# CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN CON LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA. CASO UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

YOANA ACEVEDO RICO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2011

**CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN CON LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA. CASO UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**YOANA ACEVEDO RICO**

**Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en Pedagogía**

**Directora**
**María Helena Quijano Hernández**
Magister en Educación

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**
**ESCUELA DE EDUCACIÓN**
**MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA**
**BUCARAMANGA**
**2011**

# Tabla de contenido

## LISTA DE TABLAS

## LISTA DE ANEXOS

## RESUMEN

**TÍTULO:** CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN CON LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA. CASO UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER*

**AUTOR**: YOANA ACEVEDO RICO**

**PALABRAS CLAVE:** Fracciones, parte-todo, el operador, la razón, la educación y el aprendizaje de las matemáticas.

**CONTENIDO**

La siguiente investigación tiene como objetivo general *Construir el concepto de Fracción a través de sus significados: partidor, razón y operador, en los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica.* Caso: Universidad Industrial de Santander. Realizado con la integración de los métodos cuantitativo y cualitativo. En una primera etapa se indaga e identifica los diferentes significados que tienen los estudiantes de fracción a través de una prueba diagnóstica, apoyados en dos lineamientos teóricos: la didáctica de las matemáticas y la formación de maestros, posteriormente se diseña e implementan tres unidades didácticas utilizando las herramientas: juego Partimundo, bloques lógicos de Zoltán Dienes y regletas de Cuisenaire para construir los significados de fracción: parte-todo, razón y operador; permitiendo éstas una observación directa del docente investigador con el grupo objeto. Finalmente se realiza una prueba final que se contrasta con la prueba diagnóstica y el análisis de las observaciones realizadas en la implementación de la estrategia.

El impacto de esta investigación genera en la educación superior la transformación de procesos de enseñanza a través de procesos de aprendizaje significativos de los docentes en formación.

Se hacen necesarias investigaciones a futuro sobre las operaciones básicas de las fracciones con material concreto, donde el estudiante adquiera un cálculo mental con las fracciones, tal como lo tiene con los números naturales, sin utilizar algoritmos que no le muestran la ampliación del círculo numérico, sino solo operaciones con números naturales. Por otra parte, la aplicabilidad de estas operaciones a la vida diaria, donde utilicen las operaciones de las fracciones desde sus diferentes significados y no como una extensión de números naturales.


---

*Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación, Maestría en Pedagogía. Director María Helena Quijano Hernandez

# ABSTRACT

**TITLE:** Construction of the concept of fractions with undergraduate students in basic education. Industrial University of Santander CASE *

**AUTHOR:** YOANA ACEVEDO RICO**

**KEY WORDS:** Fractions, part-whole, operator, reason, education and learning of the mathematics.

**CONTENT**

From a qualitative approach rested on the ethnography, the present investigation the being tried to characterize and to want to be of the school management of the educational executives, To identify the social representations that have the actors belonging to the school government on the school management of the executives and to determine the factors that favor or prevent the processes of school management in an educational institution of Girón Colombia's municipality. This investigation is framed in the line of investigation Quality and school Management, of the Mastery in Pedagogy assigned of the School of Education of the Industrial University of Santander.

In the year 2007 it was declared by the Department of National Education as the year of the educational management, seemingly one more concept, but actually it encloses the whole dynamics and problematics that the educational institutions are facing. The investigation contributes elements in the way like they can interpret the social representations, in this case the social representations that had the educational actors of the management of your educational executives. The educational actors contributed new ways of assuming the school management.

On having identified the processes of management one determined the factors that favor or prevent the management, a key moment in the analysis of a problematic situation and described which is to want to be of the educational actors with regard to the management of the educational executives.

Are necessary in future research on the basic operations of fractions with concrete material, where the student acquires a mental arithmetic with fractions, as it has with the natural numbers without using algorithms that do not show the extension number of the circle, but only operations with natural numbers. Moreover, the applicability of these everyday operations, where operations using fractions from its different meanings and not as an extension of natural numbers.


* Graduation Project

** Faculty of Humanities. School of Education, Master of Education. Director María Helena Quijano Hernández

# 1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 DESCRIPCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objeto de estudio del trabajo de investigación se sitúa en un campo general que denominamos Pensamiento Numérico, el cual constituye una de las líneas de investigación que articula el desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática, se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social. La línea de investigación Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico & Castro, 1995).

Dentro del pensamiento Numérico encontramos el Conjunto de los Números racionales. El estudio de este Campo Conceptual se emprende desde tres vertientes: una primera que aborda el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura matemática de los Números Racionales; una segunda que hace referencia a las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios de ese sistema numérico; y una tercera que se ocupa del campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante ese sistema numérico y de los problemas que con el mismo pueden abordarse y resolverse.

Una historia de más de 7000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones, han llevado a la configuración actual del concepto matemático de número Racional (Benoit, Chemla & Ritter, 1992) concepto sin duda complejo puesto que recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo (Feferman, 1989).

Ahora bien, en los procesos habituales de enseñanza las ideas y conceptos numéricos se justifican y presentan en orden deductivo, sin que ello signifique que el estudiante los organice y estructure cognitivamente de esta forma.

Una construcción del concepto de número racional cognitivamente efectiva exige de un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados, que se articulen con los dominios del campo numérico de los números naturales y de los números enteros. También supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevas interpretaciones sobre los distintos sistemas de representación fraccionaria y decimal.

De esta manera, el estudio de los números racionales se aborda con los números fraccionarios y los números decimales, convirtiéndolos en ejes articuladores de los contenidos tratados durante la básica primaria y secundaria. Desde una perspectiva didáctica la comprensión de este concepto por los escolares exige un largo aprendizaje, que comienza por el concepto de fracción, sostenido por un modelo físico que les permitan ver sus diferentes significados: partidor, razón, operador, entre otras; posteriormente, los escolares deben ampliar sus conocimientos a otros modelos, para finalizar, un proceso de abstracción, que debe conducir a la conceptualización formal del número racional. Cabe resaltar que para abordar los números decimales, el docente debe introducir la fracción con un significado de cociente y, posteriormente, establecer conexiones entre este significado y el de las expresiones decimales.

Lo anterior demuestra que, la comprensión del Campo Conceptual requiere entender el significado y el sentido de aplicación de conceptos, procedimientos y relaciones, a la vez que demanda necesidades y funciones cognitivas que caracterizan la aplicabilidad de dichos conceptos y sus relaciones con situaciones o fenómenos propios de la vida práctica.

Cabe resaltar que en Colombia, se ha venido teóricamente reformulando el concepto de número Racional en los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998), y que los diferentes significados de la fracción han sido propuestos en los Estándares de Competencias Básicas de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2005) para ser abordados desde primero hasta quinto grado de la Educación Básica Primaria, llevando secuencialmente este tema a otros, durante los demás años escolares, en la práctica escolar la enseñanza de las fracciones continua teniendo vacíos conceptuales y procedimentales por parte del docente en ejercicio; es así como las fracciones son uno de los ejes temáticos más rechazado por los estudiantes y de mayor dificultad en la matemática escolar básica.

La prueba Saber 5° y 9° MEN (2009) es aplicada a los estudiantes de la educación básica y evalúa las competencias que han desarrollado hasta quinto grado de educación básica primaria, y hasta noveno grado de la educación básica secundaria. Como componente fundamental de la estrategia de mejoramiento de la calidad de la educación, está alineada con los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el MEN (2005). Cada tres años se aplica y se divulgan sus resultados, de esta manera, las instituciones elaboran e implementan sus planes de mejoramiento y aprovechan las experiencias significativas de otros. Se ajustan estándares y se evalúa nuevamente la competencia de los estudiantes. En el año 2005 se realizó una prueba censal, realizándose un análisis e interpretación de los resultados obtenidos (MEN, 2006), donde es pertinente señalar que:

*En general son muy bajos los resultados en matemáticas, lo cual puede también dificultar el desarrollo de competencias en otras áreas, dado que el aporte de las matemáticas es esencial en la capacidad de razonamiento lógico junto con la capacidad comunicativa, como elementos base para el desarrollo de las demás competencias.*

Dichas pruebas han evaluado las siguientes competencias en matemáticas:

- Razonamiento y argumentación
- Comunicación, representación y modelación
- Planteamiento y resolución de problemas

Con las componentes:

- Numérico-variacional
- Geométrico-métrico
- Aleatorio

De acuerdo al análisis de los resultados nacionales en la prueba Saber MEN (2009) es pertinente señalar que:

- En el quinto grado, 31 de cada 100 estudiantes están en el nivel mínimo. Ellos son capaces de utilizar operaciones básicas para solucionar problemas, identificar información relacionada con la medición, hacer recubrimientos y descomposiciones de figuras planas, además de organizar y clasificar información estadística.
- El 17% de los estudiantes demuestra las competencias establecidas en el nivel satisfactorio, es decir, además de hacer lo definido para el nivel mínimo, estos alumnos saben, entre otros aspectos, describir algunas trasformaciones en el plano cartesiano, reconocer diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo, resolver problemas relacionados con la estructura aditiva y multiplicativa de los

números naturales y estimar la probabilidad de un evento para resolver situaciones en contextos de juegos o en acontecimientos cotidianos.

- El 8% de los estudiantes de ese grado se ubica en el nivel avanzado. Además de lo descrito anteriormente, demuestran competencias para reconocer y utilizar la fracción como operador, comparar diferentes atributos de figuras y sólidos a partir de sus medidas, establecer conjeturas sobre conjuntos de datos a partir de las relaciones entre diferentes formas de representación y enunciar las características de un conjunto de datos con base en algunas medidas de tendencia central, entre otras.
- Casi la mitad (44%) de los estudiantes no alcanza los desempeños mínimos establecidos en la evaluación de esta área al momento de culminar la básica primaria.

Las fracciones y sus diferentes significados son relevantes en toda la prueba, ya sea modelando la situación o como constructo necesario para interpretar la situación y poder realizar procedimientos precisos y acertados. Es así como podemos concluir que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la escuela presenta muchas dificultades, desde los vacíos conceptuales del docente a sus posibilidades didácticas al momento de abordarlos con sus estudiantes.

Desde esta posición y de acuerdo con la experiencia como docente y formador de Licenciados en Educación Básica, se presenta como trabajo de investigación, *el diseño, implementación y evaluación de una propuesta curricular para estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica, en la construcción del concepto de fracción*, dicho proceso tendrá dos miradas, una desde su propio proceso de aprendizaje y otro desde lo que será su futura práctica de enseñanza. El interés por este trabajo de investigación surge de la preocupación por las múltiples carencias en el conocimiento que sobre matemáticas y enseñanza de las matemáticas deben presentarlos estudiantes en formación como docente; es por ello que se considera necesario estudios e investigaciones dedicadas a profundizar y cualificar el conocimiento matemático del docente en formación. El estudio se centrará en los números Racionales, específicamente, el concepto de fracción[1] y sus diferentes significados.

La situación expuesta plantea como preguntas directrices del trabajo de investigación las siguientes:

- ¿Qué significados sobre fracción tienen los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica?

- ¿Qué errores conceptuales sobre fracción tienen los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica?

- ¿Cómo interconectan los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica los diferentes significados hacia el concepto de fracción?

Las anteriores preguntas permiten concretar el problema de investigación en el siguiente planteamiento:

> ***¿Cómo construir en futuros Licenciados de la Educación Básica el concepto de fracción?***

---

[1]La investigación considera las fracciones, como todos los números de la forma $\frac{a}{b}$ con $a$ y $b$ enteros, donde $b \neq 0$.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

La presencia de las fracciones, en el currículo de matemáticas es una constante que podemos observar, desde segundo grado de la educación básica primaria hasta noveno grado de la educación básica secundaria en el Pensamiento Numérico y se evidencia en la última versión publicada de los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas (MEN, 2005).

Además, desde Los Lineamientos Curriculares de matemáticas MEN (1998) se plantea la importancia del concepto de número racional a través de los diferentes significados de la fracción. Anterior a esto, en 1991 Vasco formula las diferentes interpretaciones de las fracciones, mostrando grandes vacíos en los procesos de enseñanza–aprendizaje, tanto en algunas interpretaciones de las fracciones, como las conexiones entre estas para construir finalmente el mega concepto de número racional.

La importancia de las fracciones dentro del currículo de matemáticas es debida a su interés fenomenológico y conceptual. Los diferentes significados y sus correspondientes sistemas de representación dan expresión a la complejidad que encierra el concepto de número racional, así como la multiplicidad de fenómenos, problemas y situaciones de la vida real que se modelan mediante este campo numérico.

El eje articulador del pensamiento numérico en matemáticas, de segundo hasta noveno grado de la educación básica, debe ser el número racional, teniendo en cuenta sus dos representaciones: fraccionaria y decimal, así como los diferentes significados de cada una de estas. De tal manera que el estudiante pueda establecer representaciones semejantes a un mismo número tal como $\frac{1}{2} = 0.5 =$

$50\% = comparar\ la\ estatura\ de\ un\ niño\ de\ 90cm\ con\ una\ persona\ de\ 180cm = la\ escala\ 1{:}\ 2\ en\ una\ maqueta$, etc.

Resultados de investigaciones han puesto de manifiesto que muchos de los problemas de comprensión sobre números racionales no se superan durante el periodo de la educación obligatoria; de hecho, se localizan igualmente en los estudiantes durante el periodo de su formación como docentes.

Se hace necesario estudiar las dificultades de comprensión que tienen los docentes en formación sobre los diferentes significados que componen el concepto de fracción y también sobre su estructura como sistema, es decir, como conjunto de entes, relaciones y operaciones. Igualmente, diseñar, implementar y evaluar alternativas didácticas que sirvan para poner de manifiesto las dificultades detectadas y para ayudar a los docentes en formación a la superación de estas. Con este objetivo se trata de evitar el riesgo de retroalimentar los errores de los escolares como consecuencia de las dificultades de comprensión de sus docentes. Superado este primer nivel se podrá continuar con su formación didáctica.

En el proceso de construcción del concepto de fracción es preciso disponer de materiales concretos, utilizados como mundos artificiales, que le permiten al estudiante crear conceptos desde su propia experiencia para luego propiciar espacios de formalización del concepto gradualmente. Así, a partir de la imagen y combinando pensamiento con experiencia, la construcción de las diferentes interpretaciones de las fracciones aparece conectada. Dicho proceso es complementado, posteriormente, con situaciones donde se vean las fracciones en diferentes contextos, además del ofrecido por el material concreto.

Es necesario fomentar un aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Para ello, se favorece un clima de trabajo en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, que tengan oportunidades para el diálogo, que el clima de la clase esté libre de presiones externas y que acepten que la comprensión de las diferentes interpretaciones de las fracciones exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodación de los nuevos conocimientos con los que ya tenían.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han de definir estrategias que permiten la relación con el lenguaje y los procesos propios de las matemáticas y del Campo Conceptual de los números Racionales, para este fin se plantea el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas, para construir el concepto de fracción, a través de los significados de *partidor, razón y operador,* utilizando como instrumentos el juego Partimundo, bloques lógicos de Zoltán Dienes y regletas de Cuisenaire, respectivamente.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Construir el concepto de Fracción a través de sus significados: partidor, razón y operador, en los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

• Indagar e identificar los diferentes significados que tienen los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica respecto al concepto de fracción.

• Identificar los procedimientos utilizados por los estudiantes Licenciatura en Educación Básicas en diferentes contextos a partir de los significados de partidor, razón y operador de la fracción.

• Diseñar e implementar en los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica, unidades didácticas con el juego Partimundo, los bloques lógicos de Zoltán Dienes y las regletas de Cuisenaire, para construir el significado de fracción como: partidor, razón y operador.

# 2. MARCO TEÓRICO

## 2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En 1978, se nombró como asesor del Ministerio de Educación Nacional para la reestructuración de las matemáticas escolares al doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe, por comisión de la Universidad Nacional, y con un grupo de profesionales de esa dirección se comenzó a revisar los programas de matemáticas de primero a tercer grado de la educación básica primaria, y se consideró esencial la elaboración de un marco teórico global que permitiera precisar los criterios con los cuales se deberían hacer la revisión y el diseño de los programas de los nueve grados de la educación básica.

La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.

La Ley General de Educación (Ley 115 de 1994, 1994), ubica la educación en Colombia en un contexto de descentralización y ejercicio de la autonomía escolar que se estructuró en el primer Plan decenal (Plan Nacional de Desarrollo Educativo) que cubrió el período de 1996 a 2005 e incluyó lo pertinente para que se cumplan los requisitos de calidad y cobertura.

La promoción automática (Decreto 230 de 2002, 2002) permeo durante la escolaridad la evaluación y promoción de los estudiantes para docente que se encuentran involucrados en esta investigación.

Los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN,1998) toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, uno de los cuales es la socialización de un diálogo acerca del Enfoque de Sistemas (Vasco, 1987) y el papel que juega su conocimiento en la didáctica. Los lineamientos están orientados a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana.

Por estas razones resulta difícil caracterizar las líneas generales que han orientado durante estos años la práctica educativa sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en general, y de los números fraccionarios, en particular. Ya que a pesar de los avances en la educación matemática, los docentes no encuentran la materialización de esta teoría en su prácticas pedagógicas. Llevar a cabo esta caracterización es pertinente dado que los sujetos de nuestro estudio han recibido su formación inicial con este sistema y durante los años mencionados; tanto sus conocimientos como sus desconocimientos tienen su origen en este plan de formación.

Los primeros contactos de los escolares con el número fraccionario se realizan a partir del concepto intuitivo de fracción en 4º grado (9-10 años). Modelando una situación con objetos discretos, la idea que se transmite a dichos escolares es la de la fracción como relación parte-todo: *un par de números escritos uno sobre otro y separados por una línea horizontal, el de abajo (denominador): indica el número de partes que se fracciona la unidad (un triángulo, un cuadrado, un círculo, un pastel, una pizza, etc.), el de arriba (numerador): indica las partes que se cogen.*

Posteriormente se presenta la idea de fracción como división, aun cuando la intención no es la de destacar otro significado de las fracciones, sino la de presentar a los escolares las fracciones impropias: *si el numerador es mayor que el denominador la fracción es mayor que 1 e indica que se ha cogido más de la unidad.*

La relación de equivalencia de las fracciones se convierte en una serie de reglas de amplificación *(multiplicar por el mismo número, numerador y denominador)* y simplificación *(dividir por el mismo número, numerador y denominador)*, desconociéndose la familia de equivalencias de una fracción.

Hay un afán por dar los algoritmos de las operaciones de la suma, resta y multiplicación, olvidándose por completo su significado, en el caso de la división de fracciones se presenta como producto de una primera fracción por la fracción inversa de la segunda.

Las situaciones problemáticas con fracciones son las mismas situaciones que se trabajaban con los números naturales y la fracción es un partidor de objetos.

A modo de síntesis, la secuencia instructiva recibida por los escolares de 4º grado (9-10 años), se inicia con la noción de fracción como relación parte-todo en contextos discretos o continuos y hay un interés en llenar al estudiante de algoritmos para las equivalencias y las operaciones básicas, carentes de significado en la vida diaria.

En el 5º grado (10-11 años) los documentos analizados reiteran el esquema del curso anterior: comenzar por las fracciones en su relación parte-todo, nuevamente se repiten los algoritmos para las equivalencias y operaciones básicas y se plantean algunas situaciones que se modelaban con números naturales. Las diferencias con el curso anterior estriban en la aparición de los números decimales como resultado de convenciones simbólicas. noción de números decimales que está asociada a la noción de fracción y surge como consecuencia, no justificada, de un cambio de sistema de representación; las nociones sobre fracciones están asociadas a modelos en los que se utilizan objetos distinguibles o figuras geométricas regulares; y los números decimales no se asocian a modelos sino a técnicas operatorias que permiten transitar entre distintas representaciones simbólicas entre las que se establece una relación formal más que conceptual.

Seguidamente se habilita a estos escolares en la escritura de las fracciones decimales como números decimales: escribimos el numerador y separamos, con una coma, tantas cifras contando desde la derecha, como ceros tenga el denominador; y al escribir los números decimales como fracciones decimales: el numerador es el número decimal sin la coma, y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía el número decimal.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números decimales se presentan como las operaciones de los números naturales salvo las reglas para saber qué hacer con la coma y las situaciones problemáticas continúan siendo modelos de números naturales, y aparecen los porcentajes como conceptos totalmente aislados de las fracciones y se muestran caminos y aplicaciones que no pasan del carácter netamente algorítmico.

El proceso de construcción del conjunto de los números Racionales, tal y como se ha caracterizado, viene a perfilar los conocimientos personales de los estudiantes en formación docente que participan en este trabajo. Estos estudiantes cursaron la educación básica primaria y, al igual que otros escolares que continuaron con los estudios de básica secundaria continuaron repasando años tras años las fracciones, enfocando su interés en los algoritmos de las equivalencias y las operaciones básicas y en su recorrido por la media vocacional, su currículo contempló la construcción del conjunto de los números Reales; sin embargo, no hicieron ninguna revisión del conjunto de los números Racionales.

De este modo encontramos que para estos estudiantes, posiblemente Conjunto de los números Racionales $\mathbb{Q}$, se acentúa como consecuencia del proceso seguido para la construcción de la disociación del concepto de fracción. Este hecho se constata en los resultados de una prueba diagnóstica que se efectuó a un grupo piloto de futuros docentes[2], de las respuestas dadas por estos estudiantes se deduce que la idea predominante que tienen sobre las fracciones está centrada en la relación parte-todo y, además, esta idea aparece asociada a un modelo; mientras que las expresiones decimales no tienen más significado que la mera descripción en términos de elementos del sistema de numeración decimal. Es más, estos estudiantes no formularon relaciones entre las diferentes interpretaciones de fracciones

### 2.1.1 Investigaciones anteriores que abordan el problema

En los apartados siguientes reseñamos aquellos contenidos de los documentos que aportan información relevante para esta investigación.

#### 2.1.1.1 Sobre concepciones y errores de los escolares

Los documentos analizados en torno a las concepciones y errores sobre los números Fraccionarios proporcionan, fundamentalmente, información sobre trabajos con escolares de la básica primaria, lo que indica que las preocupaciones de los investigadores se centran en analizar los fenómenos de enseñanza-

[2]Análisis de la Prueba diagnóstica realizada a un grupo piloto de 15 estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica de Quinto Semestre en el año 2007.

aprendizaje en el entorno en el que se produce la instrucción. Seguidamente se sintetizan los resultados encontrados que aportan al trabajo de investigación:

a) Existe desconexión entre los distintos significados de fracción; esta desconexión se aprecia tanto en intervenciones individuales como en trabajos colectivos. El significado de la fracción depende de la clase de problema y de la forma de presentación del mismo; esta diversidad no crea conflictos en la mente del alumno pues asignan a los problemas un estatus genérico de "matemáticas" (Haseman, 1987).

b) Entre los escolares no hay un significado predominante de fracción; así para un grupo de investigadores el sentido prioritario de la fracción es el de la relación parte-todo, en contextos discretos y continuos; mientras que otro grupo de investigadores identificó ideas de razón y proporción como constructos de fracción prioritarios en los jóvenes (Pitkethly & Hunting, 1996).

c) Las notaciones fraccionarias y decimal son sistemas simbólicos paralelos que representan los mismos conceptos; para el alumno es una idea difícil de asimilar el que cualquier concepto, especialmente un número, pueda tener más de un símbolo (Owens & Super, 1993).

d) Los estudiantes generalizan el significado de las representaciones simbólicas para números naturales a fracciones, y viceversa (Marck, 1995).

#### 2.1.1.2 Sobre las propuestas de enseñanza

Desde la perspectiva docente se constata que la instrucción tradicional sobre fracciones es altamente vulnerable a la crítica bajo distintos ángulos y esto provoca una multiplicidad de propuestas que ofrecen diferentes perspectivas para abordar el proceso instructivo.

A nivel Internacional:

En los últimos años se ha producido una gran riqueza de información en torno a las fracciones, esto se ha hecho evidente en publicaciones recientes de volumen es completos (*The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, 2 y 3,2003) consagrados a investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción, de las cuales mencionamos algunas de ellas en los siguientes párrafos:

Investigadores como Sáenz-Ludlow (2003), Steencken y Maher (2003) y Bulgar (2003) realizaron experimentos de enseñanza en torno al conocimiento de las fracciones con alumnos de cuarto grado de educación básica. Un importante resultado del estudio de Sáenz-Ludlow (2003) fue que los niños construyeron un puente entre sus conocimientos de número natural y la conceptualización inicial de fracción, en particular, en todos discretos. Por su parte, Steencker y Maher (2003) observaron en los alumnos el uso de diagramas con explicaciones para exponer sus ideas alrededor de fracciones. Asimismo, Bulgar (2003) señala que las representaciones creadas por los niños para expresar sus ideas y argumentar sus respuestas los ayudaron a resolver las actividades planteadas con fracciones.

En 2003 Nabors implementó un experimento de enseñanza constructivista con cuatro estudiantes que interactuaron en un micromundo computacional usado para resolver tareas de razonamiento fraccionario.

Otros estudios efectuados en torno a la enseñanza de las fracciones (Steffe,2002, 2003; Tzur, 2004), en los cuales los niños interactúan entre ellos y con el investigador, plantean la interacción como actividad importante para la comprensión de este contenido.

También hay investigaciones que enfocan su atención en las estrategias de solución que presentan los estudiantes en los problemas vinculados con la noción de fracción (Christou & Philippou, 2002; Misailidou & Willians, 2003).

Una investigación sobre enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado y consta de un programa de enseñanza integrado con actividades que giran en torno a varios escenarios afines a la vida real de los niños (Perera & Valdemoros 2009)

Hay documentos que contienen recomendaciones justificadas para el diseño de la secuencia instructiva, como las de prestar atención al conocimiento informal de los niños o las de potenciar las experiencias concretas para adquirir y representar los conceptos abstractos (Kieren, 1993; Marck, 1995).

En las propuestas didácticas parciales los autores priorizan uno de los distintas interpretaciones del número fraccionario, la propuesta de Streefland (1991) potencia el significado de la fracción como cociente y en los trabajos de Dienes (1972) se prioriza el significado de la fracción como operador.

Conceptualizar la multiplicación de fracciones con el modelo de área (extendiendo al concepto de multiplicación de números naturales), a partir del doblado de papel (Sinicrope, 1992).

A nivel nacional:

Se han realizado reflexiones sobre el problema de enseñanza y aprendizaje de los diferentes significados de fracción, a partir de la desconexión de estos significados del concepto en los contenidos y el énfasis sobre el significado de “partidor de objetos” en la educación básica primaria, así como el afán de los docentes por dar como una receta los algoritmos de las operaciones básicas (Vasco, 1991). Profundiza sobre el énfasis que se debe dar al concepto de fracción, a través de los diversos significados.

Se propone iniciar con el significado de operador en los niños de la básica primaria en los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998). Se logran expresar a través de estándares mínimos las diferentes interpretaciones de la fracción a lo largo de la básica primaria y secundaria en los Estándares de competencias básicas de matemáticas (MEN, 2005).

Se materializan los estándares y se realiza una propuesta alrededor de la enseñanza de los números Racionales a partir del significado parte-todo, utilizando proceso de medición (Obando, 2003).

De la lectura de los documentos mencionados se deduce que el tópico de los números fraccionarios presenta dificultades desde una perspectiva docente. Todo ello se traduce en la existencia de una multiplicidad de enfoques para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje, cuya propia existencia da muestras de que ninguna de ellos resulta plenamente eficaz para la instrucción. Se resaltan en estos trabajos: *la preocupación que tienen los autores por ofrecer modelos físicos, pero no se evidencia un análisis previo sobre las posibilidades y obstáculos de dicho modelo.*

#### 2.1.1.3 Conocimientos, creencias y concepciones de los profesores en ejercicio y en formación

Un estudio acerca de las creencias y concepciones de los estudiantes en formación como docente sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, se reseña: La calidad de la enseñanza de las matemáticas está relacionada con el éxito de los estudiantes, con los métodos de enseñanza y con las creencias del estudiante sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje (Flores & Godino, 1995).

Estudios sobre el conocimiento personal de los futuros docentes sobre los números Racionales. A partir de uno de los capítulos que conforman el trabajo de revisión bibliográfica elaborado por García (1997), se reseñan los resultados de mayor interés:

- Muchos de los futuros docentes tienen dificultades en resolver las cuestiones y problemas planteados sobre números racionales y, en algunos casos, las respuestas eran correctas, pero las justificaciones y el procedimiento empleado eran difícilmente aceptables.
- Los conocimientos personales sobre los números racionales de los futuros docentes, (construidos a través de sus experiencias como estudiantes universitarios y preuniversitarios), tienden a estar limitadas al uso de reglas.
- Entre los futuros docentes existe una fuerte preponderancia de la noción de fracción como relación parte-todo.
- Los estudiantes en formación como docente tienen mayores dificultades en las tareas con fracciones mayores que la unidad y en las que exijan la identificación de la unidad.
- Los futuros docentes que tienen un conocimiento simbólico y algorítmico de las fracciones bastante apropiadas, presentan dificultades en interconectarlos diferentes significados al concepto de fracción.

De los documentos sobre las opiniones de docentes en ejercicio acerca de su experiencia en las aulas, se resaltan aspectos relevantes obtenidos de los trabajos de Llinares & Sánchez (1988):

- Las creencias de los docentes sobre el papel de las matemáticas condicionan la enseñanza de las mismas.

- Los estudiantes no conciben la utilización de las matemáticas en su vida diaria.
- No parece que exista una dependencia entre la metodología utilizada y las actitudes hacia las matemáticas promovidas en los escolares.
- La formación de los escolares ya no demanda que se conceda tanta importancia a las destrezas específicas (básicamente aritméticas), ahora se precisa más la percepción de ideas y conceptos matemáticos más generalizados.

Del trabajo de investigación con maestros en formación sobre sistemas de representación de números racionales (Gairín, 2001), mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Para ello se define un modelo desde el que se construyen dos sistemas de representación de cantidades no enteras de magnitud, a través de éstos se conceptualiza a las expresiones fraccionaria y decimal como resultados de repartos igualitarios.

Las relaciones entre las producciones previas de estos estudiantes y su actuación como profesores que revisan tareas realizadas por escolares, se concluye que

- A mayor comprensión del modelo por parte de los futuros maestros, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares, y más tienden a ofrecer razonamientos sustentados en el mundo de los objetos.

- Los estudiantes para maestro que muestran una débil comprensión del modelo llegan a aceptar como correctas respuestas erróneas de los escolares, y priman el lenguaje simbólico en las explicaciones que ofrecen a los niños.

## 2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Sobre los procesos de construcción de la matemática del nivel básico Socas y Camacho (2003) mencionan dos procesos: la elementarización, como reducción de un contenido matemático a formas más elementales, que se consideran fundamentales y accesibles para los estudiantes y la transposición didáctica, proceso mediante el cual se organiza el saber matemático a enseñar, a partir del saber disciplinar, por medio de acciones didácticas (Chevallard, 1991). En ambos procesos la percepción que se tiene de la matemática es la del cuerpo disciplinar organizado estructuralmente: se trata de elementarizar o de transponer didácticamente esos contenidos formales. No se habla, por ejemplo, de considerar la perspectiva histórica constructiva de los conocimientos matemáticos, ni su función modeladora y de aplicabilidad, y de intentar “llevarlas” al nivel elemental.

De ahí que presentar en el aula elementos histórico-culturales clarificadores, o intentar procesos constructivos con los alumnos, o intentar relacionar matemática y entornos vitales por la vía de la modelación y de las aplicaciones -la actitud de reinventar la matemática, de la que habla Freudenthal (1991), se consideran siempre como agregados al discurso matemático, productos del esfuerzo didáctico de la institución escolar o del docente, pero ajenos a ese discurso “estrictamente” matemático.

La didáctica de la matemática se preocupa por los elementos históricos, de modelación y aplicación al mundo de la vida de los educandos y por la participación activa de éstos en la construcción de los conocimientos matemáticos. Debe partirse de una visión compleja e integral de la matemática, que trascienda las limitaciones de exclusivamente formal y tome en cuenta también, particularmente, la perspectiva histórico-constructiva y la que contempla la matemática desde los contenidos de la realidad, de cara a la modelación y a las aplicaciones (Antibi & Brousseau, 2000).

El tema de la construcción del objeto matemático fracción no está dilucidado por completo y de una manera definitiva. Son múltiples los enfoques utilizados para su conceptualización. A lo largo de la historia se han forjado diferentes significados sobre las fracciones, significados que algunos autores denominan constructos, entendiendo como tales a las distintas interpretaciones de las aprehensiones de objetos del mundo real a objetos mentales, incluyendo también las creaciones mentales y actos físicos que están implicados en su génesis.

Los diferentes significados de la fracción que citan Behr, Harel, Post, y Lesh (1993) son:

- Razón
- Operador
- Parte-todo
- Cociente
- Medida

Sin embargo, Kieren (1993) no considera el constructo parte-todo puesto que lo incluye en las interpretaciones de cociente y medida.

Ohlsson (1988) intenta explicar toda esta variedad al afirmar que la dificultad existente para definir el concepto de fracción tiene una raíz semántica, consecuencia de la naturaleza compuesta de las fracciones, lo que acarrea una falta de clarificación en las distinciones entre los objetos mencionados antes: fracciones, medidas, cocientes, operadores, ratas, razones, proporciones, números racionales. Para Ohlsson, todos estos son términos de un campo semántico diferenciado. Su hipótesis de trabajo es que todos ellos no son estrictamente términos matemáticos, sino términos de aplicación, es decir, referidos a las aplicaciones de ciertas teorías matemáticas a situaciones del mundo real.

Vasco (1991) habla del constructo de fracción como el archipiélago de los números fraccionarios, haciendo una metáfora del concepto de fracción como un archipiélago de islas, siendo estas últimas las diferentes interpretaciones que hay de fracción y convirtiéndose el proceso de enseñanza-aprendizaje como el posibilitador para abrir conexiones entre estas islas. Señala el significado de operador como el más indicado para introducir al niño en el concepto de fracción, convirtiendo a las fracciones en máquinas “achicadoras” y “agrandadoras” que transforman magnitudes; y solo partiendo de los operadores llegar a otros significados. Las consideraciones de vasco orientan el marco teórico de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN,1998) y los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas (MEN, 2005) en lo que respecta a las fracciones desde 2° de la Básica Primaria hasta 9°de la Básica Secundaria.

Vasco también señala la poca pertinencia que se ha venido dando a la fracción como partidor de objetos físicos, siendo estos contextos grandes errores conceptuales que se derivan de acciones físicas que se realizan sobre los objetos, no sobre sus magnitudes, tales es el caso de la pizza, la manzana, el pastel partido en “partes iguales” (preguntándonos siempre ¿iguales a qué?), de los cuáles siempre tomábamos un pedazo. Estos contextos son llevados por el docente al aula de manera gráfica, que además de procesar en los aparatos digestivos de sus estudiantes no generan más representaciones geométricas planas y regulares al tablero.

Tal es el caso de la naranja partida en dos pedazos, son varias las magnitudes que podríamos pensar alrededor de ésta, como su peso, su volumen, su precio, la cantidad de jugo que puedo sacar, los días que tardó el árbol en dar este fruto, etc. Sin embargo se lleva al estudiante a partirla físicamente y en el peor de los casos partirla imaginariamente, que representándose en el cuaderno se convierte en el trazo de una circunferencia que olvida a la naranja y toda la “vitamina” que podríamos tener de este contexto.

En todas estas posiciones se observa la ausencia de referencias a elementos históricos que bien pueden clarificar algunos aspectos no siempre precisos. Por ejemplo, la disyuntiva de si básicamente una fracción indica una relación parte-todo o si, más bien, se trata de la expresión de una medida, pierde su carácter de mutua exclusión u oposición (Escolano & Gairín, 2005) si se adopta una perspectiva histórica.

Desde esta perspectiva, el objeto fracción aparece para dar cuenta de situaciones cotidianas tales como los repartos de herencias, bienes y tierras, o el pago de tributos, diezmos e impuestos, y otras más, en las que, además de las cantidades enteras implicadas, aparecía un nuevo elemento a considerar: la relación entre la parte (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado…) y el todo (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos…).

Como la parte y el todo venían denotados por números naturales, se requería una nueva expresión -un nuevo tipo de número…- para indicar esa relación entre dos números naturales. Este es el significado cultural primigenio de la fracción: la expresión numérica de la relación entre una parte y el todo. Este requerimiento cultural -“números que representan fracciones”- aparece plasmado en símbolos abstractos ya desde las culturas babilónica y egipcia.

A continuación, se revisarán los tres significados de fracción que interesan ser abordados en la investigación, de los que se indican sus características más destacadas, los elementos básicos que necesita el estudiante para la construcción de su conocimiento personal y las dificultades que puede encontrar en dicha construcción.

#### 2.2.1.1 La fracción como partidor

Se presenta esta situación cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "iguales" (congruentes con respecto a la magnitud en consideración). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes que forman el “todo”. El “todo” recibe el nombre de unidad.

Volviendo al ejemplo de la naranja:

> *Nuestra magnitud en consideración será: su precio.*
> *En nuestro contexto podemos comprar naranjas por unidad. Si tenemos que el precio de una naranja es la mitad del precio de un limón. Si la naranja cuesta $200, entonces el limón costará $100.*
> *En este ejemplo la unidad de medida es el precio de la naranja (200 pesos), es el “todo” que me permitirá comparar en partes “iguales” (2 partes congruentes en precio: 100 pesos) el precio del limón.*

***¿Cómo ha sido el Proceso de enseñanza-aprendizaje?***

A lo largo de la historia del proceso de enseñanza-aprendizaje de los números fraccionarios en Colombia hemos podidos observar una preocupación por volver concreto el concepto de fracción en el niño. Sin embargo, estas preocupaciones han sido las consecuencias de los diferentes errores conceptuales de la fracción como un partidor de objetos. Estas reflexiones, ya las hacia Vasco (1991), materializándose y llevado a gran cantidad de docentes a través de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y más reciente en los Estándares de competencias Básicas en Matemáticas (MEN, 2005). Sin embrago podemos observar en los diferentes libros que muestran las editoriales actuales, que no ha sido superado el problema de fondo más que de forma. Se recalcan las ideas de unidad y de partes iguales de la unidad:

*La fracción expresa dos relaciones: una con la unidad entera, y otra con la unidad fraccionaria, o bien expresa el número de partes en que está dividida la unidad, y el número de estas partes que se toma. Así, su expresión tiene que ser también doble y consta de dos números que se llaman términos de la fracción.*

*Llámese DENOMINADOR el que expresa la relación que tiene la fracción con la unidad entera, o sea, el número de partes en que ésta se halla dividida.*

*NUMERADOR, el que expresa la relación que tiene la fracción con la unidad fraccionaria elegida, o sea, el número de partes iguales de la unidad entera que contiene.*

El significado de fracción como relación parte-todo se introduce mediante un proceso instructivo que presenta características como las siguientes:

a) Buena parte del conocimiento se adquiere de forma visual, pues los escolares deben realizar tareas:
   - *Sombrear* $\frac{1}{2}$ *del rectángulo dado.*
   - *Aquí hay cuatro bolas. Tres de ellas son rojas y una es amarilla. ¿Qué parte o fracción de las bolas son rojas?*

En estos ejemplos aparecen dos tipos de cantidades sobre las que se trabaja: cantidades continúas (generalmente una región geométrica) o un conjunto discreto de objetos que son idénticos. En general, se recurre a la presentación de las fracciones como superficies destacadas (mediante sombreados o coloreados), incluidas en una superficie representada por una figura geométrica (generalmente círculos o rectángulos). Y en algunos casos se presenta la fracción mediante conjuntos de objetos indistinguibles, de los que unos se presentan de manera destacada (con sombras o colores), y otros aparecen en blanco o dejando constancia de su ausencia.

b) Puesto que la tarea encomendada al alumno es la de relacionar la parte con el todo, esto lo debe realizar a través de representaciones gráficas y simbólicas.

c) En la representación gráfica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan el todo, los que representan las partes y determinar las relaciones que hay entre ambos.

d) Las representaciones gráficas que se hacen de objetos reales no son siempre reconocibles por el alumno puesto que se tiende a la simplificación de esos objetos mediante figuras rectangulares o circulares (en cantidades continuas) o bien simples círculos (en cantidades discretas)

***¿Cómo debe ser el proceso de enseñanza-aprendizaje?***

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del estudiante son las siguientes:

a) La definición del "todo"

No es sencillo transmitir al estudiante la idea que subyace en el término "todo" puesto que en realidad se hace referencia a un proceso de medida pero que no se ha explicitado, por lo que se omite citar la unidad de medida, por ejemplo, cuando una unidad, objeto o figura, la partimos en trozos iguales y nos referimos a uno o varios de esos trozos utilizamos las fracciones.

La noción de "todo" sustituye a la de unidad, lo que lleva asociada la tarea de medir. La no explicitación de la noción de unidad exige que sea el propio alumno el que la construya.

Además, la propia indefinición del "todo" provoca errores entre los estudiantes a quienes se les presentan tareas de comparación de áreas utilizando 'todos' del mismo tamaño. Esto produce que los alumnos desatiendan el tamaño de los 'todos' de los que provienen las partes (Armstrong-Novillis, 1995, pág. 16) y que, en consecuencia, se limiten a la comparación de partes que proceden de divisiones de unidades de distinto tamaño.

La ocultación de la unidad de medida obstaculiza la identificación de las fracciones del tipo $\frac{a}{a}$ con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que ese tipo de fracciones representa el todo, o que han cogido a elementos, pero no pueden indicar que vale la unidad puesto que no se les ha presentado como tal.

b) La igualdad de las partes

En cantidades continuas el alumno se encuentra con la necesidad de identificar la igualdad de dos regiones planas, lo que conlleva la igualdad de dos áreas.

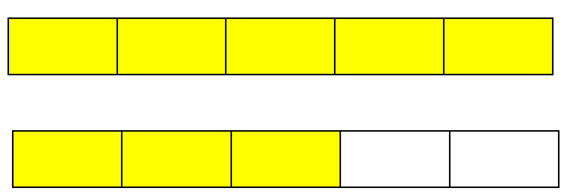
Pero esta igualdad es visual puesto que lo que se requiere del estudiante es que identifique las partes destacadas de un determinado gráfico, y no que compruebe la igualdad real del tamaño de las partes. Es por ello que se suele presentar al alumno figuras claramente diferenciadas, en las que su trabajo de traducción de la representación gráfica a la simbólica se haga por técnicas de recuento. Es más, el alumno puede no identificar como una fracción a partes de un gráfico, si la parte destacada no llega a ser fácilmente identificable como resultado de una división del "todo" en partes iguales a una dada. Además, en este juego de delimitar la presentación de las fracciones en forma de gráficos, el trabajo escolar llega a utilizar determinadas figuras geométricas para cada tipo de fracción, lo que conlleva dificultades para la instrucción sobre el orden.

Si el trabajo de los estudiantes se realiza con cantidades discretas la igualdad de las partes no tiene dificultades por cuanto cada uno de los objetos constituye una parte. Sin embargo las dificultades aparecen cuando los objetos no son idénticos, como es el caso de formar un conjunto de frutas con peras, manzanas y naranjas. En este supuesto, la fracción del conjunto de frutas que representan las manzanas no se ajusta a la idea de partición en partes iguales, por cuanto los objetos que forman el conjunto de frutas son claramente distinguibles. Esta situación de reparto de frutas que puede parecer artificiosa ante los estudiantes, adquiere pleno sentido si se cambian los objetos a repartir, por ejemplo a los alumnos sí que les parece coherente que se repartan tres pizzas de distinta composición (o tres tartas, o tres helados de distintos sabores) entre 3 chicos, de modo que cada uno de ellos reciba una parte de cada uno de los objetos a repartir.

c) Fracciones impropias y números mixtos

La propia instrucción provoca obstáculos de interpretación de las llamadas fracciones impropias, por cuanto al ocultar la unidad en las tareas de medida se crea en el alumno el significado exclusivo de la fracción con el numerador menor o igual que el denominador.

Esta situación viene provocada porque al conceptualizar la fracción se señala que el todo se divide en partes iguales, de las que se toman tantas partes como indica el numerador. Por tanto, el alumno se crea la idea de que el número de partes que se cogen debe ser menor o igual que las que se han hecho. Esta situación se agrava porque el proceso de medida sigue oculto y, en consecuencia, no se interpreta la fracción como medida de una cantidad de magnitud que puede ser mayor que la unidad. En este sentido, venimos constatando que al formular la pregunta: ¿qué fracción hay representada en  este gráfico?



Aproximadamente la mitad de los estudiantes para docente responden $\frac{8}{5}$ y el resto $\frac{8}{10}$. La discusión entre ellos no se termina hasta que no se hace referencia a la unidad que se considera

d) Las expresiones fraccionarias que contienen algún cero

En las experiencias de enseñanza de las fracciones con los estudiantes de once y pre-grado[3] se encuentran dificultades para interpretar expresiones de cualquiera de la formas $\frac{a}{0}$, y $\frac{0}{0}$. Estas dificultades provienen de la forma en que interpretan el significado de la fracción como relación parte-todo. Así, algunos estudiantes responden que, en el primer caso dicha fracción equivale a 0 porque no se han hecho partes; mientras que en el segundo caso suelen dar respuestas provenientes de su experiencia con los límites: para unos es infinito, para otros es indeterminado y para otros es 0. Lo cierto es que son muy pocos los estudiantes que niegan la existencia de tales expresiones.

Tampoco es unánime la respuesta en el caso de interpretar el significado fraccionamiento de la unidad para después no elegir algunas partes.

En los textos escolares que hemos revisado, es casi unánime el presentar a los escolares la fracción con el significado de relación parte-todo. Es más la mayor parte de los contenidos sobre relaciones y operaciones entre fracciones se ejemplifica o justifica con ese significado de la fracción.

Además de este significado los textos escolares suelen introducir los significados de cociente y operador, pero su presencia parece determinada por necesidades

[3]Pruebas realizadas a estudiantes de once grado y de primer semestre que ingresan a ingeniería en la universidad en dos instituciones de la ciudad de Bucaramanga y se les sugiere hacer una interpretación a las fracciones $\frac{a}{0}$, y $\frac{0}{0}$.

de secuenciación de los contenidos. En efecto, el significado de cociente se utilizará posteriormente para conectar las fracciones y las expresiones decimales; mientras que el significado de operador permitirá la resolución de problemas. La instrucción sobre las fracciones sería más adecuada si desde estos textos también se fortaleciesen las conexiones entre los distintos significados de fracción, puesto que *si los estudiantes aprenden solamente la interpretación de la fracción como relación parte-todo, tienen serias limitaciones para una sólida comprensión de las fracciones* (Kerslake, 1986).

#### 2.2.1.2 La fracción como razón

Otro significado diferente de fracción aparece con la idea de razón entre dos cantidades de una misma magnitud medidas con la misma unidad; de este modo la razón se expresa mediante una relación de números naturales, que son las medidas de las cantidades correspondientes. Un caso usual es la relación entre segmentos conmensurables.

***¿Cómo ha sido el proceso de enseñanza-aprendizaje?***

En los manuales escolares consultados la razón no se considera con significado de fracción, sino que se desliga de la aritmética y se estudia como parte del álgebra elemental: razones aritméticas y geométricas y proporcionalidad. Es más, en su presentación las razones se escriben inicialmente con puntos (6:2), lo que indica su no integración con la noción de fracción (aunque posteriormente se escriben como fracciones para facilitar el manejo de las proporciones). En estas condiciones los autores no necesitan establecer conexiones entre diferentes significados de fracción, ni justificar la notación decimal para la representación de las razones consideradas como fracciones.

> *Se da el nombre de razón a la comparación de dos cantidades;...*
> *Con dos miras diferentes se puede hacer la comparación de dos cantidades o con la mira de averiguar la diferencia que hay entre ellas, o con la de averiguar las veces que la una contiene a la otra.*(Sánchez, 1966, pág. 284).

Al considerar con este significado a la fracción $\frac{a}{b}$ lo que se refleja es la relación existente entre dos cantidades, o la comparación entre algún número deun objeto y algún número de un segundo objeto; no se quiere representar la partición de ningún objeto o cantidad.

> *1.- En su receta, Susie añade una taza de azúcar por cada 3 tazas de agua. ¿Cuánta azúcar debe añadir por 6 tazas de agua?*
> *2.- Aquí hay 4 bolas. Tres de ellas son rojas y una es amarilla ¿Cuál es la razón entre las bolas rojas y amarillas?*

Como características propias de este concepto de fracción $\frac{a}{b}$ podemos citar:

a) Las representaciones gráficas no son esenciales, pueden ser fácilmente sustituidas por representaciones mentales.

b) El alumno debe hacer traducciones entre dos números y representaciones simbólicas.

c) En la representación simbólica el alumno debe saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, las cantidades de cada conjunto que se comparan y el orden en que se establecen las relaciones.

d) En la fracción $\frac{a}{b}$ no existe fraccionamiento.

e) En $\frac{a}{b}$ no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b.

***¿Cómo debe ser el proceso de enseñanza-aprendizaje?***

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del estudiante son las siguientes:

a) El orden de los números.

En este caso la fracción $\frac{a}{b}$ hace referencia a un par de números que mantienen un orden determinado de modo que un cambio en el mismo produce una profunda transformación en el significado de la fracción.

b) La noción de razón

El estudiante ha de trabajar con la idea de que si existe una determinada relación entre a y b, cualquier cambio en a producirá un cambio en b. Estas situaciones que tienen una frecuencia muy alta en el mundo real, llevan implícitas la consideración de que a y b hacen referencia a objetos distintos. Además, a no tiene por qué formar parte de b, como se muestra en el primero de los ejemplos citados anteriormente puesto que a y b representan la relación entre azúcar y agua y dan lugar a la fracción $\frac{1}{3}$, mientras que la fracción $\frac{1}{4}$ haría referencia a la relación entre la cantidad de azúcar y la cantidad de mezcla.

Además, la noción de razón está asociada en muchos casos apercepciones más cualitativas que comparativas: las intuiciones de los estudiantes en las que hay mezclas de ingredientes les permiten experimentar variaciones de sabor en términos comparativos (sabor más fuerte o más débil que otro), pero que en ningún modo son cuantificables.

c) La comprensión de la equivalencia

La idea de razón lleva aparejada la de que el mantenimiento de la proporción afecta a la cantidad pero no a la relación. En consecuencia, el estudiante debe considerar la equivalencia de fracciones como invariante de la relación entre las cantidades.

d) La relación entre áreas

No es frecuente encontrar en los libros de texto referencias al significado de razón empleado con figuras geométricas. Ello se justificaría porque la razón entre las superficies de una figura geométrica y la figura que resulta de modificar sus dimensiones lineales en una razón determinada, produce como resultado una relación entre las áreas que no se corresponde con la razón utilizada, sino con su cuadrado. Pero este resultado, la relación cuadrática entre las razones lineales y de superficie, no es directamente observable, sino que se produce como resultado de una reflexión puramente formal y limitada a este supuesto.

Son estas exigencias las que justificarían la ausencia en los manuales escolares de la fracción con este significado de razón; además, las propias demandas curriculares de la instrucción sobre la proporcionalidad han permitido alejar a la razón de las fracciones y otorgarles un tratamiento diferenciado. A pesar de que la razón y la proporción son tópicos adecuados para aplicar las fracciones a la resolución de problemas, desde el primer cuarto de siglo los manuales escolares presentan un estudio separado de las fracciones y de las razones y proporciones. Esta realidad no responde al desarrollo histórico, ni está justificada didácticamente; más bien responde a la idea de mantener la tradición de quienes, a principios de siglo, decidieron tratar separadamente teoría y práctica y, en consecuencia, las razones y proporciones se alejaron de las fracciones.

#### 2.2.1.3 La fracción como operador

En este concepto de fracción se parte de un número o figura dadas y mediante tratamientos operativos se transforma en un segundo número o figura.

Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio (Behr et al., 1993). El trabajo con operadores conecta las fracciones con propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones.

***¿Cómo ha sido el proceso de enseñanza-aprendizaje?***

El significado de fracción como operador puede presentarse con numeroso con cantidades de magnitud; en todo caso, el proceso instructivo que permite introducir este concepto de fracción presenta características como las siguientes:

a) Si se utilizan números sin medida el conocimiento se percibe a través de manipulaciones simbólicas; pero si se utilizan magnitudes, e conocimiento puede percibirse mediante representaciones gráficas, puesto que el concepto de fracción surge al resolver tareas del siguiente tipo:

> *¿Cómo puedo transformar un segmento en otro que sea tres cuartas veces más largo que el original?*

b) La fracción $\frac{a}{b}$ actúa como función transformadora de un número o una figura, lo que implica que hay que considerarla como una única entidad más que como un par de números naturales.

c) En la fracción $\frac{a}{b}$ cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final: multiplicar por a y dividir por b.

d) En $\frac{a}{b}$ no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b.

e) El escolar tiene que hacer traducciones entre los términos de la fracción, un número o una cantidad iníciales y otro número o cantidad finales.

f) En la representación simbólica el alumno tiene que saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, los elementos que se relacionan y la relación que se establece entre ellos.

g) En la fracción $\frac{a}{b}$ no existe el fraccionamiento de la unidad.

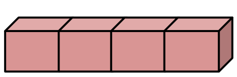
***¿Cómo debe ser el proceso de enseñanza-aprendizaje?***

Las exigencias que demanda la construcción del conocimiento personal del estudiante son las siguientes:

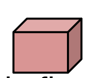
a) Magnitudes continuas

La fracción $\frac{a}{b}$ actúa como "achicador" o "agrandador" proporcional del objeto sobre el que se aplica:

*Carlos halla la cuarta parte.*



$\rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow$



Estado inicial Estado final

La idea de operador que aquí se utiliza implica una proporcionalidad de figuras respecto a la magnitud: longitud.

b) Objetos discretos

En este caso, la fracción $\frac{a}{b}$ actúa sobre un conjunto de objetos para transformarlo en otro conjunto de objetos iguales pero con $\frac{a}{b}$ veces elementos; así en esta situación: Luis tiene una bolsa con 18 canicas de las que $\frac{2}{3}$ son azules, ¿cuántas son azules? El conjunto de 18 objetos se ha transformado en 12 objetos. Por tanto, la noción de $\frac{\text{dilatación}}{\text{contracción}}$ es fundamental en este constructo.

El trabajo con cantidades discretas introduce dos interpretaciones distintas del constructo operador (Behr et al, 1993, pág. 19-46), que no se presentan en el caso de actuar sobre cantidades continuas: interpretación como $\frac{\text{duplicador}}{\text{partición}-\text{reductor}}$ y la interpretación como $\frac{\text{dilatación}}{\text{contracción}}$.

La interpretación como $\frac{\text{duplicador}}{\text{partición}-\text{reductor}}$ en el caso de hallarlos $\frac{3}{4}$ de 24 consiste en partir el conjunto inicial en 4 conjuntos (cada uno de los cuales contiene 6 objetos); los 4 conjuntos se cambian por 3 conjuntos (de 6 objetos cada uno), con lo que se obtiene como respuesta un conjunto de 18 elementos. El constructo de fracción como operador en la interpretación duplicador/partición-reductor puede concebirse como una función que cambia el número de conjuntos (unidades), aunque mantiene el tamaño de los mismos, es decir, hay una transformación del número de unidades. En consecuencia para dar esta interpretación al constructo operador los alumnos necesitan tener habilidad en la partición de conjuntos, así como la comprensión de la división partitiva.

En la interpretación de $\frac{\text{dilatación}}{\text{contracción}}$ la tarea de obtener $\frac{3}{4}$ de 24 se resuelve del siguiente modo: el conjunto de 24 objetos se divide en conjuntos de 4 objetos (hay 6 conjuntos de este tipo); cada uno de los conjuntos de 4 objetos se cambia por un conjunto de 3 objetos (el número de estos conjuntos sigue siendo 6); el conjunto resultante al agrupar estos 6 conjuntos da como resultado un conjunto de 18 objetos. En este ejemplo se observan diferencias con la interpretación anterior, por cuanto la fracción como operador se presenta también como una función de cambio pero que afecta a la composición de las unidades, no a su cantidad; hay una dilatación o contracción de las unidades.

Para su trabajo con esta interpretación del operador los alumnos necesitan habilidad con las particiones.
La revisión de los documentos reseñados nos lleva a formular una pregunta más precisa acerca de los conocimientos personales de los docentes en formación: ¿Cómo construir su concepto de fracción?

La respuesta será útil para tomar una serie de decisiones que garanticen la sólida formación inicial de los docentes puesto que el conocimiento de la materia es uno de los factores de mayor influencia sobre lo que serán sus prácticas pedagógicas.

Se debe tener presente para desarrollar el concepto de fracción: *los diferentes significados* del concepto de fracción, y *el aprendizaje a largo plazo*, ya que al dar una revisión a la propuesta de los contenidos de las matemáticas de la Básica Primaria y Secundaria las fracciones hacen un recorrido de segundo a noveno grado[4].

Cabe resaltar que los estudiantes en formación como docentes no están lejos en la materia sino que, como consecuencia de su trayectoria escolar, disponen de unos conocimientos personales sobre este tópico matemático que están firmemente asentados. Eso nos permite determinar que nuestra estrategia debe enfocarse hacia la de-construcción y re-construcción del concepto de fracción.

[4]En los Estándares de competencias Básicas grado a grado se propone los diferentes significados de la fracción, haciendo énfasis en la aplicación de dichos significados en las interpretaciones de situaciones problemáticas. Encontramos estos

Podría decirse, que tal fin no se consigue desde una presentación formal de la materia, ni desde el trabajo algorítmico con reconstrucción de sus conocimientos personales. Sino que hay que construir el conocimiento personal desde nuevas experiencias; experiencias que han de contemplar la exploración sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos que se han adquirido y la reflexión posterior sobre la planificación de la instrucción. Este trabajo quiere aproximar una respuesta en este sentido ofreciendo una secuencia de enseñanza para docentes de Educación Primaria que incremente su comprensión de los Números Fraccionarios. Desde la reflexión sobre los conocimientos adquiridos, estos estudiantes estarán en disposición de aplicar los resultados observados al aprendizaje de los escolares, de planificar la instrucción en matemáticas y de analizar los aspectos de la enseñanza relacionados con la interacción individual y en grupo.

---

significados en todos los Sistemas propuestos para el aprendizaje de las matemáticas en especial en el Numérico, Espacial y Métrico.

# 3. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

## 3.1 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación surge de la reflexión sobre la práctica educativa que constituye el eje de la profesión del docente, con la intencionalidad de mejorar la calidad de la formación de los futuros Licenciados en Educación Básica y promover la comprensión de la matemática como un conocimiento básico en los primeros niveles escolares. Es desde estos parámetros que se define una metodología de *investigación mixta*, enmarcada desde los dos paradigmas, cuantitativo, por indagar el conocimiento previo de los estudiantes en formación docente a través de una prueba y validar la implementación con una prueba de salida y cualitativo por el continuo acercamiento entre el investigador y el objeto de estudio a través de la observación realizada en la implementación de la propuesta.

## 3.2 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y POBLACIÓN

La investigación es realizada con un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Ciencias Naturales, de la Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander, de séptimo y noveno semestre en el primer semestre académico de 2011.

## 3.3 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCION DE INFORMACION

### 3.3.1. TECNICAS:

- Observación participante. El investigador será el docente encargado de orientar las actividades que se diseñen en la etapa de planeación.

- Observación directa. Se busca indagar sobre los conocimientos previos del estudiante para docente, teniendo en cuenta:
- Los diferentes significados de fracción que maneja y su interconexión entre estos significados.
- Errores conceptuales y procedimentales

Se busca observar la actitud y los procesos del grupo frente a las matemáticas en general y los números fraccionarios en particular, desde dos puntos focales:

- Su rol como estudiante
- Su rol como futuro docente

- Prueba diagnóstica. Se realizará una encuesta y se utilizará como instrumento la prueba diagnóstica, con la que se busca indagar sobre los procesos de:

- *Razonamiento y argumentación*
- *Comunicación, representación y modelación*
- *Planteamiento y resolución de problemas*

Con el concepto de fracción a través de los significados de partidor, operador y razón en diferentes contextos.

3.3.2. INSTRUMENTOS

- Diario de campo. Se utilizará para hacer el registro de las observaciones directas que se realicen, a través de una guía de observación:

  Descripción: en este punto se desarrollará todo el proceso descriptivo de lo que se observe. Se realizará un proceso narrativo original y autónomo.

Interpretación: en este apartado se realizará un proceso de análisis de los elementos que arroja la descripción, utilizando las categorías de análisis.

Conceptualización: en este apartado se deben integrar las categorías de análisis, para así integrar los aspectos teóricos y la interpretación que realizada sobre la observación.

- Notas de campo. Se llevará un registro de aquellos aspectos relevantes que se observan y de acuerdo a la guía de observación del diario de campo, se llevará una planeación para hacer observaciones cada vez más precisas sobre las categorías a analizar.

- Producciones matemáticas escritas.
- Manifestaciones verbales obtenidas en declaraciones espontáneas.

- Protocolo de prueba diagnóstica. Se realizará una prueba a los estudiantes, con el fin determinar fortalezas y dificultades en los procesos de aprendizaje del concepto de fracción. Tal prueba será el punto de partida para realizar una revisión al marco teórico y diseñar las unidades didácticas.

- Diseño de unidades didácticas. Se diseñaran tres unidades didácticas de acuerdo a cada significado de fracción y cada material, así:

- En el significado de partidor se diseñará la unidad didáctica utilizando el juego Partimundo.

- En el significado de razón se diseñará la unidad didáctica utilizando los bloques lógicos de Zoltán Dienes
- En el significado de operador se diseñará la unidad didáctica utilizando las regletas de Cuisinaire

## 3.4 PROCESO METODOLOGICO

### 3.4.1 FASE DIAGNÓSTICA

En esta fase se realiza un análisis de contraste con respecto a los conocimientos que deberían tener los estudiantes en formación docente y los que ya poseen (conocimiento previo), utilizando una prueba de 10 preguntas de selección múltiple con única y múltiples respuestas. Estos resultados se confrontan a la vez, con la teoría encontrada, y de esta forma obtener información respecto a la aplicabilidad de la propuesta en cuanto a la solución de dificultades matemáticas de la población participante.

#### 3.4.1.1 Indagación del conocimiento previo

La prueba se diseña y aplica con la finalidad de indagar los conocimientos previos de los estudiantes en formación docente, y como objeto, la competencia matemática sobre números fraccionarios, específicamente sus diferentes significados, la interconexión entre estos significados, su conexión de orden y equivalencias. Los cuales se relacionan con el uso flexible y comprensivo de este conocimiento en diversidad de contextos: de la vida diaria, de la matemática misma y de otras ciencias.

Las preguntas de la prueba hacen referencia a un componente y a una competencia, como se muestra en la Tabla 1. Los componentes evaluados están relacionados con la organización propuesta en los Lineamientos Curriculares para matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Competencia Básicas de Matemáticas (MEN, 2005) estos son tres:

| COMPONENTE | DESCRIPCIÓN |
|---|---|
| **Numérico-Variacional** | Alude al significado del número y sus diferentes usos, la estructura del sistema de numeración, el significado y uso de las operaciones, la comprensión de sus propiedades y las relaciones entre ellas, el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia, la variación en contextos aritméticos y geométricos, y el concepto de función. |
| **Geométrico-Métrico** | Está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones de objetos bidimensionales y tridimensionales, sus características, relaciones y transformaciones. La comprensión del espacio y el plano a través de la observación de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición (longitud, área, volumen, capacidad, masa, tiempo, entre otras) a partir de la selección de unidades, patrones e instrumentos pertinentes. |
| **Aleatorio** | Indaga por la lectura, representación e interpretación de datos extraídos de contextos no matemáticos (Encuestas, resultados de experimentos, entre otros) El análisis de diversas formas de representación de información numérica, la conjetura sobre regularidades y tendencias presentadas en fenómenos estadísticos y probabilísticos, y el uso de medidas de centralización, posición, dispersión y forma. |

Además, la competencia matemática se evalúa a través de tres competencias específicas:

| COMPETENCIA | DESCRIPCIÓN |
|---|---|
| **Comunicación y representación** | Se refiere a la capacidad para identificar la coherencia de una idea respecto a los conceptos matemáticos expuestos en una situación o contexto determinado, la capacidad de usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas a partir de una tabla, una gráfica, una expresión simbólica o una situación descrita en lenguaje natural. También se evalúa, dentro de esta competencia, la habilidad para manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, es decir, el uso y la interpretación del lenguaje matemático. |
| **Razonamiento y argumentación** | Se relaciona con aspectos como la identificación de diferentes estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, la formulación de hipótesis, la conjeturación y exploración de ejemplos y contraejemplos, la identificación de patrones y la generalización de propiedades |
| **Solución de problemas y modelación** | Hace referencia a la capacidad para plantear y resolver problemas a partir de contextos matemáticos y no matemáticos, la traducción de la realidad a una estructura matemática, la verificación e interpretación de resultados a la luz de un problema, de tal manera que se generalicen soluciones y estrategias que dan solución a nuevas situaciones. |

Tabla 1. **Características generales de la prueba diagnóstica**

| ítem | Valor de cada respuesta | | | | | Componente | Competencias | Fracciones |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a. | b. | c. | d. | e. | | | |
| 1. | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | Numérico-Métrico-Aleatorio | comunicación | Todos los significados |
| 2. | -0.25 | -0.25 | -0.25 | 1.0 | -0.25 | Numérico-Variacional | comunicación | Significado-orden |
| 3. | -0.25 | -0.25 | -0.25 | -0.25 | 1.0 | Numérico-Variacional | Razonamiento | equivalencias |
| 4. | 1.0 | -0.25 | -0.25 | -0.25 | -0.25 | Numérico-Variacional | Razonamiento | equivalencias |
| 5. | 0.5 | -0.3 | 0.5 | -0.3 | -0.3 | Numérico-Métrico | Solución de problemas | Orden-Significado operador |
| 6. | -0.25 | 1.0 | -0.25 | -0.25 | -0.25 | Numérico-Geométrico-Métrico | Solución de problemas | Orden-Significado partidor-medida |
| 7. | -0.25 | 1.0 | -0.25 | -0.25 | -0.25 | Numérico-variacional-Métrico | Solución de problemas | Significado partidor |
| 8. | -0.3 | 0.6 | -0.3 | 0.4 | -0.3 | Numérico-Variacional-Métrico | Solución de problemas- | Significado operador |
| 9. | 0.7 | -0.3 | 0.3 | -0.3 | -0.3 | Numérico-.Variacional | Solución de problemas | Significado de razón |
| 10. | -0.25 | -0.25 | 1.0 | -0.25 | -0.25 | Numérico-Variacional | Solución de problemas | Interconexión de significados |

La prueba (ANEXO A) fue validada por tres expertos en matemáticas de las Universidades, dos profesores de la Universidad Pontificia Bolivariana y uno de la Universidad Industrial de Santander, quienes realizaron observaciones de redacción de las preguntas 5, 6 y 7; ya que podría haber ambigüedad en los datos y de estilo para una mejor lectura. A su vez, formularon posibles soluciones erróneas en la pregunta 2 y 3, estas se utilizaron como distractores en el diseño de las opciones de respuesta de estas preguntas. Además, formularon la última opción de respuesta de la pregunta 1 y validaron que esta pregunta tuviera todas las respuestas correctas. En la pregunta 9 y 10 se eliminaron datos del enunciado y de la pregunta, consideraron que había muchos datos y se podría medir lo mismo al reducir la cantidad. En las observaciones realizadas a la prueba se consideró pertinente las componentes y competencias abordadas en cada ítem y se dieron algunas sugerencias de valoración a cada respuesta, que se tuvieron en cuenta en la rejilla de valoración de cada ítem. Esta rejilla de valoración fue diseñada siguiendo los parámetros de las pruebas ICFES.

A cada pregunta se le asigna un valor  a las respuestas correctas entre 0 y 1, de acuerdo al número de respuestas correctas para un mismo ítem, se asigna un valor ponderado dependiendo de la pertinencia de dichas respuestas. Por ejemplo, en la pregunta 9, hay dos respuestas correctas: a y c, pero cada una con un valor diferentes de acuerdo a su pertinencia. Las respuestas incorrectas del mismo ítem, tienen un valor entre -1 y 0, es decir el número de respuestas incorrectas divide a una unidad negativamente, en el mismo ejemplo, son tres respuestas incorrectas: b, d, e; cada una con un valor de -0,3.

## 3.4.2 FASE DE PLANEACIÓN DE ACCIONES

### 3.4.2.1 Fundamentación del problema

Para la fundamentación del problema se han analizado investigaciones respecto a: Formación docente y Significados de fracción, didáctica de las matemáticas, específicamente didáctica del pensamiento numérico: números Racionales-Fracciones y construcción de unidades didácticas con material concreto. Una vez realizado este análisis se definen elementos teóricos y conceptuales que fundamentan el problema de esta investigación.

Lo anterior permite elaborar el cuerpo teórico del proyecto atendiendo a:

- Antecedentes: Se consultan investigaciones que han sido realizadas sobre: Construcción de conceptos matemáticos con estudiantes para docente o construcción del concepto de fracción en los niños. Además se hace revisión sobre trabajos realizados con los materiales concretos regletas de Cuisenaire y bloques lógicos de Zoltán Dienes con el concepto de fracción.
- Resúmenes, sobre los textos de análisis y fundamentación respecto a Formación de maestros y Significado de Fracción.
- Marco teórico, se construye según la pertinencia de las fuentes consultadas y su relación con el problema de investigación.

**3.4.2.2 Definición de la metodología de investigación**

En el trabajo define una metodología de investigación *mixta,* integrada por la *perspectiva cuantitativa*, dada por la medición de los conocimientos tanto previos como posteriores a la implementación de una estrategia didáctica, utilizando como técnica pruebas; *y la perspectiva cualitativa*, definida por la observación e interacción con el objeto de estudio entre estudiantes en formación docente y el docente investigador, mediada por la aplicación de talleres. La metodología se estructura en una fase diagnóstica, descrita anteriormente; fase de aplicación, en la cual se implementa la propuesta y se hace seguimiento desde y hacia el problema; finalmente una fase de evaluación y de reflexión de las acciones y la consecución de los objetivos planteados.

**3.4.2.3 Recolección, análisis y sistematización de la información**

La recolección de la información se realiza en tres momentos:

- Prueba diagnóstica.

- Observaciones directa y de las producciones escritas realizadas por los estudiantes en la implementación de la propuesta.
- Prueba de salida.

El análisis y la sistematización se realizan continuamente en cada uno de los momentos en que se recoge la información, desde y hacia el problema, a la luz del marco teórico. De esta dinámica surgen unas categorías de análisis de la información que permitirá caracterizar el objeto de estudio y que estará permeando el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta.

#### 3.4.2.4 Diseño de la propuesta de investigación

La propuesta de investigación es producto de una continua reflexión que permite situar el *diseño*, la *implementación* y la *evaluación* de la propuesta didáctica en el objeto de estudio.

El *diseño* de la propuesta didáctica surge del análisis de los resultados encontrados en la prueba diagnóstica contrastados con el marco teórico, haciéndola pertinente a las necesidades de conocimiento matemático de la población. Es así como la *implementación* está permeada por la continua reflexión de los hallazgos que se van encontrando.

El diseño de la prueba final es resultado del análisis realizado entre los hallazgos encontrados en la implementación de la propuesta hacia la *evaluación* del proceso realizado, devolviéndonos al problema de investigación.

### 3.4.3 FASE DE APLICACIÓN

El desarrollo de esta fase se apoya con las Unidades Didácticas como instrumentos que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje, la estructura de éstas sigue los elementos considerados por Moreira (1993):

- *Presentación*, describe el contenido y las características generales de la unidad didáctica.
- *Objetivos de aprendizaje,* describen el resultado esperado con el proceso de enseñanza.
- *Competencias*, expresan los procesos de tipo cognitivo, procedimental y actitudinal que se desean desarrollar en los estudiantes.
- *Contenidos,* son los ejes temáticos a problematizar en diversos contextos de aprendizaje.
- *Estrategia didáctica*, referente a la estrategia de enseñanza y aprendizaje que posibilita el logro de los objetivos, el desarrollo de competencias y la comprensión de los contenidos.
- *Actividades de Aprendizaje,* contienen el plan de trabajo en la unidad didáctica.
- *Recursos didácticos*, se definen en correspondencia con la actividad de aprendizaje.
- *Evaluación,* define criterios que permiten valorar procesos cognitivos, procedimentales y actitudinales del estudiante.

De acuerdo a lo anterior y para efecto del presente trabajo de investigación, se han diseñado las siguientes unidades didácticas:

Para el concepto de fracción se han diseñado las siguientes unidades didácticas:

Unidad didáctica uno: *significado de fracción como partidor* (ANEXO B)

Unidad didáctica dos: *significado de fracción como operador* (ANEXO C)

Unidad didáctica tres: *significado de fracción como razón* (ANEXO D)

Utilizando en cada una de estas unidades didácticas, una herramienta diferente, así:

Unidad didáctica uno: *juego Partimundo*

Unidad didáctica dos: *regletas de Cuisenaire*

Unidad didáctica tres: *bloques lógicos de Zoltán Dienes*

Cada unidad didáctica comprende talleres relacionados con significado (taller uno), relación de orden (taller dos) y equivalencias (taller tres); cada unidad muestra otros contextos como, juegos de mesa y noticias de prensa escrita, además del proporcionado por el material concreto.

#### 3.4.3.1 Implementación de la propuesta

La implementación de la propuesta comprende la aplicación y desarrollo de nueve talleres, los cuales se trabajan tres momentos:

- Trabajo en equipo: se entregan guías del taller para ser desarrolladas en equipos, el trabajo está dirigido según orientaciones que contiene la guía, así como las observaciones dadas por la docente para el procedimiento a seguir en la realización del mismo.
- Socialización del trabajo: cada equipo muestra a los demás el trabajo realizado con las guías del taller, se realizan intervenciones de cada integrante para refutar o demostrar las apreciaciones que van surgiendo de cada pregunta, con posibles intervenciones y precisiones de la docente.

- Formalización: es la etapa en el proceso de aprendizaje de las matemáticas donde el estudiantes orientado por el maestro realiza un razonamiento inductivo, es decir, desde lo particular pasa a la generalización, a través de conjeturas de algoritmos, proposiciones, teoremas y demostraciones de los mismos.

La aplicación de las tres Unidades Didácticas y los respectivos talleres se desarrollan en una secuencia de espacios de clase de cada grupo de estudiantes participantes, matriculados en séptimo y noveno semestre. El tiempo por cada taller fue de dos horas, para un total de seis horas por unidad didáctica y 18 horas en la implementación de las tres unidades didácticas.

#### 3.4.3.2 Seguimiento a la propuesta desde y hacia el problema

La fase diagnóstica permite realizar un análisis del problema y el marco teórico, dicho proceso se sintetiza en el diseño de la propuesta didáctica, materializada en unidades didácticas pertinentes a la población que se implementará.

En cada uno de los momentos de implementación los talleres, se expresa directamente las observaciones, sobre las producciones escritas según las guías de los talleres; las observaciones proporcionan información que permite realizar un seguimiento y análisis continuo a la propuesta.

Una vez finalizada la implementación de la propuesta se realiza una prueba final, (Anexo E), permitiendo recolectar información, el análisis de ésta, posibilita una evaluación y replanteamiento de la propuesta.

### 3.4.4 FASE DE EVALUACIÓN Y DE REFLEXIÓN

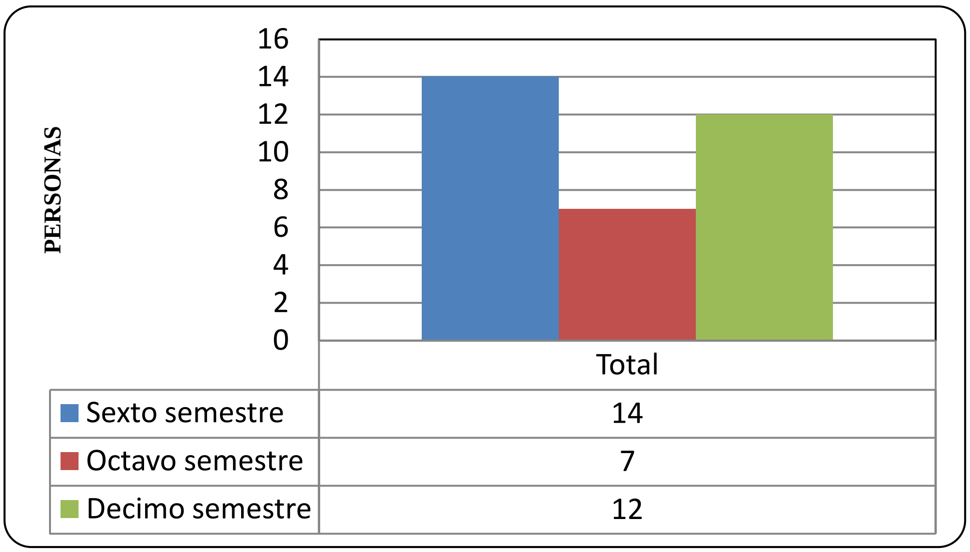
Esta fase se caracteriza por la reflexión y meta-cognición de la propuesta, se efectúa en tres pasos, así: en el primer paso se hace un contraste entre los datos recolectados de la prueba diagnóstica y el marco teórico desde y hacia el problema; en el segundo paso se hace un contraste entre los datos encontrados en las observaciones realizadas en los talleres y los elementos de análisis obtenidos en el primer paso; y en el tercer paso se hace un contraste entre los datos encontrados en la prueba final y los elementos obtenidos en el segundo paso. Los resultados del proceso de reflexión permiten determinar las categorías de análisis, por medio de las cuales se evalúa todo el proceso de investigación, plantear los hallazgos relevantes que caracterizaron el objeto de estudio y determinar nuevos problemas.

# 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

## 4.1. ÁNALISIS DE LA POBLACIÓN

Esta prueba fue resuelta por estudiantes de 6, 8 y 10 semestre de la Licenciatura en educación con énfasis en ciencias naturales y educación ambiental, se aplica al finalizar el segundo semestre académico 2010.

Tabla 2.**Población según semestre**




El análisis que se presenta en seguida, se efectúa siguiendo cada una de las preguntas planteadas en la prueba.

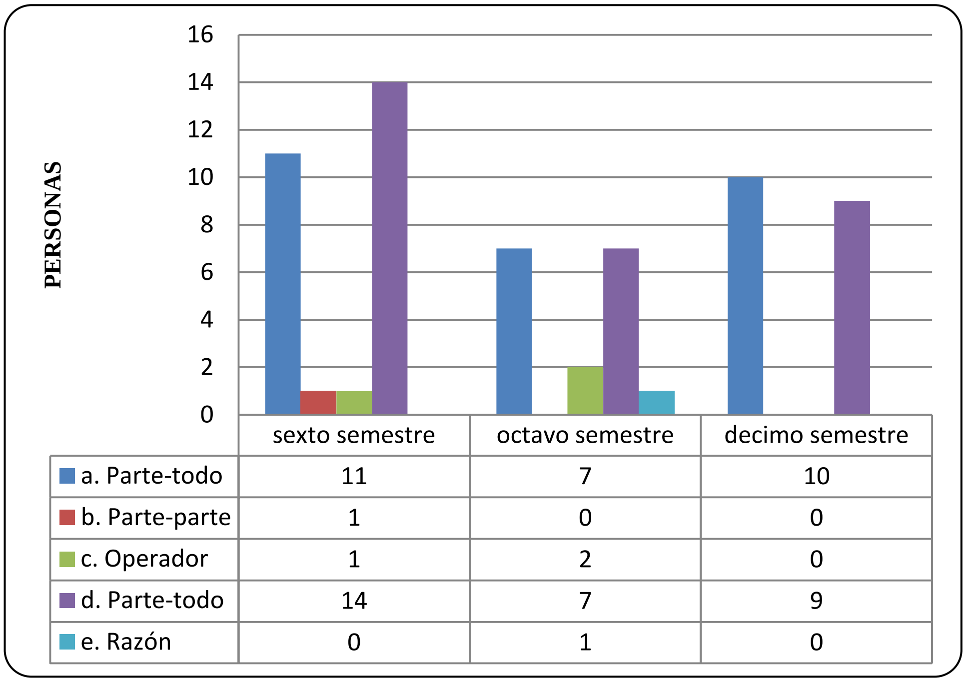
**Pregunta 1.** En esta se plantea, cuáles de las situaciones representan a la fracción $\frac{3}{5}$ ; las siguientes son posibles soluciones que aparecieron en la prueba; todas las respuestas son correctas, puesto que representan la fracción en diferentes contextos, así:

a. En esta respuesta el círculo ha sido dividido en 5 partes y han sido sombreadas 3. Se hace referencia a la fracción $\frac{3}{5}$ con el significado *Parte-todo* y el todo es una *unidad continua*.
b. Se hace referencia en esta respuesta al significado de la fracción $\frac{3}{5}$ como *Parte-parte*, donde el peso en A de 36 kg y es comparado con el peso en B de 60 kg, siendo la fracción $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$. Cabe resaltar que no se ha comparado el peso en A con el total de peso en ambos que sería 96 kg.
c. Muestra a la fracción $\frac{3}{5}$, como una transformación que se ha hecho a cada barra de chocolate con el operador $\frac{1}{5}$, quedando reconocida la fracción como $\frac{1}{5}$ de 3, atendiendo al significado de la fracción como *Operador*.
d. En esta respuesta se ve la fracción $\frac{3}{5}$ en su significado *Parte-todo*, donde el todo es una *unidad discontinua*, en este caso son los elementos de un conjunto 3 que cumplen la condición estar dentro de, comparado con el total de elementos del conjunto que son 5.
e. La fracción $\frac{3}{5}$ ha sido modelada en una situación con gráfica de barras donde se establece una relación entre el número de hombres 120 por cada 200 personas del total de la población, representada así la fracción como una *Razón*.

Los resultados obtenidos muestran que el 84.85 % de los estudiantes que presentan la prueba, reconocen el significado de la fracción $\frac{3}{5}$ como parte-todo con una unidad continua y el 90.9% con una unidad discreta. Los demás significados no son reconocidos por los estudiantes, ya que el 3.03% de los estudiantes señalaron la fracción con el significado Parte-parte, el 9.09% con el significado Operador, y el 3,03% con el significado Razón. Lo anterior se representa gráficamente en Tabla 3.

Tabla 3.

**Pregunta 1. según semestre**




| | sexto semestre | octavo semestre | decimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. Parte-todo | 11 | 7 | 10 |
| b. Parte-parte | 1 | 0 | 0 |
| c. Operador | 1 | 2 | 0 |
| d. Parte-todo | 14 | 7 | 9 |
| e. Razón | 0 | 1 | 0 |

**Pregunta 2.** Se presentan tres rectas reales, que señalan en cada una a las fracciones a, b, c. Allí ya se encontraban las particiones que se habían hecho al intervalo de $[0,2]$, habiendo respectivamente particiones iguales de 5, 10 y 15 a cada unidad. Es así como la respuesta correcta era la opción d $\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{26}{15}$.

Aparecen tres rectas reales, que señalaban en cada una las fracciones a, b y c, con particiones del intervalo $[0,2]$, particiones iguales de 5, 10 y 15 a cada unidad. La respuesta correcta es la *opción d*. $\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{26}{15}$.

Dentro de las posibles opciones incorrectas se tiene:

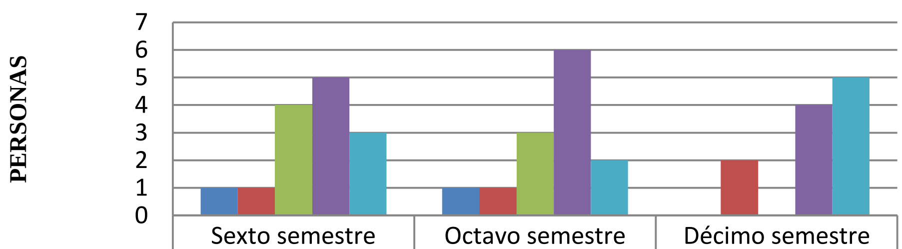
La *opción de respuesta a.* la fracción $\frac{26}{15}$ fue cambiada por $\frac{26}{30}$, para clasificar los tipos de errores, en este caso, estudiantes que cometen errores con las fracciones impropias, ya que el denominador son las partes en que se divide la unidad, pero cuentan todas las unidades.

La *opción e.* se amplificaron las dos primeras fracciones correctamente por 2: $\frac{6}{10}, \frac{18}{20}$ y nuevamente se dejo la fracción $\frac{26}{30}$ para poder detectar el mismo error.

Según los datos obtenidos, representados gráficamente en la Tabla 4.el 45.45% de los estudiantes que contestan la pregunta señalan la respuesta correcta. El 36.36% de los estudiante señala las opciones a. y e., por lo que podemos concluir que estos estudiantes presentan problemas en representar fracciones impropias en la recta real.

Tabla 4.

**Pregunta 2. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 1 | 1 | 0 |
| b. | 1 | 1 | 2 |
| c. | 4 | 3 | 0 |
| d. Correcta | 5 | 6 | 4 |
| e. | 3 | 2 | 5 |

**Pregunta 3.** Se tiene la misma gráfica que la pregunta 2. Y las fracciones X, Y, Z. Dichas fracciones están ubicadas en el mismo lugar de cada una de las rectas, la diferencia son las particiones en 5, 10 y 15 partes a cada unidad. Por lo tanto, las fracciones son equivalentes, ya que se encuentran en el mismo lugar (a la misma

distancia del 0). Al estar particionadas en diferentes partes cada unidad tanto el numerador como el denominador cambia.

Otra manera de comprobar que las fracciones son equivalentes, es el procedimiento de *Simplificar* y *Complificar* la fracción, dichas transformaciones nos generan fracciones equivalentes, la primera es *dividir tanto el numerador como el denominador por un mismo número* y la segunda es *multiplicar tanto numerador como denominador.*

$$X = \frac{2}{5} = complificar\ por\ 2 = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = Y$$

$$Z = \frac{6}{15} = simplificar\ por\ 3 = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5} = X$$

La *opción e.* las fracciones son equivalentes (cambian tanto numerador como denominador) era la correcta, utilizando uno de los dos procedimientos.

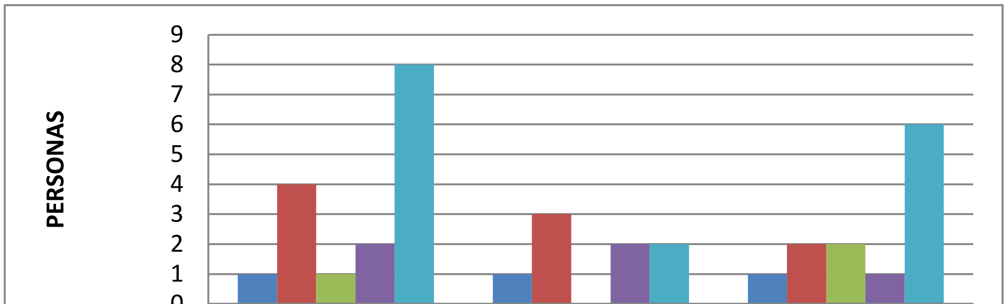
Las otras opciones incorrectas buscaban detectar dificultades de los estudiantes en el reconocimiento de las fracciones equivalentes.

Según los datos obtenidos, representados gráficamente en la Tabla 5, se puede concluir que, el 48.48% de la población reconoce las fracciones equivalentes y procedimientos para detectar cuando dos o más fracciones poseen esta relación.

**Pregunta 4**. En esta pregunta se busca que el estudiante encuentre fracciones equivalentes a una misma fracción, en este caso la fracción $c = \frac{26}{15}$. Esta fracción es impropia, es decir excede a la unidad, por lo tanto se deseaba medir la reiteración del error en la *pregunta 2* y la reiteración de error en la *pregunta 3*, concepto de fracciones equivalentes.

Tabla 5.

**Pregunta 3. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 1 | 1 | 1 |
| b. | 4 | 3 | 2 |
| c. | 1 | 0 | 2 |
| d. | 2 | 2 | 1 |
| e. Correcta | 8 | 2 | 6 |

La *opción a.* es correcta, ya que $\frac{26}{15} = \frac{26\times3=78}{15\times3=45} = \frac{26\times5=130}{15\times5=75} = \frac{26\times10=260}{15\times10=150}$

Las *opciones c. y e.*, muestran nuevamente el error en la fracción $c = \frac{26}{30}$ , así:

*Opción c.*$\frac{26}{30} = \frac{26\times3=78}{30\times3=90} = \frac{26\times5=130}{30\times5=150} = \frac{26\times10=260}{30\times10=300}$.

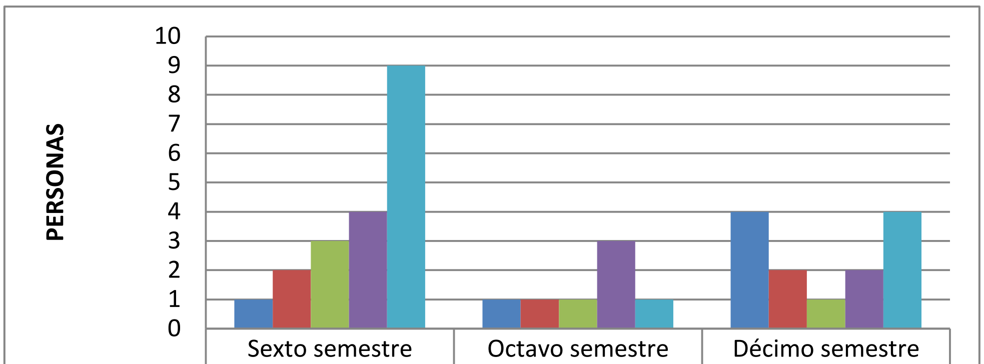
*Opción e.*$\frac{26}{30} = \frac{26\times1=26}{30\times1=30} = \frac{26\times2=52}{30\times2=60} = \frac{26\times3=78}{30\times3=90}$

Las demás opciones muestran problemas en el concepto de fracciones equivalentes, como dejar el mismo numerador, o por el contrario el mismo denominador.

Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 6 muestra que, solo el 18.18% de los estudiantes contestan la opción correcta; el 57.58% de los estudiantes, responden las opciones c. y e., lo que permite deducir que ha sido reconocida la fracción $\frac{26}{30}$ como la fracción señalada; los resultados muestran que se encuentran dificultades en los estudiantes para representar fracciones impropias. Ratificándose las dificultades de los estudiantes encontradas en la pregunta 2.El 33.3% de los estudiantes presentan dificultades en el concepto de fracciones equivalentes, o en el procedimiento de encontrarlas. Ratificándose las dificultades de los estudiantes encontradas en la pregunta 3.

Tabla 6.

**Pregunta 4. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. Correcta | 1 | 1 | 4 |
| b. | 2 | 1 | 2 |
| c. | 3 | 1 | 1 |
| d. | 4 | 3 | 2 |
| e. | 9 | 1 | 4 |

**Pregunta 5.** Plantea una situación problemática, los estudiantes deben analizar y elegir de las opciones propuestas, dos que son pertinentes a los datos dados en la situación.

Dicha situación modela el significado de la fracción como operador así:

Capacidad del tanque= $400\ litros$

Lunes = $\frac{1}{5} de\ 400 = \frac{1}{5} \times 400 = 80\ litros$

Martes=$\frac{1}{4} de\ \frac{4}{5}\ de\ 400 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} de\ 400 = \frac{1}{5}\ de\ 400 = Lunes$

Miércoles=$\frac{9}{30} de\ \frac{3}{5} de\ 400 = \frac{9}{50} de\ 400 < \frac{10}{50} de\ 400 = \frac{1}{5} de\ 400 = Lunes = Martes$

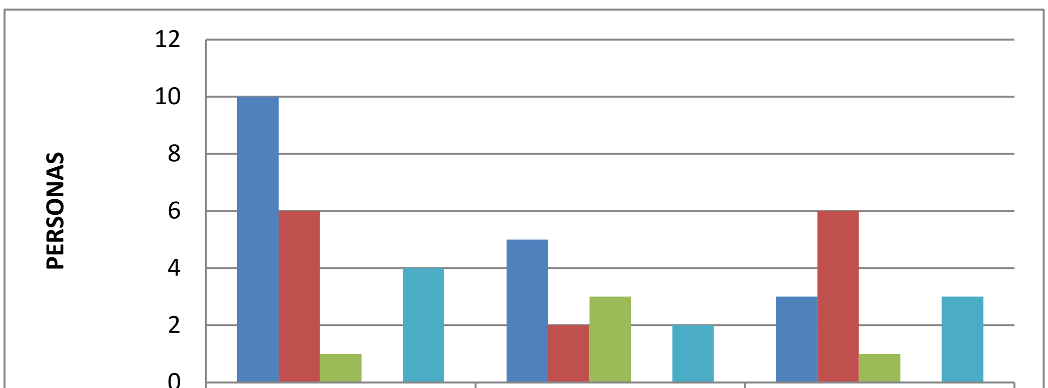
Las opciones: *a. El miércoles se extrajo menos agua que el martes* y *c. El lunes se extrajo la misma cantidad de agua que el martes,* dentro de las opciones son las correctas. Las demás opciones solo se distractores de las opciones correctas.

Según los datos recolectados, representados gráficamente en la tabla 7.el 54.54% de los estudiantes eligieron la a. como respuesta correcta, el 15.15% eligieron la c. como única respuesta correcta y el 3.03% eligieron ambas opciones como respuestas correctas.

Las demás opciones solo se colocaron como distractores de las opciones correctas. El 75.75% de los estudiantes eligieron al menos una de las respuestas que no eran las correctas.

Tabla 7.

**Pregunta 5. Según semestre.**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. Correcta | 10 | 5 | 3 |
| b. | 6 | 2 | 6 |
| c. Correcta | 1 | 3 | 1 |
| d. | 0 | 0 | 0 |
| e. | 4 | 2 | 3 |

**Pregunta 6.**La situación problemática modela el significado de la fracción como Parte-todo, en este caso la unidad (todo) es una unidad de medida, es decir es comparada con respecto  otra que es de menor tamaño.

Al realizar el recubrimiento de una superficie rectangular en partes iguales y cuya unidad de medida son baldosas que deben cumplir con las condiciones iníciales ser cuadradas y completas; aún más, se busca pagar la menor cantidad de dinero. Entonces, las baldosas también deben cumplir ser de mayor tamaño.

En conclusión, las baldosas debían ser: cuadradas, completas (es decir su lado es un número entero) y de mayor tamaño.

Ahora bien, las dimensiones de la cocina eran $210cm \times 120cm$
Luego las baldosas más grandes serían de $30cm \times 30cm$
En total se utilizarían $7 \times 4 = 28\ baldosas\ de\ 30cm \times 30cm$
Por cada dos baldosas pagan \$5, entonces por 28 baldosas tendríamos 14 parejas de baldosas, luego se pagaría: $14 \times 5 = \$70$. La *opción b***.** es correcta.

Las *opciones a., c., d*., cumplen las condiciones ser cuadradas y completas, pero no eran las de mayor tamaño, por lo tanto daría más de \$70 el valor a pagar.

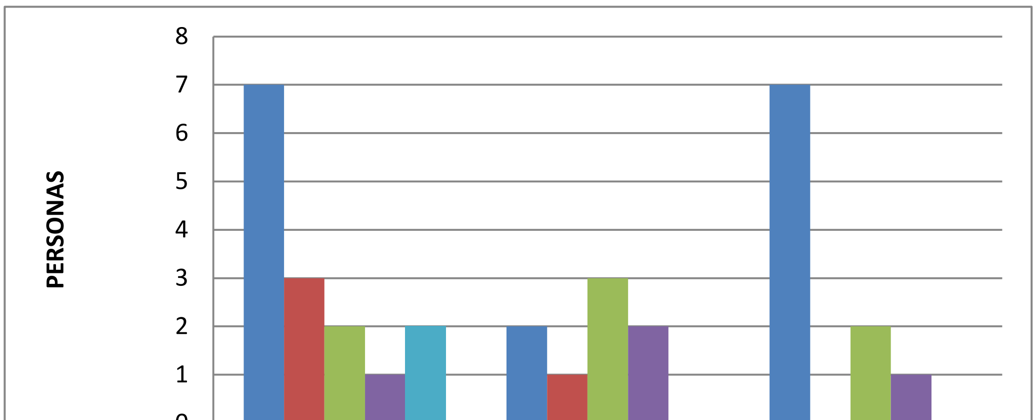
La *opción e*. cumplen las condiciones ser cuadradas y de menor tamaño, pero no eran completas.

Cabe resaltar que en cada opción  las operaciones son correctas y tienen el mismo procedimiento, solo que no cumplen alguna condición sobre las baldosas.
Podemos concluir que la mayoría de estudiantes presentan dificultades en procedimientos que permitan resolver situaciones que modelen el significado de fracción parte-todo.

Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 8. el 12.12% de los estudiantes elige las respuesta correcta. El 75.76% de los estudiantes elige las opciones en las que se pierde de vista la condición menor tamaño para las baldosas. El 6.06% de los estudiantes elige la opción que no contempla la condición ser completas para las baldosas.

Tabla 8.

**Pregunta 6. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 7 | 2 | 7 |
| b. Correcta | 3 | 1 | 0 |
| c. | 2 | 3 | 2 |
| d. | 1 | 2 | 1 |
| e. | 2 | 0 | 0 |

**Pregunta 7.** Se modela el significado de la fracción parte-Todo. En este caso la unidad (todo) de comparación es 30 horas utilizadas por Juan para realizar un trabajo.

Cuando Pedro se le unió a Juan, Juan había trabajado 5 horas, es decir, $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ del trabajo. Si entre los dos demoraron 15 horas, podemos concluir que:

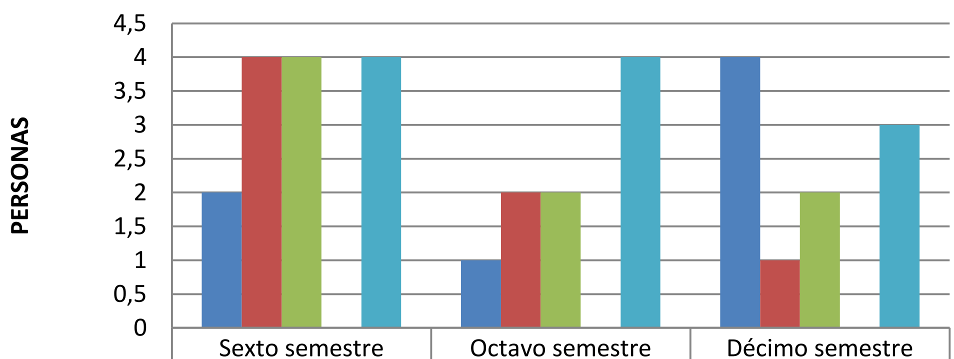
Juan realizó $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ del trabajo. Pedro realizó el resto, es decir $\frac{2}{6}$ del trabajo. Es decir, Pedro demora 15 horas haciendo $\frac{2}{6}$ del trabajo. Luego, en 45 horas terminaría el trabajo. Entonces la *opción b,* es la correcta.

Las demás opciones son distractores de la respuesta correcta.

Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 9, el 18.18% de los estudiantes eligieron las opción correcta.

Tabla 9.

**Pregunta 7. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 2 | 1 | 4 |
| b. Correcta | 4 | 2 | 1 |
| c. | 4 | 2 | 2 |
| d. | 0 | 0 | 0 |
| e. | 4 | 4 | 3 |

**Pregunta 8.** Se modela el significado de fracción como operador, para este caso, el peso del ratón era la unidad que se transformaba, lo que comía diariamente eran $\frac{2}{5}$ partes de lo que pesa, al tercer día ha comido $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ , que vendría siendo su peso, más $\frac{1}{5}$ de su peso.

En la situación se dice que al tercer día ha comido su peso más 30 gr., luego $\frac{1}{5} = 30\ gr.$, entonces el ratón pesa 150 gr.

Entonces, los estudiantes podrían deducir que:

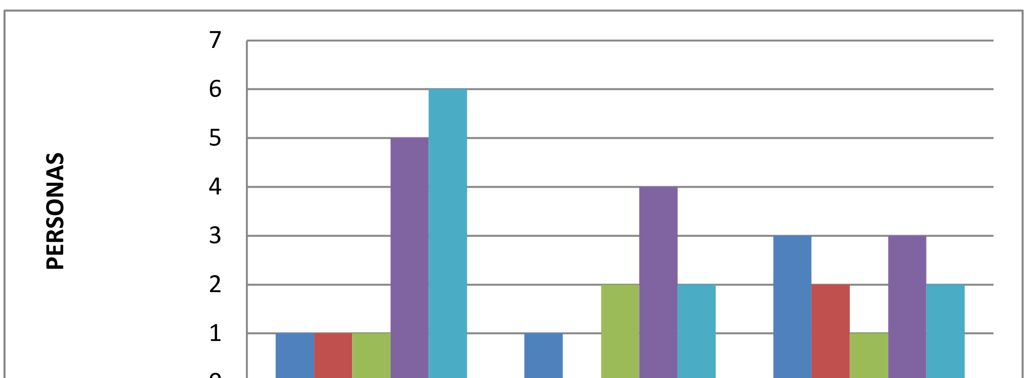
La *opción b*. Come diariamente 60 gramos, ya que son las $\frac{2}{5}$ partes de 150 gramos que es su peso, es la respuesta más completa, ya que justifica el razonamiento que debía hacer.

La *Opción d*. Su peso es 150 gramos, ya que $\frac{1}{5}$ de su peso es 30 gramos, es válida, aunque no justifica totalmente el peso del ratón.

Las demás opciones son distractores de las opciones correctas.
Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 10el 9.09% de los estudiantes contestaron la *opción b*. y el 36.36% de los estudiantes contestaron la *opción d.* El 3.03 % de los estudiantes contestaron ambas opciones.

Tabla 10.

**Pregunta 8. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 1 | 1 | 3 |
| b. Correcta 0.6 | 1 | 0 | 2 |
| c. | 1 | 2 | 1 |
| d. Correcta 0.4 | 5 | 4 | 3 |
| e. | 6 | 2 | 2 |

**Pregunta 9.** Plantea una situación problemática, que cubre las preguntas 9 y 10; la pregunta 9 hace referencia a lo ocurrido en la tienda A, en esta se encuentra la interpretación de la fracción como razón.

| TIENDA | PROMOCIÓN | ESTRATEGIA |
|---|---|---|
| **A** | Por la compra de una camisa, la segunda (del mismo precio) tiene un descuento del 50%. | Subieron el precio de las camisas, una cuarta parte del precio original. |
| **B** | Por la compra de dos camisas, lleva la tercera gratis. | Subieron 50% al precio original de cada camisa. |

Juanita compra 2 camisas del mismo precio en la tienda A. Supongamos que el precio original de las camisas es \$100. El precio de cada camisa que sale a la venta para hacerle la promoción es $\frac{1}{4} de\ 100 = 25$, más del precio original, luego cada camisa queda a \$125. La primera camisa valdría \$125 y la segunda se le debe hacer un $40\%\ de\ descuento = 40\ por\ cada\ 100$, entonces la segunda camisa cuesta \$75, luego las dos camisas cuestan \$200 que sería el precio original.

Las opciones correctas son:

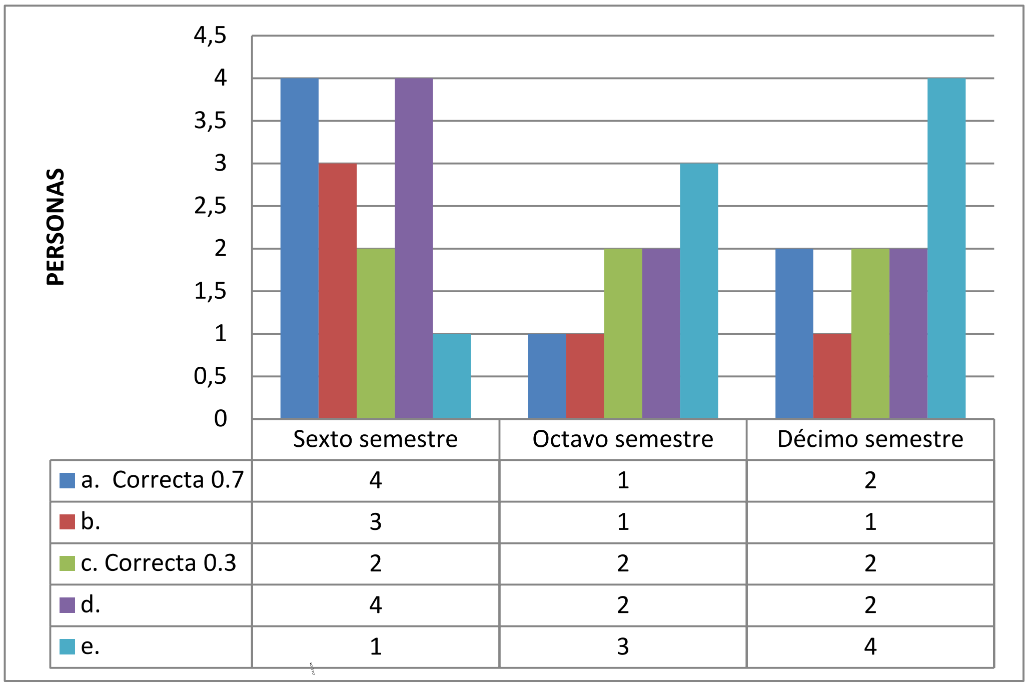
La *Opción a.* No hay promoción, ya que la primera camisa tendría un precio de $\frac{5}{4}$ su precio original y el 40% de descuento de la segunda sería el precio incrementado, en esta opción se argumenta que la segunda camisa tendría su precio original, ya que el incremento y el descuento equivale al mismo valor.

La *Opción c.* No hay promoción, ya que cada camisa se incrementa en un 25%, en esta opción se argumenta que en los dos hay un incremento en el precio. Esta opción es correcta, pero faltó especificar sobre la diferencia entre lo incrementado y el descuento. Es por este motivo que el valor de cada respuesta correcta es diferente. Las otras opciones son distractores de las dos opciones correctas.

Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 11. el 21.21% de los estudiantes contestaron la respuesta a. y el 18.18% de los estudiantes contestaron la respuesta c. El 3.03% de los estudiantes contestaron ambas respuestas correctas.

Tabla 11.

**Pregunta 9. Según semestre**




| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. Correcta 0.7 | 4 | 1 | 2 |
| b. | 3 | 1 | 1 |
| c. Correcta 0.3 | 2 | 2 | 2 |
| d. | 4 | 2 | 2 |
| e. | 1 | 3 | 4 |

**Pregunta 10**. Se deriva del enunciado en la pregunta 9; la pregunta 10, plantea la necesidad de un análisis para ambas tiendas. En esta situación se utilizan los diferentes significados de la fracción, y se busca que el estudiante interconecte un significado con otro.

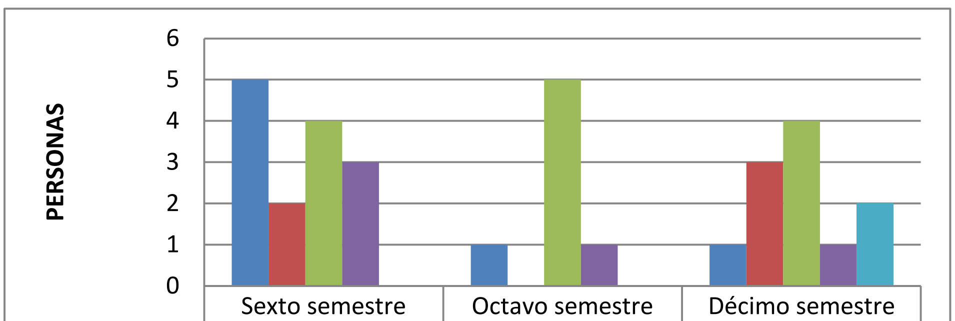
Debe hacerse un análisis para ambas tiendas. En esta situación se utilizaban los diferentes significados de la fracción, y se busca que el estudiante interconecte un significado con otro. En el análisis realizado en la pregunta 9. Se concluye que en A no hay descuento.

En la tienda B,  tendríamos para un precio original de cada camisa de $100, $50\% = 50\ por\ cada\ 100$ de incremento, es decir $150, Por las dos camisas pagaría $300, luego la tercera no sería gratis, puesto que ya la pagó.

Al comparar los descuentos realizados en las dos tiendas se puede decir que la *opción c.* En ambos almacenes no hay descuento, es correcta. Las demás opciones son distractores de la respuesta correcta. Según los datos recolectados, representados gráficamente en la Tabla 12, el 39.39% de los estudiantes contestaron la respuesta correcta.

Tabla 12.

**Pregunta 10. Según semestre**



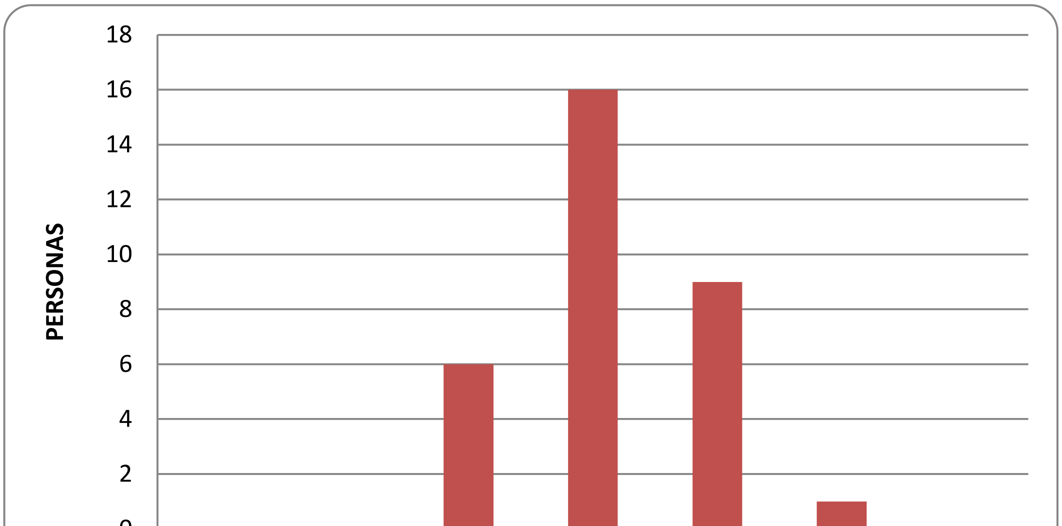

| | Sexto semestre | Octavo semestre | Décimo semestre |
|---|---|---|---|
| a. | 5 | 1 | 1 |
| b. | 2 | 0 | 3 |
| c. Correcta | 4 | 5 | 4 |
| d. | 3 | 1 | 1 |
| e. | 0 | 0 | 2 |

**Resultados generales de la prueba diagnóstica**

Al analizar los resultados generales de la población participante, se encuentra que el 96.88% de los estudiantes partícipes obtiene un puntaje por debajo de 4.6, esto sobre 10 puntos, como mayor puntaje. Además, la media de la población obtiene un puntaje de 1.28, sobre 10 como mayor puntaje. Estos resultados han sido representados gráficamente en la Tabla 13.

Tabla 13.

**Prueba diagnóstica - Población total**

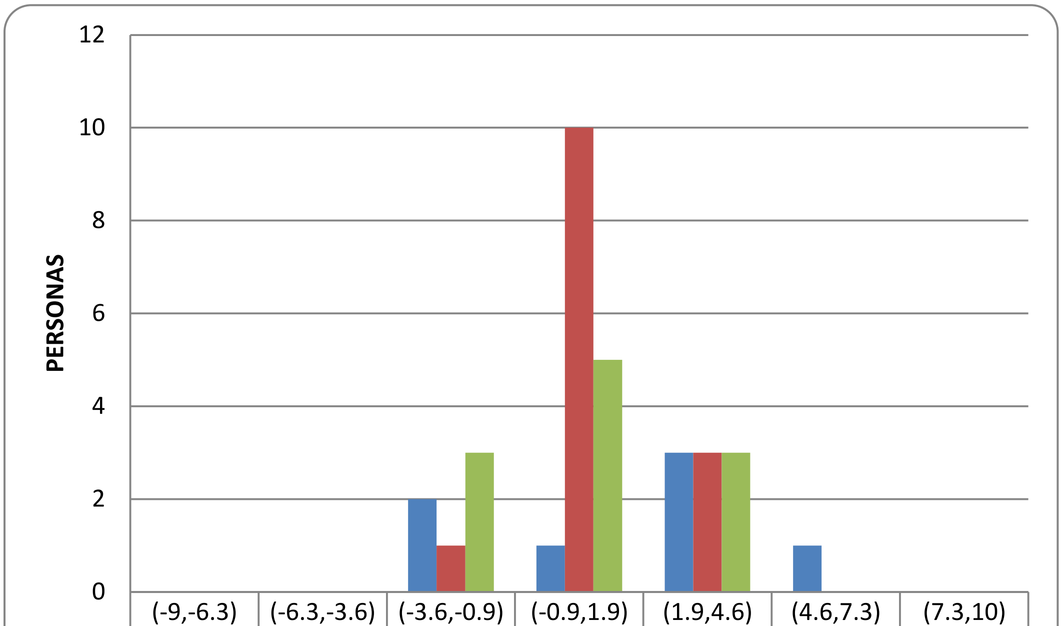



| | (-9,-6.3) | (-6.3,-3.6) | (-3.6,-0.9) | (-0.9,1.9) | (1.9,4.6) | (4.6,7.3) | (7.3,10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TOTAL | 0 | 0 | 6 | 16 | 9 | 1 | 0 |

El análisis comparativo por semestre de los resultados generales, muestran levemente un mejor desempeño de los estudiantes de octavo semestre, obteniéndose en este grupo la mayor nota 4.6. Además la mayoría de los estudiantes de sexto semestre se encuentran en notas entre -0.9 y 1.9, sobre 10, como mayor puntaje. Estos resultados han sido representados gráficamente en la Tabla 14.

Tabla 14.

**Cuadro Prueba diagnóstica - Comparativo por semestre**




| | (-9,-6.3) | (-6.3,-3.6) | (-3.6,-0.9) | (-0.9,1.9) | (1.9,4.6) | (4.6,7.3) | (7.3,10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8° | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 6° | 0 | 0 | 1 | 10 | 3 | 0 | 0 |
| 10° | 0 | 0 | 3 | 5 | 3 | 0 | 0 |

Los resultados confirman reflexiones teóricas sobre el concepto de fracción en los estudiantes, que teóricos como Vasco (1991) han puesto en consideración. El significado de fracción de la mayoría de los estudiantes es de partidor, hay un concepto de unidad discreta y continua, aunque las particiones de esa unidad son físicas, es decir, se piensa en partir el pan, la pizza, la naranja, etc. y no en cualidades que puedan representar unidades de medida de estos objetos. Las razones, en especial los porcentajes no las relacionan con las fracciones, ni las utilizan e interpretan en la vida diaria. El significado de operador lo interpretan como una regla de tres, pero no tienen claro su algoritmo. Finalmente no hay interconexión entre los diferentes significados de fracción.

De los resultados y análisis de la prueba, se puede inferir que, los estudiantes muestran baja competencia en cuanto a sus conocimientos para enseñar las matemáticas de 2, 3 y 4 grado de la básica primaria, ya que es en estos grados donde se presentan las fracciones y sus diferentes significados, como eje articulador del pensamiento numérico.

De acuerdo a un sondeo realizado con algunos egresados de la Licenciatura en Educación Básica, se ha encontrado casos de docentes orientando las matemáticas en primaria. Es decir, es una realidad que para estos futuros docentes, las matemáticas de primaría podrían convertirse en su campo de acción.

Los vacíos y errores conceptuales de los estudiantes, reflejan una preocupación de los teóricos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, ya que si no hay una apropiación de los contenidos en el docente, la transposición didáctica, será una tarea que podría traer a los nuevos estudiantes los mismos vacíos y errores conceptuales.

Al contrastar las reflexiones de Llinares-Sánchez (1990) y los datos recolectados en la población estudio, se puede reafirmar que la enseñanza de los fraccionarios en la escuela no ha cambiado; a pesar de que en la didáctica de las matemáticas hace varias décadas se hable de la importancia de los diferentes significados del concepto de fracción, en la escuela aún solo se muestra la mirada de la fracción como partidor. Señalando dos problemas que deben abordarse en la enseñanza de las fracciones, en primer lugar, las diferentes interpretaciones en la vida diaria y en segundo lugar, el proceso a largo plazo; sin embargo, continua un afán por mostrar a los estudiantes los algoritmos algebraicos para ordenar y operar fracciones, que deberían ser abordados en séptimo y octavo grado y no en primaria dando prioridad al concepto de fracción.

De esta manera, para la investigación es relevante priorizar la enseñanza y comprensión de la matemática en docentes en formación, puesto que como licenciados en educación básica, una de las áreas de conocimiento que están llamados a orientar a la población escolar de la educación básica primaria, es la matemáticas. Las sucesivas transformaciones, contextualizaciones o desplazamientos que se producen en el conocimiento, desde que es elaborado por la comunidad científica hasta su vehiculización institucionalizada como conocimiento escolar, llamado transposición didáctica Chevallard (1991) hará parte del quehacer pedagógico del futuro docente, siendo preocupante que el docente en formación manifieste un bajo nivel de competencias matemáticas, ya que esto trascenderá a la población escolar.

## 4.2. ANÁLISIS RESULTADOS DESARROLLO DE UNIDADES DIDÁCTICAS

### 4.2.1. Resultado aplicación de la unidad didáctica 1: Significado de la fracción como partidor

La primera unidad, (Anexo B), Significado de la fracción como partidor, utilizando como material concreto el juego Partimundo y cinco formas de jugarlo, identificadas como forma 1, forma 2, hasta forma 5, las cuales se tienen en cuenta en los tres talleres que plantea esta unidad, y relacionados con: Interpretación, relación de orden y equivalencias; con el desarrollo de esta unidad se pretende que los estudiantes participes reconozcan el significado de la fracción parte-todo, ordenen un conjunto de fracciones, ubicándolas en la recta numérica y determinen fracciones equivalentes.

Resultados del primer taller: Interpretación partidor. *La unidad.*

1. En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y la realización del taller, se encontró que:

La forma de juego 1 permite que el participante sea ágil en el momento de armar las piezas. Aunque hay azar en el juego, es necesario utilizar la lógica haciendo que la persona se enfrente al reto de armar los rompecabezas, afirmación del primer grupo, conformado por 4 estudiantes.

Los estudiantes le dan atributos a cada uno de los discos a través de diversas unidades de medida. De esta manera fueron saliendo del juego representaciones de cada una de las fracciones, que posteriormente se convirtieron en situaciones problémicas. A continuación, se presentan algunos ejemplos de las situaciones modeladas por los estudiantes:

- *Para una banda musical de un Colegio necesitan 48 instrumentos musicales, dicha Institución tiene* $\frac{3}{4}$ *¿cuántos instrumentos tiene el colegio? ¿cuántos les falta para tenerlos todos?*
- *Un perro persigue a un gato para morderlo. Si el gato logra escapar a los diez metros y el perro fatigado solo logra recorrer* $\frac{4}{5}$*¿Cuántos metros recorre el perro?*
- *Un elefante adulto puede alcanzar 7500 kg de peso, un cachorro su séptima parte ¿cuánto pesa el cachorro?*
- *Un zancudo tiene una vida media de un día, a las doce horas ¿qué fracción de su vida ha vivido? ¿cuántas horas ha transcurrido en* $\frac{3}{4}$ *de su vida?*

Los diferentes grupos al jugar la forma 1, encuentran que sí en los dos dados salían 0, el jugador perdía la oportunidad de ganar puntos en el turno al no tener disco para armar. Y en la forma 2 el jugador no tomaba ficha y cedía el turno. Estas reglas fueron concertándola los estudiantes en el mismo juego ya que no se les dio regla alguna para esta posibilidad.

La reacción de los diferentes grupos ante la situación de 0 y otro número en el lanzamiento de los dados en la forma 1 y 2, encontrando que los grupos sumaban los puntos de los dados y este total les mostraba el disco por armar o la ficha por tomar. Es decir, se formaban varias posibilidades para armar un número. Por ejemplo, para armar el disco de 6 necesitaría en el lanzamiento de los dos dados habrían las siguientes posibilidades: 0 y 6, 1 y 5, 2 y 4, 3 y 3.

2. En la socialización del taller los estudiantes afirman que la forma 1 permite reconocer la parte y el todo, y en la forma No 2, al tomar una parte de ese todo, se observa el significado de fracción como partidor. Además el juego posibilita la integración de los estudiantes, respetando las reglas y asumiendo su roll de ganador o perdedor.

3. En la formalización del taller, se generalizó:

- Concepto de Unidad: discreta y continua.
- Significado del numerador y denominador en una fracción.
- Relación de orden "menor que", "mayor que" en fracciones de igual numerador.
- Completar la unidad con fracciones de igual denominador.

Se observa que los diferentes grupos participaron activamente y encontraron un algoritmo en la relación de orden de las fracciones del mismo denominador a través de las dos formas del juego, ya que la comparación de pedazos de un mismo disco están relacionadas con la cantidad de fichas, así: a mayor numerador mayor es la fracción.

Resultados del segundo taller: Fracciones propias. Orden y equivalencias.

1. En las observaciones realizadas a cada uno de los grupos en la manipulación del material y realización del taller, se encontró que:

En general, los grupos al  jugar la forma 3 y  resolver el taller, se encuentran con el mismo algoritmo para la relación de orden en conjuntos de fracciones de igual numerador que para numerador 1.

El grupo 2 responde a la pregunta 3 del taller: sí sale $\frac{0}{5}$ , se tiene una unidad dividida en 5 partes y no se toma ninguna de esta; eso significa, que no se debe superponer con otras fichas de otro disco y se puede completar con otra unidad. A esa misma pregunta el grupo 3 señaló: en el juego $\frac{0}{5}$ es 0 y se puede completar con $\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{5}{5},\frac{6}{6},\frac{7}{7},\frac{8}{8},\frac{9}{9},\frac{10}{10}$.

En la forma 4 si sale en los dos dados cero, significa que no hay ninguna unidad, por lo tanto no se superpone, ni se complementa algo que no existe concretamente, respuesta dada a la pregunta siete del taller por los estudiantes del grupo 2.  El grupo 4 señaló a la misma pregunta: sí sale en los dos dados cero, significa que hay que repartir nada entre nada y esa opción no existe. El grupo 3: sí sale en los dos dados cero, significa que no existe ninguna unidad del cual podamos tomar una de sus partes.

2. En la socialización del taller, se puede observar  que los estudiantes relacionaron unos discos con otros para jugar la forma 4, así:

- La unidad con todos los discos.
- Los medios con los cuartos, los sextos, los octavos y los décimos, pero en el juego para ganar más puntos decidían tomar la mayoría de veces los décimos.
- Los tercios los relacionaron con los sextos y novenos, había mayor tendencia a relacionarlo con los noveno.
- Los cuarto los relacionaban con los octavos y los medios, había mayor tendencia a relacionarlo con los medios.

- Los quinto los relacionaban con los décimos.

- Los séptimo no los relacionaron con otros discos.

3. En la formalización del taller, se realizaron procedimientos y demostraciones para que los estudiantes:

- Reconocieran la fracción $\frac{0}{a}$ como la representación de 0 en fracciones.
- Reconocieran la indefinición $\frac{a}{0}$ y la indeterminación $\frac{0}{0}$.

La mayoría de los grupos reconocen en los talleres la fracción $\frac{0}{a}$ como la representación del 0, en la formalización se generaliza y se representa en la recta numérica. Sin embargo no son tan evidentes $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$ .

Para la indefinición $\frac{a}{0}$ se analiza el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, que no está definida en el caso de $x = 0$. Cuando $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$, según Tabla 15, se puede deducir (a través de la calculadora) que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$[5]. Gráficamente se puede observar el comportamiento de la función. Ver Figura 1.

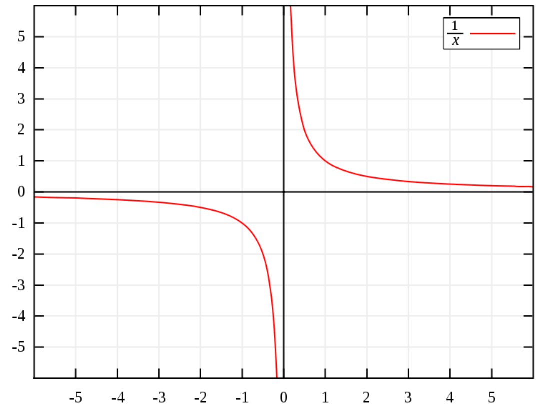



**Figura 1. Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$**

[5]El problema surgió en los años 650, cuando en India se comenzó a popularizar el uso del cero y los números negativos. El primero en aproximarse al planteamiento de este problema fue el matemático indio Bhaskara I, quien escribió que $\frac{n}{0} = \infty$, en el siglo VII.

Tabla 15.

**Tabla de valores de la función $f(x) = \frac{1}{x}$**

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| 0.01 | 100 |
| 0.001 | 1000 |
| 0.0001 | 10000 |
| -0.01 | -100 |
| -0.001 | -1000 |
| -0.0001 | -10000 |

Ahora bien, sí utilizamos la indeterminación $\frac{0}{0}$ en alguna demostración llegamos a conclusiones erróneas. Por ejemplo, sabiendo que $\frac{0}{0} = 1$ es correcto y que $\frac{0}{0} = 2$ también lo es, podríamos concluir

$$1 = \frac{0}{0} = 2$$

y por tanto 1 = 2, lo cual es absurdo.

También podemos decir que $\frac{0}{0}$ es una operación indeterminada. Esto es así porque cualquier resultado que se quiera asignar a la operación es válido. Se puede ver convirtiendo $\frac{0}{0} = 0$, ya que $0 = 0 \times 0$, pero también llegamos a $\frac{0}{0} = 1$, ya que $0 = 0 \times 1$ y también a $\frac{0}{0} = 3$, ya que $0 = 0 \times 3$ y así sucesivamente con cualquier otro número del contexto de los números reales.

La pregunta de profundización se socializa en la formalización: la mayoría de los grupos en la forma 3 concluyen que  no se podía sacar una ficha de un disco que no existía al sacar en los dos dados 0, por lo tanto ellos cedían el turno. En la forma 4 al sacar en los dos dados 0, significa tomar del disco de 0, 0 unidades lo cual crea una controversia en creer que $\frac{0}{0} = 0$. Los grupos toman la decisión de ceder el turno en este caso es por esto que se hizo necesario precisar estos conceptos. En las reflexiones colectivas, los estudiantes resaltan la pertinenciade estos temas en su formación docente.

Resultados del tercer taller: Número mixto. *Orden y equivalencias*.

1. En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y realización del taller, se encontró que:

   A través de la forma 5 del juego los estudiantes en general, alcanzan una mayor comprensión: dado un número de fichas, saber cuántos discos completos se pueden armar y cuántas fichas sobran. La escritura de estos números tanto en fracción como en número mixto toma sentido a través del juego. El algoritmo generalizado fue: $\frac{m}{n} = a\ \frac{b}{n}$, donde $a$ representa el cociente y $b$ el residuo de la división $m \div n$.

   Cada grupo tenían 5 discos de sextos, séptimos, octavos, novenos o décimos.

   - El grupo que tiene los sextos, tiene la posibilidad de sacar 01, 02, 03, 04, 05, teniendo fracciones menores que la unidad.

   - El grupo que tiene los séptimo tiene la posibilidad de sacar 01, 02, 03, 04, 05 y 06, teniendo fracciones menores que la unidad.

   - El grupo que tiene los octavos tiene la posibilidad de sacar 01, 02, 03, 04, 05, 06 y 07, teniendo fracciones menores que la unidad.

   - El grupo que tiene los noveno tiene la posibilidad de sacar 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07 y 08, teniendo fracciones menores que la unidad.

- El grupo que tiene los décimos tiene la posibilidad de sacar 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 y 09, teniendo fracciones menores que la unidad.

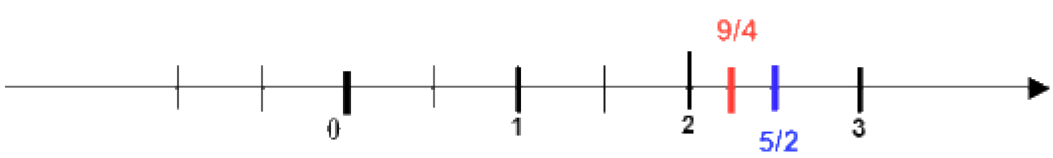
2. En la socialización del taller se observan algunos errores conceptuales en la pregunta ¿qué hacer si sale en los dos dados 0?teniendo en cuenta que representaría 0 unidades y 0 decenas, es decir, seria 0 discos por armar, muy diferente a las formas de juego anteriores. Sin embargo, la mayoría de los grupos la relacionan con las formas anteriores, en todos los grupos, al jugar cedían el turno. En ambos casos, no se obtiene puntos, pero, la representación en el juego es diferente.

3. En la formalización del taller se generalizó:

Representación de los números racionales en la recta numérica, al establecer a cada punto de la recta, un único número racional (representante de cada familia de fracciones equivalentes)y recíprocamente a cada número racional, un único punto de la recta.

La recta numérica permite comparar fracciones. Ubicando cada fracción en la recta y observando la posición se puede establecer el orden entre fracciones.
El valor más cercano a cero corresponde al valor menor.

*Por ejemplo,*




Para identificar $\frac{9}{4}$ sobre la recta numérica, una manera posible sería encontrar el intervalo de números naturales al que pertenece. En este caso $2 < \frac{9}{4} < 3$.

Podemos considerar $2 = \frac{8}{4}$ y $3 = \frac{12}{4}$. Necesitamos subdividir el intervalo de extremos 2 y 3 en cuatro partes iguales para ubicar al punto que representa $\frac{9}{4}$.
De igual forma procederíamos con la fracción $\frac{5}{2}$, observando que podemos escribir $2 = \frac{4}{2}$ y $3 = \frac{6}{2}$, por lo tanto, $\frac{5}{2}$ está comprendida entre 2 y 3; subdividiendo el intervalo en mitades ubicaríamos el punto correspondiente a $\frac{5}{2}$, obteniéndose así la relación: $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$.
De esta manera se realiza la formalización de la relación de orden entre las fracciones, el concepto de fracción impropia y la ubicación de las fracciones en la recta numérica.

En este taller se puede observar que los grupos tienen dificultades en encontrar procedimientos o algoritmos para ordenar fracciones de diferente denominador, ubicación de fracciones en la recta numérica y no reconocen las fracciones impropias, se trabajan varios ejemplos, para ejercitar procedimientos, ya que estas dificultades se han detectado en la prueba diagnóstica.

Con el desarrollo de la primera unidad didáctica, y la construcción del significado de la fracción como *parte-todo* a través del juego *Partimundo*, se reconoce el todo como la unidad presentada en dos formas: *continua y discreta*, así como la resignificación de partir unidades de medida y no objetos. Se realiza la representación de la fracción en la recta numérica, tanto para fracciones propias como para fracciones impropias. Desde el significado parte-todo se construye algoritmos para reconocer fracciones equivalentes y la relación de orden entre fracciones. Se conforman fracciones desde la relación parte-todo y parte-parte. De acuerdo con lo observado durante el desarrollo de los talleres de esta unidad, se aprecia que los estudiantes han superado las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica con respecto al significado de fracción como parte-todo.

### 4.2.2. Resultado de la aplicación de la unidad didáctica 2: Significado de la fracción como razón

Esta unidad didáctica se trabaja con el material concreto identificado como bloques lógicos de Zoltán Dienes, además se presentan otros contextos tales como: cartas de póker, dados y noticias de prensa escrita.

Con el desarrollo de esta Unidad Didáctica se busca que los estudiantes partícipes reconozcan el significado de la fracción como razón, ordenen fracciones de diferente denominador, reconozcan las proporciones, especialmente los porcentajes como fracciones equivalentes y problematicen sobre las fracciones $\frac{a}{0}, \frac{0}{a}, \frac{0}{0}$.

Resultados primer taller: Interpretación de razón. *La unidad.*

1. Este material didáctico originalmente no se había utilizado como un juguete, sin embargo se diseñaron dos formas de jugarlo para que el estudiante explore y reconozca el material. En las observaciones realizadas a los grupos En la manipulación del material y la realización del taller, se encontró que:

   En la forma 1 de juego: La ficha escondida, permite reconocer el material y participar de forma activa, ya que se debe tener en cuenta las preguntas de cada jugador, para así descartar las fichas hasta encontrar la ficha escondida. Es un juego que permite reforzar en el estudiante la capacidad de escucha y aprender del error, según la reflexión colectiva realizada por el grupo 1.

   En la forma 2 de juego: Domino, permitió reconocer las características de las fichas, y al saber que cada ficha es única en el conjunto, las posibilidades de cerrar el juego aumentan a medida que se exigen más cualidades en la ficha que se va colocando en la mesa, de tal manera que para cuatro cualidades el juego no es posible, según reflexión colectiva realizada por el grupo 3.

2. En la socialización del taller se pudo observar que los grupos en general reconocían el material con la ayuda de los juegos realizados, pudieron armar razones. Señalaron que el atributo “color” divide las fichas en tres partes (amarillas-azules-rojas), el atributo “grosor” en dos partes (grueso-delgado), al igual que el atributo “tamaño” (grande-pequeño) y el atributo “forma” (rectángulo-cuadrado-círculo-triángulo).

**3.** En la Formalización taller se generalizó:

Las razones se conforman a través de comparaciones entre subconjuntos con el conjunto universal o comparaciones entre los subconjuntos, donde el conjunto universal (todo) es el número de elementos de los bloques lógicos que son (48 piezas), y se forman subconjuntos (partes) atribuyéndole una o varias cualidades (forma-color-grosor-tamaño). Las razones encontradas son otra interpretación de la fracción, las comparaciones realizadas son entre las cardinalidades de los conjuntos formados.

En la formalización se realiza una revisión de la solución del taller hecha por cada grupo y se realizan precisiones del lenguaje y formas de representar las razones como fracciones.

Se observa gran participación de los grupos y se reconoce la importancia del material y la diferencia entre los dos significados vistos hasta ahora.

Resultados del segundo taller: Proporciones. *Equivalencias.*

1**.** En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y la realización del taller, se encontró que:

En el grupo 2 construyen razones de acuerdo a otros atributos de las fichas, planteando así, diversas situaciones de fracciones como razones.

Los estudiantes del grupo 3, contextualizan las fracciones de acuerdo a la cardinalidad de los conjuntos y el número de fichas a tomar "…e*s posible pensar en un subconjunto vacío dentro de uno no vacío, pero no es posible de un conjunto vacío sacar un conjunto no vacío…*"

2. En la socialización del taller, los diferentes grupos muestran ejemplos de proporciones formadas por los atributos de las fichas y en cada subconjunto que formaron, encontraron más proporciones. Por ejemplo, el grupo 4, Tabla 16 a partir del tamaño divide en dos partes a todo conjunto que armaban y así forman proporciones con $\frac{1}{2}$.

**Tabla 16.**

Ejemplo del Grupo 4

| CRITERIOS | RAZONES FORMADAS | PROPORCIONES: RAZONES EQUIVALENTES |
|---|---|---|
| Tamaño: grande-pequeño<br><br>*Dividen a todas las fichas en dos partes: unas grandes y otras pequeñas.* | De 2 círculos, azules y gruesos, 1 es pequeño. $\frac{1}{2}$<br>De 4 círculos azules, 2 son pequeños. $\frac{2}{4}$<br>De 12 círculos, 6 son pequeños. $\frac{6}{12}$<br>De 48 fichas, 24 son pequeñas. $\frac{24}{48}$ | $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12}=\frac{24}{48}$ |

Utilizando el material y las razones armadas en el ejercicio 4, los estudiantes deben resolver la pregunta ¿qué sucedería si hubiera 100 fichas?

Una de las situaciones planteadas por el grupo 3 fue: *De 12 círculos, 6 son pequeños. Si hubiera 100 círculos, ¿Cuántos serían pequeños?*

La solución,

$\frac{6\ círculos\ pequeños}{12\ círculos} = \frac{x\ círculos\ pequeños}{100\ círculos} \rightarrow\ 6 \times 100 = 12 \times x\ \rightarrow \frac{600}{12} = 50 = x.$

3. En la formalización, socializado el taller se realizan precisiones. Para proporciones o razones equivalentes se generalizó:

*Por ejemplo*,
Si se dividen los siguientes conjuntos por grosor:
Triángulos: de 16 triángulos 8 son delgados. 8:16
Triángulos-amarillos: de 4 triángulos-amarillos 2 son delgados. 2:4
Triángulos-amarillos-grandes: de 2 triángulos-amarillos-grandes 1 es delgado. 1:2
Luego el grosor forma proporciones o razones equivalentes
8:16 = 2:4 o 2:4 = 1:2 o 8:16 = 1:2, inclusive es posible predecir. Si hubiera 200 fichas, 50 fichas o 100 fichas.

En las razones donde el conjunto formado no es vacío, tiene sentido armar un subconjunto vacío.

*Por ejemplo,*
De dos triángulos-grandes-amarillos. ¿Cuántos son cuadrados? o ¿Cuántos son pequeños? o ¿Cuántos son rojos?, en todos los casos se tendría un conjunto vacío, cuya cardinalidad es 0 fichas.

De los conjuntos formados por 0 fichas, no es posible pensar en armar subconjuntos. Se observa que hay dificultades de trabajar estos casos en el material concreto, puesto que este razonamiento es abstracto, y las demostraciones realizadas en la unidad didáctica 1, les permite a los estudiantes precisar formalmente estos casos.
*Por ejemplo,*

De los rombos (en el material concreto que se ha trabajado no hay rombos). ¿Cuántos son rojos? Es decir, no tiene sentido hablar ni de rombos, ni de rombos rojos en el material. Precisar en estos casos la *indeterminación* $\frac{0}{0}$, no el caso de un conjunto vacío, puesto que la cardinalidad del conjunto vacío es 0.

De las fichas negras (en el material concreto que se ha trabajado no hay fichas negras, Tomar 2 triángulos. Es decir, no hay fichas negras, luego no tiene sentido hablar de triángulos negros en el material concreto trabajado. Precisar en estos casos la *indefinición* $\frac{a}{0}$ y no el caso de un conjunto vacío.

Los grupos trabajan y participan activamente en el taller, aunque se precisa el lenguaje matemático en las intervenciones hechas en la formalización.

Resultados del tercer taller: Otros contextos. *Orden.*

**1.** En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y la realización del taller se encuentra que:

Utilizando el material, representan razones en un mismo conjunto y con las mismas características, posteriormente las ordenan, finalmente deben encontrar un algoritmo para ordenar razones, aunque no todos los grupos encuentran procedimientos que generalizan su razonamiento.

A través de un recorte de periódico con una noticia reciente, donde se involucran razones, realizan un análisis de dicha información, así

- Subrayan las razones, proporciones, porcentajes o fracciones que aparecían en la noticia y ordenan de menor a mayor las razones encontradas.

- La mayoría de los grupos encuentran el significado de la fracción en la noticia. Concluyen que si el lector no reconoce la fracción, tendría dificultades en la interpretación de la información. Algunos grupos debaten sobre la manipulación que le dan a la información, sabiendo que el lector presenta dificultades con las fracciones, ejemplos como contratos, documentos de préstamos en los bancos, recibos públicos, descuentos u ofertas de supermercados, etc.
- En algunos grupos encuentran posibles errores o sesgos de la información, de tal manera que se hizo una crítica a la noticia y a la forma de mostrar la información para hacerla más comercial.

A través de un par de dados y las cartas de póker, deben responder preguntas tales como: Hallar la probabilidad de sacar 2 en el lanzamiento de un dado, o sacar 3 de cualquier pinta de toda la baraja, o sacar 7 en el lanzamiento de dos dados. Los grupos trabajan estas preguntas sobre el concepto de probabilidad,

$$Probabilidad(ocurrencia\ suceso\ A) = \frac{sucesos\ a\ favor}{total\ de\ sucesos}$$

Los estudiantes no presentan dificultades al resolver las preguntas con únicos sucesos, pero en las preguntas de varios sucesos hay dificultades.

2. En la socialización del taller los grupos plantean diversas situaciones problémicas de acuerdo a los diferentes contextos presentados en este taller.

3. En la formalización del taller se generalizó:

Para determinar que dos razones son equivalentes, a través de la proposición

$$\forall\, a, b, c, d \in Z:\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Por ejemplo,

Determinar que $\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$, se puede decir que es una proporción (es decir que las fracciones son equivalentes) puesto que $5\times 25=5\times 10$.

Para ordenar razones, se recurre a las proporciones también.

Por ejemplo,

Ordenar de menor a mayor las fracciones

$\frac{2}{5},\frac{1}{3},\frac{7}{10}.proporción\text{:}\ \frac{2}{5}=\frac{12}{30};\quad proporción\text{:}\ \frac{1}{3}=\frac{10}{30};\quad proporción\text{:}\ \frac{7}{10}=\frac{21}{30}$

$$\rightarrow \frac{10}{30}<\frac{12}{30}<\frac{21}{30}\quad \rightarrow\ \frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{7}{10}.$$

Luego ordenadas de menor a mayor las fracciones quedarían $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{7}{10}$.

En una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, hay cuatro valores de los cuales en una situación problemática se puede tener tres valores conocidos y uno desconocido. Basta con esos tres valores conocidos para poder calcular el valor desconocido, a ese procedimiento se le reconoce como *regla de tres*.

*Por ejemplo,*

Si de 16 triángulos 8 son delgados, si hay 4 triángulos amarillos, ¿cuántos serían delgados?

Tendríamos $\frac{8\ triángulos\ y\ delgados}{16\ triángulos}=\frac{x\ triángulos\ amarillos\ y\ delgados}{4\ triángulos\ amarillos}$, entonces la proporción sería $\frac{8}{16}=\frac{x}{4}\rightarrow 32=16x\ \rightarrow\ \frac{32}{16}=2=x$. Luego son 2 triángulos, amarillos y delgados.

En la formalización se trabajan diversos problemas para ejercitar los procedimientos.

En la socialización de la noticia se realizan precisiones de lenguaje matemático, los grupos realizan aportes valiosos en sus intervenciones, tales como la importancia de reconocer las fracciones en la vida cotidiana y la manipulación de la información en los medios de comunicación y la publicidad por el desconocimiento de las fracciones.

En los problemas de probabilidad a través del material concreto utilizado, se necesita precisar en las preguntas de varios sucesos.

Por ejemplo,

Hallar la probabilidad de sacar 7 en el lanzamiento de dos dados.

$$Probabilidad\ (sacar\ 7) = \frac{sucesos\ a\ favor}{Total\ de\ sucesos}$$

$Total\ de\ sucesos = 36$

00 01 02 03 04 05

10 11 12 13 14 15

20 21 22 23 24 25

30 31 32 33 34 35

40 41 42 43 44 45

50 51 52 53 54 55

$Sucesos\ a\ favor$ (Sacar 7, es decir, la suma de los puntos debe dar 7) $= 4$

25, 34, 43, 52.

Luego,

$$Probabilidad\ (sacar\ 7) = \frac{sucesos\ a\ favor}{Total\ de\ sucesos} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

En la mayoría de los grupos se observa errores conceptuales y procedimientos para resolver estas situaciones, al realizarse la generalización de los procedimientos encuentran significado y sentido a la regla de tres, las proporciones, el porcentaje, la probabilidad y que estos conceptos muestran el significado de razón de las fracciones.

Al concluir el trabajo de la segunda Unidad Didáctica, los estudiantes encuentran el significado de la fracción como razón a través de los bloques lógicos de Zoltán Dienes, armando razones y proporciones (razones equivalentes). Se trabajan las fracciones en otros contextos, tales como la probabilidad a través de dados y cartas de póker y análisis de datos registrados en noticias y medios de información. Se construyen algoritmos para hallar y verificar proporciones, regla de tres y porcentajes. Se generalizan procedimientos para ordenar fracciones de menor a mayor y viceversa. Con el desarrollo de este taller se evidencia que los estudiantes han superado las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica con respecto al significado de fracción como razón

4.2.3. Resultado aplicación de la unidad didáctica 3: significado de fracción como operador

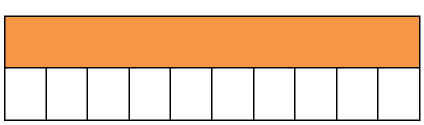
Resultados del primer taller: Interpretación operador. *La unidad.*

1. En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y realización del taller se encontró que:

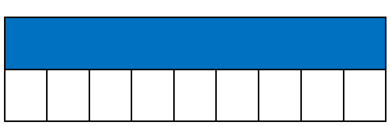
Una vez reconocido el material, los estudiantes realizan una descripción del mismo. Descomponiendo cada regleta con las otras, tanto en partes iguales como en desiguales.

2. En la socialización del taller, todos los grupos utilizando el material determinan la longitud de cada regleta comparándola con la regleta de 1 (blanca) así:

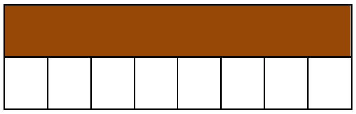
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{10}$ comparada con la naranjada**.**



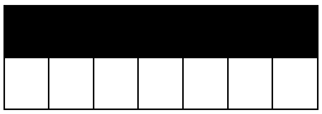
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{9}$ comparada con la azul**.**



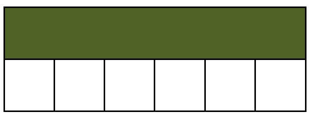
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{8}$ comparada con la marrón**.**



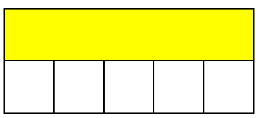
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{7}$ comparada con la negra**.**



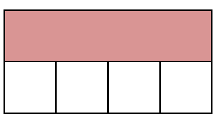
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{6}$ comparada con la verde oscura**.**



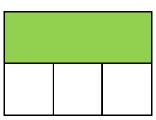
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{5}$ comparada con la amarilla**.**



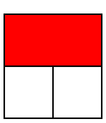
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{4}$ comparada con la rosada**.**



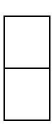
Cada regleta blanca representa $\frac{1}{3}$ comparada con la verde claro**.**



Cada regleta blanca representa $\frac{1}{2}$ comparada con la roja**.**



Cada regleta blanca representa $\frac{1}{1}$ comparada con esta misma**.**



Los grupos participan activamente en la socialización del taller, muestran las soluciones de las actividades planteadas.

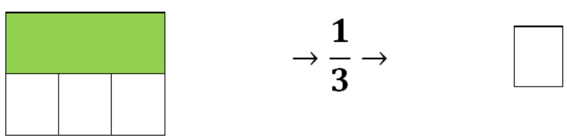
3. En la formalización del taller se generalizó:

Se precisa en el lenguaje de la fracción como operador, teniendo en cuenta, la unidad comparada con respecto a la descomposición en regletas iguales, especialmente la regleta blanca.

Se armaron los operadores $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$; como máquinas achicadoras de las unidades representadas por cada regleta.

*Por ejemplo*,

Se Considera la regleta verde clara el operador tercios, puesto que se necesitan tres regletas blancas. Cuando el operador $\frac{1}{3}$ actúa sobre la regleta verde clara, la divide en tres partes y toma una, quedando una regleta blanca.




Esta transformación la podemos escribir así:

$$\frac{1}{3}\ de\ la\ regleta\ verde\ clara = regleta\ blanca \rightarrow \frac{1}{3} de\ 3 = 1$$

Se trabajan operadores achicadores de numerador 1, se realizan varios ejemplos para ejercitar estos procedimientos.

Los grupos trabajan en la formalización del taller activamente, se precisa el lenguaje de la fracción como operador, transformando unidades de longitud y convirtiéndolas en más pequeñas.

Resultados del segundo taller: Operadores achicadores y agrandadores. *Orden y ecuaciones.*

1. En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y la solución del taller se encontró que:

Utilizando el material, relacionan las regletas de acuerdo a particiones en partes iguales, con el objetivo de reconocer la relación entre las regletas. Por ejemplo, Relacionan la regleta azul, con la verde clara (cabe tres veces en la azul), y la blanca (cabe 9 veces en la azul).

Se reconoce la fracción como un operador, una máquina transformadora que achica o agranda regletas. Una regleta se coloca al inicio y otra sale al final.

- Al suponer que la regleta grande se coloca al inicio de la máquina y al final aparece una pequeña el operador el achicador.

  Por ejemplo,

  El operador achicador $\frac{1}{3}$ , divide en tres partes la regleta azul (cada parte es una regleta verde clara), y toma una regleta verde clara, luego al final de la transformación la regleta azul se ha achicado a una verde clara[6].

[6] Descripción tomada del grupo 2 en la solución de la pregunta 2 del taller 2.

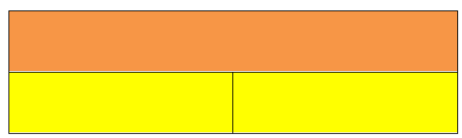
$\rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \rightarrow$

- Al suponer que la regleta pequeña se coloca al inicio de la máquina y al final aparece una grande el operador el agrandador.

  Por ejemplo,

  El operador agrandador $\frac{2}{1}$ , toma dos veces la regleta amarilla (una), quedando una naranjada (la regleta naranjada está formada por dos amarillas), luego al final de la transformación la regleta amarilla se ha agrandado a una naranjada[7].

$\rightarrow \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} \rightarrow$



2. En la socialización del taller, los grupos reconocen otros operadores tanto achicadores como agrandadores. En el grupo 2 se afirma que "…*con el material se pueden encontrar una gran cantidad de ejemplos de operadores…"*

En algunos grupos se presentan dificultades al resolver el ejercicio 4, ya que tratan de utilizar algoritmos que no recuerdan con precisión.

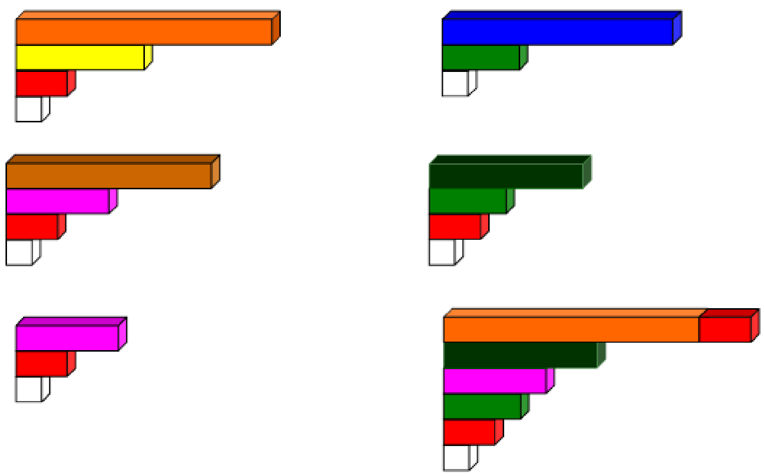
En el grupo 3 se afirma que: "…*al comparar dos regletas encontramos fracciones con significado parte-todo. Donde una de las regletas es el todo y la otra es la parte*…"

[7] Descripción tomada del grupo 3 en la solución de la pregunta 2 del taller 2.

3. En la formalización del taller se generalizó:

Cada regleta está relacionada con otras, por particiones en partes iguales.
*Por ejemplo, la regleta naranjada puede ser dividida en dos partes iguales por la amarilla o en cinco partes iguales por la roja  o en diez partes iguales por la blanca. Luego, la naranjada se relaciona con la amarilla, la roja y la blanca.*

Estas particiones son convenientes para imaginar transformaciones al tomar una regleta inicial pasarla por una máquina imaginaria (operador=fracción) que agranda o achica la regleta convirtiéndola en otra. Los operadores achicadores están representados por fracciones propias y los operadores agrandadores están representados por fracciones impropias.



Al precisar dicha relación podremos encontrar las siguientes transformaciones:

*Por ejemplo,*

*Sí pasamos la regleta naranjada por el Operador achicador*$\frac{3}{5}$*:*

$$\frac{3}{5}\ de\ la\ regleta\ naranjada = 3\ regleta\ rojas = 1\ verde \rightarrow \frac{3}{5}\ de\ 10\ =\ 6$$

*Sí pasamos la regleta azul por el operador achicador $\frac{2}{3}$:*

$$\frac{2}{3} de\ la\ regleta\ azul = 2\ regleta\ verde\ clara = 1\ verde\ oscura \rightarrow \frac{2}{3}\ de\ 9 = 6$$

*Sí pasamos la regleta azul por el operador agrandador $\frac{4}{3}$:*

$$\frac{4}{3} de\ la\ regleta\ azul = 4\ regletas\ verdes\ claras \rightarrow \frac{4}{3} de\ 9 = 12$$

*Sí pasamos la regleta verde oscura por el operador agrandador $\frac{3}{2}$:*

$$\frac{3}{2} de\ la\ regleta\ verde\ oscura = 3\ regleta\ verdes\ claras = 1\ azul \rightarrow \frac{3}{2} de\ 6 = 9$$

Dichas transformaciones me pueden generar ecuaciones de una incógnita.

Por ejemplo,

$\boldsymbol{Caso 1}.\ \frac{2}{3} de\ x\ es\ 12\ \rightarrow Debemos\ encontrar\ la\ regleta\ Inicial$

$$Encontramos\ el\ operador\ inverso\ de\ la\ regleta\ final\ \rightarrow \frac{3}{2}\ de\ 12 = 18$$

$$Luego, \quad \frac{2}{3} de\ 18\ es\ 12.$$

$\boldsymbol{Caso\ 2}.\ x\ de\ 18\ es\ 24\ \rightarrow Debemos\ encontrar\ el\ operador\ agrandador$

$$El\ operador\ es\ \frac{regleta\ final}{regleta\ inicial} = \frac{24}{18} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$Luego, \quad \frac{4}{3}\ de\ 18\ es\ 24.$$

$\boldsymbol{caso\ 3}.\ \frac{4}{5} de\ 20\ es\ x\ \rightarrow Debemos\ encontrar\ la\ regleta\ final$

$$\frac{4}{5}\ de\ 20 = 4 \times 4 = 16$$

$$Luego,\ \frac{4}{5}\ de\ 20\ es\ 16$$

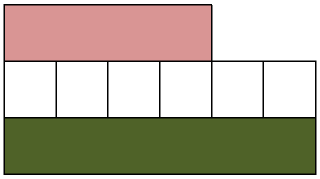
Se ejercitaron los procedimientos generalizados en los tres casos.

A través de las regletas de Cuisenaire, se puede trabajar el significado de fracción como parte-todo, en el último ejercicio del taller, se muestra la posibilidad del material al comparar las regletas de acuerdo a la longitud.

*Por ejemplo*,

Al comparar la longitud de la regleta rosada con la longitud de la regleta verde (utilizando las regletas blancas) tendríamos:

$$\frac{regleta\ rosada}{regleta\ verde\ oscura} = \frac{4}{6}$$



Se obtendría otra fracción al realizar la comparación inversa:

$$\frac{regleta\ verde\ oscura}{regleta\ rosada} = \frac{6}{4}$$

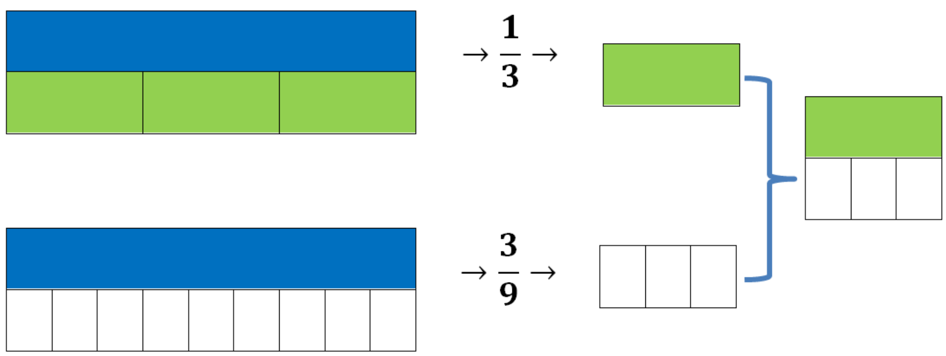
Se formaliza el taller, con pocas intervenciones de los estudiantes, ya que se debía precisar sobre algoritmos y lenguaje matemático utilizado en los talleres, donde se encuentran estas dificultades.

Resultados del tercer taller: Operadores equivalentes. *Equivalencias.*

1. En las observaciones realizadas a los grupos en la manipulación del material y en la solución del taller se encontró que:

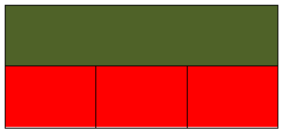
Utilizando el material, se encuentran operadores equivalentes: Los dos operadores, dados una regleta inicial, la transforman en una misma regleta final.

El grupo 1 da el siguiente ejemplo,
*La regleta azul, en la primera transformación el operador tercios, la divide en tres regletas verde claro (3 unidades) y toma una de estas regletas. En la segunda transformación la regleta azul es dividida en 9 regletas blancas (1 unidad) y toma tres de estas regletas (tres regletas blancas=una regleta verde claro).*

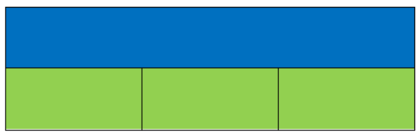



Utilizando el material, encuentran fracciones equivalentes: En las regletas finales al transformar dos regletas iníciales diferentes por un mismo operador.

En el grupo 2 se dio el siguiente ejemplo,
*Realizando la primera transformación con la regleta verde oscura, el operador $\frac{2}{3}$ la convierte en la regleta rosada, la fracción resultante es $\frac{4}{6}$. En la segunda transformación con la regleta azul, el mismo operador $\frac{2}{3}$ la convierte en la regleta verde oscura, la fracción resultante es $\frac{6}{9}$.*
*Las fracciones equivalentes son $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$.*



$$\rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow$$



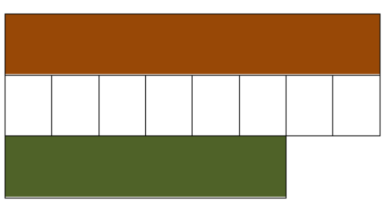
$$\rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow$$

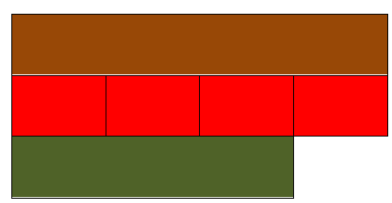
Utilizando el material, encuentran fracciones equivalentes: Una regleta puede estar representada por dos fracciones equivalentes.

El grupo 1 da el siguiente ejemplo,

> *La regleta verde oscura se puede representar como 6 regletas blancas comparadas con la regleta marrón ( la regleta blanca divide en 8 partes a la marrón y se toman 6) y como 3 regletas rojas comparadas con la regleta marrón (la regleta roja divide en 4 partes a la marrón y se toman 3).*

Entonces,





$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

2. En la socialización se observa que con el material era posible resolver el taller, puesto que las preguntas son semejantes a las que ya se han trabajado en los talleres anteriores y no se observan dificultades en los grupos.

Para la fracción $\frac{0}{a}$ encuentran ejemplos al comparar ninguna regleta con una regleta cualquiera. Es decir la ausencia de regleta está representada como la parte vacía. Con los operadores, partieron de una regleta inicial y una final “desaparecida”, es decir encontraron el operador 0. Hubo controversia entre los grupos para representar la indefinición $\frac{a}{0}$ y la indeterminación $\frac{0}{0}$.

3. En la formalización del taller se generalizó:

Con el material se encuentran tres casos de facciones equivalentes, el primero tiene que ver con el significado de fracción como operador, el segundo caso de los significados operador y parte-todo y el tercer caso como parte-todo.

***Caso 1.*** Operadores equivalentes: Si una unidad transformada por dos operadores da el mismo resultado. Entonces, los dos operadores son equivalentes.
Por ejemplo,

$$\frac{4}{5} de\ 100 = \frac{8}{10} de\ 100 = 80\%\ de\ 100 = 80$$

***Caso 2.*** Fracciones equivalentes: Si a dos unidades diferentes son transformadas por un mismo operador, las fracciones resultantes son equivalentes.
Por ejemplo,

$$\frac{3}{4} de\ 100 = \frac{75}{100} \quad y \quad \frac{3}{4}\ de\ 20 = \frac{15}{20} \quad \rightarrow \quad \frac{75}{100} = \frac{15}{20}$$

***Caso 3.*** Fracciones equivalentes: una longitud puede ser el resultado de más de dos comparaciones (parte-todo).
Por ejemplo,

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}\ representan\ la\ misma\ longitud\ de\ la\ regleta\ marrón.$$

Además de precisar estos casos, se formaliza el operador 0 como operador anulador, es decir a toda unidad la vuelve cero. Con el material concreto no es posible representar conceptos abstractos de las matemáticas tales como laindefinición $\frac{a}{0}$ y la indeterminación $\frac{0}{0}$.

En la mayoría de los grupos se identifican los tres casos expuestos, hubo una mayor comprensión en este taller que en el pasado, aunque se presentaron dificultades en el reconocimientos del operador 0, ya que algunos grupos lo confunden con el operador identidad. Hay una mayor participación de los grupos en el trabajo realizado.

Terminada la tercera unidad didáctica se ha trabajado el significado de la fracción como operador a través de las regletas de Cuisenaire, visto como transformadores achicadores o agrandadores de unidades. Se construyen algoritmos para resolver ecuaciones de una incógnita. Los operadores achicadores y agrandadores permiten mostrar fracciones propias e impropias, así como la relación de orden entre fracciones. Se puede concluir desde las observaciones realizadas a través de los talleres y las socializaciones, que los estudiantes han mejorado en las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica con respecto al significado de fracción como operador.

## 4.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

Una vez se desarrollan las unidades didácticas se aplica una prueba de salida con la finalidad de indagar los conocimientos construidos y su comprensión por parte de los estudiantes en formación docente participes del proyecto. Esta prueba reúne preguntas abiertas y cerradas, las cuales contienen componente matemático, definen unas competencias específicas y conceptualización de la fracción. En la Tabla 17, se presentan las características de la prueba de salida.

Cada una de las preguntas abiertas tiene un valor entre 0 y 1, de acuerdo al razonamiento y la respuesta dada. Las preguntas cerradas, se le asigna un valor a las respuestas correctas entre 0 y 1; de acuerdo al número de respuestas correctas para un mismo ítem, se asigna un valor ponderado dependiendo de la pertinencia de dichas respuestas.

Por ejemplo, en la pregunta 4, hay dos respuestas correctas: a y c, pero cada una con un valor diferentes de acuerdo a su pertinencia. Las respuestas incorrectas del mismo ítem, tienen un valor de 0.

La prueba (ANEXO E) fue validada por los mismos expertos que validaron la prueba diagnóstica, quienes creyeron necesario cambiar una parte de la prueba a preguntas abiertas y diferentes a la prueba anterior, que permitieran medir los diferentes significados de la fracción, siendo estas las preguntas del 1 al 10, no realizaron observaciones en las situaciones planteadas en cada una de estas preguntas, estuvieron más interesados en lo que se debía pedir al estudiante para medir el proceso, es decir, que la prueba permitiera medir ¿qué significado de fracción utiliza para solucionar la pregunta? incluyendo procedimientos analíticos y/o geométricos. Las preguntas cerradas del 1 al 5 consideraron que debían ser incluidas, ya que eran situaciones problemáticas que permitían medir el avance de los estudiantes, de acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica.
Los resultados de esta prueba se presentan a continuación de acuerdo a cada una de las preguntas planteadas.

Tabla 17.

**Características generales preguntas abiertas prueba final**

| **ítem** | **Componente** | **Competencias** | **Fracciones** |
|---|---|---|---|
| 1. | Numérico-Métrico | Solución de problemas | Significado parte-todo |
| 2. | Numérico-Variacional | Solución de problemas | Significado operador |
| 3. | Numérico-Variacional | Solución de problemas | Interconexión significados razón y operador. |
| 4. | Numérico-Métrico | Solución de problemas | Significado parte-todo operador |
| 5. | Numérico-Métrico | Solución de problemas | Interconexión significados |
| 6. | Numérico Geométrico Métrico | Razonamiento | Significado parte-todo Unidad discreta |
| 7. | Numérico Variacional-Métrico | Razonamiento | Orden Recta numérica |
| 8. | Numérico Variacional-Métrico | Razonamiento | Significado fracción impropia |
| 9. | Numérico Variacional | Razonamiento | Significado parte-todo Fracción impropia unidad discreta |
| 10. | Numérico Variacional | Razonamiento | Significado parte-todo Fracción impropia unidad continua |

**Pregunta abierta 1**

En esta pregunta se ha modelado el significado parte-todo de la fracción, utilizando dos unidades (todo) diferentes y por lo tanto cambian las partes.

En la primera parte tenemos: *tres medios vasos de agua*, la unidad (todo) es un vaso de agua y se han hecho particiones de dos (medios). Ahora, *tres medios vasos* es lo mismo que *vaso y medio*, ya que la unidad (todo) sigue siendo un vaso.

En la pregunta *¿cuántos vasos y medio son?* cambia la unidad (todo) a *vaso y medio*, por lo tanto, hay uno de esa unidad.

En esta pregunta la mayoría de la población (90.48%) realiza un procedimiento similar y reconoce el significado parte-todo, aunque el resto de la población reconoce el significado parte-todo, en su procedimiento no hacen cambio de unidad.

**Pregunta abierta 2**

Plantea una situación problemática, se modela la fracción como operador, y se plantean dos preguntas relacionadas con los operadores.

Para la pregunta: *¿Cuántas docenas de huevos son 3 huevos?* Tenemos:

Una docena (12) de huevos…..............***operador =***$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{12}}$……………..…3 huevos

Luego, $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ de docena (12) huevos = 3 huevos

Para la pregunta: *¿cuántas medias docenas son 3 huevos?* Tenemos:

Media docena (6) de huevos…………***operador =*** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$………………...3 huevos

Luego, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de media docena (6) huevos = 3 huevos

El 85.71% de los estudiantes realiza el procedimiento anterior, aunque algunos de ellos reconocen el significado de fracción como parte-todo, es posible la interconexión entre los dos significados.

**Pregunta abierta 3**

En esta situación problemática se modela el significado de fracción como razón y operador, interconectando estos significados así:

Si del total de la población la mitad son hombres, entonces podemos decir, por cada dos personas una es hombre. $\boldsymbol{raz\acute{o}n}$: $\frac{1}{2} = \frac{hombres}{total\ ppoblación}$

De los hombres, el 40% son calvos, entonces podemos decir que por cada 100 hombres 40 son calvos, ahora bien los hombres son la mitad de la población, luego tendríamos $\boldsymbol{proporci\acute{o}n}$: $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, $\boldsymbol{operador}$: $\frac{2}{5}\ de\ \frac{1}{2}\ de\ la\ población = \frac{1}{5}\ de\ la\ población$ son hombres y calvos[8].

De los hombres calvos, la mitad hablan inglés, luego tendríamos $\boldsymbol{operador}$: $\frac{1}{2}\ de\ \frac{1}{5}\ de\ la\ población = \frac{1}{10}\ de\ la\ población$ son hombre, calvos y hablan inglés.

Luego $\boldsymbol{operador}$: $\frac{1}{10}\ de\ la\ población = 4\ hombres, calvos\ y\ hablan\ inglés$, por lo tanto la población total son 40 personas. De estas 40 personas, la mitad son mujeres, luego $\frac{1}{2}$ de 40 son 20. En total hay 20 mujeres.

El 71.43% de la población reconoce los dos significados de la fracción y su interconexión a través de los procedimientos utilizados para resolver la situación

[8] Cabe resaltar que $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ es una fracción que esta modelada como proporción (razón) pero también como operador.

problemática, el resto de la población encuentra alguno de los dos significados pero no realiza una interconexión entre estos.

**Pregunta abierta 4**

Es una situación problemática que modela el significado de fracción como parte-todo, donde la unidad (todo) es la altura en metros del monstruo, y las partes serían una unidad y media unidad. Luego tendríamos $1\,unidad = 20\,metros, más, \frac{1}{2}\,unidad = 10\,metros$. Luego el lago mide $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,unidades = 30\,metros$. El 52.38% de la población realizó este procedimiento y reconoció el significado de fracción como parte-todo.

Otro procedimiento podría mostrar el significado de fracción como operador así: $1\,y\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,de\,la\,altura\,del\,mostruo = \frac{3}{2}de\,20\,metros = 30\,metros$.

El 38.1% de los estudiantes realizan este procedimiento y reconoce el significado de fracción como operador. Los demás estudiantes dan la respuesta pero no efectúan ningún procedimiento y plantean uno de los dos significados.

**Pregunta abierta 5**

En esta situación se interconectan los significados de fracción como parte–todo, así, $\frac{9}{20}\,partes\,de\,un\,numero$, es decir, el número se ha dividido en 20 partes de las cuales se han tomado 9 y eso da como resultado

Como razón así: $proporción$: $45\% = \frac{45}{100} = 45\,por\,cada\,100$.

Como operador: $\frac{9}{20}\,de\,número = \frac{45}{100}\,de\,número = 18$

Ahora bien, $\frac{9}{20} = \frac{45}{100}$, es decir las fracciones son equivalentes, por lo tanto, $\frac{9}{20}\,de\,un\,número\,es\,18,\ el\,número\,es\,40$.

El 90.48% de la población reconocen por lo menos dos de los significados y realizaron procedimientos similares al anterior, llegando a la misma respuesta.

**Pregunta abierta 6**

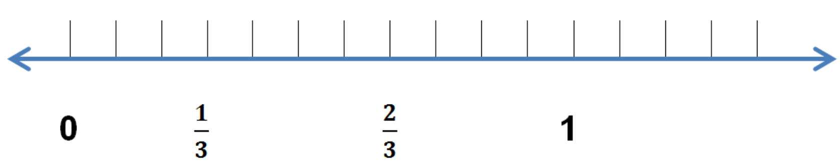
Grafique la fracción $\frac{3}{2}$, si la unidad es: ❏ ❏ ❏ ❏ ❏ ❏

En esta situación se modela el significado de fracción como parte-todo, donde la unidad (todo) es discreta son 6 cuadros, esta unidad se ha dividido en medios (dos partes) luego cada parte tendría 3 cuadros y se toman 3 partes, entonces son 9 cuadros.

El 100% de la población reconoce el significado de fracción como parte-todo y soluciona el problema con un procedimiento similar.

**Pregunta abierta 7**

Represente la unidad sobre la recta numérica, a partir de la ubicación de la fracción dada:




En esta situación se modela el significado de fracción como parte-todo en la recta numérica, se debe averiguar ¿cuál es la unidad? sí hasta la fracción $\frac{1}{3}$ se ha particionado la unidad en cuatro partes, hasta $\frac{2}{3}$ habrán cuatro partes más y hasta $\frac{3}{3} = 1$ otras cuatro partes, tendríamos entonces que la unidad esta particionada en 12 partes.

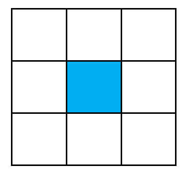
El 90.48% de los estudiantes reconocen el significado de la fracción como parte-todo y encuentran la unidad en la recta numérica.

**Pregunta abierta 8**

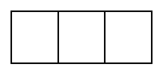
Si la unidad se representa gráficamente mediante este rectángulo: 

Indique la fracción que está representada en la figura (sin el cuadrado del centro):

→ *dividido quedaría*→



La situación modela el significado de la fracción como parte-todo, donde la fracción es impropia y se ha representado geométricamente superponiendo las unidades hasta obtener un cuadrado.

La unidad se ha particionado en tres cuadros así 

Luego en la figura tenemos 8 cuadros sin incluir el del centro. La fracción es $\frac{8}{3}$.

El 71.43% de la población realiza el procedimiento gráfico anterior y llega a la solución del problema, reconociendo la fracción como impropia. Los estudiantes que presentan dificultades en la solución de la situación no dibujan la partición de la figura, lo que explica la dificultad presentada, puesto al realizarse las particiones se encuentra la solución.

**Pregunta abierta 9**

Grafique la fracción $\frac{6}{5}$ sí la unidad es: ❍❍❍❍❍❍❍❍❍❍

En esta situación se modela el significado de fracción como parte-todo, con unidad discreta y una fracción impropia, la unidad (todo) son 10 círculos, la unidad particiones en 5 partes iguales, por lo tanto, cada parte tiene dos círculos, 6 partes de dos círculos son 12 círculos.

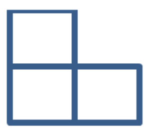
❍❍❍❍❍❍❍❍❍❍❍❍

El 100% de la población reconoce el significado de la fracción y realiza el mismo procedimiento llegando a la respuesta correcta.

**Pregunta abierta 10**

Exprese la unidad si la gráfica representa la fracción $\frac{14}{3}$

La situación problemática modela el significado de fracción como parte-todo, con una fracción impropia y unidad continua, que sería la figura dividida en tres partes iguales así:



Luego hay 14 cuadros, luego la unidad sería 

El 100% de la población reconoce el significado de la fracción y realiza el procedimiento anterior.

**Pregunta cerrada 1** *(pregunta 5 prueba diagnóstica)*

Según Tabla 18, el 85.71% de los estudiantes eligen la a. como respuesta correcta, el 95.24% eligen la c. como respuesta correcta y el 85.71% eligen ambas opciones como respuestas correctas.

Las demás opciones solo se colocaron como distractores de las opciones correctas. El 23.81% de los estudiantes eligen al menos una de las respuestas que no eran las correctas.

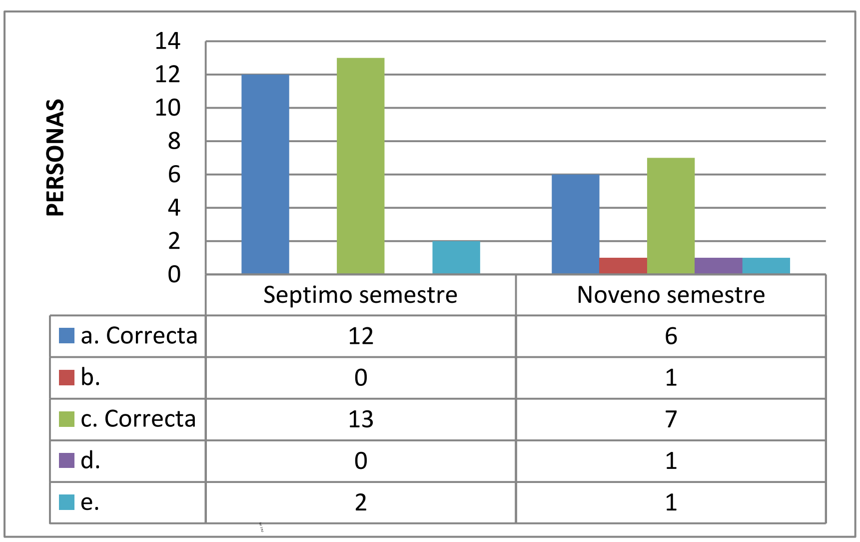
Esto nos muestra que la gran mayoría de los estudiantes han utilizado el significado de fracción como operador para el procedimiento que da las dos opciones de respuesta a esta situación.

**Pregunta cerrada 2** *(pregunta 6 prueba diagnóstica)*

Según Tabla 19, El 90.48% de los estudiantes eligen la respuesta correcta. Las opciones a., c., d., cumplen las condiciones ser cuadradas y completas, pero no eran las de mayor tamaño, por lo tanto daría más de $70 el valor a pagar. El 9.52% de los estudiantes eligen las opciones en las que se perdía de vista la condición menor tamaño para las baldosas. El 4.76% de los estudiantes eligen la opción que no tomaba la condición ser completas para las baldosas. De esta manera podemos concluir que la mayoría de los estudiantes realizan procedimientos para resolver esta situación a través del significado de la fracción parte-todo.

Tabla 18.

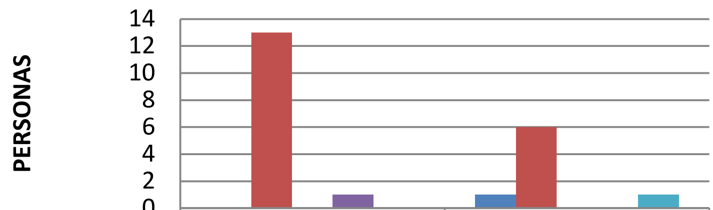
**Pregunta cerrada 1. Según semestre.**




| | Septimo semestre | Noveno semestre |
|---|---|---|
| a. Correcta | 12 | 6 |
| b. | 0 | 1 |
| c. Correcta | 13 | 7 |
| d. | 0 | 1 |
| e. | 2 | 1 |

Tabla 19.

**Pregunta cerrada 2. Según semestre**




| | Septimo semestre | Noveno semestre |
|---|---|---|
| a. | 0 | 1 |
| b. Correcta | 13 | 6 |
| c. | 0 | 0 |
| d. | 1 | 0 |
| e. | 0 | 1 |

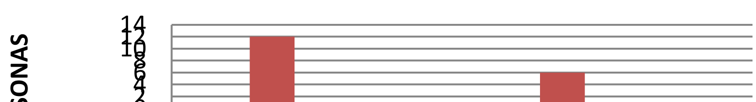
**Pregunta cerrada 3** *(pregunta 7 prueba diagnóstica)*

Según la Tabla 20, el 85.71% de los estudiantes eligen las opción correcta. Las demás opciones son distractores de la respuesta correcta.

Podemos concluir que la mayoría de los estudiantes reconocen el significado parte-todo en la solución de la situación problemática.

Tabla 20.

**Pregunta cerrada 3. Según semestre**




| | Septimo semestre | Noveno semestre |
|---|---|---|
| a. | 0 | 0 |
| b. Correcta | 12 | 6 |
| c. | 1 | 0 |
| d. | 0 | 0 |
| e. | 1 | 1 |

**Pregunta cerrada 4** *(pregunta 8 prueba diagnóstica)*

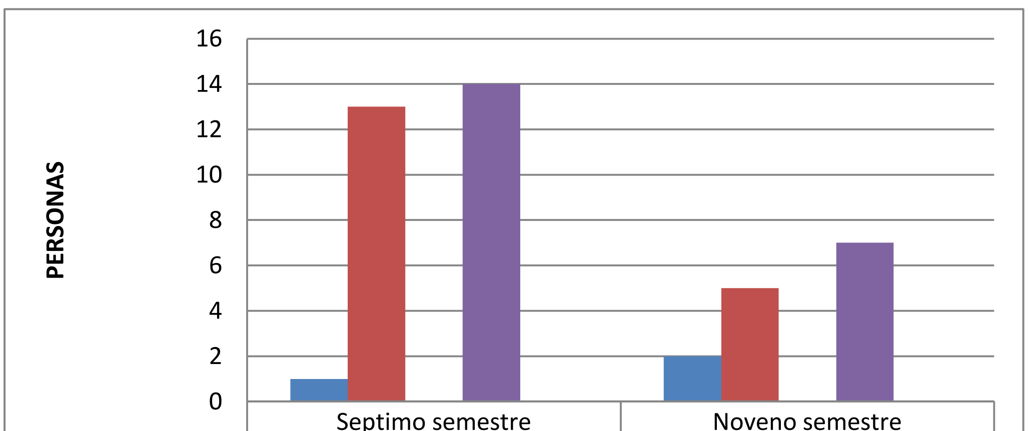
Según Tabla 21, el 85.71% de los estudiantes contestan la *opción b*. y el 100% de los estudiantes contestan la *opción d*.

El 85.71 % de los estudiantes contestan ambas opciones.

El 14.28% de los estudiantes contestan una de las opciones incorrectas.
Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes realizan procedimientos para resolver la situación problemática a través del significado de fracción como operador.

Tabla 21.

**Pregunta cerrada 4. Según semestre**




| | Septimo semestre | Noveno semestre |
|---|---|---|
| a. | 1 | 2 |
| b. Correcta 0.6 | 13 | 5 |
| c. | 0 | 0 |
| d. Correcta 0.4 | 14 | 7 |
| e. | 0 | 0 |

**Pregunta cerrada 5** *(pregunta 10 prueba diagnóstica)*

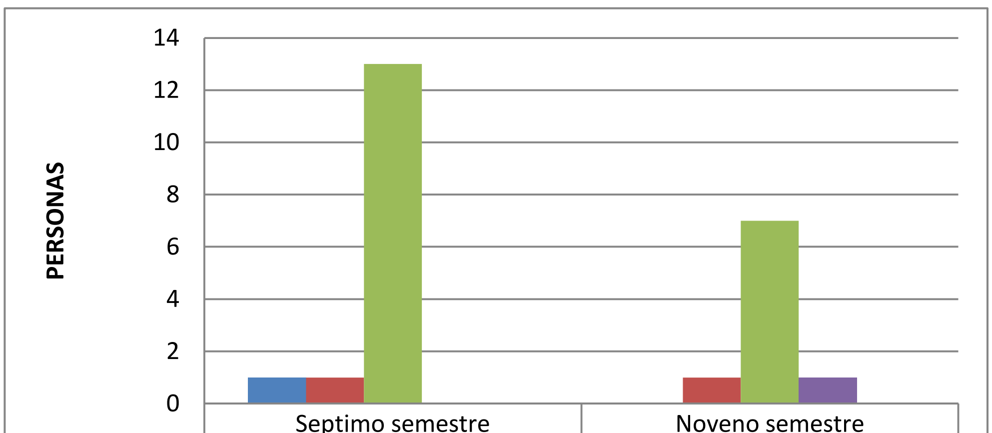
Según Tablas 22, el 95.24% de los estudiantes contestan la respuesta correcta.

El 19.05%  delos estudiantes contestan al menos una respuesta incorrecta.

Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes realizan interconexiones entre los diferentes significados de las fracciones a través de la solución de situaciones problemáticas.

Tabla 22.

**Pregunta cerrada 5. Según semestre**




| | Septimo semestre | Noveno semestre |
|---|---|---|
| a. | 1 | 0 |
| b. | 1 | 1 |
| c. Correcta | 13 | 7 |
| d. | 0 | 1 |
| e. | 0 | 0 |

Resultados generales de la prueba final

El análisis comparativo por semestre de los resultados generales, muestran levemente un mejor desempeño de los estudiantes de noveno semestre, obteniéndose en este grupo la mayor nota. Tabla 23.

Los resultados generales de los estudiantes son buenos, el 90.48% de la población obtienen un puntaje por encima de 10.5 puntos (sobre 15 puntos que era el mayor puntaje). Además, La media de la población obtiene un puntaje de 12.078 (sobre 15 que era el mayor puntaje), quedando el 60.9% de la población por encima de la media Tabla 24.

Podemos inferir que los estudiantes han alcanzado competencias básicas en fracciones y sus diferentes significados, permitiéndoles profundizar en los ejes temáticos del pensamiento numérico, específicamente números Racionales, así como herramientas metodológicas para la enseñanza de los mismos.

Hay un contraste entre los vacíos y errores conceptuales de los estudiantes encontrados en la prueba diagnóstica y los resultados adquiridos en la prueba final que reflejan la pertinencia en el diseño e implementación de las unidades didácticas pues les permitieron superar sus dificultades y construir nuevos conceptos.

Tabla 23.

**Cuadro Prueba final - Comparativo por semestre**

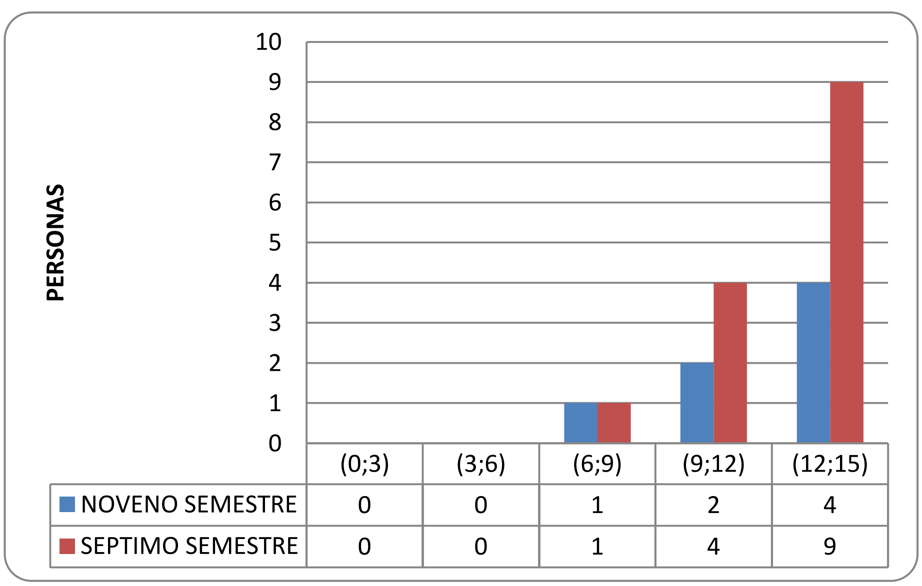
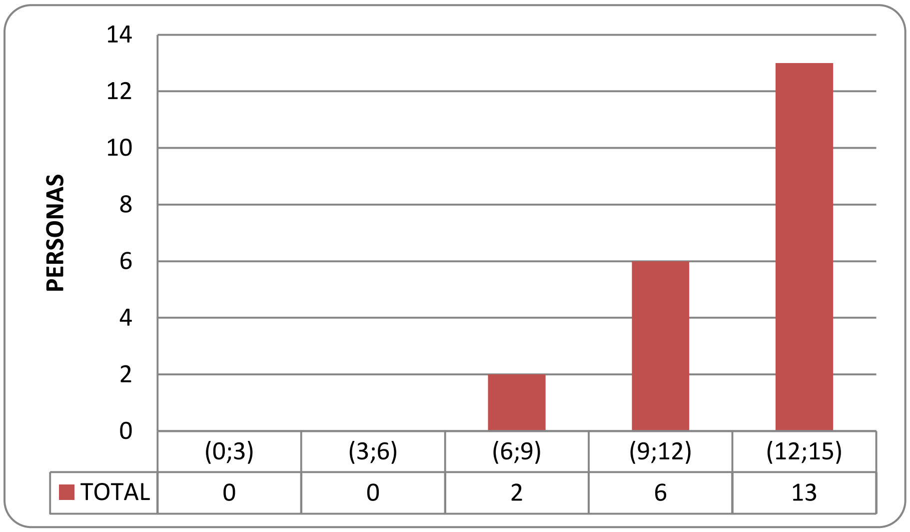


Tabla 24.

**Prueba final - Población total**




## 4.4 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis de los datos recolectados se hace necesario precisar los elementos que constituyen la matriz de análisis de la información Tabla 25.

*Unidades de análisis:* a través de los significados encontrados en el marco teórico sobre Fracción hemos seleccionado como unidades de análisis los significados:

Parte-todo, Razón y Operador, además otra unidad de análisis será la interconexión entre estos significados. La reunión de estas unidades de análisis permitirá reconocer si el estudiante construyó el concepto de Fracción.

*Categorías de análisis:* se encuentran en todos los significados de Fracción, abordados desde cada interpretación de manera diferente, la reunión de estas categorías en cada unidad de análisis permitirán reconocer la construcción de cada significado, así como la interconexión entre estos. Estas categorías son: representación, orden y equivalencias.

Tabla 25.

**Matriz de análisis de resultados**

| | | Comunicación y representación | | Razonamiento y argumentación | | Solución de problemas y modelación | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Contexto matemático | Vida diaria | Contexto matemático | Vida diaria | Contexto matemático | Vida diaria |
| **Parte-todo** | **Interpretación** | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO | MEDIO |
| | **Orden** | ALTO | ALTO | MEDIO | MEDIO | MEDIO | MEDIO |
| | **Equivalencias** | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO |
| **Razón** | **Interpretación** | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO | ALTO |
| | **Orden** | ALTO | ALTO | MEDIO | MEDIO | ALTO | MEDIO |
| | **Equivalencias** | ALTO | ALTO | MEDIO | MEDIO | ALTO | ALTO |
| **Operador** | **Interpretación** | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO | ALTO | ALTO |
| | **Orden** | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO | ALTO | MEDIO |
| | **Equivalencias** | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO | ALTO | MEDIO |
| **Interconexión entre significados** | **Interpretación** | ALTO | ALTO | ALTO | MEDIO | ALTO | MEDIO |
| | **Orden** | ALTO | MEDIO | MEDIO | MEDIO | MEDIO | MEDIO |
| | **Equivalencias** | ALTO | MEDIO | MEDIO | MEDIO | MEDIO | MEDIO |

*Indicadores de análisis:* en el diseño, recolección e interpretación de la información se reconocen los indicadores de análisis para medir el alcance del proceso de aprendizaje de los estudiantes en diferentes contextos, estos están cuantificados por niveles Alto, medio y bajo. Estos indicadores se medirán en los Procesos de aprendizaje de las matemáticas: comunicación y representación,  Razonamiento y argumentación, solución de problemas y modelación. Además en los contextos de las matemáticas y de la vida diaria.

Las dificultades encontradas por Haseman (1987) se encuentran en la prueba diagnóstica, una desconexión entre los distintos significados de fracción; esta desconexión se aprecia en los primeros talleres realizados por los estudiantes en la implementación de la estrategia, a medida que se avanza en los talleres y a través de la formalización de los mismos, se observaba que el estudiante va construyendo las diferentes interpretaciones de fracción pero a la vez encuentra la relación en cada interpretación hacia el mismo ente numérico. Estas apreciaciones se consolidan en los resultados de la prueba final.

Al igual que los resultados encontrados en la investigación de Sáenz-Ludlow (2003) los estudiantes construyeron un puente entre sus conocimientos de número natural y la conceptualización inicial de la fracción, en particular, en todos discretos.

Se encuentran similitudes en los resultados obtenidos por los estudiantes en investigaciones (Christou & Philippou, 2002; Misailidou & Willians, 2003) al colocar las producciones de los estudiantes como foco para la realización de las clases. Es así como, se observa que a través de la socialización y formalización de los talleres al priorizar sobre las estrategias utilizadas por cada grupo en la resolución de problemas que modelaban fracciones; se encuentran diversos procedimientos y algoritmos que les permitieron a los estudiantes la construir diferentes significados para el orden y equivalencias de fracciones.
Se observa en los estudiantes un afán por los algoritmos para resolver las diferentes situaciones problemáticas, el mismo afán de los docentes según (Vasco, 1987), sin embargo a través de la socialización de los talleres, van encontrando valor al proceso de construcción de conceptos en matemáticas; para

este caso, es convenientes procesos inductivos, a partir del material concreto llegar a la generalización.

En contraste con los estudios sobre el conocimiento personal de los futuros docentes sobre los números racionales por García (1997) y lo que se logra con la implementación de la estrategia se encuentra:

- En los estudiantes, docentes en formación una mayor apropiación de los conceptos adquiridos, no solo con dar la respuesta correcta sino por las justificaciones y los procedimientos empleados.
- El proceso llevado a cabo con los estudiantes, docentes en formación les permite tener una mirada al concepto de fracción desde la modelación, el razonamiento y la utilización de algoritmos, sin priorizar en la mecanización de procedimientos.
- Los estudiantes, docentes en formación Han construido un concepto de fracción desde varios significados, no solo el de parte-todo.

En contraste con los documentos sobre las opiniones de docentes en ejercicio acerca de su experiencia en las aulas, de Llinares-Sánchez (1990), podemos mostrar los avances obtenidos con los estudiantes, docentes en formación:

- Las creencias de los docentes sobre el papel de las matemáticas condicionan la enseñanza de las mismas.
- Los estudiantes no conciben la utilización de las matemáticas en su vida diaria.
- No parece que exista una dependencia entre la metodología utilizada y las actitudes hacia las matemáticas promovidas en los escolares.
- La formación de los escolares ya no demanda que se conceda tanta importancia a las destrezas específicas (básicamente aritméticas), ahora se

precisa más la percepción de ideas y conceptos matemáticos más generalizados.

# 5. CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado ha permitido relacionar las dimensiones teórica y práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática.

Centrados en el tópico de los Números Fraccionarios hemos podido avanzar en la observación de los procesos de aprendizaje, en la manera en que se construye el concepto, en la detección de los obstáculos que se encuentran en el proceso de construcción del conocimiento y en la explicitación de las potencialidades que presenta esta propuesta didáctica para conectar los viejos conocimientos con otros nuevos.

Al diseñar la propuesta didáctica se han considerado tres interpretaciones del concepto de fracción, modeladas cada una en unidades didácticas, con un material concreto específico. Esto nos ha permitido explorar, detectar, organizar y delimitar los problemas y potencialidades que se presentan en la comprensión por parte de los estudiantes.

Se puede concluir desde las observaciones realizadas a través de los talleres y las socializaciones, que los estudiantes han mejorado en las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica con respecto al significado de fracción como operador.

En el proceso de enseñanza de las fracciones a través de las unidades didácticas, permite que los estudiantes realicen comparaciones entre los procesos vividos en la escuela con las posibilidades que ofrecen alternativas novedosas para sus futuras prácticas docentes. En las reflexiones colectivas de los diferentes grupos, hay una constante comparación entre la nueva metodología y sus experiencias escolares, ya que sus percepciones de la fracción han cambiado, y dejan de ser un tema aburrido y difícil de las matemáticas.

Se evidencia un afán por recordar o preguntar los algoritmos para resolver situaciones, tales como el orden de fracciones, equivalencias, regla de tres, porcentajes, ecuaciones de una incógnita, etc.

Los errores conceptuales obtenidos durante el proceso de aprendizaje de las fracciones en los estudiantes permanece en toda su escolaridad, para romper con estos errores conceptuales se hace necesario la construcción de los diferentes significados de fracción desde lo concreto hasta lo abstracto y desde lo particular hasta la generalización de procedimientos y algoritmos.

Los errores conceptuales encontrados en la prueba diagnóstica se evidenciaron en las observaciones realizadas a los estudiantes en sus producciones escritas e intervenciones al resolver los talleres, se necesitó de una orientación continua para reforzar y precisar en cada grupo los obstáculos que se iban presentando, posteriormente en la socialización de los talleres se debían realizar precisiones de lenguaje matemático y comunicación, así como elaborar, ejercitar procedimientos y algoritmos en la etapa de la formalización.

Se evidencia la pertinencia de esta investigación en la aplicación de las unidades didácticas, puesto que los estudiantes reconocen la importancia del tema tanto en su vida diaria como en lo que será su práctica docente. Cada unidad didáctica fue pertinente para deshacer errores conceptuales de los estudiantes, así como construir los diferentes significados de fracción, construyendo procedimientos y algoritmos para utilizarlos en la solución y modelación de situaciones tanto de la vida diaria como en el contexto matemático o de otras ciencias.

La prueba final permite evaluar el impacto de las unidades didácticas en el concepto de fracción y realizar un contraste entre los conocimientos previos del estudiante y los logros alcanzados en la implementación de las mismas. Se reconoce los avances significativos en las dificultades detectadas en los estudiantes, así como profundización en sus conocimientos tanto en las matemáticas como su didáctica.

Los futuros docentes desde una posición de estudiantes han tenido la oportunidad de reflexionar sobre la construcción de un conjunto numérico; de cómo los sistemas de representación surgen al actuar en el modelo y de cómo las manipulaciones simbólicas permiten construir diferentes algoritmos y procedimientos que explican o resuelven una misma situación problema. Desde la visión de formadores de futuros docentes, la propuesta objeto de este trabajo tiene la intencionalidad de mostrar a los estudiantes una visión personal sobre la naturaleza de la matemática y sobre la naturaleza de su aprendizaje.

Este trabajo muestra la importancia de caracterizar, delimitar, analizar y clarificar el campo conceptual de los Números Fraccionarios en procesos de aprendizaje de futuros docentes, hacia la construcción de sus prácticas de enseñanza. De esta manera, es conveniente señalar para próximas investigaciones, la etapa de la formalización en el caso del trabajo con material concreto en matemáticas, ya que los estudiantes pueden quedarse con algoritmos o conceptos errados, ya sea por mal uso del material o por procesos inductivos con poca precisión que requieren de la intervención del docente, perdiendo de vista el uso del material para procesos de conocer y quedarían en solo hacer.

Se hacen necesarias investigaciones a futuro sobre las operaciones básicas de las fracciones con material concreto, donde el estudiante adquiera un cálculo mental con las fracciones, tal como lo tiene con los números naturales, sin utilizar algoritmos que no le muestran la ampliación del círculo numérico, sino solo operaciones con números naturales. Por otra parte, la aplicabilidad de estas operaciones a la vida diaria, donde utilicen las operaciones de las fracciones desde sus diferentes significados y no como una extensión de números naturales.

## BIBLIOGRAFÍA

Abraira, C. F. & Francisco, M. A. (1997). II Simposio. El curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas. Facultad de Educación, Universidad de León.

Antibi, A. & Brousseau, G. (2000). La détransposition des connaissances scolaires. Recherches en Didactique des Mathématiques, 20, 7-40.

Arnal, J. Del Rincón, D. & Latorre, A. (1992). Investigación educativa. Fundamentos y metodología. Labor, Barcelona.

Armstrong, B. E. y Novillis, C. (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. Journal for Researching MathematicsEducation.26, 1.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En Carpenter, T. p., Fennema, E. y Romberg, T. A.: Rational Numbers. An integration of Research. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hilldale, New Jersey.

Benoit, P., Chemla, K & Ritter, J. (1992).Histoire de fractions, fractions d'historie. Birkhäusen Verlag, Berlín.

Blanco, L. y Cruz, M. C. (1997). Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas. I.C.E., Universidad de León.

Boyer, C. B. (1986). Historia de la Matemática. Alianza Editorial, Madrid.

Bulgar, S. (2003), “Children’s sense-making of division of fractions”, The Journal of Mathematical Behavior, 20, 319-334.

Castro, E., Rico, L. & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Enseñanza de las Ciencias, 15,361-371.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Ed. Aique, 1997.

Christou, C. & G. Philippou (2002), “Mapping and development of intuitive proportional thinking”, The Journal of Mathematical Behavior, 20,321-336.

Dienes, Z. P. (1972). Fracciones. Teide, Barcelona.

Elliot, J. (1990). La Investigación-Acción en Educación. Morata, Madrid.

Escolano, R. y Gairín, J.M. (2003): "Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: propuesta didáctica con modelos de medida" En Castro, E. Líneas de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico. Universidad de Granada.

Feferman, S. (1989). The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*.* Chelsea Publishing Company, New York.

Flores, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Uno, revista de didáctica de las matemáticas, 8, 103-111.

Flores, P. & Godino, J. D. (1995). Aproximación a las concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas mediante el comentario de un texto. Revista de educación de la Universidad de Granada, 8, 47-61.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phaenomenology of mathematics structures. Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China lectures. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

García, M.M. (1997). Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza.

Gairín, J. M. (2001): "Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación". Contextos educativos, 4, 37-159.

Giménez, J. (1990). Orientaciones de los ítems y habilidades en fracciones. Educar, 17, 162-181.

Hasemann, K. (1987). Pupils' individual concepts of fractions and the role of conceptual conflict in conceptual change. Articles on mathematics education, 25-39.

Hiebert, J. A. & Carpenter, T. P. (1992).Learning and teaching within derstanding. En Grows, D. A. (1992). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company, New York.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children’s Strategies and Errors, London: NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. P. Ratinal Numbers. An Integration of Research. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale (New Jersey)

Kilpatrick, J. (1993). Beyond face value: assessing research in Mathematics Education. En Nissen, G. y Blomhoj, M. Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics. Roskilde University, Denmark.

Llinares, S. (1990). Creencias de los profesores de matemáticas. Investigación en la escuela, 11, 61-69.

Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar. Reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas. Revista de enseñanza universitaria, 5, 111-126.

Llinares, S. &Sánchez, M., (1988). Fracciones. Síntesis, Madrid.

Llinares, S.; Sánchez, M. & García, M. (1994). Conocimiento de Contenido Pedagógico del Profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. Revista de Educación, 304, 199-225.

Marck, N. K. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 422-441.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Santa Fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2002). Decreto número 230 de 2002. Extraído el 20 de Agosto, 2011 de:
http://structio.sourceforge.net/leg/dec230110202.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2005). Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas, Santa fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Análisis, interpretación y uso de los resultados de las pruebas SABER 2005-2006. Extraído el 20 de Agosto, 2011 de: http://www.sedboyaca.gov.co/descargas2008/Gu%EDa_an%E1lisis_interpretaci%F3n_uso_resultados_SABER_2005.pdf

Ministerio de Educación Nacional. Prueba Saber 5° y 9°. 2009. Resultados Nacionales. Resumen Ejecutivo. Extraído el 20 de Agosto, 2011 de: http://www.icfessaber.edu.co/uploads/documentos/Resumen_ejecutivo_informe_nacional_2009.pdf

Misailidou, C. & J. Williams (2003), “Diagnostic assessment of children’s proportional reasoning”, The Journal of Mathematical Behavior,22,335-368

Moreira M. A. (1993). Unidades didácticas e investigación en el aula. Colección cuadernos de didáctica. Las Palmas de gran Canarias. España. Extraído el 20 de agosto, 2011, de:
http://webpages.ull.es/users/manarea/librounidades.pdf

Nabors, W. (2003), “From fractions to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach”, The Journal of Mathematical Behavior,22, 133-179.

Novillis-Larson, C. (1980). Locating proper fraction on number lines: Effect of length and equivalence. School Science and Mathematics, 53, 423-428.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista EMA. 8, 2, 157-182.

Oliveras, M. L. (1976). Introducción del número racional en E.G.B. mediante el concepto de operador. Análisis comparativo con la introducción tradicional. Tesina de Licenciatura. Universidad de Granada. Granada.

Ohlsson, S. (1988).Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En Hiebert J.& Behr M. Number concepts and operations in the middle grades.2, 53-92. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Owens, D. T. (1993). Research ideas for the classroom. High school mathematics. Macmillan Publishing Company, New York.

Owens, D. T. & Super, D. B., (1993). Teaching and Learning Decimal Fractions. En Owens, D. Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Perera, P. & Valdemoros, M. (2009).Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21, 29-61. Extraído el 20 de Agosto, 2011 de:
http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40516761003

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996).A review of recent research in the area of initial fraction concepts. Educational Studies in Mathematics.30, 5-38.

Post, T.R., Harel, G., Behr, M.J. & Lesh, R. (1991).Intermediate teachers knowledge of rational number concept. En Fennema, E., Carpenter, T.P. y Lamon, S.J. Integrating research on teaching and learning mathematics. SUNY, Albany, New York.

Rico, L. & Castro, E. (1995). Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria, en Aspectos didácticos de Matemáticas. 5. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

Sáenz-Ludlow, A. (2003), “A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class”, The Journal of Mathematical Behavior, 22, 181-211.

Sánchez, M. V. (1995). La formación de los profesores y las matemáticas. Algunas implicaciones prácticas de las investigaciones teóricas. Revista de educación. 306, 397-426.

Sánchez, M. (1966). Lecciones de aritmética. Imprenta de F. Martínez García, Madrid.

Sinicrope, R. & Mick, H. W. (1992). Multiplication of Fractions through Paper Folding. Arithmetic Teacher, 40,116-121.

Socas, M. & Camacho, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10, 151-172.

Steencken, E. & Maher C. (2003), “Tracing fourth graders’ learning of fractions: Early episodes from a year-long teaching experiment”, The Journal of Mathematical Behavior, 22, 113-132.

Steffe, L. (2002), “A new hypothesis concerning children’s fractional knowledge”, The Journal of Mathematical Behavior, 20, 267-307.

Steffe, L. (2003), “Fractional commensurate, composition, and adding schemes.

Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5”, The Journal of Mathematical Behavior, 22, 217-235.

Streefland, L. (1991). Fractions in realist mathematics education. Aparadigm of developmental research. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Taylor S.J. & Bogdam R. (1990). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidós, Buenos Aires.

Tzur, R. (2004), “Teacher and students’ joint production of a reversible fraction conception”, The Journal of Mathematical Behavior, 23, 93-114.

Vasco, C.E. (1987). “El enfoque de sistemas en el nuevo programa de Matemáticas”, en: MEN: Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Serie Pedagogía y Currículo, 2, 10.

Vasco, C. E. (1991).*El archipiélago fraccionario*. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional, 2.

# ANEXOS

ANEXO A

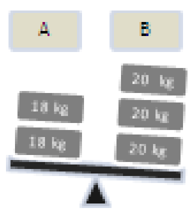
# Modelo de la Prueba Diagnóstica

*Aplicada a estudiantes de Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Ciencias Naturales y Educación Ambiental*

1. *De las siguientes situaciones señala las que representan la fracción $\frac{3}{5}$:*

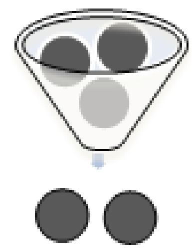
   a. *Las partes sombreadas del círculo comparadas con el total de partes.*

   b. *Peso total en A con respecto a peso total en B.*

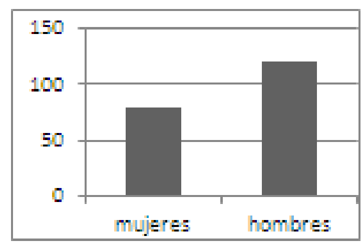



   c. *Lo que le correspondió a 4 amigos de Juanita y a ella, después de repartir tres barras de chocolate, así: cada barra la partieron en 5 partes iguales dándole a cada uno una parte.*

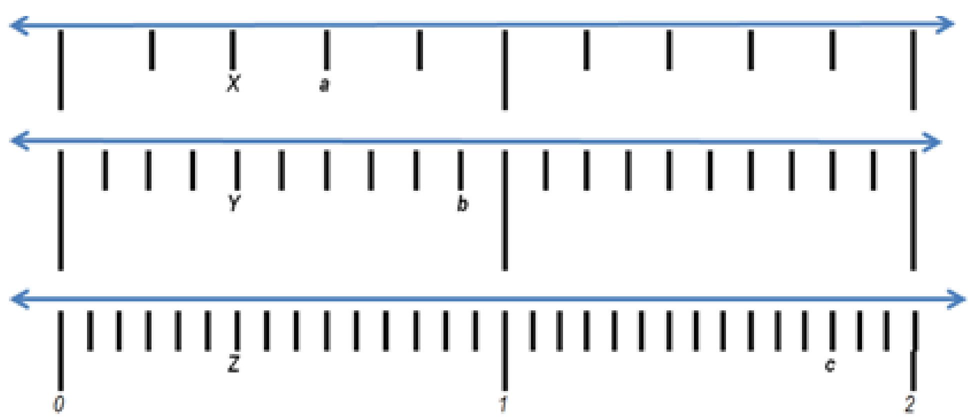
   d. *Las esferas que no han salido del cono con respecto al total.*



   e. *Hombres Vs Población, señaladas en el gráfico.*




***El siguiente enunciado sirve para contestar las preguntas 2., 3. y 4.*** *En las tres rectas numéricas han sido ubicadas fracciones:*



2. *Las tres fracciones a, b, c en las rectas numéricas respectivamente son:*
    a. $\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{26}{30}$
    b. $\frac{3}{15}, \frac{9}{15}, \frac{26}{15}$
    c. $\frac{3}{10}, \frac{9}{10}, \frac{26}{10}$
    d. $\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{26}{15}$
    e. $\frac{6}{10}, \frac{18}{20}, \frac{26}{30}$

3. *En las rectas numéricas, de las fracciones **X, Y, Z** podemos afirmar que:*
    a. *No son equivalentes, ya que el denominador cambiaría.*
    b. *Son equivalentes, pero el denominador cambiaría.*
    c. *Son equivalentes y no cambiarían el numerador y el denominador.*
    d. *No son equivalentes, ya que el numerador y el denominador cambiarían.*
    e. *Son equivalentes y cambiarían el numerador y el denominador.*

4. *En la recta numérica inferior, las fracciones equivalentes a la fracción c son:*
    a. $\frac{78}{45}, \frac{130}{75}, \frac{260}{150}$
    b. $\frac{26}{15}, \frac{52}{15}, \frac{78}{15}$
    c. $\frac{78}{90}, \frac{130}{150}, \frac{260}{300}$
    d. $\frac{26}{15}, \frac{26}{30}, \frac{26}{45}$
    e. $\frac{26}{30}, \frac{52}{60}, \frac{78}{90}$

5. *De un tanque lleno de agua con capacidad de 400 litros se extrae $\frac{1}{5}$ de agua el día lunes, $\frac{1}{4}$ del agua restante el día martes y $\frac{9}{10}$ del agua que queda en el tanque el día miércoles. A partir del análisis de la información se puede concluir dos de las siguientes afirmaciones:*

    a. *El miércoles se extrajo menos agua que el martes.*
    b. *El martes fue el día que más se extrajo agua.*
    c. *El lunes se extrajo la misma cantidad que el martes.*
    d. *En los tres días se extrajo la misma cantidad de agua*
    e. *El lunes se extrajo más agua que el martes.*

6. *Un albañil debe cubrir todo el piso de una cocina usando solamente baldosas cuadradas completas. Las dimensiones de la cocina son 210 centímetros y 120 centímetros. Si por cada dos baldosas sin importar el tamaño le pagan $5. La menor cantidad de dinero que podría recibir el albañil terminada la obra es:*
    a. *$630*
    b. *$70*
    c. *$280*
    d. *$2520*
    e. *$35*

7. *Juan debía realizar un trabajo, si lo hacía solo se demoraría 30 horas, pasadas 5 horas de trabajo, se le unió su amigo Pedro y juntos demoraron 15 horas en terminar dicho trabajo. Si Pedro hubiese hecho solo el trabajo podemos deducir que:*
    a. *Se hubiese demorado lo mismo que Juan.*
    b. *Se hubiese demorado 15 horas más que Juan.*
    c. *Se hubiese demorado 10 horas más que Juan.*
    d. *Se hubiese demorado 15 horas menos que Juan.*
    e. *Se hubiese demorado 10 horas menos que Juan.*

8. *Un ratón come diariamente las $\frac{2}{5}$ partes de lo que pesa, al tercer día ha comido su peso y 30 gramos más. Del ratón podemos deducir que:*
    a. *Al tercer día comió más que los dos primeros días, ya que esta sobre pesado en 30 gramos.*
    b. *Come diariamente 60 gramos, ya que son las $\frac{2}{5}$ partes de 150 gramos que es su peso.*
    c. *No se puede determinar el peso del ratón, ya que no sabemos cuánto pierde de peso diariamente.*
    d. *Su peso es 150 gramos, ya que $\frac{1}{5}$ de su peso es 30 gramos.*
    e. *No se puede determinar el peso final del ratón, ya que no sabemos su peso inicial.*

*El siguiente enunciado sirve para contestar las preguntas 9. y 10. En el cuadro aparecen las estrategias de mercadeo y publicidad utilizada por dos tiendas de ropa.*

| *TIENDA* | *PROMOCION* | *ESTRATEGIA* |
|---|---|---|
| *A* | *Por la compra de una camisa, la segunda (del mismo precio) tiene un descuento del 40%.* | *Subieron el precio de las camisas, una cuarta parte del precio original.* |
| *B* | *Por la compra de dos camisas, lleva la tercera gratis.* | *Subieron 50% al precio original de cada camisa.* |

9. *Juanita decide entrar en la tienda A, y comprar 2 camisas del mismo precio. Al respecto podemos suponer que:*

   a. *No hay promoción, ya que la primera camisa tendría un precio de $\frac{5}{4}$ su precio original y el 40% de descuento de la segunda sería el precio incrementado.*
   b. *Hay promoción, pero solo se rebajaría en un 10% la segunda camisa.*
   c. *No hay promoción, ya que cada camisa se incrementa en un 25%.*
   d. *Hay promoción, pero solo se rebajaría en un 10% el total de la compra.*
   e. *No hay promoción, ya que la camisa tendría un precio de $\frac{1}{4}$ más que su precio original.*

10. *Al comparar los descuentos realizados en las dos tiendas podemos concluir que:*

    a. *En la tienda A descuentan un 5% más que en el B.*
    b. *En ambos almacenes hay el mismo descuento del 5%*
    c. *En ambos almacenes no hay descuento.*
    d. *En la tienda B descuentan un 5% más que en A.*
    e. *En ambos almacenes venden un 10% sobre el precio original.*

# ANEXO B

# Unidad Didáctica 1

## Presentación

En esta unidad didáctica se ha tomado como eje temático central el significado de la fracción como partidor utilizando como material concreto el juego Partimundo. Se ha dividido en tres talleres así: Significado, relación de orden y equivalencias.

Además del contexto ofrecido por el material concreto se trabajará con la recta numérica. Se hará un mayor énfasis en las fracciones propias y los números mixtos. Finalmente se buscará problematizar sobre las fracciones $\frac{a}{0}, \frac{0}{a}, \frac{0}{0}$.

## Objetivos de aprendizaje

El desarrollo del taller busca en los estudiantes el logro de los siguientes objetivos:

- Reconocer el significado de la fracción en su relación parte-todo.
- Ordenar fracciones de diferente denominador.
- Ubicar en la recta numérica cualquier fracción.

## Competencias

- Reconocer las fracciones en contextos donde se establezcan relaciones entre la parte y un todo.
- Utilizar el significado de fracción como parte-todo para solucionar situaciones problemáticas de la vida diaria.
- Elaborar y ejercitar procedimientos a través de algoritmos de la relación de orden y las equivalencias de fracciones según el significado parte-todo.
- Reconocer la clase de matemáticas como un espacio donde se expresan las ideas, se refutan o se demuestran y los errores se convierten en oportunidades de aprendizaje.

## Procedimiento metodológico

Se realizarán tres talleres en sesiones de dos horas.
Cada taller será realizado por equipos de trabajo y presenta el siguiente procedimiento:
Trabajo en equipo: Se entregará una guía del taller a realizar, en cada taller habrán dos formas diferentes de jugar con Partimundo, finalizando el juego, en la guía aparecen unas preguntas problematizadoras que deberán ser contestadas por los el grupo utilizando el material concreto.
Socialización: Una vez se respondan las preguntas, se hará una reflexión del trabajo realizado.
Formalización: Se harán precisiones sobre errores cometidos por los estudiantes y se generalizarán procesos a través de algoritmos y ejercitación de procedimientos.
Terminado cada taller el grupo debe realizar una reflexión colectiva sobre el proceso que se llevó a cabo desde su perspectiva como futuro docente y de las posibilidades que brinda la estrategia en lo que será su práctica pedagógica.

## Estrategia didáctica: *juego Partimundo*

Partimundo es un juego de mesa en madera Figura 1, puede ser utilizado en la enseñanza de números fraccionarios, operaciones y relaciones. Consiste básicamente en 10 discos fabricados en tablero de fibra de madera de abato de media densidad (MDF), divididos en 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 partes iguales respectivamente Figura 2, por ser madera y su pintura ser una laca vegetal, no es tóxico, es fácil de manipular.

Figura 1. Juego Partimundo

Figura 2. Diez discos divididos de una hasta diez partes iguales

Los discos poseen en su canto imanes incrustados que facilitan la unión de las partes Figura 3, dando una real sensación de unidad Figura 4; poseen en su cara superior y canto, un color particular que los distingue entre sí, que son los propuestos para niños según la teoría del color Figura 5, en su cara superior tienen imágenes atractivas para los niños, que pueden ser cambiadas. Por su cara inferior están coloreados todos de gris uniformemente Figura 6.

Figura 3. Imanes que hacen que se unan las partes

Figura 4. Da la sensación de unidad

Figura 5. Diferentes colores por disco

Figura 6. De color gris por una cara

El juego brinda una incalculable variedad de formas de jugarlo. Y dentro del proyecto de aula que se realizó se diseñaron 10 formas de jugarlo[1], para nuestro trabajo utilizaremos 5 de estas formas.

**Recursos didácticos.**

Formas 1,2,3,4 y 5 del juego Partimundo.

Talleres

**Evaluación, como proceso**

Dentro del proceso metodológico, la evaluación es continua y reflexiva, ya que en la realización de cada taller, los estudiantes responderán las preguntas formuladas en la guia en grupo, posteriormente cada grupo expondrá las respuestas dadas a cada pregunta en la etapa de socialización, tanto las producciones escritas como las intervenciones de los estudiantes serán el punto de partida para generalizar en la etapa de formalización. Cabe resaltar que el error en clase permitirá en el proceso crear espacios de oportunidad para el aprendizaje.

[1] Acevedo, Y. Monografía ¿Qué posibilidades didácticas ofrece el juego PARTIMUNDO en la enseñanza de los números fraccionarios para niños de 4º primaria en la Fundación Colegio UIS? Universidad Industrial de Santander. 1999.

Actividades de aprendizaje

## Taller 1: Interpretación partidor. *La unidad.*

1. Una vez reconocido el material, realicen una descripción del mismo.
2. Jueguen la Forma No 1 y 2, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra. ¿Qué hicieron cuando les salió 0 y 0, ó, 0 y otro número?

**Forma No 1. Significado de partidor**

Materiales para el juego:

- Juguete PARTIMUNDO
- Un par de dados enumerados de 0 a 5
- Reloj

Instrucciones para jugar:

Se coloca todas las fichas del juego dispersas Figura 7, el primer jugador se dispone a lanzar los dados con posibilidades de 0 al 10, según el número que obtenga escogerá el disco que este dividido por dicho número de fracciones, por ejemplo, obtuvo 4, busca inmediatamente el disco con 4 partes (sabiendo que cada ficha estará dispersa), armará el disco con la figura inicialmente dada Figura 8. Esto se deberá hacer en un tiempo reglamentario propuesto y cronometrado por los mismos jugadores.

Si logra reunir y armar el disco indicado obtendrá los puntos correspondientes en que está dividido el disco. Cada jugador en su correspondiente turno obtendrá puntos hasta conseguir las 21, que darán el nombre del ganador. Para coronar exactos al número 21, pero si llega a excederlo, deberá restarlo en vez de sumarlo, de tal manera que no quede debiendo algo.

Cualquier regla podrá ser modificada en mutuo acuerdo por los jugadores.

Figura 7. Fichas dispersas

Figura 8. Armar todo el disco y obtendrá 4 puntos

**Forma No 2. Significado partidor**

Materiales para el juego:

- Juguete PARTIMUNDO
- Un par de dados enumerados del 0 al 5
- Reloj

Instrucciones para jugar:

Se colocan todas las fichas del juego dispersas Figura 9, el primer jugador se dispone a lanzar dos veces los dados, con posibilidades de 0 al 10, según los números que obtenga en los dos lanzamientos, escogerá el número mayor, para el disco que este dividido en dicho número y el número menor le indicará las fichas que debe tomar de este disco, las deberá buscar y armar lo que pueda del disco (por eso no puede escogerlas al azar sino armar casi todo el disco), por ejemplo, obtuvo 4 y 5 en los lanzamientos, busca inmediatamente el disco con 5 partes (sabiendo que cada ficha estará dispersa) y escogerá solo 4, de tal manera que pueda armar el disco faltándole solo una ficha Figura 10. Esto se deberá hacer en un tiempo reglamentario propuesto y cronometrado por los mismos jugadores.

Si logra reunir y armar las fichas del disco indicado obtendrá el número de puntos con respecto al número de fichas que faltaron para poder armar el disco. Cada jugador en su correspondiente turno obtendrá puntos, si algún jugador obtiene 11 puntos saldrá del juego, irán saliendo de esta manera los jugadores hasta que se obtenga el ganador. Las reglas para le número 11 podrán modificarse en mutuo acuerdo por los jugadores.

Figura 9. Fichas dispersas

Figura 10. Quedó una ficha, luego gana un punto

3. De acuerdo a las representaciones gráficas que tiene cada uno de los discos, determinen las unidades de medida que pueden atribuirse a cada uno de estos.

   *Por ejemplo, al disco que tiene la imagen de una oveja, podría atribuírsele las siguientes unidades de medida: peso en gr de lana, volumen en litros de leche, tiempo medio de vida, peso en Kg del animal, distancia recorrida en Km por el animal, valor comercial en pesos del animal, etc.*

4. De acuerdo a las unidades representadas en cada uno de los discos en el ejercicio anterior, ¿qué representarían los pedazos de discos?

   *Completen la tabla de acuerdo al ejemplo.*

| DISCO | NOMBRE | REPRESENTACIÓN DE LA UNIDAD | REPRESENTACIÓN DE LOS PEDAZOS DE DISCO-FRACCIÓN |
|---|---|---|---|
| divido en dos partes iguales | medios | | |
| divido en tres partes iguales | tercios | | |
| divido en cuatro partes iguales | cuartos | | |
| cinco partes iguales | quintos | La unidad de medida podría ser 10 litros de leche que diariamente se ordeñan a la oveja. Más aún, esa leche se está ordeñando en un recipiente particionado en 5 partes iguales, con una marca que nos muestra cada dos litros. | Ningún pedazo del disco: representa cero litros de leche de los 10 $\frac{0}{5}$<br>Un pedazo del disco: representan dos litros de leche de los 10 $\frac{1}{5}$<br>Dos pedazos del disco: representan cuatro litros de leche de los 10 $\frac{2}{5}$<br>Tres pedazos del disco: representan seis litros de leche de los 10 $\frac{3}{5}$<br>Cuatro pedazos del disco: representan ocho litros de leche de los 10 $\frac{4}{5}$<br>Cinco pedazos del disco: representan diez discos de leche de los 10 $\frac{5}{5}$ |

*Sugerencia: completar el cuadro con todos los discos.*

5. Elijan tres representaciones de las fracciones en el cuadro anterior y planteen situaciones problemáticas donde falten uno de los datos dados.
   *Por ejemplo, Una oveja da 10 litros de leche diario. ¿Si sólo se han ordeñado 8 litros, qué fracción representa lo ordeñado y lo no ordeñado?*
6. ¿Están ordenadas de menor a mayor las fracciones $\frac{0}{10},\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{4}{10},\frac{5}{10},\frac{6}{10},\frac{7}{10},\frac{8}{10},\frac{9}{10},\frac{10}{10}$? ¿por qué?
   *Generalicen la relación de orden para un conjunto de fracciones de igual denominador.*
7. Realicen la reflexión colectiva.

## **Taller 2: Fracciones Propias.** *Orden y equivalencias.*

1. Jueguen las formas No 3 y 4 de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

**Forma No 3. Orden**

Materiales para el juego:

- Juguete PARTIMUNDO
- Un par de dados enumerados de 0 a 5
- Reloj

Instrucciones para jugar:

Las fichas deben estar volteadas por el lado gris y dispersas Figura 11, el primer que obtenga escogerá una ficha del disco que este dividido por dicho número, por ejemplo, obtuvo 6 busca inmediatamente una ficha del disco con 6 partes (escogiendo solo una), tomará la ficha obtenida. Así cada jugador obtendrá una ficha (puede haber repetidas) ganando el jugador que tenga la ficha más grande Figura 12. En la siguiente ronda será el de la ficha más pequeña intercambiándose así en cada ronda. En caso de empate, desempatarán jugando una ronda solo ellos.

Figura 11. Fichas por el lado gris y dispersas

Figura 12. Se comparan según área

**Forma No 4. Equivalencias**

Materiales para el juego:

Juguete PARTIMUNDO.

Un par de dados enumerados de 0 a 5.

Reloj.

Instrucciones para jugar:

Se colocan todas las fichas dispersas por el lado gris, quedando todos los discos semejantes.

El primer jugador se dispone a lanzar los dados con posibilidades de 0 a 5, en cada dado, de donde obtiene dos números (uno por cada dado), el jugador hará corresponder el número mayor al número de partes en que este dividido el disco y el número menor al número de fichas que debe tomar, una vez que arme el pedazo de disco debe hacer corresponder con fichas de otro disco (solo uno de los otros discos), por ejemplo los números obtenidos son 1 y 3 del disco que está dividido en 3 debe tomar una ficha, el jugador tendrá que hacer coincidir (poniéndolas encima) con fichas de otro disco, podrá hacerlo por ejemplo con dos fichas del que está dividido en 6 Figura 13, o, con 3 fichas del que está dividido en 9 Figura 14, etc.

Esto se deberá hacer en un tiempo reglamentario propuesto y cronometrado por los mismos jugadores.

El número de puntos se obtendrá de acuerdo al número de fichas que utilice para poder reemplazar el pedazo de disco.

Cada jugador en su correspondiente turno obtendrá puntos, el puntaje que debe alcanzar el ganador será 25 puntos.

Las reglas para formar el número de puntos podrán modificarse en mutuo acuerdo por los jugadores.

Figura 13. Dos fichas del disco de 6 coinciden con la ficha del disco de 3

Figura 14. Tres fichas del disco de 9 coinciden con una ficha del disco de 3

2. Ordenen de mayor a menor las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$.

   *Generalicen la relación de orden para un conjunto de fracciones de numerador 1.*

   *¿Se puede mantener la misma regla para fracciones del mismo numerador que no sea 1?*

3. Resuelvan las siguientes preguntas:

   ¿Si sale $\frac{0}{5}$ , con cuántas fichas y de cuáles representarían las misma superficie gris? ¿Por qué?

   ¿Si sale $\frac{0}{5}$ , con cuántas fichas y de cuáles completo la unidad? ¿Por qué?

4. ¿Qué relación puede haber entre las siguientes fracciones?

   - Tercios-sextos
   - Tercios-novenos
   - Medios-cuartos-octavos
   - Medios-sextos
   - Quintos-decimos
   - Medios-decimos

   *Sugerencia: Relacionen los discos de acuerdo a su superficie gris.*

5. Completen el siguiente cuadro de acuerdo al ejemplo:

| FRACCIÓN | COMPLETAR DISCO CON OTROS DISCOS | EQUIVALENCIA |
|---|---|---|
| $\frac{0}{2}$ | Todos los discos completos ó $\frac{2}{2}$ | Ningún disco ó $\frac{0}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ | $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ |
| $\frac{2}{2}$ | Ningún disco ó $\frac{0}{2}$ | Todos los discos completos ó $\frac{2}{2}$ |
| $\frac{0}{3}$ | | |
| $\frac{1}{3}$ | | |
| $\frac{2}{3}$ | | |

*Sugerencia: completar el cuadro con todas las fracciones hasta: $\frac{10}{10}$*

6. Planteen tres situaciones problemáticas de la vida diaria que representen las preguntas realizadas en el cuadro anterior.
7. Realicen la reflexión colectiva.
8. Preguntas de profundización: ¿Si sale $\frac{0}{0}$, qué significa? ¿Cómo lo abordaron en el juego? ¿Por qué?

## **Taller 3: Número Mixto.** *Orden y equivalencias.*

1. Jueguen la forma No 5, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

**Forma No 5. Número Mixto**

Materiales para el juego:

- Todos los discos que están divididos por el mismo número de fichas de 5 juguetes PARTIMUNDO
- Un par de dados enumerados de 1 a 5
- Reloj

Instrucciones del juego:

Se colocan todas las fichas dispersas (los discos se diferencian por las figuras, ya que el color era el mismo) Figura 15, el jugador se dispone a lanzar los dados, el número obtenido en el lanzamiento se duplicará, una vez obtenido dicho número el jugador se dispone a tomar ese número de fichas de los discos, ya que estos discos están divididos en el mismo número de partes, él se dirigirá a buscar y armar los discos que más pueda. Esto se deberá hacer en un tiempo reglamentario propuesto y cronometrado por los mismos jugadores.

Por ejemplo, el número obtenido en el lanzamiento es 8 de los décimos, entonces deberá armar 16 fichas de los décimos, debiendo armar un disco y 6 pedazos de otro Figura 16. El puntaje que obtendrá el jugador será 1 punto por cada disco que logre armar. Ganará el jugador que obtenga primero 10 puntos. Las reglas para formar el número 10 podrán ser modificadas en mutuo acuerdo por los jugadores.

Figura 15. Fichas dispersas de los mismos discos

Figura 16. Se arma un disco completo y sobran 6 fichas

2. ¿Con 22 fichas de los discos de diez, cuántos discos completos alcanzan a armar y cuántas fichas le sobran?

   ¿Hay la posibilidad de que salgan fracciones menores que la unidad en el juego?

3. Complete el siguiente cuadro de acuerdo al ejemplo:

| NÚMERO DE FICHAS | UNIDADES COMPLETAS Y FICHAS QUE SOBRAN | SE ESCRIBE ASÍ |
|---|---|---|
| 15 fichas del disco de 10 | 1 disco y sobran 5 fichas | $1\frac{5}{10}$ |
| 18 fichas del disco de 10 | 1 disco y sobran 8 fichas | $1\frac{8}{10}$ |
| 32 fichas del disco de 10 | 3 discos y sobran 2 fichas | $3\frac{2}{10}$ |

*Sugerencia: Realicen 10 ejemplos de acuerdo el disco que les correspondió.*

4. Representen las fracciones del ejercicio anterior en situaciones problemáticas de la vida diaria.

   *Por ejemplo, para adornar un florero se necesitan 10 rosas. Con 32 rosas, ¿Cuántos floreros completos puedo adornar y cuántas rosas me sobran?*

5. Realicen la reflexión colectiva

6. Preguntas para profundizar: Diseñen una forma diferente de jugar PARTIMUNDO, planteando sus reglas. ¿Qué sucede si sale $\frac{0}{0}$, $\frac{5}{5}$ y $\frac{0}{5}$?

7. Realicen las reflexiones colectivas.

## ANEXO C

# Unidad Didáctica 2

### Presentación

En esta unidad didáctica se ha tomado como eje temático central el significado de la fracción como razón utilizando como material concreto los bloques lógicos de Zoltán Dienes. Se ha dividido en tres talleres así: Significado, relación de orden y equivalencias.

Además del contexto ofrecido por el material concreto se trabajarán la probabilidad en dados y cartas y se analizarán noticias de prensa escrita. Se hará énfasis en los porcentajes. Finalmente se buscará problematizar sobre las fracciones $\frac{a}{0}, \frac{0}{a}, \frac{0}{0}$.

### Objetivos de aprendizaje

El desarrollo del taller busca en los estudiantes el logro de los siguientes objetivos:

- Reconocer el significado de la fracción como razón.
- Ordenar fracciones de diferente denominador.
- Reconocer las proporciones, especialmente los porcentajes como fracciones equivalentes.

### Competencias

- Reconocer las fracciones en diferentes contextos como razones y proporciones.
- Utilizar el significado de fracción como razón para solucionar situaciones problemáticas de la vida diaria.
- Elaborar y ejercitar procedimientos a través de algoritmos de la relación de orden, las proporciones, los porcentajes como fracciones.
- Reconocer la clase de matemáticas como un espacio donde se expresan las ideas, se refutan o se demuestran y los errores se convierten en oportunidades de aprendizaje.

## *Significado de fracción como razón*

**Procedimiento metodológico**

Se realizarán tres talleres en sesiones de dos horas.

Cada taller será realizado por equipos de trabajo y presenta el siguiente procedimiento:

Trabajo en equipo: Se entregará una guía del taller a realizar, en cada taller tendrán que manipular los bloque lógicos de Zoltán Dienes, en la guía aparecen unas preguntas problematizadoras que deberán ser contestadas por los el grupo utilizando el material concreto.

Socialización: Una vez se respondan las preguntas, se hará una reflexión del trabajo realizado.

Formalización: Se harán precisiones sobre errores cometidos por los estudiantes y se generalizarán procesos a través de algoritmos y ejercitación de procedimientos.

Terminado cada taller el grupo debe realizar una reflexión colectiva sobre el proceso que se llevó a cabo desde su perspectiva como futuro docente y de las posibilidades que brinda la estrategia en lo que será su práctica pedagógica.

**Estrategia didáctica: *bloques lógicos de Zoltán Dienes***

Material manipulable compuesto por 48 figuras geométricas Figura 17.

Figura 17. Son 48 fichas, cada una con cuatro cualidades

Basado en cuatro cualidades (atributos): forma (cuadrado, círculo, triángulo y rectángulo) Figura 18, color (rojo, azul, amarillo) Figura 19, tamaño (grande, pequeño) Figura 20 y grosor (grueso, delgado) Figura 21.

Figura 18. Cuatro formas

Figura 19. Tres colores

Figura 20. Dos tamaños

Figura 21. Dos espesores

Elijamos cualquiera de la fichas, podríamos describirla, por ejemplo, así: es cuadrado, grueso, rojo y grande. Estas características o valores es lo que las hacen únicas, pues una y sólo una de estas los reunirá Figuras 22 y 23.

Figura 22. Sólo una cumple las cuatro condiciones

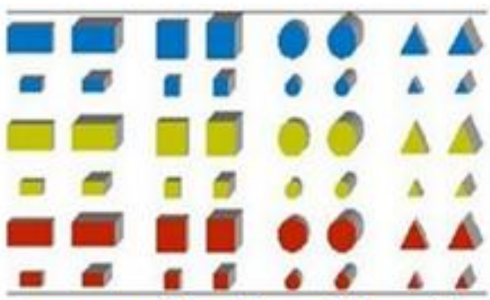


Figura 23. Según la matriz, cada ficha es única

El creador fue William Hull, Zoltán Dienes fue el que los usó en escuelas de Canadá y Australia como material de aprendizaje de las matemáticas, quizás deberían ser llamados entonces bloques de Hull.

Sirven para poner a los niños ante unas situaciones que les permitan llegar a determinados conceptos matemáticos. A partir de las actividades los niños llegan a:

- Nombrar y reconocer cada bloque.
- Reconocer las variables y valores de éstos.
- Clasificarlos atendiendo a un solo criterio.
- Comparar los bloques estableciendo semejanzas y diferencias.

## Significado de fracción como razón

- Realizar seriaciones siguiendo unas reglas.
- Establecer la relación de pertenencia a conjuntos.
- Emplear los conectivos lógicos (conjunción, negación, disyunción, implicación).
- Definir elementos por la negación.
- Introducir el concepto básico de número

Por extensión, los bloques también pueden ser utilizados en el área de lengua, para explicar conceptos como clasificación y ordenación, familias léxicas, coordinación y, claro está, descripción.

**Recursos didácticos.**

Bloques lógicos de Zoltan Diennes.

Dados, cartas de póker y recortes de noticias de periódicos.

Talleres

**Evaluación, como proceso**

Dentro del proceso metodológico, la evaluación es continua y reflexiva, ya que en la realización de cada taller, los estudiantes responderán las preguntas formuladas en la guía en grupo, posteriormente cada grupo expondrá las respuestas dadas a cada pregunta en la etapa de socialización, tanto las producciones escritas como las intervenciones de los estudiantes serán el punto de partida para generalizar en la etapa de formalización. Cabe resaltar que el error en clase permitirá en el proceso crear espacios de oportunidad para el aprendizaje.

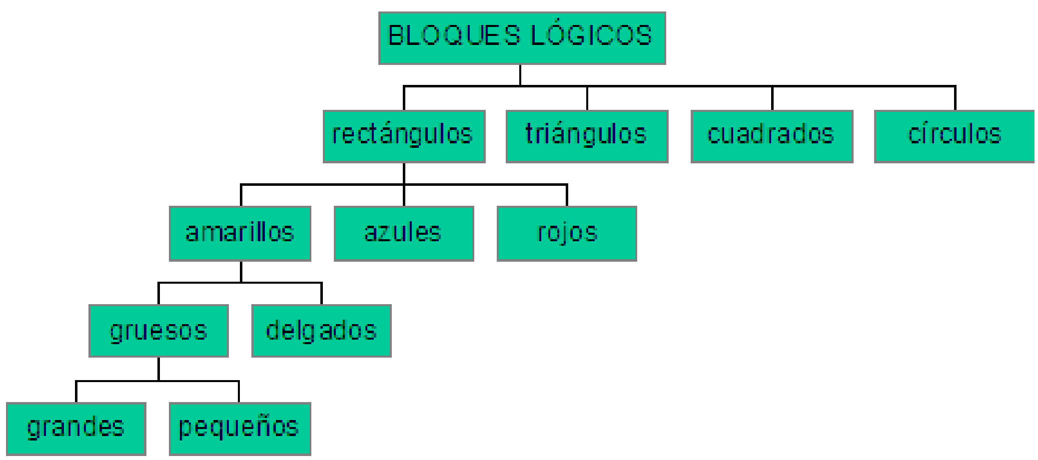
Actividades de aprendizaje

**Taller 1: Interpretación de razón.** *La unidad.*

1. Clasifiquen los bloques lógicos de acuerdo a las variables que lo conforman: forma, color, tamaño y grosor y determinen el número de fichas de acuerdo a cada variable.

| COLOR / FORMA | AMARILLO | AZUL | ROJO |
|---|---|---|---|
| RECTÁNGULO | Gg-Gd-Pg-Pd | | |
| CUADRADO | | | |
| CÍRCULO | | | |
| TRIÁNGULO | | | |

Gg: Grande grueso Gd: Grande delgado Pg: Pequeño grueso Pd: Pequeño delgado




*Sugerencia: Pueden realizar la clasificación de acuerdo a su agrado.*

2. Jueguen la Forma No 1, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

**Forma No 1. La ficha escondida**

Materiales para el juego:

- Bloques Lógicos de Zoltán Dienes

Instrucciones para jugar:

Las fichas se encuentran dispersas en la mesa Figura 24.

Un jugador elige una ficha y la describe en su cuaderno de acuerdo a las 4 variables sin dejar ver a los demás jugadores Figura 25.

Cada jugador en la ronda tiene una de las siguientes opciones: preguntar o afirmar. Si es preguntar, debe hacer preguntas cerradas donde el que esconde la ficha solo pueda responder si o no. Por ejemplo, ¿Es roja?, ¿es cuadrado? De lo contrario, si afirma, debe describir la ficha exactamente, por ejemplo, ¿la ficha escondida es cuadrada, roja, pequeña y gruesa?

El jugador que logre encontrar la ficha será quien en la posterior ronda esconda la ficha.

El ganador será quien logre ganar en tres rondas.

Deben agregar más reglas, si es conveniente y pertinente a la dinámica del juego en el grupo.

**Figura 24. Las fichas dispersas**

**Figura 25. La ficha escondida debe ser caracterizada**

*Sugerencia: Cada uno de los integrantes del grupo debe escribir todo el razonamiento realizado en cada ronda así no logre ganarla, si logra encontrar una estrategia, describirla. Deben escribir cada razonamiento en el informe del taller.*

3. Jueguen la Forma No 2, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

Forma No 2. Domino

Materiales para el juego:

- Bloques Lógicos de Zoltán Dienes

Instrucciones para jugar:

Distribuir las fichas entre el número de jugadores en igual número.

Eligen quien empezará la ronda y dicho jugador colocará la primera ficha en la mesa.

Cada jugador en la ronda tiene que colocar una ficha de acuerdo a una variable que tenga en común con la que está en la mesa.

A medida que el juego avanza hay dos caminos que puede elegir cada jugador Figura 26.

Cada jugador deber decir por cual variable coloca su ficha, a excepción de la primera ficha que se coloca iniciando el juego Figura 27.

El ganador de cada ronda o partida será quien logre quedarse primero sin fichas.

Deberán jugar tres rondas o partidas:

En la primera ronda debe colocarse cada ficha por una variable que tenga en común con una de las dos fichas que está en la mesa en turno.

En la segunda ronda debe colocarse cada ficha por dos variables que tenga en común con una de las dos fichas que está en la mesa en turno.

En la tercera ronda debe colocarse cada ficha por tres variables que tenga en común con una de las dos fichas que está en la mesa en turno. Deben agregar más reglas, si es conveniente y pertinente a la dinámica del juego en el grupo.

Figura 26. Se coloca la segunda ficha por ser roja y la tercera por ser cuadrado

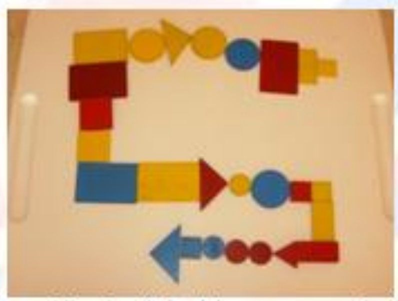


Figura 27. Continúa el juego como en dominó

*Sugerencia: Cada uno de los integrantes del grupo debe escribir todo el razonamiento realizado en cada ronda así no logre ganarla, si logra encontrar una estrategia, describirla. ¿Qué sucede a medida que aumentamos el número de variables?¿Es posible pedir cuatro variables? Explique.*

4. De acuerdo al material. Completen la siguiente tabla:

| PREGUNTA | RAZÓN | REPRESENTACIÓN |
|---|---|---|
| Con respecto al total de fichas ¿Cuántas fichas son amarillas? | De 48 fichas, 4 son círculos y amarillos. | 4:48 (4 es a 48)<br>$\frac{4}{48}$ (4 de 48) |
| Con respecto al total de fichas ¿Cuántas fichas son amarillas? | De 12 círculos, 4 son círculos y amarillos. | 4:12 (4 es a 12)<br>$\frac{4}{12}$ (4 de 12) |
| Con respecto al total de fichas ¿Cuántas fichas son amarillas y triángulos? | | |
| Con respecto a las fichas amarillas ¿Cuántas son triángulos? | | |
| Con respecto al total de fichas ¿Cuántas fichas son amarillas, triángulos y grandes? | | |
| Con respecto al total de fichas amarillas ¿Cuántas son triángulos grandes? | | |
| Con respecto al total de fichas amarillas y triángulos ¿Cuántas son grandes? | | |
| Con respecto al total de fichas ¿Cuántas son amarillas, triángulos, grandes y gruesas? | | |
| Con respecto al total de fichas amarillas ¿Cuántas son triángulos, grandes y gruesos? | | |
| Con respecto al total de fichas amarillas y triángulos ¿Cuántas son grandes y gruesos? | | |
| Con respecto al total de fichas amarillas, triángulos y grandes ¿Cuántas son gruesos? | | |

*Observación: Criterio utilizado en las preguntas: color-forma-tamaño-grosor*

5. Realicen la reflexión colectiva.

## Taller 2: Proporciones *Equivalencias*

1. De acuerdo al ejercicio 4 del taller anterior, encuentren otras razones siguiendo otro criterio.
2. Encuentren ejemplos concretos (según el material) a las siguientes razones:

$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{1}{6};\frac{2}{6};\frac{3}{6};\frac{4}{6};\frac{5}{6};\frac{6}{6}$.

3. ¿Es posible encontrar ejemplos concretos (según el material) a las razones $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$, o $\frac{0}{a}$? Expliquen.
4. De acuerdo al material. Completen la siguiente tabla:

| CRITERIOS | RAZONES FORMADAS | PROPORCIONES-RAZONES EQUIVALENTES |
|---|---|---|
| Grosor: grueso-delgado<br><br>*Dividen a todas las fichas en dos partes: unas gruesas y otras delgadas.* | De 2 triángulos rojos y grandes, 1 es delgado. $\frac{1}{2}$<br>De 4 triángulos rojos, 2 son delgados. $\frac{2}{4}$<br>De 12 triángulos, 6 son delgados. $\frac{6}{12}$<br>De 48 fichas, 24 son delgadas. $\frac{24}{48}$ | $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12}=\frac{24}{48}$ |
| Tamaño: pequeño-grande | | |
| Color: rojo-amarillo-azul | | |
| Forma: triángulos-cuadrados-círculos-rectángulos | | |

5. Utilizando el material y las razones armadas en el ejercicio anterior, preguntarse: ¿qué sucedería si hubiera 100? Completen la siguiente tabla:

| Razones | Razón equivalente | Proporción |
|---|---|---|
| De 4 círculos rojos, 2 son gruesos. | Si hubiera 100 círculos rojos grandes, 50 serían gruesos. | $\frac{2}{4}=\frac{50}{100}$ |
| De 2 triángulos, amarillos y delgados, 1 es grande. | | |

Observación: Debe utilizar todas las razones armadas.

6. Realicen la reflexión colectiva

## Taller 3: Otros contextos. *Orden.*

1. Utilizando el material, representen las siguientes razones en un mismo conjunto y con las mismas características:

   a. $\frac{0}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\frac{6}{6}$. ¿Están ordenadas de menor a mayor? ¿Por qué?

   b. $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{7}{12}$. Ordénelas de menor a mayor.

   c. Determine una regla para ordenar razones.

2. Material: Recorte de papel periódico

A través de una noticia reciente, donde se involucren razones, realicen un análisis de dicha información.

   a. Subrayen las razones, proporciones, porcentajes o fracciones que aparecen en la noticia.
   b. Ordene de menor a mayor las razones encontradas.
   c. Encuentren el significado de la fracción en la noticia. ¿qué repercusiones tiene para el análisis de la noticia, no entender el significado de la fracción?
   d. Verificar los datos dados en la noticia. Posibles errores o sesgos de la información.
   e. Realizar una crítica de la noticia. Argumentar su punto de vista acerca de la noticia.

3. Material: Dados – cartas de póker

A través de un par de dados y las cartas de póker, Completen la siguiente tabla:

| ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE... | TOTAL DE SUCESOS | SUCESOS A FAVOR | PROBABILIDAD (FRACCIÓN) |
|---|---|---|---|
| Sacar 2 en el lanzamiento de un dado? | | | |
| Sacar 7 en la suma del lanzamiento de los dos dados? | | | |
| Sacar un doble (2 números iguales) en el lanzamiento de los dos dados? | | | |
| Sacar dos de picas de toda la baraja? | | | |
| Sacar 3 de cualquier pinta de toda la baraja? | | | |
| Sacar cualquier carta de corazones de toda la baraja? | | | |

4. Planteen tres situaciones problemáticas de acuerdo a los ejercicios 2 y3.
5. Realicen una reflexión colectiva.

# ANEXO D

# Unidad Didáctica 3

### Presentación

En esta unidad didáctica se ha tomado como eje temático central el significado de la fracción como operador utilizando como material concreto las regletas de Cuisenaire o números en color. Se ha dividido en tres talleres así: Significado, relación de orden y equivalencias.

Se hará un mayor énfasis en operadores equivalentes y se trabajaran ecuaciones de una incógnita con operadores. Finalmente se buscará problematizar sobre las fracciones $\frac{a}{0}, \frac{0}{a}, \frac{0}{0}$.

### Objetivos de aprendizaje

El desarrollo del taller busca en los estudiantes el logro de los siguientes objetivos:

- Reconocer el significado de operador de la fracción.
- Determinar operadores equivalentes.
- Resolver ecuaciones con una incógnita.

### Competencias

- Reconocer las fracciones en contextos donde se establezcan interpretaciones como operadores agrandadores y achicadores.
- Utilizar el significado de fracción como operador para solucionar situaciones problemáticas de la vida diaria.
- Elaborar y ejercitar procedimientos a través de algoritmos que permitan resolver ecuaciones con una incógnita.
- Reconocer la clase de matemáticas como un espacio donde se expresan las ideas, se refutan o se demuestran y los errores se convierten en oportunidades de aprendizaje.

### Procedimiento metodológico

Se realizarán tres talleres en sesiones de dos horas.

## *Significado de fracción como operador*

Cada taller será realizado por equipos de trabajo y presenta el siguiente procedimiento:

Trabajo en equipo: Se entregará una guia del taller a realizar, en cada taller tendrán que manipular los bloque lógicos de Zoltán Dienes, en la guía aparecen unas preguntas problematizadoras que deberán ser contestadas por los el grupo utilizando el material concreto.

Socialización: Una vez se respondan las preguntas, se hará una reflexión del trabajo realizado.

Formalización: Se harán precisiones sobre errores cometidos por los estudiantes y se generalizarán procesos a través de algoritmos y ejercitación de procedimientos.

Terminado cada taller el grupo debe realizar una reflexión colectiva sobre el proceso que se llevó a cabo desde su perspectiva como futuro docente y de las posibilidades que brinda la estrategia en lo que será su práctica pedagógica.

**Estrategia didáctica: regletas de Cuisenaire o números en color**

El inventor de las Regletas o "Números en Color" fue Emile George Cuisenaire, Belgium en Europa en 1952 publicó su libro números en colores donde describe el uso de este material Figura 28.

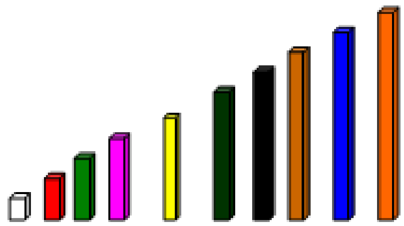


Figura 28. Regletas de Cuisenaire

Las regletas Cuisenaire son un material matemático destinado básicamente a que los niños aprendan la composición y descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo, todo ello sobre una base manipulativa. Las regletas son prismas de madera coloreadas, de un centímetro cuadrado de sección Figura 29 y de diferentes longitudes que van desde un centímetro hasta diez centimetros y cada una de un color diferente Figura 30.

Figura 29. Sección transversal de 1cm*1cm

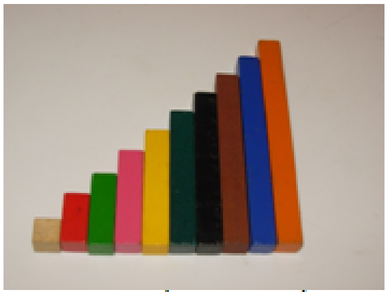


Figura 30. Se trabajará con una versión en madera

A cada una de ellas se le asigna un número que coincide con su longitud Figura 31, así:

- La regleta blanca, con 1 cm. de longitud, representa al número 1.
- La regleta roja, con 2 cm. representa al número 2.

- La regleta verde claro, con 3 cm. representa al número 3.
- La regleta rosada, con 4 cm. representa al número 4.
- La regleta amarilla, con 5 cm. representa al número 5.
- La regleta verde oscuro, con 6 cm. representa al número 6.
- La regleta negra, con 7 cm. representa al número 7.
- La regleta marrón, con 8 cm. representa al número 8.
- La regleta azul, con 9 cm. representa al número 9.
- La regleta naranja, con 10 cm. representa al número 10.

Figura 31. Cada regleta se puede descomponer con las otras

Para tener en cuenta:

- Una regleta no posee valor numérico hasta que no definamos la unidad.
- Una vez elegida la unidad, los nombres de las demás quedan determinados Figura 32.
- Las fracciones muestran una relación entre una parte y el todo, no el tamaño real de la parte ni del todo.
- No podemos empezar a comparar fracciones hasta que no se fije la unidad Figura 33.

Figura 32. Las regletas han sido ordenadas por su longitud.

Figura 33. La misma regleta (naranjada) está siendo comparada con tres diferentes regletas (blanca, roja, amarilla)

**Recursos didácticos:**

Regletas de Cuisenaire.

Talleres

**Evaluación, como proceso**

Dentro del proceso metodológico, la evaluación es continua y reflexiva, ya que en la realización de cada taller, los estudiantes responderán las preguntas formuladas en la guía en grupo, posteriormente cada grupo expondrá las respuestas dadas a cada pregunta en la etapa de socialización, tanto las producciones escritas como las intervenciones de los estudiantes serán el punto de partida para generalizar en la etapa de formalización. Cabe resaltar que el error en clase permitirá en el proceso crear espacios de oportunidad para el aprendizaje.

**Actividades de aprendizaje**

## Taller 1: Interpretación operador. *La unidad*

1. Una vez reconocido el material, realicen una descripción del mismo.
2. Jueguen la Forma No 1, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

**Forma No 1. Juego La Torre**

Materiales para el juego:

- Regletas de Cuisenaire

Instrucciones para jugar:

Construya con cuidado la torre con 4 regletas por cada color. Ordenando desde abajo hacia arriba de la de menor longitud, es decir la regleta de 1 (blanca) hasta la regleta de 10 (naranjada) Figura 34. Cada jugador debe remover una regleta de cualquier posición por debajo del nivel más alto que este completo. Usa solo una mano! Luego acomodar esta regleta en la cima de la torre en sentido perpendicular al de las que se encuentran debajo Figura 35. Cada nivel de la torre que se forme debe tener cuatro regletas. El juego continúa con el turno de cada uno de los jugadores hasta la caída de la torre. El ganador es el jugador que este en turno antes de quien tumbe la torre.

Figura 34. Se arma la torre de menor a mayor

Figura 35. Se toma una ficha y se coloca arriba

3. Jueguen la Forma No 2, de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra.

**Forma No 2. Corre que te cojo**

Materiales para el juego:

- Regletas de Cuisenaire
- Un par de dados estándar.

Instrucciones para jugar:

Las regletas están dispersas en la mesa, el primer jugador se dispone a lanzar los dados, el número obtenido en cada uno de estos le indicará las regletas que debe tomar, por ejemplo si saca en los dados 2 y 5, toma una regleta de 2 (roja) y una regleta de 5 (amarilla) Figura 36, por cada turno obtendrá una o dos regletas, cada jugador formará un tren de regletas en sus turnos. Cuando las regletas se agoten los jugadores podrán cambiar sus regletas por otras sumando valores, para continuar el juego, por ejemplo si un jugador obtiene en los dados 2 y 3, pero en la mesa no hay una regleta de 2 (roja) y en su tren esta seguida de una regleta de 6 (verde oscuro), la puede cambiar por una regleta de 8 (marrón) para poder utilizar la regleta de 2 (rosado) en su turno. Transcurridos varios turnos terminarán acabándose las regletas, cerrándose el juego, gana el jugador que armar el tren de mayor longitud Figura 37.

Figura 36. Cada regleta corresponde al número del dado

Figura 37. Gana el tren más largo

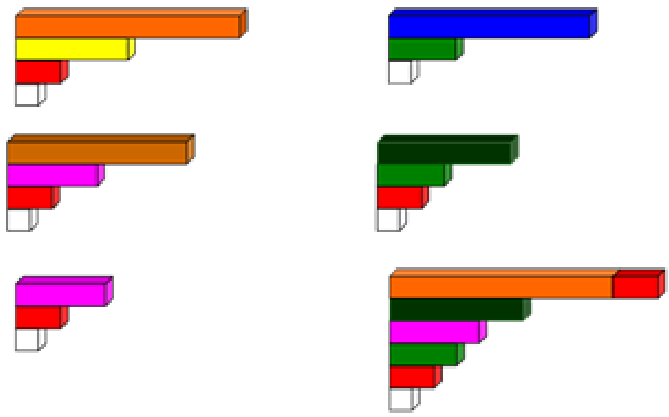
4. Realicen alfombras descomponiendo la regleta de 10 (naranjada). Luego realice alfombras para las otras regletas

5. Utilizando el material determinen la longitud de cada regleta comparándola con la regleta de 1 (blanca).

6. Realicen reflexiones colectivas

Taller No 2; Operadores agrandadores-achicadores. *Orden y ecuaciones.*

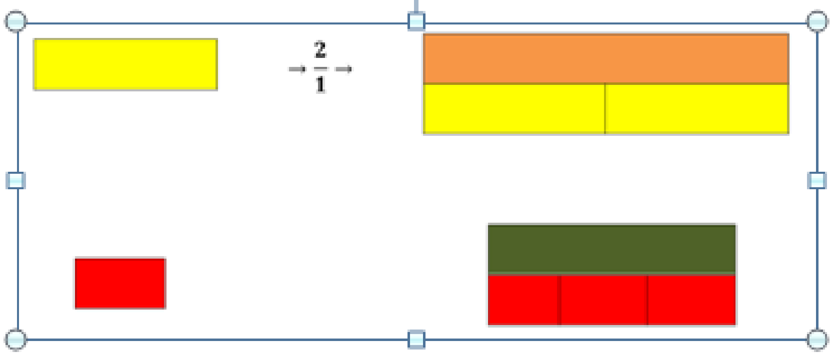
1. Utilizando el material, relacionen regletas de acuerdo a particiones en partes iguales así: *Por ejemplo, la regleta naranjada puede ser dividida en dos partes iguales por la amarilla o en cinco partes iguales por la roja o en diez partes iguales por la blanca.*
Haz lo mismo con cada regleta.



2. Imaginen que tienen una máquina transformadora que achica o agranda regletas. Una regleta se coloca al inicio y otra sale al final.

- Supongan que la regleta grande se coloca al inicio de la máquina y al final aparece una pequeña. ¿Qué le hace la máquina por dentro a la regleta? Describe el proceso teniendo en cuenta las particiones que hace la máquina y la que arroja.


- Supongan que una regleta pequeña entra a la máquina y al final aparece una grande. ¿Qué le hace la máquina por dentro a la regleta? Describe el proceso. Describe el proceso teniendo en cuenta las particiones que hace la máquina y lo que arroja.




3. Utilizando el material, Completen la siguiente tabla:

| Regleta inicial | Máquina transformadora | Regleta final |
|---|---|---|
| 7 | | 3 |
| 4 | $\frac{1}{2}$ ; operador achicador | |
| | $\frac{2}{1}$ | 12 |
| 10 | | 6 |
| 15 | $\frac{2}{3}$ | |
| | $\frac{3}{4}$ | 6 |
| 5 | $\frac{3}{2}$ ; operador agrandador | |
| 10 | | 25 |
| 18 | $\frac{5}{6}$ | |
| | $\frac{3}{8}$ | 6 |

4. Utilizando el material, encuentren el valor de $x$:

a. $\frac{2}{3}$ de $x$ es 12

b. $x$ de 18 es 24

c. $\frac{4}{5}$ de 20 es $x$

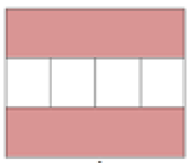
d. $\frac{8}{6}$ de $x$ es 16

e. $x$ de 30 es 9

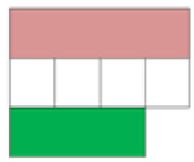
f. $\frac{3}{7}$ de 21 es $x$

5. Utilizando el material, ¿Qué fracción representa una regleta comparada con otras?

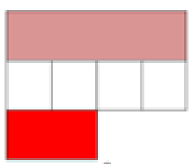
Por ejemplo,



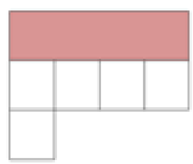
$\frac{4}{4}$



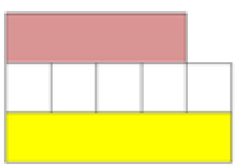
$\frac{3}{4}$



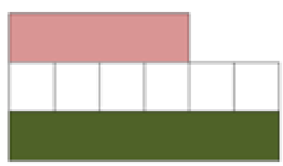
$\frac{2}{4}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{5}{4}$



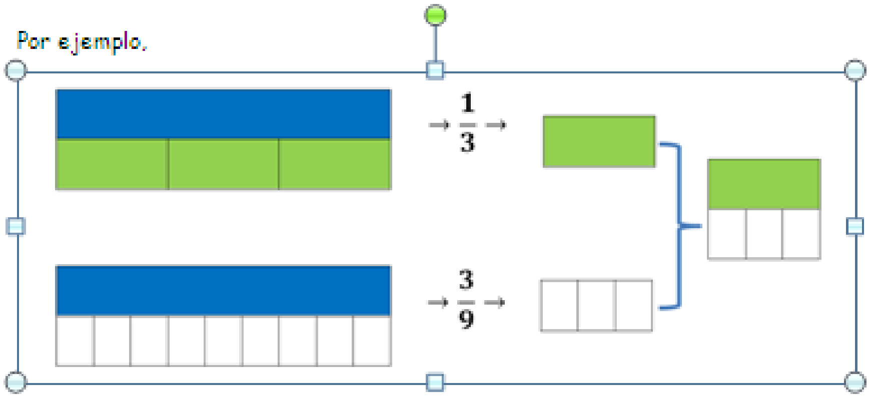
$\frac{6}{4}$

6. Realicen la reflexión colectiva.

## Taller 3: Operadores equivalentes. *Equivalencias*

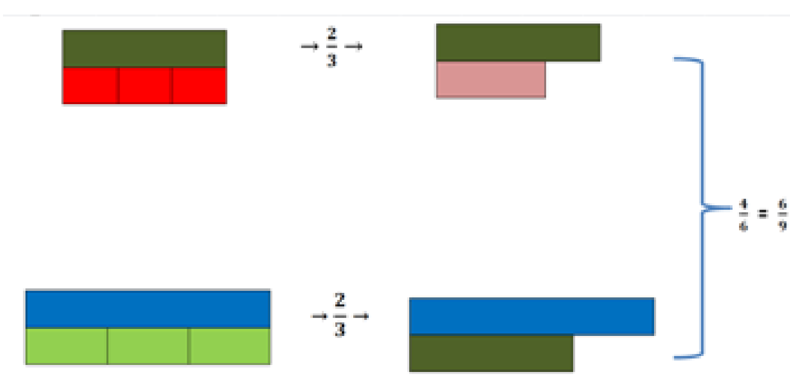
1. Utilizando el material, muestren que dos operadores que realizan la misma transformación a una regleta son equivalentes.

Por ejemplo,




2. Utilizando el material, muestren que dos regletas que han sido transformadas por el mismo operador generan fracciones equivalentes.

Por ejemplo:



3. Utilizando el material, muestre que dos longitudes iguales pueden estar representadas con diferentes fracciones.

Por ejemplo,

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

4. Responda las siguientes preguntas con la ayuda del material:

a. Si el nombre de la regleta roja es $\frac{2}{5}$. ¿Cuál es la unidad? ____________________.

b. Si el nombre de la regleta verde oscura es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál regleta es $\frac{1}{2}$? _____________ Toma $\frac{1}{4}$ de la regleta que resultó. ¿Cuántos cuartos de la regleta rosada tienes ahora?________.

c. ¿Puedes hallar una regleta que sea exactamente de la misma longitud que los $\frac{3}{4}$ de la rosada?__________ ¿Qué regleta es $\frac{2}{4}$ de la rosada? __________¿Cuál es $\frac{5}{4}$?_________.

d. ¿Cuántas regletas de las blancas se necesitan para tener la longitud de la amarilla?__________¿Qué regleta es $\frac{2}{5}$ de la amarilla?___________¿Cuál es $\frac{5}{5}$?__________.

e. Si hacen un tren con una regleta roja y una verde claro ¿Cuántos quintos es cada regleta?___________________________.

f. ¿Cuál regleta es $\frac{5}{4}$ de la rosada?__________ ¿Cuál regleta es $\frac{5}{4}$ de la marrón?___________.

g. Si hacen un tren con una regleta amarilla, una verde y una roja ¿Cuántos octavos es cada regleta?___________________________.

5. ¿Qué sucede con los operadores $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{a}$ y $\frac{0}{0}$?

6. Realicen la reflexión colectiva.

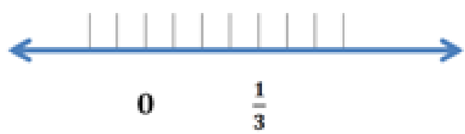
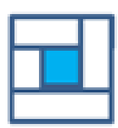
## ANEXO E

# Modelo de la Prueba Final

*Aplicada a estudiantes de Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Ciencias Naturales y Educación Ambiental*

PREGUNTAS ABIERTAS:

| SITUACIÓN PROBLEMÁTICA | SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN | RESPUESTA | JUSTIFICACIÓN |
|---|---|---|---|
| 1. ¿Tres medios vasos de agua son vaso y medio; pero, ¿cuántos vasos y medio son? | | | |
| 2. Cuántas docenas de huevos son 3 huevos? Y ¿cuántas medias docenas? | | | |
| 3. En una reunión, la mitad de los invitados son hombres. De todos los hombres presentes, 40% son calvos; y de estos últimos, la mitad habla inglés. Si sólo 4 calvos hablan inglés, ¿cuántas mujeres hay en la reunión? | | | |
| 4. La longitud del monstruo del lago encantado es de 20 metros, más la mitad de su propia longitud. ¿Cuánto mide de largo el monstruo? | | | |
| 5. Las $\frac{9}{20}$ partes de un número y su 45% es 18. ¿De qué número se trata? | | | |

| SITUACION PROBLEMATICA | GRAFICA |
| --- | --- |
| 6. Grafique la fracción $\frac{3}{2}$ , sí la unidad es:<br> | |
| 7. Represente la unidad sobre la recta numérica, a partir de la ubicación de la fracción dada:<br> | |
| 8. Si la unidad se representa gráficamente mediante este rectángulo:<br><br>indique la fracción que está representada en la figura (sin el cuadrado del centro):<br> | |
| 9. Grafique la fracción $\frac{6}{5}$ si la unidad es:<br> | |
| 10. Exprese la unidad si la gráfica representa la fracción $\frac{14}{3}$<br> | : |

**PREGUNTAS SELECCION MULTIPLE:**

1. De un tanque lleno de agua con capacidad de 400 litros se extrae $\frac{1}{5}$ de agua el día lunes, $\frac{1}{4}$ del agua restante el día martes y $\frac{9}{20}$ del agua que queda en el tanque el día miércoles. A partir del análisis de la información se puede concluir dos de las siguientes afirmaciones:

a. El miércoles se extrajo menos agua que el martes.
b. El martes fue el día que más se extrajo agua.
c. El lunes se extrajo la misma cantidad que el martes.
d. En los tres días se extrajo la misma cantidad de agua
e. El lunes se extrajo más agua que el martes.

2. Un albañil debe cubrir todo el piso de una cocina usando solamente baldosas cuadradas completas. Las dimensiones de la cocina son 210 centímetros y 120 centímetros. Si por cada dos baldosas sin importar el tamaño le pagan $5. La menor cantidad de dinero que podría recibir el albañil terminada la obra es:

a. $630
b. $70
c. $280
d. $2520
e. $35

3. Juan debía realizar un trabajo, si lo hacía solo se demoraría 30 horas, pasadas 5 horas de trabajo, se le unió su amigo Pedro y juntos demoraron 15 horas en terminar dicho trabajo. Si Pedro hubiese hecho solo el trabajo podemos deducir que:

a. Se hubiese demorado lo mismo que Juan.
b. Se hubiese demorado 15 horas más que Juan.
c. Se hubiese demorado 10 horas más que Juan.
d. Se hubiese demorado 15 horas menos que Juan.
e. Se hubiese demorado 10 horas menos que Juan.

4. Un ratón come diariamente las $\frac{2}{5}$ partes de lo que pesa, al tercer día ha comido su peso y 30 gramos más. Del ratón podemos deducir que:

a. Al tercer día comió más que los dos primeros días, ya que esta sobre pesado en 30 gramos.
b. Come diariamente 60 gramos, ya que son las $\frac{2}{5}$ partes de 150 gramos que es su peso.
c. No se puede determinar el peso del ratón, ya que no sabemos cuanto pierde de peso diariamente.
d. Su peso es 150 gramos, ya que $\frac{1}{5}$ de su peso es 30 gramos.
e. No se puede determinar el peso final del ratón, ya que no sabemos su peso inicial.

3. En el cuadro aparecen las estrategias de mercadeo y publicidad utilizada por dos tiendas de ropa.

| TIENDA | PROMOCION | ESTRATEGIA |
|---|---|---|
| A | Por la compra de una camisa, la segunda (del mismo precio) tiene un descuento del 20%. | Subieron el precio de las camisas, una cuarta parte del precio original. |
| B | Por la compra de dos camisas, lleva la tercera gratis. | Subieron 50% al precio original de cada camisa. |

Al comparar los descuentos realizados en las dos tiendas podemos concluir que:

a. En la tienda A descuentan 5% más que en la B.
b. En ambos almacenes hay descuento del 5%.
c. En ambos almacenes no hay descuento.
d. En la tienda B descuentan 5% más que en la A.
e. En ambos almacenes venden 10% más del precio original.