

PLIEGUES Y PEGAMIENTOS DE LA RECTA Y EL
PLANO

FABIO HUMBERTO SEPÚLVEDA MURILLO

Proyecto de grado presentado como requisito
para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Directora

Sonia Marleni Sabogal Pedraza

Doctora en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2004

PLIEGUES Y PEGAMIENTOS DE LA RECTA Y EL
PLANO

FABIO HUMBERTO SEPÚLVEDA MURILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2004

TÍTULO:PLIEGUES Y PEGAMIENTOS DE LA RECTA Y EL PLANO ¹**AUTOR:**SEPÚLVEDA MURILLO FABIO HUMBERTO ²**PALABRAS CLAVES:**

Función, representación, biespacial, pliegues, pegamientos.

DESCRIPCIÓN Y CONTENIDO:

Se ha visto como la palabra función es de uso general en casi todas las asignaturas de la licenciatura. En los primeros cursos nos han presentado una definición clara y precisa del término función, basado en los conceptos de conjunto y relación, y por tanto las diferentes formas de representar una relación son aplicables a las funciones, en consecuencia, una función puede representarse por ejemplo exhibiendo la gráfica correspondiente al conjunto solución y teniendo en cuenta que la forma usual de representar gráficamente una función de variable real y valor real es en un plano cartesiano, resulta interesante hacer otro tipo de representación que llamaremos biespacial y que tiene la ventaja de que ayuda a visualizar y entender la deformación del espacio, es decir, permite ver lo que hace f a la recta real y permite ver cual es el efecto geométrico de f sobre (o sobre un subconjunto sobre).

En el primer capítulo se presenta un resumen de los principales conceptos, definiciones y teoremas que se van a usar en el desarrollo del trabajo. En el segundo capítulo, se presentan varios ejemplos de funciones reales, además se formaliza el concepto de pliegue para funciones de variable real y se compara con otros conceptos: máximos y mínimos, punto crítico e inyectividad local.

¹Proyecto de grado

²Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. Asesor: Sonia Marleni Sabogal.

Finalmente en el tercer capítulo se formaliza el concepto de pegamiento y se demuestra que para funciones analíticas del plano complejo, tener un punto de pegamiento es equivalente a tener un punto crítico y a no ser localmente inyectiva.

TITLE:ATTACHMENT AND FOLDS OF THE STRAIGHT LINE AND PLANE¹**AUTHOR:**SEPÚLVEDA MURILLO FABIO HUMBERTO²**KEY WORDS:**

Function, representation, biespacial, folds, attachment.

DESCRIPTION AND CONTENT

We have seen how the word function is the general use in almost every academic subject from degree of master. In the first courses have shown us a clear and exact definition about the term function, based on the concepts of conjunct and relation. Also the different ways of perform a relation are applicables to the function, according a function can perform by showing the graphic correspondent to solution conjunct and having in count that the usual way to perform graphically a function of real variable and real value is in a cartesiano plane. It is interesting make another kind of representaction that we will call biespacial, and it has advantage to help to visualize and comprehend the deformation from space, it means that it allows to see that f does, to the real straight line and allows to see which is the geometric effect of f over (or about a subconjunct over).

In the first chapter presented a summary of the main concepts definitions and theorems that will go to use in the development of the work. In the second chapter presented several examples of real functions, besides formalized the concept of fold for functions of real variable and it compare with other concepts: maximum and minimum, critical point and local injectivity. Finally in the third chapter formalized the concept of attachment and it shows that for analytical functions

¹Degree project

²Faculty of sciences, School of Mathematics. Adviser: Sonia Marleni Sabogal

from complex plane, to have a point of attachment is equivalent to have a critical point and not to be locally injective.

TABLA DE CONTENIDO	Pág
Introducción	1
1. Preliminares	2
2. Pliegues en la recta	8
2.1 Representación de funciones	8
2.2 Concepto de pliegue en la recta	21
3. Pegamientos en el plano	29
Bibliografía	42

Introducción

Hemos visto a través de nuestros estudios en la licenciatura como la palabra **función** es de uso general en casi todas las asignaturas. En los primeros cursos nos han presentado una definición clara y precisa del término función, basado en los conceptos de conjunto y relación, junto con la forma usual de representarla gráficamente en el plano cartesiano, si se trata de una función de variable real y valor real.

En el presente trabajo se analiza un artículo [5], en el cual se introduce una nueva forma de representar las funciones en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 llamada forma **biespacial** que puede resultar una forma más didáctica de visualizar las funciones desde un punto de vista geométrico.

Esta monografía consta de tres capítulos:

- En el primer capítulo (Preliminares) se presenta un resumen de los principales conceptos, definiciones y teoremas, que le permitirá al lector una mejor comprensión de los capítulos siguientes.
- El capítulo dos está dividido en dos secciones:
 - Para la primera sección (2.1) se presentan varios ejemplos de funciones reales donde el lector encontrará una nueva forma de representar funciones en \mathbb{R} llamada forma **biespacial**.
 - En la sección (2.2) se formaliza el concepto de pliegue para funciones de variable real y se compara con otros conceptos: punto crítico, máximos y mínimos e inyectividad local.
- En el capítulo tres se formaliza el concepto de pegamiento y se demuestra que para funciones analíticas del plano complejo, tener un punto de pegamiento es equivalente a tener un punto crítico y a no ser localmente inyectiva.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo consideramos algunos conceptos básicos que se usarán en los siguientes capítulos, y que permitirán tener una fácil comprensión del tema a tratar.

Las definiciones y teoremas fueron tomados de [1], [2],[4],[6],[7] y [8].

1.1. FUNCIÓN CONTINUA.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f es **continua en c** si, dada cualquier vecindad $V_\varepsilon(f(c))$ de $f(c)$, existe una vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que si x es cualquier punto de $A \cap V_\delta(c)$, entonces $f(x)$ pertenece a $V_\varepsilon(f(c))$.

Se dice que f es **continua en A** , si f es continua en todos los puntos de A .

1.2. FUNCIÓN DERIVABLE.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Se dice que un número real L es la **derivada** de f en c si para cualquier número $\varepsilon > 0$ dado existe un número $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in I$ con $0 < |x - c| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L \right| < \varepsilon.$$

1.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

Todo polinomio definido por $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; $a_n \neq 0$ tiene exactamente n ceros.

La demostración del anterior teorema se encuentra en [4].

Nota: En el teorema anterior, si un cero ocurre n veces (multiplicidad n), es considerado como n ceros

1.4. TEOREMA (EXTREMOS RELATIVOS).

Sea I un intervalo, sea x_0 un punto interior de I y sea $n \geq 2$. Supongamos que existen las derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ y que son continuas en una vecindad de x_0 y que $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, pero $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- i)* Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 .
- ii)* Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces f tienen un máximo relativo en x_0 .
- iii)* Si n es impar, entonces f no tiene un máximo relativo ni un mínimo relativo en x_0 .

1.5. TOPOLOGÍA.

Dado un conjunto V no- vacío, una **topología** sobre V es una familia τ de subconjuntos de V tal que:

- i)* $\emptyset, V \in \tau$.

- ii) La unión de cualquier subfamilia de τ es miembro de τ .
- iii) La intersección de cualquier subfamilia finita de τ es miembro de τ .

1.6. ESPACIO TOPOLÓGICO.

Sea V un conjunto no-vacío y τ una topología sobre V , la pareja (V, τ) se llama **espacio topológico**.

Ejemplo 1.1 (\mathbb{R}, τ) donde τ es la familia de subconjuntos de \mathbb{R} que se pueden expresar como unión de intervalos de la forma (a, b) ; τ se llama la **topología usual** de \mathbb{R} .

1.7. VECINDAD.

Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que $M \subseteq X$ es **vecindad** de un punto $x \in X$, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq M$.

El conjunto de todas las vecindades de x , se representa con:

$$\mathcal{V}_x = \{M / M \text{ es vecindad de } x\}$$

1.8. INTERIOR DE UN CONJUNTO.

Dados (V, τ) un espacio topológico y $M \subseteq V$, x es un **punto interior** de M , si existe $F \in \tau$ tal que $x \in F \subseteq M$.

Llamaremos **el interior de M** , representado usualmente por $int(M)$ al conjunto:
 $int(M) = \{x \in V / x \text{ es un punto interior de } M\}$.

1.9. ADHERENCIA O CLAUSURA DE UN CONJUNTO.

Dados (V, τ) un espacio topológico y $M \subseteq V$, x es un **punto adherente** de M , si para todo $F \in \tau$ tal que $x \in F$ se tiene que $F \cap M \neq \emptyset$.

Llamaremos la **adherencia de M** , notado por $cl(M)$ al conjunto:

$$cl(M) = \{x \in V / x \text{ es un punto adherente de } M\}.$$

1.10. CONJUNTO ABIERTO.

Sean (V, τ) un espacio topológico y $M \subseteq V$. M es **abierto**, si $M = int(M)$.

1.11. CONJUNTO CERRADO.

Sean (V, τ) un espacio topológico y $M \subseteq V$. M es **cerrado**, si $cl(M) = M$.

1.12. FUNCIÓN CONTINUA.

(generalización de 1.1).

Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$, diremos que f es **continua en $a \in X$** si y sólo si para toda vecindad V de $f(a)$, existe una vecindad W de a tal que $f(W) \subseteq V$.

Si f es continua en a , para todo $a \in X$, se dice que f es **continua en X** .

El concepto de función continua se puede interpretar fácilmente en términos de conjuntos abiertos.

1.13. TEOREMA.

Sean X e Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cada abierto de Y es un abierto de X .

La demostración del anterior teorema se encuentra en [2].

1.14. HOMEOMORFISMO.

Dados X e Y espacios topológicos. Un **homeomorfismo** es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que:

- i) f es biyectiva,
- ii) f es continua,
- iii) f^{-1} es continua.

1.15. FUNCIÓN ANALÍTICA.

Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (función de variable compleja), es llamada **analítica en un punto** z_0 , si existe una vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$, tal que en cada punto de ella, f' exista.

Si la derivada f' existe en todo punto z de una región R , entonces diremos que f es analítica en R .

1.16. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA.

Supongamos que $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1$ en un conjunto abierto S de \mathbb{R}^n , y sea $T = f(S)$. Si el determinante jacobiano $J_{f(a)} \neq 0$ en un punto a de S , entonces existen dos conjuntos abiertos $X \subseteq S$ e $Y \subseteq T$ y una función g unívocamente

determinada tales que:

a) $a \in X$ y $f(a) \in Y$,

b) $Y = f(X)$,

c) f es uno a uno en X ,

d) g está definida en Y , $g(Y) = X$ y $g[f(x)] = x$ para cada x de X ,

e) $g \in C^1$ en Y .

Capítulo 2

PLIEGUES EN LA RECTA

Este segundo capítulo se ha dedicado a analizar las dos primeras secciones de [5]. Inicialmente se presentan varios ejemplos de funciones reales, donde se introduce e ilustra una nueva forma de representar funciones en \mathbb{R} , llamada forma biespacial. Algunos ejemplos son tomados de [5] pero otros no aparecen allí.

En la segunda parte de este capítulo se formaliza el concepto de pliegue para funciones de variable real y se compara con otros conceptos similares: punto crítico, máximos y mínimos relativos e inyectividad local.

2.1. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

La forma usual de representar gráficamente una función en \mathbb{R} es en un plano cartesiano, lo que constituye una manera muy práctica de conocer propiedades importantes de la función.

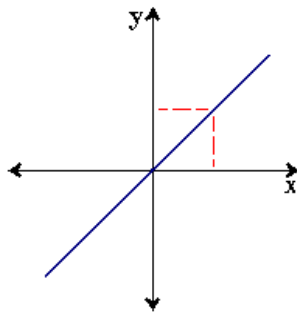
Teniendo en cuenta que una función hace una transformación del dominio, resulta interesante hacer otro tipo de representación que llamaremos **biespacial** y que tiene la ventaja de que ayuda a visualizar y entender la deformación del espacio,

es decir:

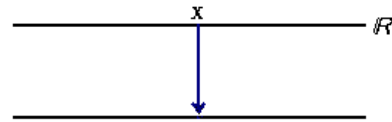
1. Permite ver lo que hace f a la recta real (o a un subconjunto de ella).
2. Permite ver cual es el efecto geométrico de f sobre \mathbb{R} (o sobre un subconjunto de \mathbb{R}).

Ejemplo 2.1 $f(x) = x$.

REPRESENTACIÓN USUAL



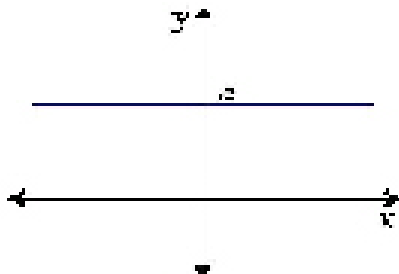
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



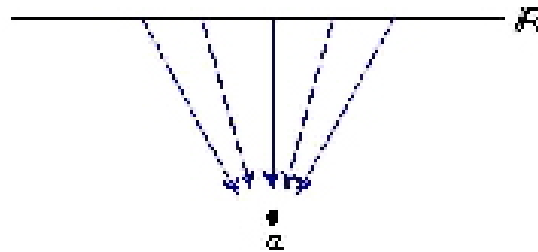
1. f no transforma la recta, la deja igual.

Ejemplo 2.2 $f(x) = a$; $a \in \mathbb{R}$.

REPRESENTACIÓN USUAL



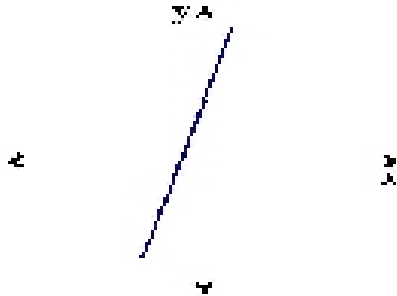
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



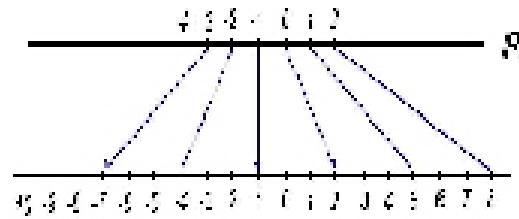
1. f transforma la recta en un punto.

Ejemplo 2.3 $f(x) = 3x + 2$.

REPRESENTACIÓN USUAL



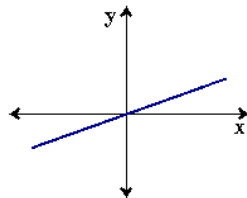
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



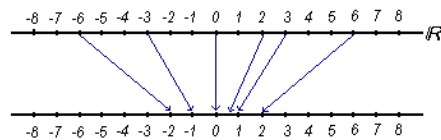
1. f hace un estiramiento de la recta, dejando a -1 fijo.
 2. Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $3L$.
- Otra interpretación: f hace un estiramiento con factor de escala 3, dejando a -1 fijo y después un desplazamiento de dos unidades hacia la derecha.

Ejemplo 2.4 $f(x) = \frac{1}{3}x$.

REPRESENTACIÓN USUAL



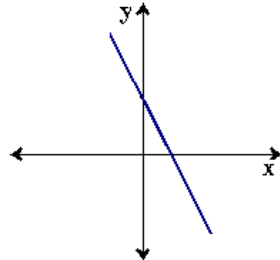
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



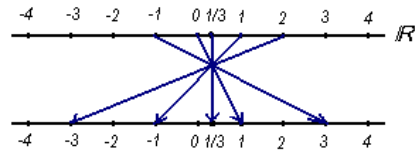
1. f comprime la recta con factor de escala $\frac{1}{3}$, dejando a 0 fijo.
2. Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $\frac{L}{3}$.

Ejemplo 2.5 $f(x) = -2x + 1$.

REPRESENTACIÓN USUAL



REPRESENTACIÓN BIESPACIAL

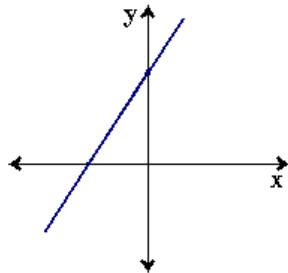


1. f hace un estiramiento de la recta, dejando a $\frac{1}{3}$ fijo.
2. f hace una reflexión respecto al punto $\frac{1}{3}$.
3. Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $2L$.

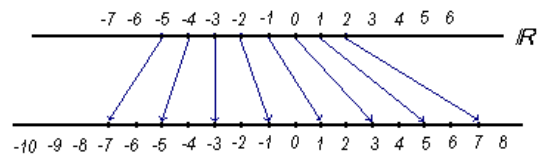
Otra interpretación: f hace un estiramiento con factor de escala 2, dejando a $\frac{1}{3}$ fijo, luego una reflexión respecto al origen y después un desplazamiento de una unidad hacia la derecha.

Ejemplo 2.6 $f(x) = 2x + 3$.

REPRESENTACIÓN USUAL



REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



1. f hace un estiramiento de la recta, dejando a -3 fijo.

2. Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $2L$.

Otra interpretación: f hace un estiramiento con factor de escala 2, dejando a -3 fijo y luego un desplazamiento de tres unidades hacia la derecha.

Teniendo presente los ejemplos anteriores, ¿cómo se describiría en general el efecto geométrico de una transformación de la forma $f(x) = ax + b$?

Consideremos 4 casos:

1. Si $a = 0$, entonces $f(x) = b$ (función constante), f transforma la recta en el punto b . Ver ejemplo 2.2

2. Si $0 < |a| < 1$, entonces $-1 < a < 1$; con $a \neq 0$.

Veamos cuando $-1 < a < 0$,

igualamos la función $f(x) = ax + b$ con x , para encontrar el punto fijo:

$$ax + b = x$$

$$b = x - ax$$

$$b = x(1 - a)$$

$$x = \frac{b}{1-a}$$

entonces:

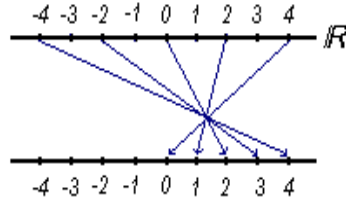
✓ f comprime la recta con factor de escala $|a|$, junto con una reflexión respecto al punto $x = \frac{b}{1-a}$.

✓ Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $|a|L$.

Veamos un ejemplo:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



✓ f comprime la recta con factor de escala $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, junto con una reflexión respecto al punto:

$$x = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

✓ Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $|a| L$:

$f([-4, 2]) = [1, 4]$; la longitud de $[-4, 2]$ es 6 y la longitud de $[1, 4]$ es:

$$|\frac{1}{2}| \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Veamos cuando $0 < a < 1$,

análogamente a lo anterior, pero no hay reflexión.

3. Si $|a| > 1$.

Veamos cuando $a < -1$,

entonces el efecto geométrico es:

✓ f hace un estiramiento de la recta con factor de escala $|a|$, dejando fijo $\frac{b}{1-a}$, junto con una reflexión con respecto al punto $x = \frac{b}{1-a}$.

✓ Un intervalo de longitud L , lo transforma en uno de longitud $|a| L$.

Ver ejemplo 2.5.

Veamos cuando $a > 1$,

análogamente a lo anterior, pero no hay reflexión.

4. Si $|a| = 1$, entonces:

Si $a = 1$ se tiene $f(x) = x + b$.

✓ Hay un desplazamiento de b unidades a la derecha, si $b > 0$, o a la izquierda, si $b < 0$.

✓ Si $b = 0$, entonces $f(x) = x$, f no transforma la recta la deja igual (por tratarse de la función idéntica).

Si $a = -1$, entonces $f(x) = -x + b$.

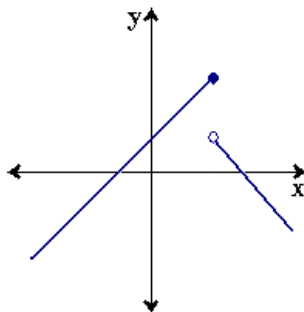
✓ Hay una reflexión con respecto al origen y luego un desplazamiento de b unidades hacia la derecha, si $b > 0$, o hacia la izquierda, si $b < 0$.

Usando la otra interpretación se puede afirmar que $f(x) = ax + b$ hace: un cambio de escala con factor de escala $|a|$, una reflexión respecto al origen si $a < 0$ y un desplazamiento de b unidades hacia la derecha, si $b \geq 0$, o hacia la izquierda si $b < 0$.

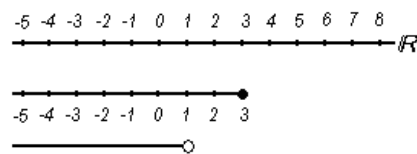
Veamos más ejemplos:

Ejemplo 2.7 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \text{ si } x \leq 2 \\ -x + 3 & ; \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

REPRESENTACIÓN USUAL



REPRESENTACIÓN BIESPACIAL

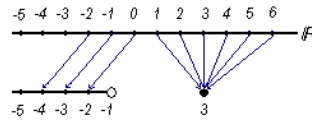
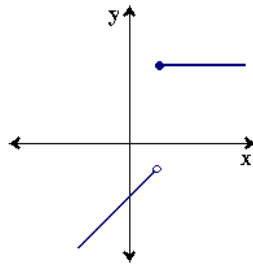


Podríamos describir la acción de f en tres pasos así:

1. f rompe la recta en el punto 2.
2. La semirecta que queda a la izquierda la desplaza una unidad hacia la derecha, quedando su origen en 3.
3. La semirecta (sin el origen 2) que queda a la derecha, la refleja respecto al origen y luego la desplaza 3 unidades hacia la derecha, quedando su origen hueco en 1.

Ejemplo 2.8 $f(x) = \begin{cases} x - 2 & ; \text{ si } x < 1 \\ 3 & ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

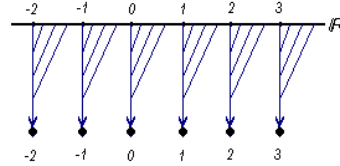
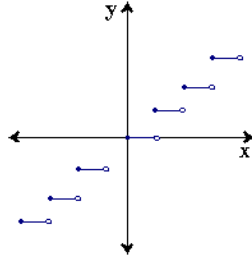
REPRESENTACIÓN USUAL REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



1. f rompe la recta en el punto 1.
2. La semirecta que queda a la izquierda, sin incluir el origen 1, la desplaza 2 unidades hacia la izquierda.
3. La semirecta que queda a la derecha, la convierte en el punto 3.

Ejemplo 2.9 $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

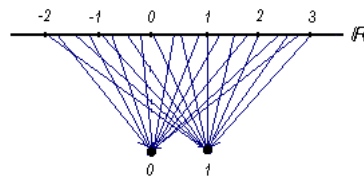
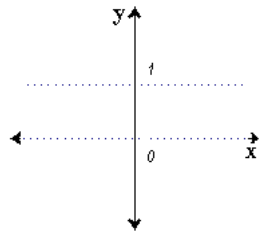
REPRESENTACIÓN USUAL REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



1. f rompe la recta en los enteros.
2. Cada intervalo $[n, n + 1)$ lo transforma en el punto n .
3. f transforma la recta en los enteros.

Ejemplo 2.10 $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \text{ si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$.

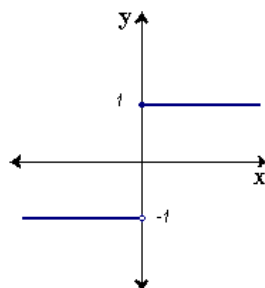
REPRESENTACIÓN USUAL REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



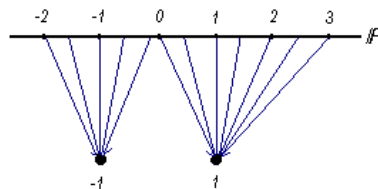
1. f transforma la recta en dos puntos: 0 y 1.

Ejemplo 2.11 $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } x \geq 0 \\ -1 & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$

REPRESENTACIÓN USUAL



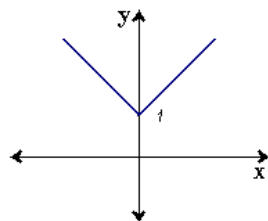
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



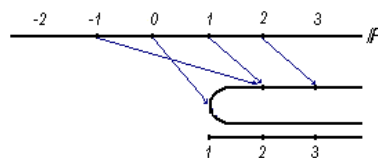
1. f rompe la recta en el punto 0.
2. f transforma la recta en dos puntos:
 - ✓ La semirecta (sin el origen 0) que queda a la izquierda la convierte en el punto -1 .
 - ✓ La semirecta que queda a la derecha la convierte en el punto 1 .

Ejemplo 2.12 $f(x) = |x| + 1$.

REPRESENTACIÓN USUAL



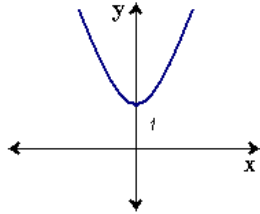
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



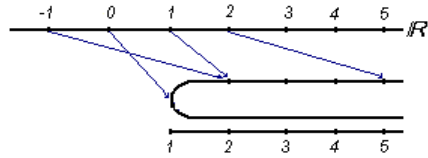
1. f dobla la recta por el punto $f(0) = 1$, transformándola en una semirecta.
2. f tiene un pliegue en el punto 0.

Ejemplo 2.13 $f(x) = x^2 + 1$.

REPRESENTACIÓN USUAL



REPRESENTACIÓN BIESPACIAL

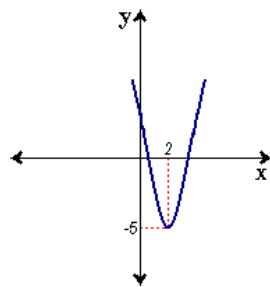


1. f dobla la recta por el punto $f(0) = 1$, transformándola en una semirecta.
2. f hace una contracción en el intervalo $(-1, 1)$ y un estiramiento fuera de él.
3. f tiene un pliegue en el punto 0.

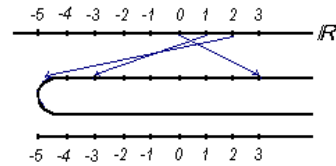
Topológicamente el espacio resultante en los dos últimos ejemplos después de aplicar f es el mismo (una semirecta).

Ejemplo 2.14 $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

REPRESENTACIÓN USUAL



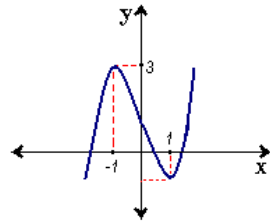
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



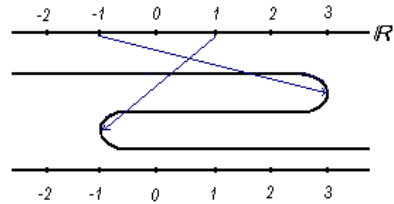
1. f dobla la recta en el punto $f(2) = -5$, transformándola en una semirecta.
2. f tiene un pliegue en el punto 2.

Ejemplo 2.15 $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

REPRESENTACIÓN USUAL



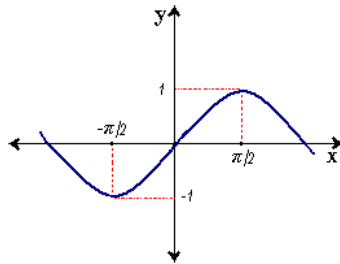
REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



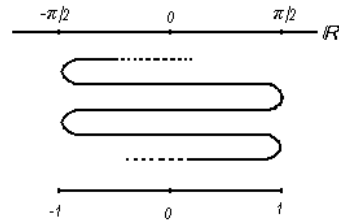
1. f dobla la recta, tiene dos puntos de pliegue: en $f(1) = -1$ y $f(-1) = 3$.

Ejemplo 2.16 $f(x) = \sin x$.

REPRESENTACIÓN USUAL



REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



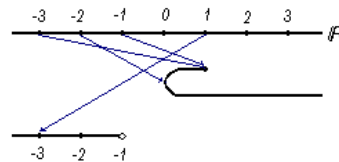
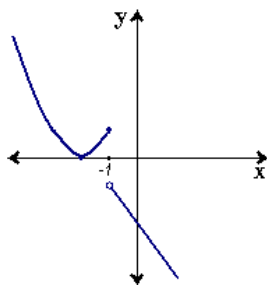
1. Hay infinitos plegamientos, pero siempre en -1 y 1 , luego tiene dos puntos de pliegue: -1 y 1 .

2. f transforma la recta en el segmento $[-1, 1]$.

Ejemplo 2.17 $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & ; \text{ si } x \leq -1 \\ -x-2 & ; \text{ si } x > -1 \end{cases}$.

REPRESENTACIÓN USUAL

REPRESENTACIÓN BIESPACIAL

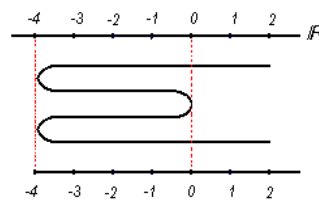
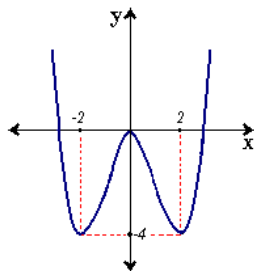


1. f rompe la recta en -1 .
2. f dobla la recta en el punto $f(-2) = 0$, transformándola en una semirecta.
3. La semirecta de la derecha (sin el origen -1), la refleja respecto al origen y la desplaza 2 unidades a la izquierda.
4. La semirecta de la izquierda se pliega por el punto -2 .

Ejemplo 2.18 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

REPRESENTACIÓN USUAL

REPRESENTACIÓN BIESPACIAL



1. f tiene dos puntos de pliegue: $f(2) = f(-2) = -4$ y $f(0) = 0$.

¿Cómo se describiría en general el efecto geométrico de una transformación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Consideremos dos casos:

1. Si $a = 0$, se tiene $f(x) = bx + c$ y tendríamos una transformación lineal que fue analizada anteriormente.
2. Si $a \neq 0$, entonces f dobla la recta por el punto $f(-\frac{b}{2a})$.

2.2. CONCEPTO DE PLIEGUE EN LA RECTA

Analizando los ejemplos de la sección anterior vemos que el concepto de pliegue está relacionado con el concepto de extremo relativo.

Definición 2.1 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** en $a \in A$, si existe una vecindad de a , V_a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in V_a$. En este caso $f(a)$ se dice un máximo relativo de f . Se dice que f tiene un **mínimo relativo** en $a \in A$, si existe una vecindad V_a de a , tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in V_a$. En este caso $f(a)$ se dice un mínimo relativo de f . Entonces f tiene un **extremo relativo** en $a \in A$, si tiene un máximo relativo, o bien, un mínimo relativo en a .

Por ejemplo para la siguiente función (figura A), f posee extremos relativos en $a_0, a_1, a_4, a_5, a_6, a_7$ y todos los puntos del intervalo $[a_2, a_3]$.

Vamos a tener presente aquellos extremos relativos que se producen en los puntos a_1, a_4 y a_5 , a estos puntos los llamaremos “pliegues”.

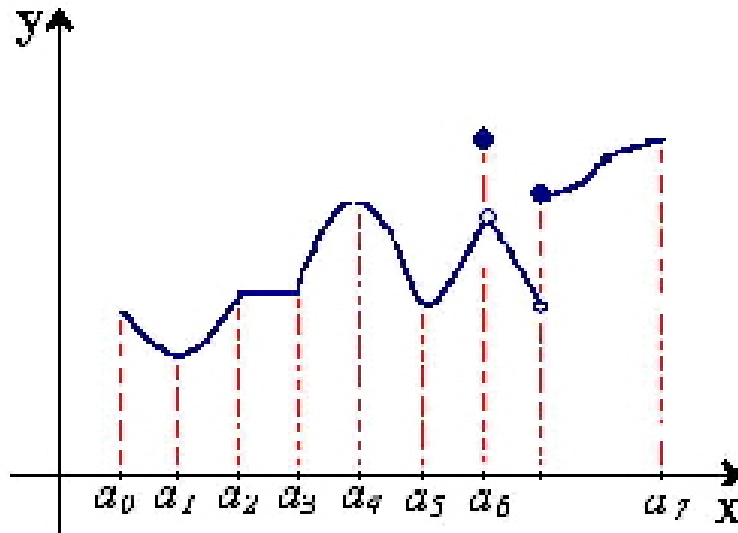


Figura A

Definición 2.2 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Diremos que f tiene un *pliegue* en $a \in A$, si existe un intervalo abierto (b, c) alrededor de a (es decir con $a \in (b, c)$) tal que se tiene alguna de las siguientes dos condiciones:

1. $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (b, c)$; $x \neq a$,
2. $f(a) < f(x)$ para todo $x \in (b, c)$; $x \neq a$.

Entonces $f(a)$ se dice un *punto de pliegue de f* .

Proposición 2.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua en A , $a \in A$. Si $f(a)$ es un punto de pliegue de f , entonces $f(a)$ es un extremo relativo de f .

Demostración. Como $f(a)$ es un punto de pliegue de f , existe un intervalo abierto I_a que contiene a a , tal que por ejemplo $f(x) < f(a)$ para todo $x \in I_a$; $x \neq a$, entonces por la definición 2.1, f tiene un máximo relativo en $a \in A$, así $f(a)$ es un máximo relativo de f , por lo tanto $f(a)$ es un extremo relativo de f .

Análogamente si $f(a) < f(x)$ para todo $x \in I_a$. ■

El recíproco de la proposición anterior no se cumple. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.19 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{R}$, la función constante.

$$x \mapsto f(x) = k$$

Para todo punto $c \in [a, b]$, se tiene que $f(c)$ es un extremo relativo de f , pero no es punto de pliegue de f .

Teorema 2.1 Si f tiene un extremo relativo en a , entonces a es un punto crítico de f .

Demostración. ✓ Si f no es derivable en a , entonces por definición se tiene que a es un punto crítico de f .

✓ Si f es derivable en a . Supongamos que $f'(a) > 0$ por definición de derivada se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0, \text{ entonces existe } \delta > 0 \text{ tal que } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

si $x \in (a - \delta, a + \delta)$; $x \neq a$.

Como el cociente es positivo, entonces tanto numerador como denominador deben tener el mismo signo:

1. Si $x > a$, entonces $f(x) > f(a)$, por lo tanto $f(a)$ no es máximo relativo.
2. Si $x < a$, entonces $f(x) < f(a)$, por lo tanto $f(a)$ no es un mínimo relativo.

Por lo tanto nuestra hipótesis de que $f'(a) > 0$ contradice el que $f(a)$ es un extremo relativo.

Análogamente si $f'(a) < 0$.

Luego la única posibilidad es $f'(a) = 0$. ■

Proposición 2.2 Si $f(a)$ es un punto de pliegue de f , entonces $f(a)$ es un valor crítico de f .

Demostración. Como $f(a)$ es un punto de pliegue de f , por la proposición 2.1 se tiene que $f(a)$ es un extremo relativo de f y por el teorema anterior a es un punto crítico. Por lo tanto $f(a)$ es un valor crítico de f . ■

El recíproco de la proposición anterior no se cumple. Veamos un ejemplo.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3,$$

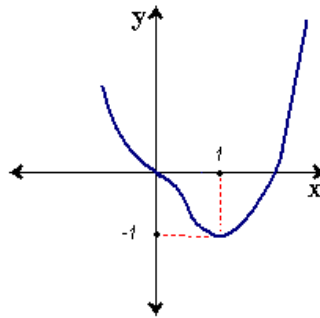
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2.$$

Igualemos f' a cero para encontrar los puntos críticos:

$$12x^3 - 12x^2 = 0,$$

$$12x^2(x - 1) = 0.$$

Puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.



El punto crítico $x = 0$ no da máximo ni mínimo relativo, por lo tanto $f(0)$ es un valor crítico pero no es un punto de pliegue de f .

Proposición 2.3 Una transformación polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grado n , produce a lo mas $n - 1$ pliegues.

Demostración. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$; $a_n \neq 0$ una transformación polinomial de grado n . Sabemos que f es derivable en todo su dominio, entonces

por el teorema fundamental del álgebra la ecuación

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} = 0$$

tiene a lo más $n - 1$ soluciones, luego por la proposición 2.2 podemos decir que los valores de x que son transformados en puntos de pliegue son soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. ■

Proposición 2.4 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si existen $a \in A$ y un intervalo abierto $(b, c) \subseteq A$ con $b < a < c$, y tales que:

1. $f[b, a] = f[a, c]$;
 2. f es uno a uno en $[b, a]$ y en $[a, c]$,
- entonces $f(a)$ es un punto de pliegue de f .

Demostración. Tenemos que f es continua y además f es uno a uno en $[b, a]$, entonces f debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[b, a]$.

Supongamos que f es estrictamente creciente en $[b, a]$, como f también es inyectiva en $[a, c]$ y $f[b, a] = f[a, c]$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a, c]$.

Para cualquier $x \in (b, c)$; $x \neq a$, hay dos posibilidades:

que $b < x < a$ ó $a < x < c$; en el primer caso se tiene $f(x) < f(a)$, por ser f creciente en $[b, a]$ y en el segundo caso también $f(x) < f(a)$ por ser f decreciente en $[a, c]$. Luego el intervalo (b, c) es una vecindad de a tal que $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (b, c)$; $x \neq a$.

Por lo tanto $f(a)$ es un punto de pliegue de f .

Análogamente si f es estrictamente decreciente en $[b, a]$. ■

Para la proposición anterior se tiene que f “pega” puntos de $[b, a]$ con puntos de $[a, c]$.

El recíproco de la proposición anterior no se cumple.

Por ejemplo la función de la figura B, tiene un pliegue en $x = 0$, pero no existe un intervalo (b, c) alrededor de cero tal que se satisfagan las condiciones de la proposición anterior.

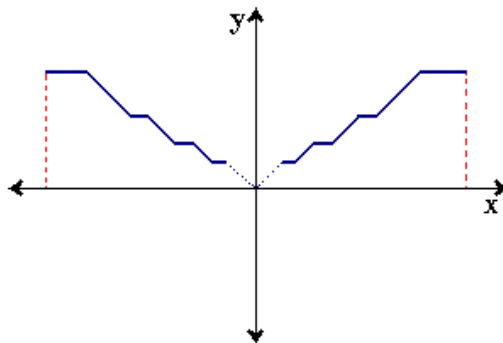


Figura B

Pero colocando una condición sobre derivabilidad tenemos la equivalencia:

Proposición 2.5 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable y con derivada continua en A , a un punto interior de A y V_a una vecindad de a tal que $f'(x)$ no es cero para ningún x en $V_a - \{a\}$. Entonces $f(a)$ es un punto de pliegue de f si y solo si existe $(b, c) \subseteq A$ con $b < a < c$ tal que:

1. $f[b, a] = f[a, c]$,
2. f es uno a uno en $[b, a]$ y $[a, c]$.

Demostración. \Rightarrow) Como $f(a)$ es punto de pliegue de f , existe un intervalo (p, q) tal que $a \in (p, q)$ y por ejemplo $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (p, q)$, con $x \neq a$.

Por hipótesis se tiene que para todo $x \in (p, q)$ con $x \neq a$, $f'(x) \neq 0$, entonces no pueden existir x_1 y x_2 en (p, a) tal que $f'(x_1)$ y $f'(x_2)$ tengan signos contrarios, pues de lo contrario por ser f' continua en A , entre x_1 y x_2 debería existir x con

$f'(x) = 0$, que contradice la hipótesis. Así, f' siempre es positiva o negativa en (p, a) y como $f(a)$ es máximo, entonces f es estrictamente creciente en (p, a) .

De la misma forma no pueden existir x_1 y x_2 en (a, q) tal que $f'(x_1)$ y $f'(x_2)$ tengan signos contrarios, pues de lo contrario por ser f' continua en A , entre x_1 y x_2 debería existir x con $f'(x) = 0$, que contradice la hipótesis y como $f(a)$ es máximo, entonces f es estrictamente decreciente en (a, q) . Luego f no es uno a uno en $[p, q]$, es decir, existen $b, c \in [p, q]$ tal que $f(b) = f(c)$ y $p \leq b \leq a \leq c \leq q$. Por lo tanto $f[b, a] = f[a, c]$ y f es uno a uno en $[b, a]$ y $[a, c]$.

\Leftrightarrow) Recíprocamente ya se demostró en la proposición 2.4. ■

La siguiente proposición es consecuencia del Teorema 1.4 y proporciona también, bajo ciertas condiciones, una caracterización de los puntos de pliegue.

Proposición 2.6 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto interior de A , para el cual existe n entero positivo tal que: $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^n(a) \neq 0$. Entonces $f(a)$ es un punto de pliegue de f si y solo si n es par.

Definición 2.3 Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua, f se dice **localmente inyectiva** en $x_0 \in X$, si existe una vecindad V de x_0 tal que f restringida a V es inyectiva.

Se dice que f es **localmente inyectiva** en X , si es localmente inyectiva para todo $x \in X$.

Proposición 2.7 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, A abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f tiene un punto de pliegue en $a \in A$, entonces f no es localmente inyectiva en a .

Demostración. Supongamos que f es localmente inyectiva en a , además como A es abierto, existe un intervalo abierto $(b, c) \subset A$ tal que $a \in (b, c)$ y f restringida a (b, c) es uno a uno. Como f es continua e inyectiva en (b, c) , entonces f es

estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (b, c) . Por lo tanto f no tiene extremo relativo en a y usando la proposición 2.1 f no tiene punto de pliegue en a , lo que contradice la hipótesis. ■

El recíproco de la proposición anterior no se cumple, por ejemplo para la función constante $f(x) = k; k \in \mathbb{R}$, claramente no es localmente inyectiva y tampoco tiene puntos de pliegue. (ver figura C).

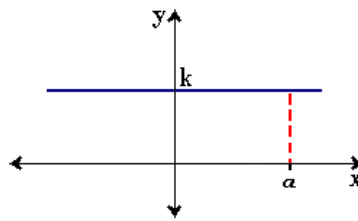


Figura C

Capítulo 3

PEGAMIENTOS EN EL PLANO

En este capítulo se analiza la parte tres del artículo [5], en el cual se formaliza el concepto de pegamiento, análogo al de pliegue pero válido en cualquier espacio topológico y se demuestra que para funciones analíticas del plano complejo tener un punto de pegamiento es equivalente a tener un punto crítico y a no ser localmente inyectiva.

La forma usual de representar funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 o del plano complejo en el plano complejo es similar a la forma biespacial de representar funciones de variable real (Estudiada en el capítulo 2).

Ejemplo 3.1 Sea $F(x, y) = (x^2, y)$.

Consideramos cada una de las dos funciones coordenadas como funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} y podemos afirmar que:

Para $f_1(x) = x^2$ (a lo largo del eje x) el plano sufre una modificación. Además claramente f_1 tiene un punto de pliegue en $f_1(0) = 0$.

Para $f_2(y) = y$ (a lo largo del eje y) el plano no sufre ninguna deformación por tratarse de la función idéntica.

Una representación biespacial de F sería: (aproximadamente; figura D).

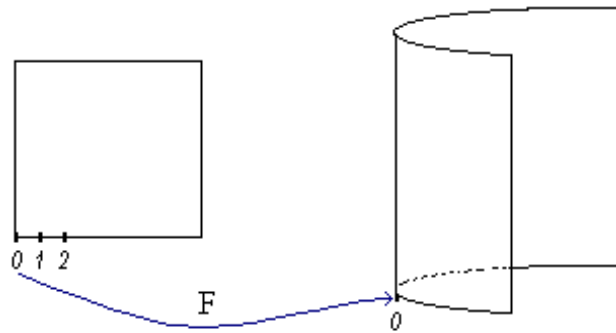


Figura D

Veamos algunos ejemplos de variable compleja (o del plano complejo en el plano complejo).

Ejemplo 3.2 $f(z) = e^{\pi z/a} = w$; $a = \text{constante compleja}$. Si $z = x + yi$, entonces $w = u + vi$;

$f(z) = f(x + yi) = e^{\pi(x+yi)/a} = e^{\pi x/a}(\cos \frac{\pi y}{a} + \text{sen} \frac{\pi y}{a}i) = u + vi$, igualando tenemos:

$$u = e^{\pi x/a} \cos \frac{\pi y}{a} \quad y \quad v = e^{\pi x/a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a}.$$

Plano z

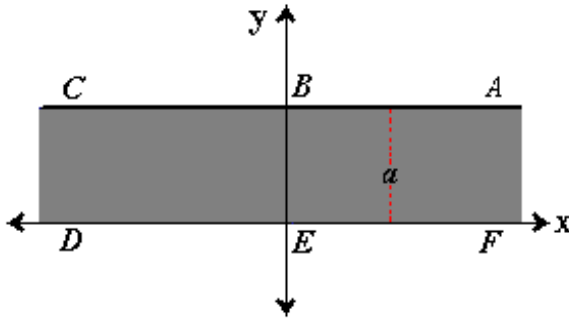


Figura E

Plano w

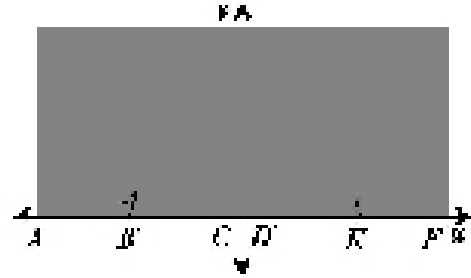


Figura F

1. La recta $y = 0$ (el eje real en el plano z ; DEF en la figura E) se aplica en $u = e^{\pi x/a}$ y $v = 0$, es decir, el eje real positivo en el plano w ; $D'E'F'$ en la figura F.
2. El origen $z = 0$, se aplica en E' , es decir, $u = 1$ y $v = 0$, en el plano w .
3. La recta $y = a$, (ABC en el plano z en la figura E) se aplica en $u = -e^{\pi x/a}$ y $v = 0$, es decir, el eje real negativo en el plano w ; $A'B'C'$ en la figura F.
4. Para cualquier punto del plano z que se encuentra en: $0 < y < a$ y $-\infty < x < \infty$, se aplica de manera única en un punto del plano w para la cual $v > 0$.

Ejemplo 3.3 $f(z) = \frac{a}{2}(z + \frac{1}{z}) = w$; $a = \text{constante compleja}$. Si $z = re^{\theta i}$, entonces $f(z) = f(re^{\theta i}) = \frac{a}{2}(re^{\theta i} + \frac{1}{re^{\theta i}}) = \frac{a}{2}(re^{\theta i} + \frac{1}{r}e^{-\theta i}) = \frac{a}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta + \frac{a}{2}(r - \frac{1}{r})\operatorname{sen}\theta i$, igualando tenemos:

$$u = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta \text{ y } v = \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \theta.$$

Plano z

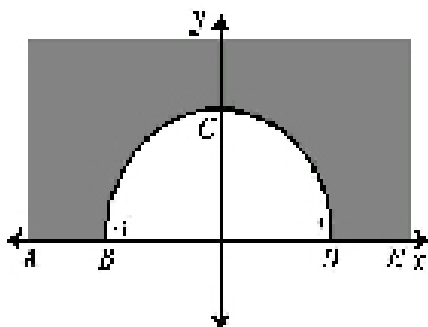


Figura G

Plano w

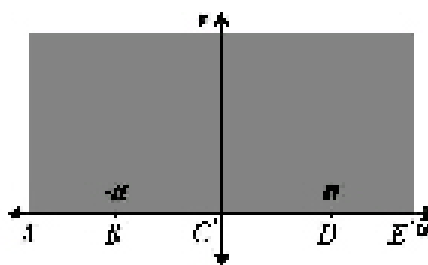


Figura H

1. El semicírculo BCD ($r = 1$ y $0 \leq \theta \leq \pi$) en la figura G, se aplica en el segmento $B'C'D'$ en la figura H, es decir, $u = a \cos \theta$ y $v = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$ y $-a \leq u \leq a$).
2. La semirecta DE ($\theta = 0$ y $r > 1$) en la figura G, se aplica en la semirecta $D'E'$ en la figura H, es decir, $u = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ y $v = 0$.
3. La semirecta AB ($\theta = \pi$ y $r > 1$) en la figura G, se aplica en la semirecta $A'B'$ en la figura H, es decir, $u = -\frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ y $v = 0$.
4. Para cualquier punto del plano z , para el cual $r > 1$ y $0 < \theta < \pi$ se aplica de manera única en un punto del plano w para el cual $v \geq 0$.

Analizados los ejemplos anteriores nos podemos preguntar:

¿Se podrá generalizar el concepto de pliegue para una función continua en \mathbb{R}^n , o más aún, para una función continua $f : X \rightarrow X$, donde X es un espacio topológico?

Una primera observación es que no podemos generalizar la definición de punto de pliegue para una función de variable real, al caso del plano complejo, porque la

definición de punto de pliegue hace uso del orden usual en \mathbb{R} .

Para formalizar el concepto de punto de pegamiento primero damos una definición, la cual surge al tratar de identificar lo que observamos de común en los casos real y complejo.

Definición 3.1 Sea X un espacio topológico. Llamaremos una **segmentación** de X a una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tales que:

1. $\text{int}(A_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in I$;
2. $\text{int}(A_i) \cap A_j = \emptyset$, para todo par $i \neq j$;
3. $\text{cl}(\cup_{i \in I} A_i) = X$.

Ejemplo 3.4 Sea (\mathbb{R}, τ) el espacio topológico, \mathbb{R} con la topología usual y

$V = \{(n, n + 1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Veamos que V es una segmentación de \mathbb{R} .

Para que V sea una segmentación de \mathbb{R} debe satisfacer las tres condiciones de la definición 3.1:

1. $\text{int}((n, n + 1]) = (n, n + 1) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\text{int}((n, n + 1]) = (n, n + 1)$, para $n, m \in \mathbb{Z}$ y $n \neq m$; se tiene $(n, n + 1) \cap (m, m + 1) = \emptyset$.
3. $\text{cl}(\cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1]) = \mathbb{R}$.

Por lo tanto V es una segmentación de \mathbb{R} .

Ejemplo 3.5 Sea $([a, c], \tau)$, donde τ es la topología que $[a, c]$ hereda de la topología usual de \mathbb{R} y $F = \{[a, b], [b, c]\}$, donde $a < b < c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Veamos que F es una segmentación de $[a, c]$.

Veamos que F satisface las tres condiciones de la definición 3.1

1. $\text{int}([a, b]) = (a, b) \neq \emptyset$ e $\text{int}([b, c]) = (b, c) \neq \emptyset$.
2. $\text{int}([a, b]) = (a, b)$, se tiene que $(a, b) \cap [b, c] = \emptyset$ y análogamente $[a, b] \cap (b, c) = \emptyset$.

$$3. \text{cl}([a, b] \cup [b, c]) = [a, c].$$

Por lo tanto F es una segmentación de $[a, c]$.

Una recta segmenta el plano en dos regiones y si n rectas se cortan en un punto se forman $2n$ regiones que segmentan el plano.

Definición 3.2 Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua, n entero mayor que 1. Diremos que f tiene un **pegamiento de orden n** en $a \in X$, si para toda vecindad V_a de a , existen otra vecindad $U_a \subseteq V_a$ y una segmentación de U_a con n subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_n tales que:

1. $a \in [\text{cl}(A_1) \cap \text{cl}(A_2) \cap \dots \cap \text{cl}(A_n)]$;
2. $f(\text{int}(A_i)) = f(\text{int}(A_j))$, para todo par i, j ;
3. f es inyectiva en A_i para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Diremos además que $f(a)$ es **punto de pegamiento de f** .

Proposición 3.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $a \in \mathbb{R}$. Si $f(a)$ es punto de pegamiento de orden 2, entonces $f(a)$ es punto de pliegue de f .

Demostración. Sea V_a vecindad de a , por hipótesis existen U_a otra vecindad de a contenida en V_a , digamos que $U_a = [b, c]$ con $b < a < c$ y una segmentación de U_a , $F = \{(b, a), (a, c)\}$ tal que satisface:

1. $f(b, a) = f(a, c)$;
2. f es inyectiva en (b, a) y (a, c) ;

Con estas condiciones y dada la continuidad de f , se obtendrá que $f[b, a] = f[a, c]$ y f es uno a uno en $[b, a]$ y $[a, c]$, por lo tanto por la proposición 2.4, $f(a)$ es punto de pliegue de f . ■

Para el ejemplo 3.1, todos los puntos de la recta $x = 0$ son puntos de pegamiento, donde podemos tomar una segmentación de orden 2 para cada punto.

(ver figura I).

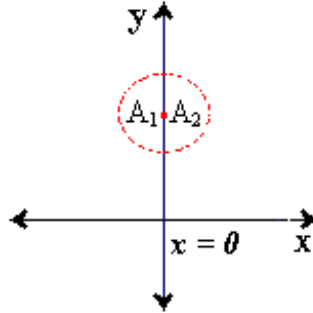


Figura I

Veamos dos ejemplos muy conocidos de variable compleja.

Ejemplo 3.6 $f(z) = z^2$. Sabemos que $z = re^{\theta i}$, entonces

$$f(z) = f(re^{\theta i}) = (re^{\theta i})^2 = r^2 e^{2\theta i}.$$

Veamos que para $z = 0$ f tiene un punto de pegamiento de orden 2.

Sea $V = \{(x, y)/x^2 + y^2 < r\}$, (para un r apropiado) una vecindad de $z = 0$ y una segmentación A_1 y A_2 como lo muestra la figura J, tal que:

1. $z = 0 \in (clA_1 \cap clA_2)$.
2. f transforma el $int(A_1)$ e $int(A_2)$ en todo el disco V_0 (ver figura K). Luego $f(intA_1) = f(intA_2)$.
3. f es inyectiva en A_1 y A_2 , porque tenemos que $f(z) = r^2 e^{2\theta i}$, entonces para cualquier par de elementos de A_1 o A_2 sus imágenes son diferentes, ya que cada elemento depende de su módulo (r), sin importar el ángulo.

Por lo tanto $f(0)$ es un punto de pegamiento de orden 2 de f .

Plano z

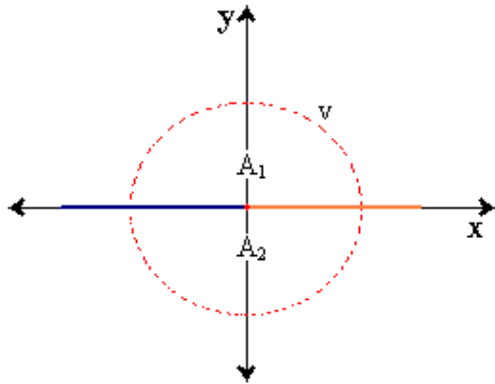


Figura J

Plano w

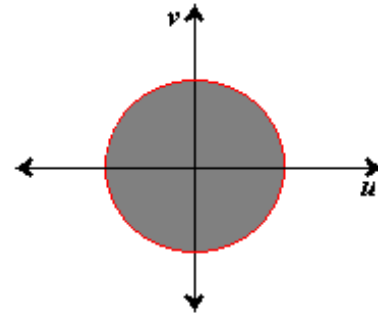


Figura K

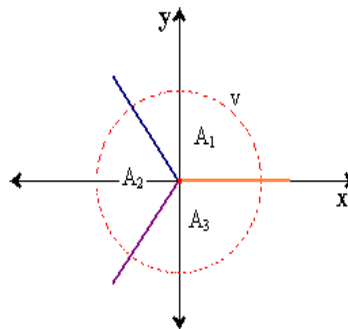
Ejemplo 3.7 $f(z) = z^3$, sabemos que $z = re^{\theta i}$, entonces

$$f(z) = f(re^{\theta i}) = (re^{\theta i})^3 = r^3 e^{3\theta i}.$$

Veamos que para $z = 0$ f tiene un punto de pegamiento de orden 3.

Análogamente al ejercicio anterior cumple las tres condiciones de la definición 2.

Por tanto $f(0)$ es un punto de pegamiento de orden 3 de f . (ver figura L).



Generalizando, analizamos la función de variable compleja $f(z) = z^n$, en particular

para $n = 2$ y $n = 3$, basándonos en estos análisis se tiene que para n entero mayor e igual que 2:

1. f multiplica por n el ángulo entre dos complejos no nulos.
2. Si se toman los complejos no nulos con ángulo entre 0 y π/n y se les aplica f , las imágenes llenan medio plano (ver figura M).
3. Si se trazan a partir del origen n semirectas con un ángulo entre ellas de $2\pi/n$, una segmentación apropiada se obtiene cuando se escoje una bola con radio suficientemente pequeño y se interseca con los interiores de las regiones formadas entre las semirectas.

Concluimos que la función $f(z) = z^n$; $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$, tiene un punto de pegamiento de orden n en $z = 0$.

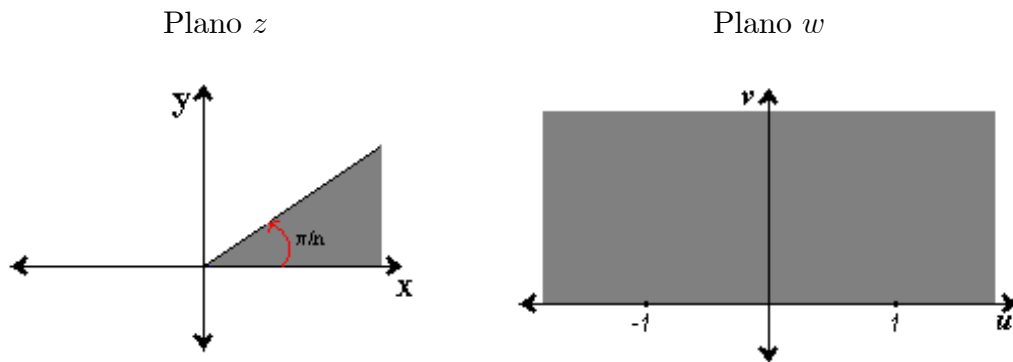


Figura M

Proposición 3.2 Sean $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo y $g : Y \rightarrow Z$ con un punto de pegamiento de orden n en $f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ tiene un punto de pegamiento de orden n en a .

Demostración.

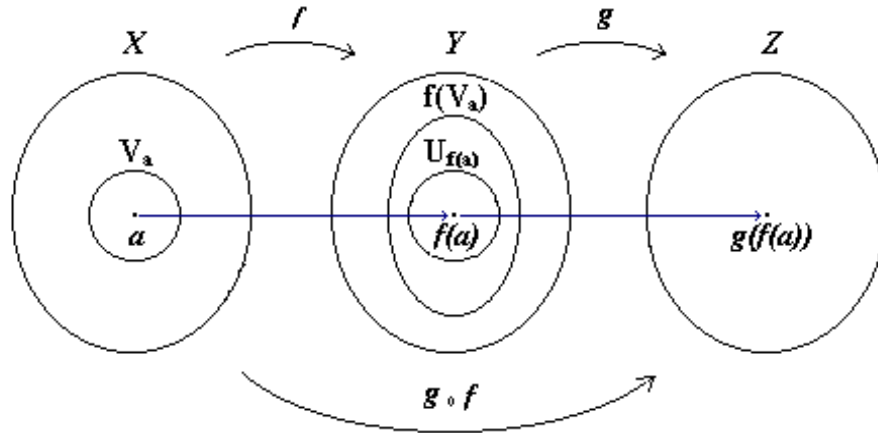


Figura N

Sea V_a vecindad de a , entonces por ser f homeomorfismo tenemos que $f(V_a)$ es vecindad de $f(a)$. Por hipótesis se sabe que existen $U_{f(a)}$ otra vecindad de $f(a)$ contenida en $f(V_a)$ y una segmentación de $U_{f(a)}$ con n subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_n tales que:

1. $f(a) \in [clA_1 \cap clA_2 \cap \dots \cap clA_n]$;
2. $g(intA_i) = g(intA_j)$, para todo par $i \neq j$;
3. g es inyectiva en A_i para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Además se sabe que f es biyectiva y bicontinua (homeomorfismo), entonces $f^{-1}(U_{f(a)})$ es una vecindad de a contenida en V_a y $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_n)$ es una segmentación de $f^{-1}(U_{f(a)})$ que satisface para $g \circ f$ las condiciones de la definición 3.2. ■

Para la siguiente proposición debe recordarse el concepto de función localmente inyectiva que introdujimos en el capítulo 2.

Proposición 3.3 Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$ continua y $a \in X$.

Si f tiene un punto de pegamiento de orden n en a , entonces f no es localmente inyectiva en a .

Demostración. Supongamos que f es localmente inyectiva en a , entonces existe V_a una vecindad de a tal que f es inyectiva en V_a .

Sea U_a otra vecindad de a tal que $U_a \subseteq V_a$ y sea A_1, A_2, \dots, A_n una segmentación de U_a donde: para todo i se tiene que $\text{int}(A_i) \neq \emptyset$ y para cada par $i \neq j$, $\text{int}(A_i) \cap \text{int}(A_j) = \emptyset$, luego si $\text{int}(A_i) \neq \text{int}(A_j)$, entonces $f(\text{int}A_i) \neq f(\text{int}A_j)$ porque f es inyectiva, contradiciendo que f tiene un punto de pegamiento de orden n en a , entonces $f(\text{int}A_i) = f(\text{int}A_j)$ y por lo tanto f no es localmente inyectiva en a . ■

Veamos un ejemplo para mostrar que el recíproco de la proposición anterior no se cumple:

Sea (X, τ) un espacio topológico, donde:

$X = \{a, b\}, \tau = \{X, \emptyset\}$ y sea la función constante definida de la siguiente forma (figura O):

$$f : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto f(x) = a$$

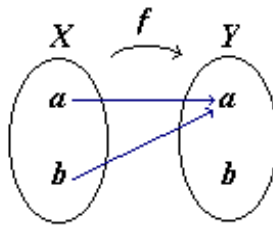


Figura O

Veamos que f no es localmente inyectiva en a ni en b .

Tomemos las vecindades de a y b :

$\mathcal{V}_a = \{X\}$ y $\mathcal{V}_b = \{X\}$.

Claramente vemos que f no es localmente inyectiva en a ni en b , por la forma como esta definida la función.

Ahora veamos que f no tiene ningún punto de pegamiento:

La única vecindad de a es X , no existe otra vecindad contenida en X y no existe segmentación de X , por tanto no existe punto de pegamiento en a .

Análogamente para b .

A continuación se da un resultado que se refiere al caso particular de funciones de varias variables continuamente diferenciables.

Proposición 3.4 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable. Si $f(a)$ es punto de pegamiento, entonces el determinante jacobiano de f en a es igual a cero.*

Demostración. Supongamos que el determinante jacobiano de f en a es diferente de cero, entonces por el teorema de la función inversa existe un conjunto abierto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que:

1. $a \in X$
2. f es uno a uno en X ,

entonces por la proposición 3.3 se tiene que f no tiene punto de pegamiento en a , contradiciendo la hipótesis. Por tanto el determinante jacobiano de f en a es igual a cero. ■

El recíproco de la proposición anterior no se cumple, basta tomar la función de variable real $f(x) = x^3$ en el punto $a = 0$, pues en este caso $f'(0) = 0$, pero $f(x) = x^3$ no tiene punto de pegamiento en $a = 0$.

Proposición 3.5 *Si f es una función del plano complejo en el plano complejo, analítica en z_0 tal que $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ para algún entero positivo $n \geq 2$, entonces f tiene un pegamiento de orden n en z_0 .*

Demostración. Podemos suponer sin perder generalidad que $z_0 = 0$ y que $f(z_0) = 0$. Como f es analítica en z_0 y z_0 es un cero de orden n , entonces $f(z) = z^n g(z)$ donde g es una función analítica y tal que $g(z) \neq 0$ para todo z en alguna vecindad de cero ([3], pág. 167). Ahora, es claro que $f(z) = (zh(z))^n$, donde $h(z) = e^{(\ln g(z))/n}$, tal que $h(z)$ existe en una vecindad de cero por ser $g(z) \neq 0$ en dicha vecindad, y además se cumple que la función $zh(z)$ es, en una vecindad de cero, inyectiva, puesto que la derivada de $zh(z)$ es no nula en cero; además, $zh(z)$ es abierta por ser analítica.

Tenemos entonces que $f(z)$ se puede ver en una vecindad de cero como la compuesta entre una función biyectiva y bicontinua ($zh(z)$) y la función z^n , que en dicho punto posee un pegamiento de orden n ; esto por la proposición 3.2, por lo tanto f tiene un pegamiento de orden n en z_0 . ■

Ejemplo 3.8 $f(z) = kz^n$; k constante compleja, $k \neq 0$.

Para $z_0 = 0$ se tiene que $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) = kn! \neq 0$.

luego f tiene un pegamiento de orden n en z_0 .

Proposición 3.6 Si f es una función del plano complejo en el plano complejo, analítica en z_0 y localmente inyectiva en z_0 , entonces $f'(z_0) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $f'(z_0) = 0$, entonces $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ para algún $n \geq 2$, y por la proposición 3.3 f tiene un pegamiento de orden n en z_0 , entonces f no es localmente inyectiva en z_0 . Contradicción de la hipótesis, por lo tanto $f'(z_0) \neq 0$. ■

El artículo finaliza planteando la siguiente pregunta (que sigue aún abierta):

¿Qué condiciones se necesitan para que el recíproco del teorema de la función inversa se cumpla en funciones diferenciables de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 ?

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APOSTOL, T.M. *Análisis matemático*, Editorial Reverté, Barcelona, 1981.
- [2] ARMSTRONG, M.A. *Topología Básica*. Editorial Reverté, S.A. España 1987.
- [3] CHURCHILL, R.V., BROWN, J. Y VERHEY, R. *Complex Variables and applications*. McGraw Hill, 1974.
- [4] ELDRIDGE, P. Vance. *Álgebra y Trigonometría*. Fondo educativo interamericano, S.A. 1978.
- [5] ISAACS, R. y SABOGAL, S. *Pliegues y pegamientos de la recta y el plano*. Revista integración, departamento de Matemáticas, UIS, Vol 12, N° 1, 1994; Pág 5-24.
- [6] MUNKRES, James. *Topology a First Course*. Prentice Hall, 1975.
- [7] ROBERT, G. Bartle y SHERBERT, R. Donald. *Introducción al análisis matemático*. Editorial Limusa S.A. México, 1999.
- [8] SPIEGEL, M.R. *Variable compleja*. Serie schaum, Mac Graw Hill, 1983.