

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Aula Virtual de GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de la fracción como
medidor, operador y razón

Camilo Andrés Avendaño Hernández y Andrey Reinaldo Ortiz Cruz

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las
Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga, Santander

2026

Dedicatoria

A Dios, porque de Él, por Él y para Él son todas las cosas (Romanos 11:36).

*A Rosa Hernández y Ciro Avendaño, ejemplo de resiliencia y fortaleza;
a ustedes, que sostuvieron mis sueños cuando el camino se tornó difícil,
dedico cada página de este logro que también les pertenece.*

*A mis hermanos, por acompañarme a lo largo de este camino;
en especial, a Aura Avendaño, quien, aun en medio de sus
propios problemas, siempre buscó ayudarme.*

*A mi tía Teresa Hernández, quien siempre actuó como mi madre
en mi estancia en Bucaramanga.*

*A cada uno de los amigos que hice en la universidad; en especial,
a Luis, Sofía, Melissa y Lizeth, quienes se convirtieron en mi apoyo
constante y en la mejor compañía durante este camino*

*Finalmente, pero no menos importante, a Residencias UIS, que se convirtieron
en mi segundo hogar y por lo que siempre estaré agradecido.*

Camilo Avendaño

*Matilde Cruz y Reinaldo Ortiz.
quienes con su amor y esfuerzo sembraron en mí lo que hoy soy.
Este logro también es suyo.*

Andrey Ortiz

Agradecimientos

Inicialmente a Dios por ser esa fuente inagotable de refugio, amor y fortaleza para con nosotros.

A lo largo de este trayecto contamos con el apoyo de muchas personas, cuyas acciones son invaluable. En especial a nuestra familia, amigos y conocidos; a cada uno de ellos, gracias por hacer que lo que empezó como un sueño poco a poco se fuese transformando en una realidad.

A nuestro director de tesis, por creer en nosotros, por sus constantes correcciones y su completa disposición para con nosotros, a él, muchas gracias.

A la profe Marcela y al Semillero Matemático UIS, quienes de muy buena fé quisieron colaborarnos para la implementación de este trabajo investigativo; sin ellos, este no hubiese sido posible.

A todos ustedes, infinitas gracias por acompañarnos en este camino.

Camilo Avendaño y Andrey Ortiz.

Tabla de contenido

Introducción	9
1. Antecedentes	13
Principales desafíos en la comprensión de las fracciones	13
1.2. Confusión en las representaciones simbólicas	14
1.3. Dificultad con la equivalencia y la comparación	15
1.4. Complejidad en las operaciones	16
2. Planteamiento del problema	17
2.1 Objetivo General	17
2.2 Objetivos específicos	17
2.3 Justificación del problema	18
3. Marco de referencia	21
El archipiélago de los fraccionarios	21
3.1 Isla de los medidores	23
3.2 Isla de los operadores	24
3.3 Isla de las razones	26
4. Metodología	28
4.1 Planeación de la secuencia de enseñanza en el aula virtual de GeoGebra	35
4.2. Implementación de la secuencia de enseñanza	53
4.3. Recolección de datos	56
4.4. Producción de resultados	57

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

5. Resultados	58
5.1. Resultados del Pre-Test	58
5.2. Actividades presentadas en el Aula Virtual de GeoGebra.	65
5.3. Resultados del Postest	79
5.4. Comparativo pretest y postest	84
6. Ajustes a la secuencia del Aula Virtual de GeoGebra	86
7. Conclusiones	88
Referencias Bibliográficas	90

Lista de Figuras

Figura 1. Estructura general de una investigación de diseño.	29
Figura 2. Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.	30
Figura 3. Imagen ilustrativa del problema.	35
Figura 4. El archipiélago de los fraccionarios.	36
Figura 5. Primer applet de la isla de los medidores.	37
Figura 6. Retroacciones del primer applet de la isla de los medidores.	38
Figura 7. Segundo applet de la isla de los medidores.	39
Figura 8. Applet de puente isla medidores a operadores.	41
Figura 9. Primer applet de la isla de los operadores (Fracción como operador I).	44
Figura 10. Segundo applet de la isla de los operadores (Fracción como operador I).	44
Figura 11. Applet de la isla de los operadores (Fracción como operador II).	47
Figura 12. Applet de puente isla operadores a razones.	49
Figura 13. Retroacciones del applet de puente isla operadores a razones.	50
Figura 14. Applet de isla de las razones.	51
Figura 15. Imagen ilustrativa del problema.	52
Figura 16. Implementación del pilotaje del Aula virtual de GeoGebra.	54
Figura 17. I sesión de la implementación con estudiantes del semillero matemático UIS.	55
Figura 18. II sesión de la implementación con estudiantes del semillero matemático UIS.	55
Figura 19. Diagrama circular con los resultados obtenidos en el Pretest.	60
Figura 20. Respuestas de E7 en los problemas de fracción como medidor en el Pre-Test.	61
Figura 21. Respuesta de E14 en el problema p4 de fracción como operador en el Pre-Test.	62

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Figura 22. Respuesta de E9 en el problema de fracción como razón en el Pre-Test.....	63
Figura 23. Respuesta de E7, E8 y E14 en la tarea 1.2 en el primer momento del capítulo 1.	66
Figura 24. Respuesta de E15 en la tarea 2.3 en el segundo momento del capítulo 1.....	69
Figura 25. Respuesta de E14 en la tarea 1.5 del capítulo 2.	71
Figura 26. Respuesta de E15 para la tarea 1.5 del capítulo 2.....	71
Figura 27. Respuesta de E4, E5 y E11 para la tarea 1.2 del subcapítulo operador I del capítulo 3.	72
Figura 28. Respuesta de E12 para la tarea 1.1 del subcapítulo operador I del capítulo 3.	73
Figura 29. Respuesta de E15 para la tarea 1.1 del subcapítulo operador II del capítulo 3..	74
Figura 30. Respuesta de E9 para la tarea 2 del capítulo 4.....	77
Figura 31. Respuesta de E14 para la tarea 1.3 del capítulo 5.....	79
Figura 32. Diagrama circular con los resultados del postest.	81
Figura 33. Respuesta de E7 en el problema 9 fracción como razón en el postest.....	82
Figura 34. Respuestas de E14 en los problemas de fracción como medidor en el postest..	82

Lista de Tablas

Tabla 1. Tareas a ejecutar en cada una de las etapas de un experimento de enseñanza.	32
Tabla 2. Cronograma de tareas ejecutadas y por ejecutar en las etapas de un experimento de enseñanza, además de aquellas que conciernen a la entrega del documento final.	34
Tabla 3. Semáforo de resultados del Pre-Test.	58
Tabla 4. Semáforo de resultados del primer momento del capítulo 1.	65
Tabla 5. Semáforo de resultados del segundo momento del capítulo 1.....	67
Tabla 6. Semáforo de los resultados del capítulo 2.	69
Tabla 7. Semáforo de los resultados del subcapítulo operador I del capítulo 3.	71
Tabla 8. Semáforo de los resultados del subcapítulo operador II del capítulo 3.	73
Tabla 9. Semáforo de los resultados del capítulo 4.	75
Tabla 10. Semáforo de los resultados del capítulo 5.	77
Tabla 11. Semáforo de resultados del postest.....	80
Tabla 12. Resultados del postest categorizado como fracción como medidor, operador y razón.	81

Resumen

Título: Aula Virtual de GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón.¹

Autor: Camilo Andrés Avendaño Hernández y Andrey Reinaldo Ortiz Cruz.²

Palabras Clave: GeoGebra, Aula Virtual, Fracción, Archipiélago de los fraccionarios, Experimento de enseñanza.

Descripción:

El texto presenta una investigación centrada en el diseño e implementación de una secuencia didáctica en un Aula Virtual de GeoGebra como recurso tecnológico para fortalecer la comprensión de las fracciones como medidor, operador y razón en estudiantes de sexto grado. Basada en la teoría del “Archipiélago Fraccionario” de Carlos Eduardo Vasco Uribe (1998), la secuencia busca superar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones mediante actividades interactivas y herramientas tecnológicas que favorecen la visualización, la exploración y la construcción significativa del conocimiento matemático.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Abstract

Title: GeoGebra Virtual Classroom as a Didactic Resource for Understanding Fractions as a Measure, Operator, and Ratio.³

Author(s): Camilo Andrés Avendaño Hernández y Andrey Reinaldo Ortiz Cruz.⁴

Key Words: GeoGebra, Virtual classroom, Fraction, Fractional Archipelago, Teaching experiment.

Description:

The text presents a research study focused on the design and implementation of a didactic sequence in a GeoGebra Virtual Classroom as a technological resource to strengthen sixth-grade students' understanding of fractions as measures, operators, and ratios. Based on the "Fractional Archipelago" theory proposed by Carlos Eduardo Vasco Uribe (1998), the sequence aims to overcome students' difficulties in learning fractions through interactive activities and technological tools that promote visualization, exploration, and the meaningful construction of mathematical knowledge.

³ Bachelor thesis

⁴ Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in mathematics. Director: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Introducción

A través del tiempo, el concepto de fracción ha cambiado y se ha vuelto esencial para el razonamiento matemático, posibilitando la representación y las operaciones con números que no son enteros. Sin embargo, a pesar de su importancia en múltiples disciplinas, la forma en que se enseña sigue enfrentando retos considerables. Al respecto, Acevedo (2012) señala que “la complejidad en el proceso de aprendizaje de las fracciones emerge de los diversos significados del concepto, tales como partidor, razón, operador, cociente, medidor, entre otros, y de la interconexión entre estos” (p. 36), lo que genera confusión y dificultad su aprendizaje. Esta dificultad puede compararse con un viaje a través de un "archipiélago fraccionario", en el que los estudiantes, sin una orientación clara y con vacíos conceptuales acumulados, se ven extraviados entre sus múltiples conceptos. Vasco (1998), algunas islas de este archipiélago “están totalmente aisladas de las otras: para ir a ellas hay que remar muy duro, y hasta se puede uno perder en el camino” (p.25) lo que ilustra el proceso de aprendizaje enfrenta riesgos constantes de estancamiento y retroceso.

Por lo tanto, el presente estudio se basa en una propuesta innovadora basada en el diseño y la implementación de un Aula Virtual de GeoGebra como recurso didáctico. Este recurso se presenta como un elemento orientador que facilita la comprensión de las fracciones desde sus tres interpretaciones fundamentales: medidor, operador y razón. En este sentido Arbain y Shukor (2015) señalan que “GeoGebra puede beneficiar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes y diversificar el aprendizaje en las aulas” (p. 208). Cabe resaltar que la investigación se llevará a cabo con estudiantes de sexto grado en un rango de edades entre 11 y 12 años, tomando como marco conceptual la teoría del *Archipiélago Fraccionario* de Vasco (1998), con el propósito de fortalecer el aprendizaje y la construcción del conocimiento matemático en este ámbito.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

En la primera sección se presentan los antecedentes, donde se expone cómo el problema de las fracciones ha evolucionado con el tiempo. La segunda sección está dedicada a los objetivos generales y específicos que guiarán el estudio, junto con la justificación del problema, donde se explican las dificultades relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

La tercera sección corresponde al marco de referencia, el cual se fundamenta en el contexto del "archipiélago de los fraccionarios" propuesto por Vasco (1998). Este marco se organiza en tres islas principales: la de los medidores, los operadores y las razones. Además, para explicar ciertos aspectos relacionados con la isla de los operadores, se recurrió a la teoría de los modos de pensamiento, enfocándose exclusivamente en el Modo Sintético Geométrico (SG).

En la cuarta sección se hablará sobre el marco metodológico que pretendemos usar en nuestra investigación, además de la planeación, implementación, recolección y producción de resultados de nuestra Aula Virtual de GeoGebra (AVG). En la quinta sección expondremos los resultados de la implementación para cada él pretest, postest y cada una de las actividades presentadas en el AVG.

En la sexta sección describiremos los posibles cambios que podrían realizarse al AVG con el fin de mejorar este recurso tecnológico, finalmente pero no menos importante, expondremos las conclusiones a las cuales llegamos después de la culminación de este trabajo.

1. Antecedentes

El concepto de los números fraccionarios se remonta a civilizaciones como la egipcia, babilónica y china, En el caso de los egipcios, Ruiz Cruz (2013) señala que "los textos matemáticos más antiguos que existen son dos papiros egipcios, uno llamado papiro Moscú y, el otro llamado papiro Rhind" (p. 20). Diversos investigadores e historiadores han encontrado que, en los papiros egipcios, por ejemplo, se empleaban fracciones unitarias ($1/n$) para representar partes iguales de un todo, ya que "sólo operaban con fracciones de la unidad, las demás fracciones debían ser reducidas a suma de fracciones con numerador 1" (Ruiz Cruz, 2013, p. 22). "Por su parte, los babilonios desarrollaron un sistema sexagesimal que incluía fracciones para cálculos precisos en álgebra y geometría, evidenciado en documentos como la Tablilla Plimpton 322 (Ruiz Cruz, 2013, p. 33)."

"La enseñanza de las fracciones en educación Básica presenta desafíos tanto al docente como al estudiante [...] La limitación del concepto de fracción a dos formas sin incluir otras como, por ejemplo, razón, porcentaje, medida, operador, probabilidad, permite concentrar los esfuerzos en la comprensión conceptual más que en lo procedimental o algorítmico" (Ruiz Cruz, 2013, p. 18).

Principales desafíos en la comprensión de las fracciones

Pese a la importancia de las fracciones en la enseñanza de las matemáticas, su aprendizaje continúa siendo un desafío considerable para numerosos alumnos. La dificultad se centra en el cambio desde una comprensión intuitiva basada en experiencias cotidianas hacia una comprensión formal y abstracta, pues como señala Ruiz Cruz (2013), "la enseñanza de las fracciones en educación Básica presenta desafíos tanto al docente como al estudiante, se tienen principalmente dos razones para esto, por una parte, se cambia el 'buen orden' de los números naturales y, por otra parte, se presenta el concepto de densidad" (p. 18). Diferentes factores influyen en esta complejidad desde la percepción de los números hasta la interpretación de su representación simbólica y la complejidad para manejarlos. A continuación, se examinan algunos de los retos más significativos a los que se enfrentan los estudiantes al entender las fracciones.

1.1. Concepción de los números como entidades discretas

En los primeros años de educación matemática, los estudiantes tienden a ver los números como contadores de objetos enteros, o sea, como entidades discretas que representan cantidades completas. Esta visión inicial puede dificultar la transición hacia una comprensión más abstracta, en la que los números fraccionarios se interpretan como divisores o partes de un todo continuo pues los estudiantes piensan en "partir el pan, la pizza, la naranja, etc., y no en cualidades que puedan representar unidades de medida de estos objetos" (Acevedo Rico, 2012, p. 38).

Los métodos convencionales de instrucción generalmente presentan las fracciones de forma algorítmica sin vincularlas con experiencias relevantes, lo que conduce a un aprendizaje mecánico en vez de un aprendizaje consciente. Esta situación dificulta la transferencia de conocimientos a contextos prácticos y limita el desarrollo del pensamiento matemático (Vasco, 1988, p. 25). Como resultado, los estudiantes pueden aprender a operar con fracciones en términos de reglas y procedimientos, pero sin comprender verdaderamente su significado.

Para vencer este obstáculo, es esencial que los profesores promuevan vivencias que permitan a los estudiantes a visualizar las fracciones en situaciones específicas. Tareas como la medición de distancias, la distribución de materiales o la ilustración gráfica en la línea numérica pueden ayudar a adquirir un entendimiento más detallado de la naturaleza continua de los números fraccionarios.

1.2. Confusión en las representaciones simbólicas

El sistema de anotación de las fracciones supone un reto extra, dado que requiere entender dos elementos: el numerador, que indica cuántas partes se están considerando, y el denominador, que define el tamaño de esas partes (Freudenthal, 1983, p. 6). Sin una conexión clara entre los símbolos y su representación concreta, los estudiantes pueden interpretar erróneamente las fracciones y cometer errores frecuentes (Acevedo Rico, 2012, p. 39).

Este problema se intensifica cuando los estudiantes no cuentan con una base conceptual sólida y

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

se les introduce de manera anticipada en la utilización de algoritmos sin haber entendido previamente el significado del mismo. En estas situaciones es habitual que los estudiantes tengan problemas para distinguir entre fracciones propias e impropias, entender la equivalencia entre fracciones o reconocer adecuadamente la relación entre el numerador y el denominador.

Por esta razón, es esencial que la enseñanza de las fracciones incluya representaciones visuales, como diagramas de área, líneas numéricas y materiales manipulativos, antes de abordar la notación simbólica. Estas estrategias permiten establecer un vínculo más sólido entre la representación abstracta y su significado real, facilitando el proceso de aprendizaje (Freudenthal, 1983, p. 5). También se recomienda la implementación de tecnologías pedagógicas, tales como simulaciones interactivas y entornos virtuales puede potenciar la comprensión y mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes.

1.3. Dificultad con la equivalencia y la comparación

Otro elemento crucial en el aprendizaje de las fracciones consiste en la capacidad de reconocer su equivalencia y compararlas. Comprender, por ejemplo, que $1/2$ y $2/4$ representan la misma cantidad, requiere un conocimiento consolidado de las relaciones multiplicativas y de la proporcionalidad (Acevedo Rico, 2012, p. 40); no obstante, este razonamiento no es inmediato por todos los estudiantes y se puede generar confusión.

La dificultad para establecer equivalencias entre fracciones se puede originar de una comprensión limitada de la multiplicación y la división, dado que estos conceptos son esenciales para identificar patrones y relaciones entre diferentes representaciones de fracciones. Como resultado, los estudiantes pueden llegar a interpretar que las fracciones con diferentes representaciones simbólicas corresponden a valores diferentes, que en consecuencia obstaculiza la comprensión y aplicación en la resolución de problemas

La utilización de diagramas de área y líneas numéricas ha demostrado ser una estrategia eficiente para ayudar a visualizar como diferentes fracciones pueden representar la misma cantidad (Freudenthal, 1983, p. 13); sin embargo, muchas metodologías de enseñanza no enfatizan suficientemente estas

herramientas, lo que puede dejar a los estudiantes con una comprensión incompleta o poco estructurada (Vasco, 1988, p. 27).

1.4. Complejidad en las operaciones

La suma y la resta son las operaciones en las cuales los estudiantes representan una mayor dificultad, ya que operar con fracciones implica pasos intermedios, como encontrar el denominador común, lo que aumenta la carga cognitiva del proceso (Freudenthal, 1983, p. 18).

Esta confusión se refleja en que los estudiantes tienden a cometer errores al realizar operaciones con fracciones, como sumar numeradores y denominadores directamente sin considerar el requisito de un denominador común de igual manera el uso mecánico de reglas y procedimientos sin una adecuada comprensión conceptual, lo que limita la capacidad de que los estudiantes puedan aplicar estos conocimientos en situaciones nuevas o de mayor complejidad

Para evitar que los estudiantes recurran a la mecanización de los procedimientos sin una comprensión profunda, es importante que la enseñanza vaya más allá de los algoritmos. En cambio, se debe fomentar el desarrollo del razonamiento matemático y el sentido numérico, promoviendo estrategias que permitan comprender el significado de las operaciones en diferentes contextos (Vasco, 1988, p. 28). También es importante la incorporación de herramientas manipulativas y representaciones visuales que pueden facilitar este proceso de la comprensión de los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones

2. Planteamiento del problema

2.1 Objetivo General

Evaluar la implementación de una secuencia de enseñanza diseñada en el Aula Virtual de GeoGebra para la comprensión de las fracciones como medidores, operadores y razones.

2.2 Objetivos específicos

1. Identificar las principales dificultades en la comprensión de las fracciones en sus diferentes formas a partir de la aplicación de un pretest con el fin de proyectar la creación del libro interactivo.
2. Contribuir en la comprensión de la fracción como medidor por medio de un applet dinámico que permita manipular y visualizar unidades y participaciones en contextos significativos.
3. Favorecer la comprensión de la fracción como operador a través de un applet dinámico que permita manipular y visualizar fracciones con transformaciones de cantidades en contextos significativos.
4. Promover la comprensión de la fracción como razón mediante un applet dinámico que permita explorar las relaciones existentes entre distintas cantidades en contextos proporcionales.
5. Realizar ajustes a la secuencia de enseñanza y comparar las dificultades obtenidas en el pretest inicial y los resultados obtenidos en el posttest debidamente aplicado después de la implementación de los recursos diseñados en GeoGebra.

2.3 Justificación del problema

Las fracciones como concepto, poco a poco se han ido ganando un gran espacio y relevancia en el ámbito educativo e investigativo, cualquiera pensaría que esta trascendencia obedece a algo positivo, pero lastimosamente no es así. Según Quiroz et al. (2009), la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se están convirtiendo en un asunto cada vez más complejo, ya que este objeto matemático suele entenderse en los colegios como un saber innato que requiere únicamente la mera aplicación de algoritmos o reglas. Por lo tanto, los estudiantes, en su afán por cumplir con los deberes académicos, consideran que la memorización de estos procedimientos es lo realmente importante, descuidando así la comprensión profunda y verdadera del concepto.

Esta forma de percibir el concepto de fracción refleja una metodología tradicional que, con el paso del tiempo, ha demostrado ser obsoleta e ineficaz. Sin embargo, Vasco (1998) ya nos había advertido sobre esta problemática al enfatizar que las fracciones, como un sistema matemático, no debían transmitirse al estudiante haciendo uso únicamente de símbolos u operaciones, sino que dicho concepto debía partir de la exploración de sistemas concretos que les fueran familiares a los estudiantes. Este enfoque permitiría a los estudiantes construir significados más amplios y profundos sobre las fracciones.

Cuánta razón tenía el doctor Carlos Eduardo Vasco, especialmente si consideramos la antigüedad de sus reflexiones. Hoy en día, podríamos pensar que al identificar el origen del problema tenemos la solución; sin embargo, esto va más allá. Aunque los docentes se esfuerzan por adoptar estrategias innovadoras y centradas en el estudiante, el logro de un verdadero aprendizaje del concepto de fracción sigue siendo un desafío constante.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

¿Por qué afirmamos que el docente se queda corto al alcanzar esta meta? La razón es que, en muchas ocasiones, los docentes se limitan a una enseñanza teórica, olvidando el componente didáctico, el cual enriquece significativamente el proceso de aprendizaje. Como nos lo indica Rogoff (1993) “*El profesor, además de estructurar situaciones de aprendizaje, debe tener en cuenta la autonomía del niño, su curiosidad, su imaginación, creatividad y motivación, creando un clima adecuado para que se manifiesten y desarrollen*”. (p.124)

Este llamado a un enfoque más integral resalta la necesidad de conectar el contenido matemático con las vivencias y capacidades individuales de los estudiantes. Para nadie es un secreto que, si un concepto matemático carece de significado, tiende a ser olvidado. Por ello, es muy importante dotarlo de sentido, y qué mejor manera de hacerlo que partiendo de lo concreto, es decir, de situaciones de la vida cotidiana.

Actualmente, con las nuevas investigaciones y novedosos avances, se han diseñado estrategias y herramientas más efectivas para lograr una mejor comprensión del concepto de fracción. No obstante, lo que hemos observado es que estas suelen enseñar el concepto de forma aislada, sin establecer conexiones significativas con otros temas. Además, muchas de estas propuestas permanecen en un formato estático, como guías físicas, lo que representa un obstáculo en un mundo que avanza rápidamente hacia la transformación digital.

En concordancia con todo lo anterior y desde nuestra experiencia como estudiantes, podemos reconocer que, desafortunadamente, la enseñanza del concepto de fracción en nuestra etapa escolar se hacía de manera aislada, muchas veces sin considerar que existen diversos significados de la fracción tales como: medidor, operador, razón, etc. En este sentido, es importante destacar que el curso de tecnologías y educación resultó fundamental para elegir el tema de esta investigación, debido a que nos permitió adquirir nuevos conocimientos en el campo tecnológico y, además, de evidenciar que este tipo de problemas en la enseñanza de la fracción aún continúan en la licenciatura. Por ello, todo lo anteriormente

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

mencionado nos motivó a trabajar en algo innovador. Esta situación nos llevó a diseñar una secuencia de enseñanza en el formato libro del Aula Virtual de GeoGebra que aborda tres aspectos fundamentales, i) las reflexiones sobre las fracciones en el contexto de la renovación curricular; ii) la búsqueda de dinamizar los conceptos, superando la enseñanza puramente teórica; iii) el paso de lo convencional a lo tecnológico, que consideramos el mayor aporte de este trabajo.

3. Marco de referencia

En la sección 3 se ofrece una explicación del marco de referencia "Archipiélago de los Fraccionarios" planteado por Vasco (1998), los elementos que lo componen y sustentan la tesis. Este marco se organiza en tres islas principales: la de los medidores, los operadores y las razones. Además, para explicar ciertos aspectos relacionados con la isla de los operadores, se recurrió a la teoría de los modos de pensamiento, enfocándose exclusivamente en el Modo Sintético Geométrico (SG).

El archipiélago de los fraccionarios

Diversas investigaciones han abordado el fenómeno de las fracciones; entre tantas, Vasco (1998) explica que el enfoque pedagógico en la enseñanza de las matemáticas sugiere una forma clara de abordar cualquier sistema matemático. Se propone visualizarlo como un haz de luz que, al descomponerse, revela tres superficies, las cuales son: los sistemas simbólicos, los cuales se perciben a primera vista; los sistemas conceptuales, los cuales destacan por su valor; y los sistemas concretos, que no necesariamente deben ser objetos, sino aquellos sistemas prematemáticos o conceptos que el estudiante ya posee. A su vez, nos explica que cada una de estas capas, como si se tratara de un fractal, se divide en otras tres más, las cuales, más allá de ser sistemas, pasan a denominarse aspectos, empezando por un grupo de componentes o elementos con los que se interactúa, seguido de un conjunto de transformaciones u operaciones realizadas sobre ellos, para finalmente llegar a un conjunto de relaciones entre ellos.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, Vasco (1998) es claro al resaltar que el enfoque pedagógico tradicional busca que los estudiantes pasen de trabajar con sistemas simbólicos a comprender los sistemas conceptuales. No obstante, este objetivo solo es alcanzado por pocos estudiantes, que por lo general son aquellos que logran tener una mayor capacidad para

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

abstraer y conceptualizar los conceptos. Claramente, la mayoría de ellos no logra hacer esta transición y se limita a manipular de forma mecánica los símbolos, memorizando definiciones y tratando de intuir las respuestas que el docente espera. En algunos casos, si demuestran habilidad en estos aspectos, pueden engañarse a sí mismos y dar la impresión de que comprenden los conceptos, incluso engañando al propio profesor de que lo han logrado. Si bien, el procedimiento que Vasco ratifica como idóneo a seguir es el de partir del sistema concreto, del cual los estudiantes ya presentan nociones, y a partir de estos, se pueden edificar los sistemas conceptuales que se espera que ellos desarrollen. Cuando se logra que ellos puedan manejar los conceptos de diversas maneras, tales como: gestos, lenguaje coloquial, modelos mentales, etc., se procederá a introducir los sistemas simbólicos.

En continuidad, Vasco (1998) nos sugiere que en lo que concierne al estudio de las fracciones en la secundaria, se debe:

Tratar de tejer un sistema conceptual único a partir de los distintos sistemas conceptuales parciales que se han visto en la básica primaria, y el de manejar con comprensión y seguridad los sistemas simbólicos usuales el de las fracciones y los de las expresiones decimales y porcentuales. (p.2)

Puesto que, según él, a menudo los estudiantes aprenden a usar fraccionarios en situaciones específicas, como para reducir cantidades, sin entender su versatilidad. Pueden manejar fraccionarios en contextos como vueltas o pulgadas, pero no comprender los porcentajes en precios. Asimismo, pueden trabajar con fracciones positivas, pero no con negativas, o manejar expresiones decimales, pero tener dificultades con porcentajes. Incluso logran multiplicar fracciones, pero sin dominar la adición. Es por eso que resulta crucial que los docentes de sexto y

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

séptimo grado fortalezcan su comprensión de los sistemas conceptuales, visualizándolos como nudos interconectados en una red, en la cual se busca que dicha red sea más densa y con múltiples conexiones, las cuales pueden ser grandes o pequeñas dependiendo siempre del tamaño de los hilos de esta misma.

Con esta metáfora, el autor nos ejemplifica de una manera más coloquial aquello relacionado con los sistemas matemáticos. No obstante, esta alegoría no es su preferida, ya que, para él, una comparación más adecuada es la de un archipiélago, pues:

Algunas islas están totalmente aisladas de las otras: para ir a ellas hay que remar muy duro, y hasta se puede uno perder en el camino; en otras islas hay por lo menos algunos muelles en los que se puede tomar un transbordador o "ferry" para ir a otras; entre algunas de ellas hay puentes, y entre otras hasta viaductos con supercarreteras. Las islas van saliendo del mar a medida que se construyen los sistemas conceptuales por la actividad volcánica del cerebro, pero se pueden quedar aisladas, a menos que se construyan activamente muelles y transbordadores con buenos motores y buena brújula, y ojalá puentes y viaductos permanentes y fáciles de cruzar. (p.3)

3.1 Isla de los medidores

Hincapié (2011) en su intento por explicar la fracción y sus distintos significados define la fracción como medida cuando se requiere expresar una cantidad que no puede representarse como un número entero de veces dentro de una unidad de referencia. Según el autor, para determinar una medida exacta mediante fracciones, se deben emplear estrategias como:

- Identificar y emplear múltiplos y submúltiplos de la unidad.
- Hacer comparaciones directas con la unidad base.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Además, resalta el autor que entender la fracción como una medida permite a los estudiantes identificar que una expresión fraccionaria a / b equivale a la repetición de a veces la fracción $1 / b$. Por ejemplo, si se suma dos veces $1 / 5$, se obtiene $2 / 5$, y al hacerlo tres veces, se alcanza $3 / 5$.

En ese orden de ideas, y retomando la metáfora del *archipiélago de los fraccionarios*, Vasco (1998) plantea que, cuando el maestro observa que los estudiantes disfrutan de las medias vueltas, los tercios de vuelta, etc., puede fortalecer ese sistema concreto a través de actividades físicas. Por ejemplo, en algunos casos, se les solicita a los estudiantes que giren objetos en sus mesas para que visualicen conceptos como la mitad de un tercio de vuelta o la quinta parte de una vuelta. Desde esa isla, a la que Vasco llama *la isla de los medidores de vueltas*, se avanza hacia otras mediciones, como metros y milímetros, minutos y segundos, litros y mililitros. Tal vez el docente permita a los estudiantes experimentar directamente con estos conceptos, como derramar un tercio de litro de un recipiente que originalmente contenía medio litro y luego calcular cuánto sería un sexto de litro. Cuando los estudiantes comprenden que todo lo que han estado midiendo es, en esencia, lo mismo—ya sea en medias vueltas, pulgadas o milímetros—, se está haciendo matemáticas. En este proceso, el maestro construye un sistema conceptual sólido a partir de experiencias concretas. Por ello, Vasco (1998) concluye que “*Los puentes entre las islas medidoras desaparecen, y parece que fueran una sola isla: la de los fraccionarios como medidores*”. (p.12).

3.2 Isla de los operadores

En lo que concierne a la fracción como operador, Hincapié (2011) la define como un número racional que como su nombre lo indica opera sobre una cantidad, un conjunto o un número, alterándolo. De este modo, la fracción $\frac{a}{b}$ utilizada como operador transforma un valor específico n al multiplicarlo por a y luego dividirlo entre b .

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Retomando la idea del archipiélago de los fraccionarios, Vasco (1998) señala que, cuando el maestro observa que la mitad de un centímetro, la mitad de un mililitro o la mitad de un cuarto de vuelta reduce la magnitud, y el estudiante comienza a utilizar la mitad sin referirse explícitamente a la magnitud de origen, se está construyendo el puente hacia la isla de los operadores, los cuales, según él *"Son construcciones mentales que se podrían describir como ciertos: monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen. La isla en la que viven estos monstruos sería pues la principal del archipiélago fraccionario."* (p.3).

Teniendo en cuenta que la homotecia es una transformación que "agranda" o "achica" un objeto geométrico o una imagen y GeoGebra dispone de esta herramienta, se usará inicialmente la homotecia como medio para enseñar la fracción como operador. Tras una revisión inicial, no se encontró información que aborde de manera directa cómo este objeto matemático puede ser una herramienta eficaz en la fracción como operador; sin embargo, en la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000), específicamente en el Modo Sintético-Geométrico (SG), Calderón y Quiroz (2018) señalan que el modo Sintético-Geométrico (SG) facilita el análisis de los objetos matemáticos a partir de representaciones geométricas como figuras o conjuntos de puntos, destacando el papel fundamental de la visualización en este enfoque (Cifuentes, 2011).

En este contexto, el modelo cognitivo de razonamiento geométrico señala que el pensamiento geométrico surge a partir de la relación de tres procesos: visualización, construcción y razonamiento (Duval, 1998, citado por Cifuentes, 2011). De esta manera, el SG permite que el estudiante se aproxime al objeto matemático de la fracción sin recurrir inicialmente a magnitudes, sino a través de su transformación en representaciones gráficas o conjuntistas. Así, el primer contacto con el objeto matemático en este modo de pensamiento ocurre mediante una percepción visual y concreta que involucra la construcción y representación gráfica.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Por otro lado, Cortes et al. (2019) afirma que en la construcción de actividades vinculadas a la homotecia *“No sólo se potencia el pensamiento espacial, sino también, el pensamiento métrico, variacional y numérico, dado que se incluye el concepto de medida, formas geométricas, patrones, escalas, razones y proporciones, etc. lo cual, contribuye al enriquecimiento del pensamiento matemático”*. (p.49).

3.3 Isla de las razones

Hincapié (2011) define la fracción como una razón, refiriéndose a la relación entre dos cantidades o grupos de elementos, ya sean de la misma o distinta magnitud. Estas comparaciones pueden establecerse entre partes de un mismo conjunto, a lo que él denomina magnitud discreta, o entre una parte y el todo, lo que denomina magnitud continua y discreta. La ventaja de interpretar la fracción como razón radica en que nos permite contrastar cantidades con medidas diferentes. En cambio, cuando la fracción se entiende como una relación parte-todo dentro de un entorno de medición, solo es posible establecer comparaciones entre cantidades del mismo tipo.

Retomando la metáfora del archipiélago de los fraccionarios, Vasco (1998) menciona que, en el caso de las fracciones, existe una isla más, a la que él denomina la isla de la fracción como razón. Esta puede considerarse de manera independiente en expresiones como: *“Requiero tres por cada cinco tipos de foul”* o *“Por cada diez carros que pasan, tres son Renault 4”*, entre otras. Algunas personas comprenden fácilmente este tipo de relaciones utilizando la expresión *“por cada”*, sin vincularlas con los fraccionarios como operadores o divisores.

Las regletas de Cuisenaire han mostrado ser eficaces como herramienta para la enseñanza de la fracción como razón, por lo que será usada en el aula virtual de GeoGebra diseñada. Al respecto, Bueno (2010) nos plantea que *“Las regletas como herramienta didáctica fortalecen y dinamizan las actividades, atraen el interés de los niños para asumir preguntas y desafíos, llevándolos a elaborar respuestas y a descubrir soluciones que se adapten a sus condiciones”* (p.86).

Finalmente, y en concordancia con lo anterior expuesto, Aguilera y Rodríguez (2017) nos

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

mencionan que involucrar a los estudiantes en el aprendizaje de conceptos fundamentales como las fracciones mediante el uso de regletas fomenta el intercambio de experiencias entre ellos y sus docentes. De este modo, se logra reconocer las Regletas de Cuisenaire como una herramienta efectiva para la adquisición del concepto de fracción.

4. Metodología

En esta sección se hablará a muy grandes rasgos sobre el marco metodológico que pretendemos usar en nuestra investigación, para ello decidimos escoger como tipo de investigación, la investigación de diseño o también denominada investigación basada en diseño y como estrategia investigativa: un experimento de enseñanza.

Según Molina et al. (2011) la investigación de diseño hace referencia a un modelo de investigación de naturaleza cualitativa, el cual se ha desarrollado de la mano de las “ciencias del aprendizaje” y que según (Confrey, 2006; Sawyer, 2006) se fortalece adquiriendo elementos de distintas disciplinas tales como: la sociología, la neurociencia, la psicología educativa, etc. De acuerdo con lo anterior, el autor señala que el objetivo principal de este modelo es observar y estudiar de manera rigurosa el aprendizaje por medio de diseños, estrategias, herramientas y formas particulares de enseñanza, pero siempre manteniendo la estructura sistémica de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación.

Por otro lado, Camargo (2021) menciona que las estrategias de diseño, en este caso a lo que denominamos investigación de diseño, son frecuentemente usadas por quienes deciden hacer un análisis interpretativo o de cooperación en un entorno social, sin embargo, quienes adoptan un enfoque sistémico, deciden emplearlas en conjunto con diversas estrategias. En consonancia con lo anterior y con el objetivo de abordar la estructura de este modelo de investigación, Sierra (2001) señala que los investigadores formulan una hipótesis en la cual trabajan arduamente y buscan predecir las consecuencias que podrían darse al momento de variar ciertos aspectos o condiciones que no se encuentran presentes en un determinado momento. En continuidad, Romberg (1992) menciona que tomando como base esa hipótesis, los investigadores se encargan de diseñar una

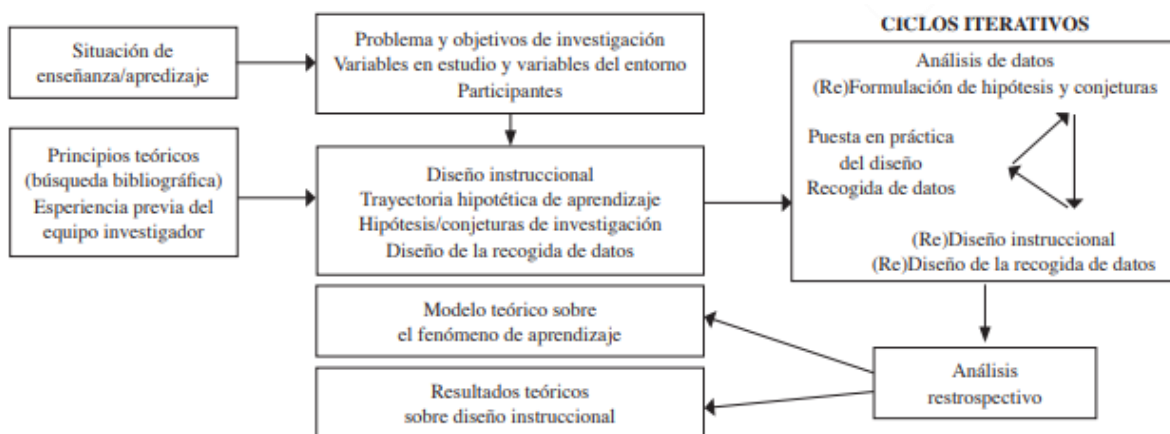
AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

situación con el fin de poder evaluar y estudiar el alcance y los efectos logrados de la hipótesis formulada.

Por otra parte, Cobb et al (2003) resaltan que, aunque este tipo de investigación no produce teorías de aprendizaje de gran alcance, si no de alcance intermedio, al estar fundamentados en lo empírico, resultan de gran importancia para el proceso de perfeccionamiento de la educación, concebida como un desarrollo progresivo. En esta misma línea, Livari y Venable (2009) mencionan sobre la investigación de diseño que es *“una actividad investigadora dirigida a inventar o construir un artefacto nuevo e innovador para resolver problemas o lograr mejoras”* (p. 4). A continuación, veremos un esquema sugerido por Molina et al (2011) en el cual se evidencia la estructura general de una investigación de diseño.

Figura 1.

Estructura general de una investigación de diseño.



Nota. El gráfico representa la estructura general de una investigación de diseño plan. Tomado de *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza.* (p. 76), por Molina et al, 2011, Universidad de Granada y Australian National University.

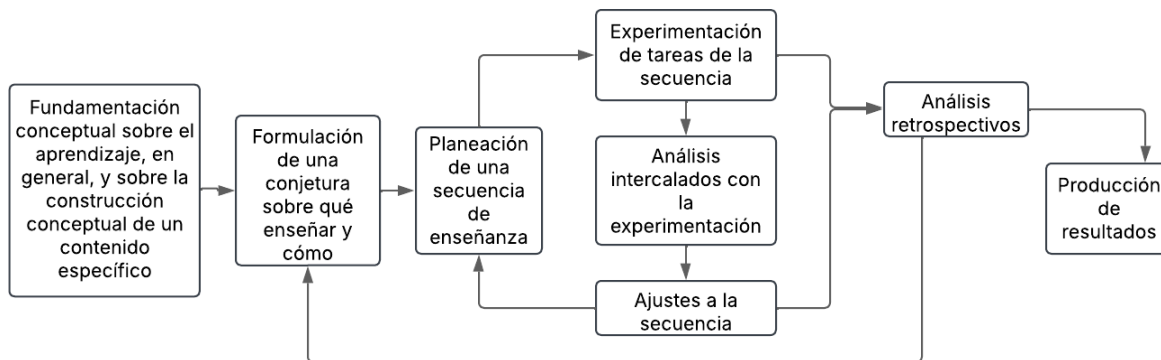
AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

De manera complementaria, se presenta la estrategia investigativa denominada “experimento de enseñanza” la cual se encuentra estrechamente ligada al modelo investigativo anterior, relación que buscaremos mostrar en las siguientes líneas. Molina et al. (2011) nos mencionan que un experimento de enseñanza podría resumirse en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia para trabajar con estudiantes de distintos niveles educativos, entre ellos docentes en formación, con el objetivo principal de analizar y evaluar una conjetura en base a un aprendizaje específico. En este sentido, el autor es claro al resaltar que este tipo de estrategia resulta de gran utilidad cuando el investigador requiere ver el aprendizaje matemático de manera directa y evaluar aspectos del mismo para comprender de manera eficaz los significados construidos por los alumnos.

A continuación, veremos un esquema sugerido por Camargo (2021) en el cual se evidencia la posible estructura de un experimento de enseñanza en el cual se tienen en cuenta aspectos importantes tales como: la replicabilidad de los ciclos, la puesta en marcha de un pilotaje y el perfeccionamiento de la conjetura realizada.

Figura 2.

Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.



AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Nota. El gráfico representa el plan de ejecución para la estrategia investigativa: experimento de enseñanza. Tomado de *Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática*. (p. 86), por L. Camargo, 2021, Universidad de Antioquia®.

Por otro lado, Molina et al. (2011) menciona que al usar este tipo de estrategia se logran obtener resultados muy importantes, entre ellos se destacan los siguientes: Como principal resultado obtendremos una secuencia de enseñanza previamente implementada, ajustada y evaluada con recomendaciones claras sobre los cambios que mejor favorecen a los estudiantes y que podrán ser usadas por docentes que buscan transformar el aprendizaje y la enseñanza (Confrey 2000). En concordancia con lo anterior, cabe destacar que en el trabajo investigativo que se plantea realizar, se ha estado trabajando en un libro del Aula virtual de GeoGebra, en donde es importante mencionar que este será el resultado más relevante y, siguiendo la estructura de un experimento de enseñanza, será previamente implementado a modo de pilotaje.

En consecuencia, se ha considerado como posible población objetivo para el pilotaje o primera implementación a los estudiantes de alguna materia de primer semestre de la licenciatura en matemáticas de la UIS. De este modo podremos observar cuales son aquellos aspectos que podrían mantenerse y cuáles no para que pasen por un proceso de modificación, para finalmente ser aplicado en algún colegio con el cual logremos establecer un convenio y se nos facilite la realización de la actividad.

Volviendo a lo mencionado por Molina et al. (2011), otro resultado muy importante es la obtención de lo que denomina Confrey y Lachance (2000) “*pruebas de existencia*” que básicamente dan cuenta de cómo se puede alcanzar el resultado que deseamos mediante ciertas variaciones en las condiciones iniciales. Además de que estas funcionan como motivación para seguir intentándolo. Finalmente, como ultimo resultado relevante, Romberg (1992) menciona que

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

se produce el surgimiento de estructuras o comprensiones más profundas que amplían el conocimiento previo del estudiante en cuanto al fenómeno de estudio. Cabe resaltar que estas comprensiones o interpretaciones permitirán evaluar el éxito o la falla de las conjeturas planteadas. En nuestro caso, buscamos que este proceso sea una consecuencia positiva de nuestra conjetura inicial, la cual se basa en:

“El diseño de una secuencia de enseñanza en el Aula Virtual de GeoGebra que integra representaciones visuales, manipulaciones dinámicas y tareas contextualizadas, favorece una comprensión más profunda y flexible de las fracciones como medidores, operadores y razones, ya que este entorno favorece la exploración activa, la visualización de conceptos abstractos y la articulación entre distintos significados de la fracción.”

Para concluir esta sección, presentamos, a manera de ejemplo y basándonos en el esquema propuesto por Molina et al. (2011), una tabla de tareas o acciones a ejecutar en cada una de las etapas que conlleva un experimento de enseñanza. Entre estas etapas, se incluyen la preparación del experimento de enseñanza, en la cual se establece el problema, los objetivos y se diseñan las actividades; la experimentación, que se desarrolla en tres momentos: antes de cada intervención, en cada intervención y después de cada intervención y, finalmente el análisis retrospectivo de los datos en la que se examinan los resultados, se contrasta con las hipótesis iniciales y se extraen conclusiones.

Tabla 1.

Tareas a ejecutar en cada una de las etapas de un experimento de enseñanza.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Fases	Acciones
Preparación del experimento de enseñanza	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Investigar y definir el problema, los objetivos de investigación y la conjetura. ➤ Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos del alumno, además de su temporalización. ➤ Evaluar las nociones acerca del objeto matemático que los estudiantes poseen por medio de un pretest. ➤ Organizar y diseñar la recogida de datos.
Experimentación	<p style="text-align: center;">Antes de la intervención</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Obtener información sobre el pretest realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el (Re)diseño de la secuencia y en la posterior interpretación de los datos. ➤ Finalizar el diseño de la secuencia con una justificación basada en la información teórica y empírica disponible. ➤ Elaborar hipótesis o conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. ➤ Haber escogido el método para la recogida de datos. <hr/> <p style="text-align: center;">En la intervención</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Ajustar el diseño de la intervención, si es necesario, de forma justificada y en función de sus objetivos. ➤ Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas anteriormente y de todo lo que ocurre en el aula. <hr/> <p style="text-align: center;">Después de la intervención</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Si resulta necesario, revisar o reformular las hipótesis/conjeturas hechas a partir del análisis de los datos obtenidos.
Análisis retrospectivo de los datos	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Reunir y organizar todos los datos e información recogida. ➤ Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: <ul style="list-style-type: none"> ● No sesgarse en cuanto a los resultados obtenidos en el pretest y en las conjeturas iniciales con el fin de lograr una comprensión más profunda y global de la situación de enseñanza y aprendizaje. ● Observar la ruta conceptual seguida por cada estudiante para de esta manera poder apreciar los cambios que son producto de las acciones específicas realizadas por el investigador-docente.

Nota. Adaptado de *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*, por Molina et al., 2011, p. 80. Copyright 2011 por la Universidad de Granada y la Australian National University.

Finalmente, en la tabla 2 se muestra el cronograma donde se evidencia la distribución y descripción de actividades por sesión para cada una de las etapas de un experimento de enseñanza, detallando las tareas específicas a desarrollar y su temporalización, lo que permite una visión estructurada y organizada de la implementación del experimento.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Tabla 2.

Cronograma de tareas ejecutadas y por ejecutar en las etapas de un experimento de enseñanza, además de aquellas que conciernen a la entrega del documento final.

Fases	Descripción de actividades	Fecha
Preparación del experimento de enseñanza	El director sugirió algunas lecturas las cuales estaban enfocadas en el interés de nuestra investigación, después de ello logramos definir el problema de investigación, los objetivos y nuestra conjetura.	Septiembre del 2024
	A partir de esta fecha se empezó a diseñar el libro en el aula virtual de GeoGebra en función de los objetivos planteados.	Octubre del 2024
	Para esta fecha se prevé evaluar las nociones acerca del objeto matemático que los estudiantes poseen por medio de un pretest.	Febrero del 2026
	Para esta fecha se prevé organizar los datos recogidos en el pretest.	Febrero del 2026
Antes de la intervención		
	Para esta fecha se prevé obtener toda la información sobre el pretest realizado y los resultados obtenidos serán usados para empezar el (Re)diseño de la secuencia.	Principios de Marzo del 2026
	Para esta fecha se prevé haber terminado las modificaciones al libro del Aula Virtual de GeoGebra.	Finales de Marzo del 2026
	Para esta fecha se prevé haber escogido el método para la recogida de datos.	Finales de Marzo del 2026
En la intervención		
Experimentación	Para esta fecha se prevé implementar el libro del Aula Virtual de GeoGebra, además de tomar registro de todo lo que ocurre en el aula.	Principios de Abril del 2026
Después de la intervención		
	Para esta fecha se prevé evaluar las nociones adquiridas acerca del objeto matemático que los estudiantes poseen por medio de un postest.	Abril del 2026
	Para esta fecha, si resulta necesario, revisaremos o reformularemos las hipótesis/conjeturas hechas a partir del análisis de los datos obtenidos.	Abril de 2026
Análisis retrospectivo de los datos	Para esta fecha se prevé reunir y organizar toda la información recogida, además de analizar el conjunto de datos de manera imparcial e interpretar los datos obtenidos para hacer las respectivas conclusiones que estarán consignadas en el documento final.	Mediados de Abril del 2026
Entrega documento final		
	Para esta fecha se prevé tener hechas todas las correcciones dadas al documento final para su respectivo envío al comité evaluador.	Finales de Abril del 2026

Nota. Elaboración propia.

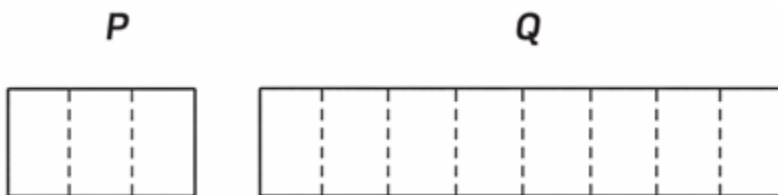
4.1 Planeación de la secuencia de enseñanza en el aula virtual de GeoGebra

Para el diseño de esta secuencia de enseñanza, primeramente se buscó recopilar ciertos problemas que Vasco (1998) plantea pueden usarse en la enseñanza de la fracción entendida como una medida, un operador y una razón, para ello se tomaron tres pequeños problemas para cada una de estas formas de ver la fracción y se organizó un pretest, cabe resaltar que la gran mayoría de estos problemas estuvieron acompañados de ilustraciones que representan la situación contexto que aborda el problema. Principalmente este pretest se había diseñado en el aula virtual de GeoGebra, pero en vista de que la docente titular quería que quedara una prueba de las actividades realizadas en clase se optó por hacer el pretest en formato físico. A continuación, veremos algunos de los problemas que contenía el pretest y en los anexos de este trabajo podremos ver el pretest completo:

Enunciado 1: Las franjas en que están divididos los rectángulos P y Q son del mismo tamaño. Si el área del rectángulo P se mide utilizando el rectángulo Q, el área de P es igual a _____. Explica tu respuesta.

Figura 3.

Imagen ilustrativa del problema.



Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como una medida, interpretándose esta como el resultado de comparar dos magnitudes. Para este caso en especial ellos deben analizar cómo el área de un rectángulo en este caso P puede expresarse en función de otro Q, identificando así, cuántas veces una unidad de medida está contenida en otra.

Enunciado 2: En una olla había 12 litros de leche, si se derraman los $\frac{5}{6}$ de esa cantidad ¿Cuántos litros quedan aún? Explica tu respuesta.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como un operador, interpretando esta como el resultado de determinar una parte para una determinada cantidad dada. Para este caso en especial ellos deberán aplicar el operador, en este caso la fracción a la cantidad inicial para identificar qué tanto contenido permanece o se pierde en el recipiente.

Enunciado 3: De los 10 problemas que dejó el profesor como tarea, Orlando solucionó 7. El rendimiento de Orlando en esta tarea se puede expresar así. Explica tu respuesta.

Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como una razón, interpretándose esta como el resultado de comparar dos cantidades. Los estudiantes deben identificar la relación existente entre cierta cantidad y el total de ella o entre dos cantidades totalmente distintas y expresarlas mediante una fracción.

En coherencia con la narrativa del diseño sobre el Aula Virtual de GeoGebra es importante resaltar que se hizo en formato libro y este lleva por nombre El archipiélago de los fraccionarios, (Enlace de acceso al libro: <https://www.geogebra.org/m/nykhbdcf>) y se compone de 5 capítulos (Figura 4).

Figura 4.

El archipiélago de los fraccionarios.



El **Capítulo 1** lleva por nombre Isla de los medidores y comprende dos momentos, dichos

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

momentos están conformados por dos applets que fueron editados y mejorados, recordemos que se le llama applet a los programas o aplicaciones que GeoGebra integra dentro de una página web para dotarlos de interactividad, sabiendo esto, dichos applets son muy similares, pues ambos presentan la imagen de un reloj que solo consta de un minuterero pero que dependiendo la fracción allí presentada este suele al igual que como una pizza dividirse de acuerdo al denominador de la fracción y sombrear las partes que se toman en este caso haciendo referencia al numerador. En cuanto a la interactividad del primer applet, reside en el hecho de que al automatizar la fracción presentada en la pregunta: “El reloj muestra $\frac{3}{10}$ de hora. ¿A cuántos minutos equivale?” Con respecto al comportamiento del reloj, el estudiante cuenta con una casilla de entrada en la cual se espera que apoyándose en la ilustración del reloj ingrese la cantidad de minutos que esta fracción representa. A continuación, veremos la interfaz del primer applet.

Figura 5.

Primer applet de la isla de los medidores.

The screenshot shows a green applet interface. At the top, it asks: "El reloj muestra $\frac{3}{10}$ de hora. ¿A cuántos minutos equivale?". Below this is a clock face where the first 18 minutes (3/10 of 60) are shaded green. To the right of the clock, the text reads " $\frac{3}{10}$ de 60 min. = ". Below this is a blue button labeled "VERIFICAR". At the bottom left, there are sliders for "NUMERADOR" and "DENOMINADOR", a blue button labeled "EJERCICIO", and a blue button labeled "Empiece". At the bottom right, a cartoon boy character points to a text box with the instruction "Digite su respuesta en la casilla".

Es importante resaltar que muchos de los applets que encontramos en el software de GeoGebra suelen presentar retroacciones, pero muchas veces estas se limitan a solo mostrar si la respuesta ingresada quedó bien o de lo contrario, quedó mal, pero ¿qué sucede cuando no solo optamos por hacer eso que encontramos en los demás sino que también agregamos un determinado número de intentos?, por ejemplo:

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Si al primer intento el estudiante no acierta, se le invita a hacer un nuevo intento, si nuevamente no acierta, sale una casilla con una breve pista que ayuda a orientar al estudiante y si finalmente hace un tercer intento y no logra acertar, en la interfaz del applet saldrá otra casilla de texto más grande en la cual se explica detalladamente y guiándose con la ilustración del reloj la justificación y respuesta para ese problema, es por ello que de acuerdo a este panorama nos encontramos ante un applet que resulta mucho más completo y que resulta verdaderamente interactivo para el estudiante. A continuación, veremos lo anteriormente narrado.

Figura 6.

Retroacciones del primer applet de la isla de los medidores.

El reloj muestra $\frac{3}{10}$ de hora. ¿A cuántos minutos equivale?

$\frac{3}{10}$ de 60 min. = 3

VERIFICAR

NUMERADOR

DENOMINADOR

EJERCICIO

La respuesta correcta es: 18

El reloj representa 60 minutos. Al dividirlo en 10 partes iguales y tomar 3 de ellas, obtenemos la fracción de hora. Por eso:

$$\frac{3}{10} \cdot 60 = 18 \text{ minutos}$$

En este primer momento, el applet está acompañado de 4 tareas, las cuales son:

Tarea 1.1 Si un programa dura $\frac{3}{4}$ de hora, ¿cuánto tiempo es en minutos? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.2 ¿Es posible que $\frac{2}{3}$ de hora sea más de media hora? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.3. ¿Qué es más corto: $\frac{1}{12}$ de hora o 5 minutos? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.4 ¿Qué tienen en común media hora, medio litro y medio metro? **Explica tu**

razonamiento.


Podemos notar que cada una de estas tareas están enfocadas en ver la fracción como una medida para este caso en especial como una medida de tiempo, por otro lado, es claro que la fracción básicamente nos va a indicar la cantidad de tiempo que estamos tomando con respecto a 60 minutos que es a lo que equivale 1 hora. En cuanto a la última tarea, recordemos que Vasco (1998) nos plantea la idea de que al ver la fracción como una medida esta no debería limitarse a un solo contexto pues al final de cuentas al hablar de media hora, media vuelta o media pulgada, los estudiantes están midiendo, en esencia, lo mismo; es por ello que esta última tarea busca ese primer acercamiento a la consolidación de que las islas de los medidores de tiempo, de volumen, etc. son en realidad una sola y es la isla de los medidores.

Como se había mencionado anteriormente, este primer capítulo consta de dos momentos, en cuanto a la interactividad del segundo applet, reside en el hecho de que al automatizar la cantidad de minutos presentada en la pregunta: “El reloj muestra 30 minutos. ¿A qué fracción de hora equivale?” Con respecto al comportamiento del reloj, el estudiante cuenta con una casilla de entrada en la cual se espera que apoyándose en la ilustración del reloj ingrese la fracción que mejor representa esa cantidad de minutos. Podemos notar que en este segundo momento tenemos el mismo applet, pero con algunos cambios y claramente con dos intencionalidades: la primera es que note la equivalencia entre las representaciones numéricas (que $1/2$ de 60 es 30 y que 30 equivale a $1/2$ de 60) y segunda, que el estudiante se vea obligado a hacer uso de la representación del reloj para poder llegar a la respuesta. A continuación, veremos la interfaz del segundo applet.

Figura 7.

Segundo applet de la isla de los medidores.

El reloj muestra 30 minutos. ¿A qué fracción de hora equivale?



30 minutos equivalen a =

la fracción

VERIFICAR

NUMERADOR

DENOMINADOR

Digite su respuesta en la casilla

EJERCICIO Empiece

The image shows a digital interface for a math exercise. At the top, a question asks for the fraction of an hour represented by 30 minutes on a clock. The clock face shows the 30-minute mark. Below the clock are sliders for the numerator and denominator. To the right, there is a text input field for the fraction, a 'VERIFICAR' button, and a cartoon character pointing to another text input field. At the bottom, there are buttons for 'EJERCICIO' and 'Empiece'.

En este segundo momento, el applet está acompañado de 5 tareas, las cuales son:

Tarea 1.5 ¿Qué significa decir que han pasado **15 minutos**? Exprésalo como fracción de una hora y **explica tu razonamiento.**

Tarea 1.6 Si han pasado **45 minutos**, ¿qué fracción de hora representa? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.7 ¿Es posible que **20 minutos** representen menos de $1/4$ de hora? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.8 ¿Qué es mayor: **30 minutos** o $1/3$ de hora? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 1.9 ¿Qué tienen en común **60 minutos**, **1 hora** y la fracción $1/1$? **Explica tu razonamiento.**

Podemos notar que en este segundo momento al igual que como el primero, cada una de estas tareas están enfocadas en ver la fracción como una medida de tiempo y en paralelo con la última tarea del primer momento, también se busca que al ver la fracción como medida no se encuadre en un solo contexto pues ¿Qué importancia tiene ver la fracción como una unidad que mide diferentes cantidades por separado, si al final de cuentas se está haciendo lo mismo: medir?

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

El **Capítulo 2** lleva por nombre Puente Isla medidores a operador y como su nombre lo dice, esta surge para conectar las distintas islas existentes en el archipiélago de los fraccionarios, para este caso en especial, la de los medidores con los operadores. Recordemos que hasta el momento hemos visto la fracción como algo que mide cantidades y Vasco (1998) enfatiza en que, si el estudiante observa que la mitad de una vuelta, la mitad de un centímetro, etc denota la mitad de algo y se usa sin referirse explícitamente a la magnitud de origen, ya se está construyendo el puente hacia la isla de los operadores. En este punto nos encontramos inmersos en la isla de los operadores los cuales Vasco (1998) describe como construcciones mentales que metafóricamente pueden verse como “monstruos” que agrandan o achican a las víctimas que se les acerquen.

Ahora bien, surge la pregunta: ¿qué ocurre cuando esa fracción que inicialmente mide cantidades pasa a entenderse también como un operador que transforma, es decir, que agranda o reduce una magnitud? A partir de esta inquietud, en este capítulo se propone el diseño de un applet basado en un cuadrado de 1×1 , con el fin de explorar esta doble interpretación. Es importante mencionar que dicho cuadrado cambia su tamaño de acuerdo al valor que toma un deslizador y como podremos ver en la figura 8, está acompañado de algunas preguntas que permiten la interacción entre el deslizador y el cuadrado además de que pueden responderse pulsando un botón con sí o no. Por otra parte, al igual que con los demás applets, obtendremos una retroacción por cada pregunta respondida y con solo pulsar el botón de anterior o siguiente, obtendremos más preguntas aleatorias. A continuación, veremos la interfaz del tercer applet.

Figura 8.

Applet de puente isla medidores a operadores.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Mueve el deslizador para cambiar el tamaño del cuadrado.

31
10

Si el deslizador es igual a 0, ¿el tamaño del nuevo cuadrado coincide con el inicial?

SI NO

selecciona un botón

REINICIAR

ANTERIOR PREGUNTA SIGUIENTE PREGUNTA

Este applet cuenta con cinco tareas, las cuales son:

Tarea 2.1 ¿Qué representa la fracción que aparece en el deslizador del applet? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 2.2 Si el cuadrado está en su tamaño inicial y aplicamos el operador $1/5$, ¿qué sucede con el tamaño del nuevo cuadrado? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 2.3 Si aplicamos el operador $11/10$ al tamaño del cuadrado, ¿queda más grande o más pequeño que al inicio? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 2.4 ¿Es posible que al aplicar un operador fracción el cuadrado quede más grande que al inicio? ¿Por qué? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 2.5 ¿Qué cambia cuando el numerador es menor que el denominador? **Explica tu razonamiento.**

Es evidente que cada una de las tareas propuestas en este applet busca que el estudiante reconozca la fracción, ya vista como una medida, ahora como un operador que actúa sobre una cantidad y que permite determinar si la agranda, la reduce o, en casos atípicos, no produce ningún cambio. Por ello, las tareas comienzan con ciertas fracciones específicas, para que el estudiante observe cómo es el comportamiento

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

del nuevo cuadrado, y finalizan con actividades que buscan generalizar los casos, de modo que, de manera indirecta, se analice qué ocurre cuando el operador es mayor que 1 o menor que 1.

El **Capítulo 3** lleva por nombre Isla de los operadores, este a su vez se divide en 2 subcapítulos los cuales se denominan fracción como operador I y fracción como operador II. A modo general ambos capítulos tal y como lo plantea Vasco (1998) en sus escritos, buscan ver la fracción como algo que manipula objetos para este caso el autor lo denomina “operador” y es él quien determinará como dicho objeto podría agrandarse o reducirse. En cuanto al primer subcapítulo “Fracción como operador I” se compone de dos applets que básicamente son el mismo, pero en un primer momento se busca únicamente la exploración, manipulación e interacción con el applet. Dicho applet está basado en Cronos el cual es un cachorro que de acuerdo a un operador que es modificable sufre un sin fin de transformaciones significativas en cuanto a su forma y aspecto.

Para la creación de este applet recordemos que en el marco teórico resaltamos que al tener un objeto que experimenta cambios en su tamaño, para este caso “agrandarse” o “achicarse” dicho proceso guardaba una gran relación con la homotecia y aunque no encontramos bibliografía que resalta de manera explícita como la homotecia podría ser la herramienta ideal para enseñar la fracción como operador encontramos que en la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinski (2000), específicamente en el Modo Sintético-Geométrico (SG) la homotecia por medio de él modo SG permite que el estudiante se aproxime al objeto matemático, en este caso, de la fracción, sin recurrir inicialmente a magnitudes, sino a través de su transformación en representaciones gráficas o conjuntistas.

Ceñido a esto resulta importante resaltar que en las actividades que se encuentran vinculadas al concepto de homotecia Cortés et al. (2019) nos afirman que en estas *“No sólo se potencia el pensamiento espacial, sino también, el pensamiento métrico, variacional y numérico, dado que se incluye el concepto de medida, formas geométricas, patrones, escalas, razones y proporciones, etc. lo cual, contribuye al enriquecimiento del pensamiento matemático”*. (p.49). Por lo tanto, teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente fue que nos basamos la creación de este applet. En cuanto al segundo momento

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

para este subcapítulo, el applet sufrió unas pequeñas modificaciones las cuales se basaron en sincronizar la fracción que operaba la imagen de cronos con una pregunta: ¿La fracción __ hace que cronos se agrande o se achique? y dos botones interactivos con las posibles respuestas para esta pregunta además de las retroacciones de las que hablamos anteriormente. A continuación, veremos la interfaz del 4 y 5 applet.

Figura 9.

Primer applet de la isla de los operadores (Fracción como operador I).




Figura 10.

Segundo applet de la isla de los operadores (Fracción como operador I).

LA METAMORFOSIS DE CRONOS:
AGRANDAR O ACHICAR

NUMERADOR $N = 10$
DENOMINADOR $D = 10$

Fracción = $\frac{10}{10}$ EJERCICIO

 ¿La fracción $\frac{10}{10}$ hace que Cronos se agrande o se achique?

AGRANDE
ACHIQUE

Seleccione una opción

En este segundo momento, el applet está acompañado de 6 tareas, las cuales son:

Tarea 3.1 Si aplico el operador $1/3$, ¿qué le pasa al tamaño del perro comparado con el original?

Explica tu razonamiento.

Tarea 3.2 ¿Qué operador hace que el perro quede más pequeño: $2/3$ o $3/4$? ¿Por qué? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.3 Si aplico el operador $5/4$ ¿el perro queda más grande o más pequeño que el original? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.4 ¿Qué significa que un operador fraccionario sea mayor que 1? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.5 ¿Qué significa que un operador fraccionario sea igual a 1? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.6 ¿Qué significa que un operador fraccionario sea menor que 1? **Explica tu razonamiento.**

Podemos notar que en cuanto a las primeras tareas se busca analizar algunos operadores en específico con el fin de que el estudiante observe y compruebe si este agranda, reduce o no produce ningún cambio en la imagen que ilustra a Cronos y al igual que como en el puente de medidor - operador se

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

finaliza con una serie de tareas que ahora sí, de manera explícita se busca que el estudiante observe qué pasa cuando en una fracción entendida como a/b , a es mayor que b , b es mayor que a o a es igual a b lo cual de manera análoga hace referencia a que el operador sea mayor a 1, menor a 1 o igual que 1.

En cuanto al segundo subcapítulo, “Fracción como operador II”, encontramos un applet que fue tomado tal como el autor lo creó. Este se compone de una pregunta inicial: ¿Cuál es el área del rectángulo rojo de base 12 y altura $5/7$? Además, cuenta con un modelo visual que representa el producto entre la cantidad total por su operador. Es importante mencionar que, en dicho applet, para abordar la fracción como operador se recurre al uso de áreas de rectángulos, ya que este enfoque, al igual que la homotecia, permite aproximarse al concepto de operador sin recurrir inicialmente a magnitudes, sino a través de la representación gráfica de áreas. Por ello, ya no se insistirá en ver el operador únicamente como el producto entre la cantidad total y la fracción que actúa sobre ella, sino como el cálculo de áreas, en este caso, tal como se conoce el área de un rectángulo: la base por la altura.

En ese orden de ideas, es importante señalar, como se evidencia en la figura 11, que el modelo visual no solo muestra el rectángulo, sino que además señala las particiones correspondientes en la base y la altura. En estas se puede identificar el operador, así como las divisiones que determina el denominador y cuáles de ellas son tomadas por el numerador. Ceñido a esto, el applet también cuenta con una casilla de entrada en la cual se espera la posible respuesta del estudiante. Además, al igual que los demás applets, dispone de una serie de retroalimentaciones, pistas, número de intentos y preguntas como: “Recuerda que el área del rectángulo es el producto de la base por la altura. ¿Cuántos rectángulos de igual tamaño hay en el cuadrado celeste? ¿Cuántos rectángulos de igual tamaño hay en el rectángulo azul? ¿Cuál es el área de cada uno de ellos?”. Estos elementos contribuyen a generar una verdadera interacción entre el applet y el estudiante.

En este sentido, todo lo anteriormente mencionado en cuanto a que nos basamos para hacer y elegir los applets para el capítulo 3 se ve reforzado por la reflexión que expone Murillo (2013) en la cual señala

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

que la experiencia ha demostrado que no existe un método único de enseñanza que tenga éxito con todos, ni que permita alcanzar los objetivos a cabalidad si no que es precisamente la interrelación de elementos, procesos y herramientas la que en realidad permite lograr que el binomio enseñanza-aprendizaje se alcance de manera efectiva. A continuación, veremos la interfaz del applet para este subcapítulo además de las tareas que le acompañan.

Figura 11.

Applet de la isla de los operadores (Fracción como operador II).

¿Cuál es el área del rectángulo ROJO de Base = 12 y Altura = $\frac{5}{7}$?

Area= **COMPROBAR**

Base = 12 Altura = $\frac{5}{7}$

AMPLIAR **REDUCIR** **ACIERTOS = 4** **FALLOS = 1**

Jorge FIALLO

Tarea 3.1 Si la altura fuera $\frac{1}{2}$ y la base 2, ¿qué le sucede al área respecto a la base? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.2 ¿Qué ocurre si el numerador es igual al denominador? Por ejemplo $\frac{4}{4}$ **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.3 ¿Qué pasaría si la altura fuera una fracción mayor que 1? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 3.4 ¿Por qué una fracción menor que 1 hace que el **área del rectángulo** sea menor cuando se multiplica por la base y la altura? **Explica tu razonamiento.**

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Tarea 3.5 Si el denominador aumenta y el numerador se mantiene fijo, ¿cómo cambia el área?

Explica tu razonamiento.

Es evidente que en cada una de las tareas propuestas para este applet se busca analizar el comportamiento del área cuando el operador —en este caso, al que llamamos altura— varía de acuerdo con la relación entre el numerador y el denominador; es decir, cuando el numerador es mayor que el denominador, cuando es menor o cuando ambos son iguales, lo cual, de manera análoga, se expresa como $a > b$, $a < b$ y $a = b$.

El **Capítulo 4** lleva por nombre puente isla operadores a razones y como su nombre menciona, dicho capítulo busca crear la transición entre la isla de los operadores a la isla de las razones. Recordemos que Vasco (1998) nos expresa que:

El puente entre los operadores y las razones se tiende a través de actividades en las que se comparan razones, como tres de cinco, con operadores achicadores, como tres quintos, seis décimos o el sesenta por ciento; se hace notar la ambigüedad de la razón, que puede entenderse como achicadora o agrandadora según el lado por donde se mire, y se utilizan las razones para resolver problemas lineales, como los llamados “de regla de tres”, por el método de reducción a la unidad. (Vasco, 1998, pp 35)

Es por ello que, ante este panorama, decidimos tomar un applet que presenta una situación problema relacionada con vasos de agua y colorante. En el enunciado se explicita que el primer vaso cuenta con una determinada cantidad de agua y de colorante, la idea es buscar el ajuste perfecto, en otras palabras, que el otro vaso tenga el mismo color, es decir, la misma “razón”. En ese orden de ideas, consideramos que el applet funciona en coherencia por lo expuesto anteriormente por Vasco (1998) ya que dicho applet permite evidenciar cómo una razón puede interpretarse tanto como comparación entre cantidades como operador.

En la actividad, la razón entre gotas y onzas (15:9) no solo expresa una relación, sino que actúa como un operador que transforma la cantidad de agua al pasar de 9 a 3 onzas, determinando así el número

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

de gotas necesarias para conservar el mismo color. De este modo, el applet hace visible la ambigüedad de la razón —como operador achicador o agrandador— y su uso en la resolución de problemas lineales mediante un procedimiento equivalente a la regla de tres.

Figura 12.

Applet de puente isla operadores a razones.

El vaso A contiene 9 onzas de agua con 15 gotas de colorante. El vaso B contiene 3 onzas de agua. Arrastra las piezas para expresar la proporción y luego halla cuántas gotas de colorante deben agregarse al vaso B para que resulte el mismo color que en el vaso A.

$\frac{9}{15} = \frac{3}{g}$ ✓

$g = 5$ ✓

$\frac{15 \text{ gotas}}{9 \text{ onzas}} = \frac{5 \text{ gotas}}{3 \text{ onzas}}$

15 : 9 5 : 3
¡Coinciden!

Correctos: 1 ✓ Correcto NUEVO

A continuación, veremos algunas de las tareas que acompañan a este applet:

Tarea 4.1 ¿Qué estás comparando exactamente al colocar las gotas de colorante en el numerador y las onzas de agua en el denominador?. **Explica tu respuesta.**

Tarea 4.2 ¿Por qué es importante mantener el mismo orden en ambas fracciones? Por ejemplo, si pones gotas / onzas en la primera fracción, ¿por qué debes hacer lo mismo en la segunda?. **Explica tu respuesta.**

Tarea 4.3 ¿Qué significa que dos razones sean equivalentes en el contexto del problema?. **Explica tu respuesta.**

Podemos notar que la intención final de estas tareas es promover una verdadera comprensión de la fracción como razón más allá de algo netamente mecánico. En cuanto a la primera y segunda tarea se busca que el estudiante logre identificar las magnitudes que está comparando en este caso, gotas de colorante y onzas de agua entendiendo de esta manera la razón como una relación entre cantidades de diferente naturaleza; luego, se resalta la importancia en el orden en las fracciones y finalmente, se pretende

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

que comprendan que las razones equivalentes en el contexto de este problema significan conservar una misma relación proporcional aunque las cantidades cambien. Cabe resaltar que al igual que los demás applets este también cuenta con una serie de retroacciones esto lo veremos a continuación:

Figura 13.

Retroacciones del applet de puente isla operadores a razones.

El vaso A contiene 3 onzas de agua con 8 gotas de colorante. El vaso B contiene 6 onzas de agua. Arrastra las piezas para expresar la proporción y luego halla cuántas gotas de colorante deben agregarse al vaso B para que resulte el mismo color que en el vaso A.

$$\frac{3}{6} = \frac{g}{8} \quad \times$$

$g = 1$ \times

Pista
Asegúrate de que las unidades de medida se correspondan al plantear las fracciones: gotas con gotas, y onzas con onzas.

8 : 3 1 : 6

Demasiado suave...

Correctos: 0 CHEQUEAR (2) \times Reinténtalo

The screenshot shows a math applet interface. At the top, there is a text description of a problem involving two glasses (A and B) with water and dye. Below the text, there is a fraction equation $\frac{3}{6} = \frac{g}{8}$ with a red 'X' next to it, indicating an incorrect answer. Below the equation, there is a text input field containing 'g = 1' with a red 'X' next to it. A 'Pista' (Hint) section follows, advising the user to ensure units match. Below the hint, there are two glasses: the left one is labeled '8 : 3' and the right one '1 : 6'. A color bar below the glasses shows a gradient from orange to white, with the text 'Demasiado suave...' (Too soft...) below it. At the bottom, there are buttons for 'Correctos: 0', 'CHEQUEAR (2)', and 'Reinténtalo' (Retry).

El **Capítulo 5** lleva por nombre isla de las razones, este incluye el diseño de un applet enfocado en las regletas de Cuisenaire. Dicho applet consta de dos vistas gráficas: en la primera se presentan dos preguntas las cuales buscan comparar dos regletas de manera alterna, junto con una casilla de entrada en la cual se busca que el estudiante ingrese la razón existente entre una regleta y la otra, luego de haber interactuado previamente. En la segunda vista gráfica, se muestra la representación en 3D de las dos regletas mencionadas, lo que permite visualizar la relación establecida entre ambas. Cabe resaltar que al igual que todos los applets que ya hemos mostrado, este también cuenta con ciertas retroacciones y una de ellas es que al primer fallo se habiliten dos deslizadores, básicamente estos permitirán modificar el tamaño de cada regleta para obtener una mejor visualización de cómo es el comportamiento de estas.

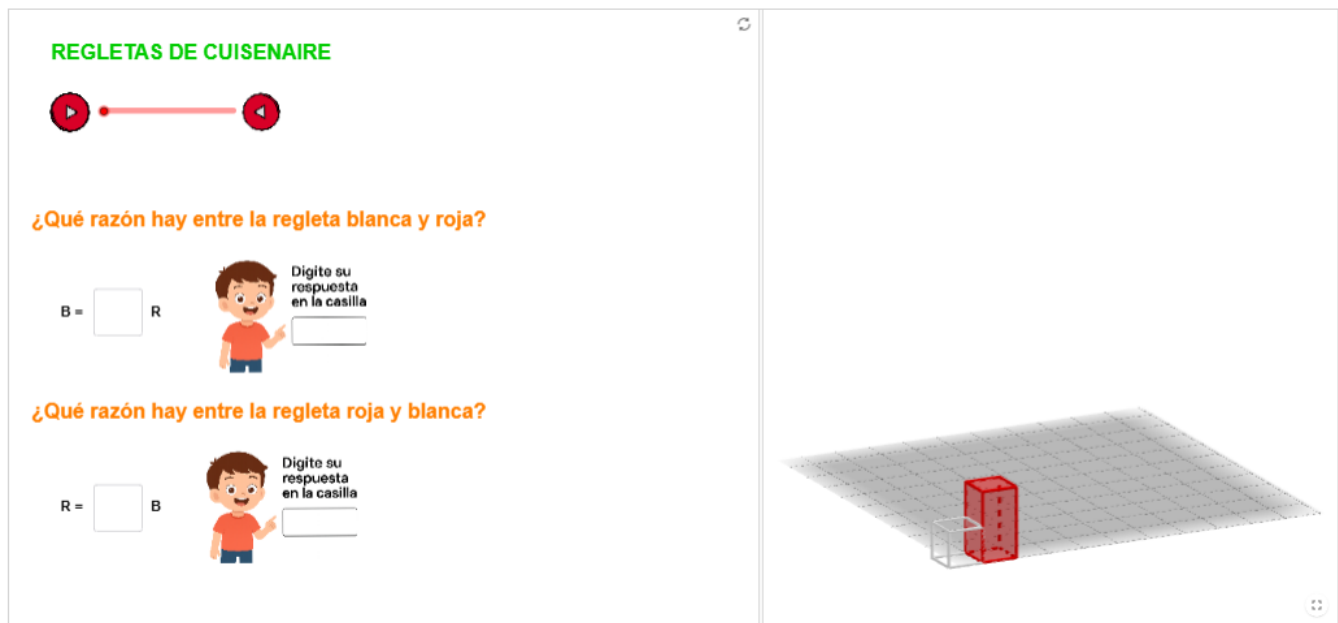
En cuanto a la justificación del uso de las regletas de Cuisenaire en la enseñanza del concepto de fracción como razón, después de una exhaustiva búsqueda bibliográfica, encontramos varios casos en los cuales apostar por las regletas de Cuisenaire como estrategia para la enseñanza de este concepto funciona; tal es el caso de Bueno (2010), en el cual se plantea que las regletas atraen el interés de los niños y

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

dinamizan las actividades, y como el de Aguilera y Rodríguez (2017), en el cual, al término de su trabajo investigativo, concluyen que reconocen en las regletas una herramienta práctica y efectiva para la adquisición del concepto de fracción. A continuación, veremos la interfaz del applet para este capítulo:

Figura 14.

Applet de isla de las razones.



Este applet está acompañado de 5 tareas las cuales son:

Tarea 5.1 Si una regleta tiene una longitud 4 veces mayor que la longitud de otra, ¿cuál es la razón entre la longitud de la regleta menor y la longitud de la regleta mayor? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 5.2 Si la longitud de una regleta es la mitad de la longitud de otra, ¿cuál es la razón entre la longitud de la regleta menor y la longitud de la regleta mayor? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 5.3 Si una regleta es la tercera parte de otra, ¿cuál es la razón entre la longitud de la regleta mayor y la longitud de la regleta menor? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 5.4 Si una regleta representa $\frac{1}{4}$ de otra ¿cuál es la razón entre la longitud de la regleta menor y la longitud de la regleta mayor? **Explica tu razonamiento.**

Tarea 5.5 Si el resultado de comparar dos regletas es **2**, ¿qué significa esto en términos de razón? **Explica tu razonamiento.**

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

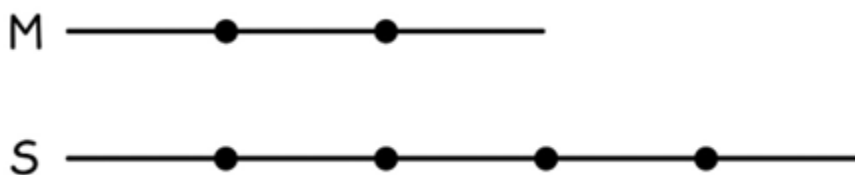
Estas tareas buscan promover la construcción del concepto de razón como una comparación entre magnitudes, para este caso, longitudes de regletas. A través de distintas tareas se pretende que el estudiante identifique cómo se expresa la relación entre una cantidad menor y una mayor y además que comprenda que la razón no hace referencia solo a un número sino a aquello que describe como una magnitud se relaciona con otra. Por otro lado, al pedir explicaciones, intencionalmente buscamos promover en el estudiante el proceso de argumentación.

Finalmente llegamos al diseño del postest, para este momento al igual que como en el pretest, recopilamos ciertos problemas que Vasco (1998) plantea que pueden usarse en la enseñanza de la fracción desde los tres enfoques de los que hemos hablado a lo largo de este trabajo: medidor, operador y razón. Es importante mencionar que este postest había sido incluido en el Aula virtual de GeoGebra, pero para que sirviera como prueba de las actividades realizadas en el aula y sugerido por la docente, este decidió hacerse de forma física. A continuación, veremos algunos de los problemas que contenía el postest y en los anexos de este trabajo podremos ver el postest completo:

Enunciado 1 Para medir la longitud de la cuerda M se utilizó la cuerda S. Si en ambas cuerdas los nudos están igualmente separados, la longitud de M es igual a _____ de la longitud de S. Explica tu respuesta.

Figura 15.

Imagen ilustrativa del problema.



Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como una medida, interpretándose esta como el resultado de comparar dos magnitudes. Para este caso en especial ellos deben analizar cómo la longitud de una cuerda en este caso M puede expresarse en función de otro S, identificando así, cuántas veces una unidad de medida está contenida en otra.

Enunciado 2 Con los dos tercios de \$1500 Pepe compró una caja de chocolates ¿cuál fue el precio de esta caja? Explica tu respuesta.

Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como un operador, interpretando esta como el resultado de determinar una parte para una determinada cantidad dada. Para este caso en especial ellos deberán aplicar el operador, en este caso la fracción a la cantidad inicial para identificar qué tanto dinero gastó Pepe al comprar la caja de chocolates.

Enunciado 3 En una caja caben exactamente 8 cubitos. El volumen de un cubito comparado con el volumen interno de la caja puede expresarse _____. Explica tu respuesta.

Se espera que los estudiantes entiendan la fracción como una razón, interpretándose esta como el resultado de comparar dos cantidades. En este caso, deben identificar la relación entre el volumen de un cubito y el volumen total de la caja, reconociendo que un cubito representa una de ocho partes iguales del total. Así, los estudiantes deben expresar esta relación mediante una razón, entendiendo que se trata de una comparación entre una parte y el todo.

4.2. Implementación de la secuencia de enseñanza

Recordemos que, de acuerdo al plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza, y que uno de los objetivos específicos propuestos para este trabajo investigativo era realizar ajustes a la secuencia de enseñanza después de la implementación de los recursos diseñados en GeoGebra para lograr la versión final de la secuencia, es clave mencionar que se realizó un pilotaje con 4 estudiantes de la carrera de Lic. en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Con respecto al pilotaje es importante mencionar que su intencionalidad era dar a conocer el Aula virtual de GeoGebra diseñada para que de acuerdo a la experiencia que tienen nuestros pares académicos pudiéramos hacer las respectivas correcciones a los applets y a las tareas asignadas a cada uno de los capítulos que ellos en su buena fé y profesionalismo nos hicieran. En concordancia con lo anterior expuesto, recibimos comentarios positivos y ciertas sugerencias con respecto a las configuraciones y tareas de algunos applets, a continuación, podrían destacarse aspectos generales como:

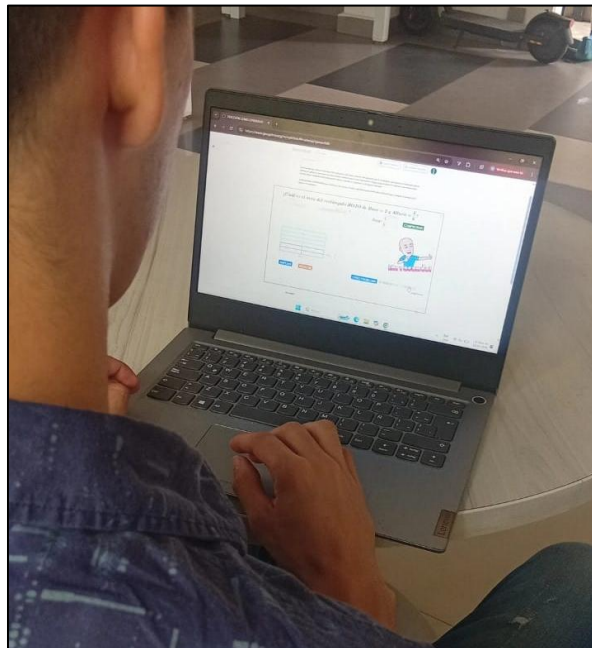
AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

- Algunos elementos de los applets no estaban fijos y podrían modificar la interfaz del applet.
- Algunas casillas de respuesta no contaban con un color que hiciera resaltar su presencia en la interfaz del applet.
- Algunos textos tenían un tamaño que no era muy acorde a la estética del applet.
- Algunos applets contaban con muchas tareas que podrían unirse y, aun así, explorar lo mismo que se quería de forma separada.
- Ciertas tareas no eran tan específicas, pues merodeaban y esto podría confundir al estudiante y no permitirnos llegar a la respuesta que esperábamos del estudiante.

Ante este panorama decidimos tomar nota de cada una de esas sugerencias y hacer los respectivos cambios en el rediseño de los applets y tareas, cambios que fueron de suma importancia ya que se vio reflejado en la eficiencia y eficacia al momento de implementar con el verdadero grupo destino para el cual se había diseñado el Aula virtual de GeoGebra, además de mejorar la experiencia de los estudiantes en la exploración e interacción con los applets y orientarlos hacia el verdadero propósito del libro.

Figura 16.

Implementación del pilotaje del Aula virtual de GeoGebra.



AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Como se mencionó anteriormente, después de realizar los debidos ajustes a la secuencia de enseñanza se llegó a la versión final, una más completa, enfocada en la búsqueda de una verdadera exploración e interacción entre el estudiante y el applet además de cómo se mencionó en algunos de los objetivos específicos: dicho libro buscaba contribuir, favorecer y promover la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón por medio de particiones, transformaciones y relaciones existentes en contextos significativos. A partir de ello, la secuencia fue implementada con 13 estudiantes de sexto grado que pertenecen al Semillero Matemático UIS durante el primer semestre de 2026, hacia inicios del mes de abril. Cabe resaltar que esta implementación tuvo su desarrollo a lo largo de 2 sesiones, en un total de 9 horas.

Figura 17.

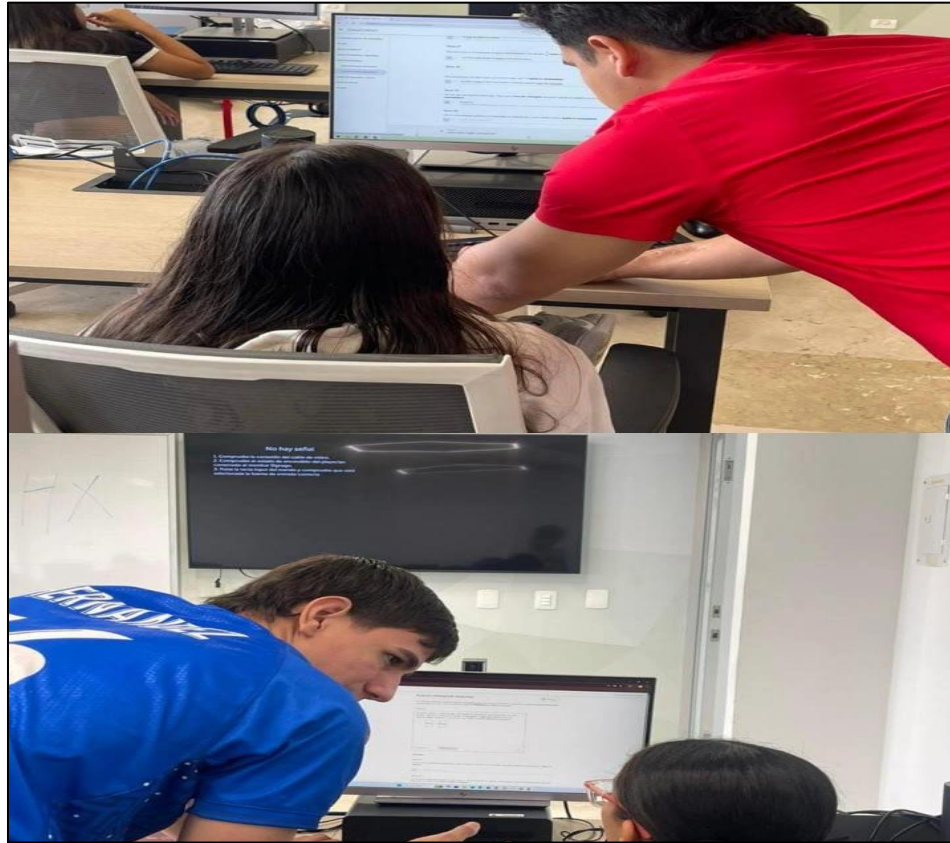
I sesión de la implementación con estudiantes del semillero matemático UIS.



Figura 18.

II sesión de la implementación con estudiantes del semillero matemático UIS.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN



4.3. Recolección de datos

Con respecto a la recolección de datos, cabe destacar que los datos fueron tomados desde 4 distintos tipos de fuentes: la primera fueron las guías elaboradas en formato físico para el pretest y el posttest, las cuales se recogieron al término de cada sesión y que fueron de mucha ayuda para el análisis de resultados, ya que nos permitieron observar las distintas estrategias usadas por los estudiantes en los problemas, además de la realización de un análisis cualitativo. La segunda fuente fueron todas las casillas de entrada que tenían cada una de las tareas en el Aula Virtual de GeoGebra, las cuales nos permitieron dos cosas muy importantes en el análisis de resultados: por un lado, teníamos a la mano cada una de las justificaciones usadas por los estudiantes en cada una de las tareas y, por otro lado, nos permitieron crear un semáforo de resultados, logrando de esta manera un proceso más eficiente al hacer un análisis de tipo cuantitativo.

Como tercera fuente tenemos todo lo relacionado con material audiovisual, en el cual encontramos pequeñas intervenciones interesantes y controversiales de los estudiantes y, finalmente, pero no menos

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

importante, tenemos como cuarta fuente cada uno de los apuntes realizados por los investigadores, llámese dificultades, dudas, sugerencias, preguntas y errores de la secuencia de enseñanza; esta fuente, junto con la anterior, nos sirvieron para complementar las dos primeras fuentes, además de permitirnos transcribir algunas interacciones entre el estudiante y el profesor. Con todo lo mencionado anteriormente, llevamos a cabo, tal como se planteó en el objetivo general, la evaluación de la implementación de una secuencia de enseñanza diseñada en el Aula Virtual de GeoGebra para la comprensión de las fracciones como medidores, operadores y razones.

4.4. Producción de resultados

Después de hacer explícitas cada una de las fuentes de datos obtenidas y buscando responder a cada uno de los objetivos planteados en este trabajo investigativo, procederemos a describir, analizar y buscar explicar algunos de los registros o respuestas más interesantes o controversiales que los estudiantes decidieron compartirnos. Finalmente, buscaremos comparar los resultados del pretest y postest con el fin de analizar si hubo avances en la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón además de resaltar las posibles recomendaciones y ajustes a la secuencia de enseñanza para una posible implementación futura.

5. Resultados

En esta sección se presenta el análisis de la secuencia de enseñanza elaborada en el Aula Virtual de GeoGebra, la cual fue aplicada a 13 estudiantes de grado sexto que pertenecen al semillero matemático de la Universidad Industrial de Santander. Además, en este apartado, se exponen los resultados del Pre-Test y del Post-Test, así como una comparación del desempeño de los estudiantes a lo largo de las diferentes actividades presentadas en el recurso didáctico.

La sección 5.1 aborda los resultados obtenidos en el Pre-Test, de esta manera, analizaremos las respuestas presentadas por los estudiantes con respecto a la fracción como medidor, operador y razón, cabe resaltar que en el pretest se identificaron diferentes niveles de comprensión según el concepto de la fracción, de lo cual hablaremos más adelante. En la sección 5.2 se analizan las respuestas de los diferentes capítulos elaborados en el Aula Virtual de GeoGebra. La sección 5.3 aborda los resultados obtenidos en el Post-Test luego de que se desarrollaran las diferentes actividades del Aula Virtual de GeoGebra, analizando las respuestas presentadas por los estudiantes relacionando la fracción como medidor, operador y razón. Finalmente, en la sección 5.4 se presenta un análisis comparativo entre los resultados del Pre-Test y del Post-Test con el objetivo de identificar los avances en la comprensión del concepto de fracción como medidor, operador y razón.

5.1. Resultados del Pre-Test

El análisis del pretest que se utilizó para el estudio de las fracciones se realizó desde la perspectiva del Archipiélago de los Fraccionarios, formulada por Carlos Eduardo Vasco Uribe en el cual sostiene que la comprensión de los números fraccionarios no se desarrolla como un único concepto, sino como un conjunto de conceptos conectados entre sí. “Tenemos pues al menos cinco islas del Archipiélago de los Fraccionarios. Podríamos llamarlas las islas de los fraccionarios como: Operadores – Partidores – Medidores – Razones – Cocientes” (Vasco, 1998, p. 28).

Tabla 3.

Semáforo de resultados del Pre-Test.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E1		3	3	1	1	3	3	3	3	1
E2		3	3	3	3	1	1	3	3	1
E3		1	3	1	1	3	3	1	3	0
E4		3	0	1	1	3	0	3	3	0
E5		1	3	1	1	1	0	3	3	0
E7		1	1	1	1	1	1	3	1	1
E8		2	1	2	1	1	1	3	3	1
E9		3	3	3	3	3	3	3	3	3
E11		1	0	1	1	1	1	3	3	3
E13		1	1	0	1	3	3	2	2	2
E14		1	1	3	1	1	1	3	3	1
E15		1	3	3	1	1	1	3	3	3
E19		2	3	3	0	1	3	3	3	0

Nota. Elaboración propia.

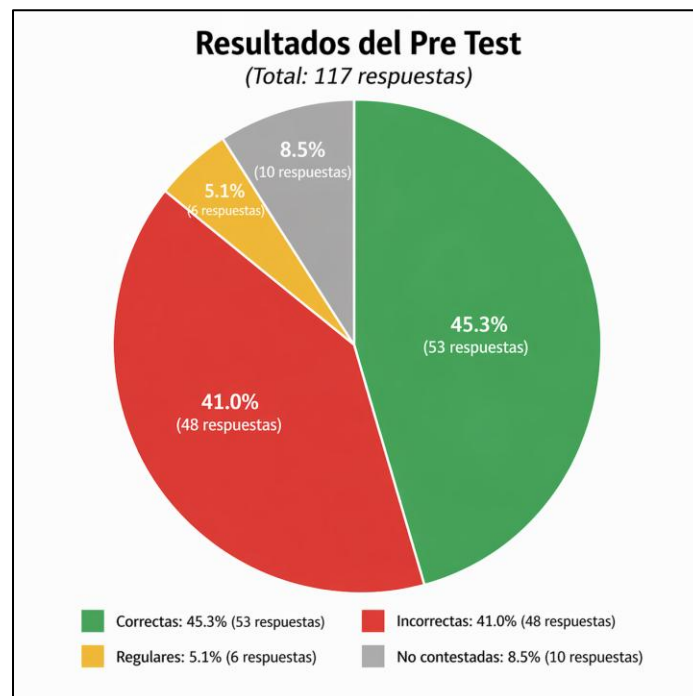
Para la representación de los resultados se utilizó un sistema de categorización en este caso de colores o también denominado “*semáforo de resultados*”, para facilitar la lectura y el análisis del desempeño de los estudiantes. El color verde indica que la respuesta fue correcta y que el estudiante muestra un adecuado nivel de comprensión del concepto. El color amarillo corresponde a respuestas regulares, es decir, aquellas que muestran avances parciales pero que aún presenta dificultades en la comprensión del concepto. El color naranja corresponde a aquellas respuestas en las que el estudiante contestó de manera incorrecta y existe la presencia de errores conceptuales. Finalmente, el color rojo significa que el estudiante no contestó la pregunta, lo que puede asociarse a su interés nulo a responder o a la dificultad existente en resolver lo planteado. Esta clasificación permite no solo visualizar el desempeño general, sino también identificar el desempeño de los estudiantes buscando patrones de dificultad.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Cuantitativamente, los resultados obtenidos muestran que: de las 117 respuestas analizadas, el 45.3% (53 respuestas) fueron correctas, el 41% (48 respuestas) son incorrectas, el 5.1% (6 respuestas) tuvieron un desempeño regular y el 8.5% (10 respuestas) no se contestaron. Estos datos demuestran que el concepto de fracción se entiende parcialmente o en su defecto, de manera aislada, de hecho, es consistente con la noción de que los estudiantes poseen la capacidad de generar significados individuales ya que como menciona el autor "Los conceptos así elaborados pueden permanecer aislados... no lograron construir todos los puentes entre las distintas islas" (Vasco, 1998, p. 42). Reforzando lo anteriormente mencionado, el desempeño medio-bajo señala que los estudiantes todavía no han establecido conexiones entre los diferentes conceptos de la fracción.

Figura 19.

Diagrama circular con los resultados obtenidos en el Pretest.



A continuación, veremos algunas de las respuestas obtenidas para algunos problemas presentados en el pretest. En la figura 20, podemos observar cómo el estudiante E7, aparentemente, pretendía usar la regla de tres para dar solución a los problemas que estaban enfocados en ver la fracción como medidor, pero no logra estructurar correctamente esta, esto se evidencia, cuando en cada uno de los problemas



AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN


planteados intenta hallar la cantidad equivalente a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ para de alguna manera hallar el valor que le pregunta el enunciado, pero notamos que en cada uno de los problemas realiza un procedimiento similar y es multiplicar la cantidad total por el denominador de la fracción que representa la parte que se quiere hallar. De esta manera, se evidencia que este no logra comprender las cantidades que está comparando ni la relación existente entre ellas.


Esta situación demuestra que existe en el estudiante una dificultad y una idea nula en la interpretación del concepto de fracción como medidor, puesto que el estudiante intenta aplicar un algoritmo sin comprender el concepto de la fracción que, en este caso, está actuando como medida de una magnitud respecto a la otra. Cabe resaltar, que este estudiante presenta el desempeño más bajo con solo una respuesta correcta lo que indica dificultades en la comprensión del concepto de fracción en general.

Figura 20.

Respuestas de E7 en los problemas de fracción como medidor en el Pre-Test.

1. Los $\frac{3}{4}$ de una docena de naranjas ¿Cuántas naranjas son? Explica tu respuesta. $4 \times \frac{3}{4} = 3$ son 12 naranjas.  

2. Con los $\frac{2}{3}$ de \$1500 Pepe compró una caja de chocolate ¿Cuál fue el precio de esta caja? Explica tu respuesta. $1.500 \times \frac{2}{3} = 1.000$ El precio de la caja es de 1.000. 

3. En una olla había 12 litros de leche, si se derraman los $\frac{5}{6}$ de esa cantidad ¿Cuántos litros queda aún? Explica tu respuesta. $12 \times \frac{5}{6} = 10$ Le quedan de 2 litros. 

En la categoría de fracción como medidor, las respuestas correctas fueron un 41%, mientras que las incorrectas alcanzaron un 43,6%, lo cual indica un rendimiento categorizado entre medio y bajo. Esto indica que algunos estudiantes identifican la fracción como una medida de magnitud, aunque todavía persisten dificultades para consolidar este significado. El texto señala que “una es la de los fraccionarios como medidores, que él considera con buenas razones como independiente de las otras dos, debido a la

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

facilidad con que algunas personas... manejan las pulgadas y sus fracciones sin saber manejar los operadores ni los partidores” (Vasco, 1998, p. 27). Esto explica que los estudiantes puedan tener un conocimiento parcial del significado de medida sin relacionarlo con otros usos de la fracción. En la categoría de fracción como operador, se observó el nivel más alto de dificultad, con un 30,8% de respuestas correctas y un 61,5% incorrectas. Esta observación indica que los estudiantes presentan dificultades al intentar aplicar la fracción a una cantidad o comprenderla como una transformación. Al respecto, el autor señala que los fraccionarios deben construirse “como operadores o transformadores activos, achicadores y agrandadores, como medidores de longitudes, masas, pesos, duraciones, etc.” (Vasco, 1998, p. 24). El bajo desempeño en esta categoría evidencia que los estudiantes aún no han dominado la isla principal del sistema conceptual.

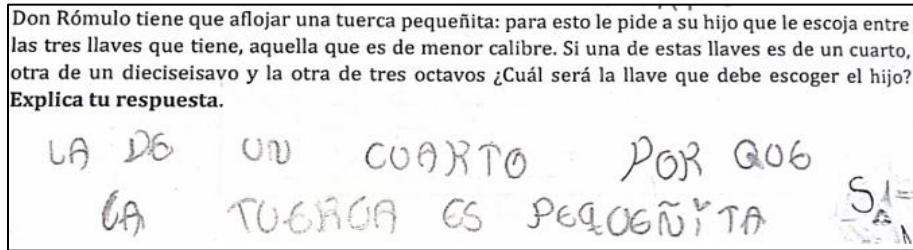
En esta categoría encontramos la pregunta P4, que fue la que mayor dificultad presenta para los estudiantes con solo dos respuestas correctas. En dicha pregunta, los estudiantes debían determinar cuál de tres fracciones ($1/4$, $1/16$, $3/8$) representaba una menor magnitud es decir elegir la llave de menor calibre. Esta pregunta exige comprender la fracción como operador, ya que la fracción actúa como un transformador que reduce la magnitud inicial, produciendo tamaños diferentes.

De acuerdo con lo anterior, muchos estudiantes no lograron interpretar el concepto de la fracción como un operador que “achica” la magnitud. En cambio, los estudiantes compararon las fracciones asumiendo que un denominador mayor representa una cantidad mayor lo que los llevó a errores como considerar $1/4$ es la tuerca más pequeña. El alto nivel de error observado en esta pregunta sugiere que los estudiantes no comprenden este significado de la fracción como operador dado que se registró una cantidad considerable de respuestas como la siguiente:

Figura 21.

Respuesta de E14 en el problema p4 de fracción como operador en el Pre-Test.

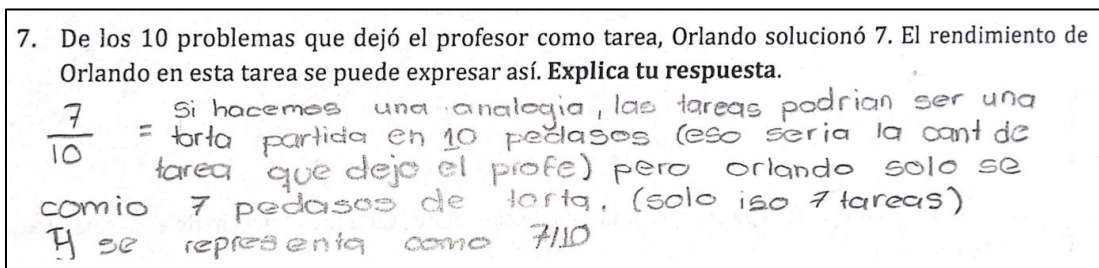
AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN



La categoría de razón como fracción presenta el mejor desempeño, con un 64,1% de respuestas correctas y un 17,9% incorrectas. Esto indica que los estudiantes comprenden con mayor facilidad la comparación de cantidades. Al respecto, Vasco (1998) señala que “otra isla es la de los fraccionarios como razones, que puede ser una isla independiente en el caso de expresiones como: ‘yo encesto tres de cada cinco tiros...’; algunas personas manejan bien este tipo de razones... sin asociarlas con los fraccionarios como operadores ni como partidores”. Esto explica los resultados obtenidos, pues los estudiantes demuestran un desempeño superior de esta interpretación, aunque no siempre la relacionan con los demás conceptos del sistema conceptual de los fraccionarios.

Figura 22.

Respuesta de E9 en el problema de fracción como razón en el Pre-Test.



La respuesta del estudiante E9 evidencia cómo construye una explicación mediante la analogía de la fracción como parte de un todo. En este sentido, el estudiante recurre a un modelo concreto y conocido para dar significado a la situación. Cabe destacar, además que el estudiante E9 obtuvo un desempeño sobresaliente con 9 respuestas correctas de 9. Por el cual refleja una comprensión más amplia y flexible de las fracciones, pues le permite relacionar distintos conceptos según la situación.

En el contexto del Archipiélago de los Fraccionarios, esto indica que el estudiante ha logrado

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

establecer solidas conexiones entre las distintas islas. La capacidad para responder correctamente problemas asociados a las islas de Medidor, Operador y de la razón sugiere que puede transitar entre estos conceptos y utilizarlos de manera pertinente. Este tipo de razonamiento concuerda con lo planteado por Carlos Vasco, quien destaca que el aprendizaje matemático implica la construcción de redes de significado que permiten al estudiante abordar un mismo concepto desde diferentes perspectivas. Por tanto, el uso de la analogía no limita la comprensión, sino que evidencia que el estudiante dispone de múltiples representaciones para dar sentido a la fracción. Como señala vasco, la construcción del conocimiento matemático supone “empezar a tejer una red con bastantes hilos entre los nudos” (Vasco, 1998, p 25), conectando así los distintos significados del concepto.

En general, los resultados del Pre-Test demuestran que el grupo de estudiantes presenta un dominio desigual según la categoría: la fracción como razón refleja el desempeño más sólido, la fracción como medidor evidencia un entendimiento parcial y la fracción como operador muestra el mayor reto en términos conceptuales.

Tabla 4

Resultados del Pre-Test categorizado como fracción como medidor, operador y razón

	Correcto	Regular	Incorrecto	No contestó
Medidor	16	3	17	3
Operador	12	0	24	3
Razón	25	3	7	4

Nota. Elaboración propia.

5.2. Actividades presentadas en el Aula Virtual de GeoGebra.

Las Actividades de GeoGebra se desarrollaron en dos sesiones con el acompañamiento de dos practicantes pertenecientes al programa de licenciatura de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, quienes apoyan a la docente titular del grupo de semillero. Durante el desarrollo de las diferentes actividades, estos practicantes promovieron el razonamiento por parte de los estudiantes mediante preguntas orientadoras y participación activa en cada sesión.

El desempeño mostrado por los estudiantes fue satisfactorio en las diferentes actividades, lo cual se evidencia tanto en los resultados de sus respuestas como en lo observado durante las sesiones. En estas, se formularon preguntas orientadas a fomentar el razonamiento según los objetivos de cada actividad y, a partir de las respuestas de los estudiantes, fue posible ratificar el cumplimiento de los objetivos propuestos en cada actividad.

Un aspecto relevante del proceso fue la incorporación del software GeoGebra como herramienta didáctica. Es importante señalar que los estudiantes no habían tenido experiencia previa con este programa. Por ello, en un primer momento durante el inicio del desarrollo del primer capítulo, se les brindaron indicaciones sobre la manipulación del applet, explicando el funcionamiento de los deslizadores, botones. De igual manera, al iniciar cada applet, se les proporcionan las instrucciones necesarias para garantizar el uso correcto de cada applet.

En el capítulo 1, dedicado a la fracción como medidor, consta de dos momentos, tal como se mencionó anteriormente. En el primer momento, los estudiantes mostraron avances en la comprensión de la fracción como una cantidad medible en el contexto del tiempo. A partir de las tareas propuestas los estudiantes, comienza a interpretar la fracción como una unidad de referencia en este caso los 60 minutos como 1 hora y reconociendo diferentes expresiones usadas en el contexto diario y comparaciones dentro de una misma unidad de referencia, pero utilizando distintas representaciones.

Tabla 4.

Semáforo de resultados del primer momento del capítulo 1.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	1	2	3	4
E1	3	1	3	3
E2	3	3	3	3
E3	3	3	1	3
E4	3	3	3	3
E5	3	3	3	3
E7	3	2	3	3
E8	3	2	3	3
E9	3	3	3	3
E11	3	3	3	3
E13	3	3	1	3
E14	3	2	3	3
E15	3	3	3	3
E19	3	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la tabla anterior, la pregunta 2 fue que más dificultades presentó debido a que los estudiantes E7, E8 y E14 realizaron correctamente el cálculo de $\frac{2}{3}$ de 60 minutos, obteniendo 40 minutos, sin embargo, al afirmar que la respuesta es “No” se evidencia una dificultad en establecer la relación de orden entre las cantidades obtenidas. Esto indica que el estudiante reconoce cuánto representa la fracción, pero aún presenta dificultades para interpretar si esa cantidad es mayor o menor respecto a otra dentro del mismo sistema de referencia.

Figura 23.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Respuesta de E7, E8 y E14 en la tarea 1.2 en el primer momento del capítulo 1.

1.2 ¿Es posible que $\frac{2}{3}$ de hora sea más de media hora?. **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

NO, PORQUE SE MULTIPLICA $2 \times 60 = 120$ LUEGO LO DIVIDO ENTRE 3 Y DESPUES SE SIMPLIFICA EL RESULTADO Y ME DA 40

En el segundo momento del capítulo 1, las actividades desarrolladas permiten evidenciar avances en la fracción como medidor en el contexto del tiempo ya mencionado anteriormente. No obstante, a diferencia del primer momento, se incorpora un mayor nivel de interacción y reflexión por parte de los estudiantes a través del uso del applet, y los resultados muestran que enfrentaron mayores dificultades al abordar las tareas propuestas (2.1 a 2.5). A pesar de ello, se observa que los estudiantes comienzan a establecer relaciones entre el tiempo transcurrido y su representación fraccionaria.

Tabla 5.

Semáforo de resultados del segundo momento del capítulo 1.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	1	2	3	4	5
Pregunta					
E1	3	3	3	3	3
E2	3	3	3	3	3
E3	3	3	3	3	3
E4	3	3	3	3	3
E5	3	3	3	3	3
E7	1	3	2	3	3
E8	2	2	3	3	3
E9	3	3	3	3	3
E11	3	3	2	3	3
E13	3	3	3	3	3
E14	3	3	3	3	3
E15	3	3	2	3	3
E19	3	3	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

En la tarea 2.3, en la que se preguntaba si 20 minutos pueden representar menos de $\frac{1}{4}$ de hora, los estudiantes E7, E11 y E15 presentaron la dificultad donde realizaron correctamente el cálculo $\frac{1}{4}$ de hora representa 15 minutos, lo cual indica un manejo adecuado del procedimiento; sin embargo, llegaron a una conclusión incorrecta, pues 20 minutos es mayor que 15 minutos, no menor por lo tanto presenta dificultades al comparar cantidades. Este tipo de respuestas muestran que existen avances en las representaciones de la fracción como medidor, pero es necesario fortalecer la comprensión de la relación de orden, de modo que los estudiantes no solo calculen sino también interpreten correctamente los resultados en contexto.

Figura 24.

Respuesta de E15 en la tarea 2.3 en el segundo momento del capítulo 1.

2.3 ¿Es posible que **20 minutos** representen menos de $\frac{1}{4}$ de hora? **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

si es posible por que $\frac{1}{4}$ de 60 es 15

En el capítulo 2, denominado Puente Isla Medidores a Operador tiene como propósito establecer una conexión entre las distintas islas del Archipiélago de los Fraccionarios especialmente entre la Isla de Medidor y la Isla del Operador. En las primeras actividades, los estudiantes logran reconocer que la fracción en el deslizador representa una acción que transforma el tamaño del cuadrado achicando o agrandando. De igual manera en tareas como la aplicación de $\frac{1}{5}$ se identifican en la comprensión de la fracción al reducir el tamaño del cuadrado, mientras en el caso de $\frac{11}{10}$ también reconocen que puede aumentar el tamaño del cuadrado.

Tabla 6.

Semáforo de los resultados del capítulo 2.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	Pregunta	1	2	3	4	5
E1		3	3	3	3	2
E2		3	3	3	3	3
E3		3	3	3	3	3
E4		3	1	1	3	2
E5		3	3	3	3	3
E7		3	3	3	1	3
E8		3	3	3	3	3
E9		3	3	3	3	3
E11		3	3	3	3	0
E13		3	3	3	3	3
E14		3	2	3	3	1
E15		3	3	3	3	2
E19		3	3	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

No obstante, la mayor dificultad se presentó en la tarea 1.5 en la que se requiere analizar qué ocurre cuando el numerador es menor que el denominador ya que en tareas anteriores los estudiantes lograban describir casos específicos, pero en esta actividad se requiere una generalización de los casos anteriores con el objetivo de los estudiantes relacionen el comportamiento de las fracciones menores a 1. Sin embargo, varios estudiantes mostraron dificultades las cuales se reflejan en la diversidad de respuestas. Esta variedad sugiere que los estudiantes se encuentran en diferentes niveles de comprensión y que aún no han logrado fortalecer el concepto de fracción como operador

Figura 25.

Respuesta de E14 en la tarea 1.5 del capítulo 2.

<p>1.5 ¿Qué cambia cuando el numerador es menor que el denominador? Explica tu razonamiento</p> <p>Respuesta</p> <p>QUE EL NUMERADOR DESDE MI PUNTO DE VISTA ES EL COLOR AZUL POR ESO EL CUADRADO AZUL ES MAS GRANDE SI EL NUMERADOR ES EL MAYOR</p>

También es importante considerar que la formulación de la pregunta pudo no haber sido lo suficientemente clara, lo que pudo influir en la interpretación de los estudiantes y por ello la diversidad de respuestas, aunque se realizó el pilotaje con los compañeros de carrera, lo que permitió realizar algunos ajustes iniciales sin embargo los resultados obtenidos de la implementación indican que aún faltan algunos ajustes a la redacción y claridad de algunas tareas. Por ejemplo:

Figura 26.

Respuesta de E15 para la tarea 1.5 del capítulo 2.

<p>1.5 ¿Qué cambia cuando el numerador es menor que el denominador? Explica tu razonamiento</p> <p>Respuesta</p> <p>se vuelve una fraccion impropia</p>
--

En el capítulo 3 como se mencionó anteriormente, está conformado por dos subcapítulos. Fracción como operador I y fracción como operador II. En el subcapítulo la fracción como operador I, los estudiantes tuvieron en general un buen desempeño, lo cual permite analizar cómo interpretan la fracción como operador donde debían identificar si un operador agranda, reduce o mantiene el tamaño de cronos.

Tabla 7.

Semáforo de los resultados del subcapítulo operador I del capítulo 3.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	1	2	3	4	5	6
Pregunta						
E1	3	3	3	3	3	3
E2	3	3	3	3	3	3
E3	3	3	3	3	3	3
E4	3	1	3	3	3	3
E5	3	2	3	3	3	3
E7	3	3	3	3	3	3
E8	3	3	3	3	3	3
E9	3	3	3	3	3	3
E11	3	1	3	3	3	3
E13	3	3	3	3	3	3
E14	3	3	3	2	3	3
E15	3	3	1	3	3	3
E19	3	3	1	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

Es importante mencionar que la pregunta 1.2 presentó mayor dificultad, pues en esta tarea donde se pedía determinar cuál operador hacía que cronos quedara más pequeño entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ algunos estudiantes tuvieron dificultades al comparar ambas fracciones. Esto nos indica que, aunque reconocen que ambas transforman la reducción de cronos, aún presentan dificultades en identificar cuál fracción reduce en mayor medida a cronos.

Figura 27.

Respuesta de E4, E5 y E11 para la tarea 1.2 del subcapítulo operador I del capítulo 3.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

1.2 ¿Qué operador hace que el perro quede más pequeño: $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$? ¿Por qué? **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

$\frac{3}{4}$, en comparación a $\frac{2}{3}$ el perro es más grande

La imagen siguiente muestra que un estudiante evidenció un avance significativo en la comprensión de la fracción como operador, dado que recurrió a una representación decimal para interpretar la transformación de reducción que ejerce $\frac{1}{3}$ sobre el tamaño de Cronos. Este estudiante demuestra la capacidad de conectar entre distintas representaciones de un mismo número ya que reconoce que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $0.33\dots$ por lo cual le permite apoyarse en un sistema probablemente más sencillo para el estudiante hacer comparaciones. Desde la perspectiva del Archipiélago de los Fraccionarios, esta respuesta evidencia que el estudiante no se limita en la forma fraccionaria, sino que utiliza otra representación para justificar su razonamiento, por lo tanto, refleja un nivel de comprensión sólido y flexible.

Figura 28.

Respuesta de E12 para la tarea 1.1 del subcapítulo operador I del capítulo 3.

1.1 Si aplico el operador $\frac{1}{3}$, ¿qué le pasa al tamaño del perro comparado con el original? **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

SI PORQUE $\frac{1}{3}$ ES 0.33 LO CUAL ES MENOR QUE LO UNIDAD Y POR ESO CRONOS ES MAS PEQUEÑO

En cuanto al segundo subcapítulo, fracción como operador II se evidenciaron tanto avances como dificultades. Este applet requirió más tiempo en cuanto a la explicación y acompañamiento a comparación de los otros applets ya que los estudiantes no lograban establecer una conexión entre las particiones del área del rectángulo y el concepto de operador aplicado al área. Sin embargo, los estudiantes luego de realizar ejercicios generados por el applet lograron avances en la comprensión como la fracción actúa como un operador que modifica el área del rectángulo.

Tabla 8.

Semáforo de los resultados del subcapítulo operador II del capítulo 3.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	Pregunta	1	2	3	4	5
E1		3	3	3	3	3
E2		3	3	3	3	3
E3		3	3	3	3	3
E4		3	3	3	3	3
E5		3	3	3	3	3
E7		3	1	3	1	1
E8		3	3	3	3	3
E9		3	3	3	3	3
E11		1	3	3	3	1
E13		3	2	3	3	3
E14		3	3	3	3	3
E15		3	3	3	3	1
E19		3	3	3	3	1

Nota. Elaboración propia.

No obstante, varios estudiantes, tras realizar ejercicios generados por el applet, lograron avances en reconocer que la fracción, al actuar como altura, modifica el área del rectángulo. En dichas tareas, se cumplió el objetivo de que los estudiantes determinarán si el área se reduce, se mantiene o aumenta. En términos generales los estudiantes lograron interpretar que, cuando la fracción es menor que 1 el área disminuye, cuando es igual a 1 se conserva y cuando es mayor que 1 el área aumenta. Esto refleja un progreso en la comprensión del operador en este caso sobre el área que no es solo el cálculo de la base por altura sino también el efecto que tiene el operador sobre la magnitud.

Figura 29.

Respuesta de E15 para la tarea 1.1 del subcapítulo operador II del capítulo 3.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

1.1 Si la altura fuera $\frac{1}{2}$ y la base 2, ¿qué le sucede al área respecto a la base? **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

el área sería la mitad de la base por que para hallar el área hay que multiplicar base X altura y eso de la mitad de la base

En el capítulo 4, puente isla operador a razones las tareas propuestas (1.1 a 1.4) estaban orientadas a que los estudiantes comprendieran la importancia del orden de las fracciones y reconocieran el concepto de las fracciones equivalentes. Sin embargo, es importante señalar que este capítulo fue en el que se obtuvo el menor desempeño por parte de los estudiantes. Una posible explicación de estos resultados es que las tareas no fueron suficientemente precisas para promover el razonamiento esperado, ya que resultaron principalmente conceptuales y, por lo tanto, no lograron enfocar el objetivo de manera precisa.

Adicionalmente, durante el desarrollo de este capítulo se presentó una situación particular, ya que algunos estudiantes lograron bloquear el applet, lo cual fue algo inesperado porque los applets fueron testeados buscando fallos o errores en su funcionamiento, pero no logramos bloquear. Aunque las causas exactas de cómo lograron bloquear el applet aún no han sido determinadas, fue posible solucionar la situación para que los estudiantes siguieran interactuando con el applet y continuar con el desarrollo de las tareas de este capítulo.

Tabla 9.

Semáforo de los resultados del capítulo 4.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	1	2	3	4	5
E1	3	2	3	3	3
E2	3	3	3	3	3
E3	3	3	3	3	3
E4	3	2	3	3	1
E5	3	3	3	3	3
E7	1	3	3	3	3
E8	3	3	3	3	3
E9	3	3	3	3	2
E11	3	3	1	1	3
E13	3	3	1	1	2
E14	3	3	3	3	2
E15	3	3	3	3	3
E19	3	3	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

A pesar de que este capítulo no fue el de mejor desempeño, en los resultados fue posible identificar una comprensión favorable en el puente de la isla de operador y la isla de la razón. En la siguiente imagen en la tarea 1.2 ¿Por qué es importante mantener el mismo orden en ambas fracciones?, el estudiante respondió *“Porque al momento de hacer la equivalencia lo debes hacer con la misma magnitud porque sino queda mal”*. Esta respuesta muestra que el estudiante reconoce la necesidad de mantener coherencia entre las magnitudes se están comparando, lo cual es importante en la construcción de razones equivalentes. En este sentido, este tipo de respuestas permiten identificar que, a pesar de las dificultades generales del capítulo, varios estudiantes comprendieron que es importante conservar una relación entre

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

magnitudes en un mismo orden. Desde la perspectiva de Archipiélago de los Fraccionarios, esto nos sugiere que algunos estudiantes lograron ubicarse en la isla de las razones y establecer conexiones con la idea de operador, avanzando así en la comprensión de ambos conceptos.

Figura 30.

Respuesta de E9 para la tarea 2 del capítulo 4.

1.2 ¿Por qué es importante mantener el mismo orden en ambas fracciones? Por ejemplo, si pones gotas / onzas en la primera fracción, ¿por qué debes hacer lo mismo en la segunda?. **Explica tu respuesta**

Respuesta

Porque al momento de hacer la equivalencia lo debes hacer con la misma magnitud porque sino queda mal

El capítulo 5, isla de las razones se evidenció un buen desempeño por parte de los estudiantes. Estos lograron establecer relaciones entre las longitudes de las regletas y expresar la razón, lo que evidencia avances en la comprensión de este concepto. De igual modo, el applet permitió que los estudiantes establecieran conexiones entre la representación concreta y la expresión simbólica. Un aspecto clave del applet es que permite comparar la razón entre dos regletas en ambos sentidos (a/b) y (b/a), lo que permitió a los estudiantes comprender que el orden en la razón modifica la fracción y el significado. Esta comparación favorece la comprensión de que no es lo mismo la razón de la regleta A respecto a la regleta B, que la B respecto a la A, ya que cada relación representa una interpretación diferente. De este modo, el applet fortaleció la idea de razón como la relación entre dos magnitudes, pero también la importancia del orden para la interpretación.

Tabla 10.

Semáforo de los resultados del capítulo 5.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Estudiante	1	2	3	4	5
Pregunta					
E1	3	3	2	3	3
E2	3	3	3	3	3
E3	3	3	3	3	3
E4	3	3	3	3	3
E5	3	3	3	3	3
E7	3	3	3	3	3
E8	3	3	3	3	3
E9	3	3	3	3	3
E11	3	3	3	3	3
E13	3	3	2	0	3
E14	3	3	3	3	3
E15	3	3	3	3	3
E19	3	3	3	3	3
E20	3	2	3	3	3

Nota. Elaboración propia.

Las tareas propuestas cumplían el mismo objetivo del applet, pero desde una perspectiva más general. Mientras el applet presentaba ejercicios más específicos, las tareas se enfocan en esa experiencia más conceptual, en que los estudiantes debían interpretar y expresar la razón. En este sentido se observa en los resultados que el applet cumplió el objetivo como apoyo inicial, permitiendo a los estudiantes explorar y comprender la relación entre magnitudes. Posteriormente, tras interactuar con el applet las tareas ampliaban más el aprendizaje a plantear situaciones más generales como *cuatro veces mayor o la tercera parte* y lo importante que las tareas también hacen énfasis en el orden de las razones. Por ejemplo,

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

la siguiente tarea:

Figura 31.

Respuesta de E14 para la tarea 1.3 del capítulo 5.

1.3 Si una regleta es la tercera parte de otra, ¿cuál es la razón entre la longitud de la regleta mayor y la longitud de la regleta menor? **Explica tu razonamiento.**

Respuesta

9/3 porque es la tercera parte de la mayor a la menor

En este caso, el estudiante parte de la idea correcta que reconoce que una regleta es la tercera parte de la otra, es decir identifica una relación entre las dos magnitudes y además logra expresar específicamente el orden de la razón, de la regleta mayor a la menor.

A nivel general, luego de la implementación de todos los applets, se evidencio un buen desempeño por parte de los estudiantes, quienes lograron los objetivos propuestos en la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón dentro del Archipiélago de los Fraccionarios. A lo largo del desarrollo de las diferentes actividades, se observaron avances progresivos en los estudiantes como interpretaron, relacionaron y aplicaron estos conceptos en distintos contextos. Asimismo, cabe mencionar la disposición y la actitud de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades, pues en general se mostraron participativos e interesados.

El uso de los applets resultó especialmente efectivo para captar su atención y mantener el interés a lo largo de las dos sesiones; de hecho, algunos estudiantes mostraron interés en seguir interactuando con el applet incluso después de haber finalizado todas las tareas del capítulo. Finalmente, esta experiencia nos permite identificar aspectos a mejorar tanto en los applets como en las tareas para lograr una mejor comprensión de la fracción como mediador, operador y razón.

5.3. Resultados del Postest

El análisis del postest se realizó bajo el mismo enfoque del Archipiélago de los Fraccionarios propuesto por Carlos Eduardo Vasco Uribe (1998) con el objetivo de comparar los avances en la

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

comprensión de la fracción como medidor, operador y razón. Para los resultados se utilizó el sistema de categorización anteriormente descrito.

Tabla 11.

Semáforo de resultados del postest.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E1	3	3	1	3	3	2	2	3	3
E2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
E3	3	1	3	3	3	3	3	1	3
E4	3	3	1	3	1	3	3	3	3
E5	1	3	3	3	3	3	3	3	3
E7	1	3	1	3	3	3	3	3	3
E8	3	3	3	3	3	3	3	3	3
E9	3	3	3	3	3	3	3	0	0
E11	3	0	0	3	0	3	3	2	2
E13	3	2	3	3	3	3	3	3	1
E14	1	1	1	1	3	3	2	1	2
E15	3	3	3	3	3	3	3	3	3
E19	3	3	3	3	3	3	3	1	3

Nota. Elaboración propia.

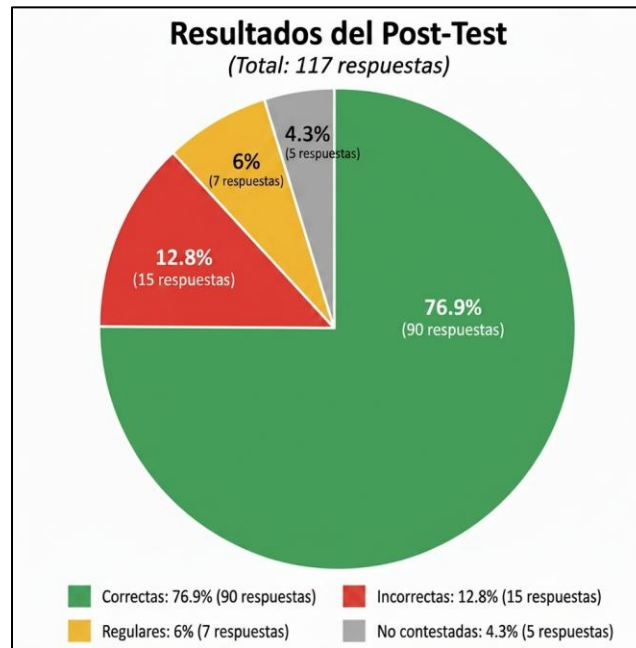
Los resultados del Post-Test muestran que, de las 117 respuestas, 90 fueron correctas (76,9 %), y 7 respuestas tuvieron un desempeño regular (6 %), 15 respuestas incorrectas (12,8 %). Estos datos demuestran que un alto nivel de desempeño de los estudiantes, ya que más de tres cuartas partes de las respuestas fueron correctas. En general, los resultados reflejan mayor seguridad en las respuestas y una disminución en las respuestas no contestadas, lo que indica que los objetivos propuestos en gran medida

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

fueron cumplidos y que los estudiantes lograron fortalecer la fracción como medidor operador y razón. Adicionalmente los errores son reducidos y se concentran en pocos estudiantes.

Figura 32.

Diagrama circular con los resultados del postest.



En cuanto los resultados por categoría, se destaca especialmente la fracción como operador se observa una mejora significativa respecto al Pre-Test. No obstante, persisten algunas dificultades en los conceptos de la fracción como medidor y razón.

Tabla 12.

Resultados del postest categorizado como fracción como medidor, operador y razón.

	Correcto	Regular	Incorrecto	No contestó
Medidor	27	1	9	2
Operador	35	1	2	1
Razón	28	5	4	2

Nota. Elaboración propia.

Se evidencia estudiantes con alto rendimiento, con entre 8 y 9 respuestas correctas como E2, E5,

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

E8, E15 Y E19. Estos estudiantes evidencian una comprensión sólida de la fracción como medidor, operador y razón. Un segundo grupo presenta un buen desempeño, con 7 respuestas correctas entre ellos E3, E4, E7, E9 y E13. Estos estudiantes evidencian un nivel sólido de comprensión, sin embargo, presentan errores puntuales que no afecta considerablemente su desempeño. Asimismo, se observa un desempeño medio, representado por el estudiante E1, que evidencia una distribución de respuestas correctas, incorrectas, regulares e incorrectas. Finalmente, se evidencia estudiantes con mayor dificultad, como E11 y E14: el primero presenta varias respuesta regulares y no contestadas, lo que refleja inseguridad al contestar y dudas conceptuales, mientras que, el segundo presenta el mayor número de errores.

Figura 33.

Respuesta de E7 en el problema 9 fracción como razón en el postest.

9. Si en una reunión de 60 personas, 48 son hombres, ¿qué parte del número de personas son estos 48 hombres. Explica tu respuesta

$\frac{60}{48}$ | $\begin{array}{r} 60 \\ -48 \\ \hline 12 \end{array}$ | De 60 personas 48 son hombres y 12 son mujeres.

En esta respuesta, el estudiante demuestra que comprende la situación planteada, ya que reconoce que 48 hombres de las 60 personas y que 12 son mujeres. Sin embargo, al momento de expresar la fracción como una razón, invierte el orden de las cantidades y escribe $60/48$ en lugar de $48/60$ que corresponde a la parte respecto al total. Esto evidencia una comprensión parcial de la fracción como razón lo cual coincide con lo planteado por Carlos Vasco, para quien el orden de las cantidades es fundamental para interpretar correctamente la razón. Por lo tanto, esta respuesta se repetiría en varios estudiantes, que muestran que, comprenden la relación entre las cantidades, pero aún no consolidan la estructura de la fracción como razón.

Figura 34.

Respuestas de E14 en los problemas de fracción como medidor en el postest.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

1. Con los dos tercios de \$1500 Pepe compró una caja de chocolates ¿cuál fue el precio de esta caja? Explica tu respuesta

1500 / 3 = 500
0 500
valio 500 porque la tercera parte de 1500 es 500 y = 500 + 500 + 500 = 1500

2. Los tres cuartos de una docena de naranjas ¿cuántas naranjas son? Explica tu respuesta

SON 4 PORQUE $3 \times 4 = 12$

3. La mitad de los tres cuartos de \$120 ¿cuántos pesos son? Explica tu respuesta

$\frac{120}{3} = 40$ serían 40

Las respuestas obtenidas por el estudiante E14 permiten identificar el nivel de comprensión que el estudiante ha alcanzado respecto a la fracción como medidor desde la perspectiva de Carlos Vasco (1998). En la pregunta 1, el estudiante responde que la caja valió \$500, justificando que “la tercera parte de 1500 es 500 y $500 + 500 + 500 = 1500$ ”. Esta respuesta se observa una dificultad conceptual, ya que el estudiante calcula correctamente el $\frac{1}{3}$ de 1500 pero no logra aplicar los dos tercios, que era la solicitada por el enunciado, lo que indica que reconoce la fracción como medida, pero aún presenta dificultades en operar fracciones no unitarias dentro del mismo sistema de referencia.

En la pregunta 2, el estudiante responde que los tres cuartos de una docena de naranjas “son 4”, justificando su respuesta con la operación “ $3 \times 4 = 12$ ”. Esta respuesta evidencia una dificultad en la identificación de la unidad de referencia ya que su procedimiento interpreta el denominador de la fracción como el resultado directo. Esta confusión indica que aún no se establece con claridad la relación entre la fracción y la cantidad que representa. Desde la perspectiva del Archipiélago de los fraccionarios, el estudiante no logra situarse en la isla del medidor.

En la pregunta 3, el estudiante sugiere una división 120 entre 3 y concluye que “serían 40” el resultado. Sin embargo, la pregunta solicitaba calcular la mitad de los tres cuartos de \$120. Esta respuesta del estudiante indica que aplica una única operación de división. Además, interpreta de manera incorrecta la fracción ya que en esta ocasión relaciona el numerador de la fracción como el resultado directo lo que indica que no logra identificar la unidad de referencia. Asimismo, omite el segundo proceso necesario,

que consiste en hallar la mitad del resultado obtenido.

5.4. Comparativo pretest y postest

En esta sección vamos analizar los resultados obtenidos en el Pre-Test y el Post-Test con el propósito de identificar avances en la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón. La comparación en los resultados de las pruebas permite evidenciar las dificultades iniciales de los estudiantes y los cambios logrados después del desarrollo de las actividades.

Los resultados del Pre-Test mostraron un desempeño medio bajo con 53 respuestas correctas (45,3%), 48 incorrectas (41%), 6 regulares (5,1%) y 10 no contestadas (8,5%), como se había mencionado anteriormente los datos muestran una comprensión parcial del concepto de fracción y dificultades en los distintos conceptos. Por otra parte, los resultados del Post-Test muestran una mejora significativa, con 90 respuestas correctas (76.9%), 15 incorrectas (12.8%), 7 regulares (6.0%) y 5 no contestadas (4.3%) lo que indica una mayor comprensión del concepto de fracción.

La comparación de los resultados de ambas pruebas evidencia que los estudiantes presentaron una mayor seguridad en responder al Post-Test, también un aumento de 37 repuestas correctas y una disminución considerable de las respuestas incorrectas que pasaron de 48 a 15. Estos resultados reflejan un avance general del grupo y sugieren que la intervención de las dos sesiones favorece la comprensión de los distintos conceptos de la fracción..

En el Pre-Test se observa una alta dispersión en los resultados, con un gran parte de estudiantes presentando dificultades significativas. No obstante, en el Post-Test se observa una disminución es la dispersión de los resultados, donde la mayoría de los estudiantes alcanza entre 7 y 9 respuestas correctas.

Sin embargo, algunos estudiantes persisten con un bajo desempeño en la comprensión; comparando los resultados con el Pre-Test, no lograron un avance significativo. Como se mencionó anteriormente los estudiantes E11 y E14 presentaron el desempeño más bajo. En la figura 34 se evidencia que el estudiante E14 presenta dificultades conceptuales que no se lograron superar con el desarrollo de las actividades del libro de GeoGebra.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

A partir de las respuestas obtenidas del Post-Test se evidencia una mejora significativa en la comprensión del concepto de fracción por parte de los estudiantes. Un grupo conformado por E2, E5, E8, E15 y E19 alcanzó un desempeño alto entre 8 y 9 respuestas correctas ya mencionado anteriormente, lo que refleja un dominio en la comprensión de la fracción como medidor, operador y razón. De igual manera, estudiantes como E3, E4, E7, E9 y E13 presentaron un buen desempeño con 7 respuestas correctas demostraron una comprensión sólida del concepto de fracción, sin embargo, con algunos errores menores.

Estos avances permiten inferir que las actividades propuestas en el libro de GeoGebra desempeñaron el objetivo deseado para mejorar la comprensión del concepto de fracción, al ofrecer una recurso dinámico e interactivo. La exploración visual y manipulación de los applets fue una herramienta que posibilitó que los estudiantes superaran las dificultades conceptuales identificadas, y además esta herramienta durante el desarrollo de las actividades captaron la atención de los estudiantes, generando motivación e interés a lo largo de las dos sesiones. Asimismo, las tareas propuestas en cada actividad cumplieron un rol importante en la estructuración del pensamiento matemático de los estudiantes, puesto que fue una guía clara y organizada que les permitió avanzar de manera progresiva en la comprensión del concepto de fracción.

No obstante, luego de esta experiencia también permitió evaluar y realizar un análisis crítico tanto de los applets como de las tareas propuestas, con el fin de identificar aspectos a mejorar. A partir de dicho análisis, será posible realizar los ajustes necesarios al libro de GeoGebra, de manera que las actividades logren potenciar la comprensión del concepto de fracción como medidor, operador y razón en los estudiantes y lograr un aprendizaje más significativo.

6. Ajustes a la secuencia del Aula Virtual de GeoGebra

En esta sección se presentan los diferentes ajustes propuestos para la secuencia del Aula Virtual de GeoGebra, los cuales surgen a partir del análisis de los resultados obtenidos durante la implementación, cabe resaltar que estos ajustes tienen como objetivo mejorar la comprensión de la fracción, para ello, se abordan aspectos relacionados tanto al funcionamiento de los applets como a la formulación de las tareas.

Dentro de los ajustes identificados para la secuencia del Aula virtual de GeoGebra, se destaca el caso del capítulo 2, del puente isla de medidores a operadores, más específicamente en la tarea 1.5 cuya pregunta: “¿Qué cambia cuando el numerador es menor al denominador? pudo no haber sido suficientemente clara para los estudiantes, lo que pudo influir en la interpretación de los estudiantes y por ello la diversidad de respuestas. Teniendo en cuenta que dicha tarea se desarrolla después de interactuar con el cuadrado que representa una acción que transforma el tamaño ya sea achicando o agrandando, una propuesta de la formulación de la pregunta sería la siguiente: “¿Qué sucede con el cuadrado cuando el numerador es menor que el denominador? ¿Por qué ocurre esto?”

En el capítulo 4, puente isla operador a razones, se presentó una situación con el applet en la cual algunos estudiantes lograron bloquear el applet. Por ello, como ajuste propuesto para este caso se plantea la incorporación de un botón de reinicio, de manera que, si se logra bloquear al applet, el botón pueda restablecer al estado inicial y que los estudiantes continúen interactuando con el applet sin recurrir a una solución externa. Adicionalmente, en este mismo capítulo se identificó que las tareas propuestas resultaron principalmente conceptuales, lo que pudo haber limitado el razonamiento esperado en los estudiantes. Por ello, como ajuste propuesto, se plantea reformular las tareas de manera que estén más relacionadas a la interacción con el applet promoviendo un razonamiento progresivo en torno a la isla de operador y razones; en consecuencia, se proponen las siguientes tareas:

Para la tarea 1.1

Forma la razón en el applet y escribe con tus palabras qué representa el numerador y qué representa el denominador en esta situación.

Para la tarea 1.2

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

En el applet, intercambia los valores entre el numerador y el denominador en una de las razones.

¿La proporción sigue siendo correcta? ¿Qué concluyes?.

Para la tarea 1.3

¿Cómo utilizaste la razón inicial del applet para encontrar el valor faltante? Describe paso a paso lo que realizaste.

Para la tarea 1.4

Halla el valor faltante en el applet, ahora cambia el numerador por el denominador en ambas razones y presiona chequear ¿El resultado cambia si organizas la razón de manera diferente?

Para la tarea 1.5

El vaso A tiene una cantidad fija de colorante y agua. Si el vaso B tiene el doble de agua que el vaso A, ¿qué cantidad de colorante debe tener el vaso B para mantener el mismo color?

Finalmente, se espera que la reformulación de estas tareas logre un mayor desempeño en los estudiantes, pero también que mejore la conexión entre las islas de operadores y razón. En este sentido, Vasco (1998) señala que “la tarea del profesor es la de irlos completando y conectando”, en referencia a los distintos sistemas conceptuales del Archipiélago de los fraccionarios. Por lo tanto, las tareas reformuladas buscan construir ese puente entre las islas de operador y razón.

7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo de investigación, cuyo objetivo principal fue evaluar la implementación de una secuencia de enseñanza diseñada en el Aula Virtual de GeoGebra para la comprensión de las fracciones como medidores, operadores y razones, es posible analizar y plantear una serie de reflexiones y conclusiones que surgen tanto del marco de referencial como del alcance de los objetivos propuestos.

A partir de los resultados obtenidos, se observó que los estudiantes al inicio presentaban dificultades importantes en la comprensión de las fracciones, específicamente la fracción como operador y medidor; dichas dificultades se evidencian en errores procedimentales, problemas para reconocer la unidad de referencia e inseguridad al responder a los problemas. En este punto inicial, se evidenció una gran dispersión en los resultados del Pretest, donde más del 50% de los estudiantes tuvieron respuestas regulares, incorrectas o no contestadas.

Después de la implementación de la propuesta basada en el Archipiélago de los fraccionarios se evidenció una mejora en el desempeño de los estudiantes que se reflejó en los datos obtenidos en el Postest, tal es el caso del aumento de las respuestas correctas, la disminución de las respuestas incorrectas y la seguridad en responder a los problemas ya que también se logró una disminución en la omisión. Estos avances permiten inferir que la secuencia contribuyó de manera significativa a que los estudiantes construyeran una comprensión más sólida del concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones como medidor, operador y razón.

La implementación permitió observar no solo los errores más frecuentes, sino también a los estudiantes que presentaban mayores dificultades, lo que permitió orientarlos a través de preguntas que fomentaran el razonamiento matemático en torno a la fracción como medidor, operador y razón. A partir de ello, fue posible identificar aspectos de mejora en las actividades que buscaban orientar mejor la enseñanza, dichos ajustes se ven reflejados en el capítulo 6 de este trabajo. En este sentido, la experiencia no solo contribuyó a la enseñanza de los estudiantes sino también nos permitió como futuros licenciados replantear estrategias pedagógicas con el objetivo de fortalecer la comprensión del concepto de fracción.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Sin embargo, es importante resaltar que durante la implementación también surgieron algunos retos, dentro de ellos tenemos los siguientes: No todos los estudiantes avanzaron al mismo ritmo y además, con una herramienta como un computador con acceso a internet representó un factor para que los estudiantes al terminar las actividades se distrajeran, por lo tanto, se realizaba un énfasis en que plasmarán en sus respuestas qué procedimiento o análisis realizaron para llegar a dicha respuesta para que así no navegaran en otras páginas o aplicaciones ajenas a lo trabajado en la sesión.

Un aspecto especialmente relevante es que la fracción como operador en el Pre-Test presentó la mayor dificultad, sin embargo, luego de la implementación de la secuencia, pasó a ser uno de los conceptos mejor comprendidos por los estudiantes. Esto sugiere que el applet y las tareas propuestas lograron que los estudiantes entendieran que la fracción no solo como un número, sino como una acción que transforma la cantidad. En cuanto a la fracción como medidor y como razón también se observan avances importantes, no obstante, aún persisten dificultades, principalmente en la identificación de la unidad de referencia y el orden correcto de las cantidades al expresar una razón, invirtiendo el numerador y el denominador, lo que indica que estos aprendizajes aún están en proceso de consolidación.

Por otro lado, la secuencia fue efectiva, ya que no solo mejoró los resultados, sino que también favoreció la comprensión de la fracción en sus diferentes interpretaciones. No obstante, aunque los resultados son positivos, se reconoce que el proceso no está completamente cerrado; por ello, es necesario seguir fortaleciendo estos aprendizajes mediante actividades que permitan profundizar en los conceptos. Finalmente, esperamos que el presente trabajo sirva como base para futuras investigaciones y que el Aula Virtual de GeoGebra desarrollada en este estudio, de acuerdo con su valor educativo, se constituya en una alternativa tecnológica y pedagógica para el proceso de enseñanza - aprendizaje de la fracción, tanto en su interpretación como medidor, operador y razón.

Referencias Bibliográficas

- Acevedo Rico, Y. (2012). Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.
- Aguilera Quevedo, M., & Rodríguez Castañeda, S. E. (2017). Uso de las regletas de cuisenaire para el aprendizaje de las fracciones. Universidad pedagógica nacional.
- Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015). The effects of GeoGebra on students' achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 208–214. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356>
- Arenas Peñaloza, M., & Rodríguez Vásquez, J. (2020). La enseñanza y comprensión de las fracciones: Retos y propuestas didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(2), 123-138. <https://doi.org/10.1234/rli2020.23.2.123>
- Bueno Guerrero, Y. (2010). El uso de las regletas de cuisenaire en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes representaciones de los fraccionarios. Universidad Industrial de Santander.
- Calderón Palacio, D. M. & Quiroz Puerta, K. C. (2018). Las fracciones y sus usos desde la teoría modos de pensamiento. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11407/4977>.
- Camargo, L. (2021). Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/17880>.
- Castro Cortes, A, Jaramillo Riascos, J y Obregón Valencia, I. (2019). Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado. Universidad del valle.
- Cifuentes, W. (2011). Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Medellín.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Designing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), pp. 9-13

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Confrey, Jere y Lachance, Andrea. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture driven research design. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (1988). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an icmi study. Dordrecht: Kluwer. *Geometry From a Cognitive Point of View*. In Mammana and Villani. (Eds).

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducido por Luis Puig, publicado en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: CINVESTAV.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. (6ª ed.). México: McGraw-Hill Education.

Hincapié Morales, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Universidad Nacional de Colombia.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

- Livari, J. y Venable, J. (2009, junio). Action Research and Design Science Research –seemingly similar but decisively dissimilar. Presentado en el 17th European Conference on Information Systems, Verona, Italia.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75 – 87. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824/353427>
- Murillo, M. (2013). Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones. En I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe. ICMI (pp 1-13). Santo Domingo: ICMI.
- Quiroz Restrepo, B. P., & Vanegas Garcés, J. C. (2009). Las fracciones como medidor, partidor y operador. Universidad de Antioquia.
- Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento. El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Barcelona: Editorial PAIDÓS.
- Ruiz Cruz, C. A. (2013). La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta didáctica para el Colegio Los Alpes IED [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.
- Sawyer, R.K. (2006). The New Science of Learning, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 1-18. Nueva York: Cambridge University Press
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds), *The Teaching of Linear Algebra In Question* (pp. 209- 246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Sierra Bravo, R. (2001). *Técnicas de investigación social: Teoría y ejercicios* (pp. 173-703). Madrid, España: Paraninfo.

AULA VIRTUAL DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA FRACCIÓN

Vasco, C.E. (1998). El Archipiélago Fraccionario. Notas de matemáticas. No. 31. (pp. 1-33). Santa Fe de Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.