene un total de tres repartidores para esta tarea.

La planeación de las rutas es realizada con base en la experiencia de los repartidores, estableciendo los recorridos según la cercanía de los sitios para la facilidad y agilidad en los mismos. Se utilizan bolsas de cuero (chuspas) para la recolección y entrega de la correspondencia, las cuales presentan suficiente capacidad para la realización de los recorridos. La División de Correspondencia realiza dos recorridos diarios (uno en la mañana y el otro en la tarde), situación que hace que la correspondencia sin entregar nunca sobrepase la capacidad de las bolsas de cuero. Al momento de realizar el recorrido, cada repartidor tiene definido su trayecto para llegar a cada una de las dependencias.

Se establecieron 28 nodos teniendo en cuenta las distintas dependencias visitadas. En el Anexo 1 se muestra el mapa de la universidad con los nodos utilizados y en el Anexo 2 se muestra la descripción de dichos nodos. En estos anexos se observa que la División de Correspondencia corresponde al nodo 1, el mismo nodo que representa el edificio de Ciencias Humanas.

2.2 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Para analizar la situación actual de la distribución de los almuerzos de Bienestar Universitario se acudió a la Jefatura sección comedores y cafetería, donde se habló con la señora Consuelo Serrano Vega, quien facilitó los datos requeridos para el diagnóstico del caso.

Según la información suministrada, las rutas utilizadas actualmente para el reparto de los almuerzos de Bienestar Universitario se realizan de acuerdo a la cantidad de almuerzos pedidos, la cantidad de repartidores disponibles en determinado día y las dependencias en las cuales haya demanda de almuerzos. Generalmente, se cuenta con cinco repartidores, aunque puede haber días en que se cuente con menos o en que esta cantidad no sea suficiente para suplir una alta demanda. Cada repartidor puede llevar hasta doce almuerzos por viaje y gastar en promedio entre 20 y 30 minutos en cada recorrido.

Como se menciona en el capítulo anterior, esta dependencia maneja dos tipos de almuerzos: los especiales y los de cafetería, para los cuales se tienen dos formas de solicitar el pedido:

- Los pedidos para almuerzos especiales son recibidos por vía telefónica sólo hasta el día anterior a la prestación del servicio.

- Para los almuerzos de cafetería se reciben igualmente vía telefónica, pero se toman pedidos hasta las once de la mañana (11 a.m.) del mismo día de la entrega.

Es decir que a las once de la mañana del día de la entrega de los almuerzos ya se conocen los destinos y cantidades demandadas de cada almuerzo, por lo que se define que este caso se trabaja con una demanda conocida.

Bienestar Universitario no recibe más pedidos después de esta hora debido a que:

- Debe dejar aproximadamente 150 almuerzos para las personas que almuerzan en la cafetería, ya que éstos representan un alto porcentaje de las ventas de almuerzos de Bienestar Universitario y no se pueden dejar de atender.
- Debe apartar los almuerzos para sus empleados.
- Y por último, a esa hora comienza la organización de los almuerzos y de las entregas.

Una vez conocida la demanda, se organizan las rutas teniendo en cuenta el orden de las llamadas y la cercanía de los nodos, ya que los repartidores realizan los domicilios iniciando en la dependencia más cercana y terminando en la más lejana. Para este caso, el tiempo no es un factor determinante para las entregas, ya que a pesar de que sus clientes desean tener sus almuerzos a las doce del medio día, ellos estarían dispuestos a recibir el servicio después de esta hora.

Para el presente proyecto, se decide tomar las demandas de cinco semanas (la última de Febrero y las cuatro de Marzo de 2011), de las cuales se analizan las rutas obtenidas para cada día de la semana del 21 al 25 de Febrero. Las demandas de la semana estudiada se muestran en la tabla 1; para este caso se considera que se tienen los cinco repartidores disponibles.

Los datos de las semanas del mes de Marzo son utilizados para analizar el comportamiento de la demanda de almuerzos de Bienestar Universitario, las cuales se pueden observar en el Anexo 3.

Se establecieron 28 nodos que representan las distintas dependencias a las cuales se les ofrece el servicio. Los nodos utilizados para este caso de estudio son los mismos usados en el caso de la entrega de la correspondencia, donde el nodo 24 representa la División de Bienestar Universitario.

Tabla 1. Demandas obtenidas para cada día de la semana del 21 al 25 de Febrero de 2011.

NODO	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
Laboratorio de Livianos	27	3	1	1	1
Laboratorio de Posgrados	3	2	3	1	4
Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas			2		
Capruis		2			
Edificio de Ingeniería Eléctrica	1	1			
Edificio Insed/Publicaciones	1	2	2		
Edificio Administración I - Entrada principal				1	

En este caso, las rutas deben ser analizadas diariamente ya que la cantidad de dependencias que piden el domicilio a Bienestar Universitario, así como la cantidad de almuerzos pedidos puede variar de un día a otro.

Este hecho diferencia el caso de la distribución de los almuerzos con el caso de la recolección y entrega de correspondencia, ya que en éste último, la generación de rutas no es un proceso frecuente pues el o los agentes viajeros deben visitar todas las dependencias asignadas, ya sea para recoger o para entregar la chuspa con la correspondencia. En pocas palabras, para la distribución de correspondencia se requiere analizar de nuevo las rutas sólo en

el caso en que ocurra alguna eventualidad que incluya, elimine o modifique la cantidad o posición de las dependencias visitadas o el número de los agentes viajeros disponibles.

2.3 CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS

Al visitar la División de Planta Física y hablar con el señor Juan Bautista Acero Santos, supervisor del Grupo de Servicios Varios de la universidad, se conoce la forma como actualmente se recogen los residuos sólidos en la Universidad Industrial de Santander. Para esta tarea se cuenta con un vehículo que pasa por cada uno de los puntos establecidos para la recolección. Los residuos sólidos nunca sobrepasan la capacidad del vehículo, debido a que se realizan recorridos diarios y la demanda en cada uno de los puntos de recolección es pequeña.

La secuencia del recorrido se establece de acuerdo a la orientación de las vías de la universidad y la facilidad de recolección (según la experiencia del recolector), aunque se le da prioridad a los cuartos cercanos a los laboratorios de posgrados (nodo 9, Edificio Camilo Torres), los cuales son visitados en primer lugar. La ruta que utilizan actualmente fue definida teniendo en cuenta el sentido como se deben recorrer las vías de la Universidad. Sin embargo, en algunos casos se debe ir en contravía para poder visitar ciertos nodos en el menor tiempo posible. Además para la secuencia de la ruta se debe considerar que el punto de partida o depósito del camión no es el mismo centro de acopio o punto de llegada del mismo.

Para llegar a los puntos de recolección se utilizan nodos de intersección entre ellos, por lo que se establecen 32 nodos utilizando la información suministrada por el Departamento de Planta Física. Los nodos para este caso se pueden observar en el Anexo 4, donde se define el depósito o punto de partida del vehículo como el nodo 1 y el centro de acopio como el nodo 11.

Para efectos de trabajar con el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) se hace necesario modelar la red de distribución como un grafo, donde los arcos o aristas representan segmentos de caminos y los vértices o nodos representan los puntos de distribución o recolección, es decir, las dependencias a las cuales se les va a prestar el servicio.

La construcción de la red para el caso de la distribución de correspondencia y la distribución de almuerzos se realiza evaluando todas las posibles rutas para llegar de un nodo a otro y escogiendo aquella más corta. Por tanto, para los grafos de estos casos, un arco corresponde a la ruta de menor distancia.

Por otro lado, para el caso de la recolección de residuos, la red utilizada se construye a partir de los caminos disponibles para los trayectos del vehículo sobre el mapa de la universidad, así como las orientaciones de las calles. Es así que para este caso se habla de aristas, las cuales representan segmentos de calle.

Nota: La convención dada para la red usada en los casos de distribución de correspondencia y almuerzos corresponde a un grafo simétrico. Sin embargo, en una forma más amplia de ver el problema, éste puede ser tratado como un grafo asimétrico y por lo mismo puede aumentar su complejidad.

3. ESTUDIO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS: TSP Y SUS VARIACIONES, VRP Y SUS VARIACIONES, MÉTODO DE SOLUCIÓN EXACTO, HEURÍSTICAS CLÁSICAS Y METAHEURÍSTICA.

Los métodos de solución de problemas de optimización matemática se pueden clasificar en métodos exactos y métodos aproximados. Los métodos exactos son aquellos que brindan una solución óptima del problema mediante un algoritmo⁷ eficiente. Son de gran funcionalidad para problemas diversos, inclusive los de optimización combinatoria donde se tienen pocos clientes.

Por otro lado, los métodos aproximados se usan en los casos donde, debido a la cantidad de variables y de posibles combinaciones de solución al problema, se excede el tiempo requerido para obtener una solución en un tiempo polinomial, lo que requiere del uso de otras herramientas de cómputo. En estas situaciones es preferible tener una solución factible del problema y tratar de mejorarla utilizando diferentes algoritmos, que buscar sin éxito una solución óptima a través de métodos exactos⁸. A continuación se aborda en primera instancia los problemas relacionados con el ruteo de vehículos y para cada uno de ellos se revisan los métodos de solución tanto el exacto como los heurísticos. Adicionalmente se plantea la metaheurística Búsqueda Tabú como método transversal a los problemas mencionados.

3.1 EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP)

En el problema del agente viajero o por sus siglas en inglés TSP (Traveling Salesman Problem) se debe visitar todo un conjunto de ciudades una sola vez

⁷ Un algoritmo es una serie de pasos organizados que describe el proceso que se debe seguir, para dar solución a un problema específico.

⁸ CONTRERAS, C., DÍAZ, M., Métodos Heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad [Proyecto de grado]. Universidad Industrial de Santander, 2010, p. 46.

y volver a la ciudad de partida, de modo que la distancia recorrida, el tiempo empleado o el costo, sea mínimo⁹.

El objetivo del TSP, desde la concepción de la teoría de grafos, es equivalente a encontrar el ciclo Hamiltoniano de costo mínimo. Siendo éste último un ciclo simple que pasa por todos los vértices del grafo, es decir, no utiliza el mismo vértice más de una vez¹⁰.

El problema se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea un grafo $G = (N; A)$, donde N es el conjunto de vértices, nodos, o dependencias y A son las aristas o arcos que tienen un peso C_{ij} que puede representar el costo, el tiempo o la distancia en que se incurre en ir de un nodo i a un nodo j . Se deben tener en cuenta ciertas definiciones relacionadas con la teoría de grafos como son:

- Grafo completo: es aquel en el que existe siempre algún camino que conecta todo par de vértices.
- Grafo dirigido y no dirigido: los arcos, y por tanto los grafos correspondientes pueden ser dirigidos o no dirigidos, dependiendo de si la arista ij se puede recorrer en una sola dirección o en ambas direcciones respectivamente.

Asimismo, se puede definir *camino* como una sucesión de aristas $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ en donde el vértice final de cada arista coincide con el inicial de la siguiente. Ahora bien, un camino es simple o elemental si no utiliza el mismo vértice más de una vez¹¹.

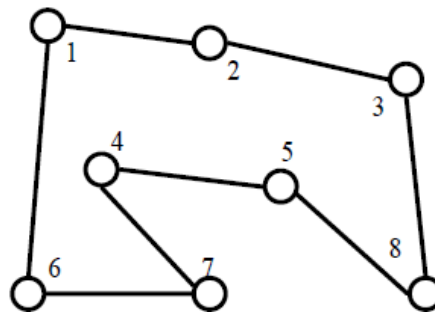
⁹ YEPES, V., MEDINA, J.; Optimización económica de redes de transporte del tipo VRPTW, Revista de obras públicas, Septiembre 2003/Nº 3.436, p. 31-33.

¹⁰ SANDOYA, F.; Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP). ESPL, 2007, p. 10-14.

¹¹ MARTÍ, R., Procedimientos heurísticos en optimización combinatoria, Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia, p. 9.

La figura 1 presenta un ciclo hamiltoniano conformado por ocho nodos, representada por un grafo, en donde cada nodo corresponde a una ciudad y cada arista representa el segmento de calle usado para ir de una ciudad a otra. El ciclo hamiltoniano muestra cómo se visitan las ciudades en el siguiente orden: 1, 2, 3, 8, 5, 4, 7, 6, 1.

Figura 1. Ciclo hamiltoniano en un TSP de ocho ciudades.



Fuente: Ríos, R., González, J., Investigación de operaciones en acción: heurísticas para la solución del TSP, Ingenierías, Octubre-Diciembre 2000, Vol. III, No.9, p. 15-16.

El TSP en sí es fácil de formular. Sin embargo, es difícil de resolver, ya que se considera un problema NP-Hard debido a que el tiempo de cómputo empleado para encontrar una solución óptima crece exponencialmente con respecto al tamaño de los datos del problema. Por tanto, surge la necesidad de emplear métodos aproximados (heurísticas) que, aunque no garantizan una solución óptima al problema, ofrecen soluciones factibles a éste¹².

Sin embargo, a pesar de que normalmente se recurren a los algoritmos aproximados, en ocasiones se dispone de un procedimiento que proporciona el óptimo para un conjunto de ejemplos (usualmente de tamaño reducido). Es así, que este problema se puede formular para ser resuelto por algún método exacto, como Branch and bound, planos de corte de gomory, etc., mediante un modelo de programación lineal entera con variables binarias de la siguiente manera¹³:

¹² RÍOS, R., GONZÁLEZ, J., Investigación de operaciones en acción: heurísticas para la solución del TSP, Ingenierías, Octubre-Diciembre 2000, Vol. III, No.9, p. 15-16.

¹³ MARTÍ, R., op.cit., p. 10.

Naturaleza de las variables del TSP.

$$X_{ij} \in \{0,1\} \forall i, j \in N, N=\{1, 2, \dots, n\}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la arista de ir de un nodo } i \text{ a un nodo } j \\ 0 & \text{si no se elige la arista de ir de un nodo } i \text{ a un nodo } j \end{cases}$$

Índices del modelo: i : nodo de salida de la arista ($i=1,2,..,n$).

j : nodo de llegada de la arista ($j=1,2,..,n$).

Parámetros: C_{ij} : Costo, distancia o tiempo de ir del nodo i al nodo j .

n : Número de clientes.

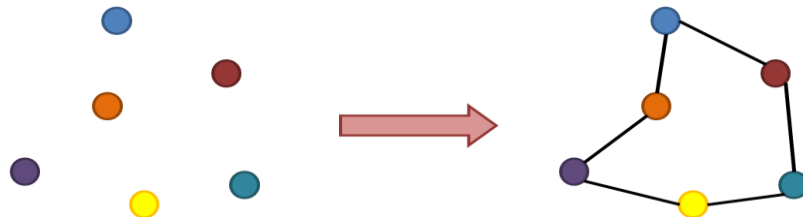
Función Objetivo:

Ecuación 1. Función Objetivo del TSP.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

La figura 2 muestra la construcción de un ciclo hamiltoniano, en donde se tienen 6 ciudades y el agente pasa una única vez por cada una de ellas.

Figura 2. Ciclo Hamiltoniano.



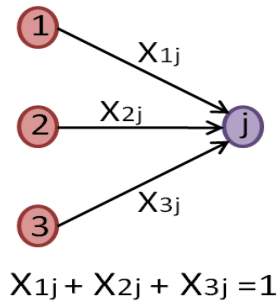
Sujeto a las siguientes restricciones:

1. El vendedor debe entrar exactamente una vez a cada ciudad, como se puede observar en la Figura 3.

Ecuación 2. Restricción de entrada a las ciudades o dependencias.

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1; j = \{1, 2, \dots, n\}$$

Figura 3. Restricción 1 para el TSP.

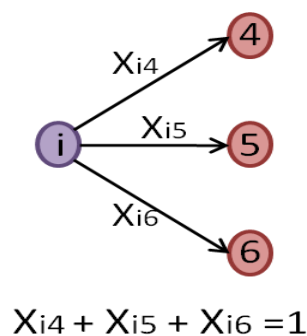


2. El vendedor debe salir exactamente una vez de cada ciudad, restricción que se explica en la Figura 4.

Ecuación 3. Restricción de salida de las ciudades o dependencias.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1; i = \{1, 2, \dots, n\}$$

Figura 4. Restricción 2 del TSP.



3. El vendedor no puede realizar subtours. Esta restricción se introduce al problema después de haberlo evaluado con los dos primeros conjuntos

de restricciones, de manera que se eliminen los posibles subtours. Sin embargo, ésta es una restricción que se analiza de forma reiterativa hasta que se consiga el ciclo hamiltoniano.

Ecuación 4. Restricción para romper subtours.

$$\sum_{\substack{i \notin S \\ j \in S}} X_{ij} \leq |S| - 1; \forall S \subseteq N, |S| > 1$$

Este último conjunto de restricciones son llamadas restricciones de eliminación de subtours e indican que todo subconjunto de nodos S debe ser abandonado al menos una vez, donde |S| es la cantidad de aristas que tiene el subtour al cual habrá que eliminarle una de ellas.

Con frecuencia el TSP presenta problemas relacionados con los subtours y no permite encontrar un ciclo hamiltoniano que llegue a todos los vértices, comenzando desde un nodo “origen” y volviendo a él, pasando una sola vez por cada nodo. En caso de no utilizar el tercer conjunto de restricciones, la solución podría constar de más de un ciclo, dado que los primeros dos conjuntos de restricciones representan a un problema de asignación típico¹⁴.

3.1.1 Heurísticas utilizadas para solucionar el TSP

El término heurística proviene del griego “heuriskein”, que significa “encontrar” o “descubrir”. En el libro de Hillier y Lieberman se define heurística como un procedimiento que trata de descubrir una solución factible muy buena, pero no necesariamente una solución óptima para un problema específico bajo consideración¹⁵. Usando estos procedimientos se tiene un alto grado de confianza en que se encuentren soluciones de alta calidad y en un tiempo

¹⁴ DAZA, M., MONTOYA, J., NARDUCCI, F., Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases; Revista EIA, ISSN 1794-1237 Número 12, p. 23-28. Diciembre 2009.

¹⁵ HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.; Introducción a la investigación de operaciones. Octava edición. México, Mc Graw Hill, 2006, p. 617.

computacional razonable (aunque no se garantice una solución óptima). En los métodos heurísticos, la rapidez del proceso es tan importante como la calidad de la solución obtenida¹⁶.

Los métodos heurísticos son usados principalmente para resolver problemas de optimización cuando no se conoce algún método exacto que brinde una solución al problema o cuando se conoce un método exacto pero el tiempo computacional que requiere es demasiado largo.

Algunas de las heurísticas por las que el TSP puede ser resuelto son: Árbol de expansión mínima y Vecino más cercano. El primer algoritmo generalmente no facilita la obtención de un ciclo hamiltoniano, por lo que se requiere aplicar una segunda fase para llegar a él; para el caso del presente proyecto, se utiliza el principio de inequidad triangular. A continuación se realiza la revisión teórica de estos algoritmos.

3.1.1.1 Algoritmo Árbol de Expansión Mínima

El Árbol de Expansión Mínima es un grafo conexo¹⁷ que no contiene ciclos y su número de aristas es igual al número de vértices menos uno.

El problema se puede enunciar de la siguiente manera: Un árbol generador de un grafo $G = (N; A)$ es un árbol sobre todos los vértices y tiene, por tanto, $|N| - 1$ aristas de G . A su vez, un árbol generador de mínimo peso (o de costo mínimo) es aquel que de entre todos los árboles generadores de un grafo dado, presenta la menor suma de los costos de sus aristas¹⁸.

¹⁶ MELIÁN, B. PÉREZ, J. Metaheurísticas: una visión global. Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. N.19 p. 7-28

¹⁷ Un grafo es conexo si todo par de vértices está unido por un camino.

¹⁸ MARTÍ, R., op.cit., p. 17-18.

El Árbol de Expansión Mínima tiene similitudes con el algoritmo de la ruta más corta. En ambos casos se considera una red no dirigida y conexa en la que se incluye la distancia, costo o tiempo asociada con la arista.

Los dos problemas involucran el hecho de seleccionar un conjunto de aristas con la longitud total más corta entre todos los conjuntos de aristas que satisfacen cierta propiedad. En el caso del algoritmo de la ruta más corta, esta propiedad expresa que la arista seleccionada debe proporcionar una trayectoria entre el origen y el destino, mientras que para el árbol de expansión mínima la propiedad requerida indica que las aristas seleccionadas deben proporcionar una trayectoria entre cada par de nodos.

A continuación se resume el árbol de expansión mínima:

- Se tienen los nodos de una red pero no las aristas. En su lugar se proporcionan las aristas potenciales y la longitud (distancia, costo o tiempo) de cada una si se inserta en la red.
- Se desea diseñar la red con suficientes aristas para satisfacer el requisito que haya una trayectoria entre cada par de nodos.
- El objetivo de satisfacer este requisito de manera que se minimice la longitud total de las aristas insertadas en la red¹⁹.

A continuación se explica uno de los algoritmos utilizados para resolver este problema:

❖ **Algoritmo de Kruskal.**

El algoritmo comienza a partir de un conjunto de árboles degenerados²⁰ formados por un solo nodo, que son los nodos del grafo y se comienzan a

¹⁹ HILLIER, F. y LIEBERMAN, G. op.cit., p. 379.

²⁰ Árbol con un sólo vértice y sin lados.

combinar los árboles de dos en dos usando la arista menos costosa posible, hasta que solo quede un solo árbol: El MST²¹.

Sea $G = (N, A)$ un grafo no dirigido conexo sin lazos con n vértices, de forma que cada arista $a \in A$ lleva asociado un peso $\rho(a)$ positivo. A continuación se presenta el procedimiento a seguir, y se ilustrará posteriormente con un ejemplo²².

Paso 1. Elegir una arista a_1 en G de forma que su peso, $\rho(a_1)$ sea lo más pequeño posible. Para este paso se puede realizar de ante mano una lista de los pesos ordenada en forma ascendente.

Paso 2. Luego para $1 \leq i \leq n - 2$, si se ha seleccionado las aristas a_1, a_2, \dots, a_i , se selecciona la arista a_{i+1} de las aristas restantes en G de modo que $\rho(a_{i+1})$ sea lo más pequeño posible y el subgrafo de G , formado por las aristas $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}$ no contenga ciclos.

Paso 3. Reemplazar i con $i + 1$. Si $i = n - 1$, el subgrafo de G formado por las aristas a_1, a_2, \dots, a_{n-1} es conexo, con n vértices y $n - 1$ aristas, y es un árbol generador de peso mínimo. Si $i < n - 1$, se debe volver al paso anterior.

En el Anexo 5, se muestra un ejemplo de este algoritmo y en la Figura 7 se puede observar el diagrama de flujo del algoritmo de Kruskal.

Los algoritmos clásicos del algoritmo del árbol de expansión mínima no forman ciclos hamiltonianos; por tanto, para lograr este resultado se debe aplicar una segunda fase llamada *inequidad triangular*. A continuación se explica la aplicación del principio de inequidad triangular.

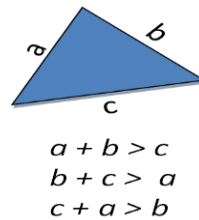
²¹ COTO, E.; Algoritmos básicos de grafos (Tesis Pregrado); Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Computación. Laboratorio de Computación Gráfica (LCG); Venezuela, 2003, p. 18-20.

²² GÁLAN, M. Árboles ponderados. Algoritmos de Prim y Kruskal, p. 7.

❖ **Principio de Inequidad triangular.**

El teorema de inequidad triangular afirma que en cualquier triángulo la longitud de uno de los lados no puede nunca superar a la suma de las longitudes de los otros dos, como se muestra en la Figura 5.

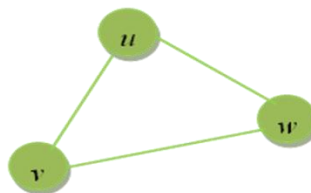
Figura 5. Representación del teorema de Inequidad triangular.



En grafos consiste en que para todo vértice $u, v, w \in N$, $G[u, w] \leq G[u, v] + G[v, w]$. Este cálculo se realiza para cada posible conexión entre los tres nodos, como se muestra en el grafo de la Figura 6, en la cual se escoge aquel par de aristas que obtenga un mayor ahorro en costos, eliminando la arista restante.

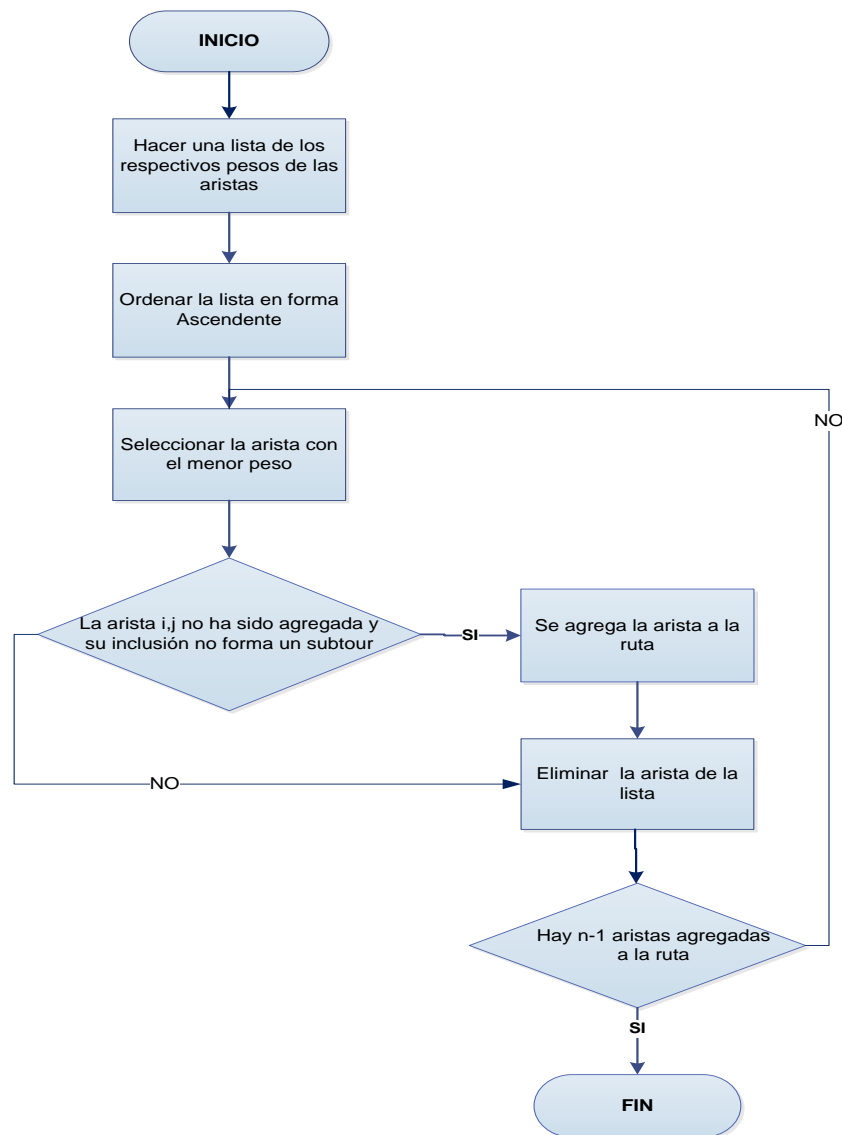
Este principio se utiliza como segunda fase de algunas heurísticas con el objetivo de mejorar la solución, ya sea escogiendo la conexión que presente el mayor ahorro en costos o eliminando aristas ficticias de una solución.

Figura 6. Teorema de Inequidad Triangular para grafos.



$$\begin{aligned} \text{Ahorro en Costo inequidad}_{u,v,w} &= G(u, w) - [G(u, v) + G(v, w)] \\ \text{Ahorro en Costo inequidad}_{u,w,v} &= G(u, v) - [G(u, w) + G(w, v)] \\ \text{Ahorro en Costo inequidad}_{v,u,w} &= G(v, w) - [G(v, u) + G(u, w)] \end{aligned}$$

Figura 7. Diagrama de flujo del Algoritmo de Kruskal.



3.1.1.2 Algoritmo Vecino Más Cercano

Este algoritmo se trata de un procedimiento constructivo²³ que determina una solución de acuerdo a la cercanía de la ubicación de los nodos (clientes), para visitar a cada uno partiendo del depósito y recorriendo la menor distancia o utilizando el menor tiempo o costo posible.

²³ Consiste en construir paso a paso una solución del problema. Usualmente son métodos deterministas y están basados en seleccionar en cada iteración el elemento con mejor evaluación.

El algoritmo parte de elegir un vértice inicial o depósito de partida llamado j_1 , del cual se comienza a medir la distancia que hay de este vértice a los restantes con el fin de elegir ahora aquel nodo cuya distancia al depósito sea la mínima, es decir, se elige el vecino más cercano y se nombra j_2 . De la misma forma se construye una trayectoria $j_1, j_2, j_3, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n$, en donde el vértice j_{k+1} se elige tomando la mínima distancia que hay desde j_k hasta cada uno de los vértices que sean distintos de los ya elegidos j_1, j_2, j_3, j_k . Al terminar, se debe agregar el arco que va del vértice j_n hasta el vértice j_1 , completando de esa manera un ciclo hamiltoniano. El algoritmo presenta un tiempo de procesamiento de orden $O(n^2)^{24}$. En el Anexo 6 se da un ejemplo del algoritmo. Además, en la Figura 8 se muestra el diagrama de flujo para este algoritmo.

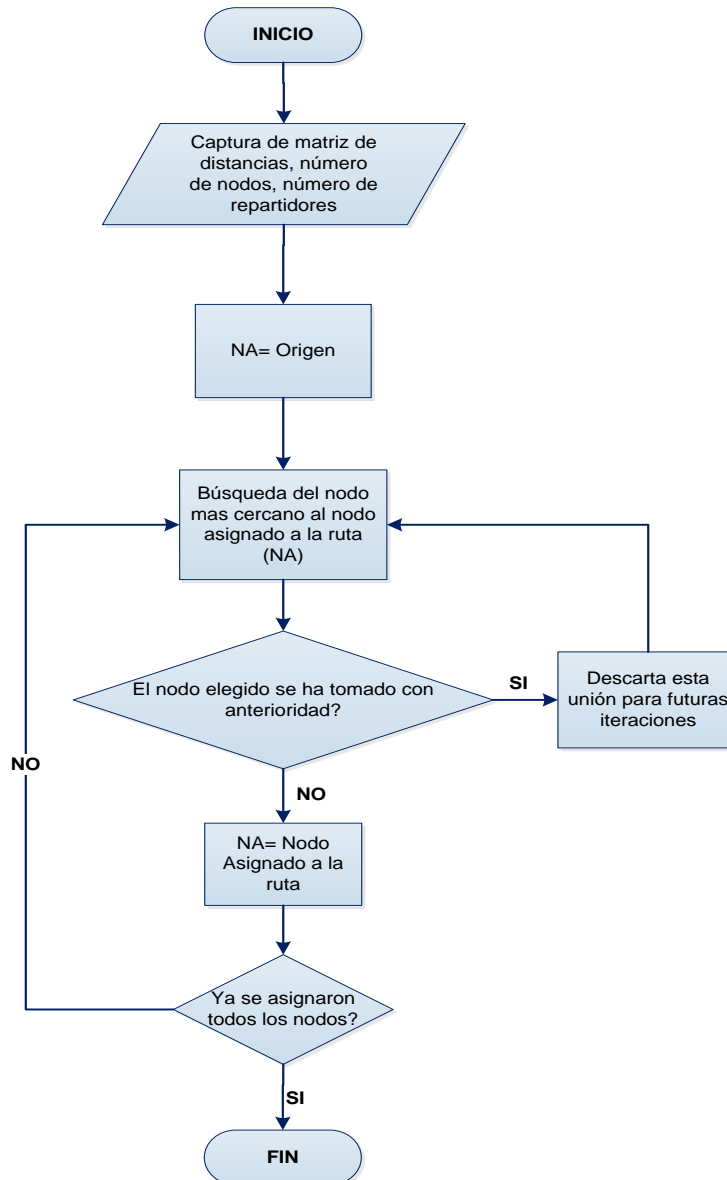
Es importante resaltar que al trabajar con grafos incompletos, este algoritmo presenta algunas limitaciones ya que puede generar rutas que no formen ciclos hamiltonianos o que tomen aristas inexistentes en la red. Por tanto, se hace necesario aplicar una segunda fase utilizando otros métodos con el fin de mejorar la solución encontrada. Los métodos comúnmente usados para esta fase posterior son algoritmos heurísticos o incluso teoremas como el principio de Inequidad Triangular, el cual fue explicado anteriormente.

Nota: Para los casos del proyecto en los que se aplica este algoritmo se utilizan grafos completos, por lo que no se requiere realizar una segunda fase de este algoritmo.

Existe una variante del algoritmo de Vecino más Cercano que consiste en permitir que el camino se vaya ampliando por cualquiera de sus dos extremos dando lugar al algoritmo del Vecino Bilateral más Próximo, es decir, se agrega a la ruta el nodo con costo o longitud más corta a cualquiera de los dos nodos que en ese momento sean los extremos de la solución.

²⁴ RÍOS, R., GONZÁLEZ, J., op.cit., p. 16.

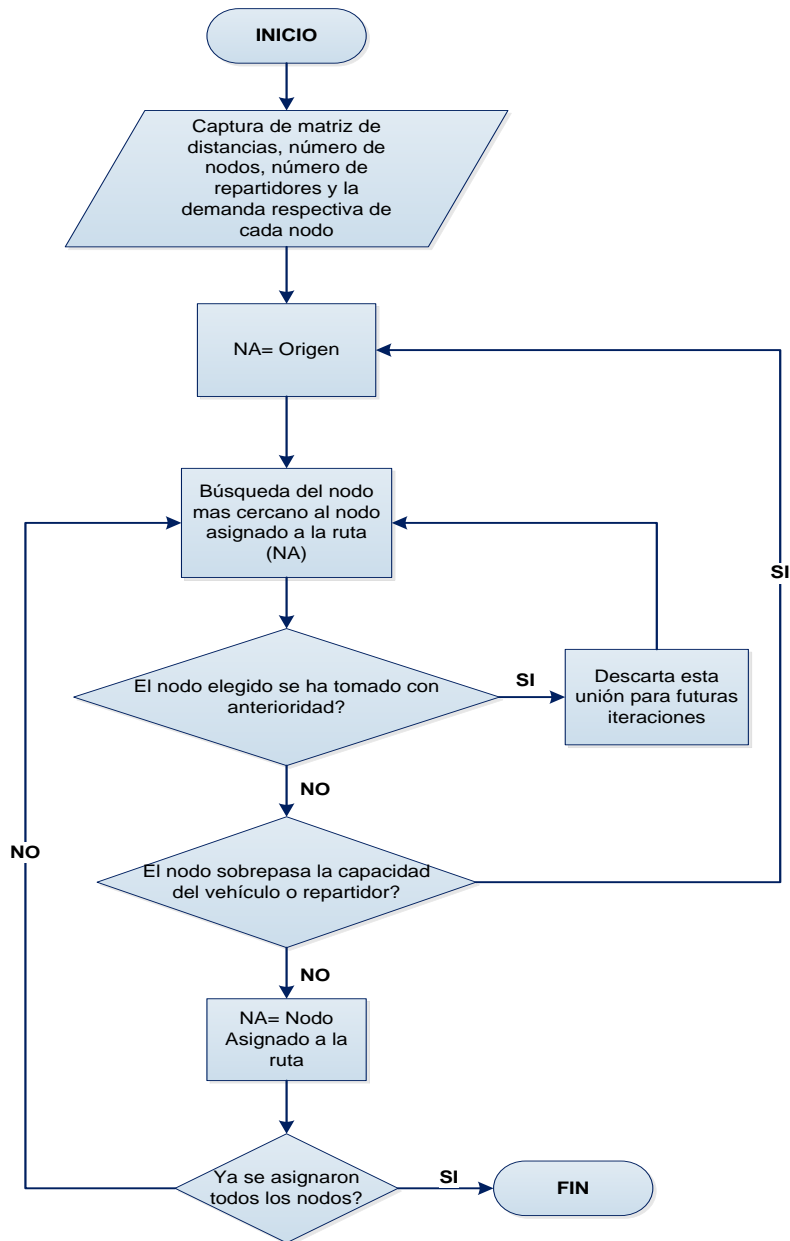
Figura 8. Diagrama de flujo del Algoritmo del vecino más cercano.



Fuente: Adaptado de: Contreras, Claudia y Delgado María. “Métodos heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad (CVRP)”, Tesis de grado, Universidad industrial de Santander, 2010.

A pesar de que el algoritmo del vecino más cercano no contempla las demandas de los clientes ni las capacidades de los vehículos, en la Figura 9 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo modificado. Como se observa en este diagrama, se ha agregado una restricción de capacidad para cada vehículo que permite generar una solución factible para el m-TSP y el CVRP.

Figura 9. Diagrama de flujo del Vecino más cercano con la restricción de capacidad para los repartidores.



Fuente: Adaptado de: Contreras, Claudia y Delgado María. “Métodos heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad (CVRP)”, Tesis de grado, Universidad industrial de Santander, 2010.

3.2 PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO PARA m AGENTES (m-TSP)

El m-TSP o Multiple Traveling Salesmen Problem es una generalización del TSP en la cual se tiene un depósito y m vehículos o agentes que deben cubrir un número determinado de ciudades, de forma que cada destino sólo sea visitado por uno de ellos. Cada viaje comienza en una ciudad origen, que a su vez, es también el final del trayecto. El objetivo de la solución de este problema es minimizar el costo, distancia o tiempo total para visitar todas las ciudades, contemplando no uno sino varios agentes o vendedores viajeros cuya cantidad puede ser fija o una variable de decisión²⁵.

Su formulación matemática es la misma del TSP y adicionalmente se agregan las restricciones mostradas en la Ecuación 5.

El objetivo es construir exactamente m rutas, una por cada agente, vendedor o vehículo, de modo que cada cliente sea visitado una vez por uno de los vehículos. Cada ruta debe comenzar y finalizar en el depósito (0):

Ecuación 5. Restricciones que aseguran que los vehículos que salgan del origen deben regresar a él.

$$\sum_{j=1}^n X_{0j} = m \qquad \sum_{i=1}^n X_{i0} = m$$

3.3 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP)

El Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) es una generalización del m-TSP, ya que el VRP parte del conocimiento y estudio del TSP. Además, pertenece a los Problemas de Optimización Combinatoria²⁶ que en su mayoría son de la

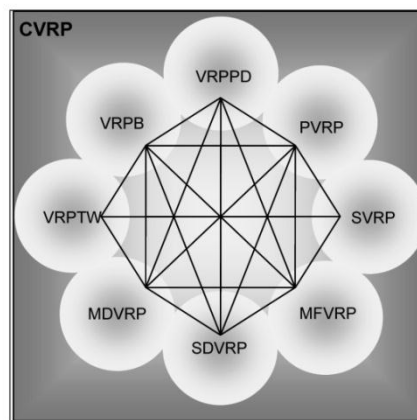
²⁵ YEPES, V., MEDINA, J.; Optimización económica de redes de transporte del tipo VRPTW, Revista de obras públicas, Septiembre 2003/Nº 3.436, p. 32.

²⁶ En los problemas de Optimización Combinatoria, el objetivo es encontrar el máximo (o el mínimo) de una determinada función sobre un conjunto finito de soluciones S . Dada la finitud

clase NP-Hard. En el VRP existe una demanda asociada a cada ciudad y una capacidad determinada para cada uno de los vehículos. En este caso, la función objetivo puede buscar minimizar la distancia recorrida por todas las rutas, el número de vehículos, o ambos²⁷.

Dentro de esta definición, el problema se ubica en un amplio conjunto de variantes, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10. Variantes del VRP.



Fuente: González, G., González, F., Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema. Ingeniería e Investigación, diciembre, año/Vol. 26, Número 003. Universidad Nacional de Colombia, p. 150.

A continuación se presenta una breve explicación de algunas de las variaciones más comunes y más utilizadas en el ámbito de la investigación:

- *CVRP (Capacitated VRP)*: Es el VRP más general y consiste en uno o varios vehículos con capacidad limitada y constante encargados de distribuir los productos según la demanda de los clientes.
- *VRPTW (VRP with Time Windows)*: Es aquel en el que se incluye una restricción adicional en la que se asocia a cada cliente una ventana de

de S , las variables son discretas restringiendo su dominio a una serie finita de valores. Normalmente, el número de elementos de S es muy elevado, haciendo impracticable la evaluación de todas las soluciones para determinar el óptimo.

²⁷ YEPES, V., MEDINA, J.; Optimización económica de redes de transporte del tipo VRPTW, Revista de obras públicas, Septiembre 2003/Nº 3.436, p. 32-33.

tiempo, es decir, cada cliente sólo está dispuesto a recibir el bien o servicio durante un intervalo de tiempo predeterminado.

- *SDVRP (Split Delivery VRP)*: VRP de entrega dividida, donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo.
- *SVRP (Stochastic VRP)*: Se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios. Clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas.
- *MDVRP (Multi-Depot VRP)*: Es un VRP con múltiples depósitos; es un caso de ruteo de vehículos en el que existen varios depósitos (cada uno con una flota de vehículos independiente) que deben servir a todos los clientes.

Además también se encuentran otras variaciones como lo son: *PVRP (Periodic VRP)*, *VRPB (VRP with Backhauls)*, *VRPPD (VRP with Pick-Up and Delivering)* y *MFVRP (Mix Fleet VRP)*²⁸.

Principales características del VRP: Los componentes principales del problema de ruteo de vehículos son:

La red de caminos: Es utilizada, entre otras, para el transporte de mercancías; es descrita generalmente a través de un *grafo*, cuyos *arcos* representan los tramos del camino y cuyos *vértices* corresponden a los cruces de los caminos, los depósitos y clientes. Cada arco se asocia con un costo, que generalmente representa su longitud o un tiempo de viaje.

Los clientes: Tienen como principales características que:

- Están situados en los vértices del grafo.

²⁸ GONZÁLEZ, G., GONZÁLEZ, F., Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema. Ingeniería e Investigación, diciembre, año/Vol. 26, Número 003. Universidad Nacional de Colombia, p. 150-151.

- La cantidad de mercancía (demanda), posiblemente de diversos tipos, se debe entregar o recoger al cliente.
- Puede incluir períodos del día (ventanas de tiempo) durante los cuales el cliente debe ser servido (períodos específicos durante los cuales el cliente está dispuesto a recibir la mercancía).
- El tiempo requerido para entregar o recoger la mercancía del cliente (tiempo de descarga o carga, respectivamente) puede ser significativo; esto posiblemente depende del tipo de vehículo.
- Se tiene un subconjunto de vehículos disponibles para servir al cliente. A veces, no es posible satisfacer completamente la demanda de cada cliente. En estos casos, las cantidades que se entregan o que se recogen pueden ser reducidas o un subconjunto de clientes se puede dejar desatendido.

Depósitos: Cada depósito se caracteriza por el número y los tipos de vehículos asociados a él y por la cantidad global de mercancías que puede transportar. En algunas aplicaciones del mundo real, los clientes se reparten a priori entre los depósitos, y los vehículos tienen que volver a su depósito inicial en el extremo de cada ruta. En estos casos, el VRP total se puede descomponer en varios problemas independientes, cada uno asociado con un depósito diferente.

Vehículos: Las principales características de los vehículos son:

- Cada vehículo tiene un depósito origen y la posibilidad de terminar el servicio en otro depósito diferente al de origen.
- Los vehículos tienen una capacidad expresada como el peso máximo, volumen, o número de plataformas, que éste puede cargar.
- En algunos casos, los vehículos pueden subdividirse en compartimientos, cada uno caracterizado por su capacidad y por los tipos de mercancías que pueden ser llevadas.
- Se cuenta con dispositivos disponibles para la carga y descarga de las operaciones.

- Cada vehículo lleva un costo asociado con su utilización (por unidad de distancia, por unidad de tiempo, por ruta, etc.).

Los objetivos típicos que pueden alcanzarse en la optimización del Problema de Ruteo de Vehículos son:

- La minimización de los costos de transporte global, dependiendo de la distancia global recorrida y de los costos fijos asociados al utilizar los vehículos.
- La reducción al mínimo del número de vehículos (o drivers) necesarios para atender a todos los clientes.
- El equilibrio de las rutas, por tiempo de viaje y por carga del vehículo.
- La reducción al mínimo de las sanciones asociadas con el servicio parcial de los clientes.
- Cualquier combinación de estos objetivos²⁹.

A continuación se profundiza en dos variaciones del VRP, las cuales son asociadas a los casos estudiados en este proyecto.

3.4 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON VENTANAS DE TIEMPO (VRPTW)

En esta variante del Problema de Ruteo de Vehículos se tiene en cuenta, además de las restricciones de capacidad de los vehículos, una restricción que involucra una ventana de tiempo $[e_i, l_i]$ para cada cliente. Esto indica el intervalo de tiempo en que un cliente está dispuesto a recibir la visita del vehículo. Adicionalmente, se permite un tiempo de servicio o demora s_i .

En el caso en que el vehículo llegue antes del inicio de la ventana de tiempo del cliente ($t_i < e_i$), éste deberá esperar para realizar su servicio. Asimismo, las ventanas de tiempo implican que se debe cumplir que: $t_i \leq l_i$, siendo t_i el tiempo

²⁹ TOTH, P., VIGO, D., The Vehicle Routing Problem, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, p. 2-4.

de llegada al cliente i y l_i el tiempo máximo en que el cliente estará dispuesto a ser servido, ya que ningún cliente podrá ser servido luego del fin de su ventana de tiempo.

Si (i,j) es un arco o arista de la solución y t_i y t_j son los tiempos de llegada a los clientes i y j , las ventanas de tiempo implican que necesariamente debe cumplirse $t_i \leq l_i$ y $t_j \leq l_j$. Finalmente, se obtiene que el tiempo en que un vehículo llega al cliente j estando en el cliente i es: $t_j = e_i + s_i + t_{ij}$, donde t_{ij} es el tiempo que demora en ir del cliente i al cliente j .

Teniendo K vehículos y utilizando los nodos 0 y $n+1$ para representar al depósito, se formula el problema como se muestra a continuación³⁰:

Función Objetivo:

Ecuación 6. Función objetivo del VRPTW.

$$\mathbf{Min} \mathbf{Z} = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in N} C_{ij} X_{ijk}$$

Donde:

Naturaleza de las variables.

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } (i,j) \text{ es recorrida por el vehículo } k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in N, k \in K$$

C_{ij} : Costo o distancia de recorrer el arco o arista del nodo i a j .

w_{ik} : variable de tiempo que indica el inicio del servicio en el nodo i cuando éste es servido por el vehículo $k \in K$.

s_i : Tiempo de servicio del nodo i .

t_{ij} : Tiempo de ir del nodo i a j .

³⁰ OLIVERA, A., Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos. Instituto de computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. Agosto 2004, p. 8-9.

w_{jk} : Variable de tiempo que indica el inicio del servicio en el nodo j cuando éste es servido por el vehículo $k \in K$.

Sujeto a las siguientes restricciones:

1. Restricción que indica que todos los clientes deben ser visitados una sola vez.

Ecuación 7. Restricción de visita a los clientes.

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} X_{ijk} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0, n+1\}, j \neq i$$

2. Restricciones que determina que el vehículo $k \in K$ recorre un camino de 0 a $n+1$.

Ecuación 8. Restricción que indica que cada vehículo debe entrar y salir de 0 (depósito) una vez.

$$\sum_{j \in N \neq 0} X_{ojk} - \sum_{i \in N \neq 0} X_{iok} = 0 \quad \forall k \in K$$

Ecuación 9. Restricción que asegura que para todo vehículo $k \in K$, cada cliente debe ser visitado una vez.

$$\sum_{j \in N} X_{ijk} - \sum_{i \in N} X_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K, i \neq j, j \in N \setminus \{0, n+1\}$$

3. Garantiza la viabilidad con respecto a las consideraciones de los aspectos de capacidad.

Ecuación 10. Restricción de capacidad.

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N \neq i} d_j X_{ijk} \leq C \quad \forall k \in K$$

4. Restricción que representan los límites de las ventanas de tiempo y garantiza la viabilidad con respecto a las consideraciones de tiempo.

Ecuación 11. Restricción que asegura que el cliente i es servido por el vehículo k dentro del límite de tiempo establecido.

$$e_i \leq w_{ik} \leq l_i \quad \forall i \in N \setminus \{0, n+1\}, k \in K$$

5. Restricción que asegura que si un vehículo k viaja de i a j , no puede llegar a j sin haber servido antes a i .

Ecuación 12. Restricción que indica que si un vehículo va de i a j , antes de servir a j debe haber servido a i .

$$X_{ijk} (w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in N$$

Esta restricción también permite la eliminación de subtours.

3.5 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON CAPACIDAD (CVRP)

El CVRP es una extensión del m-TSP en la cual cada cliente tiene asociada una demanda y cada vehículo tiene una capacidad³¹. Éste es un problema de optimización combinatoria, de tipo NP-Hard, el cual consiste en hallar una serie de rutas de tal manera que se satisfaga la demanda de una cantidad determinada de clientes distribuidos en una zona geográfica.

Este problema se puede plantear por medio de los modelos de programación lineal entera binaria para minimizar el costo, el tiempo o la distancia recorrida en la ruta considerando la capacidad de los vehículos disponibles. Cada vehículo parte de un depósito para visitar a los clientes y debe regresar

³¹ OLIVERA, A., *Ibid.*, p. 6.

nuevamente a él. Asimismo, se considera una flota homogénea de vehículos, es decir, todos los vehículos tienen la misma capacidad³².

Su formulación matemática se presenta a continuación.

Función Objetivo:

Ecuación 13. Función objetivo del CVRP.

$$\mathbf{Min} Z = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n C_{ij} X_{ijk}$$

i: nodo de salida de la arista (*i*=0,1,2,.., *n*).

j: nodo de llegada de la arista (*j*=0,1,2,.., *n*).

k: cantidad de vehículos (*k*= 1,2,..., *K*). Es una variable de decisión con disponibilidad de vehículos ilimitada, aunque si se tuviera una flota finita se podría agregar una cota superior o directamente fijar su valor.

Sujeto a las siguientes restricciones:

1. Restricciones que indican la asignación del arco (*i*, *j*), lo que determina un recorrido entre los nodos *i*, *j*. Así mismo se asegura que todo nodo del grafo *G*, es un nodo intermedio de alguna ruta y que éstos deben ser visitados una sola vez.

Ecuación 14. Restricciones que aseguran que cada cliente sea visitado una vez por un vehículo.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1, i \neq j}^n X_{ijk} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1, i \neq j}^n X_{ijk} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \forall k = 1, 2, \dots, K$$

³² CONTRERAS, C., DÍAZ, M, op.cit., p. 6-7.

2. Restricción que indica que todos los vehículos que salgan del origen deben regresar a él.

Ecuación 15. Restricción que asegura que los vehículos que salgan del origen regresen a él.

$$\sum_{j=1}^n X_{0jk} - \sum_{i=1}^n X_{i0k} = 0, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, k = 1, 2, \dots, K$$

3. Naturaleza de las variables.

$$X_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in N, \forall k = 1,2, \dots, K$$

Adicionalmente se agregan la Ecuación 4 que indica la eliminación de los subtours, la Ecuación 8 que indica que cada vehículo debe entrar y salir del origen una vez y la Ecuación 10 que muestra la restricción de capacidad.

3.5.1 Heurísticas utilizadas para solucionar el CVRP

Para solucionar este problema se utilizan las heurísticas: *Algoritmo de Barrido*, *Algoritmo de Ahorros* y el *Algoritmo de Ahorros mejorado* las cuales se presentan a continuación.

3.5.1.1 Algoritmo de Barrido

Este algoritmo pertenece a los métodos de Asignar primero y Rutear después³³, el cual puede aplicarse en problemas planos³⁴, donde cada cliente se representa por sus coordenadas polares (θ_j, ρ_j) en un sistema que tiene al

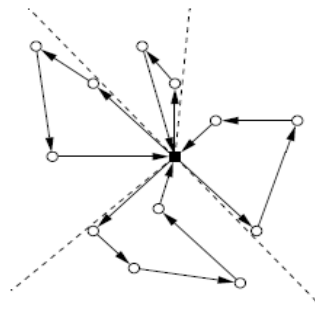
³³ Estos métodos buscan generar grupos de clientes (clusters) que pertenecerán a una misma ruta en la solución y para cada clúster se crea una ruta que visite a todos sus clientes, respetando las restricciones de capacidad y asegurando que la demanda de cada clúster no supere la capacidad del vehículo.

³⁴ Problemas en los que cada nodo corresponde a un punto en el plano y las distancias entre ellos se definen como la distancia euclídea.

depósito como origen, donde θ_j es el ángulo y ρ_j es la longitud en línea recta del punto de origen al cliente³⁵.

En ambos casos (clusters y problemas planos) todos los nodos se ubican en un mapa y se identifican sus coordenadas polares. Tomando el nodo depósito como eje, se hace girar una semirrecta y se van incorporando a la ruta los clientes “barridos” por dicha semirrecta hasta que se ocupe la capacidad de cada vehículo, proceso que se puede observar en la Figura 11. Después de obtener esta primera solución, se realiza su mejora resolviendo el TSP de cada vehículo.

Figura 11. Representación de una solución obtenida mediante el algoritmo de barrido.



Fuente: Adaptado de Olivera, Alfredo. Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos.

Los pasos para aplicar este algoritmo son:

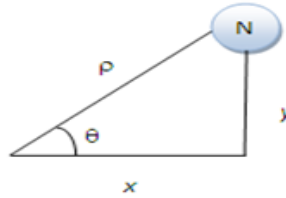
Paso 1. Escoger un vehículo no usado k .

Paso 2. Ordenar los clientes según θ_j de manera creciente. Si dos clientes tienen igual valor de θ_j , colocar primero el de menor valor de ρ_j y asignar los clientes a la ruta hasta que se llene la capacidad del vehículo o no se extienda la longitud de la ruta. Si todos los clientes pertenecen a algún clúster y no se pueden agregar más nodos a la ruta por las restricciones ya mencionadas, ir al paso 3.

³⁵ OLIVERA, A., op.cit., p. 16.

En la figura 12 se muestra la forma de hallar los valores para θ_j , ρ_j .

Figura 12. Algoritmo de Barrido.



$$\theta_N = \arctang\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\rho_N = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

Donde N es el nodo a evaluar.

Paso 3. Optimizar las rutas utilizando un algoritmo que resuelva el TSP para cada clúster³⁶.

En la Figura 13 se presenta el diagrama de flujo del algoritmo de barrido.

3.5.1.2 Algoritmo de Ahorros

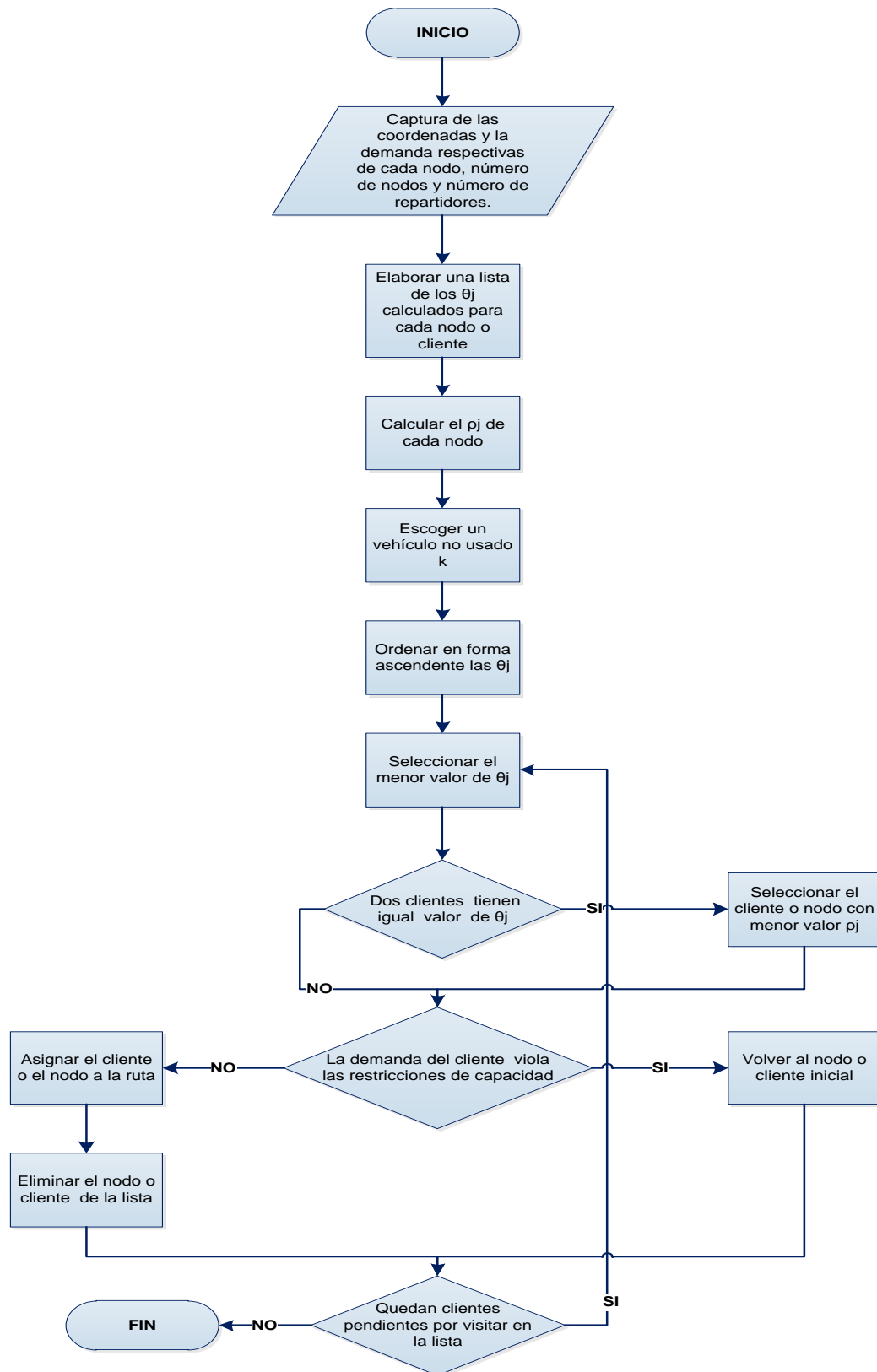
Es la heurística clásica más significativa para el VRP y consiste en un procedimiento simple que realiza una exploración limitada del espacio de búsqueda y da una solución de calidad más o menos aceptable en un tiempo de cálculo moderado. Las soluciones luego pueden ser mejoradas con los algoritmos de mejora usados para el TSP, como el algoritmo k-opt³⁷.

El algoritmo de ahorros se basa en combinar sucesivamente subtours hasta obtener un ciclo Hamiltoniano, respetando las restricciones de capacidad de los vehículos y las previas conexiones establecidas entre dos vértices. Los subtours considerados tienen un vértice común llamado *base*.

³⁶ OLIVERA, A., *Ibid.*, p. 17.

³⁷ SANDOYA, F. *op.cit.*, p. 39-44.

Figura 13. Diagrama de flujo del Algoritmo de barrido.



El procedimiento de unión de subtours parte de eliminar las aristas que conectan dos vértices de diferentes subtours con el vértice base, uniendo los vértices entre sí. Se llama *ahorro* a la diferencia del costo entre las aristas eliminadas y la añadida³⁸.

El algoritmo se puede expresar de la siguiente manera:

Si en una solución dos rutas diferentes $(1, \dots, i, 1)$ y $(1, j, \dots, 1)$ pueden ser combinadas formando una nueva ruta $(1, \dots, i, j, \dots, 1)$ como se muestra en la Figura 14, el ahorro (en distancia) obtenido por dicha unión es:

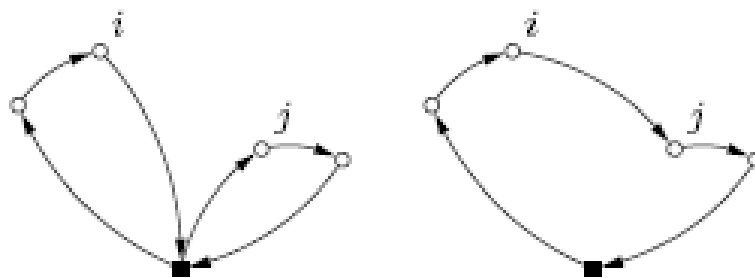
Ecuación 16. Ecuación para calcular los ahorros.

$$S_{ij} = C_{i1} + C_{1j} - C_{ij}$$

Donde 1 es el nodo origen o nodo base.

En la nueva solución los arcos $(i, 1)$ y $(1, j)$ no serán utilizados y se agregará el arco (i, j) . Se parte de una solución inicial en la cual todos los clientes son servidos por un solo vehículo.

Figura 14. Dos rutas antes y después de ser unidas.



Fuente: Sandoya, F.; Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Escuela Superior Politécnica del Litoral, Décimo Cuarta Jornada en Estadística e Informática, Ecuador, 2007.

En este proyecto se optó por aplicar la versión paralela del algoritmo de ahorros, cuyo procedimiento se explica a continuación:

³⁸ MARTÍ, R., op.cit., p. 22-23.

Paso 1 (inicialización): Para cada cliente i construir la ruta $(1, i, 1)$.

Paso 2 (cálculo de ahorros): Calcular s_{ij} para cada par de clientes i y j .

Paso 3 (mejor unión): Sea $s_{i^*j^*} = \max s_{ij}$, donde el máximo se toma entre los ahorros que no han sido considerados aún. Sean r_{i^*} y r_{j^*} las rutas que contienen a los clientes i^* y j^* respectivamente. Si i^* es el último cliente de r_{i^*} y j^* es el primer cliente de r_{j^*} y la combinación de r_{i^*} y r_{j^*} es factible, entonces se procede a combinarlas.

Paso 4: Eliminar $s_{i^*j^*}$ de futuras consideraciones. Si quedan ahorros por examinar ir al paso 3, si no terminar³⁹.

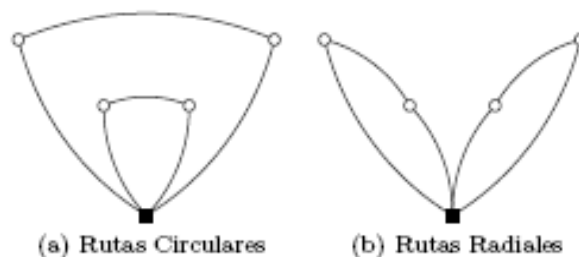
3.5.1.3 Mejora del Algoritmo de Ahorros

Cuando los clientes se encuentran ubicados geográficamente en una zona, el algoritmo de ahorros tiende a generar algunas rutas circulares, como se muestra en la Figura 15⁴⁰. Para solucionar este problema algunos autores proponen redefinir el ahorro como:

Ecuación 17. Ecuación para calcular la mejora del algoritmo de ahorros.

$$S_{ij} = C_{i1} + C_{1j} - \lambda C_{ij}$$

Figura 15. Rutas circulares y Rutas radiales.



Fuente: Sandoya, F.; Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Escuela Superior Politécnica del Litoral, Décimo Cuarta Jornada en Estadística e Informática, Ecuador, 2007.

³⁹ SANDOYA, F. op.cit., p. 39-44.

⁴⁰ SANDOYA, F., Ibid., p. 42.

Donde se introduce un parámetro (λ) llamado *forma de la ruta*, el cual busca evitar la formación de rutas circulares mientras se va desarrollando el ejercicio, buscando así resultados más efectivos y con un incremento en los ahorros. El parámetro forma de la ruta (λ) puede tomar valores positivos entre 0 y 1, lo que permite mejores soluciones a lo largo de todo su desarrollo⁴¹.

El diagrama de flujo de este algoritmo se muestra en la Figura 16, en el cual muestra en forma más detallada el funcionamiento de este algoritmo.

3.5.1.4 Algoritmo k-opt

Este algoritmo permite mejorar una solución encontrada utilizando otros métodos, por lo que se puede decir que el algoritmo de k-opt se usa como segunda fase en la búsqueda de la solución óptima de un determinado problema.

El k-opt es un algoritmo de búsqueda local⁴² que realiza k-intercambios⁴³ para obtener una mejor solución. Los algoritmos de este tipo más usados son: 2-opt y 3-opt.

Con este algoritmo se busca intercambiar k aristas de la solución inicial y cambiar el sentido de uno de los caminos para obtener una solución mejorada.

Los pasos para desarrollar el algoritmo k-opt son los siguientes:

Paso 1. Se escoge la ruta inicial que puede ser la solución obtenida al utilizar otro método heurístico o una hallada aleatoriamente así:

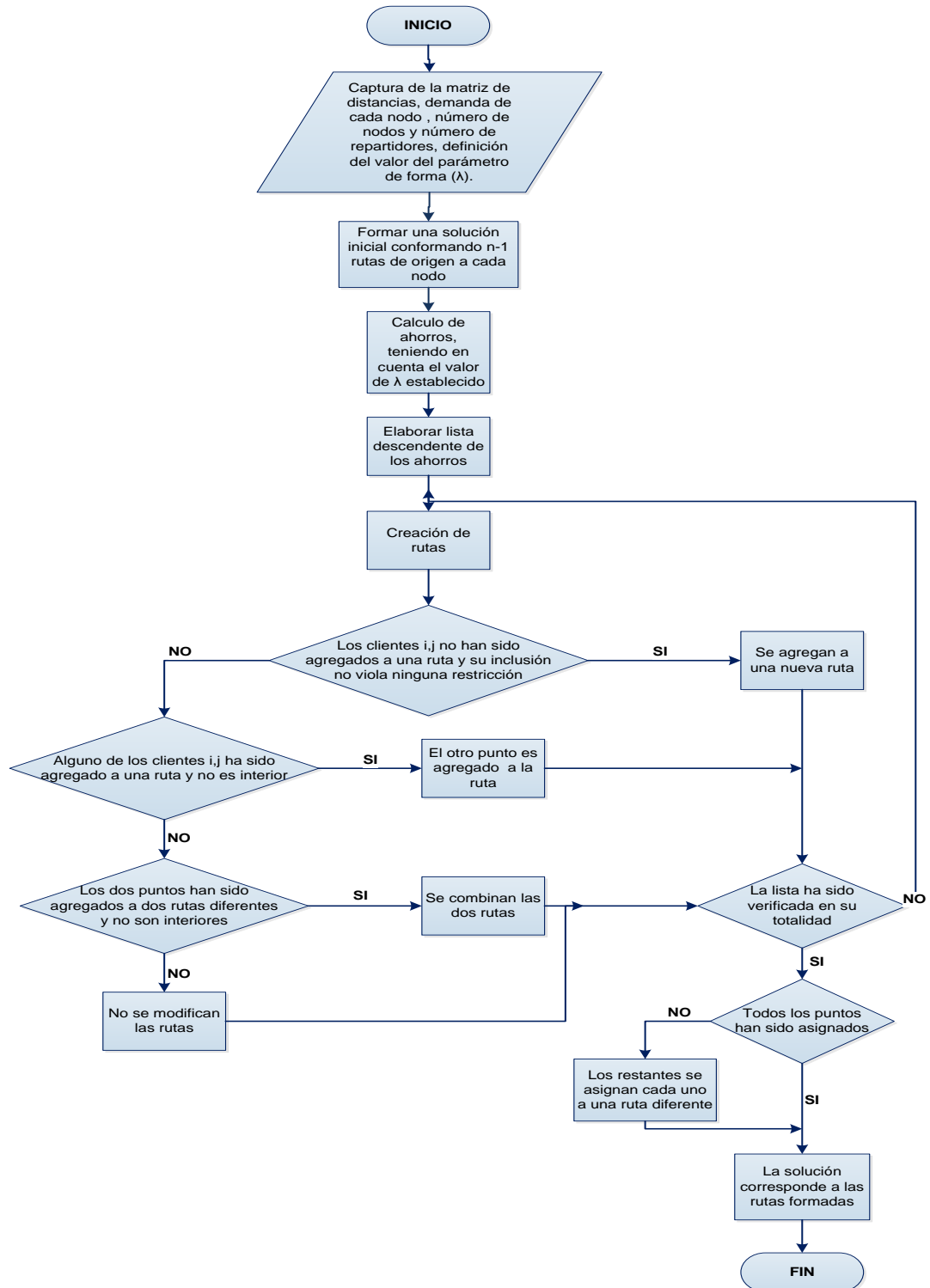
- 1- La ruta inicia en el depósito.

⁴¹ CONTRERAS, C., DÍAZ, M., op.cit., p. 58-59.

⁴² El método de búsqueda local comienza con una solución inicial y mediante una serie de pasos se busca mejorarla progresivamente. El método termina cuando no se encuentra una mejor solución para otra ya obtenida.

⁴³ Un k-intercambio consiste en eliminar k aristas de la solución inicial y reconectar las k aristas restantes.

Figura 16. Diagrama de flujo del Algoritmo de ahorros.



Fuente: Adaptado de: Contreras, Claudia y Delgado María. “Métodos heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad (CVRP)”, Tesis de grado, Universidad industrial de Santander, 2010.

- 2- Se elige aleatoriamente un cliente de N , donde N es el conjunto de clientes que aún no han sido visitados. Este proceso se repite hasta que se hayan asignado todos los clientes a la ruta.
- 3- Cuando $N=\emptyset$, esto quiere decir que se hayan asignado todos los clientes a la ruta, se debe regresar al depósito.

A esta solución inicial se le llama: $r\text{-opt}$.

Paso 2. Se define un número de iteraciones a realizar. Éste será el criterio de parada.

Paso 3. A la ruta inicial, definida en el paso 1 ($r\text{-opt}$) se le intercambian k pares de aristas al azar utilizando el concepto del Subviaje Inverso⁴⁴ para dar origen a una nueva ruta denominada ($r\text{-new}$). En el Anexo 7 se muestra un ejemplo de la aplicación del algoritmo Subviaje Inverso⁴⁵.

Paso 4. Se comparan las longitudes de ($r\text{-new}$) y ($r\text{-opt}$).

Paso 5. Si ($r\text{-new}$) < ($r\text{-opt}$), entonces ($r\text{-opt}$) = ($r\text{-new}$). Si ($r\text{-new}$) > ($r\text{-opt}$), se repite el paso 3 hasta que se cumpla el n número de iteraciones a realizar, definidas previamente⁴⁶.

En la Figura 17 se representa el funcionamiento del algoritmo.

3.6 METAHEURÍSTICAS

Los procedimientos metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización

⁴⁴ Este procedimiento ajusta la secuencia de nodos visitados en la solución actual mediante la selección de una subsecuencia de nodos e invierte el orden en el cual se visita esa subsecuencia.

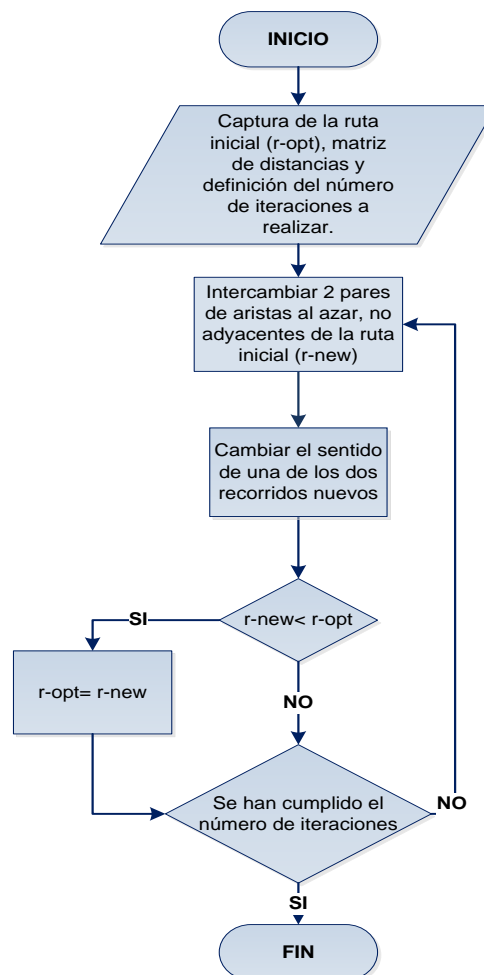
⁴⁵ HILLIER, F. y LIEBERMAN, G, op.cit., p. 623-624.

⁴⁶ CONTRERAS, C., DÍAZ, M., op.cit., p. 63-64.

combinatoria en los que los heurísticos clásicos no son efectivos⁴⁷. Éstos son métodos de solución general que a diferencia de las heurísticas, permiten la exploración intensiva del espacio de soluciones para evitar caer en óptimos locales.

Actualmente se conocen varias metaheurísticas, sin embargo, en el presente trabajo se analiza y se aplica a los casos de estudio la metaheurística llamada Búsqueda Tabú.

Figura 17. Diagrama de flujo del algoritmo 2-opt.



⁴⁷ MARTÍ, R., op.cit., p. 38-42.

3.6.1 *Búsqueda Tabú*

Es una técnica para dar solución a problemas combinatorios⁴⁸ complejos o de gran tamaño. Es un procedimiento metaheurístico basado en principios de Inteligencia Artificial, ya que utiliza el concepto de memoria y lo implementa con el objetivo de dirigir la búsqueda teniendo en cuenta la historia de ésta y evitando así que la búsqueda quede “atrapada” en un óptimo local que no sea el óptimo global⁴⁹.

La Búsqueda Tabú se centra en tres tipos de memoria principalmente:

1. Memoria de corto plazo: Es la memoria que guarda la lista de los últimos movimientos con el fin de evitar regresar a un óptimo local de iteraciones pasadas. Una vez terminada la penalización tabú, el movimiento entra a clasificarse nuevamente como posible cambio sin ningún impedimento, es decir, el algoritmo no recordará haber hecho ese movimiento con anterioridad.
2. Memoria a mediano plazo: Contiene los atributos comunes de las mejores soluciones que se han dado, para encaminar la búsqueda hacia ellos.
3. Memoria a largo plazo: Esta encamina la búsqueda hacia regiones aún no exploradas, para evitar encerrarse en óptimo local⁵⁰.

El algoritmo es llamado Búsqueda Tabú debido a que con el apoyo de las memorias mencionadas prohíbe en forma temporal los movimientos que pueden regresar el proceso a una solución obtenida recientemente. La lista tabú registra estos movimientos prohibidos, los cuales se conocen como

⁴⁸ Son de tipo NP-Hard; estos tratan de encontrar un objeto entre un conjunto finito de posibilidades (la delimitación del problema de optimización). Los objetos tienen una naturaleza discreta (pueden ser números naturales, estructuras de grafo o permutaciones) por lo que puede llegar a ser muy complejo encontrar la solución.

⁴⁹ MARTÍ, R., op.cit., p. 38-42.

⁵⁰ PERTUZ, A. y ROJAS, K. Formulación y evaluación de un algoritmo, basado en la metaheurística “Búsqueda Tabú” para la optimización del ruteo de vehículos con capacidad. Tesis de grado; Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2007, p. 11-13.

movimientos tabú⁵¹. Sin embargo, si un movimiento tabú genera una mejor solución que la encontrada hasta ese momento, puede permitirse este movimiento⁵². La búsqueda Tabú finaliza según el criterio de parada establecido y el programa arroja la mejor solución encontrada.

El algoritmo incorpora algunos conceptos como la *intensificación*, que involucra la exploración de una región factible con mayor intensidad debido a la identificación de una parte más promisorio para encontrar buenas soluciones; otro concepto es la *diversificación*, que implica buscar soluciones en áreas que no se han explorado aún⁵³.

A continuación se presentan los pasos que se recomiendan seguir para implementar el algoritmo de Búsqueda Tabú:

Paso 1. Selección de la solución inicial: debe ser una solución factible. Esta solución quedará guardada en la memoria de largo plazo del algoritmo.

Paso 2. Elección del entorno o vecindario y generación de una nueva solución: la búsqueda Tabú supone que pueden generarse soluciones adyacentes y un entorno de soluciones partiendo de la solución inicial. Se pueden hacer intercambios de aristas o utilizar un subviaje inverso, mencionado anteriormente (éste último es el algoritmo más utilizado al trabajar Búsqueda Tabú para VRP).

Paso 3. Elección del tamaño máximo de la lista tabú.

Nota: Siempre que se agregue uno o más movimientos tabú a una lista llena, se elimina el o los más antiguos de los movimientos de la lista tabú.

Paso 4. Selección de la mejor solución en el entorno estudiado, la cual será guardada en la memoria de largo plazo del algoritmo.

⁵¹ HILLIER, F. y LIEBERMAN, G., op.cit., p. 625-634.

⁵² Esto se conoce como el *criterio de aspiración* y consiste en quitar el rótulo de Tabú a algún movimiento sólo si este conduce a una mejor solución.

⁵³ HILLIER, F. y LIEBERMAN, G., op.cit., p. 625-634.

Paso 5. La solución elegida en el paso 4 se toma como el nuevo punto de partida y se repiten los pasos anteriores.

Paso 6. Criterio de parada o regla de detención: El proceso termina después de un número dado de iteraciones consecutivas. El algoritmo compara todas las soluciones guardadas en la memoria a largo plazo y toma como solución final la que presente el mejor valor de la función objetivo. (El algoritmo también puede detenerse después de realizar un número de iteraciones sin encontrar una solución igual o mejor a la inicial).

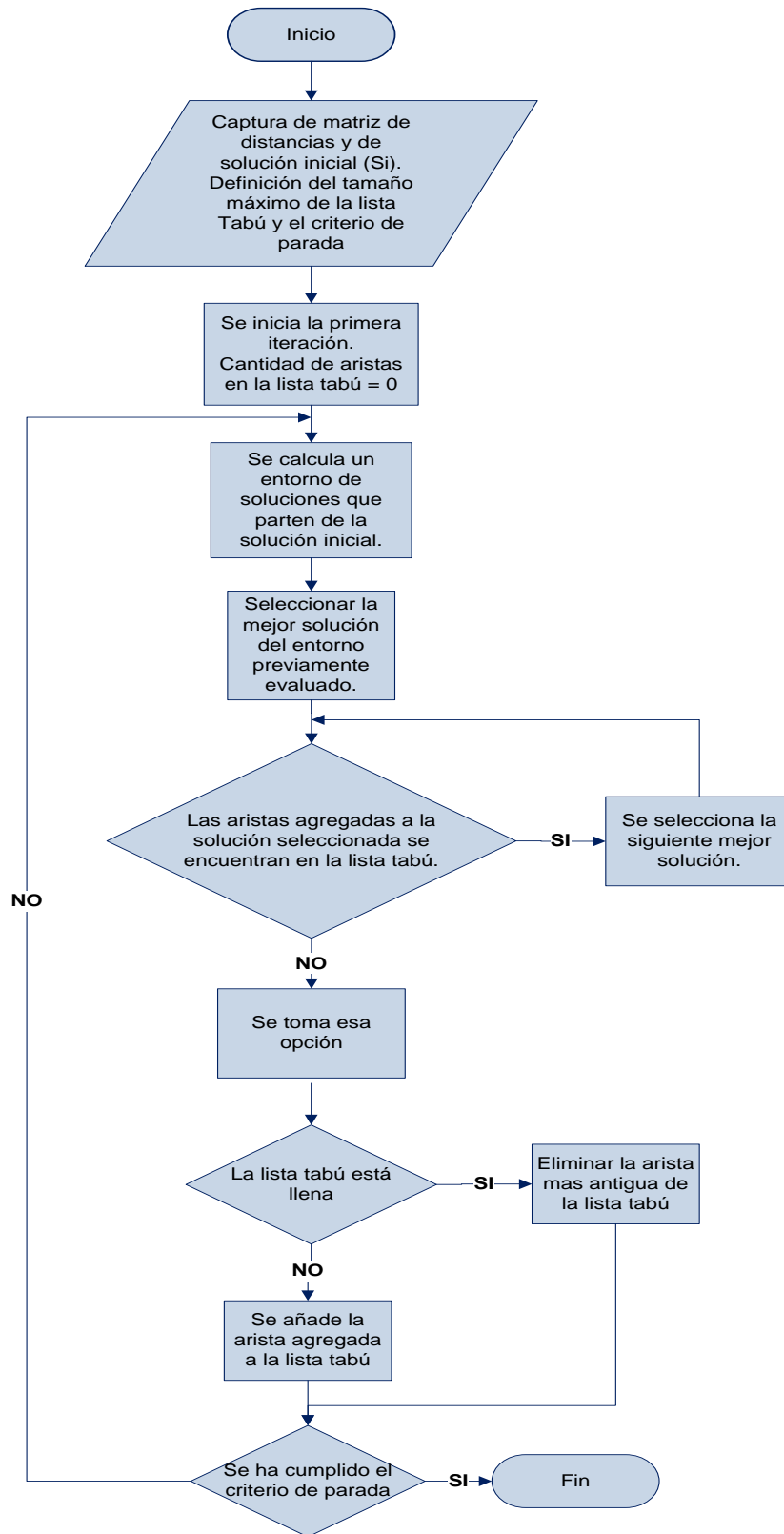
En la Figura 18 se muestra el diagrama que representa el funcionamiento de la metaheurística Búsqueda tabú.

3.7 TRABAJOS DE GRADO RELACIONADOS CON LA TEMÁTICA DEL VRP Y LAS TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN UTILIZADAS

A continuación se presentan algunos de los proyectos de grado realizados en años anteriores por estudiantes de la Universidad Industrial de Santander, referentes al estudio y la investigación del Problema de Ruteo de Vehículos y algunas heurísticas y metaheurísticas relacionadas con el tema.

- **Título del proyecto:** “Alternativas de solución al problema de distribución de planta (FLP) de un solo nivel y departamentos iguales ó desiguales, por medio del análisis de métodos metaheurísticos”.
- **Temática tratada:** En la tesis “Alternativas de solución al problema de distribución de planta (FLP) de un solo nivel y departamentos iguales ó desiguales, por medio del análisis de métodos metaheurísticos” se presentan tres metaheurísticas: Búsqueda Tabú, Recocido Simulado y Algoritmo Genético y partiendo de unas posibles distribuciones de planta, se buscan los respectivos resultados que se comparan entre sí para finalmente proponer posibles soluciones.

Figura 18. Diagrama de flujo de la metaheurística Búsqueda tabú.



Bibliografía: CALDERÓN E., DUARTE M., “Alternativas de solución al problema de distribución de planta (FLP) de un solo nivel y departamentos iguales ó desiguales, por medio del análisis de métodos metaheurísticos” [Tesis de Grado]; Bucaramanga, Santander: Universidad Industrial de Santander, 2010.

- **Título del proyecto:** “Formulación y evaluación de un algoritmos, basado en la meta-heurística Búsqueda Tabú para la optimización del ruteo de vehículos con capacidad”

Temática tratada: En este proyecto de grado se plantea un tema en torno a la metaheurística Búsqueda Tabú. Se utiliza la metodología Búsqueda Tabú para la optimización de las rutas, apoyada en el algoritmo de Clarke and Wright para la creación de la ruta inicial y en la técnica Lin-Kernighan para la construcción del vecindario. A su vez, en la búsqueda tabú se implementan las estrategias de intensificación y diversificación para explorar mejor el espacio de soluciones y hallar las cercanas al óptimo, evitando caer en óptimos locales.

Bibliografía: PERTUZ A. Y ROJAS K., “Búsqueda Tabú” para la optimización del ruteo de vehículos con capacidad” [Tesis de Grado]; Bucaramanga, Santander: Universidad Industrial de Santander, 2007.

- **Título del proyecto:** “Colonia de Hormigas fundamentación teórica y aplicación en la optimización de sistemas logísticos de ruteo con intervalos de recepción y tiempo de atención máximo”

Temática tratada: Se estudia el problema planteado como un depósito central que cuenta con una flota de m vehículos de capacidad limitada que debe atender un conjunto de clientes geográficamente distribuidos que se conectan por una red de vías simétricas. En este caso se busca minimizar a la vez el número de vehículos, la distancia total recorrida, el tiempo total en que se incurre para terminar todas las rutas y el tiempo máximo de servicio.

Bibliografía: TOLOSA, J. “Colonia de Hormigas fundamentación teórica y aplicación en la optimización de sistemas logísticos de ruteo con intervalos de recepción y tiempo de atención máximo”. [Tesis de Grado]. Bucaramanga, Santander: Universidad Industrial de Santander, 2005.

- **Título del proyecto:** “Seminario de investigación: Algunos métodos de solución para el CVRP”

Temática tratada: En él se presentan los métodos de solución: el Agente Viajero (TSP), el Agente Viajero Múltiple (m-TSP) y el Ruteo de Vehículos con Capacidad (CVRP). Para dar solución al problema del CVRP, se estudia el método Branch and Bound (ramificación y acotamiento) y las metaheurísticas Algoritmos Genéticos y Colonia de Hormigas. En este trabajo se utilizan herramientas como GAMS y Matlab para desarrollar ejemplos del CVRP que posteriormente se incluyen en un tutorial de GAMS.

Bibliografía: CANTILLO, D., GALVAN, S., ESPINOSA, M. y ORTIZ, M. “Seminario de investigación: Algunos métodos de solución para el CVRP”. [Tesis de Grado]; Bucaramanga, Santander: Universidad Industrial de Santander, 2010.

- **Título del proyecto:** “Métodos heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad”

Temática tratada: Se estudian dos algoritmos utilizados para la solución del Problema de Ruteo de Vehículos con Capacidad (CVRP) como son el Algoritmo de Ahorros y el Algoritmo de Vecino más cercano. Lo que se busca con ellos es comparar resultados y determinar cuál de los dos ofrece el menor costo.

Bibliografía: CONTRERAS C., DÍAZ M., “Métodos heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad”. [Tesis de Grado]; Bucaramanga, Santander: Universidad Industrial de Santander, 2010.

4. APLICACIÓN DE MODELOS A LOS CASOS DE ESTUDIO

Para la formulación y modelamiento de los diferentes métodos a utilizar en el presente documento, se ubican los nodos en el mapa de la universidad y se genera una matriz de distancias considerando las características de los diferentes grafos a utilizar en cada caso.

Para obtener los datos de la matriz para el primer y el segundo caso se calculan las distancias entre las dependencias y los puntos de intersección en el mapa de la UIS, para la construcción de los posibles caminos entre cada par de dependencias y posteriormente se define la ruta más corta entre ellas. Por otro lado, para el caso de la recolección de residuos se genera la matriz a partir de las distancias entre los nodos y la orientación de las calles de la universidad. A continuación se aplican los algoritmos estudiados para cada caso.

4.1 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

A partir de los nodos establecidos en el diagnóstico del caso, se genera la matriz de distancias (Ver Anexo 8) que sirve de base para aplicar los diferentes métodos estudiados en el presente trabajo.

4.1.1 Modelamiento usando métodos exactos

4.1.1.1 Aplicación del método de *Branch and Bound* para el problema del vendedor viajero (TSP)

El problema se plantea partiendo del mapa digital de la Universidad Industrial de Santander, donde se cuenta con un número de nodos (N) igual a 28 y un grafo completo, simétrico y no dirigido.

La función objetivo para este caso es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij}$$

Inicialmente se formuló el problema con las siguientes restricciones:

- Restricciones de entrada y salida a las dependencias de la UIS.

$$\sum_{i=1}^{28} X_{ij} = 1; \quad j = \{1, 2, \dots, 28\} \forall i \in N$$

$$\sum_{j=1}^{28} X_{ij} = 1; \quad i = \{1, 2, \dots, 28\} \forall j \in N$$

Naturaleza de las variables del TSP.

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j \in N \quad N = \{1, 2, \dots, 28\}$$

Para su solución se aplica el método de Branch and Bound a través del Solver Premium de Excel, en el que finalmente se ingresaron:

- Variables: 756.
- Restricciones: 57, teniendo en cuenta la restricción que define la naturaleza de las variables (binaria).

Obteniendo un valor de la función objetivo de 781,6 unidades de medida.

Al analizar la ruta obtenida, se observa que ésta presenta gran cantidad de subtours entre parejas de nodos, por lo que se decide agregar las restricciones con el objetivo de romperlos. Por ejemplo para romper el subtour generado por la pareja de nodos 1 y 2, se utiliza la siguiente restricción:

$$\sum_{\substack{i \in \{1,2\} \\ j \in \{3,4,\dots,28\}}} X_{ij} \leq 1 \quad , \text{siendo } |S| = 2$$

Una vez agregadas estas restricciones se corre de nuevo el algoritmo con:

- Variables: 756.
- Restricciones: 57.

- Restricciones agregadas para romper subtours: 377.

Generando un valor de la función objetivo de 867,8 unidades de medida.

Esta solución es nuevamente analizada para verificar si forma un ciclo hamiltoniano. Sin embargo, se observa que se continúan formando dos ciclos entre algunos nodos (entre 19,18 y 20 y entre 1,2 y 28) como se muestra en el Anexo 9. Por tanto, se realiza nuevamente la iteración agregando las restricciones que rompan estos subtours:

$$\sum_{\substack{i \in \{18,19,20\} \\ j \in S'}} X_{ij} \leq 2 \quad , \text{siendo } |S| = 3$$

$$\sum_{\substack{i \in \{1,2,28\} \\ j \in S'}} X_{ij} \leq 2 \quad , \text{siendo } |S| = 3$$

Finalmente, se ingresaron:

- Variables: 756.
- Restricciones: 57.
- Restricciones agregadas para romper subtours: 383.

Dando un valor de función objetivo de 899,3 unidades de medida. Éste valor corresponde al ciclo hamiltoniano para el problema del vendedor viajero que se muestra en el Anexo 10. Sin embargo, en este caso de distribución se utilizan varios repartidores, por lo que se hace necesaria la aplicación del problema del vendedor viajero para m agentes para obtener una solución que se pueda aplicar realmente en la División de Correspondencia de la universidad.

4.1.1.2 Aplicación del método de Branch and Bound para el problema del vendedor viajero para m agentes (m-TSP)

Considerando las características del caso de distribución de correspondencia, se realiza la formulación del problema, de tal manera que la función objetivo busque minimizar la distancia total recorrida entre los tres repartidores:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij1} - \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij2} - \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij3}$$

Inicialmente se incluyeron las restricciones:

- Cada dependencia debe ser visitada una sola vez por un solo repartidor.

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^{28} X_{ijk} = 1 \quad \forall i \neq 1, i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^{28} X_{ijk} = 1 \quad \forall j \neq 1, i \neq j$$

- Cada repartidor debe entrar y salir una única vez a la dependencia de la División de Correspondencia.

$$\sum_{j=1}^{28} X_{1jk} = 1 \quad \forall k = \{1,2,3\}$$

$$\sum_{i=1}^{28} X_{i1k} = 1 \quad \forall k = \{1,2,3\}$$

- El repartidor que entra a una dependencia debe ser el mismo que salga de ésta.

$$\sum_{j=1}^{28} X_{ijk} - \sum_{i=1}^{28} X_{ijk} = 0 \quad \forall k = \{1,2,3\} ; i, j \neq 1 ; i \neq j$$

- Restricción que permite equilibrar la carga de las rutas.

$$\sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij1} - \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij2} - \sum_{i=1}^{28} \sum_{j=1}^{28} C_{ij} X_{ij3} \geq 0$$

Naturaleza de las variables del TSP.

$$X_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N, N=\{1, 2, \dots, n\}$$

El problema se itera utilizando el método de Branch and Bound a través del Solver Premium de Excel teniendo en cuenta las siguientes características:

- Variables: 2268.
- Restricciones: 146.

Sin embargo, al correr el algoritmo no se encuentra una solución, ya que la cantidad de variables y restricciones hacen que el tiempo de computación requerido sea considerable al tratarse de un problema combinatorio donde el modelo examina todas las posibles soluciones.

Dada esta situación se procede a hacer uso de algunas de las heurísticas relacionadas con el m-TSP, con el fin de obtener una solución factible para este caso de aplicación.

4.1.2 Modelamiento usando heurísticas clásicas

4.1.2.1 Aplicación del Algoritmo árbol de expansión mínima

❖ Primera Fase

Utilizando la matriz de distancias, se programa el algoritmo Árbol de Expansión Mínima, cuya iteración da como resultado una distancia de recorrido de 756,4 unidades de medida (esta solución se muestra en el Anexo 11).

En la solución obtenida se observa que la ruta no forma un ciclo hamiltoniano, por lo que se hace necesario utilizar un procedimiento como segunda fase de este algoritmo aplicando el principio de Inequidad Triangular, con el fin de obtener una solución factible.

❖ Segunda Fase

Para esta segunda fase del Algoritmo de Árbol de Expansión Mínima se utiliza el principio de Inequidad Triangular, cuyo procedimiento se muestra en el Anexo 12. Es así, que la solución generada esta vez forma un ciclo

hamiltoniano, cuya distancia total es de 913,3 unidades de medida. La solución se muestra en el Anexo 13.

4.1.2.2 Aplicación del algoritmo vecino más cercano

Al considerar las características propias del caso de la distribución de la correspondencia, se debe tener en cuenta que los tres repartidores parten del nodo uno (1) para realizar sus respectivos recorridos y que se busca que cada uno recorra la misma cantidad de nodos. Por tanto, se agrega una restricción de capacidad máxima de nodos a visitar, la cual se halla de la siguiente manera:

$$\frac{27 \text{ nodos a visitar}}{3 \text{ repartidores disponibles}} = 9 \text{ nodos a visitar por cada repartidor}$$

Nota: Es importante excluir el nodo origen (nodo 1), que en este caso es el nodo 1, ya que éste hace parte de las tres rutas.

A continuación se programa el algoritmo, partiendo de la matriz de distancias y el número máximo de nodos a visitar por cada repartidor y posteriormente se realiza su iteración.

Las rutas obtenidas se muestran en el Anexo 14 y las distancias para cada repartidor son las siguientes:

- Ruta 1: 577,8 unidades de medida.
- Ruta 2: 454,2 unidades de medida.
- Ruta 3: 423,12 unidades de medida.

Dando un total de 1455,12 unidades de medida.

4.1.2.3 Aplicación del algoritmo de barrido

Se hallan los valores de los ángulos (θ_j) y de las longitudes de recta (ρ_j), los cuales se ordenan en forma ascendente como se muestra en el Anexo 15. Para

este caso se tiene en cuenta la capacidad de cada repartidor en cuanto al número de dependencias a visitar.

Las rutas obtenidas se muestran en el Anexo 16, cuyas distancias son:

- Ruta 1: 493,1 unidades de medida.
- Ruta 2: 654,2 unidades de medida.
- Ruta 3: 568 unidades de medida.

Con una distancia total de 1715,3 unidades de medida

4.1.2.4 Aplicación del algoritmo de ahorros

En primer lugar se crean las rutas que unen a cada nodo con el origen (nodo 1), y se calculan todos los ahorros entre cada par de nodos (ver Anexo 17). Posteriormente se selecciona la pareja de nodos que obtenga el mayor ahorro y así se continúan seleccionando todos los nodos de la red, teniendo en cuenta que cada repartidor debe visitar 9 dependencias y que el nodo a seleccionar no tenga ya una conexión establecida con dos dependencias.

La ruta obtenida por el algoritmo de ahorros se muestra en el Anexo 18, cuyas distancias recorridas para cada repartidor son:

- Ruta 1: 545 unidades de medida.
- Ruta 2: 435 unidades de medida.
- Ruta 3: 422 unidades de medida.

Con una distancia total de 1402 unidades de medida.

A continuación se decide aplicar el algoritmo de ahorros mejorado buscando obtener una mejor solución.

4.1.2.5 Aplicación del algoritmo de ahorros mejorado

Para mejorar el algoritmo de ahorros se decide utilizar el parámetro de forma de ruta (λ) igual a 0,1; 0,4 y 0,8, cuyas matrices de ahorros se pueden observar

en el Anexo 19 (Tabla 1, 2 y 3 respectivamente). Continuando con el procedimiento, se selecciona cada par de nodos, teniendo en cuenta que éstos deben cumplir con las restricciones anteriormente mencionadas.

Para el parámetro de forma de la ruta igual a 0,1, las rutas obtenidas para cada repartidor son (Ver Anexo 20):

- Ruta 1: 798,1 unidades de medida.
- Ruta 2: 568,4 unidades de medida.
- Ruta 3: 489 unidades de medida.

Distancia total: 1855,5 unidades de medida.

Cuando el parámetro de forma de la ruta es igual a 0,4, se generan las siguientes rutas (Ver Anexo 21):

- Ruta 1: 521 unidades de medida.
- Ruta 2: 484 unidades de medida.
- Ruta 3: 452 unidades de medida.

Distancia total: 1457 unidades de medida.

Y por último cuando el parámetro de forma de la ruta es igual a 0,8, las rutas obtenidas son (Ver Anexo 22):

- Ruta 1: 521 unidades de medida.
- Ruta 2: 435 unidades de medida.
- Ruta 3: 394 unidades de medida.

Distancia total: 1350 unidades de medida.

4.1.2.6 Aplicación del algoritmo 2-opt

Debido a que este algoritmo parte de una solución inicial, se decide realizar su aplicación partiendo de tres soluciones diferentes: la mejor solución obtenida de la aplicación de los algoritmos estudiados, una ruta obtenida aleatoriamente y la solución obtenida por los algoritmos que presenta las distancias más altas.

Las distancias de cada una de las rutas generadas por los algoritmos aplicados se muestran en la Tabla 2.

En la Tabla 2 no se incluye el método exacto usado en el m-TSP, debido a que para este problema no se encontró una solución usando el método de Branch and Bound. Por tanto, las soluciones de las que parte el algoritmo 2-opt se muestran en la Tabla 3, siendo la solución A, la generada por la mejora del algoritmo de ahorros con un parámetro de forma de la ruta igual a 0,8; la solución B corresponde a las rutas obtenidas aleatoriamente y la solución C corresponde a las rutas generadas por el algoritmo de barrido.

Tabla 2. Comparación de los resultados para el caso de la correspondencia.

ALGORITMO DEL VECINO MAS CERCANO		ALGORITMO DE BARRIDO		ALGORITMO DE AHORROS		MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS		
Ruta 1	577,8	Ruta 1	493,1	Ruta 1	545	Ruta 1	798,1	
Ruta 2	454,2	Ruta 2	654,2	Ruta 2	435	Ruta 2	568,4	
Ruta 3	423,12	Ruta 3	568	Ruta 3	422	Ruta 3	489	
TOTAL	1455,12	TOTAL	1715,3	TOTAL	1402	TOTAL	1855,5	
						Ruta 1	521	$\lambda=0,4$
						Ruta 2	484	
						Ruta 3	452	
						TOTAL	1457	
						Ruta 1	521	$\lambda=0,8$
						Ruta 2	435	
						Ruta 3	394	
						TOTAL	1350	

Tabla 3. Soluciones de partida para el algoritmo 2-opt.

SOLUCIONES DE PARTIDA PARA EL ALGORITMO 2-OPT			DISTANCIAS (Unidades de medida)	DISTANCIA TOTAL
Solución A	Ruta 1	1-20-19-21-22-23-24-25-26-27-1	521	1350
	Ruta 2	1-17-18-15-16-14-13-12-10-11-1	435	
	Ruta 3	1-28-5-3-4-6-7-8-9-2-1	394	
Solución B	Ruta 1	1-28-5-27-26-25-20-17-4-3-1	498,2	1563,86
	Ruta 2	1-18-24-23-22-21-19-6-7-2-1	542,66	
	Ruta 3	1-8-16-15-11-14-13-12-10-9-1	523	
Solución C	Ruta 1	1-28-3-5-27-26-25-24-23-4-1	493,1	1715,3
	Ruta 2	1-17-22-20-2-18-19-21-16-7-1	654,2	
	Ruta 3	1-6-15-14-11-8-13-12-10-9-1	568	

Debido a que este algoritmo selecciona los pares de aristas a intercambiar al azar, se elige un número de iteraciones lo suficientemente grande, de tal manera que se dé la posibilidad de que se puedan realizar los intercambios de todas las aristas de la solución inicial. Por lo tanto, el algoritmo se corre con un número de veces igual al doble de las iteraciones que pueden existir entre los nodos ($350 \times 2 = 700$). Al realizar las iteraciones se obtienen las mejoras para cada solución, las cuales se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Soluciones mejorados por el algoritmo 2-opt.

SOLUCIONES MEJORADAS POR EL ALGORITMO 2-OPT			DISTANCIAS (Unidades de medida)	DISTANCIA TOTAL
Solución A	Ruta 1	1-20-19-21-22-23-24-25-26-27-1	521	1321
	Ruta 2	1-17-18-16-15-14-13-12-10-11-1	422	
	Ruta 3	1-28-3-5-4-6-7-8-9-2-1	378	
Solución B	Ruta 1	1-28-3-5-27-26-25-20-17-4-1	443,2	1405,5
	Ruta 2	1-7-6-19-21-22-24-23-18-2-1	520,3	
	Ruta 3	1-10-12-13-14-16-15-11-8-9-1	442	
Solución C	Ruta 1	1-28-3-5-7-8-13-14-15-11-1	529	1461,6
	Ruta 2	1-2-17-20-23-24-25-26-27-4-1	436,6	
	Ruta 3	1-6-18-19-22-21-16-12-10-9-1	496	

Al observar la Tabla 4, se determina que la solución con menor distancia total recorrida es la solución A dando 1321 unidades de medida, cuyas rutas se muestran en el Anexo 23. A continuación, se procede a mejorar esta solución por medio de la metaheurística Búsqueda Tabú.

4.1.3 Aplicación de la metaheurística Búsqueda Tabú

Este algoritmo, al igual que el anterior, requiere de una solución inicial como parámetro de entrada, por lo que se decide correrlo partiendo de dos soluciones y comparar posteriormente los resultados obtenidos para cada una.

De tal forma, se decide trabajar con la mejor solución obtenida por el algoritmo 2-opt y con una solución elegida aleatoriamente. Las rutas usadas como solución inicial se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Soluciones de partida para la metaheurística Búsqueda Tabú.

SOLUCIONES DE PARTIDA PARA EL ALGORITMO BÚSQUEDA TABÚ			DISTANCIAS (Unidades de medida)	DISTANCIA TOTAL
Solución A	Ruta 1	1-20-19-21-22-23-24-25-26-27-1	521	1321
	Ruta 2	1-17-18-16-15-14-13-12-10-11-1	422	
	Ruta 3	1-28-3-5-4-6-7-8-9-2-1	378	
Solución B	Ruta 1	1-28-3-5-27-26-25-24-23-22-1	507,9	1471,9
	Ruta 2	1-2-4-17-18-20-19-21-16-6-1	423	
	Ruta 3	1-7-8-15-14-11-13-12-10-9-1	541	

Siendo la solución A la obtenida al utilizar el algoritmo 2-opt y la solución B es una solución aleatoria (esta no ha sido generada por ninguno de los algoritmos).

Al aplicar este algoritmo se trabaja con una memoria tabú igual a 5, es decir, en la lista tabú sólo pueden estar máximo cinco movimientos. De la misma forma que en el caso anterior, el algoritmo requiere un número de iteraciones como dato de entrada, por lo que se decide utilizar un número lo suficientemente grande para realizar iteraciones entre los 28 nodos de la red. Por lo tanto, el criterio de parada establecido para el caso de estudio es de $351 \cdot 2 = 702$.

Al observar la Tabla 6, la solución que presenta menor distancia en los recorridos es la solución A con 1321 unidades de medida, cuyas rutas se muestra en el Anexo 24. La metaheurística no encuentra una mejora para esta ruta, ya que corresponde a la misma solución mejorada por el algoritmo 2-opt.

Tabla 6. Soluciones mejoradas por la metaheurística Búsqueda Tabú.

SOLUCIONES MEJORADAS POR EL ALGORITMO BÚSQUEDA TABÚ			DISTANCIAS (Unidades de medida)	DISTANCIA TOTAL
Solución A	Ruta 1	1-20-19-21-22-23-24-25-26-27-1	521	1321
	Ruta 2	1-17-18-16-15-14-13-12-10-11-1	422	
	Ruta 3	1-28-3-5-4-6-7-8-9-2-1	378	
Solución B	Ruta 1	1-28-3-5-27-26-25-24-23-20-1	481,6	1344,6
	Ruta 2	1-4-17-18-19-22-21-16-15-6-1	432	
	Ruta 3	1-7-8-9-11-14-13-12-10-2-1	431	

4.2 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

4.2.1 Modelamiento usando métodos exactos

4.2.1.1 Aplicación del método de Branch and Bound para el problema de ruteo de vehículos con capacidad (CVRP)

Como se menciona en el capítulo 2, Bienestar Universitario cuenta con un máximo de cinco repartidores, cada uno con una capacidad aproximada de 12 almuerzos por viaje. Esta información, así como los datos relacionados con las demandas de almuerzos de la semana del 21 al 25 de Febrero de 2011, sirven como punto de partida para la formulación del Problema de Ruteo de Vehículos con Capacidad (CVRP) para esta semana.

Nota: El método se aplica para cada día de la semana. Por otro lado, como se señala en el capítulo 2, la información relacionada con las demandas del mes de Marzo es usada para analizar el comportamiento de las mismas.

Como se observa en la Tabla 1, en el día lunes hay una demanda en el nodo 8 (Laboratorio de Livianos) mayor a la capacidad de un repartidor (demanda igual a 27 almuerzos), por lo que se debe aumentar la capacidad de los repartidores para poder suplir dicha demanda.

Es así, que para estos casos (donde la demanda supera los 12 almuerzos) la capacidad de los repartidores se define teniendo en cuenta un número múltiplo de dicha capacidad, que supere la mayor demanda del día. De tal manera que las capacidades para cada día se hallan multiplicando la capacidad de un repartidor por el número de repartidores a usar (ver Ecuación 18).

Ecuación 18. Ecuación utilizada para el cálculo del número de repartidores a utilizar.

$$k = \left[\text{Entero} \left(\frac{\text{Mayor Demanda}}{c_{\text{repartidor}}} \right) + 1 \right]$$

Esta ecuación se resume en lo siguiente: La mayor demanda del día se divide entre la capacidad de un repartidor y el resultado se aproxima al entero mayor.

- $C_{Lunes} = k * c_{\text{repartidor}} = 3 * 12 \text{ almuerzos} = 36 \text{ almuerzos}$, siendo la mayor demanda del día 27 almuerzos.
- $C_{Martes} = 12 \text{ almuerzos}$, siendo su mayor demanda 3 almuerzos.
- $C_{Miercoles} = 12 \text{ almuerzos}$, siendo la mayor demanda 3 almuerzos.
- $C_{Jueves} = 12 \text{ almuerzos}$, siendo la mayor demanda 1 almuerzo.
- $C_{Viernes} = 12 \text{ almuerzos}$, ya que su demanda más alta es 4 almuerzos.

Es importante realizar esta operación, ya que el CVRP no contempla demandas mayores a las capacidades de los vehículos o los repartidores. A pesar de que existen nodos sin demanda para esta semana, todas las dependencias se incluyen en el análisis, pues en algún momento puede generarse una demanda de almuerzo en cualquiera de ellas.

Debido a que en este caso puede formarse más de una ruta (ya que puede haber días en los que los repartidores deban realizar más de un recorrido), se realiza la siguiente operación para cada día de la semana:

Ecuación 19. Ecuación utilizada para calcular el número de rutas a realizar en un día.

$$\frac{\sum d_j}{C_{dia}} = t(s)$$

Siendo $t(s)$ el número mínimo de rutas para suplir las demandas de los clientes S .

Por tanto, para el día lunes la formulación matemática para este problema sería la siguiente:

Función Objetivo:

$$Min Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, i \neq j} C_{ij} X_{ij}$$

Naturaleza de las variables.

$X_{ij} \in \{0,1\} \forall i, j \in N, N = 8, 9, 21, 24 \text{ y } 26$.

Sujeta a las siguientes restricciones:

- Restricciones de entrada y salida a cada dependencia.

$$\sum_{i \in N} X_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{24\}$$

$$\sum_{j \in N} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \setminus \{24\}$$

- Restricción que asegura que de la dependencia de Bienestar universitario entre y salga un número mínimo de rutas $t(s)$.

$$\sum_{i \in N} X_{i24} \geq 1 \quad \forall j \in N \setminus i \neq 24$$

$$\sum_{j \in N} X_{24j} \geq 1 \quad \forall i \in N \setminus j \neq 24$$

Esta restricción evita la formación de subtours.

- Restricción que asegura que la demanda de las dependencias de cada ruta no supere la capacidad del repartidor.

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N, i \neq j} d_j X_{ij} \leq 36$$

Se itera el problema usando el modelo de Branch and Bound a través del solver de Excel para cada día. Los resultados obtenidos son los siguientes, cuyas rutas se muestran en el Anexo 25.

- Lunes: 372,8 unidades de medida, utilizando tres repartidores y realizando una ruta (Ver Figura 1 Anexo 25).
- Martes: 377,8 unidades de medida, utilizando un repartidor y realizando una ruta. (Ver Figura 2 Anexo 25).
- Miércoles: 382,8 unidades de medida, utilizando un repartidor y realizando una ruta. (Ver Figura 3 Anexo 25).
- Jueves: 347 unidades de medida, utilizando un repartidor y realizando una ruta. (Ver Figura 4 Anexo 25).
- Viernes: 299 unidades de medida, utilizando un repartidor y realizando una ruta. (Ver Figura 5 Anexo 25).

4.2.1.2 Aplicación del método de Branch and Bound para el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW)

De acuerdo a la información suministrada por la Jefatura sección comedores y cafetería y como se señala en el diagnóstico del caso, el tiempo no es un factor determinante para las entregas de los almuerzos, ya que los clientes recibirían

el almuerzo en el momento en que llegue el repartidor, a pesar de que algunos desearían que sus almuerzos llegaran a las doce del medio día.

Por otro lado, al analizar los datos suministrados para el mes de Marzo, se concluye que la demanda no presenta un patrón específico de comportamiento. Por tanto, se toma en consideración que cada día de la semana se trabaja un problema de ruteo diferente y por ende, no es posible establecer una ventana de tiempo como medida de mejora del servicio.

A continuación se aplican algunas heurísticas clásicas y la metaheurística Búsqueda tabú. Cabe resaltar que para este caso se requiere correr los algoritmos diariamente, dado que tanto las dependencias que solicitan almuerzos como las demandas de las mismas varían de un día a otro como se muestra en la Tabla 1. Además, en todos los algoritmos se requiere contar con los datos correspondientes al número de repartidores, el número de rutas así como su capacidad de tal manera que se suplan demandas completas y no parciales.

4.2.2 Modelamiento usando heurísticas clásicas

4.2.2.1 Aplicación del Algoritmo vecino más cercano

Al momento de correr el modelo, se incluyen las demandas correspondientes a cada nodo, asignando un valor de cero para aquellos que no presenten demanda, con el fin de evitar que los repartidores visiten dependencias en las que no se haya realizado algún pedido. El algoritmo se corre para cada uno de los días de la semana y las rutas se muestran en el Anexo 26.

Las distancias obtenidas para la semana del 21 al 25 de Febrero son:

- Lunes: 394,2 unidades de medida, donde se requieren tres repartidores.
(Ver Figura 1 del Anexo 26)

- Martes: 399,2 unidades de medida, donde se requiere un repartidor. (Ver Figura 2 del Anexo 26)
- Miércoles: 382,8 unidades de medida, donde se requiere un repartidor. (Ver Figura 3 del Anexo 26)
- Jueves: 347 unidades de medida, donde se requiere un repartidor. (Ver Figura 4 del Anexo 26)
- Viernes: 299 unidades de medida, donde se requiere un repartidor. (Ver Figura 5 del Anexo 26)

4.2.2.2 Aplicación del algoritmo de barrido

Para la aplicación de este algoritmo se parte del cálculo de los ángulos θ_j y las magnitudes ρ_j para cada nodo, como se muestra en el Anexo 27 y, teniendo estos datos, se prosigue a formar las rutas. Asimismo, los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de Barrido se muestran en el Anexo 28.

Las distancias obtenidas para cada uno de los días de la semana son las siguientes:

- Lunes: 372,8 unidades de medida. (Ver Figura 1 del Anexo 29)
- Martes: 377,8 unidades de medida. (Ver Figura 2 del Anexo 29)
- Miércoles: 382,8 unidades de medida. (Ver Figura 3 del Anexo 29))
- Jueves: 347 unidades de medida. (Ver Figura 4 del Anexo 29)
- Viernes: 299 unidades de medida. (Ver Figura 5 del Anexo 29)

4.2.2.3 Aplicación del algoritmo de ahorros

En primer lugar se procede a crear las rutas que unen a cada nodo con el origen (nodo 24). A continuación, usando la Ecuación 16, se generan las matrices de ahorros para cada uno de los días de la semana (en este caso del 21 al 25 de Febrero del 2011), teniendo en cuenta los nodos donde se presenta demanda. Estas matrices se muestran en el Anexo 30.

Para este algoritmo, se unen los nodos priorizando las aristas que generen los mayores ahorros. Así, se genera la Tabla 6 del Anexo 30 donde se muestran las aristas a unir para cada día de la semana.

En el Anexo 31, se muestran las tablas con las soluciones obtenidas para cada día, donde las distancias obtenidas son:

- Lunes: 372,8 unidades de medida (Ver Figura 1 Anexo 32).
- Martes: 377,8 unidades de medida. (Ver Figura 2 Anexo 32).
- Miércoles: 382,8 unidades de medida. (Ver Figura 3 Anexo 32).
- Jueves: 347 unidades de medida. (Ver Figura 4 Anexo 32).
- Viernes: 299 unidades de medida. (Ver Figura 5 Anexo 32).

4.2.2.4 Aplicación del Algoritmo de Ahorros Mejorado

Para encontrar la mejor solución usando el algoritmo de Ahorros se utiliza la Ecuación 17, donde el parámetro de forma de la ruta (λ) toma los valores de 0,1; 0,4 y 0,8. Con esta modificación del algoritmo de Ahorros se espera llegar a una solución que mejore la encontrada con el anterior algoritmo. Las rutas obtenidas para cada día usando el parámetro de la forma de la ruta igual a 0,1 se observan en el Anexo 33.

El procedimiento mostrado en el Anexo 33, se utiliza también para cada uno de los valores de λ establecidos, donde finalmente se obtienen los siguientes resultados para cada uno de los días de la semana analizada:

❖ Lunes.

Para este día, al utilizar los λ igual a 0,1; 0,4 y 0,8 se obtiene el mismo resultado, el cual se muestra en la Tabla 1 del Anexo 33, por lo que no se obtiene ninguna mejora y la ruta expuesta en esa tabla se toma como la mejor solución encontrada por este algoritmo para el día lunes. En la Figura 1 del Anexo 34 se muestra la ruta de esta solución.

❖ **Martes.**

Al aplicar el algoritmo para cada uno de los λ establecidos, se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 7. Para todas las formas de ruta analizadas, se obtiene una ruta recorrida por un repartidor, cuya capacidad es suficiente para satisfacer la demanda de todos los nodos en este día.

Tabla 7. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros mejorado para el día martes para todos los valores de λ utilizados.

RUTA PARA EL DÍA MARTES ($\lambda= 0,1$)	DISTANCIA	RUTA PARA EL DÍA MARTES ($\lambda= 0,4$)	DISTANCIA	RUTA PARA EL DÍA MARTES ($\lambda= 0,8$)	DISTANCIA
24,26	18	24,26	18	24,26	18
26,21	91,2	26,8	117	26,8	117
21,8	115	8,9	23	8,9	23
8,9	23	9,16	83	9,16	83
9,16	83	16,21	40	16,21	40
16,24	115,8	21,24	96,8	21,24	96,8
DISTANCIA TOTAL	446		377,8		377,8

Según los resultados mostrados en dicha tabla, se encuentra que la mejor solución se da al usar λ igual a 0,4 y a 0,8, con una distancia total de 377,8 unidades de medida.

Esta solución es la misma obtenida al aplicar el algoritmo de ahorros sin mejora, por lo que la ruta final para este día es la que se presenta en la Tabla 2 del Anexo 33. En la Figura 2 del Anexo 34 se muestra la mejor ruta obtenida para este día.

❖ **Miércoles**

Los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo para todos los valores de λ para este día se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros Mejorado para el día miércoles para todos los valores de λ utilizados.

RUTA PARA EL DÍA MIÉRCOLES ($\lambda= 0,1$)	DISTANCIA	RUTA PARA EL DÍA MIÉRCOLES ($\lambda= 0,4$)	DISTANCIA	RUTA PARA EL DÍA MIÉRCOLES ($\lambda= 0,8$)	DISTANCIA
24,26	18	24,26	18	24,26	18
26,9	135	26,12	149,2	26,12	149,2
9,12	70	12,9	70	12,9	70
12,8	78	9,8	23	9,8	23
8,24	129	8,24	129	8,24	129
DISTANCIA TOTAL	430		389,2		389,2

Según los resultados se encuentra que la mejor solución que genera este algoritmo es para un valor de λ igual a 0,4 y 0,8, con el que se obtiene una distancia total de 389,2 unidades de medida.

En la Figura 3 del Anexo 34 se muestra la ruta de la mejor solución obtenida.

❖ **Jueves**

Para el día jueves, los resultados obtenidos al utilizar el algoritmo de Ahorros con λ igual a 0,1; 0,4 y 0,8 son los mismos que el obtenido al aplicar el algoritmo de ahorros sin mejora. Por tanto, no se obtiene una mejora de la solución y la ruta final para este día es la mostrada en la Tabla 4 del Anexo 33. En la Figura 4 del Anexo 34 se muestra la mejor solución para este día.

❖ **Viernes**

Para este día, sucede lo mismo que para los días lunes y jueves, en el que se genera la misma solución para todos los λ utilizados, así como para el algoritmo sin mejora. Es así, que la solución para el día viernes es la que se muestra en la Tabla 5 del Anexo 33. En la Figura 5 del Anexo 34 se muestra la mejor solución para este día.

4.2.2.5 Aplicación del algoritmo 2-opt

Para aplicar este algoritmo se requiere como dato de entrada una solución inicial, sin embargo, a modo de prueba, se utilizan tres soluciones, para posteriormente analizar los resultados obtenidos con este algoritmo para cada solución inicial usada. Para escoger estos datos de entrada, se evalúan las soluciones encontradas por todos los métodos, las cuales se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Comparación de los algoritmos utilizados en el caso de distribución de almuerzos.

	MÉTODO EXACTO	ALGORITMO DEL VECINO MÁS CERCANO	ALGORITMO DE BARRIDO	ALGORITMO DE AHORROS	MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS
LUNES	372,8	394,2	372,8	372,8	372,8 ($\lambda=0,1;0,4$ y $0,8$)
MARTES	377,8	399,2	377,8	377,8	377,8 ($\lambda=0,4$ y $0,8$)
MIÉRCOLES	382,8	382,8	382,8	382,8	389,2 ($\lambda=0,4$ y $0,8$)
JUEVES	347	347,0	347,0	347,0	347 ($0,1;0,4$ y $0,8$)
VIERNES	299	299,0	299,0	299,0	299 ($0,1;0,4$ y $0,8$)

De tal manera, las soluciones que son analizadas por este algoritmo para cada día son las siguientes: La solución A es la mejor solución obtenida por los algoritmos aplicados anteriormente, la solución B corresponde a la ruta aleatoria, no generada por los algoritmos y por último la solución C corresponde a la solución encontrada por los algoritmos aplicados que dio la mayor distancia en la ruta; estas rutas se muestran en la Tabla 10.

Como cada día es un problema diferente, para cada uno se utiliza un número de iteraciones diferentes, el cual depende del número de nodos o dependencias que hayan tenido demanda. El número de iteraciones debe ser

lo suficientemente grande para dar la posibilidad de que el algoritmo itere todos los nodos, por lo cual se decide realizar el doble de iteraciones posibles.

Es así que se definen los números de iteraciones para cada día de la semana de 10, 18, 10 y 4 respectivamente. Para el día viernes no se puede aplicar el algoritmo 2-opt, ya que en este día sólo se visitan dos dependencias; de tal manera que la solución propuesta para este día será la mejor solución encontrada por los algoritmos aplicados anteriormente, y debido a que se obtienen valores de distancia iguales para todos, cualquier ruta se puede elegir.

Tabla 10. Soluciones de partida para el Algoritmo 2-opt.

	SOLUCIONES DE PARTIDA PARA EL ALGORITMO 2-OPT		DISTANCIA (Unidades de medida)
LUNES	Solución A	24-21-9-8-26-24	372,8
	Solución B	24-9-21-8-26-24	515,0
	Solución C	24-26-21-8-9-24	394,2
MARTES	Solución A	24-26-8-9-16-21-24	377,8
	Solución B	24-16-9-8-26-21-24	526,8
	Solución C	24-9-8-16-21-26-24	399,2
MIERCOLES	Solución A	24-12-9-8-26-24	382,8
	Solución B	24-9-8-12-26-24	415,2
	Solución C	24-26-12-9-8-24	389,2
JUEVES	Solución A	24-9-8-27-24	347,0
	Solución B	24-27-8-9-24	347,0

Para el día jueves se obtiene el mismo valor de distancia total para todos los algoritmos aplicados, por lo que se decide iterar la solución obtenida por los algoritmos y una solución aleatoria. Al realizar las iteraciones respectivas para cada día, el algoritmo encuentra las soluciones mostradas en la Tabla 11, de las cuales, las mejores soluciones para cada día son las siguientes:

- Lunes: solución A, con 372,8 unidades de medida. (Ver Figura 1 del Anexo 35)

- Martes: solución A, con 377,8 unidades de medida. (Ver Figura 2 del Anexo 35)
- Miércoles: solución A, con 382,8 unidades de medida. (Ver Figura 3 del Anexo 35)
- Jueves: solución A o B, con 347 unidades de medida. (Ver Figura 4 del Anexo 35)

Tabla 11. Soluciones mejoradas por el Algoritmo 2-opt.

	SOLUCIONES MEJORADAS POR EL ALGORITMO 2-OPT		DISTANCIA (Unidades de medida)
LUNES	Solución A	24-21-9-8-26-24	372,8
	Solución B	24-9-8-21-26-24	394,2
	Solución C	24-26-21-8-9-24	394,2
MARTES	Solución A	24-26-8-9-16-21-24	377,8
	Solución B	24-16-9-8-26-21-24	526,8
	Solución C	24-9-8-16-21-26-24	399,2
MIERCOLES	Solución A	24-12-9-8-26-24	382,8
	Solución B	24-9-8-12-26-24	415,2
	Solución C	24-26-12-9-8-24	389,2
JUEVES	Solución A	24-9-8-27-24	347
	Solución B	24-27-8-9-24	347

4.2.3 Aplicación de la metaheurística Búsqueda tabú

Para aplicar la metaheurística Búsqueda tabú, se utiliza como solución inicial, la mejor solución obtenida por el algoritmo 2-opt (solución A) y una solución aleatoria (solución B), las cuales se observan en la Tabla 12.

Como parámetros de entrada se utiliza una memoria tabú igual a tres movimientos y el criterio de parada se define para cada día como el doble de las iteraciones posibles, dando así los valores de 12 ($4C2=6*2$) para el lunes,

20 ($5C2=10*2$) para el martes, 12($4C2=6*2$) para el miércoles y 6 ($3C2=3*2$) para el jueves.

Como en el numeral anterior, para el día viernes no se aplica el algoritmo de Búsqueda tabú, ya que con los algoritmos utilizados anteriormente se establecen todas las posibles rutas que se pueden obtener, haciendo innecesaria la aplicación de la metaheurística.

Tabla 12. Soluciones de partida para la metaheurística Búsqueda Tabú.

	SOLUCIONES DE PARTIDA PARA EL ALGORITMO BÚSQUEDA TABÚ		DISTANCIA (Unidades de medida)
LUNES	Solución A	24-21-9-8-26-24	372,8
	Solución B	24-8-9-21-26-24	379,2
MARTES	Solución A	24-26-8-9-16-21-24	377,8
	Solución B	24-9-16-21-8-26-24	520
MIERCOLES	Solución A	24-12-9-8-26-24	382,8
	Solución B	24-8-12-9-26-24	430
JUEVES	Solución A	24-27-8-9-24	347
	Solución B	24-8-9-27-24	347

Tabla 13. Soluciones mejoradas por la metaheurística Búsqueda tabú.

	SOLUCIONES MEJORADAS POR EL ALGORITMO BUSQUEDA TABU		DISTANCIA (Unidades de medida)
LUNES	Solución A	24-21-9-8-26-24	372,8
	Solución B	24-21-9-8-26-24	372,8
MARTES	Solución A	24-26-8-9-16-21-24	377,8
	Solución B	24-21-16-9-8-26-24	377,8
MIERCOLES	Solución A	24-12-9-8-26-24	382,8
	Solución B	24-26-8-9-12-24	382,8
JUEVES	Solución A	24-27-8-9-24	347
	Solución B	24-8-9-27-24	347

De acuerdo a la Tabla 13, se tienen las siguientes rutas:

- Lunes: 372,8 unidades de medida (Ver Figura 1 del Anexo 36).
- Martes: 377,8 unidades de medida. (Ver Figura 2 del Anexo 36).
- Miércoles: 382,8 unidades de medida. (Ver Figura 3 del Anexo 36).
- Jueves: 347 unidades de medida. (Ver Figura 4 del Anexo 36).

4.3 CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS

Al definir los nodos para este caso, los cuales se establecieron en el capítulo 2, se genera una matriz de distancias al igual que para los casos anteriores. Sin embargo, en este caso se trabaja con un grafo incompleto, asimétrico y dirigido como se muestra en el Anexo 37.

4.3.1 Modelamiento usando métodos exactos

4.3.1.1 Aplicación del método de Branch and Bound para el problema del vendedor viajero para un agente (TSP)

El caso de recolección de residuos se plantea como un TSP, ya que sólo se requiere de un repartidor que cuenta con una capacidad ilimitada y debe visitar una única vez cada punto de recolección. Sin embargo, al correr el modelo no se encuentra una solución, debido a que algunos nodos deben ser visitados más de una vez por la limitante generada por las orientaciones de las vías de la universidad.

Por otro lado, no es posible realizar un ciclo hamiltoniano debido a que la red es muy pequeña y asimétrica y no se cuenta con varias opciones para ir de un nodo a otro. Además, en algunos casos, sólo existe una forma de llegar a los nodos, lo que ocasiona repetición de caminos violando las restricciones del modelo del TSP.

Al modelar el caso a través de Programación Lineal Entera Binaria sólo fue posible encontrar solución con el Solver de Excel (que utiliza el método exacto de Branch and Bound) adaptando las restricciones a las particularidades del caso. Para este caso de estudio no se aplicaron las heurísticas y la metaheurística utilizada en los casos anteriores, ya que se violan las restricciones del problema del agente viajero y que no se puede formar un ciclo hamiltoniano.

Para este caso se tienen las siguientes consideraciones para un número de nodos $N=\{1,2,\dots,32\}$

Función objetivo:

$$\mathbf{Min} Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}, \quad \forall i, j \in N \setminus \{9,12,24,31\}, j \neq i$$

Sujeta a las restricciones:

- Indica que el vehículo no puede entrar al nodo 1, ya que este es el nodo origen y sólo se considera como el punto de partida del vehículo (diferente al nodo de llegada, que es el nodo 11).

$$\sum_{i=1}^{32} x_{i1} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{1,9,12,24,31\}$$

- Indican aquellos nodos a los cuales el vehículo puede entrar y salir hasta dos veces (por cuestiones del problema).

$$\sum_{i=1}^{32} x_{ij} \leq 2, \quad \forall i \in N \setminus \{9,12,24,31\}, i \neq j$$

Donde $j = 2,4,5,11,17, 18,21,22 ,23$ y 32.

$$\sum_{j=1}^{32} x_{ij} \leq 2, \quad \forall j \in N \setminus \{9,12,24,31\}, i \neq j$$

Donde $i = 2,4,5, 17,18,21,22,23$ y 32.

- Restricción que permite escoger o descartar una arista, ya que hay nodos que pueden conectarse con otros que no son centros de acopio y el objetivo es que se tome la opción que facilite la actividad de recolección de residuos sólidos.

$$\sum_{j=1}^{32} x_{8j} \leq 1, \quad \forall j \in N \setminus \{8,9,12,24,31\}$$

$$\sum_{i=1}^{32} x_{i8} \leq 1, \quad \forall i \in N \setminus \{8,9,12,24,31\}$$

Para este método, no se incluyen los nodos 9, 12, 24 y 31, ya que estos sólo tienen un nodo al cual se conectan.

Al iterar en el Solver de Excel se genera un valor de 943 unidades de medida para la función objetivo; a este valor se le adicionan las distancias correspondientes a las aristas 11-12, 9-6, 24-23 y 30-31 (de los nodos excluidos), obteniendo una distancia total de 1062, 2 unidades de medida. Este recorrido se muestra en el Anexo 38.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos al aplicar los algoritmos estudiados. Además, se comparan las mejores soluciones encontradas con las rutas empleadas actualmente en cada uno de los casos examinados en la Universidad Industrial de Santander, para finalmente definir la efectividad de los métodos utilizados.

5.1 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA

5.1.1 Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.

En el Anexo 39 se muestran las dependencias visitadas actualmente por cada uno de los repartidores. Las rutas que cada uno utiliza pueden observarse en el mapa que se encuentra en el Anexo 40, cuyas distancias totales son:

- Ruta 1: 467,8 unidades de medida.
- Ruta 2: 591,1 unidades de medida.
- Ruta 3: 336,0 unidades de medida.

Dando una distancia total de 1394,9 unidades de medida.

5.1.2 Ruta propuesta para el caso de la distribución de la correspondencia.

La ruta propuesta consiste en la mejor solución obtenida por los algoritmos estudiados. En la Tabla 14, se realiza la comparación de las rutas obtenidas por cada uno de ellos.

Por tanto, la ruta propuesta para este caso es la obtenida por el algoritmo 2-opt. Las rutas de esta solución se muestran en el Anexo 23 y Anexo 24.

Tabla 14. Comparativo de los algoritmos y métodos utilizados para el caso de la distribución de la correspondencia.

METODOS		Distancia por ruta	Distancia total
EXACTO	Branch and Bound aplicado al m-TSP	No se encontró solución	----
HEURÍSTICAS	Algoritmo del vecino más cercano	577,8 454,2 423,12	1455,12
	Algoritmo de barrido	493,1 654,2 568	1715,3
	Algoritmo de ahorros	545 435 422	1402
	Mejora del algoritmo de ahorros ($\lambda=0,8$)	521 435 394	1350
	Algoritmo 2-opt	521 422 378	1321
METAHEURÍSTICA	Búsqueda tabú	521 422 378	1321

5.1.3 Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.

Tabla 15. Comparativo de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de la correspondencia.

	Ruta propuesta	Ruta actual	Diferencia
	521	467,8	(+) 53,2
	422	591,1	(-) 169,1
	378	336	(+) 42
Total	1321	1394,9	(-) 73,9

Al comparar la ruta propuesta con la ruta actual, se observa que hay una reducción de 73,9 unidades de medida con respecto a la ruta actual, tal como se muestra en la Tabla 15.

5.2 CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

5.2.1 Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.

Las rutas empleadas por los repartidores encargados de la División de Bienestar Universitario para cada uno de los días de la semana se presentan en el Anexo 41, cuyas distancias correspondientes son:

- Lunes: 372,8 unidades de medida (Ver Figura 1 del Anexo 42).
- Martes: 378,2 unidades de medida (Ver Figura 2 del Anexo 42).
- Miércoles: 382,8 unidades de medida (Ver Figura 3 del Anexo 42).
- Jueves: 347,0 unidades de medida (Ver Figura 4 del Anexo 42).
- Viernes: 299,0 unidades de medida (Ver Figura 5 del Anexo 42).

5.2.2 Ruta propuesta para el caso de la distribución de los almuerzos.

A partir de la Tabla 16 se evalúan las soluciones encontradas con todos los algoritmos y se obtiene que, para cada día, las soluciones o rutas propuestas son:

- Lunes: 372,8 unidades de medida.
- Martes: 377,8 unidades de medida.
- Miércoles: 382,8 unidades de medida.
- Jueves: 347,0 unidades de medida.
- Viernes: 299 unidades de medida.

Tabla 16. Comparativo de las rutas halladas por los diferentes métodos utilizados en el caso de la distribución de los almuerzos.

MÉTODO		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Exacto	Branch and Bound aplicado al CVRP	372,8	377,8	382,8	347	299
	Branch and Bound aplicado al VRPTW	-----	-----	-----	-----	-----
Heurísticas	Algoritmo del Vecino más Cercano	394,2	399,2	382,8	347	299
	Algoritmo de Barrido	372,8	377,8	382,8	347	299
	Algoritmo de Ahorros	372,8	377,8	382,8	347	299
	Mejora algoritmo ahorros	372,8	377,8	389,2	347	299
	Algoritmo 2-Opt	372,8	377,8	382,8	347	-----
Metaheurística	Búsqueda Tabú	372,8	377,8	382,8	347	-----

5.2.3 Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.

Al comparar la ruta propuesta con la ruta actual se observan los resultados que se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17. Comparativo de la ruta propuesta vs. Ruta actual para el caso de la distribución de los almuerzos.

	Ruta propuesta	Ruta actual	Diferencia
Lunes	372,8	372,8	0
Martes	377,8	378,2	(-) 0,4
Miércoles	382,8	382,8	0
Jueves	347	347	0
Viernes	299	299	0
		Total	(-)0,4

Se muestra una disminución de 0,4 unidades de medida en las rutas de la semana, dando una mejora significativa en el día martes.

5.3 CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS

5.3.1 Ruta actual para el caso de la recolección de residuos sólidos.

En el Anexo 43, se muestran los puntos de recolección y las intersecciones utilizadas para esta labor, así como la secuencia de la ruta utilizada actualmente por la División de Planta Física. La ruta que se tiene planteada para la recolección de residuos sólidos se muestra en el Anexo 44 y su mapa correspondiente puede observarse en el Anexo 45, cuya distancia es 1129 unidades de medida.

5.3.2 Ruta propuesta para el caso de la recolección de residuos sólidos.

Como ruta propuesta se toma la solución obtenida al aplicar el método de Branch and Bound utilizando el Solver de Excel, la cual genera una distancia total de 1062,2 unidades de medida, cuya ruta se muestra en el Anexo 46.

5.3.3 Comparación de la ruta propuesta vs. Ruta actual

Al comparar la ruta propuesta con la ruta actual se observa una reducción de 66,8 unidades de medida con respecto a la ruta actual.

Tabla 18. Comparación de la ruta propuesta y la actual para el caso de la recolección de residuos.

Ruta propuesta	Ruta actual	Diferencia
1062,2 unidades de medida	1129 unidades de medida.	(-) 66,8 unidades de medida.

6. MANUAL DEL PROGRAMA MHVRP

El objetivo que se persigue con la elaboración del siguiente manual es ofrecer una guía para que el usuario pueda manejar la interfaz desarrollada en este proyecto y así las dependencias estudiadas puedan apoyar sus actividades de recolección y distribución teniendo en cuenta la optimización de recursos como el tiempo y distancia utilizados en los recorridos realizados por las personas encargadas.

A continuación, se muestran los requerimientos que el usuario debe tener en cuenta para manejar el programa, su alcance y las limitaciones de funcionamiento.

6.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Durante la realización de este proyecto se desarrolló un programa en Matlab con el objetivo de tener una herramienta que facilitará la aplicación de la metaheurística Búsqueda Tabú y las heurísticas estudiadas: Vecino más Cercano, Algoritmo de Barrido, Algoritmo de 2-opt, Algoritmo de Ahorros (o Clarke and Wright) y Algoritmo de Ahorros mejorado; para este último, el programa tiene la opción de variar el valor del parámetro de forma de la ruta (λ), lo que facilita la búsqueda y obtención de la mejor solución para este algoritmo.

Los parámetros de entrada para el programa dependen del algoritmo que se quiera utilizar; en el numeral 6.3.4 se explica la forma de ingresarlos. Una vez se cuente con los datos de entrada, el programa genera las rutas de la solución, su respectivo grafo de solución y la distancia total recorrida para cada una de ellas.

6.1.1 Alcance

El programa en Matlab está diseñado para resolver un problema con una cantidad de hasta 100 nodos, con demanda variable y alta capacidad de entrega de cada repartidor, en un tiempo computacional admisible. A partir de esta cantidad de nodos, el tiempo computacional consumido por el programa adquiere alta significancia.

Nota: Para la aplicación de algoritmo 2-opt se debe contar con una red de más de 4 nodos para que el programa arroje una solución factible. Por otro lado, es importante tener en cuenta que el tiempo computacional del algoritmo de Búsqueda tabú es significativo en comparación con el requerido por los otros algoritmos.

6.1.2 Usuarios finales

Este programa fue orientado hacia los encargados de la División de Correspondencia y Bienestar Universitario, quienes pueden utilizar la herramienta como apoyo en sus actividades de distribución y recolección, buscando generar ahorros en tiempo y distancia, además de facilitar sus actividades de logística. Es importante tener en cuenta que para la utilización de este software se requiere de un conocimiento previo de los temas y de los algoritmos aplicados.

Por otro lado, la herramienta queda a disposición de estudiantes y profesores que, con fines académicos, estén interesados en los procesos logísticos así como en los problemas de optimización combinatoria.

6.2 REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA

Los requerimientos necesarios para el correcto funcionamiento del programa son los que se necesitan para instalar la aplicación matlab 2010. El computador debe cumplir con las siguientes características básicas:

- ❖ CPU con procesador compatible x86
- ❖ Memoria RAM: Al menos de 1GB
- ❖ Disco duro: 6 GB (espacio necesario para la instalación)
- ❖ Sistema operativo: Windows XP, Vista, 7.

6.3 PASOS PARA EL FUNCIONAMIENTO DE LA INTERFAZ

6.3.1 *Conociendo el programa*

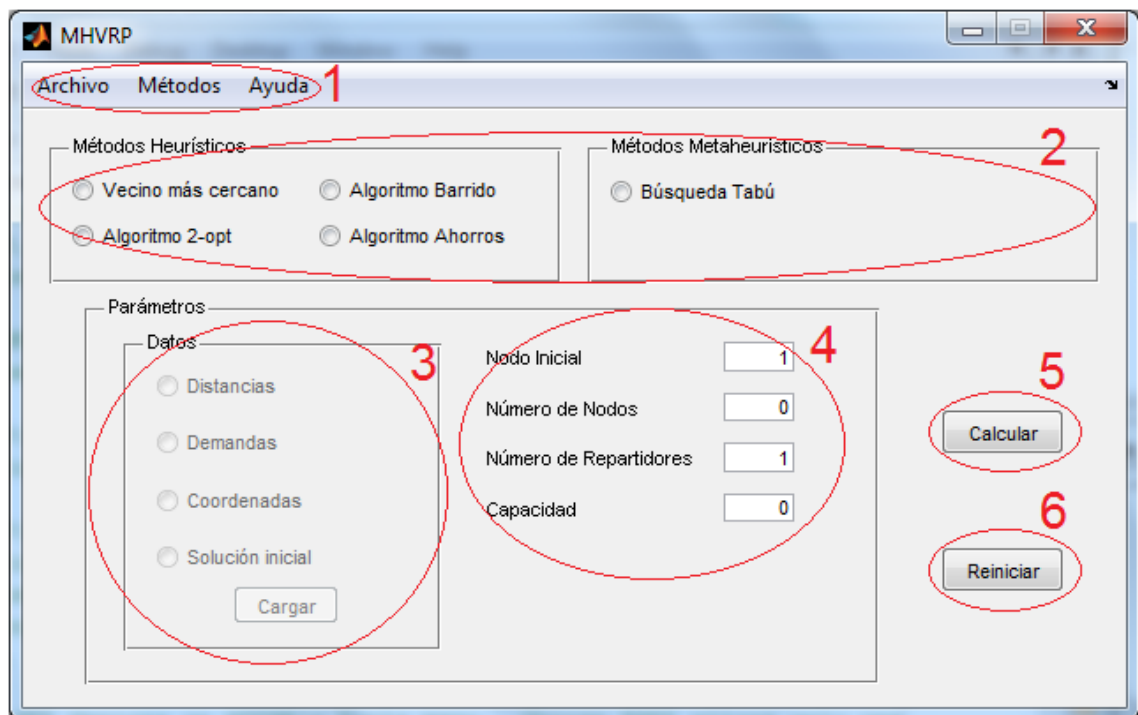
Al momento de abrir el programa en Matlab, aparece una ventana como la que se muestra en la figura 19. En ella se escoge el algoritmo a trabajar y se ingresan los parámetros de entrada necesarios para cada caso.

6.3.2 *Menú*

En la barra menú del programa MHVRP (ver número 1 de la figura 19) se encuentran:

- Archivo: Al dar click sobre este botón aparece la opción “salir del programa”.
- Métodos: Al abrir este menú, se despliegan los métodos heurísticos y la metaheurística programados para su aplicación y modelamiento. Estos métodos pueden ser seleccionados de igual forma por medio de la interfaz como se muestra en el número 2 de la figura 19.
- Ayuda: En este botón se encuentra la opción Acerca de MHVRP, donde se presenta la información del programa.

Figura 19. Ventana que muestra los algoritmos y parámetros necesarios para el funcionamiento del programa MHVRP.



6.3.3 Métodos

El programa sólo trabaja un algoritmo a la vez (ya sea heurística o metaheurística), por lo que no se permite señalar más de uno, como se muestra en el número 2 de la figura 19. Dependiendo del algoritmo escogido, se activan los parámetros que se deben ingresar para éste. Es así que, por ejemplo para el algoritmo de Vecino más Cercano, se activan los datos: *Distancias* y *Demandas*, mientras que *Coordenadas* y *Solución inicial* permanecen desactivados. Del mismo modo funcionan los parámetros: *Número de iteraciones* y *memoria Tabú*, los cuales aparecen exclusivamente al elegir la metaheurística Búsqueda Tabú.

6.3.4 Datos de entrada

6.3.4.1 Inclusión de los parámetros directamente en el programa

Los parámetros de la derecha se ingresan dando click en el recuadro y escribiendo el valor correspondiente para cada uno, como señala el número 4 en la figura 19.

Nota: Para el ingreso del valor del parámetro de forma (en el caso del algoritmo de ahorros mejorado) el separador de decimal utilizado es el punto (no la coma).

6.3.4.2 Importación de los datos requeridos desde Microsoft Office Excel

Los parámetros de la izquierda (ver número 3 en la figura 19) siempre deben ser cargados desde Microsoft Office Excel, por lo que previamente se debe organizar la información de la forma como se explica en el numeral 6.3.5.

Teniendo organizados los datos de la forma expuesta, se puede iniciar la importación de la información. Así, al escoger uno de los parámetros de la izquierda (número 3 en la figura 19), por ejemplo *Distancias*, se activa el botón *cargar*. Al seleccionarlo, se despliega una ventana emergente, como la mostrada en la figura 20, en la que se pide buscar el archivo que tiene el parámetro seleccionado, así como la hoja en la que se encuentra.

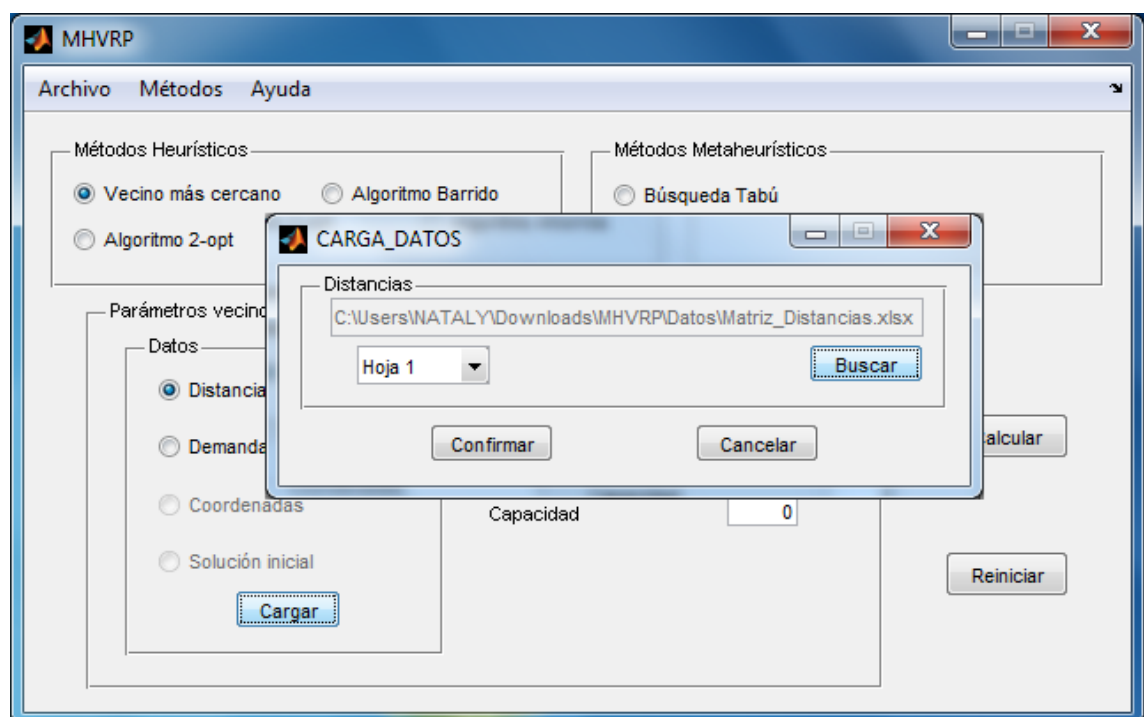
A continuación, se da click en *confirmar*, con lo que se cargan los datos en Matlab y se devuelve a la ventana principal del programa. Este proceso puede tardar algunos segundos.

NOTA: Al ingresar la matriz de distancias, el programa actualiza el parámetro *Número de nodos* automáticamente según la cantidad de nodos que se incluyan en esa matriz.

6.3.5 Ubicación y organización de los datos en archivo de microsoft office excel

Para que el programa se ejecute correctamente se deben organizar los datos en excel. Por esta razón, a continuación se indica la forma como se debe guardar la información de cada uno de los parámetros de la izquierda, que posteriormente será exportada al programa en Matlab.

Figura 20. Ventana emergente para buscar e importar los datos que están en Microsoft Office Excel.



6.3.5.1 Distancias.

Los nodos siempre se van a nombrar por medio de números, por lo que la Matriz de Distancias se debe guardar en Microsoft Office Excel en orden numérico, es decir, los números de las filas y las letras de las columnas de la hoja de Excel representan los nodos, por ejemplo 1A indica ir del nodo 1 al nodo 1, 1B significa ir del nodo 1 al nodo 2 y así sucesivamente, ver figura 21.

6.3.5.2 Demandas.

Las demandas de todos los nodos se incluyen en la primer fila del documento de Excel en su respectivo orden, es decir, en la primera celda se escribe la demanda del nodo 1, en la segunda la demanda del nodo 2 y así sucesivamente, como se muestra en la figura 22.

Nota: Cuando un nodo no presente demanda se debe asignar un valor de cero (0) en la celda relacionada al mismo.

Figura 21. Matriz de Distancias guardada en un archivo de Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1000	32	91	75	91	86	87	98	97	108	104	140	162	129,12
2	32	1000	63	54	87	65	66	77	76	87	83	119	141	126,12
3	91	63	1000	43	28	96,6	97,6	108,6	126,6	118,6	114,6	150,6	172,6	157,72
4	75	54	43	1000	51	35	36	47	65	57	53	89	111	96,12
5	91	87	28	51	1000	88	89	100	117	110	106	142	164	149,12
6	86	65	96,6	35	88	1000	13	24	41	34	30	66	88	75
7	87	66	97,6	36	89	13	1000	14	34	35	31	67	89	61
8	98	77	108,6	47	100	24	14	1000	23	46	42	78	100	84
9	97	76	126,6	65	117	41	34	23	1000	38	39	70	92	90
10	108	87	118,6	57	110	34	35	46	38	1000	32	36	58	57
11	104	83	114,6	53	106	30	31	42	39	32	1000	64	86	65
12	140	119	150,6	89	142	66	67	78	70	36	64	1000	28	42
13	162	141	172,6	111	164	88	89	100	92	58	86	28	1000	20
14	129,12	126,12	157,72	96,12	149,12	75	61	84	90	57	65	42	20	1000
15	129	108	139,6	75	131	53	56	67	70	63	45	48	61	23
16	136,5	101,5	133,1	86,5	124,5	68	69	80	83	67	61	52	69	27
17	98	77	87,6	30	79	48	49	60	78	70	66	102	130	84,12
18	119	84	116,4	57,6	87	55	56	67	85	77	68,4	70	87	45
19	135	100	107,78	69,78	99,18	71	72	83	101	93	74,3	82	78	57
20	131,2	110,2	105,6	57,8	87,2	81,2	82,2	93	111,2	103,2	89	84	94	59
21	148,1	127,1	152,8	97,1	155	103	104	115	118	92	86	81	76	70
22	151,1	130,1	123,8	96,6	115,2	101,1	102,1	113,1	132	106	106	101	90	84
23	173,4	154	117,6	112,1	109	123,4	124,4	135,4	153,4	142,7	141,8	136,8	125,8	119,8
24	167	146	107,6	95	99	117	118	129	147	139	137,5	154,8	143,8	137,8
25	156	135	96,6	84	88	106	107	118	136	128	126,5	147,2	136,2	122,2
26	155	134	95,4	83	87	105	106	117	135	127	125,5	149,2	102,2	124,2
27	145	124	85,6	73	77	95	96	107	125	117	121	149	161,2	155,2
28	42	38	64	91	88	86	93	104	103	114	110	144	168	153,12

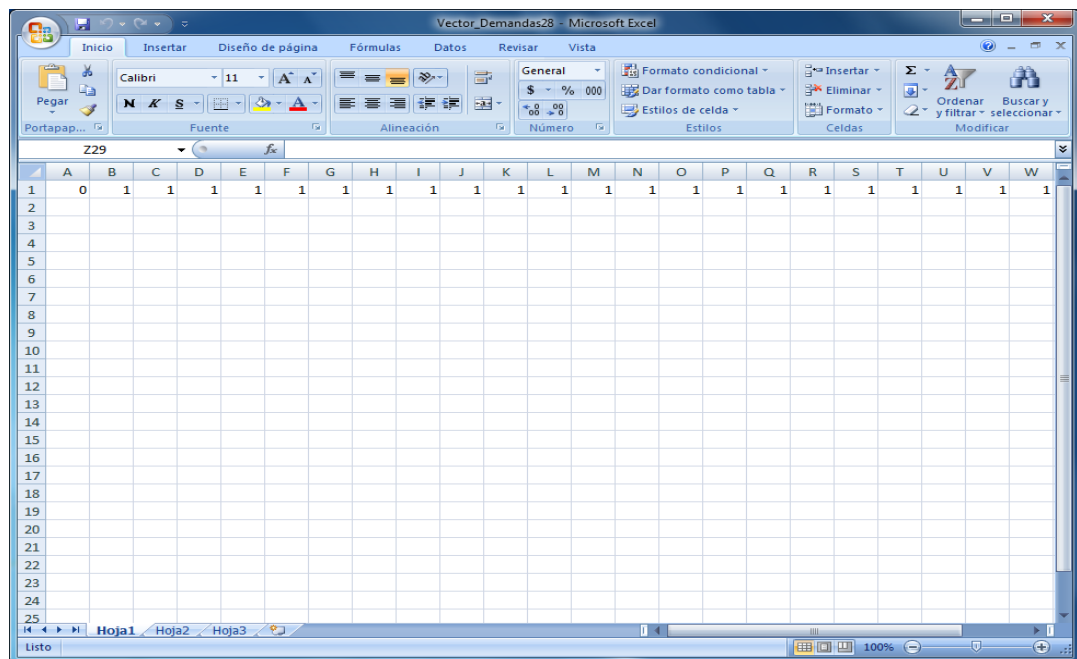
6.3.5.3 Coordenadas.

Las coordenadas se organizan por nodo en orden ascendente; en la primera columna se ubica la coordenada x y en la segunda la coordenada y, como se muestra en la figura 23.

6.3.5.4 Solución inicial.

La solución inicial se ubica en la primera fila de la hoja de Excel empezando y terminando con el nodo origen y en caso de que la solución cuente con más de una ruta, se deben encadenar todas las rutas sin dejar espacios en blanco entre ellas. Ver figura 24.

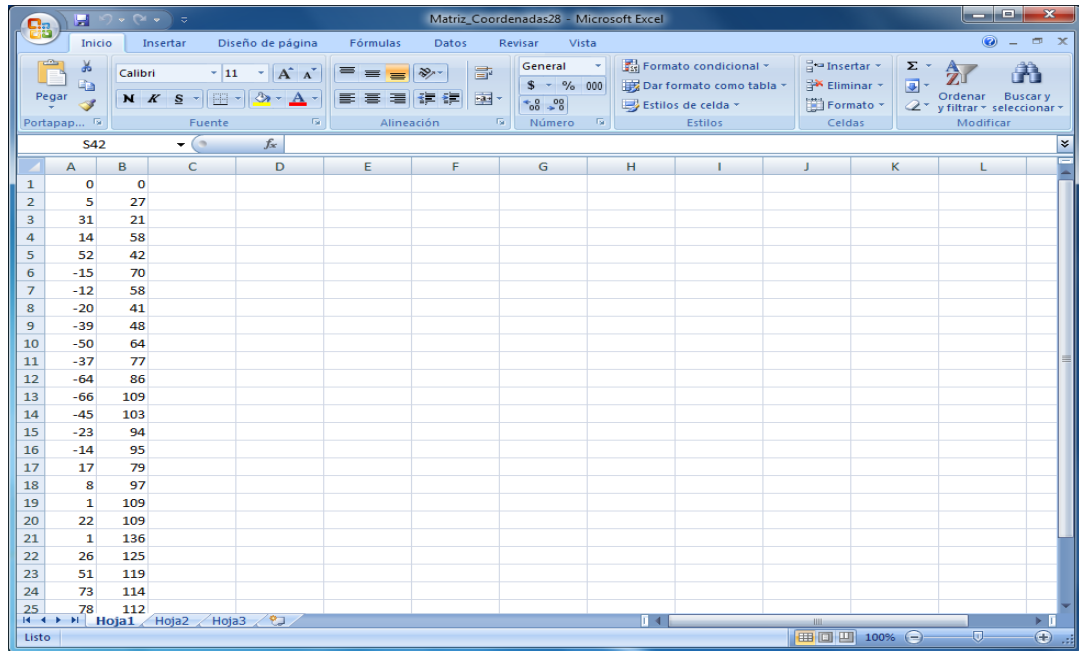
Figura 22. Vector de Demandas guardado en un archivo de Excel.



6.3.6 Procesamiento de datos y solución de los algoritmos

Después de haber ingresado todos los parámetros necesarios para el algoritmo escogido, se da click en *calcular* (ver número 5 de la figura 19) para que el programa posteriormente arroje la solución al correr el algoritmo especificado. Es así, que el programa genera la solución en una ventana emergente como la mostrada en la figura 25, en la cual se ubica el mapa con la(s) ruta(s) en la parte superior y la(s) ruta(s) en forma de vector en la parte inferior.

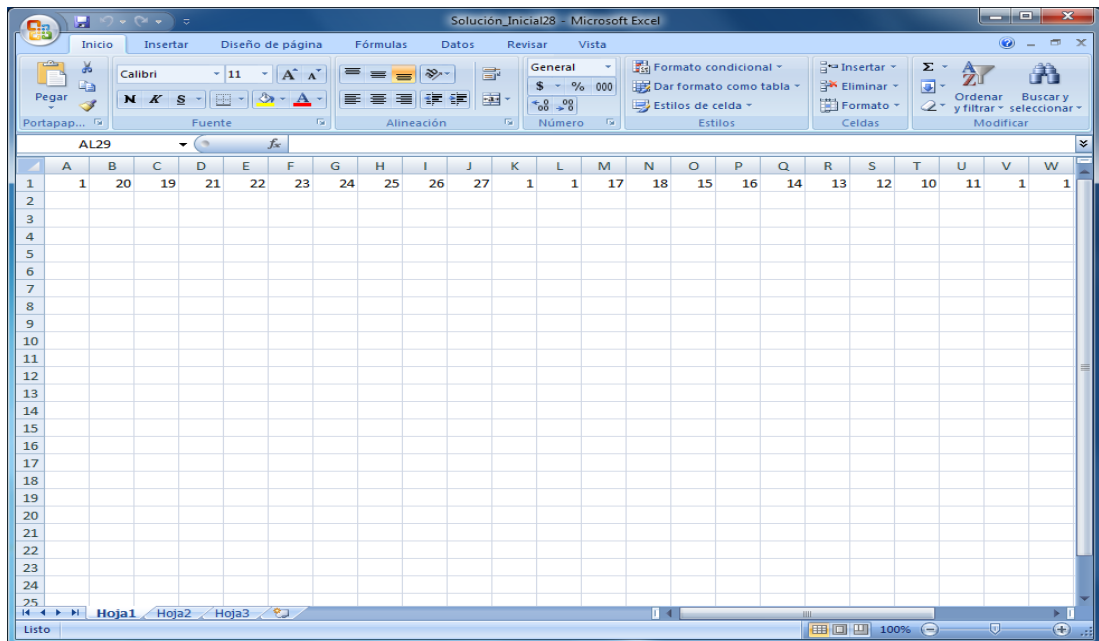
Figura 23. Tabla de Coordenadas guardada en un archivo de Excel.



The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the file name 'Matriz_Coordenadas28'. The spreadsheet contains a table of coordinates with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	0	0										
2	5	27										
3	31	21										
4	14	58										
5	52	42										
6	-15	70										
7	-12	58										
8	-20	41										
9	-39	48										
10	-50	64										
11	-37	77										
12	-64	86										
13	-66	109										
14	-45	103										
15	-23	94										
16	-14	95										
17	17	79										
18	8	97										
19	1	109										
20	22	109										
21	1	136										
22	26	125										
23	51	119										
24	73	114										
25	78	112										

Figura 24. Vector de la Solución Inicial guardada en un archivo de Excel.



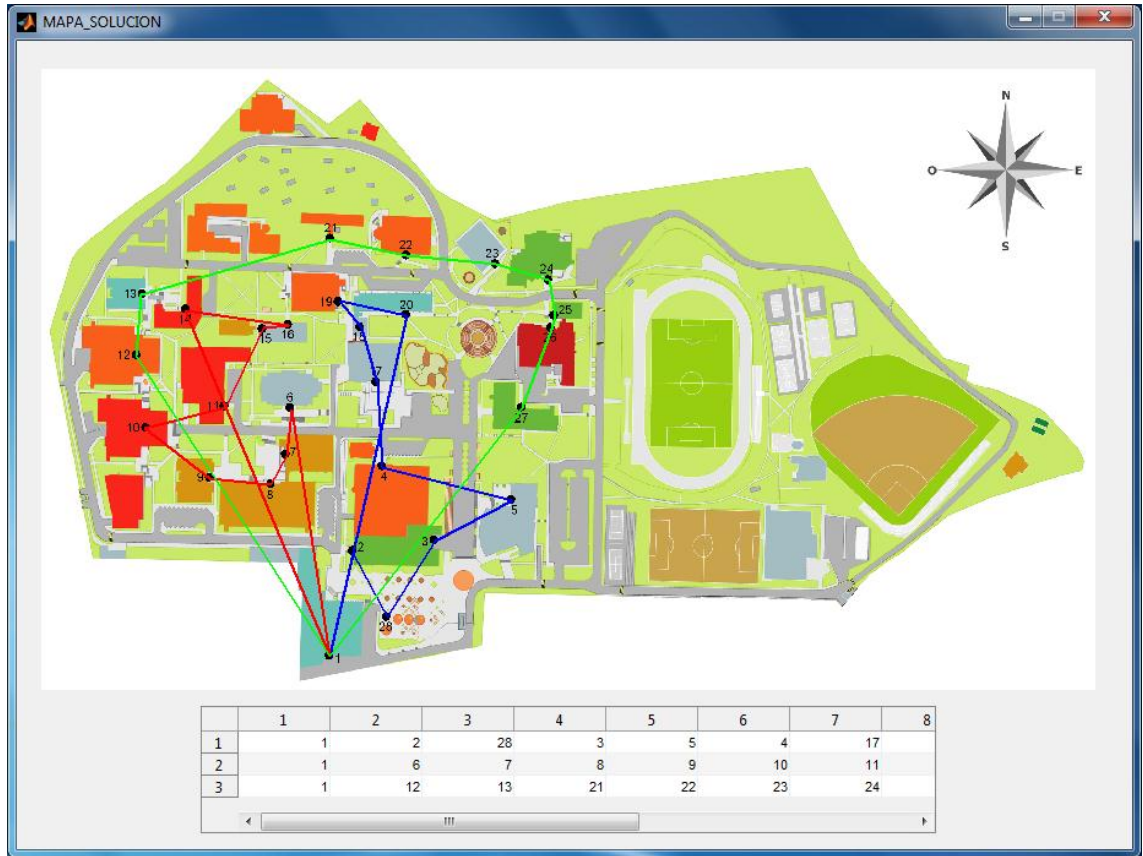
The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the file name 'Solución_Inicial28'. The spreadsheet contains a vector of initial solution values with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	
1	1	20	19	21	22	23	24	25	26	27	1	1	17	18	15	16	14	13	12	10	11	1	1	
2																								
3																								
4																								
5																								
6																								
7																								
8																								
9																								
10																								
11																								
12																								
13																								
14																								
15																								
16																								
17																								
18																								
19																								
20																								
21																								
22																								
23																								
24																								
25																								

6.3.7 Botón de reinicio

Este botón es el que permite la limpieza total del programa, es decir, al dar click sobre él se borra toda la información que se haya ingresado al programa para poder cambiar los datos o parametros de entrada. Ver número 6 de la figura 19.

Figura 25. Ventana emergente que muestra la solución obtenida por el programa para el algoritmo Vecino más cercano.



7. CONCLUSIONES

- En el presente trabajo se estudiaron los temas y conceptos relacionados con el Problema de Ruteo de Vehículos y posteriormente se aplicaron a problemas reales en la universidad. Para cada caso se consideraron métodos exactos, algunas heurísticas y una metaheurística, con lo cual se obtuvo que los métodos exactos son de gran utilidad al tratarse de problemas pequeños, sin embargo, al aumentar el tamaño de los grafos usados, aumenta también el tiempo computacional requerido para su ejecución; por tanto, estos métodos se vuelven poco aplicables al trabajar con instancias grandes. Es por esto, que se recurre a los algoritmos heurísticos y metaheurísticos, los cuales permiten obtener una solución factible al problema en un tiempo de cálculo generalmente moderado.
- Los resultados propuestos para cada uno de los casos consistieron en la mejor solución obtenida al comparar las respuestas encontradas con el método exacto, heurísticas y metaheurísticas analizadas. Este estudio permite optimizar los recursos (tanto de tiempo como distancia) de las divisiones de la Universidad Industrial de Santander y por tanto mejorar el servicio proporcionado por cada una de ellas.
- Para el caso de distribución de la correspondencia se observa que la mejor solución es la obtenida por medio de la heurística 2-opt, mientras para el caso de Distribución de almuerzos, todos los algoritmos (salvo algunas excepciones) dieron el mismo resultado que el método exacto, es decir, la solución óptima.
- A pesar de que las características de la red de distribución del caso de la recolección de residuos no permitieron trabajarlo como un Problema del vendedor viajero, con el empleo del método de Branch and Bound

(mediante el uso del Solver de Excel) se obtuvo una mejora de 66,8 unidades de medida en comparación con la ruta utilizada actualmente.

- La aplicación de los algoritmos heurísticos y la metaheurística en los casos establecidos surgió por la necesidad de encontrar soluciones factibles que permitieran una mejora a la forma actual de asignar las rutas en cada una de las divisiones involucradas y también para facilitar la contextualización de los temas estudiados. Así mismo, se desarrolló el programa en Matlab para brindar una herramienta informática que proporcionara un apoyo a la investigación y a los análisis posteriores por parte de la comunidad universitaria, ya sea con fines académicos o logísticos.

8. RECOMENDACIONES

- Para el estudio del Problema de Ruteo de Vehículos o VRP se requiere en primer lugar de la comprensión de la terminología propia del problema, así como de su funcionalidad y de sus variaciones. Además, es importante conocer los casos de aplicación y sus características propias, con el fin de utilizar los métodos más apropiados para cada uno de ellos.
- Para la elaboración de la matriz de distancias entre los nodos (punto de partida para la aplicación de los algoritmos utilizados en el presente trabajo) es necesario definir el tipo de grafo a utilizar (teniendo en cuenta las características del caso), los puntos de distribución o de recolección y la conectividad entre los nodos. La complejidad de un sistema de distribución se determina con las características de su red o grafo.
- El programa elaborado en Matlab es considerado como una primera versión que facilita la aplicación de algunos algoritmos heurísticos y una metaheurística. Sin embargo, se recomienda continuar el estudio de éstos y de otros métodos, con el fin de ampliar la gama de opciones del software y fortalecer el conocimiento y el dominio de los temas relacionados con el Problema de Ruteo de Vehículos.
- Debido a que los métodos utilizados pueden variar su ejecución de acuerdo al tamaño de las instancias y a las características propias de cada caso, se recomienda indagar más sobre ellos y aplicarlos a problemas diferentes con el fin de analizar patrones de comportamiento o evaluar los resultados obtenidos para poder ofrecer opciones de mejora para los mismos.

BIBLIOGRAFIA

CONTRERAS, C., DÍAZ, M., Métodos Heurísticos para la solución de problemas de ruteo de vehículos con capacidad [Proyecto de grado]. Universidad Industrial de Santander, 2010.

COTO, E.; Algoritmos básicos de grafos (Tesis Pregrado); Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Computación. Laboratorio de Computación Gráfica (LCG); Venezuela, 2003.

DAZA, M., MONTOYA, J., NARDUCCI, F., Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases; Revista EIA, ISSN 1794-1237 Número 12. Diciembre 2009.

GÁLÁN, M. Árboles ponderados. Algoritmos de Prim y Kruskal. Disponible en: http://www.matap.uma.es/profesor/magalan/MatDis/material/ArbolesTema6_2_MatDiscreta.pdf.

GONZÁLEZ, G., GONZÁLEZ, F., Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema. Ingeniería e Investigación, diciembre, año/Vol. 26, Número 003. Universidad Nacional de Colombia.

HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.; Introducción a la investigación de operaciones. Octava edición. México, Mc Graw Hill, 2006.

MARTÍ, R., Procedimientos heurísticos en optimización combinatoria, Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia. Disponible en: <http://www.uv.es/rmarti/paper/docs/heur1.pdf>.

MELIÁN, B. PÉREZ, J. Metaheurísticas: una visión global. Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. N.19 pp. 7-28 ISSN: 1137-3601. © AEPIA (2003).

OLIVERA, A., Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos. Instituto de computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. Agosto 2004.

PERTUZ, A. y ROJAS, K. Formulación y evaluación de un algoritmo, basado en la meta-heurística “Búsqueda Tabú” para la optimización del ruteo de vehículos con capacidad. Tesis de grado; Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2007.

RÍOS, R., GONZÁLEZ, J., Investigación de operaciones en acción: heurísticas para la solución del TSP, Ingenierías, Octubre-Diciembre 2000, Vol. III, No.9.

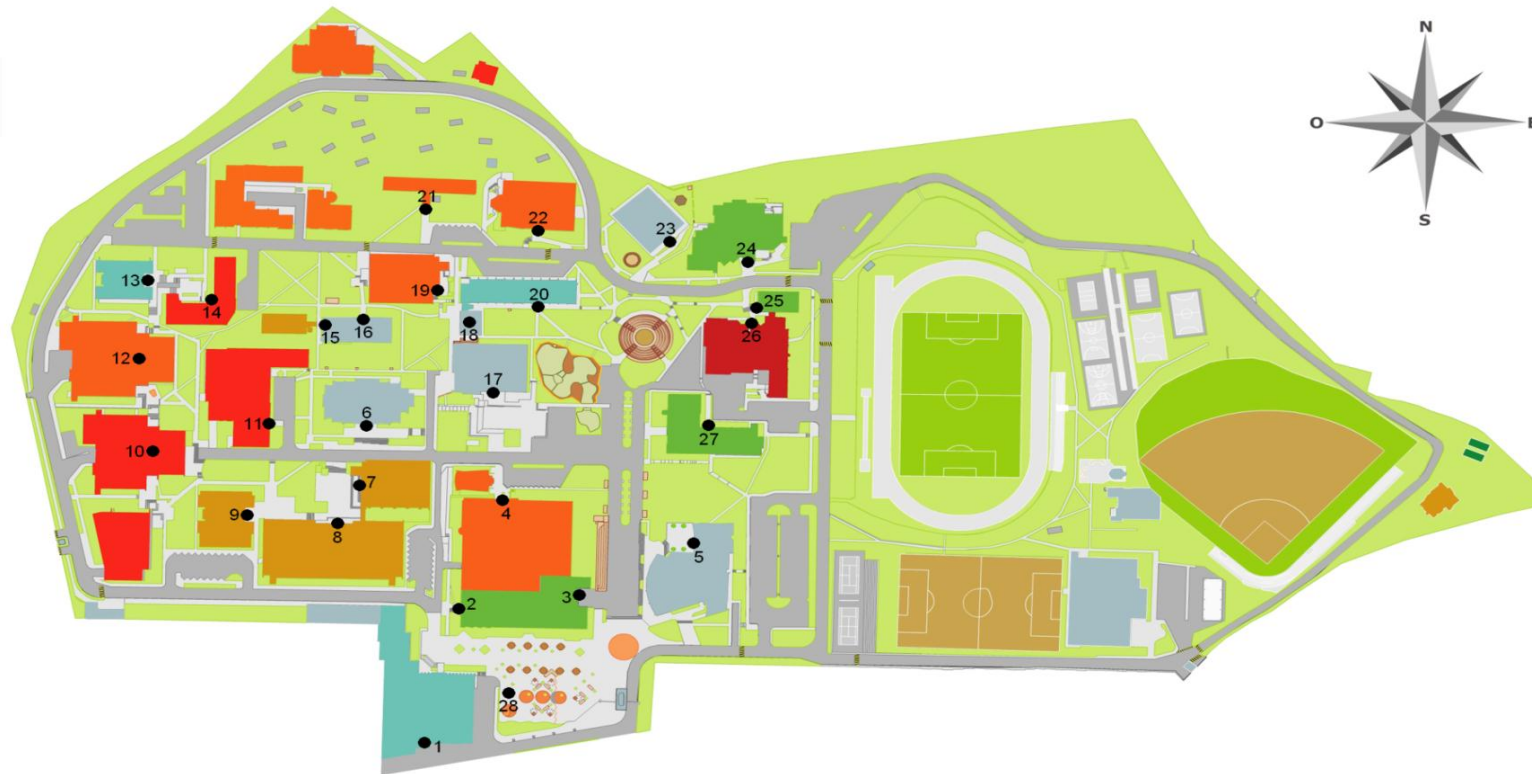
SANDOYA, F.; Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Escuela Superior Politécnica del Litoral, Décimo Cuarta Jornada en Estadística e Informática, Ecuador, 2007.

TOTH, P., VIGO, D., The Vehicle Routing Problem, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications.

YEPES, V., MEDINA, J.; Optimización económica de redes de transporte del tipo VRPTW, Revista de obras públicas, Septiembre 2003/N° 3.436.

ANEXOS

ANEXO 1. MAPA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER CON LOS NODOS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA Y REPARTICIÓN DE LOS ALMUERZOS



ANEXO 2. DESCRIPCIÓN DE LOS NODOS UTILIZADOS EN EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA CORRESPONDENCIA Y REPARTICIÓN DE LOS ALMUERZOS

Nodo	Dependencia
1	División de correspondencia y Ciencias Humanas
2	Mantenimiento y planta física
3	Banco
4	Ingeniería Mecánica
5	División Cultural/Auditorio L.A Calvo
6	Centic
7	Edificio Camilo Torres
8	Laboratorio de Livianos
9	Laboratorio de Posgrados
10	Edificio Facultad de Ingenierías Físico Químicas
11	Edificio de Ingeniería Química
12	Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas
13	Edificio Daniel Casas
14	CEIAM
15	Favuis
16	Capruis
17	Biblioteca
18	Conmutador (cafetería)
19	Edificio de Diseño Industrial
20	Instituto de lenguas
21	Edificio de Ingeniería Electrica
22	Edificio de Ingeniería Industrial
23	Aseduis - Casona la Perla
24	Edificio de Bienestar Universitario
25	Edificio de Administración II
26	Edificio Insed/Publicaciones
27	Edificio Administración I - Entrada principal
28	Tienda Universitaria

**ANEXO 3. DEMANDA DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR
UNIVERSITARIO DEL MES DE MARZO DE 2011**

Tabla 1. Demanda de almuerzos de la primera semana de Marzo de 2011.

SEMANA	DÍA	DEPENDENCIA	DEMANDA	TOTAL DIARIO
1	Martes	Laboratorio de Livianos	13	16
		División de correspondencia y Ciencias Humanas	3	
	Miércoles	División de correspondencia y Ciencias Humanas	3	6
		Laboratorio de Livianos	3	
	Jueves	Laboratorio de Livianos	12	12
	Viernes	Laboratorio de Livianos	4	4
	TOTAL SEMANAL:			

Tabla 2. Demanda de almuerzos de la segunda semana de Marzo de 2011.

SEMANA	DÍA	DEPENDENCIA	DEMANDA	TOTAL DIARIO
2	Lunes	Laboratorio de Livianos	2	10
		División de correspondencia y Ciencias Humanas	6	
		Edificio Insed/Publicaciones	1	
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	1	
	Martes	Edificio Administración I - Entrada principal	2	7
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	2	
		Laboratorio de Livianos	3	
	Miércoles	Laboratorio de Livianos	3	3
	Jueves	Edificio Administración I - Entrada principal	16	21
		Laboratorio de Livianos	5	
	Viernes	Edificio Administración I - Entrada principal	17	21
Laboratorio de Livianos		4		
TOTAL SEMANAL:				62

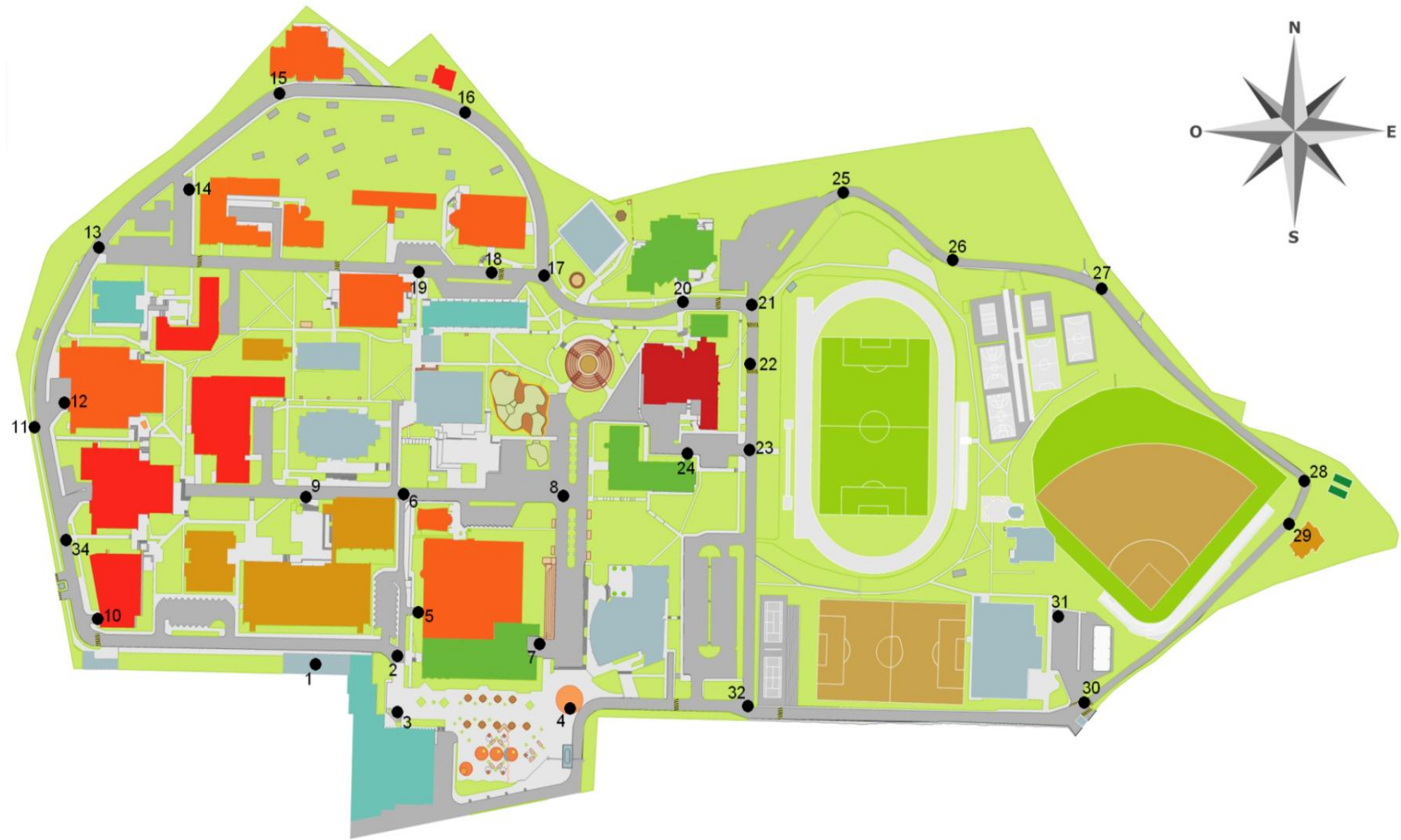
Tabla 3. Demanda de almuerzos de la tercera semana de Marzo de 2011.

SEMANA	DÍA	DEPENDENCIA	DEMANDA	TOTAL DIARIO
3	Lunes	Laboratorio de Livianos	5	5
	Martes	Edificio Insed/Publicaciones	1	23
		División de correspondencia y Ciencias Humanas	6	
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	10	
		Laboratorio de Livianos	6	
	Miércoles	División de correspondencia y Ciencias Humanas	8	44
		Edificio Facultad de Ingenierías Físico Químicas	10	
		Laboratorio de Livianos	11	
		Edificio de Ingeniería Electrica	9	
		Ingeniería Mecánica	2	
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	4	
	Jueves	Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	2	33
		Edificio Administración I - Entrada principal	3	
		Edificio Insed/Publicaciones	2	
		Ingeniería Mecánica	2	
		Edificio de Ingeniería Electrica	6	
		División de correspondencia y Ciencias Humanas	8	
		Edificio Facultad de Ingenierías Físico Químicas	10	
	Viernes	Edificio Facultad de Ingenierías Físico Químicas	25	48
		Edificio Administración I - Entrada principal	1	
		Edificio de Ingeniería Electrica	6	
		Edificio Insed/Publicaciones	2	
		División de correspondencia y Ciencias Humanas	7	
Laboratorio de Livianos		7		
TOTAL SEMANAL:				153

Tabla 4. Demanda de almuerzos de la cuarta semana de Marzo de 2011.

SEMANA	DÍA	DEPENDENCIA	DEMANDA	TOTAL DIARIO
4	Martes	Laboratorio de Livianos	4	14
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	10	
	Miércoles	Laboratorio de Livianos	2	3
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	1	
	Jueves	Laboratorio de Livianos	13	13
	Viernes	Laboratorio de Livianos	3	3
		Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas	20	20
		Edificio Administración I - Entrada principal	2	2
	TOTAL SEMANAL:			

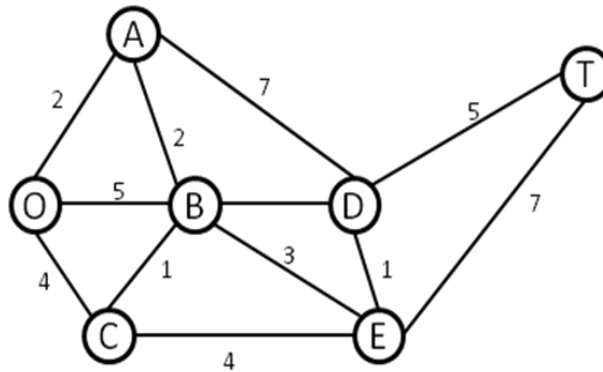
ANEXO 4. MAPA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER CON LOS NODOS PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS



ANEXO 5. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO DE KRUSKAL

A continuación se presenta el desarrollo de una aplicación del algoritmo de Kruskal:

Figura 1. Aplicación del Árbol de Expansión Mínima.



Fuente: HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.; Introducción a la investigación de operaciones. Octava edición. México, Mc Graw Hill, 2006, pp. 386.

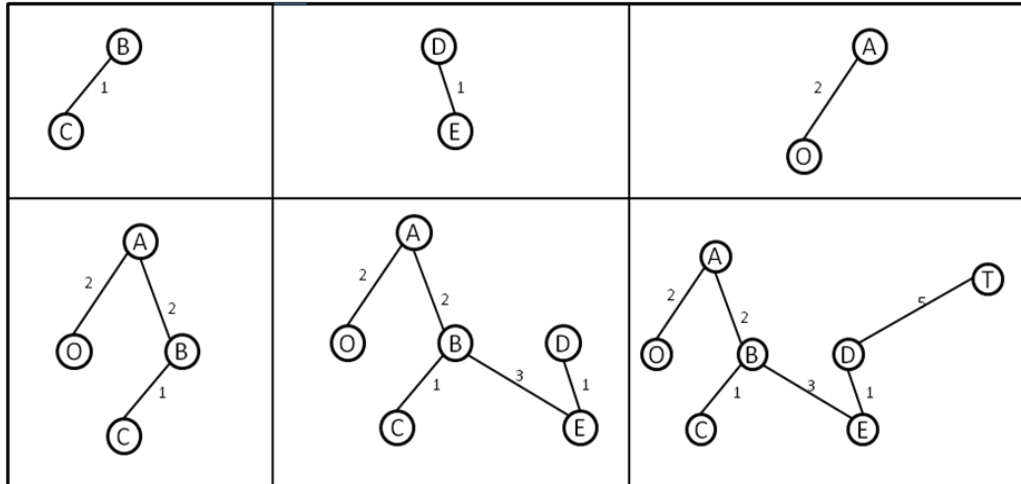
Paso 1. Se realiza la lista de todos los pesos de las aristas del grafo y se ordenan de forma ascendente:

Tabla 1. Lista pesos ordenada ascendentemente.

ORDEN	ARISTA	DISTANCIA
1	BC	1
2	DE	1
3	OA	2
4	AB	2
5	BE	3
-	OC	4
-	BD	4
-	CE	4
-	OB	5
6	DT	5
-	AD	7
-	ET	7

Paso 2. Se seleccionan una a una las aristas de menor peso, formando diferentes árboles, hasta construir un solo árbol.

Figura 2. Aplicación del Árbol de Expansión Mínima.



ANEXO 6. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO DEL VECINO MÁS CERCANO

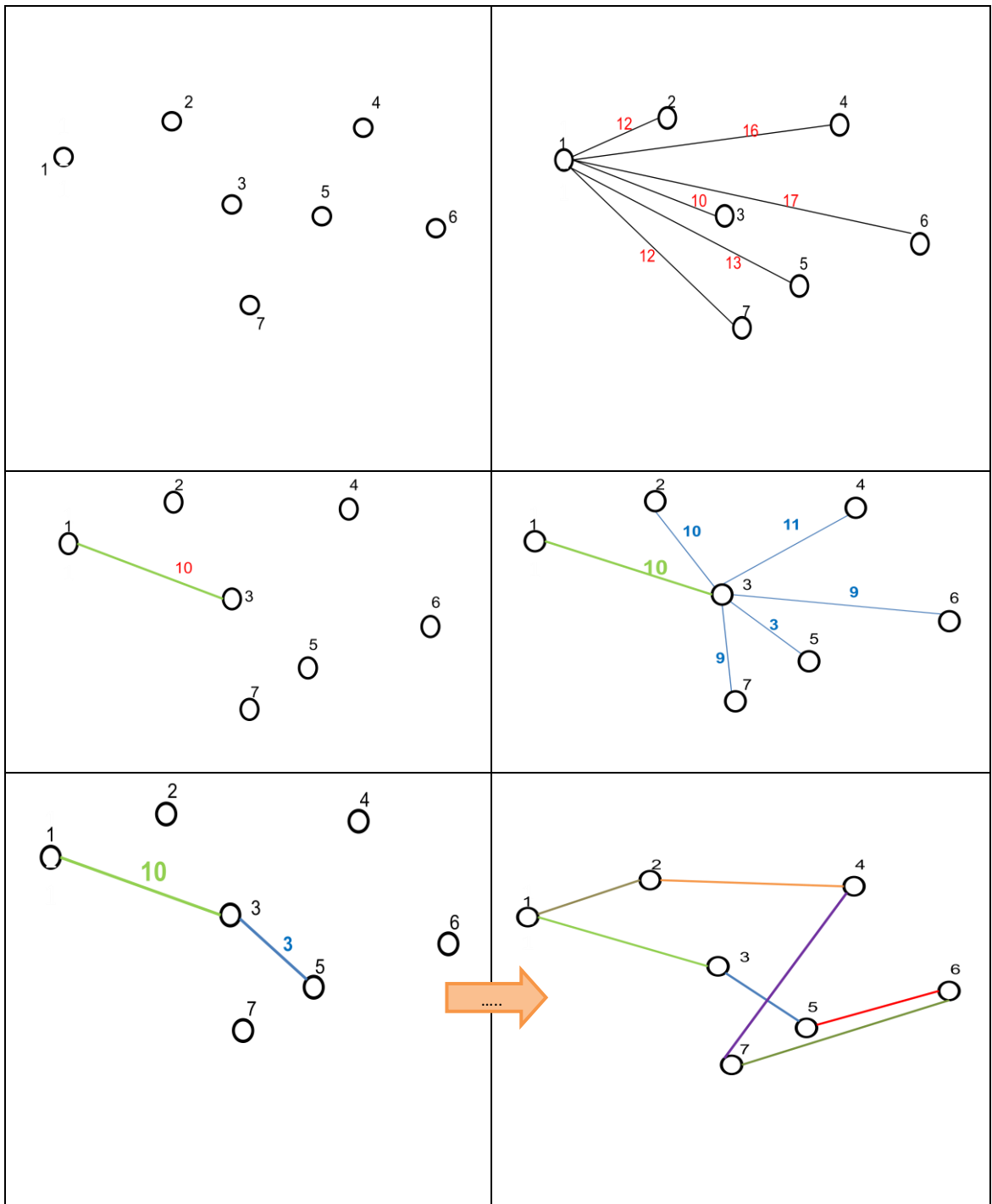
A continuación se muestra un ejemplo en el cual se tienen 7 clientes que presentan la siguiente matriz de costos o longitudes c_{ij} :

Tabla 1. Matriz de costos o distancias entre los nodos.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	12	10	16	13	17	12
2	12	0	8	12	16	18	15
3	10	8	0	11	3	9	9
4	16	12	11	0	11	10	12
5	13	16	3	11	0	6	7
6	17	18	9	10	6	0	9
7	12	15	9	12	7	9	0

Donde la aplicación del vecino más cercano se muestra en la figura 1.

Figura 1. Aplicación del algoritmo del vecino más cercano.



ANEXO 7. EJEMPLO APLICATIVO DEL ALGORITMO SUBVIAJE INVERSO

A continuación se muestra un ejemplo con el que se explican los pasos y el funcionamiento del algoritmo. Para el ejemplo se utiliza la siguiente matriz de distancias:

Tabla 1. Matriz de distancias para el ejemplo del algoritmo Subviaje Inverso.

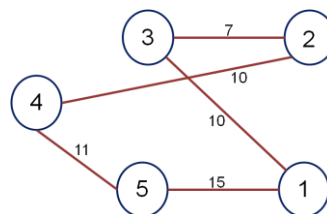
	1	2	3	4	5
1	1000	12	10	8	15
2	12	1000	7	10	11
3	10	7	1000	9	9
4	8	10	9	1000	11
5	15	11	9	11	1000

Fuente: HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.; Introducción a la investigación de operaciones. Octava edición. México, Mc Graw Hill, 2006, pp. 381.

Paso 1. Se inicia con cualquier viaje factible como solución inicial.

Para el ejemplo, la solución inicial es: 3-2-4-5-1-3, con una distancia total de 53. Esta se muestra en la figura 1.

Figura 1. Solución inicial a la que se aplica el algoritmo de Subviaje Inverso.



Paso 2. Para esa solución inicial se consideran todas las formas posibles de realizar un subviaje inverso. (En este caso, sólo se excluye el inverso del viaje completo).

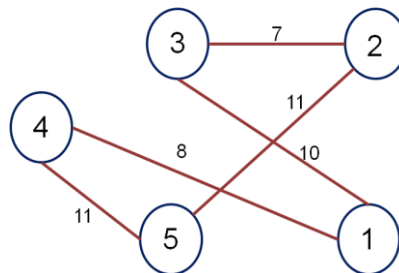
Para el ejemplo se tienen en cuenta los siguientes inversos:

- Inverso 2-4: 3-4-2-5-1-3, con una distancia total de 55.
- Inverso 4-5: 3-2-5-4-1-3, con una distancia total de 47.
- Inverso 5-1: 3-2-4-1-5-3, con una distancia total de 49.

Paso 3. Se selecciona aquel subviaje inverso que genere la mayor disminución en la distancia recorrida para que sea la nueva solución inicial.

De acuerdo con los subviajes inversos hallados se observa que se obtiene una mejor solución al invertir 4-5 por lo que 3-2-5-4-1-3 se vuelve la solución actual. En la figura 2 se muestra esta solución mejorada.

Figura 2. Solución mejorada para el ejemplo del algoritmo de Subviaje Inverso.



ANEXO 8. MATRIZ DE DISTANCIAS PARA EL CASO DE LA ENTREGA DE CORRESPONDENCIA Y DISTRIBUCIÓN DE LOS ALMUERZOS

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1000	32	91	75	91	86	87	98	97	108	104	140	162	129,12	129	136,5	98	119	135	131,2
2	32	1000	63	54	87	65	66	77	76	87	83	119	141	126,12	108	101,5	77	84	100	110,2
3	91	63	1000	43	28	96,6	97,6	108,6	126,6	118,6	114,6	150,6	172,6	157,72	139,6	133,1	87,6	116,4	107,78	105,6
4	75	54	43	1000	51	35	36	47	65	57	53	89	111	96,12	75	86,5	30	57,6	69,78	57,8
5	91	87	28	51	1000	88	89	100	117	110	106	142	164	149,12	131	124,5	79	87	99,18	87,2
6	86	65	96,6	35	88	1000	13	24	41	34	30	66	88	75	53	68	48	55	71	81,2
7	87	66	97,6	36	89	13	1000	14	34	35	31	67	89	61	56	69	49	56	72	82,2
8	98	77	108,6	47	100	24	14	1000	23	46	42	78	100	84	67	80	60	67	83	93
9	97	76	126,6	65	117	41	34	23	1000	38	39	70	92	90	70	83	78	85	101	111,2
10	108	87	118,6	57	110	34	35	46	38	1000	32	36	58	57	63	67	70	77	93	103,2
11	104	83	114,6	53	106	30	31	42	39	32	1000	64	86	65	45	61	66	68,4	74,3	89
12	140	119	150,6	89	142	66	67	78	70	36	64	1000	28	42	48	52	102	70	82	84
13	162	141	172,6	111	164	88	89	100	92	58	86	28	1000	20	61	69	130	87	78	94
14	129,12	126,12	157,72	96,12	149,12	75	61	84	90	57	65	42	20	1000	23	27	84,12	45	57	59
15	129	108	139,6	75	131	53	56	67	70	63	45	48	61	23	1000	16	68	34	46	48
16	136,5	101,5	133,1	86,5	124,5	68	69	80	83	67	61	52	69	27	16	1000	84,5	25	37	39
17	98	77	87,6	30	79	48	49	60	78	70	66	102	130	84,12	68	84,5	1000	40	52,18	40,2
18	119	84	116,4	57,6	87	55	56	67	85	77	68,4	70	87	45	34	25	40	1000	15	17
19	135	100	107,78	69,78	99,18	71	72	83	101	93	74,3	82	78	57	46	37	52,18	15	1000	25
20	131,2	110,2	105,6	57,8	87,2	81,2	82,2	93	111,2	103,2	89	84	94	59	48	39	40,2	17	25	1000
21	148,1	127,1	152,8	97,1	155	103	104	115	118	92	86	81	76	70	51	40	100,1	37	31	47
22	151,1	130,1	123,8	96,6	115,2	101,1	102,1	113,1	132	106	106	101	90	84	65	62	79	52	34	41

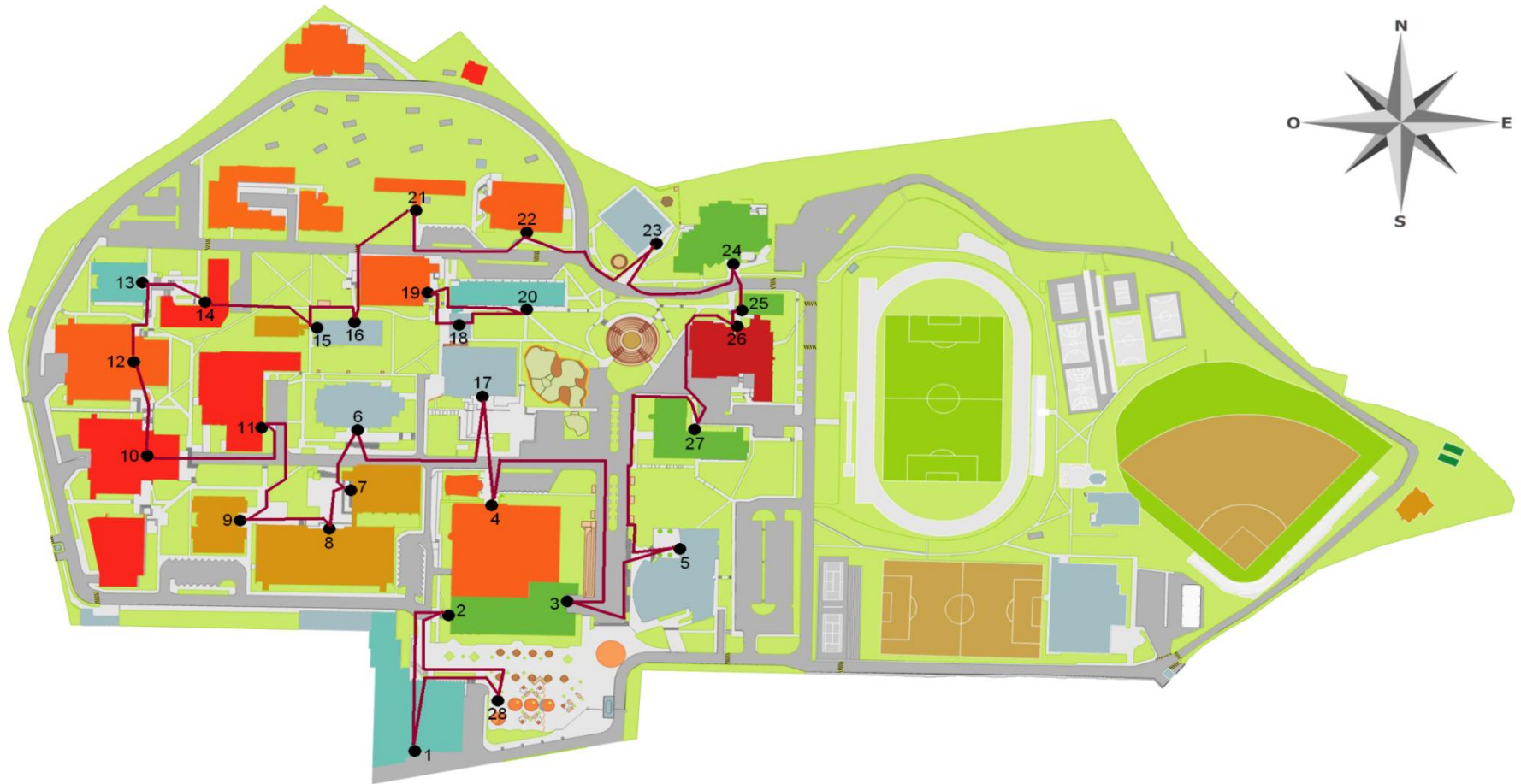
Tabla 1. (Continuación) Matriz de distancias usada para el caso de distribución de correspondencia y de almuerzos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	173,4	154	117,6	112,1	109	123,4	124,4	135,4	153,4	142,7	141,8	136,8	125,8	119,8	108	97,8	78,5	51,5	69,8	44,4
24	167	146	107,6	95	99	117	118	129	147	139	137,5	154,8	143,8	137,8	118,8	115,8	117,8	77,86	87,8	79,8
25	156	135	96,6	84	88	106	107	118	136	128	126,5	147,2	136,2	122,2	111,2	108,2	67,5	66,86	80,2	47
26	155	134	95,4	83	87	105	106	117	135	127	125,5	149,2	102,2	124,2	113,2	110,2	66,5	68,86	82,2	49
27	145	124	85,6	73	77	95	96	107	125	117	121	149	161,2	155,2	136,2	131,5	56,5	80	105,2	68
28	42	38	64	91	88	86	93	104	103	114	110	144	168	153,1	135	128,5	104	111	127	137,2

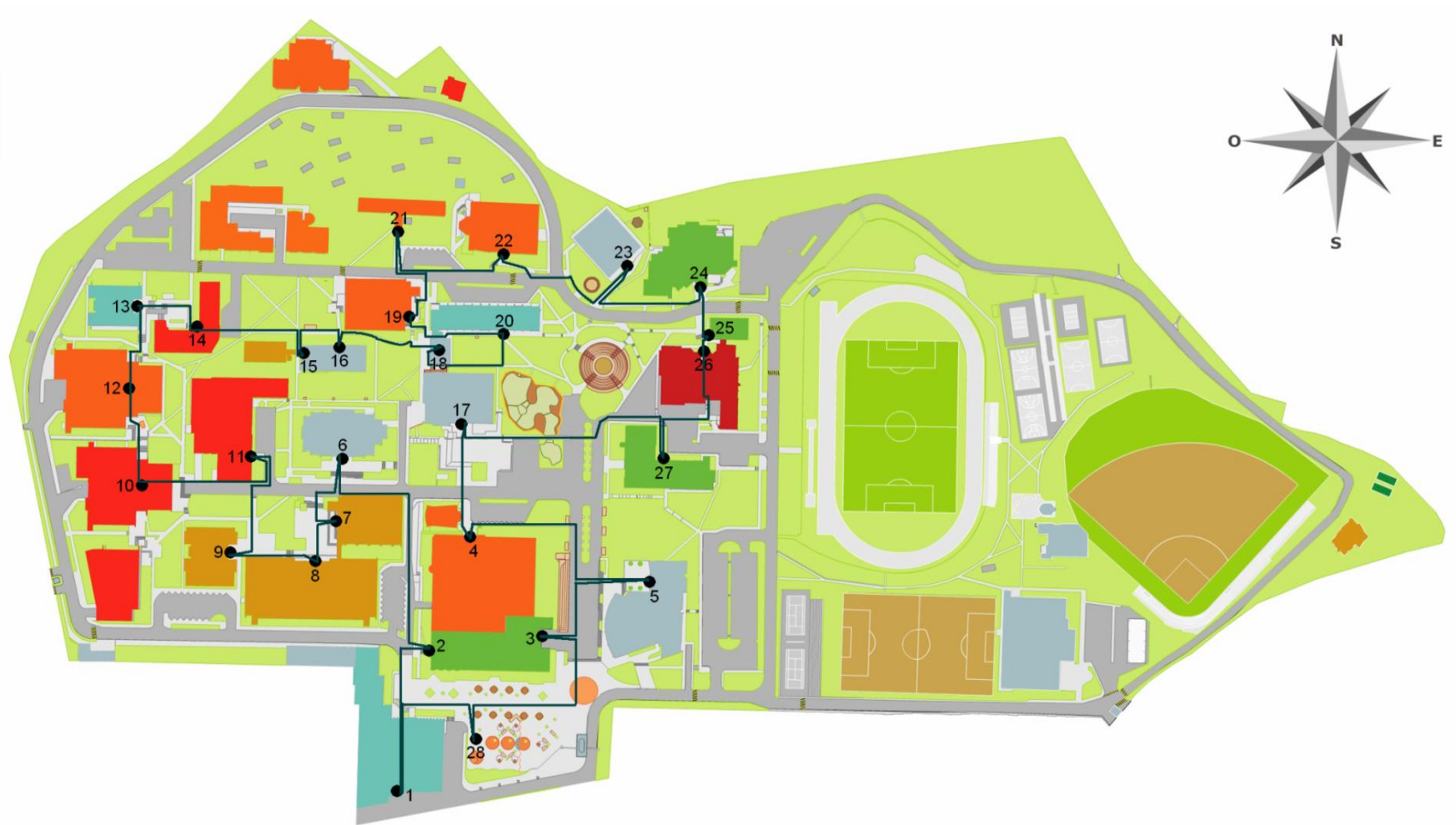
	21	22	23	24	25	26	27	28
1	148,1	151,1	173,4	167	156	155	145	42
2	127,1	130,1	154	146	135	134	124	38
3	152,8	123,8	117,6	107,6	96,6	95,4	85,6	64
4	97,1	96,6	112,1	95	84	83	73	91
5	155	115,2	109	99	88	87	77	88
6	103	101,1	123,4	117	106	105	95	86
7	104	102,1	124,4	118	107	106	96	93
8	115	113,1	135,4	129	118	117	107	104
9	118	132	153,4	147	136	135	125	103
10	92	106	142,7	139	128	127	117	114
11	86	106	141,8	137,5	126,5	125,5	121	110
12	81	101	136,8	154,8	147,2	149,2	149	144
13	76	90	125,8	143,8	136,2	102,2	161,2	168

	21	22	23	24	25	26	27	28
14	70	84	119,8	137,8	122,2	124,2	155,2	153,1
15	51	65	108	118,8	111,2	113,2	136,2	135
16	40	62	97,8	115,8	108,2	110,2	131,5	128,5
17	100,1	79	78,5	117,8	67,5	66,5	56,5	104
18	37	52	51,5	77,86	66,86	68,86	80	111
19	31	34	69,8	87,8	80,2	82,2	105,2	127
20	47	41	44,4	79,8	47	49	68	137,2
21	1000	43	78,8	96,8	89,2	91,2	114,2	154,1
22	43	1000	50,8	68,8	61,2	63,2	86,2	157,1
23	78,8	50,8	1000	39	52	54	80	171
24	96,8	68,8	39	1000	16	18	70	164
25	89,2	61,2	52	16	1000	7	59	153
26	91,2	63,2	54	18	7	1000	33	152
27	114,2	86,2	80	70	59	33	1000	142
28	154,1	157,1	171	164	153	152	142	1000

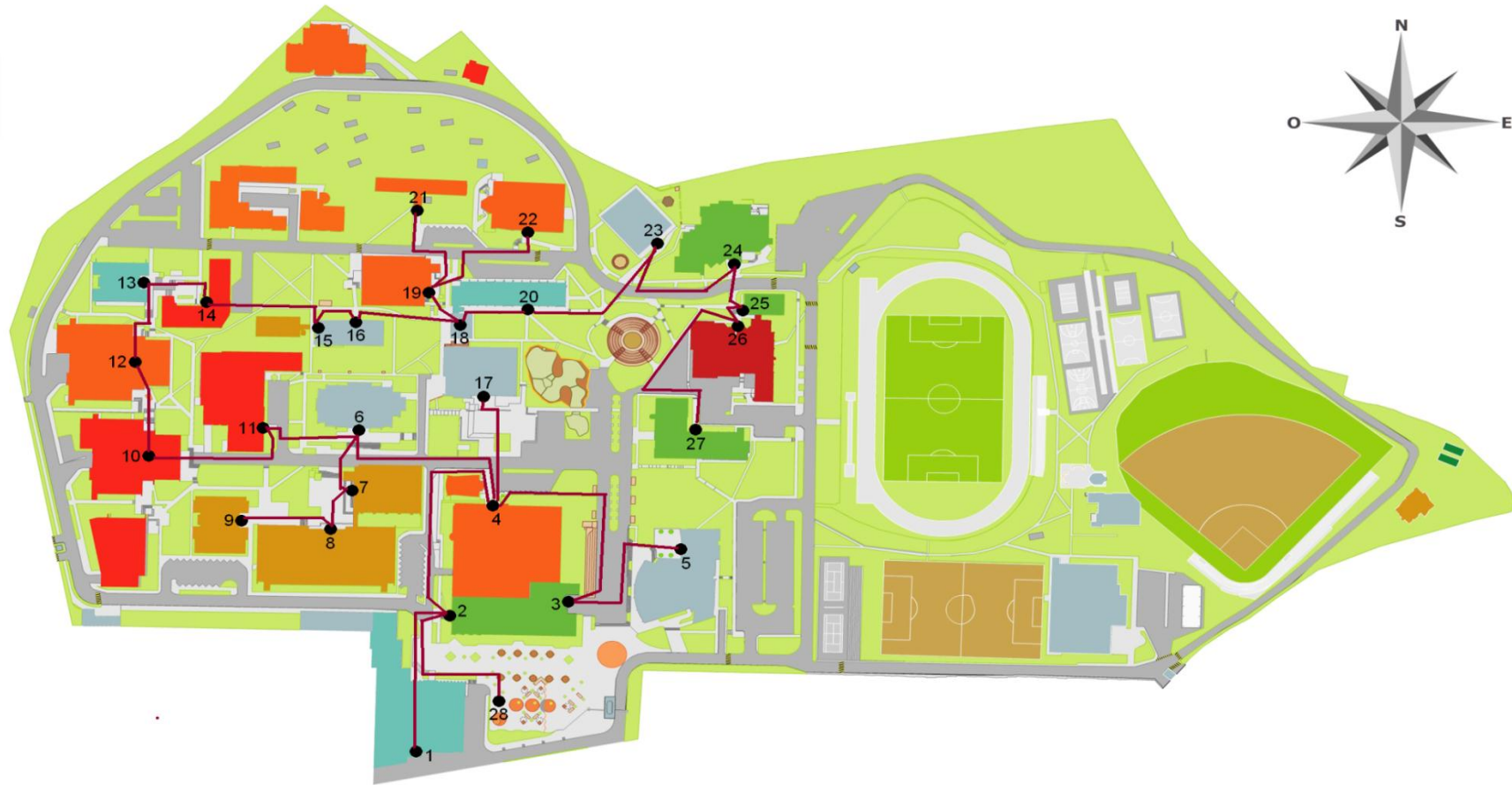
ANEXO 9. SOLUCIÓN OBTENIDA CON EL MÉTODO EXACTO INCLUYENDO LAS RESTRICCIONES DE SUBTOURS PARA EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP) PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 10.SOLUCIÓN FINAL OBTENIDA CON EL MÉTODO EXACTO PARA EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO (TSP) PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 11.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 12. PROCESO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INEQUIDAD TRIANGULAR PARA EL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA DEL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

Para iniciar su aplicación se identifican de la solución los nodos con aristas impares, siendo estos:

Tabla 1. Nodos con aristas impares.

NODO
2
4
6
18

- Iteración 1:

Iniciando por el nodo 2, se encuentra que las aristas que generan el mayor ahorro son la 2-1 y la 2-4, de manera que la arista a eliminar es la 2-28.

Tabla 2. Aplicación de inequidad triangular al nodo 2.

NODO	ARISTAS			AHORROS
2	2-1	1-4	4-2	-97
	1-4	4-2	2-1	-11
	4-2	2-1	1-4	-53
	2-4	4-28	28-2	-15
	4-28	28-2	2-4	-61
	28-2	2-4	4-28	-47
	2-28	28-1	1-2	-36
	28-1	1-2	2-28	-28
	1-2	2-28	28-1	-42

- Iteración 2:

Ahora revisando el nodo 4, se encuentra que las aristas que generan el mayor ahorro son la 3-4 y la 4-17, de manera que la arista a eliminar es la 4-6.

Tabla 3. Aplicación de inequidad triangular al nodo 4.

NODO	ARISTAS			AHORROS
4	6-17	17-4	4-6	-17
	17-4	4-6	6-17	-53
	4-6	6-17	17-4	-43
	4-17	17-3	3-4	-100,6
	17-3	3-4	4-17	14,6
	3-4	4-17	17-3	-74,6
	4-3	3-6	6-4	-27
	3-6	6-4	4-3	-43
	6-4	4-3	3-6	-43

- Iteración 3:

Ahora revisando el nodo 6, se encuentra que las aristas que generan el mayor ahorro son la 7-6 y la 6-4, de manera que la arista a eliminar es la 11-6.

Tabla 4. Aplicación de inequidad triangular al nodo 6.

NODO	ARISTAS			AHORROS
6	11-6	6-7	7-11	-14
	6-7	7-11	11-6	-48
	7-11	11-6	6-7	-12
	6-4	4-7	7-6	-14

Tabla 4. (Continuación) Aplicación de inequidad triangular al nodo 6.

NODO	ARISTAS			AHORROS
6	4-7	7-6	6-4	-12
	7-6	6-4	4-7	-58
	6-4	4-11	11-6	-48
	4-11	11-6	6-4	-12
	11-6	6-4	4-11	-58

- Iteración 4:

Ahora revisando el nodo 18, se encuentra que las aristas que generan el mayor ahorro son la 20-18 y la 18-16, de manera que la arista a eliminar es la 18-19.

Tabla 5. Aplicación de inequidad triangular al nodo 18.

NODO	ARISTAS			AHORROS
18	19-18	18-16	16-19	-47
	18-16	16-19	19-18	-27
	16-19	19-18	18-16	-3
	19-18	18-20	20-19	-27
	18-20	20-19	19-18	-23
	20-19	19-18	18-20	-7
	18-16	16-20	20-18	-31
	16-20	20-18	18-16	-3
	20-18	18-16	16-20	-47

- Iteración 5:

Finalmente, para interconectar las subrutras encontradas se agregan las siguientes aristas: 11-9, 1-28, 28-3, 5-17 y 17-27, siendo estas unidas al nodo más cercano. Asimismo, al incluir la arista 19-20, el nodo 19 queda con 3 aristas así que se hace necesario aplicar nuevamente el principio de inequidad

triangular. Ahora revisando el nodo 19, se encuentra que las aristas que generan el mayor ahorro son la 21-19 y la 19-20, de manera que la arista a eliminar es la 19-22.

Tabla 6. Aplicación de inequidad triangular al nodo 19.

NODO	ARISTAS			AHORROS
19	21-22	22-19	19-21	-22
	22-19	19-21	21-22	-40
	19-21	21-22	22-19	-46
	19-22	22-20	20-19	-32
	22-20	20-19	19-22	-18
	20-19	19-22	22-18	-50
	10-20	20-21	21-19	-53
	20-21	21-19	19-20	-9
	21-19	19-20	20-21	-41

ANEXO 13.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA SEGUNDA FASE DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 14.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE VECINO MÁS CERCANO PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA PARA 3 REPARTIDORES



ANEXO 15.SECUENCIA OBTENIDA A PARTIR DEL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

Nodo	COORDENADAS		θ_j	ρ_j
	X	Y		
28	13	6	24,77514	14,31782
3	31	21	34,11447	37,44329
5	52	42	38,92754	66,8431
27	65	64	44,55586	91,21952
26	73	98	53,31765	122,2007
25	78	112	55,14554	136,4844
24	73	114	57,3665	135,3699
23	51	119	66,80141	129,4681
4	14	58	76,42957	59,66574
17	17	79	77,85572	80,80842
22	26	125	78,25002	127,6754
20	22	109	78,58902	111,198
2	5	27	79,50852	27,45906
18	8	97	85,28525	97,32934
19	1	109	89,47437	109,0046
21	1	136	89,57872	136,0037
16	-14	95	98,38325	96,02604
7	-12	58	101,6894	59,22837
6	-15	70	102,0948	71,58911
15	-23	94	103,749	96,77293
14	-45	103	113,6002	112,4011
11	-37	77	115,6652	85,42833
8	-20	41	116,0033	45,61798
13	-66	109	121,1951	127,4245
12	-64	86	126,6561	107,2007
10	-50	64	127,9987	81,21576
9	-39	48	129,0939	61,84658

ANEXO 16.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA

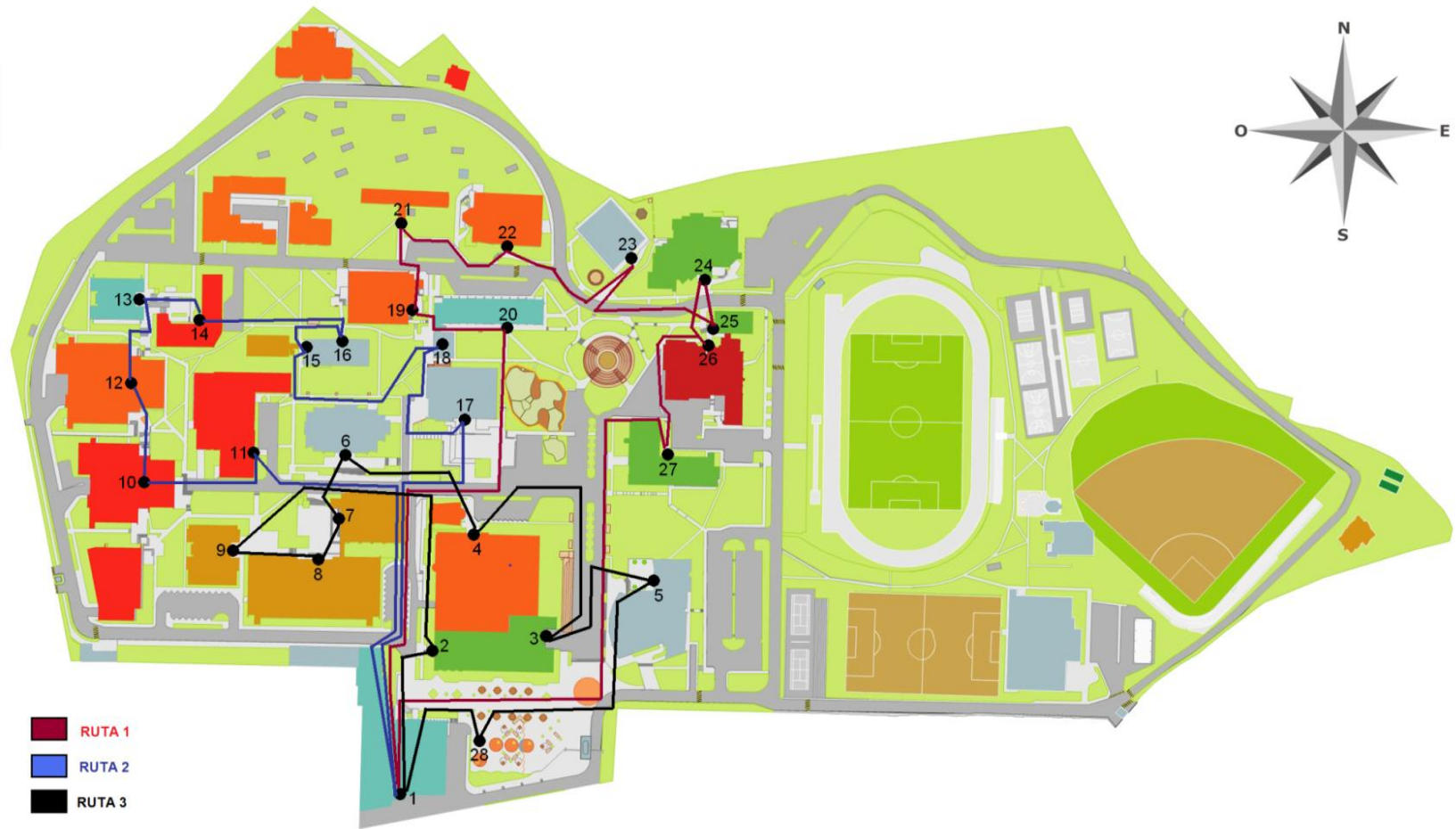


ANEXO 17. MATRIZ DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2			60	53	36	53	53	53	53	53	53	53	53	35	53	67	53	67	67	53	53	53	51,4
3				123	154	80,4	80,4	80,4	61,4	80,4	80,4	80,4	80,4	62,4	80,4	94,4	101	93,6	118	117	86,3	118	147
4					115	126	126	126	107	126	126	126	126	108	129	125	143	136	140	148	126	130	136
5						89	89	89	71	89	89	89	89	71	89	103	110	123	127	135	84,1	127	155
6							160	160	142	160	160	160	160	140	162	155	136	150	150	136	131	136	136
7								171	150	160	160	160	160	155	160	155	136	150	150	136	131	136	136
8									172	160	160	160	160	143	160	155	136	150	150	136	131	136	136
9										167	162	167	167	136	156	151	117	131	131	117	127	116	117
10											180	212	212	180	174	178	136	150	150	136	164	153	139
11												180	180	168	188	180	136	155	165	146	166	149	136
12													274	227	221	225	136	189	193	187	207	190	177
13														271	230	230	130	194	219	199	234	223	210
14															235	239	143	203	207	201	207	196	183
15																250	159	214	218	212	226	215	194
16																	150	231	235	229	245	226	212
17																		177	181	189	146	170	193
18																			239	233	230	218	241
19																					241	252	239
20																						232	260
21																							243
22																							274

	24	25	26	27	28
2	53	53	53	53	36
3	150	150	151	150	69
4	147	147	147	147	26
5	159	159	159	159	45
6	136	136	136	136	42
7	136	136	136	136	36
8	136	136	136	136	36
9	117	117	117	117	36
10	136	136	136	136	36
11	134	134	134	128	36
12	152	149	146	136	38
13	185	182	215	146	36
14	158	163	160	119	18
15	177	174	171	138	36
16	188	184	181	150	50
17	147	187	187	187	36
18	208	208	205	184	50
19	214	211	208	175	50
20	218	240	237	208	36
21	218	215	212	179	36
22	249	246	243	210	36
23	301,4	277,4	274,4	238,4	44,4
24		307	304	242	45
25			304	242	45
26				267	45
27					45
28					

ANEXO 18.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 19. MATRICES DE AHORROS MEJORADOS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA

Tabla 1. Matriz de Ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,1$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		1029	1082	1068	1082	1077	1078	1088	1087	1097	1094	1126	1146	1116	1116	1123	1088	1107	1122	1118
2			116,7	101,6	114,3	111,5	112,4	122,3	121,4	131,3	127,7	160,1	179,9	148,5	150,2	158,4	122,3	142,6	157	152,2
3				161,7	179,2	167,3	168,2	178,1	175,3	187,1	183,5	215,9	235,7	204,3	206	214,2	180,2	198,4	215,2	211,6
4					160,9	157,5	158,4	168,3	165,5	177,3	173,7	206,1	225,9	194,5	196,5	202,9	170	188,2	203	200,4
5						168,2	169,1	179	176,3	188	184,4	216,8	236,6	205,2	206,9	215,1	181,1	201,3	216,1	213,5
6							171,7	181,6	178,9	190,6	187	219,4	239,2	207,6	209,7	215,7	179,2	199,5	213,9	209,1
7								183,6	180,6	191,5	187,9	220,3	240,1	210	210,4	216,6	180,1	200,4	214,8	210
8									192,7	201,4	197,8	230,2	250	218,7	220,3	226,5	190	210,3	224,7	219,9
9										201,2	197,1	230	249,8	217,1	219	225,2	187,2	207,5	221,9	217,1
10											208,8	244,4	264,2	231,4	230,7	237,8	199	219,3	233,7	228,9
11												237,6	257,4	226,6	228,5	234,4	195,4	216,2	231,6	226,3
12													299,2	264,9	264,2	271,3	227,8	252	266,8	262,8
13														289,1	284,9	291,6	247	272,3	289,2	283,8
14															255,8	262,9	218,7	243,6	258,4	254,4
15																263,9	220,2	244,6	259,4	255,4
16																	226,1	253	267,8	263,8
17																		213	227,8	225,2
18																			252,5	248,5
19																				263,7
20																				
21																				
22																				
23																				

Tabla 1. (Continuación) Matriz de Ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,1$.

	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1133	1136	1156	1150	1140	1140	1131	1038
2	167,4	170,1	190	184,4	174,5	173,6	164,6	70,2
3	223,8	229,7	252,6	247,2	237,3	236,5	227,4	126,6
4	213,4	216,4	237,2	232,5	222,6	221,7	212,7	107,9
5	223,6	230,6	253,5	248,1	238,2	237,3	228,3	124,2
6	223,8	227	247,1	241,3	231,4	230,5	221,5	119,4
7	224,7	227,9	248	242,2	232,3	231,4	222,4	119,7
8	234,6	237,8	257,9	252,1	242,2	241,3	232,3	129,6
9	233,3	234,9	255,1	249,3	239,4	238,5	229,5	128,7
10	246,9	248,5	267,1	261,1	251,2	250,3	241,3	138,6
11	243,5	244,5	263,2	257,3	247,4	246,5	236,9	135
12	280	281	299,7	291,5	281,3	280,1	270,1	167,6
13	302,5	304,1	322,8	314,6	304,4	306,8	290,9	187,2
14	270,2	271,8	290,5	282,3	272,9	271,7	258,6	155,8
15	272	273,6	291,6	284,1	273,9	272,7	260,4	157,5
16	280,6	281,4	300,1	291,9	281,7	280,5	268,4	165,7
17	236,1	241,2	263,6	253,2	247,3	246,4	237,4	129,6
18	263,4	264,9	287,3	278,2	268,3	267,1	256	149,9
19	280	282,7	301,4	293,2	283	281,8	269,5	164,3
20	274,6	278,2	300,2	290,2	282,5	281,3	269,4	159,5
21		294,9	313,6	305,4	295,2	294	281,7	174,7
22			319,4	311,2	301	299,8	287,5	177,4
23				336,5	324,2	323	310,4	198,3
24					321,4	320,2	305	192,6
25						310,3	295,1	182,7
26							296,7	181,8
27								172,8
28								

Tabla 2. Matriz de Ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,4$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1019,2	1054,6	1045	1054,6	1051,6	1052,2	1058,8	1058,2	1064,8	1062,4	1084	1097,2	1077,5	1077,4	1081,9	1058,8	1071,4
2			97,8	85,4	88,2	92	92,6	99,2	98,6	105,2	102,8	124,4	137,6	110,67	117,8	127,9	99,2	117,4
3				148,8	170,8	138,36	138,96	145,56	137,36	151,56	149,16	170,76	183,96	157,03	164,16	174,26	153,96	163,44
4					145,6	147	147,6	154,2	146	160,2	157,8	179,4	192,6	165,67	174	176,9	161	170,96
5						141,8	142,4	149	141,2	155	152,6	174,2	187,4	160,47	167,6	177,7	157,4	175,2
6							167,8	174,4	166,6	180,4	178	199,6	212,8	185,12	193,8	195,3	164,8	183
7								179,4	170,4	181	178,6	200,2	213,4	191,72	193,6	195,9	165,4	183,6
8									185,8	187,6	185,2	206,8	220	193,52	200,2	202,5	172	190,2
9										189,8	185,4	209	222,2	190,12	198	200,3	163,8	182
10											199,2	233,6	246,8	214,32	211,8	217,7	178	196,2
11												218,4	231,6	207,12	215	216,1	175,6	195,64
12													290,8	252,32	249,8	255,7	197,2	231
13														283,12	266,6	270,9	208	246,2
14															248,92	254,82	193,47	230,12
15																259,1	199,8	234,4
16																	200,7	245,5
17																		201
18																		
19																		
20																		
21																		
22																		
23																		

Tabla 2. (Continuación) Matriz de Ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,4$

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1081	1078,7	1088,9	1090,7	1104	1100,2	1093,6	1093	1087	1025,2
2	127	119,12	129,26	131,06	143,8	140,6	134	133,4	127,4	58,8
3	182,89	179,96	177,98	192,58	217,36	214,96	208,36	207,84	201,76	107,4
4	182,09	183,08	184,26	187,46	203,56	204	197,4	196,8	190,8	80,6
5	186,33	187,32	177,1	196,02	220,8	218,4	211,8	211,2	205,2	97,8
6	192,6	184,72	192,9	196,66	210,04	206,2	199,6	199	193	93,6
7	193,2	185,32	193,5	197,26	210,64	206,8	200,2	199,6	193,6	91,8
8	199,8	192	200,1	203,86	217,24	213,4	206,8	206,2	200,2	98,4
9	191,6	183,72	197,9	195,3	209,04	205,2	198,6	198	192	97,8
10	205,8	197,92	219,3	216,7	224,32	219,4	212,8	212,2	206,2	104,4
11	209,28	199,6	217,7	212,7	220,68	216	209,4	208,8	200,6	102
12	242,2	237,6	255,7	250,7	258,68	245,08	237,12	235,32	225,4	124,4
13	265,8	255,6	279,7	277,1	285,08	271,48	263,52	276,12	242,52	136,8
14	241,32	236,72	249,22	246,62	254,6	241	236,24	234,44	212,04	109,87
15	245,6	241	256,7	254,1	259,2	248,48	240,52	238,72	219,52	117
16	256,7	252,1	268,6	262,8	270,78	257,18	249,22	247,42	228,9	127,1
17	212,13	213,12	206,06	217,5	240	217,88	227	226,4	220,4	98,4
18	248	243,4	252,3	249,3	271,8	254,86	248,26	246,46	232	116,6
19		256,2	270,7	272,5	280,48	266,88	258,92	257,12	237,92	126,2
20			260,5	265,9	286,84	266,28	268,4	266,6	249	118,32
21				282	289,98	276,38	268,42	266,62	247,42	128,46
22					304,18	290,58	282,62	280,82	261,62	130,26
23						324,8	308,6	306,8	286,4	147
24							316,6	314,8	284	143,4
25								308,2	277,4	136,8
26									286,8	136,2
27										130,2
28										

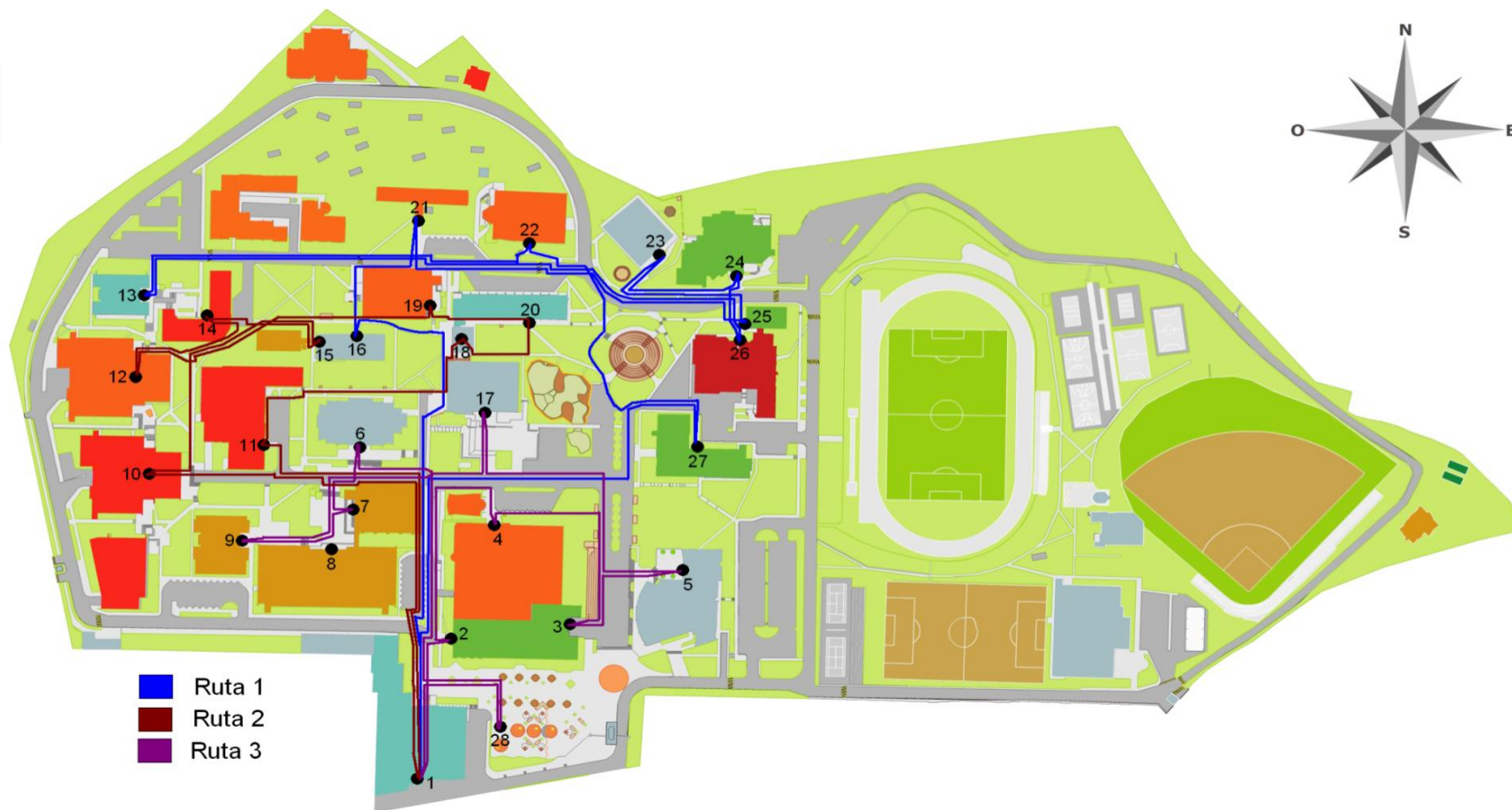
Tabla 3. Matriz de Ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,8$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1006,4	1018,2	1015	1018,2	1017,2	1017,4	1019,6	1019,4	1021,6	1020,8	1028	1032,4	1025,8	1025,8	1027,3	1019,6	1023,8
2			72,6	63,8	53,4	66	66,2	68,4	68,2	70,4	69,6	76,8	81,2	60,224	74,6	87,3	68,4	83,8
3				131,6	159,6	99,72	99,92	102,12	86,72	104,12	103,32	110,52	114,92	93,944	108,32	121,02	118,92	116,88
4					125,2	133	133,2	135,4	120	137,4	136,6	143,8	148,2	127,22	144	142,3	149	147,92
5						106,6	106,8	109	94,4	111	110,2	117,4	121,8	100,82	115,2	127,9	125,8	140,4
6							162,6	164,8	150,2	166,8	166	173,2	177,6	155,12	172,6	168,1	145,6	161
7								173,8	156,8	167	166,2	173,4	177,8	167,32	171,2	168,3	145,8	161,2
8									176,6	169,2	168,4	175,6	180	159,92	173,4	170,5	148	163,4
9										174,6	169,8	181	185,4	154,12	170	167,1	132,6	148
10											186,4	219,2	223,6	191,52	186,6	190,9	150	165,4
11												192,8	197,2	181,12	197	191,7	149,2	168,28
12													279,6	235,52	230,6	234,9	156,4	203
13														275,12	242,2	243,3	156	211,4
14															239,72	244,02	159,82	212,12
15																252,7	172,6	220,8
16																	166,9	235,5
17																		185
18																		
19																		
20																		
21																		
22																		
23																		

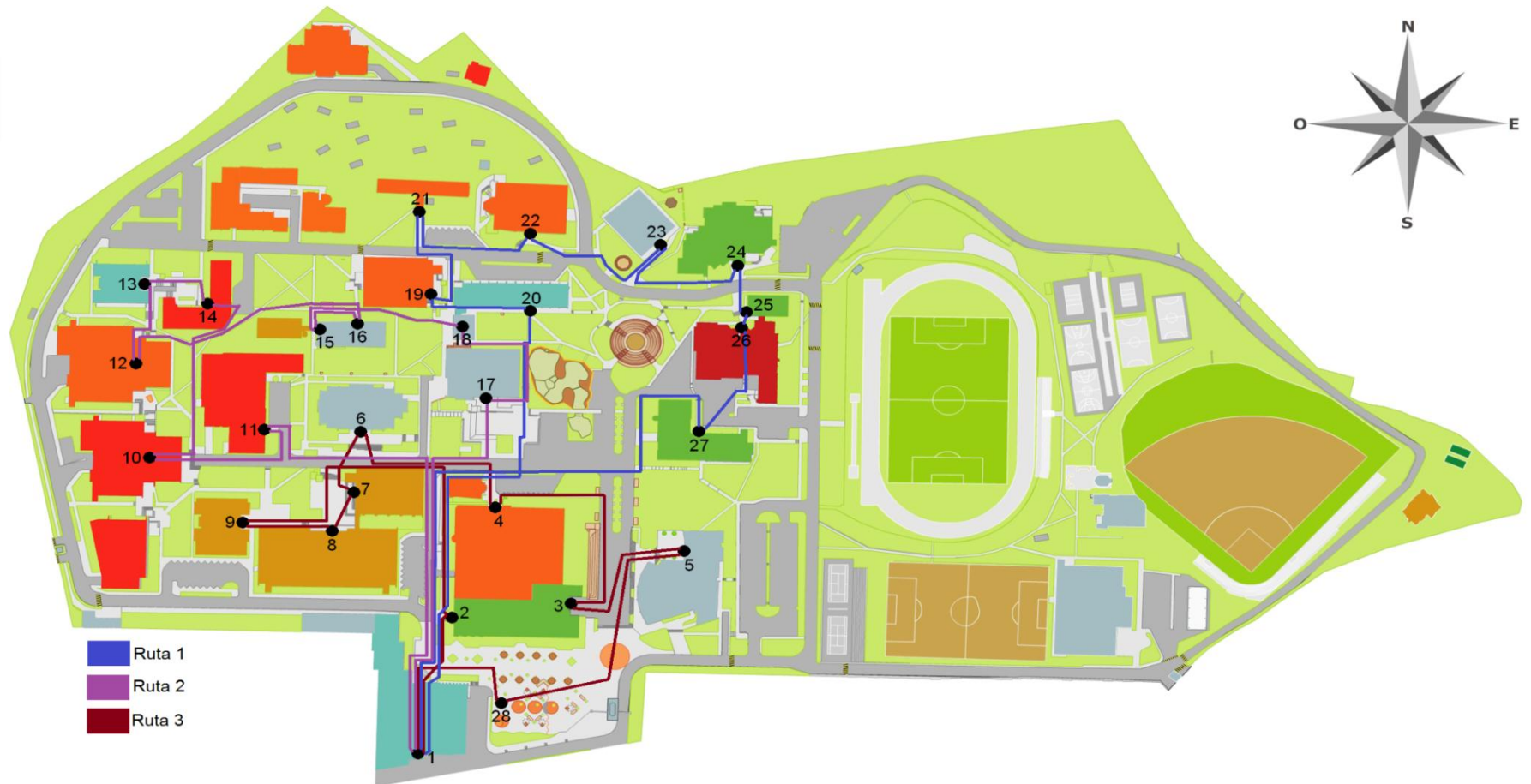
Tabla 3. (Continuación) Matriz de ahorros mejorados para el caso de la distribución de correspondencia con $\lambda = 0,8$.

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1027	1026,2	1029,6	1030,2	1034,7	1033,4	1031,2	1031	1029	1008,4
2	87	75,04	78,42	79,02	82,2	82,2	80	79,8	77,8	43,6
3	139,78	137,72	116,86	143,06	170,32	171,92	169,72	169,68	167,52	81,8
4	154,18	159,96	145,42	148,82	158,72	166	163,8	163,6	161,6	44,2
5	146,66	152,44	115,1	149,94	177,2	178,8	176,6	176,4	174,4	62,6
6	164,2	152,24	151,7	156,22	160,68	159,4	157,2	157	155	59,2
7	164,4	152,44	151,9	156,42	160,88	159,6	157,4	157,2	155,2	54,6
8	166,6	154,8	154,1	158,62	163,08	161,8	159,6	159,4	157,4	56,8
9	151,2	139,24	150,7	142,5	147,68	146,4	144,2	144	142	56,6
10	168,6	156,64	182,5	174,3	167,24	163,8	161,6	161,4	159,4	58,8
11	179,56	164	183,3	170,3	163,96	161	158,8	158,6	152,2	58
12	209,4	204	223,3	210,3	203,96	183,16	178,24	175,64	165,8	66,8
13	234,6	218	249,3	241,1	234,76	213,96	209,04	235,24	178,04	69,6
14	218,52	213,12	221,22	213,02	206,68	185,88	187,36	184,76	149,96	48,624
15	227,2	221,8	236,3	228,1	216	200,96	196,04	193,44	165,04	63
16	241,9	236,5	252,6	238	231,66	210,86	205,94	203,34	176,3	75,7
17	191,26	197,04	166,02	185,9	208,6	170,76	200	199,8	197,8	56,8
18	242	236,6	237,5	228,5	251,2	223,71	221,51	218,91	200	72,2
19		246,2	258,3	258,9	252,56	231,76	226,84	224,24	195,84	75,4
20			241,7	249,5	269,08	234,36	249,6	247	221,8	63,44
21				264,8	258,46	237,66	232,74	230,14	201,74	66,82
22					283,86	263,06	258,14	255,54	227,14	67,42
23						309,2	287,8	285,2	254,4	78,6
24							310,2	307,6	256	77,8
25								305,4	253,8	75,6
26									273,6	75,4
27										73,4
28										

ANEXO 20. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,1$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 21. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,4$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



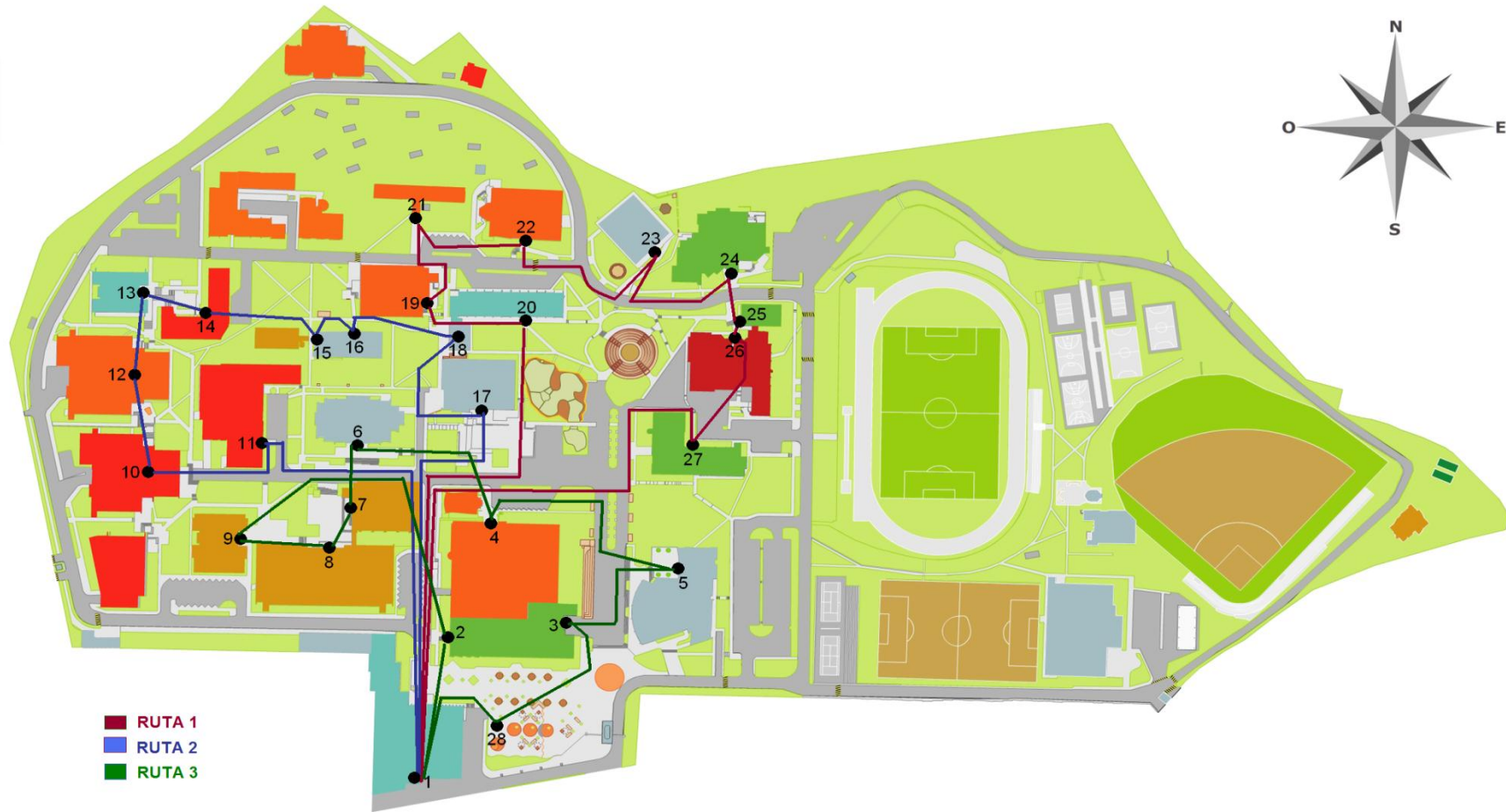
ANEXO 22. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS ($\lambda=0,8$) PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 23.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE 2-OPT PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 24.SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR BÚSQUEDA TABÚ PARA EL CASO DE REPARTICIÓN DE CORRESPONDENCIA



ANEXO 25. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL MÉTODO EXACTO PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON CAPACIDAD (CVRP) PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el método exacto para el CVRP para el día LUNES.

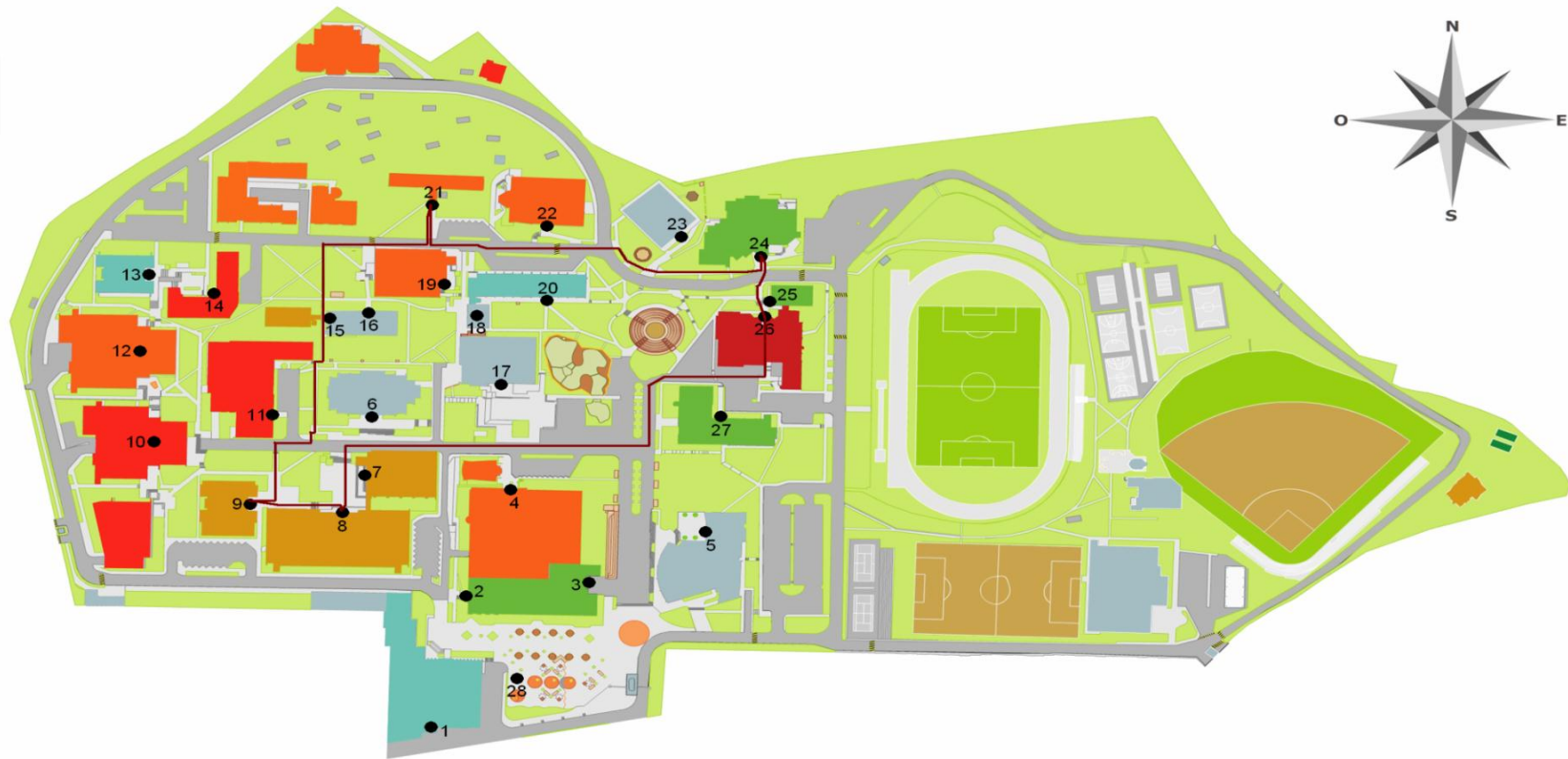


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el método exacto para el CVRP para el día MARTES.



Figura 3. Solución obtenida al aplicar el método exacto para el CVRP para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el método exacto para el CVRP para el día JUEVES.



Figura 5. Solución obtenida al aplicar el método exacto para el CVRP para el día VIERNES.



ANEXO 26. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE VECINO MÁS CERCANO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Vecino más Cercano para el día LUNES.

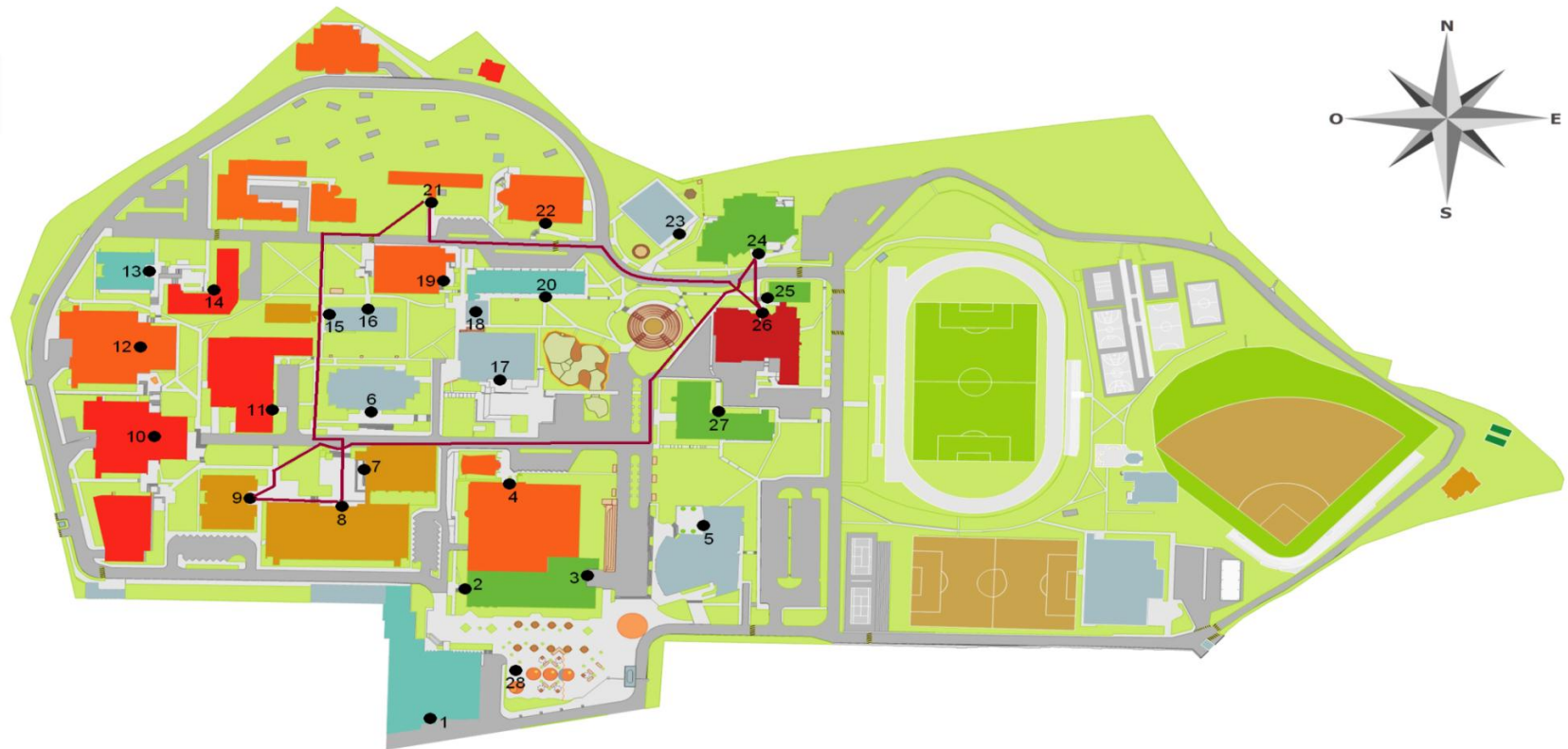


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Vecino más Cercano para el día MARTES.

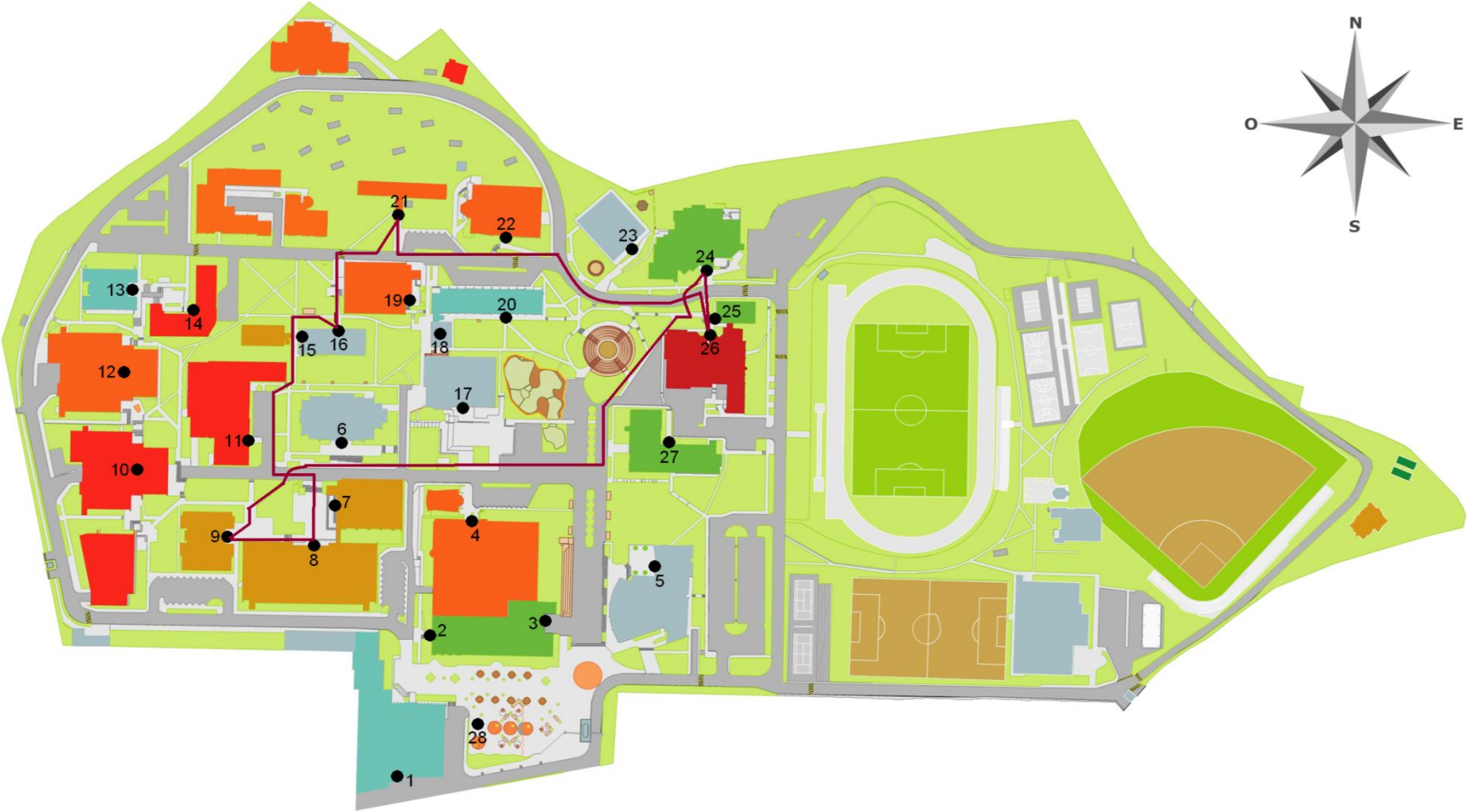


Figura 3. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Vecino más Cercano para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Vecino más Cercano para el día JUEVES.

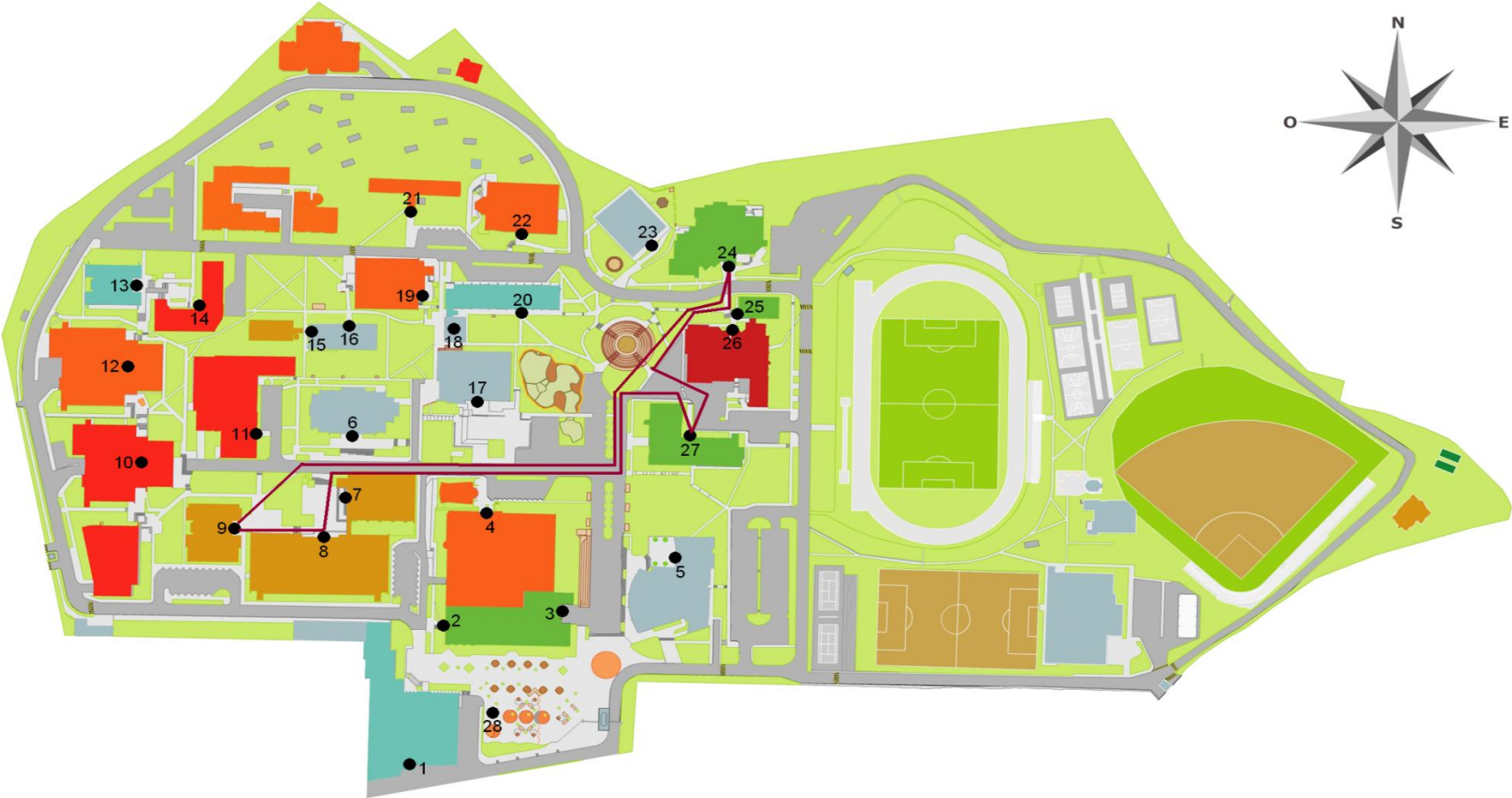


Figura 5. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Vecino más Cercano para el día VIERNES.



**ANEXO 27. SECUENCIA GENERADA POR EL ALGORITMO DE BARRIDO
PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS**

Nodo	COORDENADAS		θ_j	ρ_j	Dj SEMANA DEL 21 AL 25 DE FEBRERO DE 2011				
	X	Y			LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
24	0	0	0	0					
21	-58	16	164,5778	60,16644	1	1			
23	-19	4	168,1113	19,41649					
22	-39	7	169,8245	39,62323					
13	-110	-8	184,1596	110,2905					
19	-58	-6	185,9061	58,30952					
14	-94	-13	187,8739	94,89468					
20	-42	-9	192,0948	42,95346					
16	-72	-16	192,5288	73,75636		2			
15	-73	-18	193,8514	75,18643					
12	-96	-24	194,0362	98,95454			2		
18	-54	-14	194,5345	55,7853					
10	-100	-46	204,7024	110,0727					
17	-50	-23	204,7024	55,03635					
11	-86	-40	204,9439	94,84725					
6	-81	-47	210,1243	93,64828					
9	-93	-64	214,5347	112,8938	3	2	3	1	1
7	-78	-57	216,1582	96,60745					
8	-81	-66	219,1737	104,4844	27	3	1	1	4
4	-56	-60	226,9749	82,07314					
3	-76	-87	228,8607	115,5206					
5	-59	-68	229,0536	90,02777					
2	-65	-81	231,254	103,8557					
1	-70	-107	236,8071	127,8632					
28	-53	-108	243,8609	120,3038					
27	-6	-36	260,5377	36,49658				1	
26	0	-16	270	16	1	2	2		
25	2	-12	279,4623	12,16553					

ANEXO 28. APLICACIÓN ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

❖ *Lunes.*

El día lunes cuenta con demandas en los nodos que se muestran en la Tabla 1. A partir de estos datos, el algoritmo de Barrido proporciona la ruta que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 1. Demandas obtenidas para cada día de la semana del 21 al 25 de Febrero de 2011.

NODO	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
Laboratorio de Livianos	27	3	1	1	1
Laboratorio de Posgrados	3	2	3	1	4
Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas			2		
Capruis		2			
Edificio de Ingeniería Eléctrica	1	1			
Edificio Insed/Publicaciones	1	2	2		
Edificio Administración I - Entrada principal				1	

Tabla 2. Ruta generada por el Algoritmo de Barrido para el día lunes.

RUTA LUNES	DISTANCIA
24-21	96,8
21-9	118
9-8	23
8-26	117
26-24	18
Total:	372,8

Dado que se busca suplir demandas completas y no parciales y que la demanda total de los nodos es de 32 almuerzos, se requiere emplear 3 repartidores, los cuales representan en total una capacidad de 36 almuerzos.

La distancia total recorrida en el día lunes es de 372,8 unidades de medida.

❖ **Martes.**

Las demandas para este día se muestran en la Tabla 1. El algoritmo de Barrido proporciona la solución que se muestra en la Tabla 3, dando una distancia total recorrida en el día martes de 412,8 unidades de medida.

Tabla 3. Ruta generada por el Algoritmo de Barrido para el día martes.

RUTA MARTES	DISTANCIA
24-21	96,8
21-16	40
16-9	118
9-8	23
8-26	117
26-24	18
Total:	412,8

❖ **Miércoles.**

El algoritmo de Barrido proporciona la ruta que se muestra en la Tabla 4, dando una distancia total recorrida en el día miércoles de 382,8 unidades de medida.

Tabla 4. Ruta generada por el Algoritmo de Barrido para el día miércoles.

RUTA MIERCOLES	DISTANCIA
24-12	154,8
12-9	70
9-8	23
8-26	117
26-24	18
Total:	382,8

❖ **Jueves.**

La ruta proporcionada por el algoritmo se puede observar en la Tabla 5, dando una distancia total recorrida en el día jueves de 347 unidades de medida.

Tabla 5. Ruta generada por el Algoritmo de Barrido para el día jueves.

RUTA JUEVES	DISTANCIA
24-9	147
9-8	23
8-27	107
27-24	70
Total:	347

❖ **Viernes.**

La ruta proporcionada para este día se muestra en la **Tabla 6**, con una distancia total recorrida de 269 unidades de medida.

Tabla 6. Ruta generada por el Algoritmo de Barrido para el día viernes.

RUTA VIERNES	DISTANCIA
24-9	147
9-8	23
8-24	129
Total:	299

ANEXO 29. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE BARRIDO PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Barrido para el día LUNES.

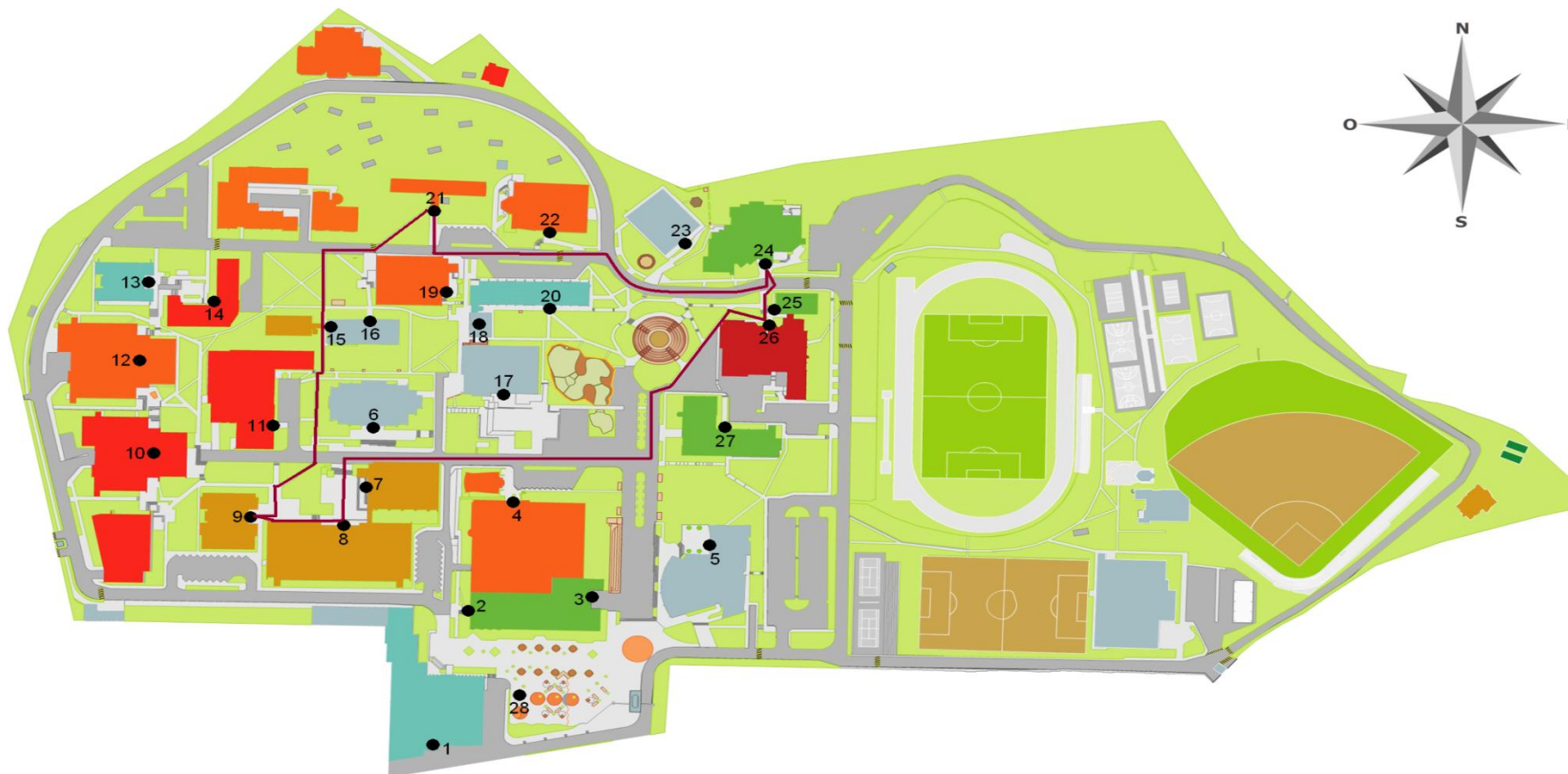


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Barrido para el día MARTES.



Figura 3. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Barrido para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Barrido para el día JUEVES.



Figura 5. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Barrido para el día VIERNES.



ANEXO 30. MATRICES DE AHORROS PARA LA SEMANA DEL 21 AL 25 DE FEBRERO DE 2011

Tabla 1. Matriz de ahorros para el día lunes.

	8	9	21	24	26
8		253	110,8	1	30
9			125,8	1	30
21				1	23,6
24					1

Tabla 2. Matriz de ahorros para el día martes.

	8	9	16	21	24	26
8		253	164,8	110,8	1	30
9			179,8	125,8	1	30
16				172,6	1	23,6
21					1	23,6
24						1

Tabla 3. Matriz de ahorros para el día miércoles.

	8	9	12	24	26
8		253	205,8	1	30
9			231,8	1	30
12				1	23,6
24					1

Tabla 4. Matriz de ahorros para el día jueves.

	8	9	24	27
8		253	1	92
9			1	92
24			1	1

Tabla 5. Matriz de ahorros para el día viernes.

	8	9	24
8		253	1
9			1
24			1

Tabla 6. Aristas a unir para formar las rutas usando el algoritmo de ahorros.

Aristas a unir para la ruta del día lunes	Aristas a unir para la ruta del día martes	Aristas a unir para la ruta del día miércoles	Aristas a unir para la ruta del día jueves	Aristas a unir para la ruta del día viernes
8,9	8,9	8,9	8,9	8,9
9,21	9,16	9,12	9,27	8,24
8,26	16,21	8,26	8,24	9,24
26,24	8,26	12,24	27,24	
21,24	21,24	26,24		
	26,24			

ANEXO 31. SOLUCIONES OBTENIDAS POR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS

Tabla 1. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros para el día lunes.

RUTA PARA EL DÍA LUNES	DISTANCIA
24,26	18
26,8	117
8,9	23
9,21	118
21,24	96,8
DISTANCIA TOTAL	372,8

Para este día se cuenta con tres repartidores que recorren una sola ruta, para poder suplir la demanda de todos los nodos en este día.

Tabla 2. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros para el día martes.

RUTA PARA EL DÍA MARTES	DISTANCIA
24,26	18
26,8	117
8,9	23
9,16	83
16,21	40
21,24	96,8
DISTANCIA TOTAL	377,8

Para el día martes, se obtiene una sola ruta que es recorrida por un solo repartidor, el cual puede suplir la demanda de todos los nodos en este día.

Tabla 3. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros para el día miércoles.

RUTA PARA EL DÍA MIÉRCOLES	DISTANCIA
24,26	18
26,8	117
8,9	23
9,12	70
12,24	154,8
DISTANCIA TOTAL	382,8

Igualmente, el miércoles un repartidor realiza un solo recorrido.

Tabla 4. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros para el día jueves.

RUTA PARA EL DÍA JUEVES	DISTANCIA
24,8	129
8,9	23
9,27	125
27,24	70
DISTANCIA TOTAL	347

El día jueves se realiza una ruta con un solo repartidor.

Tabla 5. Ruta obtenida por el Algoritmo de Ahorros para el día viernes.

RUTA PARA EL DÍA VIERNES	DISTANCIA
24,8	129
8,9	23
9,24	147
DISTANCIA TOTAL	299

Por último, para el día viernes se obtiene una sola ruta y un solo repartidor.

ANEXO 32. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día LUNES.

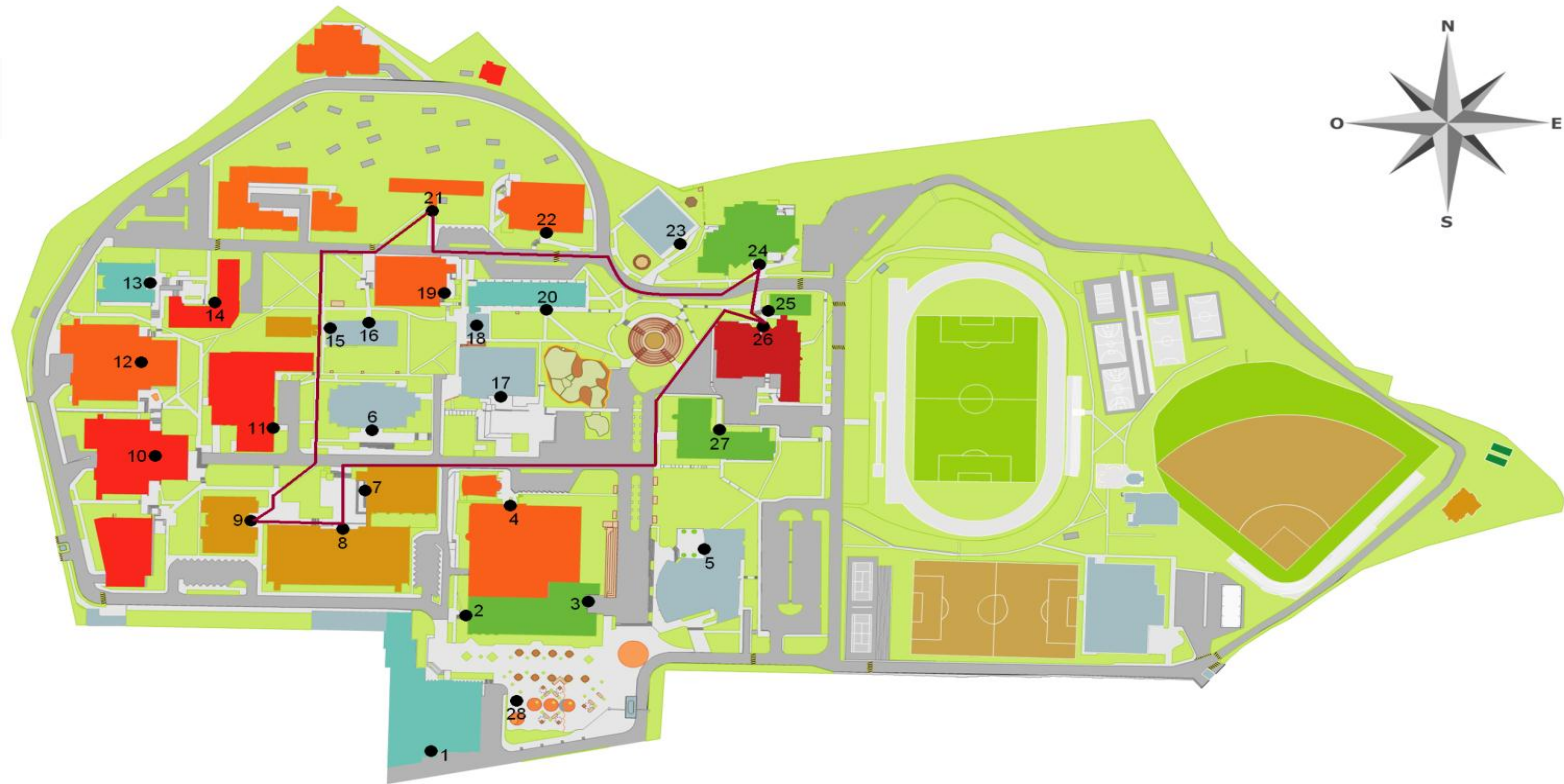


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día MARTES.



Figura 3. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día JUEVES.



Figura 5. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día VIERNES



ANEXO 33. RUTAS OBTENIDAS AL APLICAR EL ALGORITMO DE AHORROS MEJORADO ($\lambda= 0,1$) PARA EL CASO DE DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Tabla 1. Ruta obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros Mejorado, para el día LUNES.

RUTA 1 PARA EL DÍA LUNES	DISTANCIA
24,26	18
26,8	117
8,9	23
9,21	118
21,24	96,8
DISTANCIA TOTAL	372,8

Para esta ruta se requieren tres repartidores (da el mismo resultado que al aplicar el algoritmo de Ahorros sin mejora).

Tabla 2. Ruta obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros Mejorado, para el día MARTES.

RUTA PARA EL DÍA MARTES	DISTANCIA
24,21	96,8
21,8	115
8,9	23
9,16	83
16,26	110,2
26,24	18
DISTANCIA TOTAL	446

Para el día martes, se obtiene una sola ruta recorrida por un solo repartidor.

Tabla 3. Ruta obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros Mejorado, para el día MIÉRCOLES.

RUTA PARA EL DÍA MIÉRCOLES	DISTANCIA
24,26	18
26,9	135
9,12	70
12,8	78
8,24	129
DISTANCIA TOTAL	430

Para el miércoles un repartidor realiza un solo recorrido.

Tabla 4. Ruta obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros Mejorado, para el día JUEVES.

RUTA PARA EL DÍA JUEVES	DISTANCIA
24,8	129
8,9	23
9,27	125
27,24	70
DISTANCIA TOTAL	347

El día jueves se realiza una ruta con un solo repartidor.

Tabla 5. Ruta obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros Mejorado, para el día VIERNES.

RUTA PARA EL DÍA VIERNES	DISTANCIA
24,8	129
8,9	23
9,24	147
DISTANCIA TOTAL	299

Para el día viernes se obtiene una sola ruta recorrida por un solo repartidor.

ANEXO 34. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR LA MEJORA DEL ALGORITMO DE AHORROS PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día LUNES ($\lambda = 0.1, 0.4, 0.8$ y 1).

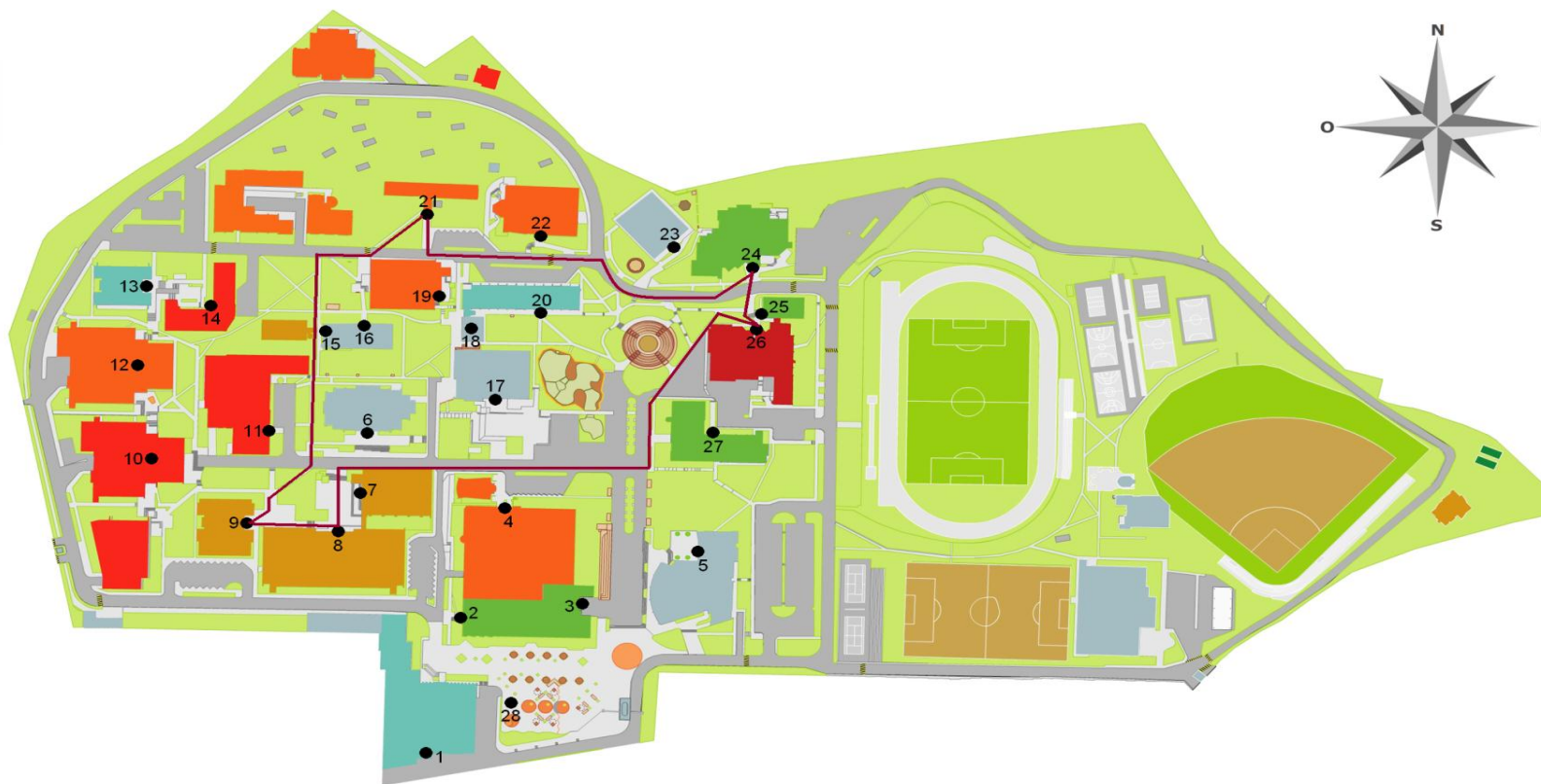


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día MARTES ($\lambda= 0.4, 0.8$ y 1).



Figura 3. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día MIÉRCOLES ($\lambda= 0,4$ y $0,8$).



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros para el día JUEVES ($\lambda= 0.1, 0.4, 0.8$ y 1).



Figura 5. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de Ahorros ($\lambda = 1$) para el día VIERNES ($\lambda = 0.1, 0.4, 0.8$ y 1).



ANEXO 35. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL ALGORITMO DE 2-OPT PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de 2-Opt para el día LUNES.

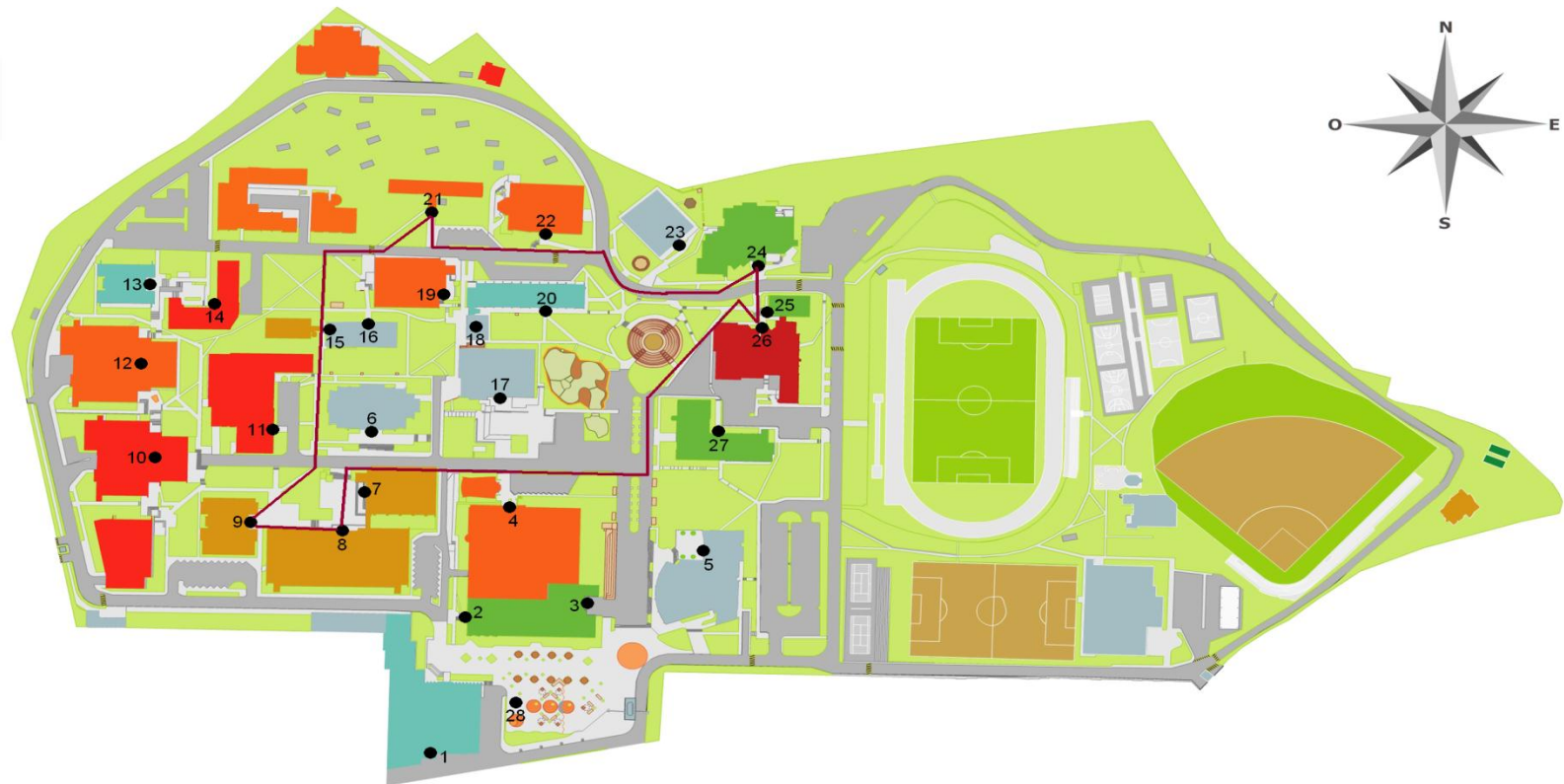


Figura 2. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de 2-Opt para el día MARTES.



Figura 3. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de 2-Opt para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar el Algoritmo de 2-Opt para el día JUEVES.



ANEXO 36. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR BÚSQUEDA TABÚ PARA EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALMUERZOS DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Solución obtenida al aplicar Búsqueda Tabú para el día LUNES.

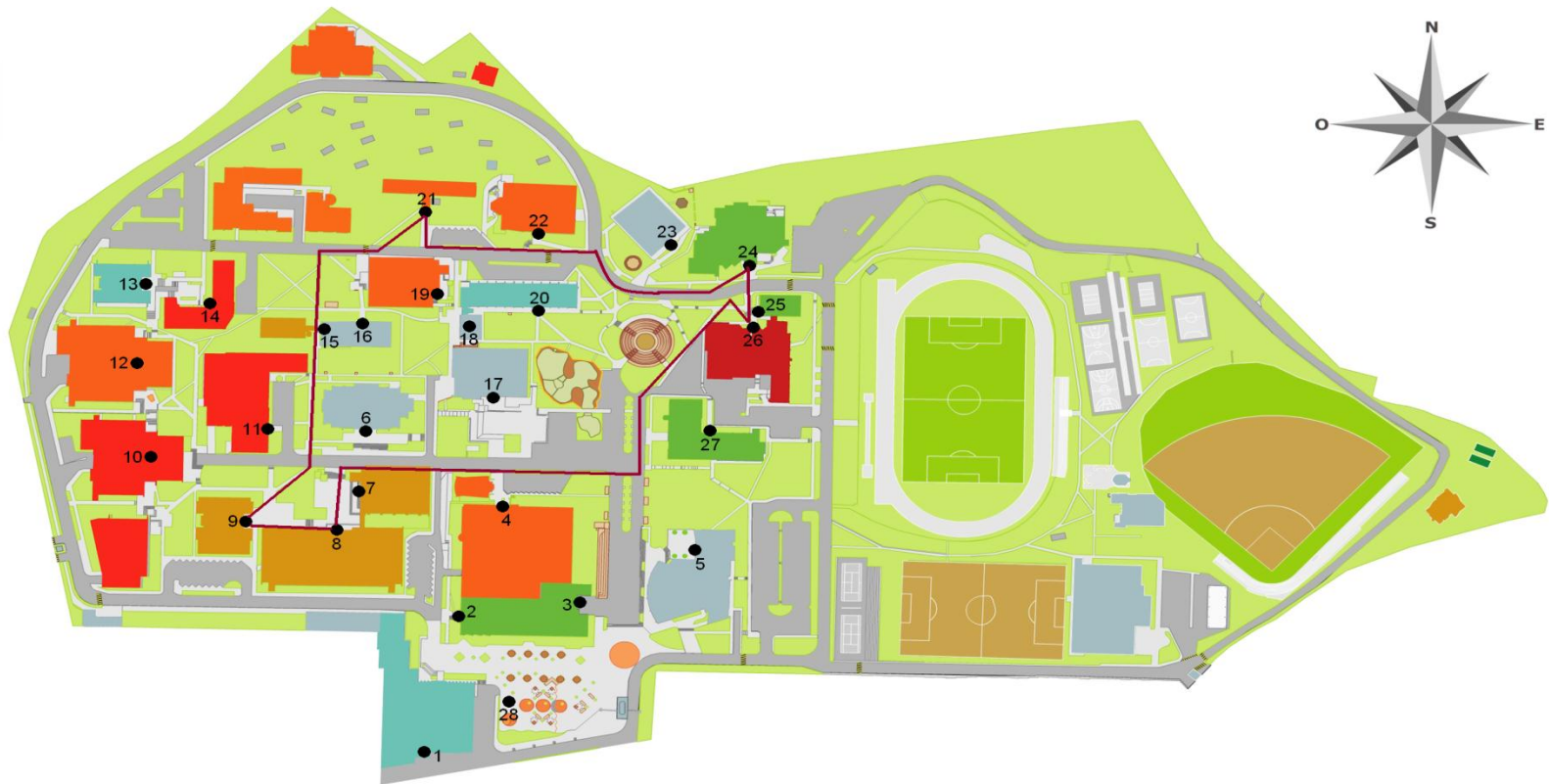


Figura 2. Solución obtenida al aplicar Búsqueda Tabú para el día MARTES.

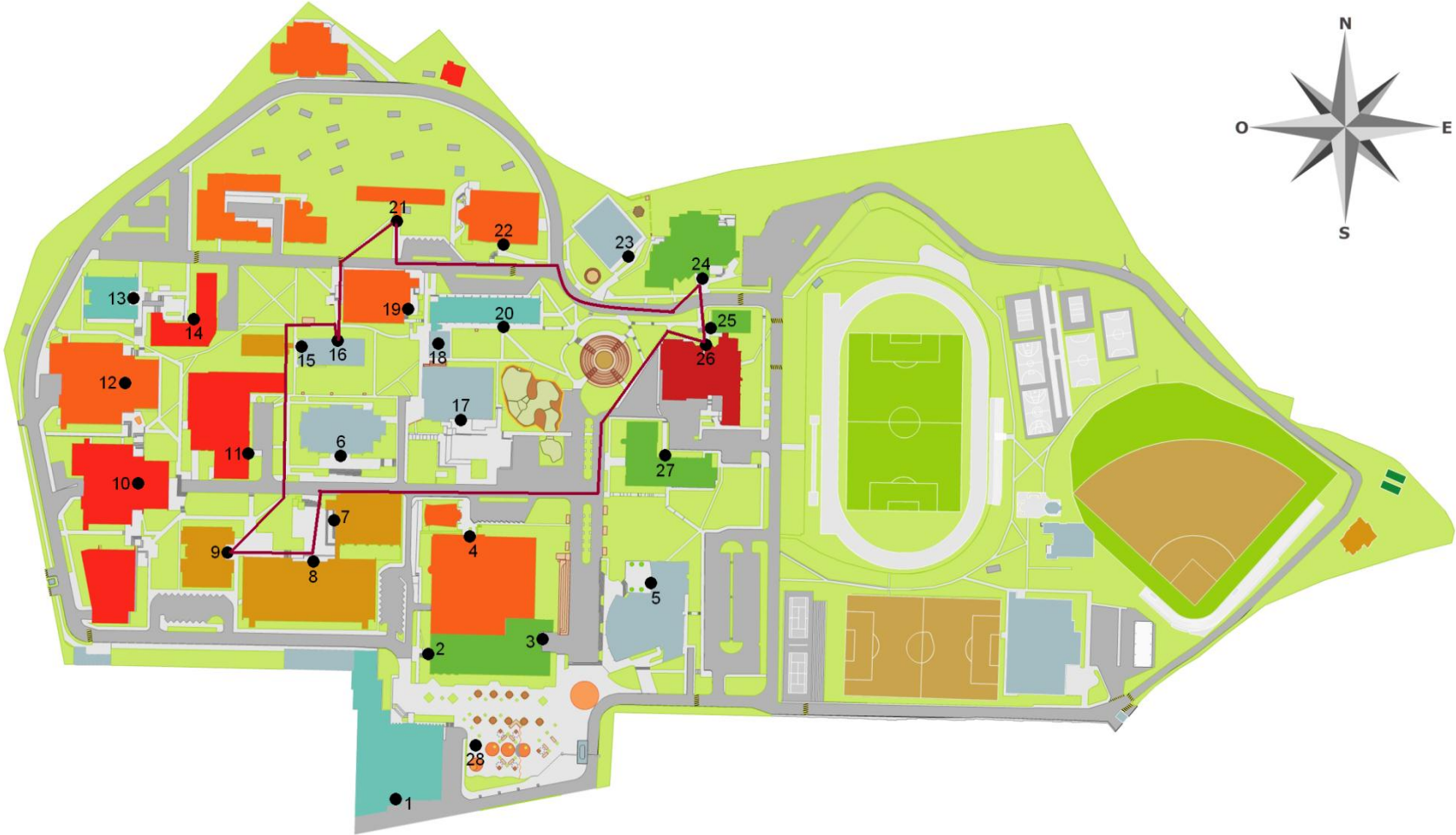


Figura 3. Solución obtenida al aplicar Búsqueda Tabú para el día MIÉRCOLES.



Figura 4. Solución obtenida al aplicar Búsqueda Tabú para el día JUEVES.



ANEXO 37. MATRIZ DE DISTANCIAS PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS

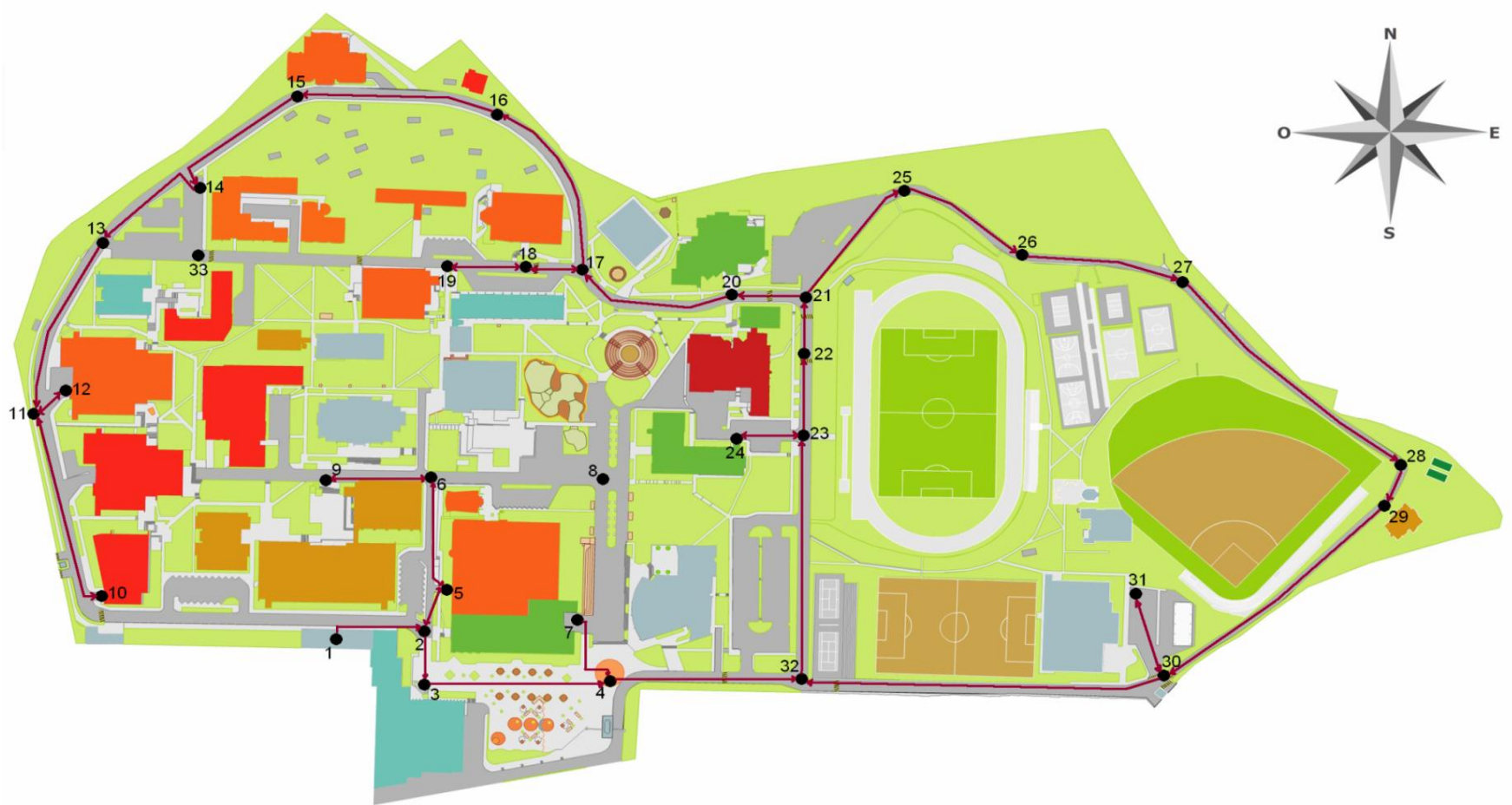
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1000	18	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	35,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
2	18	1000	7	1000	10,8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
3	1000	7	1000	37	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
4	1000	1000	37	1000	1000	1000	7,6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
5	1000	10,8	1000	1000	1000	26,3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
6	1000	1000	1000	1000	26,3	1000	1000	35	16	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
7	1000	1000	1000	7,6	1000	1000	1000	38	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
8	1000	1000	1000	1000	1000	35	38	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
9	1000	1000	1000	1000	1000	16	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
10	35,9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	44,6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
11	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	44,6	1000	8,6	37,3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
12	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	8,6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
13	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	37,3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
14	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	12,2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
15	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	11,4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
16	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	60	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
17	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	23,8	1000	7	1000	39	1000	1000	1000
18	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	7	1000	14	1000	1000	1000	1000
19	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	14	1000	1000	1000	1000	1000
20	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	39	1000	1000	1000	12	1000	1000
21	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	12	1000	1000
22	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	14	1000
23	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	30
24	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	12
25	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
26	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
28	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
29	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
30	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
31	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
32	1000	1000	1000	40	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	54

	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	40
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
10	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
11	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
12	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
13	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
14	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
15	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
16	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
17	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
18	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

	24	25	26	27	28	29	30	31	32
19	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
20	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
21	1000	26,4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
22	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
23	12	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
24	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
25	1000	1000	22,8	1000	1000	1000	1000	1000	1000
26	1000	1000	1000	23,5	1000	1000	1000	1000	1000
27	1000	1000	1000	1000	57,6	1000	1000	1000	1000
28	1000	1000	1000	1000	1000	12,5	1000	1000	1000
29	1000	1000	1000	1000	1000	1000	50,5	1000	1000
30	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	19,2	43
31	1000	1000	1000	1000	1000	1000	19,2	1000	1000
32	1000	1000	1000	1000	1000	1000	43	1000	1000

ANEXO 38. SOLUCIÓN OBTENIDA AL APLICAR EL MÉTODO EXACTO PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS



ANEXO 39. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE PARA LA ENTREGA DE CORRESPONDENCIA

Tabla 1. Dependencias Visitadas Actualmente en la Ruta 1, para la Entrega de Correspondencia.

ORDEN DE VISITA	NODO	DESCRIPCIÓN
1	1	División de correspondencia y Ciencias Humanas
2	27	Edificio Administración I - Entrada principal
3	26	Edificio Insed/Publicaciones
4	25	Edificio de Administración II
5	24	Edificio de Bienestar Universitario
6	23	Aseduis - Casona la Perla
7	22	Edificio de Ingeniería Industrial
8	20	Instituto de lenguas
9	18	Conmutador (cafetería)

Fuente: División de correspondencia de la Universidad Industrial de Santander.

Tabla 2. Dependencias Visitadas Actualmente en la Ruta 2, para la Entrega de Correspondencia.

ORDEN DE VISITA	NODO	DESCRIPCIÓN
1	1	División de correspondencia y Ciencias Humanas
2	4	Ingeniería Mecánica
3	17	Biblioteca
4	7	Edificio Camilo Torres
5	8	Laboratorio de Livianos
6	9	Laboratorio de Posgrados
7	11	Edificio de Ingeniería Química
8	10	Edificio Facultad de Ingenierías Físico Químicas
9	12	Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas
10	13	Edificio Daniel Casas
11	14	CEIAM
12	15	Favuis
13	16	Capruis
14	21	Edificio de Ingeniería Eléctrica
15	19	Edificio de Diseño Industrial

Fuente: División de correspondencia de la Universidad Industrial de Santander.

Tabla 3. Dependencias Visitadas Actualmente en la Ruta 3, para la Entrega de Correspondencia.

ORDEN DE VISITA	NODO	DESCRIPCIÓN
1	1	División de correspondencia y Ciencias Humanas
2	2	Mantenimiento y planta física
3	28	Tienda Universitaria
4	3	Banco
5	5	División Cultural/Auditorio L.A Calvo
6	6	Centic

Fuente: División de correspondencia de la Universidad Industrial de Santander.

ANEXO 40. MAPA DE LA RUTA ACTUAL EMPLEADA EN LA DISTRIBUCIÓN DE CORRESPONDENCIA EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER



**ANEXO 41. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE EN LA
REPARTICIÓN DE ALMUERZOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR
UNIVERSITARIO DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

Tabla 1. Ruta utilizada el día LUNES durante la repartición de almuerzos.

ARISTAS	DISTANCIA
24-26	18
26-8	117
8-9	23
9-21	118
21-24	96,8
TOTAL:	372,8

Tabla 2. Ruta utilizada el día MARTES durante la repartición de almuerzos.

ARISTAS	DISTANCIA
24-26	18
26-21	91,2
21-16	40
16-9	83
9-8	23
8-24	123
TOTAL:	378,2

Tabla 3. Ruta utilizada el día MIÉRCOLES durante la repartición de almuerzos.

ARISTAS	DISTANCIA
24-26	18
26-8	117
8-9	23
9-12	70
12-24	154,8
TOTAL:	382,8

Tabla 4. Ruta utilizada el día JUEVES durante la repartición de almuerzos.

ARISTAS	DISTANCIA
24-27	70
27-8	107
8-9	23
9-24	147
TOTAL:	347,0

Tabla 5. Ruta utilizada el día VIERNES durante la repartición de almuerzos.

ARISTAS	DISTANCIA
24-8	129
8-9	23
9-24	147
TOTAL:	299,0

ANEXO 42. MAPAS DE LAS RUTAS UTILIZADAS ACTUALMENTE POR LOS REPARTIDORES ENCARGADOS DE LA DIVISIÓN DE BIENESTAR UNIVERSITARIO

Figura 1. Ruta utilizada el día LUNES durante la repartición de almuerzos.

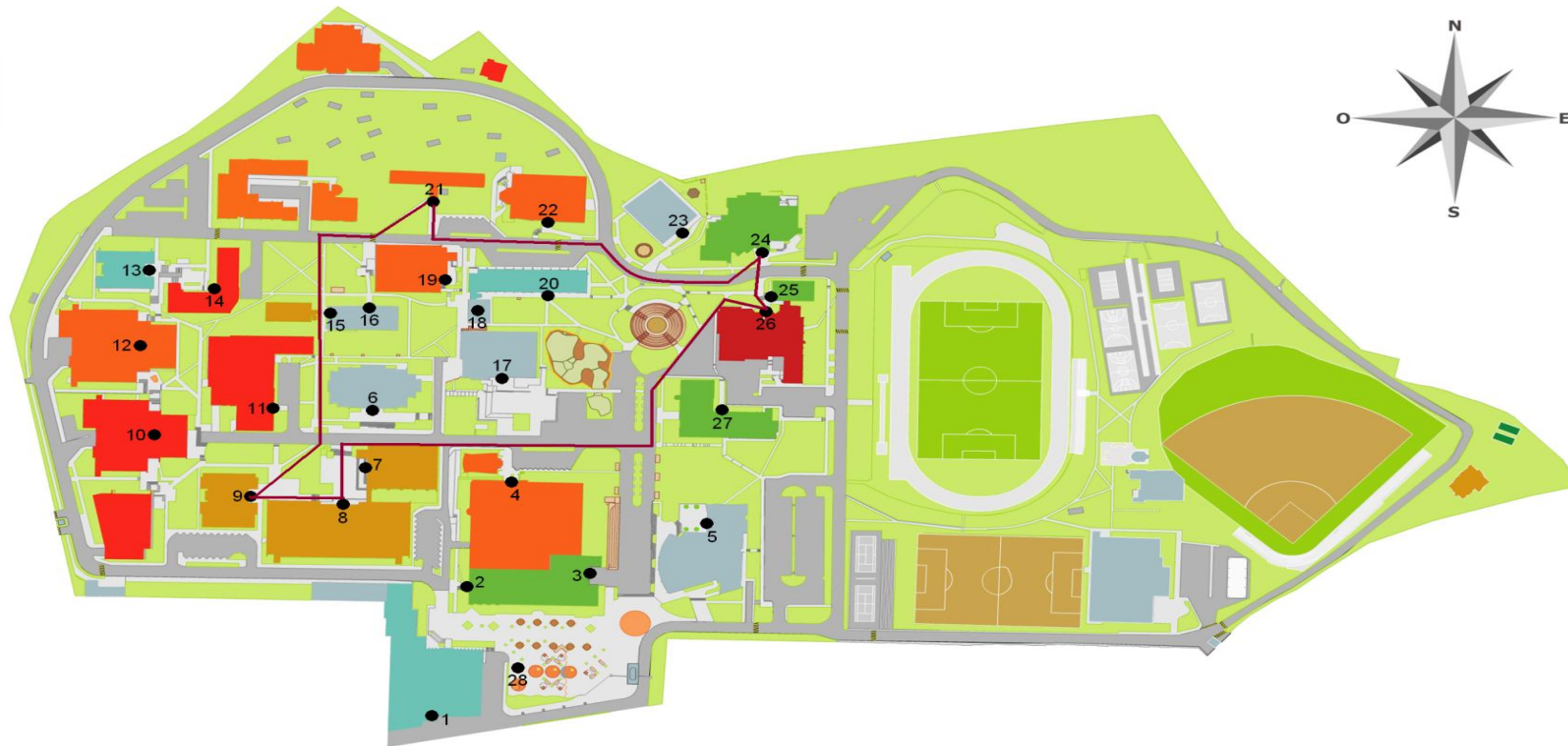


Figura 2. Ruta utilizada el día MARTES durante la repartición de almuerzos.



Figura 3. Ruta utilizada el día MIÉRCOLES durante la repartición de almuerzos.



Figura 4. Ruta utilizada el día JUEVES durante la repartición de almuerzos.



Figura 5. Ruta utilizada el día VIERNES durante la repartición de almuerzos.



ANEXO 43. DEPENDENCIAS VISITADAS ACTUALMENTE PARA LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ORDEN DE VISITA	NODO	DESCRIPCIÓN
1	1	Depósito
2	9	Punto de recolección en Camilo Torres
3	7	Punto de recolección en Mantenimiento tecnológico
4	5	Punto de recolección en Planta física y Escuela de Ingeniería Mecánica
5	3	Punto de recolección en Ciencias Humanas
6	24	Punto de recolección en Administración I
7	22	Punto de recolección en Edificio INSED/Publicaciones
8	29	Punto de recolección en Centro Nacional de Investigaciones para la Agroindustrialización de Especies Vegetales y Aromáticas y Medicinales Tropicales (CENIVAM)
9	30	Punto de recolección en Portería Carrera 30
10	31	Punto de recolección en Residencias Universitarias y Coliseo
11	20	Punto de recolección en Bienestar Universitario
12	18	Punto de recolección en Edificio de Ingeniería Industrial
13	19	Punto de recolección en Edificio de Diseño Industrial
14	14	Punto de recolección Laboratorio de Alta Tensión
15	12	Punto de recolección en Edificio Ingenierías Físico-Mecánicas
16	10	Punto de recolección en Planta de Aceros
17	11	Centro de acopio de los residuos

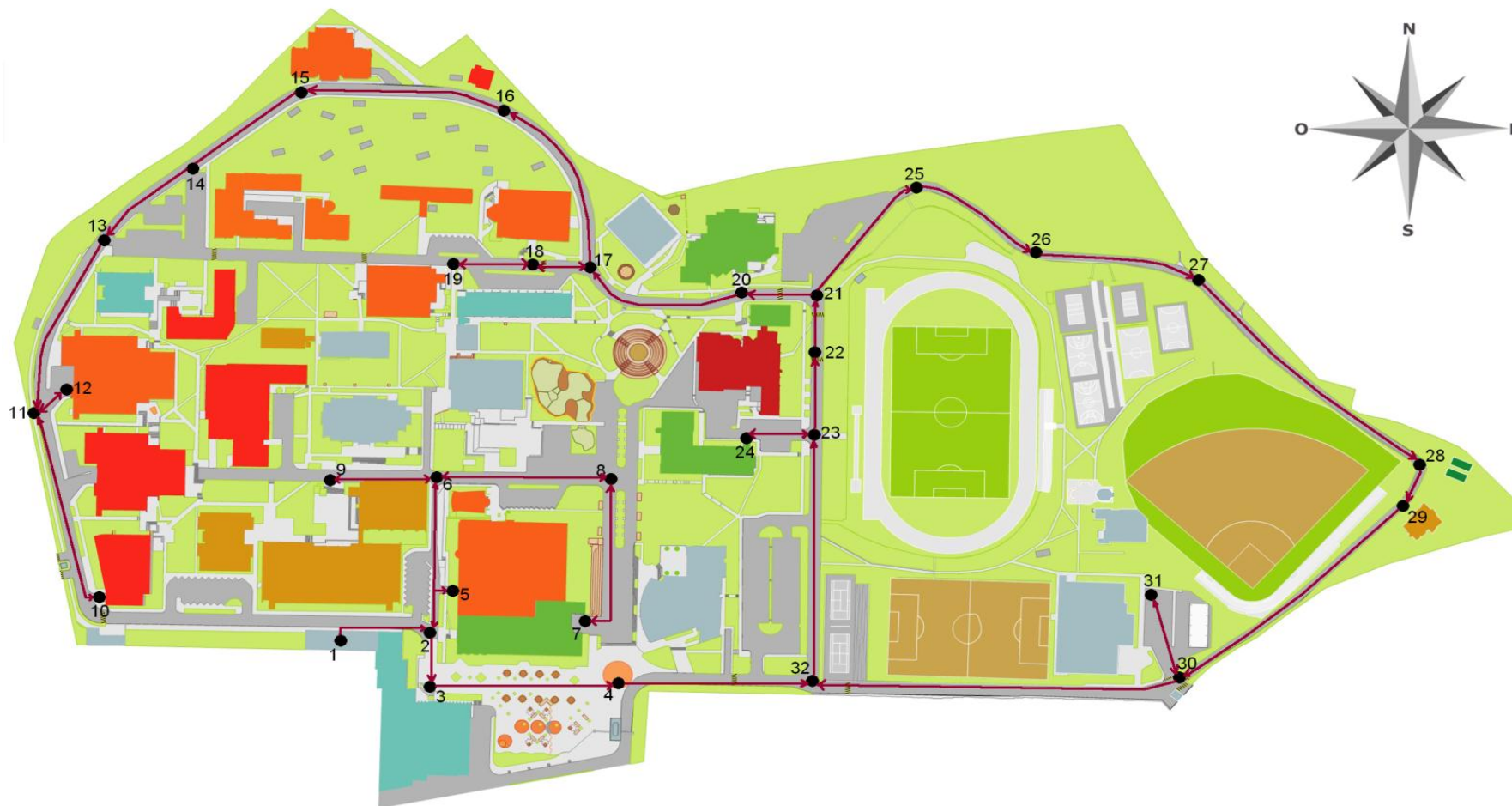
Fuente: División de Planta Física de la Universidad Industrial de Santander.

ANEXO 44. RUTA ACTUAL UTILIZADA POR LA DIVISIÓN DE PLANTA FÍSICA PARA LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.

ARISTAS	DISTANCIAS (unidades de medida)
1-2	18
2-5	10,8
5-6	26,3
6-9	16
9-6	16
6-8	3
8-7	38
7-8	38
8-6	3
6-5	26,3
5-2	10,8
2-3	7
3-4	37
4-32	40
32-23	54
23-24	12
24-23	12
23-22	30
22-21	14
21-25	26,4
25-26	22,8
26-27	23,5
27-28	57,6
28-29	12,5
29-30	50,5

ARISTAS	DISTANCIAS (unidades de medida)
30-31	19,2
31-30	19,2
30-32	43
32-23	54
23-22	30
22-21	14
21-20	12
20-17	39
17-18	7
18-19	14
19-18	14
18-17	7
17-16	23,8
16-15	60
15-14	11,4
14-13	12,2
13-11	37,3
11-12	8,6
12-11	8,6
11-10	44,6
10-11	44,6
DISTANCIA TOTAL	1129

ANEXO 45. MAPA DE LA RUTA ACTUAL EMPLEADA EN LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER



ANEXO 46. MAPA DE LA RUTA PROPUESTA PARA EL CASO DE LA RECOLECCIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

