

MATRICES DE PASCAL

ELVER CRUZ POVEDA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2006

# MATRICES DE PASCAL

ELVER CRUZ POVEDA

Monografía presentada como  
requisito para optar al título  
de *Licenciado en Matemáticas*

Ph.D. Sofía Pinzón Durán  
**Directora**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2006

*A MIS PADRES*

# AGRADECIMIENTOS

Doy mis más profundos agradecimientos:

- A **Dios**, quien es la guía que ilumina el camino por el que andamos y que a pesar de los tropiezos me da fuerzas para seguir luchando.
- A mis padres **Elio Cruz Parra y Orfelina Poveda Díaz** y a mis hermanos **Helio Cruz Poveda y Fredy Cruz Poveda**, quienes han estado conmigo en las buenas y malas circunstancias
- A **Sofía Pinzón Durán, directora de mi proyecto y a los profesores calificados,**
- A mis familiares y amigos, que me apoyaron en el transcurso de mi carrera .
- A la **UIS**, institución que me dio la oportunidad de escalar otro peldaño en mi formación profesional.

**TÍTULO:** MATRICES DE PASCAL\*

**AUTOR:** ÉLVER CRUZ POVEDA\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Matriz de Pascal, triángulo de Pascal, grafos, inversa, función exponencial, números de Stirling, números de Bernoulli.

## DESCRIPCIÓN

Las matrices de Pascal se construyen a partir de los coeficientes que aparecen en el conocido triángulo de Pascal, o también llamados coeficientes binomiales, de ahí el nombre de estas matrices, las cuales se obtienen al tomar las primeras  $n$  filas del triángulo de Pascal y rellenar de ceros a la derecha, quedando así como una matriz triangular inferior. Haciendo uso de las propiedades combinatoriales y de conceptos básicos del Álgebra se demuestran algunos teoremas y propiedades de estas matrices.

El segundo capítulo se centra en cuatro pruebas sobre la identidad  $LU = S$ , conocida en el Álgebra Lineal como descomposición matricial, donde  $L$  y  $U$  son matrices triangulares inferior y superior respectivamente con características especiales y  $S$  resulta tan especial como ellas. Estas cuatro pruebas consisten en verificar esta identidad utilizando coeficientes binomiales, trayectorias en un grafo, la recursión de Pascal y el significado funcional de los coeficientes. Aquí son importantes la noción de número y sus diversas propiedades como: potencias, logaritmos y exponencial, el análisis de temas conocidos en el cálculo diferencial y vectorial, y series. También se introducen temas que nos son familiares como la reducción por renglones de una matriz, valores y vectores propios.

En el último capítulo veremos como aparecen de forma aplicada las matrices de Pascal en los números de Stirling y los números de Bernoulli y la relación existente entre estos números.

---

\*Tesis

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Sofía Pinzón Durán.

**TITLE:** PASCAL MATRICES\*

**AUTHOR:** ÉLVER CRUZ POVEDA\*\*

**KEY WORDS:** Pascal's Matrix, Pascal's triangle, graphs, inverse, exponential function, Stirling numbers, Bernoulli numbers.

## DESCRIPTION

The Pascal Matrices are constructed based on the coefficients that appear at the well-known Pascal's triangle, or also called binomial coefficients, and consequently their name, which are obtained when taking the first  $n$  lines of the Pascal's triangle and refilling with zeros to the right, remaining as an inferior triangular matrix. Making use of combinatorial properties of these matrices are demonstrated.

The second chapter focuses on four proofs about the  $LU = S$ , known at the Linear Algebra as matrixial decomposition, where  $L$  and  $U$  are inferior and superior triangular matrices respectively with special characteristics and  $S$  results as special as them. These four proofs consist of verifying this identity using binomial coefficients, trajectories in a graph, the Pascal's recursion and coefficients functional meaning. The notion of number and its diverse properties such as: powers, logarithms and exponential, the analysis of known topics in the differential and vectorial calculus, and series are important here. Familiar topics to us such as the matrix reduction by lines, proper values and vectors are also introduced.

In the last chapter we will see how the Pascal matrices appear in an applied way in the Stirling numbers and Bernoulli numbers and the existent relationship between these numbers.

---

\*Thesis

\*\*Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Sofía Pinzón Durán.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>4</b>
1.1. Triángulo de Pascal . . . . .	6
1.2. Matriz de Pascal . . . . .	8
1.3. Inversa de una matriz de Pascal . . . . .	8
<b>2. MATRICES DE PASCAL</b>	<b>17</b>
2.1. Factorización LU de A . . . . .	17
2.2. Prueba por coeficientes binomiales . . . . .	20
2.3. Prueba por gráficas . . . . .	21
2.4. Prueba por eliminación Gaussiana . . . . .	27
2.5. Los coeficientes de $(1 + x)^n$ tienen un significado funcional . . . . .	31
2.5.1. Potencias, Inversa y Logaritmo de L . . . . .	31
2.5.2. Valores Propios . . . . .	32
2.5.3. Prueba por igualdad de funciones . . . . .	34
<b>3. LOS NUMEROS DE STIRLING Y LOS NUMEROS DE BERNOULLI</b>	<b>37</b>
3.1. Los números de Stirling . . . . .	37
3.2. Matrices de Pascal y los números de Stirling . . . . .	40
3.3. Números de Bernoulli . . . . .	46
3.4. Las matrices de Pascal y los números de Bernoulli . . . . .	47

# Introducción

En este trabajo estudiamos las matrices de Pascal y sus relaciones con algunos tópicos matemáticos. Primero la matriz de Pascal aparece cuando se estudia un problema típico en probabilidad el cual consiste en calcular la probabilidad de que cualquier evento suceda. Supongamos que la probabilidad de que al lanzar una moneda y de que esta caiga cara sea  $p$  y la probabilidad de que no sea cara sea  $1 - p$ , entonces en una sucesión de  $n$  lanzamientos la probabilidad de que un evento suceda está dada por la expresión

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i, \quad 0 \leq a_i \leq \binom{n}{i}. \quad (1)$$

donde los  $a_i$  son enteros y dependen del evento en cuestión. La expresión (1) lleva implícita la noción de combinatoria asociada al teorema del binomio y por lo tanto también está relacionada con el triángulo de Pascal.

La matriz de Pascal de tamaño  $n \times n$  es obtenida tomando las primeras  $n$  filas del triángulo de Pascal y rellenando de ceros a la derecha. Específicamente la matriz de Pascal  $P$  de tamaño  $n \times n$  está definida por

$$P = p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el primer capítulo introducimos la noción de matriz de Pascal y algunos ejemplos ilustrativos, estudiamos la caracterización de la matriz inversa de una matriz de Pascal la cual genera propiedades de linealidad que también se cumplen para las matrices de Pascal y profundizamos en representaciones matriciales haciendo uso de la serie de Maclaurin que a su vez satisfacen propiedades de suma e inversa de la función exponencial ordinaria. El objetivo aquí es determinar que dado un polinomio en  $p$  con coeficientes enteros, cuando este polinomio representa la probabilidad de que algún evento suceda.

El segundo capítulo presenta el desarrollo y análisis del artículo estudiado por Alan Edelman y Gilbert Strang. “Pascal Matrices”, en este artículo se estudian cuatro pruebas para

demostrar que dada una matriz  $S$  con condiciones específicas puede ser factorizada de la forma  $S = LU$ , donde  $L$  y  $U$  son matrices triangulares inferior y superior respectivamente, por ejemplo el caso particular para  $n = 4$ . sea  $S_4, L_4, U_4$  matrices cuadradas dadas así:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una característica especial de  $S$  es que su determinante es uno, esto se deduce dado que el  $\det L_n = 1$  y  $\det U_n = 1$ , la otra característica es que los coeficientes del triángulo de Pascal aparecen en ella en forma diagonal.

Las cuatro pruebas que vamos a trabajar son:

1. Verificar la identidad  $S_n = L_n U_n$  utilizando los coeficientes binomiales.
2.  $S_n, L_n, U_n$  cuentan trayectorias en una gráfica dirigida.
3. La fórmula de Pascal genera las matrices  $L_n, U_n, S_n$ .
4. Los coeficientes de  $(1+x)^n$ , tienen un significado funcional.

En la primera prueba se hace uso de los coeficientes binomiales y de alguna de sus propiedades para establecer de forma natural la identidad  $S_n = L_n U_n$ .

La segunda prueba consiste en verificar la identidad  $S_n = L_n U_n$  por medio de grafos como en el de la figura 1. en los que de forma ordenada y natural se pueden realizar operaciones

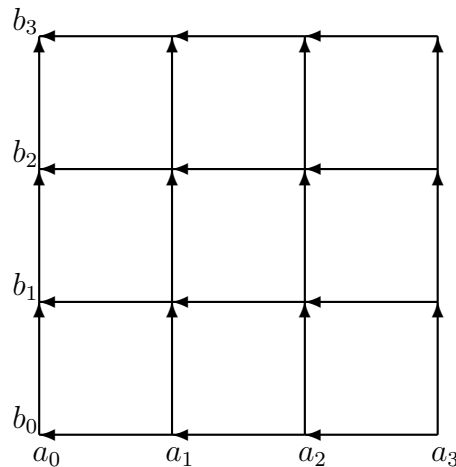


Figura 1:

y establecer reglas que determinen la veracidad de la igualdad, de tal forma que se pueda generalizar la prueba.

La prueba 3 se basa en el método de eliminación Gaussiana y de algunas fórmulas recursivas de Pascal.

La última prueba presenta algunos conceptos previos de potenciación, inversa y logaritmo. En esta prueba se relaciona la identidad  $S = LU$  con la serie de Taylor. La idea principal de esta prueba es verificar que para muchos vectores  $v$  de la forma  $v = (1, x, x^2, x^3, \dots)$ .  $Sv = LUv$  para esto se recurre al cálculo diferencial.

El último capítulo muestra algunas aplicaciones de las matrices de Pascal en una clase especial de números como los números de Stirling y los números de Bernoulli. El primer apartado está dedicado a una pequeña historia de los números de Stirling y sus caracterizaciones, luego presentamos su conexión con las matrices de Pascal.

Finalmente se habla de la vida del autor de los números de Bernoulli, Jacob Bernoulli. También se ve la relación de los números de Bernoulli con las matrices de Pascal a partir de los números de Stirling.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Comencemos estudiando un problema clásico en probabilidad. Supongamos que la probabilidad de que al lanzar una moneda y que esta caiga en cara sea  $p$  y la probabilidad de que no sea cara sea  $1 - p$ . Entonces en una sucesión de  $n$  lanzamientos, la probabilidad de que un evento suceda está dada por una expresión de la forma:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i, \quad 0 \leq a_i \leq \binom{n}{i} \quad (1.1)$$

en donde los  $a_i$  son enteros y dependen del evento en cuestión, ver [7].

Nuestro estudio gira alrededor de la expresión (1.1), así que primero recordaremos algunas nociones básicas como el teorema del binomio y las propiedades de los coeficientes binomiales o equivalentemente sus propiedades combinatoriales.

El teorema del binomio proporciona la expansión de las potencias de un binomio de la siguiente forma:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n; \quad n, k \in \mathbb{N},$$

donde  $\binom{n}{k}$  es un número combinatorio, el cual consiste en seleccionar  $k$  elementos distintos de  $n$  objetos posibles sin importar el orden y está dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Con base en el teorema del binomio y propiedades de los coeficientes binomiales se fundamenta el conocido triángulo de Pascal, que veremos en la siguiente sección.

Recordemos algunas propiedades de estos coeficientes.

**Propiedad 1.1.** Si  $n, r \in \mathbb{Z}^+$ , con  $0 \leq r \leq n$ , entonces  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

*Demostración.* Haciendo uso de la fórmula de combinación se tiene.

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-r} &= \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \binom{n}{r}. \end{aligned}$$

■

**Propiedad 1.2.** Para cualquier entero positivo  $n$  y  $r = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ .

*Demostración.* De nuevo utilizando la fórmula de combinación se tiene:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\ &= \frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r-1)!(n-r)} \\ &= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{r(n-1)! + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!(r + (n-r))}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \binom{n}{r}. \end{aligned}$$

■



Esto se fundamenta de acuerdo a las propiedades combinatoriales.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Veamos como se construye el triángulo, a partir de estas propiedades por ejemplo en la fila 2

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2.$$

En la fila 3 procedemos de la siguiente forma

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 2 + 1 = 3.$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3.$$

Los valores en los extremos de cada fila corresponden a las propiedades triviales de combinatoria:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

También podemos ver que en el triángulo de Pascal aparecen los números triangulares  $(1, 3, 6, 10, \dots)$ , tetraédricos  $(1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots)$ , etc.

Se han estudiado multitud de propiedades numéricas del triángulo, criterios de divisibilidad, algoritmos para calcular restos al dividir por un número concreto, etc. Se podría seguir explorando y hacer un análisis más exhaustivo pero este no es el caso objetivo de esta monografía.

Regresemos a la expresión (1.1) y supongamos que  $p$  representa la probabilidad de éxito,  $(1-p)$  representa la probabilidad de fracaso, y  $n$  la cantidad de lanzamientos.

Por ejemplo la probabilidad de obtener exactamente dos caras en seis lanzamientos sería.  $\binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$ .

Aquí  $n = 6$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $1-p = \frac{1}{2}$  ya que la probabilidad de éxito o fracaso se da por el 50% respectivamente, y el término  $\binom{6}{2}$  al  $a_i$  que depende del evento en cuestión. Para ilustrar mejor la fórmula veamos otro ejemplo, calcular la probabilidad de obtener al menos 4 caras en 6 lanzamientos de una moneda.

Observemos que cabe la posibilidad de que caigan 4 caras, 5 caras o 6 caras, por esta razón se procede a sumar las tres posibilidades así:

$$\begin{aligned} \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 &= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

De esta forma podemos familiarizarnos un poco más con la expresión (1.1).

Volviendo al inicio, un problema inverso del planteado consistiría en dado un polinomio en  $p$  con coeficientes enteros, determinar si este polinomio representa la probabilidad de que algún evento suceda.

La respuesta a esta pregunta involucra ciertas matrices a las cuales se les da el nombre de matrices de Pascal.

---

## 1.2. Matriz de Pascal

---

Una matriz de pascal de tamaño  $n \times n$  es una matriz obtenida tomando las primeras  $n$  filas del triángulo de pascal y rellenando de ceros a la derecha para completar la matriz. Por ejemplo las 5 primeras matrices de pascal son

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Específicamente la matriz de Pascal  $P$  de tamaño  $n \times n$  está definida por

$$P = p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

---

## 1.3. Inversa de una matriz de Pascal

---

Es claro que la matriz de Pascal es una matriz triangular inferior, por lo tanto su determinante es el producto de los elementos de su diagonal, y este es diferente de cero, luego la matriz de Pascal es una matriz no singular, es decir es invertible. Por ejemplo al calcular la inversa para  $n = 3, 4, 5$  se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que la matriz inversa de cada una de las matrices de Pascal consideradas tiene la misma forma de las matrices de Pascal solo que con signos intercalados.

Ahora analicemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** *Sea  $P$  una matriz de Pascal y  $Q$  la matriz de tamaño  $n \times n$  definida por:*

$$Q_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si } i \geq j, \text{ con } 1 \leq i, j \leq n. \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces  $P^{-1} = Q$ .

*Demostración.* Se tiene que  $P_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

así es claro que  $(PQ)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$

Veamos porque  $(PQ)_{ij} = 0$ , si  $i > j$ . Supongamos que  $i > j$  y sea  $i = j + l$ , con  $l > 0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} (PQ)_{ij} &= \sum_{k=0}^l P_{j+l, j+k} Q_{j+k, j} \\ &= \sum_{k=0}^l \binom{j+l-1}{j+k-1} \binom{j+k-1}{j-1} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(j+l-1)!}{((j+l-1) - (j+k-1))!(j+k-1)!} \frac{(j+k-1)!}{((j+k-1) - (j-1))!(j-1)!} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(j+l-1)!}{(l-k)!(j+k-1)!} \frac{(j+k-1)!}{k!(j-1)!} (-1)^k \\ &= \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{(l-k)!k!} \\ &= \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!l!} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!k!} (-1)^k \end{aligned}$$

$$= \binom{j+l-1}{j-1} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k.$$

Aplicando el Teorema del binomio

$$\begin{aligned} (PQ)_{ij} &= \binom{j+l-1}{j-1} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k \\ &= \binom{i-1}{j-1} (1-1)^l = 0. \end{aligned}$$

■

El Teorema 1.1 tiene una generalización natural. Sea  $x$  cualquier número real no nulo se define.

$$P[x] = \begin{cases} (x)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por definición  $P[0]$  es igual a la matriz identidad. Si se adoptara la convención de que  $0^0 = 1$ , entonces en la fórmula dada por  $P[x]$ , calculada en  $x = 0$  sería igual a la matriz identidad.

Además  $P[1] = P$  y por el Teorema 1.1,  $P[-1] = P^{-1}$ . En particular el caso  $n = 4$  resulta.

$$P[x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiemos algunas propiedades interesantes de este tipo de matrices.

**Teorema 1.2.**  $P[x]P[y] = P[x+y]$ , para cualesquier números reales  $x, y$ .

*Demostración.* Si  $x = 0$  y  $y = 0$  la afirmación es trivial, puesto que  $P[0]$  es igual a la matriz identidad, entonces  $P[0]P[0] = P[0+0]$ . Cuando  $x$  o  $y$  son cero, digamos  $y = 0$ ,  $P[x]P[y] = P[x]I = P[x] = P[x+0] = P[x+y]$ . Si tanto  $x$  como  $y$  son diferentes cero, entonces la demostración es similar al Teorema 1.1.

Supongamos que  $i > j$  y sea  $i = j + l$ , con  $l > 0$ . Entonces

$$(P[x]P[y])_{ij} = \sum_{k=0}^l P[x]_{j+l, j+k} P[y]_{j+k, j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} \binom{j+l-1}{j+k-1} y^k \binom{j+k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} y^k \frac{(j+l-1)!}{((j+l-1)-(j+k-1))!(j+k-1)!} \\
&\quad \frac{(j+k-1)!}{((j+k-1)-(j-1))!(j-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} y^k \frac{(j+l-1)!}{(l-k)!(j+k-1)!} \frac{(j+k-1)!}{k!(j-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} y^k \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!} \frac{1}{(l-k)!k!} \\
&= \frac{(j+l-1)!}{(j-1)!l!} \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} y^k \frac{l!}{(l-k)!k!} \\
&= \binom{j+l-1}{j-1} \sum_{k=0}^l x^{(l-k)} y^k \binom{l}{k} \quad (\text{utilizando el teorema del binomio}) \\
&= \binom{i-1}{j-1} (x+y)^l \\
&= \binom{i-1}{j-1} (x+y)^{i-j} \\
&= P[x+y]_{ij}.
\end{aligned}$$

■

**Corolario 1.1.** Para cualesquier enteros  $j$  y  $k$ , con  $k \neq 0$ ,

1.  $P^j = P[j]$ ,
2.  $(P[j/k])^k = P^j$ .

*Demostración.* 1. Por inducción sobre  $j$  sabemos que  $P[0] = I = P^0$ ,  $P[1] = P = P^1$ .  
Supóngase que  $P^j = P[j]$  para algún  $j$ , entonces debemos demostrar que  $P^{j+1} = P[j+1]$ .

$$\begin{aligned}
P^{j+1} &= P^j P \\
&= P[j] P \\
&= P[j] P[1] \quad \text{aplicando el Teorema 1.2} \\
&= P[j+1].
\end{aligned}$$

2. Igualmente aplicamos el Teorema 1.2

$$(P[j/k])^k = (P[j/k])(P[j/k])(P[j/k]) \cdots (P[j/k]) \quad (k - \text{veces})$$

$$\begin{aligned}
&= P[j/k + j/k + j/k + \cdots + j/k] \quad (k - \text{veces}) \\
&= P[k(j/k)] \\
&= P[j] \\
&= P^j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $(P[j/k])^k = P^j$ . ■

La parte 2 del Corolario 1.1 muestra que  $P[j/k] = P^{j/k}$ , por lo tanto para cualquier matriz de Pascal podemos hallar su raíz cuadrada, su raíz cúbica, etc. Por ejemplo para la matriz de Pascal de tamaño 4, su raíz cuadrada y su raíz cúbica son:

$$P^{\frac{1}{2}} = P[\frac{1}{2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{\frac{1}{3}} P[\frac{1}{3}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/27 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora si  $x \in \mathbb{I}$ , se espera que se pueda hacer una representación a  $P[x]$ . ¿De qué forma lo podemos hacer?. Haciendo uso de la exponencial de matrices es una buena alternativa. La exponencial de matrices está definida simplemente conectando matrices con la serie de Maclaurin.

Recordemos que una serie de Maclaurin es una forma de expresar funciones suaves. Por ejemplo, sea  $f$  una función suave entonces :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

representa la serie de Maclaurin cuando  $a = 0$ .

Por ejemplo encontremos la serie de Maclaurin para la función cos.

$$f(x) = \cos(x); a = 0;$$

$$f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -\sin(x); f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = \cos(x); f''(0) = 1;$$

$$f'''(x) = -\sin(x); f'''(0) = 0;$$

$$f''''(x) = \cos(x); f''''(0) = 1, \text{ luego } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Ahora encontremos la serie de Maclaurin para la función  $e$

$$\text{Sea } f(x) = e^x; a = 0;$$

$$f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = e^x; f''(0) = 1, \text{ luego } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Generalizando, en el caso de considerar  $A$  una matriz cuadrada.

$$e^A = 1 + A + A^2/2 + A^3/3! + \dots + A^k/k! + \dots$$

Además la exponencial de matrices tiene muchas de las propiedades de la función exponencial ordinaria. Esto se puede ver en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada. Entonces*

- a) *Para cualesquier números  $s$  y  $t$ ;  $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ .*  
 b)  *$e^A$  es invertible y  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .*  
 c)  *$(d/dt)e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ , donde  $(d/dt)e^{tA}$  es la matriz resultante de derivar con respecto a  $t$  cada entrada de  $e^{tA}$ .*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{sA}e^{tA} &= \exp(\ln(e^{sA}e^{tA})) \quad \text{utilizando propiedades de la función logaritmo tenemos} \\ &= \exp(\ln e^{sA} + \ln e^{tA}) \quad \text{utilizando propiedad de ln} \\ &= \exp(sA + tA) \\ &= e^{sA+tA} \\ &= e^{(s+t)A} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ .

- b) Para probar que  $e^A$  es invertible debe existir  $e^{-A}$  tal que  $e^Ae^{-A} = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} e^Ae^{-A} &= e^{(A+(-A))} \quad \text{haciendo uso del inciso a} \\ &= e^{(1+(-1))A} \quad \text{por propiedad} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $e^A$  es invertible y  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

- c) Supongamos que hay una matriz  $M$  tal que  $P[x] = e^{xM}$ , entonces.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}P[x] &= Me^{xM} \\ &= MP[x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \frac{d}{dx}P[x]|_{x=0} &= MP[0] \\ &= MI \end{aligned}$$

$$= M.$$

Así notamos que a lo más hay una matriz  $M$  tal que  $P[x] = e^{xM}$ .

Por ejemplo en el caso de  $n = 4$  se puede hallar el único valor posible para  $M$

$$\frac{d}{dx}P[x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 2 & 0 & 0 \\ 3x^2 & 6x & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{como } M = \left. \frac{d}{dx}P[x] \right|_{x=0}, \text{ entonces } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos indica como debemos seleccionar  $M$ .

En general podemos definir a  $M$  de la siguiente forma.

$$M_{ij} = \begin{cases} j, & \text{si } i = j + 1 \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Luego el inciso c) queda demostrado y así todo el Teorema. ■

**Lema 1.1.** Las entradas de  $M^k$  están dadas por las fórmula

$$(M^k)_{ij} = \begin{cases} \frac{(i-1)!}{(j-1)!}, & \text{si } i = j + k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.2)$$

para todo  $k$  entero positivo.

*Demostración.* Analicemos dos posibilidades para  $k < n$  y para  $k \geq n$ .

Para  $k < n$  se tiene la fórmula (1.2).

Para  $k \geq n$  todas las entradas de  $M^k$  son cero ya que  $i$  no puede ser mayor que  $n$  y es precisamente lo que se da en este caso, puesto que  $j \geq 1$ . Por lo tanto todo  $k$  entero positivo satisface la fórmula. ■

**Teorema 1.4.**  $P[x] = e^{xM}$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , Con  $M$  como se definió en el Lema 1.1.

*Demostración.* Si  $x = 0$ ;  $P[0] = e^{xM} = I$ .

Supongamos que  $x \neq 0$ . Por el Lema 1.1,  $M^k = 0$  para  $k \geq n$ , la serie infinita para  $e^{xM}$  se reduce a la siguiente suma finita  $e^{xM} = I + xM + \frac{(x^2M^2)}{2!} + \dots + \frac{(x^{n-1}M^{n-1})}{(n-1)!}$ .

Aplicando el Lema 1.1 se tiene

$$\begin{aligned}
e^{xM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \dots & 0 \\ x^3 & 3x^2 & x & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-1} & ax^{n-2} & bx^{n-3} & cx^{n-4} \dots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con  $a, b, c$  enteros.

Claramente esta es una matriz triangular inferior y las entradas diagonales son todas uno. Ahora supónganse que  $i > j$  y sea  $k = i - j$ , entonces la única matriz en la suma sobre la cual tiene una entrada  $ij$  no-nula es  $\left(\frac{x^k}{k!}\right)M^k$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(e^{xM})_{ij} &= \frac{x^k}{k!} (M^k)_{ij} \\
&= x^{i-j} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \\
&= x^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \\
&= (P[x])_{ij}.
\end{aligned}$$

En conclusión  $P[x] = e^{xM}$ . ■

Usando el Teorema 1.3 y el Teorema 1.4, se puede dar una prueba de la linealidad como en el Teorema 1.2

$$\begin{aligned}
P[x]P[y] &= e^{xL}e^{yL} \\
&= e^{[x+y]L} \\
&= P[x+y].
\end{aligned}$$

Ahora regresemos al problema que implica repetidas vueltas de una sola moneda.

Si iniciamos con la fórmula para la probabilidad de un evento y se expande  $(1-p)^i$ , por el teorema del binomio encontramos que

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} \sum_{j=0}^i (-p)^{i-j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i p^{n-i} a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n p^{n-i} a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j}.
\end{aligned}$$

Así si se define,

$$b_j = \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j}.$$

Entonces se tiene

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i = \sum_{j=0}^n b_j p^{n-i}.$$

Las relaciones entre las  $a_i$ -ésimas, y  $b_j$ -ésimas salidas que implican la matriz de pascal  $(n+1) \times (n+1)$ , se ven a continuación.

Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  los vectores fila definidos así.

$\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n)$ , luego por definición de los  $b_j$  se tiene.  
 $\vec{b} = \vec{a}P[-1] = \vec{a}P^{-1}$ .

Así dado un vector  $\vec{b}$  de enteros, los cuales son los coeficientes del polinomio en  $p$ , de grado  $n$  se puede recubrir el vector de coeficientes  $\vec{a}$  con la fórmula para la probabilidad de un evento simplemente multiplicando por la matriz de pascal,  $\vec{a} = \vec{b}P$ .

Una vez tenemos  $\vec{a}$ , se puede decir si el polinomio original era la fórmula para la probabilidad de algún evento, sólo examinando sí,

$0 \leq a_i \leq \binom{n}{i}$ , para  $0 \leq i \leq n$ .

# Capítulo 2

## MATRICES DE PASCAL

El triángulo de pascal nos es familiar y las propiedades combinatoriales en las que se fundamenta las conocemos y las hemos aplicado en problemas simples de probabilidad, por lo tanto es el eje central para analizar algunas pruebas importantes en el presente capítulo.

También necesitamos algunos conceptos importantes con respecto a las matrices y sus diversas representaciones, en particular estamos interesados en la factorización de matrices en forma  $LU$ .

---

### 2.1. Factorización LU de A

---

Consiste en aplicar el método de eliminación Gaussiana a las filas de una matriz hasta reducirla al producto de una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y una matriz triangular superior.

En nuestro caso trabajamos con matrices cuadradas.

Por ejemplo encontrar la matriz triangular inferior  $L$  con unos en la diagonal y una matriz triangular superior  $U$  tal que  $A = LU$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Primero debemos reducir a la forma escalonada por renglones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \longrightarrow R_3 - R_1, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Hemos reducido  $A$  a una matriz triangular superior  $U$ . Ahora haciendo uso de las matrices elementales se tiene.

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto tomando las inversas de las dos matrices elementales se obtiene.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= LU. \end{aligned}$$

Observamos que la matriz  $A$  se ha descompuesto en una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior con unos en su diagonal.

Estamos interesados en que la matriz triangular superior también tenga unos en la diagonal y por esta razón la matriz  $A$  tiene características especiales.

Iniciemos por poner el triángulo de coeficientes binomiales dentro de una matriz.

Para una matriz de  $4 \times 4$ , podemos construir la matriz triangular inferior y la matriz triangular superior donde aparezcan de forma natural los coeficientes binomiales, así:

Sea

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al hacer el producto de estas dos matrices obtenemos una matriz cuadrada de  $4 \times 4$ :

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Aquí se observa que la matriz  $S = LU$  también tiene los coeficientes binomiales en orden natural, tomando las diagonales del triángulo de Pascal de a 4 números, además  $S$  es una matriz simétrica y su determinante es 1.

Esto no es extraño puesto que el determinante de una matriz triangular con unos en su diagonal es precisamente el producto de su diagonal, luego el  $\det L_4 = 1$ , igualmente el  $\det U_4 = 1$ . De ahí que el  $\det S_4 = 1$ .

Veamos como funciona para una matriz cuadrada de tamaño  $5 \times 5$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al hacer el producto  $L_5 U_5$  se tiene:

$$S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto cumple el mismo hecho que en  $S_4$ . Se quiere demostrar que cualquier matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$  con las características mencionadas anteriormente, se tiene que  $L_n U_n = S_n$  y que  $(\det L_n)(\det U_n) = \det S_n = 1$ . El mayor interés del capítulo se centra en analizar desde varias perspectivas la identidad  $S = LU$ .

Concretamente se estudiarán cuatro pruebas al respecto.

1. Verificar la identidad  $S = LU$  haciendo uso de los coeficientes binomiales
2. Los coeficientes de  $S, L, U$  como trayectorias en una gráfica dirigida.
3. La recursión de Pascal genera las matrices  $L, U, S$ .
4. Los coeficientes de  $(1+x)^n$ , tienen un significado funcional.

## 2.2. Prueba por coeficientes binomiales

Se debe probar que  $S = LU$ , haciendo uso de los coeficientes binomiales.

Inicialicemos las matrices  $L$  y  $U$  con fila  $i = 0$  y columna  $j = 0$  es decir

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U_{kj} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

donde la  $(i, k)$ -ésima entrada de  $L$  es  $\binom{i}{k}$ , al multiplicar la fila  $i$  de  $L$  por la columna  $j$  de  $U$  con  $U = L^T$ , (donde  $L^T$  es la matriz transpuesta de  $L$ ) queremos verificar que:

$$\begin{aligned} \sum L_{ik} U_{kj} &= \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} \binom{j}{k} \\ &= \binom{i+j}{i} \\ &= S_{ij}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Debemos separar  $i + j$  objetos en dos grupos que contengan  $i$  objetos y  $j$  objetos respectivamente.

Si seleccionamos  $i - k$  objetos del primer grupo y  $k$  del segundo grupo, se habrán seleccionado  $i$  objetos de  $i + j$ . Veamos como.

La primera selección puede ser hecha en:  $\binom{i}{i-k} = \binom{i}{k}$  formas y la segunda selección de  $\binom{j}{k}$  formas, es decir  $i = 2k$ .

Así cualquier número  $k$  desde 0 hasta el  $\min(i, j)$  será admitido. Luego la ecuación queda.

$$\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i}. \tag{2.2}$$

Entonces la ecuación (2.2) es el producto de  $L$  y  $U$ . Para completar la prueba se debe hacer una salvedad, los coeficientes son cero cuando  $k > i$  y  $k > j$ .

De hecho ya se está haciendo esta salvedad cuando admitimos que  $k$  tome el valor hasta el  $\min(i, j)$ . Veamos un ejemplo.

$$\text{Sea } L_{ik} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } U_{kj} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Luego  $S_{ij} = \binom{i+j}{i}$ , en particular  $S_{00} = \binom{0+0}{0} = 1$ ,  $S_{01} = \binom{0+1}{0} = 1$ , así sucesivamente,

$$S_{0n} = \binom{0+n}{0} = 1.$$

Para  $S_{10} = \binom{1+0}{1} = 1$  y así sucesivamente  $S_{n0} = \binom{n+0}{n} = 1$ ,  $S_{11} = \binom{1+1}{1} = 2$ ,  $S_{12} = \binom{1+2}{1} = 3$ , por lo tanto:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 3 & 6 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & x & \dots & y \end{pmatrix}$$

Esto se puede ver haciendo el producto  $LU$ , teniendo en cuenta las condiciones de  $k$ . Examinemos  $S_{23}$  que es el resultado de multiplicar la fila 2 de  $L$  por la columna 3 de  $U = L^T$ . Entonces

$$L_{2k}U_{k3} = a_{20}b_{03} + a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = \binom{2}{0}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{2} = 10.$$

Así podemos encontrar cualquier  $(i, j)$  ésima entrada de  $S$ .

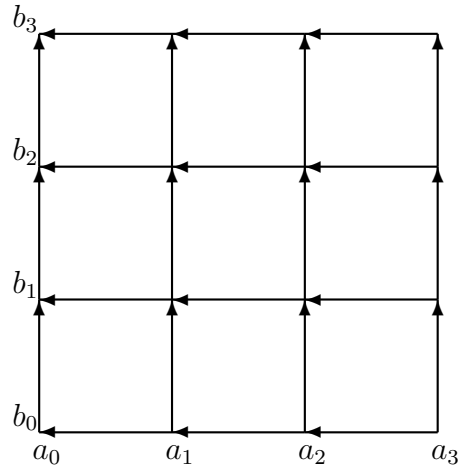
### 2.3. Prueba por gráficas

El objetivo es verificar por medio de grafos dirigidos que el producto entre  $L$  y  $U$  es  $S$ . El primer paso consiste en identificar  $S_{ij}$  como el número de trayectorias o caminos que van desde  $a_i$  hasta  $b_j$ , con  $i, j \in \mathbb{N}$  en el grafo orientado de la figura 2.1.

Considere el grafo dirigido donde tomamos dos ejes, uno horizontal donde se ubican los  $a_i$  y el vertical que corresponde a los  $b_j$ . Las flechas se orientan de abajo hacia arriba (norte-sur) y de derecha a izquierda (oriente-occidente). En la figura 2.1 aparece el grafo correspondiente a  $n = 3$ .

Por un camino o una trayectoria en este grafo consideramos una secuencia de flechas que van desde cualquier  $a_i$  hasta cualquier  $b_j$  con la condición de preservar la orientación (sentido de la flecha).

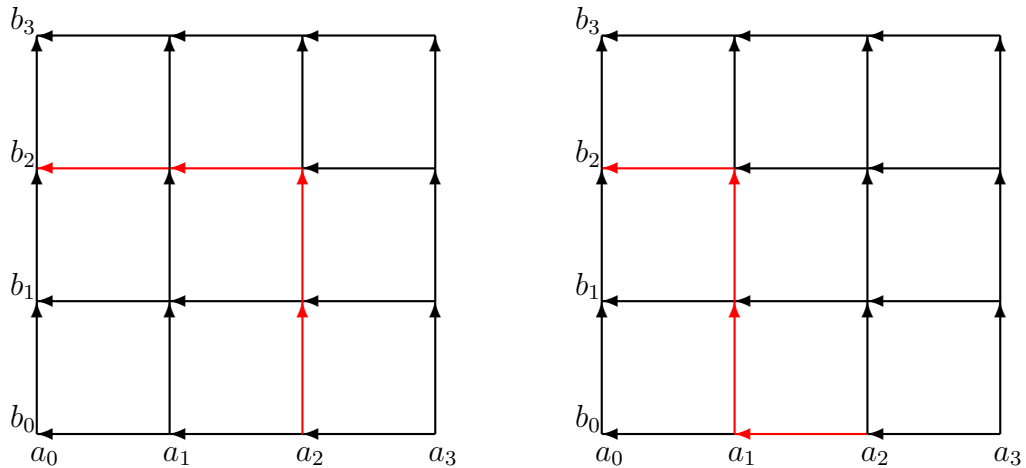
No será difícil encontrar el número de trayectorias que hay de un punto  $a_i$  a un punto cualquiera, por ejemplo, se puede ver que desde el punto  $a_0$  al punto  $b_2$  solo hay una trayectoria, es decir solo hay una manera de ir de  $a_0$  a  $b_2$  siguiendo el orden de las flechas. Este resultado se puede generalizar, es decir que solo existe una trayectoria que va desde

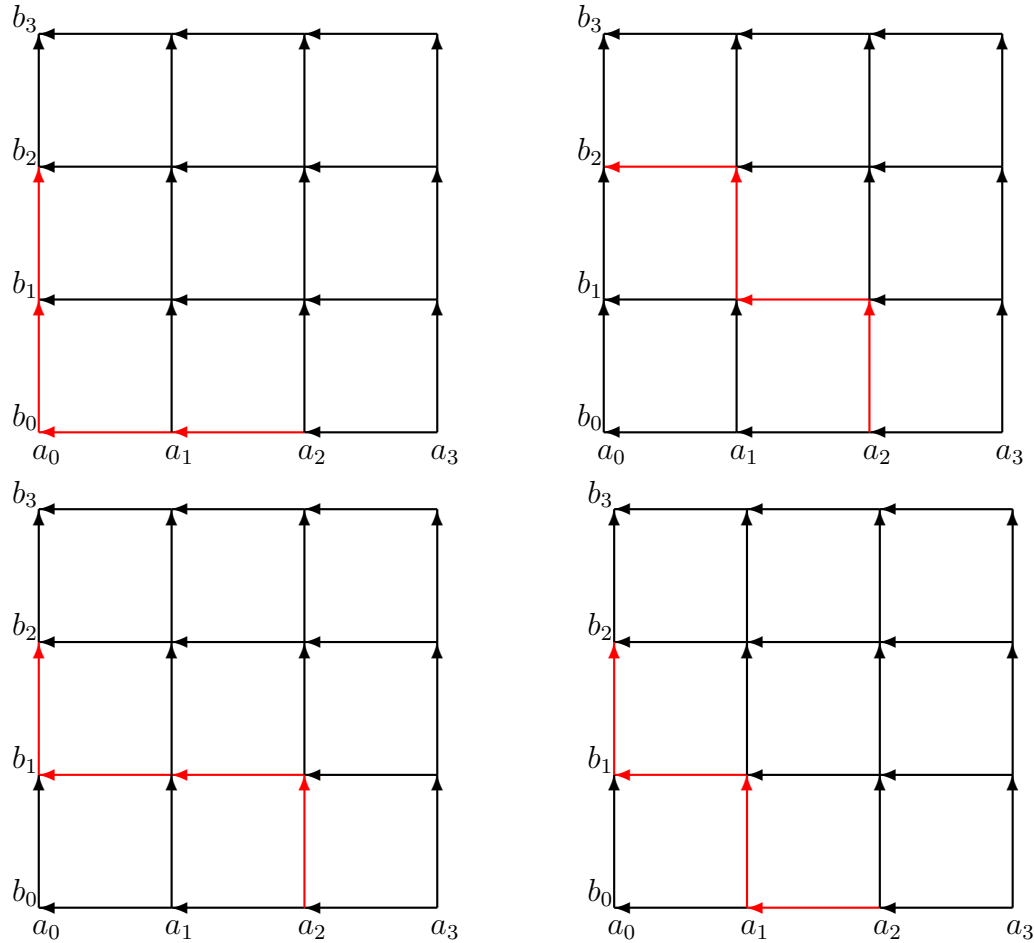
Figura 2.1: grafo para  $n = 3$ 

$a_0$  hasta  $b_j$ , la de  $a_0$  hacia arriba, por lo tanto  $S_{0j} = 1$ , de igual manera existe una trayectoria que va desde cualquier  $a_i$  a al punto  $(0, 0)$  en donde está situado  $b_0$ . Luego  $S_{i0} = 1$ . A partir de esa fila y esa columna el resto de  $S$  está construida recursivamente basada en la regla de Pascal;  $S_{(i-1,j)} + S_{(i,j-1)} = S_{ij}$ .

Tomemos por ejemplo  $S_{22}$ , que según la primera prueba por coeficientes binomiales  $S_{22} = \binom{4}{2} = 6$ .

Por lo tanto deben existir 6 trayectorias desde  $a_2$  a  $b_2$ . Siguiendo el orden natural de las flechas, las trayectorias son:





Vemos que tres caminos comienzan en  $a_2$  y pasan por  $a_1$  y los otros tres comienzan en  $a_2$  y van hacia arriba. Los caminos que van desde  $a_1$  hasta  $b_2$  corresponden a los tres que representa  $S_{12}$ , generalizando, los caminos que comienzan en  $a_i$  y pasan por  $a_{i-1}$  hacia  $b_j$  por inducción corresponden a  $S_{i-1,j}$ . Los caminos que comienzan de  $a_i$  y van para arriba hacia  $b_j$  están contados por  $S_{i,j-1}$  y así la regla de Pascal es confirmada.

Ahora veamos que papel juegan la matriz triangular inferior y la matriz triangular superior en la gráfica.

Si trazamos una línea de 45 grados como se muestra en la figura 2.4. observamos que esta figura tiene en su fondo una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

Queremos demostrar que  $L_{ik}$  cuenta las trayectorias desde  $a_i$  hasta al punto  $(k, k)$  sobre diagonal, entonces  $U_{kj}$  contaría las trayectorias desde la línea de 45 grados hasta  $b_j$ .

El razonamiento a seguir es de nuevo por inducción. Solo existe una trayectoria desde cualquier punto  $a_i$  al punto  $(0, 0)$  sobre la diagonal. Es fácil verlo, simplemente es la trayectoria que siguen de forma natural las flechas que van de izquierda a derecha.

Luego  $L_{i0} = 1$ , también  $L_{ii} = 1$ , pues solo existe una trayectoria desde el punto  $a_i$  al punto  $(i, i)$  sobre la diagonal que es la trayectoria simple desde  $a_i$  hacia arriba hasta  $(i, i)$ .

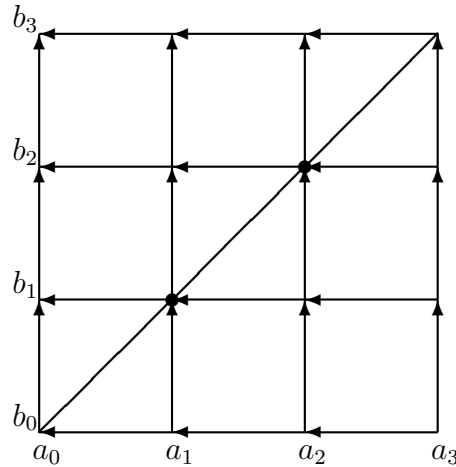


Figura 2.2: grafo de matrices triangulares

La fórmula recursiva de Pascal  $L_{ik} = L_{(i-1,k)} + L_{(i-1,k-1)}$  se verifica cuando el triángulo  $(i-1, k-1, k)$  está ubicado en  $L$ .

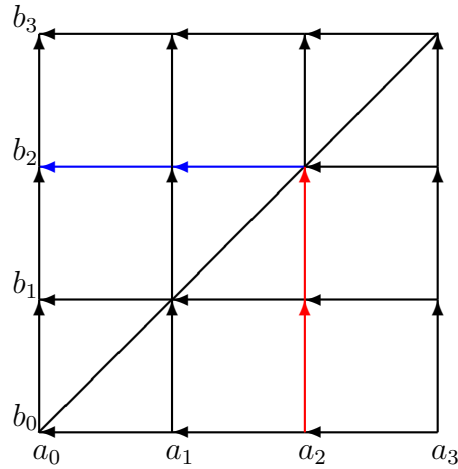
Por inducción supongamos que  $L_{(i-1,k)}$  cuenta las trayectorias que inician a la izquierda de  $a_i$  y van desde  $a_{i-1}$  al punto  $(k, k)$ . Las otras trayectorias desde  $a_i$  hasta  $(k, k)$  inician hacia arriba desde  $a_i$ . Si observamos el grafo un punto abajo y uno a la izquierda (a lo largo de la línea de 45 grados), podemos imaginar que esas trayectorias van desde  $a_{i-1}$  al punto  $(k-1, k-1)$ . Y por inducción estas son contadas por  $L_{(i-1,k-1)}$ . Similarmente  $U$  cuenta las trayectorias desde  $(k, k)$  a  $b_j$ .

Falta sólo comprobar que pegar las gráficas equivale a multiplicar  $L$  por  $U$ .

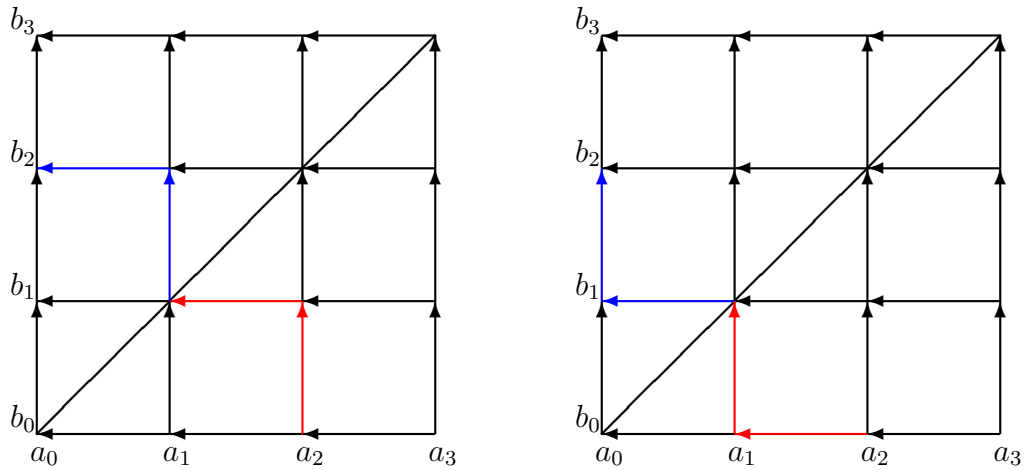
El término  $L_{ik}U_{kj}$  cuenta las trayectorias que van desde  $a_i$  a  $b_j$  a través del punto  $(k, k)$ . Entonces la suma sobre  $k$  cuenta todas las trayectorias y coinciden con  $S_{ij}$ .

Para el ejemplo citado anteriormente las 6 trayectorias desde  $a_2$  hasta  $b_2$  están dadas así para  $L$  y  $U$  respectivamente.

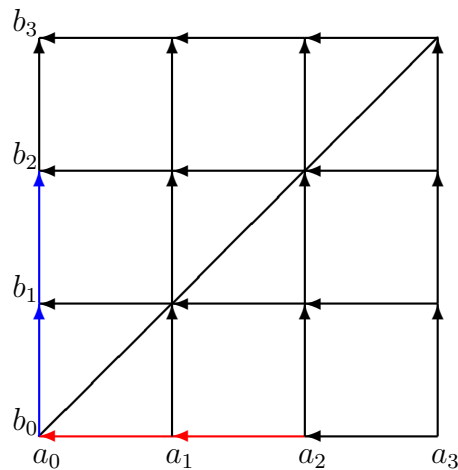
Según la regla de Pascal  $L_{ii} = 1$ , es decir para el caso en particular  $L_{22} = 1$ , la trayectoria que va desde  $a_2$  al punto  $(2, 2)$  sobre la diagonal y  $U_{22}$  va desde la trayectoria simple del punto  $(2, 2)$  sobre la diagonal a  $b_2$ . Luego  $L_{22}U_{22} = (1)(1) = 1$ .



Ahora veamos  $L_{21}U_{12}$ , como lo muestra la siguiente gráfica de  $a_2$  al punto  $(1, 1)$  existen 2 trayectorias y de  $(1, 1)$  a  $b_2$  existen también 2 trayectorias marcadas en color azul en el grafo por lo tanto  $L_{21}U_{12} = (2)(2) = 4$ .



Por último  $L_{20}U_{02} = (1)(1) = 1$ , como se ve en la gráfica a continuación



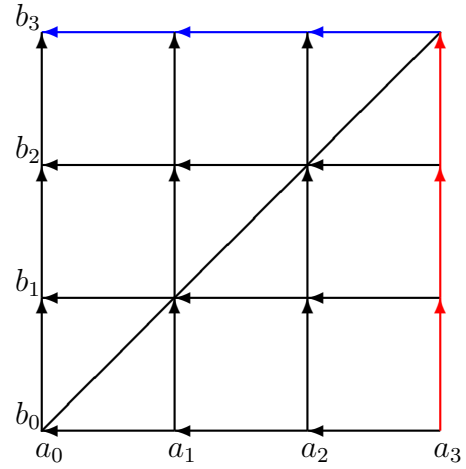
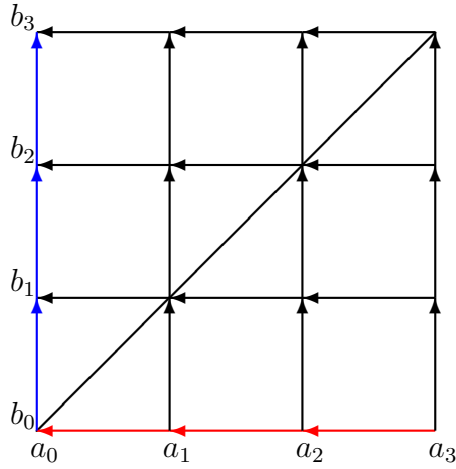
sumando estas trayectorias se tiene que.

$$L_{ik}U_{kj} = (1)(1) + (2)(2) + (1)(1) = 6 = S_{22}.$$

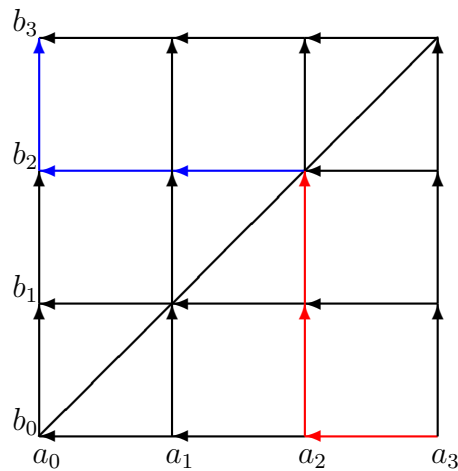
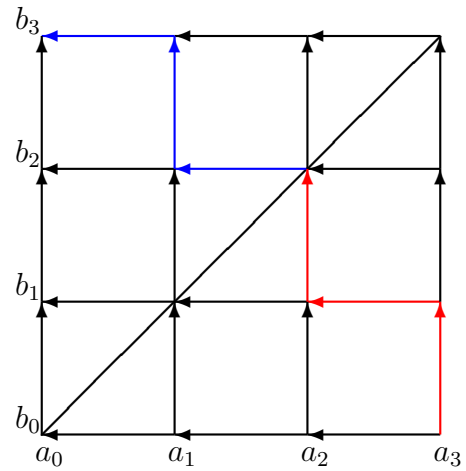
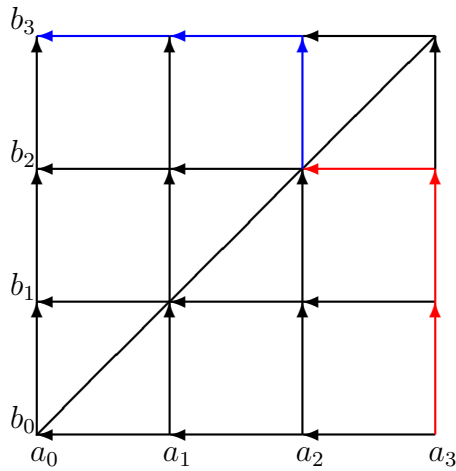
la cual corresponde al total de trayectorias que van desde  $a_2$  a  $b_2$ .

Si hacemos la prueba para el número de trayectorias que van desde  $a_3$  a  $b_3$  se tiene.

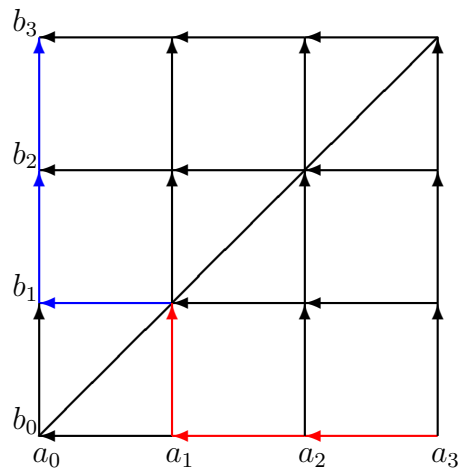
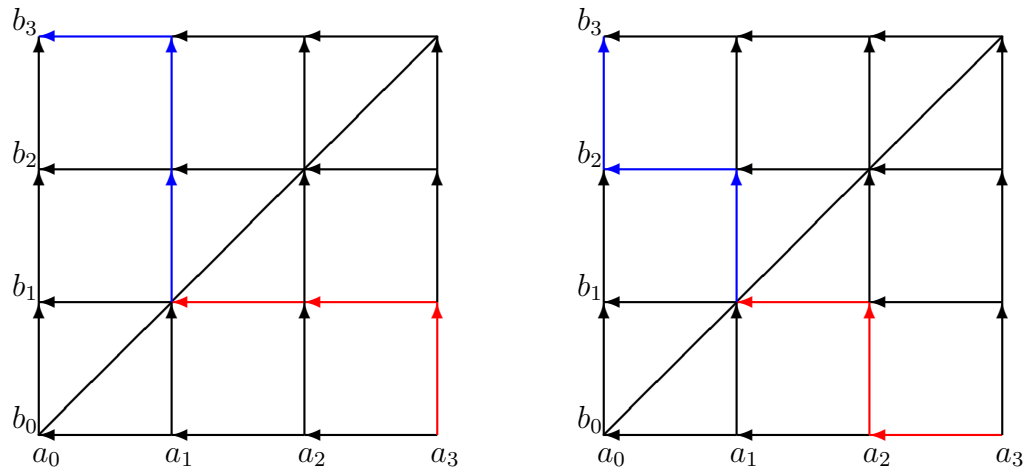
$$L_{33}U_{33} = (1)(1) = 1, L_{30}U_{03} = (1)(1) = 1$$



$$L_{32}U_{23} = (3)(3) = 9,$$



$$L_{31} = 3, U_{13} = 3,$$



$$L_{31}U_{13} = (3)(3) = 9,$$

Luego

$$\begin{aligned} LU &= (1)(1) + (3)(3) + (3)(3) + (1)(1) \\ &= 20 \\ &= S_{33} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

## 2.4. Prueba por eliminación Gaussiana

---

Para las matrices de Pascal, Brawer y Pirovino,[15] notaron que se puede sustraer a cada fila  $i$  la fila  $i - 1$  y así resulta la matriz de eliminación  $E$ . La matriz de eliminación  $E$

tiene entradas  $E_{ii} = 1$  y  $E_{(i,i-1)} = -1$ . Por ejemplo en matrices de tamaño  $4 \times 4$  podemos ver como aparece la matriz  $L$  de tamaño  $3 \times 3$ , al multiplicar por  $E$ .

$$\begin{aligned}
 EL_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$E$  por  $L$  satisface la recursión de Pascal que da como resultado la fórmula de Pascal  $L_{ik} - L_{(i-1,k)} = L_{(i-1,k-1)}$ , produciendo la matriz  $L_{n-1}$  ubicada como en (2.3).

De la misma forma veamos que  $U_4E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}$ . Esto sugiere una demostración por inducción. Asumamos que  $L_{n-1}U_{n-1} = S_{n-1}$ . Entonces el producto en la ecuación (2.3) multiplicado por  $U_nE^T$  produce

$$\begin{aligned}
 (EL_n)(U_nE^T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Esperamos que la matriz resultante coincida con  $ES_nE^T$ . Así es posible multiplicar a la izquierda por  $E^{-1}$  y a la derecha por  $(E^T)^{-1}$  y concluir que  $L_nU_n = S_n$ .

Observemos que la  $(i, j)$ -ésima entrada de  $ES_n$  y  $ES_nE^T$  está dada por:

$$\begin{aligned}
 (ES_n)_{ij} &= S_{ij} - S_{(i-1,j)}. \\
 (ES_nE^T)_{ij} &= (S_{ij} - S_{(i-1,j)}) - (S_{(i,j-1)} - S_{(i-1,j-1)}) \\
 &= S_{ij} - (S_{(i-1,j)} + S_{(i,j-1)}) + S_{(i-1,j-1)} \\
 &= S_{ij} - S_{ij} + S_{(i-1,j-1)} \\
 &= S_{(i-1,j-1)} \\
 (ES_n)_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 \dots & n \\ 1 & 3 & 6 \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & x \dots & y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 3 \dots & e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & n \dots & f \end{pmatrix} \\
&= S_{ij} - S_{(i-1,j)}
\end{aligned}$$

Con  $e, f, x, y, n$  enteros positivos.

$$\begin{aligned}
(ES_n E^T)_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 \dots & n \\ 1 & 3 & 6 \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & x \dots & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & n-1 \dots & y \end{pmatrix} \\
&= S_{(i-1,j-1)}.
\end{aligned}$$

Como  $S_{(i-1,j-1)}$  es la  $(i, j)$ -ésima entrada para la matriz  $S_{n-1}$  ubicada en la ecuación (2.4), tenemos  $(EL_n U_n E^T) = (ES_n E^T)$ . Esta forma de aproximación nos llevará a concluir que  $LU = S$ , y así concluimos la inducción.

En el grafo se puede verificar que multiplicar por  $E$  es como quitar todas las líneas horizontales que llegan a la línea de 45 grados en la demostración anterior. Ver figura 2.4

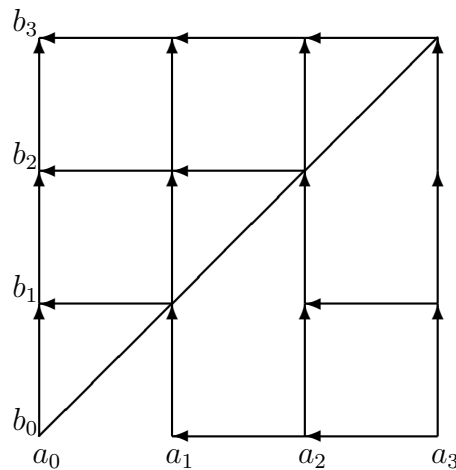


Figura 2.3: grafo sin las líneas horizontales que llegan a la diagonal

Entonces todas las trayectorias deben ir ascendiendo a esa línea. En particular para una matriz de tamaño  $4 \times 4$ .

$$\begin{aligned}
 ES_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$(ES_4)_{22} = 3$  inicializando  $i = 0$  y  $j = 0$ .

Observamos en la gráfica que hay exactamente tres trayectorias desde  $a_2$  hasta  $b_2$ . También se tiene que,  $(ES_n)_{ij} = S_{ij} - S_{(i-1,j)}$ . Para este caso particular.

$$\begin{aligned}
 (ES_4)_{22} &= S_{22} - S_{12} \\
 &= 6 - 3 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Con este proceso se garantiza un grafo de menor tamaño (correspondiente a  $L_{n-1}$ ).

La eliminación completa partiendo desde  $S$  hasta llegar a  $U$  corresponde a quitar todas las líneas horizontales debajo de la línea de 45 grados, y así obtener  $L = I$ , dado que cada camino es solamente una línea recta hacia arriba. Ver figura 2.4

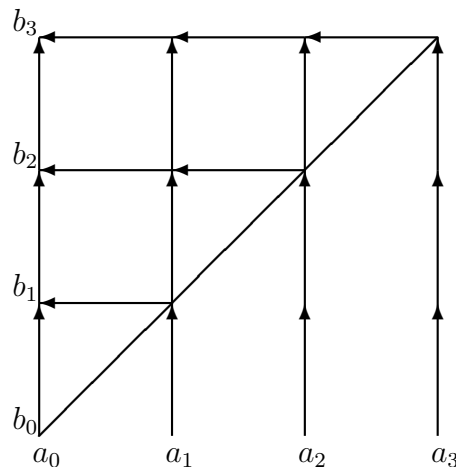


Figura 2.4: grafo de eliminación completa

Esta eliminación remueve algunas columnas de  $S$  (y columnas de lados en el grafo).

Esto nos deja a  $S_{n-1}$ .

Un buen orden de eliminación consiste en multiplicar por  $E$  para quitar las líneas horizontales y una diagonal al tiempo. Esto da la inducción en la prueba 2.4.

---

## 2.5. Los coeficientes de $(1+x)^n$ tienen un significado funcional

---

### 2.5.1. Potencias, Inversa y Logaritmo de L

Antes de presentar la cuarta demostración, vamos a mostrar algunas ideas necesarias sobre series de Taylor y series de Potencias.

Cada serie de Taylor alrededor de cero es el producto interno entre un vector coeficientes  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  y un vector momento  $v = (1, x, x^2, \dots)$ . Luego la serie de Taylor representa una función  $f(x)$  tal que.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots \\ &= \sum a_k x^k \\ &= a^T v \\ &= a^T L^{-1} L v. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde  $L$  es una matriz infinita que contiene todos los coeficientes del triángulo de Pascal así:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & n-1 & x & y \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } x, y, n \in \mathbb{Z}^+,$$

al multiplicar  $L$  por  $v$  tenemos

$$L v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Claramente  $L v$  es un vector que contiene todas las potencias  $(1+x)$ .

La multiplicación simple en (2.6) es la usual. Una segunda multiplicación por  $L$  daría

potencias de  $2 + x$ .

Multiplicando por  $L^p$  da potencias de  $p + x$ , por esto la  $(i, j)$ -ésima entrada de  $L^p$  debería ser,  $p^{i-j} \binom{i}{j}$ , por ejemplo para  $n = 4$  se tiene

$$L^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 \\ p^2 & 2p & 1 & 0 \\ p^3 & 3p^2 & 3p & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la matriz inversa de  $L$ , es decir,  $L^{-1}$ .

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En el primer capítulo se demostró que la inversa de cualquier matriz de Pascal consiste en multiplicar cada una de sus entradas originales por  $(-1)^{i-j}$ , con  $i, j \in \mathbb{Z}^+$ .

También podemos observar que esta matriz tiene la misma forma que la matriz  $L^p$  con  $p = -1$ .

Call y Velleman, [4] demostraron que  $L^{-1} = DLD^{-1}$ , donde  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

La matriz  $L^p$  tiene la forma exponencial  $e^{pA}$  y se puede computar  $A = \ln L$ , así

$$A = \frac{d}{dp} e^{pA} \Big|_{p=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pA} - I}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L^p - I}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 2 & 0 & 0 \\ p^2 & 3p & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La serie  $L = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$ , tiene sólo  $n$  términos que producen los coeficientes binomiales en  $L$ .

$A$  tiene subdeterminantes no negativos, entonces su exponencial  $L$  es también totalmente positiva, por lo tanto el producto  $S = LU$  también hereda esta propiedad.

### 2.5.2. Valores Propios

Un breve comentario sobre valores propios puede servir antes de la prueba 2.5.

**Definición 2.1.** [2] Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$  con componentes reales. El número  $\lambda$  (real o complejo) se llama eigenvalor o valor propio de  $A$  si existe un vector  $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$  tal que  $Av = \lambda v$ .

El vector  $v \neq 0$  se llama eigenvector o vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda$ .

**Teorema 2.1.** [2] Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$ . Entonces  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si y solo si  $p(x) = \det(A - \lambda I) = 0$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $p(x)$  se denomina ecuación característica de  $A$ .

Vamos ahora a analizar el comportamiento de los valores propios de  $L$  y  $U$ .

**Teorema 2.2.** [2] Los valores propios de una matriz triangular son los coeficientes diagonales de la matriz.

Es decir para las matrices  $L, U$  sus valores propios son iguales a los de sus matrices inversas respectivamente (y las matrices siempre son similares a su transpuesta), la transpuesta de  $L^{-1} = DLD^{-1}$  en la ecuación (2.7) produce  $U^{-1} = DUD^{-1}$ , porque  $D^{-1} = D^T$ , donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $S$  y  $S^{-1}$  son semejantes, de hecho

$$\begin{aligned} S^{-1} &= U^{-1}L^{-1} \\ &= DUD^{-1}DLD^{-1} \\ &= DULD^{-1} \\ &= DULUU^{-1}D^{-1} \\ &= (DU)(LU)(U^{-1}D^{-1}) \\ &= (DU)S(DU)^{-1} \end{aligned}$$

por lo anterior los valores propios de  $S$  deben venir en pares de la forma  $\lambda$  y  $\frac{1}{\lambda}$ , dado que matrices semejantes tienen los mismos valores propios. En particular los valores propios de la matriz simétrica de Pascal de tamaño  $3 \times 3$  son  $\lambda_1 = 4 + \sqrt{15}$ ,  $\lambda_2 = 4 - \sqrt{15}$  y  $\lambda_3 = 1$ . Claramente  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  es un par de recíprocos y  $\lambda_3$  es su propio recíproco.

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= [(1 - \lambda)(2 - \lambda)(6 - \lambda) + 3 + 3] - [(2 - \lambda)(9 - 9\lambda) + (6 - \lambda)] \\ &= [(1 - \lambda)(2 - \lambda)(6 - \lambda) + 6] - [2 - \lambda + 9 - 9\lambda + 6 - \lambda] \\ &= [(2 - 3\lambda + \lambda^2)(6 - \lambda) + 6] - [-11\lambda + 17] \\ &= 12 - 2\lambda - 18\lambda + 3\lambda^2 + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 6 + 11\lambda - 17 \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1. \end{aligned}$$

Factorizando tenemos  $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1 = (-\lambda^2 + 8\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$   
y además se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(-1)(-1)}}{-2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{60}}{-2} \\ &= 4 \pm \frac{\sqrt{60}}{2} \\ &= 4 \pm \frac{\sqrt{(15)(4)}}{2} \\ &= 4 \pm \sqrt{15}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda_1 = 4 + \sqrt{15}$ ,  $\lambda_2 = 4 - \sqrt{15}$  y  $\lambda_3 = 1$ .

### 2.5.3. Prueba por igualdad de funciones

Si  $Sv = LUv$ , se cumple para una gran cantidad de vectores  $v$ , entonces se estaría en cierta forma justificando que  $S = LU$ , y esto es precisamente lo que queremos demostrar.

Sea  $v = (1, x, x^2, x^3, \dots)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  un conjunto de vectores infinitos.

El producto entre la matriz  $S$  y un vector  $v$  de este conjunto será:

$$\begin{aligned}
 Sv &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n-1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \dots & w \\ 1 & 4 & 10 & 20 \dots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & w & y \dots & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \\ 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1} \\ 1 + 3x + 6x^2 + \dots + wx^{n-1} \\ 1 + 4x + 10x^2 + \dots + yx^{n-1} \\ \vdots \\ 1 + (n-1)x + wx^2 + \dots + zx^{n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $n, w, y, \dots, z$  son enteros.

Recordemos que una serie geométrica es una serie de la forma  $\sum_{a=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$  donde  $a$  es el primer término de la serie y  $r$  se le denomina la razón.

La serie geométrica es convergente si  $|r| < 1$ , con suma  $\frac{a}{1-r}$ .

En nuestro caso la suma  $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ,

$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ,  $1 + 3x + 6x^2 + \dots + wx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}, \dots$ ,

luego tenemos que

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n-1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \dots & w \\ 1 & 4 & 10 & 20 \dots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & w & y \dots & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-x)} \\ \frac{1}{(1-x)^2} \\ \frac{1}{(1-x)^3} \\ \frac{1}{(1-x)^4} \\ \vdots \\ \frac{1}{(1-x)^n} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

donde  $n, w, y, \dots, z$  son enteros.

Calculemos  $Uv$ .

$$Uv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \dots & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots & e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-x)} \\ \frac{x}{(1-x)^2} \\ \frac{x^2}{(1-x)^3} \\ \frac{x^3}{(1-x)^4} \\ \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

con  $d, e, n, \dots$ , enteros positivos. Aquí de nuevo hacemos uso de la serie geométrica para llegar al resultado. Factorizando  $\frac{1}{1-x}$ , las componentes de  $Uv$  son las potencias de  $a = \frac{x}{1-x}$ .

Ahora al multiplicar por  $L$ , no hay problema con la convergencia porque todas las sumas son finitas por lo tanto nos queda

$$L(Uv) = \frac{1}{1-x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & d & e \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-x)} \\ \frac{1}{(1-x)^2} \\ \frac{1}{(1-x)^3} \\ \frac{1}{(1-x)^4} \\ \vdots \\ \frac{1}{(1-x)^n} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Así  $Sv = LUv$  para los vectores  $v = (1, x, x^2, \dots)$ .

Escogiendo  $x = 0$  da el vector coordenado  $v_0 = (1, 0, 0, \dots)$ , entonces  $Sv_0 = LUv_0$ , corresponde a la primera columna de  $S$  y  $LU$  (la cual son todos unos).

Si se pueden construir los otros vectores coordenados de los vectores  $v$ , entonces todas las columnas de  $S$  Y  $LU$  deben coincidir.

La manera más rápida para lograr  $(0, 1, 0, \dots)$  es derivar  $v$  y calcularlo en  $x = 0$  y así sucesivamente se obtienen los otros vectores.

Sea  $v_\Delta = (1, \Delta, \Delta^2, \dots)$ , donde  $\Delta$  es el diferencial con respecto a  $x$ .

Al hacer una combinación lineal de  $v_\Delta$  y  $v_0$  se tiene.

$$S \left( \frac{v_\Delta - v_0}{\Delta} \right) = LU \left( \frac{v_\Delta - v_0}{\Delta} \right)$$

donde  $\Delta \rightarrow 0$ .

Dado que Cada serie es uniformemente convergente, cada función es analítica, cada derivada es válida.

Las derivadas de mayor grado producen los vectores coordenados y las columnas de  $S$  y  $LU$  son idénticas.

Por lo tanto al trabajar con matrices infinitas, se confirma la igualdad  $S = LU$  para todos los órdenes  $n$  al mismo tiempo.

# Capítulo 3

## LOS NUMEROS DE STIRLING Y LOS NUMEROS DE BERNOULLI

### 3.1. Los números de Stirling

Los números de Stirling fueron introducidos por James Stirling en 1730 (en su método diferencial sobre series e interpolaciones). Stirling fue un seguidor de Newton, el también trabajó sobre el problema de determinar la forma de la tierra, luego llegó a ser el director de una compañía minera escocesa, un trabajo exigente el cual hizo difícil que el continuara el estudio de las matemáticas y las físicas.

Estos números tienen propiedades interesantes, tanto como lo son sus aplicaciones.

Alguno de los autores relacionados con los números de Stirling es Knuth, quién descubrió algunos hechos sorprendentes en la historia de los símbolos. A los números de Stirling muchos símbolos los han representado incluyendo las formas más usuales.

Veamos como se definen estos números, si  $x^{(k)} = k! \binom{x}{k}$ , se dice que  $S_j^k$  es un número de Stirling de primera clase si.

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^k S_j^k x^j.$$

Y que  $s_j^k$  es un número de Stirling de segunda clase si

$$x^k = \sum_{j=0}^k s_j^k x^{(j)}.$$

Haciendo uso de las combinaciones estas definiciones produce.

$$\sum_{l=0}^{\infty} S_j^l s_l^k = \sum_{l=0}^{\infty} s_j^l S_l^k = \delta_{jk}.$$

La prueba es sencilla, sigue directamente de las definiciones.

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j^k x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j^k \sum_{l=0}^{\infty} s_l^j x^{(l)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_l^j S_j^k x^{(l)} \end{aligned}$$

cuando  $l = k$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} s_l^j S_j^k = 1$ ; cuando  $l \neq k$ ,  $\sum_{l=0}^{\infty} s_l^j S_j^k = 0$ , entonces

$$\sum_{l=0}^{\infty} s_l^j S_j^k = \delta_{lk}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} x^k &= \sum_{j=0}^k s_j^k x^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} s_j^k \sum_{l=0}^{\infty} S_l^j x^{(l)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_j^k S_l^j x^{(l)} \end{aligned}$$

cuando  $l = k$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} s_j^k S_l^j = 1$ ; cuando  $l \neq k$ ,  $\sum_{l=0}^{\infty} s_j^k S_l^j = 0$ , entonces

$$\sum_{l=0}^{\infty} s_j^k S_l^j = \sum_{l=0}^{\infty} s_l^j S_j^k = \delta_{lk}.$$

Luego

$$\sum_{l=0}^{\infty} S_j^l s_l^k = \sum_{l=0}^{\infty} s_j^l S_l^k = \delta_{jk}.$$

**Propiedad 3.1.**  $S_0^k = s_0^k = \delta_{k0}$

*Demostración.* Por definición de que  $x^{(k)} = \sum_{j=0}^k S_j^k x^j$ , se tiene que para  $k = 0$ ,  $x^{(0)} = S_0^0 x^0 = 1$ , entonces  $S_0^0 = 1$ , para los números de segunda clase  $x^0 = \sum_{j=0}^k s_j^k x^{(j)} = 1$ , por lo tanto  $s_0^0 = 1$ .

Para  $k > 0$ , por definición de  $x^{(k)}$  y de  $x^k$ ,  $S_0^k = 0$  y  $s_0^k = 0$ . Luego se cumple que  $S_0^k = s_0^k = \delta_{k0}$  ■

**Propiedad 3.2.**  $S_j^k = s_j^k = 0$ , cuando  $j > k$ .

*Demostración.* Por definición de los números de primera y segunda clase la suma va hasta  $k$  por tanto para los  $j > k$  no les queda otra que ser 0. Luego se tiene que  $S_j^k = s_j^k = 0$  ■

**Propiedad 3.3.**  $S_{j+1}^{k+1} = S_j^k - kS_{j+1}^k$ .

*Demostración.* Utilizando el hecho de que  $x^{(k)} = k! \binom{x}{k}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 x^{(k+1)} &= \frac{(k+1)!x!}{(x-k-1)!(k+1)!} \\
 &= x(x-1)\cdots(x-k+1)(x-k) \\
 &= x(x-1)\cdots(x-k+1)x - (x(x-1)\cdots(x-k+1))k \\
 &= x \sum_{j=0}^k S_j^k x^j - k \sum_{j=0}^k S_j^k x^j \\
 &= \sum_{j=0}^k S_j^k x^{j+1} - k \sum_{j=0}^k S_j^k x^j \quad \text{haciendo } i = j+1 \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} S_{i-1}^k x^i - k \sum_{i=0}^k S_i^k x^i \\
 &= -S_{-1}^k x^{(0)} + \sum_{i=0}^{k+1} S_{i-1}^k x^i - k \sum_{i=0}^{k+1} S_i^k x^i + kS_{k+1}^k x^{k+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k+1} (S_{i-1}^k - kS_i^k) x^i \\
 &= \sum_{i=0}^{k+1} S_i^{k+1} x^i
 \end{aligned}$$

entonces  $S_i^{k+1} = S_{i-1}^k - kS_i^k$ . Tomamos  $i = j+1$  se tiene  $S_{j+1}^{k+1} = S_j^k - kS_{j+1}^k$  ■

**Propiedad 3.4.**  $s_{j+1}^{k+1} = s_j^k + (j+1)s_{j+1}^k$

Antes de hacer la demostración de esta propiedad es importante recordar la noción de partición en un conjunto.

Una partición de un conjunto de  $k$  elementos  $X = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  es una descomposición de  $X$  en una unión disyunta de subconjuntos. Por ejemplo, las particiones de  $X = \{1, 2, 3\}$  son:  $\{1\}\{2\}\{3\}$ ;  $\{1, 2, 3\}$ ;  $\{\{1\}\{2, 3\}\}$ ;  $\{1, 2\}\{3\}$ ;  $\{1, 3\}\{2\}$ .

Los números de Stirling de segunda clase  $s_j^k$  se pueden también definir como el número de particiones de un conjunto de  $k$  elementos en  $j$  subconjuntos no vacíos y se denota por  $s_j^k$ . Por ejemplo para cualquier  $k$ ,  $s_1^k = 1$  (la única partición en un solo conjunto es  $X$  mismo) y  $s_k^k = 1$  (todos los conjuntos de la partición tienen un solo elemento) y  $s_0^k = 0$ , si  $n > 0$  y  $s_j^k = 0$ , si  $j > k$ .

*Demostración.* Sea  $P_j$  el conjunto de particiones del conjunto  $X = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  en  $j$  partes no vacías, se puede poner como una unión disyunta del conjunto  $P_j^1$  de particiones en las cuales  $\{1\}$  es una parte y su complementario  $P_j^0$ .

Podemos establecer una biyección entre  $P_j^1$  y el conjunto de particiones de  $\{2, \dots, k\}$  en  $(j-1)$  partes simplemente eliminando la parte  $\{1\}$  de manera que  $|P_j^1| = s_{j-1}^{k-1}$ , donde  $|P_j^1|$  denota la cardinalidad dada un conjunto  $P_j^1$ , por otro lado cada partición de  $P_j^0$  se puede obtener eliminando el elemento 1 en una de las partes de una partición de  $\{2, \dots, k\}$  en  $j$  partes de manera que  $|P_j^0| = js_j^{k-1}$ . De aquí  $s_j^k = s_{j-1}^{k-1} + js_j^{k-1}$ .

Luego  $s_{j+1}^{k+1} = s_j^k + (j+1)s_{j+1}^k$ . ■

---

## 3.2. Matrices de Pascal y los números de Stirling

---

Existe una relación muy estrecha entre las matrices de Pascal y los números de Stirling. Haciendo uso de las propiedades de estos números mencionadas arriba y de algunos resultados mostrados, en los dos capítulos anteriores, respecto a las matrices de Pascal se pueden mostrar algunos resultados.

Iniciemos con una expresión combinatoria bien conocida para el cubo de un número.

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3. \quad (3.1)$$

Por ejemplo resolvamos el cubo de 4. Haciendo uso de la expresión (3.1) se tiene que:

$$\binom{4}{1} + 6\binom{4}{2} + 6\binom{4}{3} = 4^3 = 64.$$

La expresión (3.1) puede ser extendida a una solución para.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$$

o exactamente para.

$$S_3 = \sum_{k=1}^n k^3. \quad (3.2)$$

Para calcular (3.2), se puede hacer uso de la identidad del triángulo de Pascal y la ecuación (3.1).

$$\binom{k}{l} = \binom{k-1}{l} + \binom{k-1}{l-1}$$

Luego.

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^n \left( \binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} \right) + 6 \sum_{k=1}^n \left( \binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \right) \\ &\quad + 6 \sum_{k=1}^n \left( \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4} \right) \\ &= \binom{n+1}{2} + 6 \binom{n+1}{3} + 6 \binom{n+1}{4} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + \frac{6(n+1)!}{(n-2)!3!} + \frac{6(n+1)!}{(n-3)!4!} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n-1)n(n+1) + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \\ &= \frac{2(n^2+n) + 4((n-1)(n^2+n)) + (n^2-3n+2)(n^2+n)}{4} \\ &= \frac{2(n^2+n) + 4(n^3-n) + (n^4-2n^3-n^2+2n)}{4} \\ &= \frac{2n^2+2n+4n^3-4n+n^4-2n^3-n^2+2n}{4} \\ &= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lo cual prueba la conocida fórmula .

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2. \quad (3.4)$$

Ahora si se sustituye  $N = \frac{(n(n+1))}{2} - 1$  en (3.3) se tiene que.

$$\begin{aligned} S_3 &= N(N + 1) + N + 1 \\ &= \sum_{i=0}^N (2i + 1). \end{aligned}$$

Dado que  $N = \frac{(n(n+1))}{2} - 1$ , se tiene que  $N + 1 = \frac{(n(n+1))}{2}$ . Entonces.

$$\begin{aligned} N(N + 1) &= \left( \frac{(n(n+1))}{2} - 1 \right) \left( \frac{(n(n+1))}{2} \right) \\ &= \left( \frac{(n(n+1))}{2} \right)^2 - \frac{(n(n+1))}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto al sumar la expresión  $\frac{(n(n+1))}{2}$  a ambos lados de la igualdad se obtiene.

$$N(N + 1) + N + 1 = \left( \frac{(n(n+1))}{2} \right)^2.$$

Esto sugiere una generalidad para las sumas de los primeros  $(n - k)$ -ésimas potencias.

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k.$$

Basados en usos repetidos de la expansión binomial se tiene

$$\begin{aligned} a^k &= ((a - 1) + 1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a - 1)^i + (a - 1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a - 1)^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a - 2)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (1)^i + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{m=1}^{a-1} (m)^i + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(a - 1) + 1. \end{aligned}$$

Si sustituimos  $a = n + 1$  para la expresión inicial para  $a^k$  obtenemos.

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(n) = (n + 1)^k - 1, \tag{3.5}$$

ya que  $a^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(a-1) + 1$ . Por lo tanto  $a^k - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(a-1)$ .

La expresión (3.5) puede ser representada como un sistema triangular de ecuaciones

$$\hat{P}S = Pn. \quad (3.6)$$

Por ejemplo para  $k = 5$ , las matrices son:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ S_4(n) \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}.$$

Ahora definamos  $P$  como una matriz de Pascal con la primera fila y columna suprimida, es decir.

$$P_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\hat{P}$  es lo contrario de  $P$  definida así.

$$\hat{P} = \begin{cases} \binom{i}{i-j+1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La inversa de  $P$ , escrita como  $Q = P^{-1}$  es exactamente la inversa de Pascal correspondiente con la primera fila y columna suprimidas, es decir.

$$Q_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i}{j}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

multiplicando en (3.6) por  $Q$  se tiene.

$Q\hat{P}S = QPn$ . Luego  $P^{-1}\hat{P}S = P^{-1}Pn = QPn = n$ , entonces

$$\tilde{P}S = n. \quad (3.7)$$

Donde  $\tilde{P} = Q\hat{P}$ ,  $\tilde{P}$  está dado por.

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i}{i-j+1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo para  $k = 5$ , se tiene

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

El sistema triangular de ecuaciones (3.7) puede ser resuelto fácilmente para obtener un número infinito de expresiones usuales.

$$\tilde{P}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix} S$$

$$S_0(n) = n$$

$$-S_0(n) + 2S_1(n) = n^2 \Rightarrow S_1(n) = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$S_0(n) - 3S_1(n) + 3S_2(n) = n^3 \Rightarrow S_2(n) = \frac{n^3 - n + 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$-S_0(n) + 4S_1(n) - 6S_2(n) + 4S_3(n) = n^4 \Rightarrow S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

así sucesivamente. Veamos como se deduce  $S_3(n)$ .

$$\begin{aligned} S_3(n) &= n^4 + n - 4\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + 6\left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}\right) \\ &= n^4 + n - 2n^2 - 2n + (2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)(n+1)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Es interesante el hecho de que  $\tilde{P}$  pueda ser utilizado para encontrar relaciones entre los coeficientes binomiales y los números de Stirling de primera y segunda clase de los cuales hablaremos más adelante. En algunos libros definen los números de Stirling de primera clase como  $S_1(i, j)$  y los de segunda clase como  $S_2(i, j)$  con  $i, j \in \mathbb{N}$ . Sea  $N_1$  denota la matriz con entradas  $S_1(i, j)$  y  $N_2$  la matriz con entradas  $S_2(i, j)$ .

Estas matrices pueden ser obtenidas usando las construcciones recursivas para los números de Stirling mencionadas anteriormente, por ejemplo para  $i, j \leq 5$ , obtenemos.

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo uso de las fórmulas recursivas, los anteriores resultados se pueden deducir así:

$$\begin{aligned} S_1(1, 1) &= S_1(i, i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(2, 1) &= S_1(1, 0) - 1S_1(1, 1) \\ &= 0 - 1(1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(3, 1) &= S_1(2, 0) - 2S_1(2, 1) \\ &= 0 - 2(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(3, 2) &= S_1(2, 1) - 2S_1(2, 2) \\ &= -1 - 2(1) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(4, 1) &= S_1(3, 0) - 3S_1(3, 1) \\ &= 0 - 3(2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$S_2(2, 1) = S_2(1, 0) + 1S_2(1, 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + 1(1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2(3, 2) &= S_2(2, 1) + 2S_2(2, 2) \\
 &= 1 + 2(1) \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Así sucesivamente se puede comprobar la validez de las matrices  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente. De aquí y de la identidad  $\sum_{l=0}^{\infty} S_j^l s_l^k = \delta_{jk}$ , se puede ilustrar el siguiente e interesante resultado de los números de Stirling.

$$\begin{aligned}
 N_1 N_2 &= N_2 N_1 \\
 &= I.
 \end{aligned}$$

Ahora si se define una matriz  $\Lambda$  compuesta de los valores propios de  $\tilde{P}$ , los cuales del ejemplo anterior serían.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\tilde{P} N_2 = N_2 \Lambda. \quad (3.8)$$

$$\tilde{P} = N_2 \Lambda N_1. \quad (3.9)$$

---

### 3.3. Números de Bernoulli

---

Los números de Bernoulli fueron llamados así por Abraham de Moivre en honor al matemático que primero los estudió, Jacob Bernoulli.

Los números de Bernoulli fueron introducidos por Jacob Bernoulli con el fin de sumar las potencias de los primeros números naturales. Sin embargo su fama se debió a las variadas relaciones bastante misteriosas de estos números con otras constantes que aparecen en el análisis, la teoría de números, la topología diferencial y otros.

Quizás la más asombrosa de estas relaciones fue la hallada por Ernest Kummer a mediados del siglo XIX con el Teorema de Fermat.

Pero los importantes números de Bernoulli aparecieron en la producción de Jacob que ha tenido mayor trascendencia: *Ars Conjectandi* (Arte de las conjeturas), publicada en Basilea en 1713 por su sobrino Nicolaus I, ocho años después de la muerte de su autor. Cuando murió Jacob en 1705 debido a tuberculosis y a las tensiones generadas por las enconadas e insensatas controversias con su hermano el trabajo estaba aún incompleto; sin embargo se constituyó una obra de gran significado para una nueva rama de las matemáticas que se estaba gestando en esa época : la teoría de las probabilidades. Ver en [12]

Los números de Bernoulli denotados por  $\beta_n$  son números enteros que se obtienen a partir de la siguiente expresión

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = 0^n + 1^n + 2^n + \cdots + (m-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

Cada  $n$  de la expresión (3.10) es un polinomio en  $m$  de orden  $n+1$  que son denominados polinomios de Bernoulli, sus coeficientes definen la forma directa de los números de Bernoulli a partir de la siguiente expresión

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \beta_k m^{n+1-k}.$$

Por ejemplo, si  $n=1$ , tenemos que

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (m-1) = \frac{1}{2}(\beta_0 m^2 + 2\beta_1 m) = \frac{1}{2}(m^2 - m). \text{ Ver en [8]}$$

Así los números de Bernoulli están definidos por la relación recursiva.

$$\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \beta_{m-i} = 0, \quad \beta_0 = 1$$

con  $m \geq 2$ , así se tiene.

$$\beta_1 = \frac{-1}{2}, \text{ puesto que } \sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} \beta_1 = 0, \text{ Luego}$$

$$\sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} \beta_1 = \binom{2}{1} \beta_1 + \binom{2}{2} \beta_0 = 0. \text{ Entonces, } \beta_1 = -\frac{\beta_0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Así  $\beta_2 = \frac{1}{6}$ ,  $\beta_3 = 0$ ,  $\beta_4 = -\frac{1}{30}$ , así sucesivamente los números de Bernoulli se pueden seguir calculando. Ver en [10]

---

### 3.4. Las matrices de Pascal y los números de Bernoulli

---

Existe una relación importante entre las matrices de Pascal, los números de Stirling y los números de Bernoulli .

De la ecuación (3.8) existe un número infinito de relaciones dadas por.

$\tilde{P}^m = N_2 \Lambda^m N_1$ , en la cual para  $m = -1$  se tiene.

$\tilde{P}^{-1} = N_2 \Lambda^{-1} N_1$ , donde  $N_1 = \Lambda N_2^{-1} \tilde{P}^{-1}$ ,  $N_2 = \tilde{P}^{-1} N_1^{-1} \Lambda$

Haciendo uso de las matrices previas correspondientes para  $k = 5$  se obtiene.

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/30 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Regresando a la ecuación (3.6), multiplicar por  $\hat{P}^{-1} = \hat{Q}$  da.

$$S = Rn$$

donde  $R = \hat{P}^{-1}P$ , lo cual para  $k = 5$  es igual a la ecuación (3.11) (La prueba de que  $R = \tilde{P}^{-1}$  es sencilla).

Ya que  $\tilde{P} = Q\hat{P} = P^{-1}\hat{P}$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{-1} &= (P^{-1}\hat{P})^{-1} \\ &= \hat{P}^{-1}P \\ &= R. \end{aligned}$$

Se nota inmediatamente que la primera columna de  $R$  contiene los números de Bernoulli  $\beta_i$ , invirtiendo  $\hat{P}$  para  $k = 5$  da.

$$\hat{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/30 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/5 \end{pmatrix}$$

La cual es la misma que  $R$ , excepto que ahora la diagonal anterior a la diagonal principal tiene valor  $-\frac{1}{2}$ .

Por lo tanto la primera columna de  $\hat{P}^{-1}$  contiene los  $\beta_i$ , tal y como están definidos los números de Bernoulli.

# Bibliografía

- [1] A.Edelman and G.Strang. “Pascal Matrices”, this MONTHLY 111 (2004) 189 – 197.
- [2] GROSSMAN, Stanley. *Álgebra Lineal*. Quinta edición. Editorial McGrawHill, México, 1996.
- [3] L.Aceto and D.Trigiant. The Matrices of Pascal and other greats, this MONTHLY 108 (2001) 232 – 245.
- [4] G.Call and D.Velleman. Pascal’s Matrices. This MONTHLY 100 (1993) 372 – 376.
- [5] G.Strang. Introduction to Linear Algebra. 3<sup>ra</sup> ed. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 2003.
- [6] N.J.Higham. Accuracy and Stability in numerical Algorithms. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [7] Murray R, Spiegel. Estadística. Segunda Edición. Mc Graw-Hill/Interamericana de España, S.A.U. Schaum, México. 2000
- [8] <http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmerodeBernoulli>.
- [9] R.Scurr, G.Olive. Stirling numbers revisited. Discrete Mathematics 189 (1998) 209–219.
- [10] Kwang-Wu Chen. A summation on Bernoulli numbers. Journal of Number Theory 111 (2005) 372 – 391.
- [11] <http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberofthefirstkind.html>
- [12] <http://www.divulgamat.net/weborriak/MateOspetsuak/JBernoulli3.asp>
- [13] P.Maltais and T.A.Gulliver. Pascal Matrices and Stirling Numbers. Appl.Math.Lett.Vol.11, No. 2, pp. 7 – 11, 1998.

- [14] F.Comellas, J.Fábrega, A.Sánchez, O.Serra. Matemática discreta. EDICIONS UPC. Alfaomega Grupo Editor.2002.
- [15] R.Brawer and M.Pirovino, The Linear Algebra of the Pascal Matrix, Linear Algebra Appl. 174 (1992) 13 – 23.