

**ESTRATEGIAS PARA EL CONTROL DE UN REACTOR CSTR CON
COMPORTAMIENTO DINÁMICO CAÓTICO**

LAURA ISABEL VILLAMIZAR SARMIENTO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
POSTGRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA
BUCARAMANGA
2011**

**ESTRATEGIAS PARA EL CONTROL DE UN REACTOR CSTR CON
COMPORTAMIENTO DINÁMICO CAÓTICO**

LAURA ISABEL VILLAMIZAR SARMIENTO

Tesis de grado como requisito parcial para optar
al título de Maestría en Ingeniería Química

DIRECTOR: Ph.D., Msc. CARMELO FUENTES LOZANO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
POSTGRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA
BUCARAMANGA**

2011

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis más profundos agradecimientos al Doctor Carmelo Fuentes de la Escuela de Ingeniería Química de la UIS, por sus consejos, sugerencias y su apoyo constante durante el desarrollo de esta investigación; al Doctor V. Ravi Kumar del National Chemical Laboratory, Pune, India, por su asesoría acerca del método de control del caos; al Doctor Punit Parmananda de la Facultad de Ciencias de la UAEM, Mexico, por su asesoría, en cuanto a, el método de Pyragas; al Doctor Kenneth Showalter de la Universidad de West Virginia (USA), al Doctor Eugene Mihaliuk de la Universidad de West Virginia (USA) por sus comentarios, discusión, y, ayuda, en lo relacionado con el método de control del caos; al Doctor Juan Jose Bravo Suarez por ayudar a conseguir la bibliografía; a la Escuela de Ingeniería Química de la UIS; a la Universidad Industrial de Santander, a mis compañeros y amigos, pero, sobre todo a Dios y a mi familia por su paciencia y apoyo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	17
1. OBJETIVOS.....	23
1.1 OBJETIVO GENERAL.....	23
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
2. ESTADO DEL ARTE.....	25
3. MARCO TEÓRICO	34
4. ORIGINALIDAD DEL TRABAJO.....	50
5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	51
5.1 BALANCES DE MASA Y ENERGIA.....	51
5.2 VERIFICAR QUE EL SISTEMA ES CAÓTICO.....	55
5.3 CONTROL <i>FEEDBACK</i>	59
a) Dominio del tiempo	60
b) Análisis de estabilidad	67
c) Dominio de Laplace.....	68
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.....	79
Gráfica del lugar geométrico de las raíces.....	89
d) Análisis del problema: servo control y control regulador.....	94
5.4 CONTROL <i>FEEDFORWARD</i>	110
5.5 REDES NEURONALES ARTIFICIALES	136
5.6 METODO DE CONTROL DEL CAOS	158
5.6.1 PARTE 1. SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CONTROL DEL CAOS ..	158

5.6.2 PARTE 2. METODO DE CONTROL DEL CAOS: Algoritmo Proporcional <i>Feedback</i> Basado en el Mapa	160
5.7 COMPARACIÓN DE LAS DIFERENTES ESTRATEGIAS	178
6. CONCLUSIONES	180
BIBLIOGRAFÍA	184

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Estrategia de control <i>feedback</i>	34
Figura 2. Estrategia de control <i>feedforward</i>	37
Figura 3. Compensación dinámica	40
Figura 4. Diagrama del control <i>feedforward</i> generalizado	41
Figura 5. Dos maneras de utilizar control <i>feedforward</i> - <i>feedback</i>	43
Figura 6. Mapa de Poincaré derivado de una ecuación diferencial	48
Figura 7. Gráfica del atractor extraño para el sistema de dos reacciones en serie, exotérmica-endotérmica en un CSTR	56
Figura 8. Series de tiempo para el sistema de dos reacciones en serie, exotérmica-endotérmica en un CSTR	56
Figura 9. Exponentes de Lyapunov para el sistema de dos reacciones en serie exotérmica-endotérmica en un CSTR	57
Figura 10. Plano-fase del sistema de dos reacciones en serie exotérmica-endotérmica en un CSTR	58
Figura 11. Primer mapa retorno, $x_{3,n}$ vs. $x_{3,n+1}$	59
Figura 12. Control P para diferentes valores k_c	62

Figura 13. Control de la temperatura del reactor utilizando control P para diferentes valores k_c	64
Figura 14. Control PI para diferentes valores k_c y τ_I	65
Figura 15. Control de la temperatura del reactor utilizando control PI para diferentes valores de k_c y τ_I	67
Figura 16. Lazo <i>feedback</i> típico	73
Figura 17. Lazo <i>feedback</i> unitario simplificado	74
Figura 18. Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el control P	81
Figura 19. Gráficas del lugar geométrico de las raíces para diferentes valores de τ_I con control PI	92
Figura 20. Cambios en el <i>set-point</i> en el sistema con control P	95
Figura 21. Control P para diferentes valores de <i>set point</i> , $k_c = 5$	97
Figura 22. Control PI, $k_c=5$, $\tau_I= 1$, para diferentes valores de <i>set point</i>	98
Figura 23. Control PI, el <i>set point</i> varía a través del tiempo	99
Figura 24. Control P, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación de +0.1 para $t > 2$	101
Figura 25. Control P, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación de -0.1 para $t > 2$	101

Figura 26. Control P cuando la perturbación varía a través del tiempo y toma valores positivos	103
Figura 27. Control P cuando la perturbación varía a través del tiempo y toma cambios negativos	103
Figura 28. Control PI, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón de +0.1 en la perturbación para $t > 2$	105
Figura 29. Control PI, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón de -0.1 en la perturbación para $t > 2$	105
Figura 30. Control PI con cambios positivos en las perturbaciones	106
Figura 31. Control PI con cambios negativos en las perturbaciones	106
Figura 32. Control <i>feedforward</i> dinámico cuando se introduce un cambio escalón de +10% en d_1 para $t > 0$ con diferentes valores de u_t	117
Figura 33. Control <i>feedforward</i> dinámico cuando se introduce un cambio tipo escalón de +10% en la perturbación d_1 con $k_L = 5.5$	122
Figura 34. Control FF+FB (caso 1) de x_3 con u_t , con $x_{3set} = 4$ y un cambio tipo escalón de $d_1 = 0.1$ para $t \geq 5$	127
Figura 35. Control FF+FB (caso 1: agregando una constante) de x_3 con u_t , con $x_{3set} = 4$ y un cambio tipo escalón de +10% en d_1 para $t \geq 5$	128
Figura 36. Control FF+FB (caso 1: agregando una constante) de x_3 con u_t , con un cambio tipo escalón en el <i>setpoint</i>	128

Figura 37. Comparación del control FB y FF+FB (caso 1) cuando se introduce un cambio escalón en la perturbación d_1 de 0.1 para $t \geq 3$	130
Figura 38. Respuesta del control combinado <i>feedforward-feedback</i> de x_3 con u_t cuando se introducen cambios en el <i>set-point</i>	133
Figura 39. Control de x_3 con u_t al introducir un cambio tipo escalón de 0.1 en la perturbación d_1 para $t \geq 3$	134
Figura 40. Etapa de identificación del sistema	140
Figura 41. Esquema de control modelo predictivo usando redes neuronales	141
Figura 42. Bloque de la función-S que contiene el modelo matemático	142
Figura 43. Implementación en Simulink del control predictivo usando redes neuronales de un CSTR donde ocurren dos reacciones en serie, exotérmica-endotérmica	144
Figura 44. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento en la red neuronal	145
Figura 45. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento	146
Figura 46. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento en la red neuronal	147
Figura 47. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento	148

Figura 48. Simulación entre 0 y 60 s del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento	149
Figura 49. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 9 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento en la red neuronal	150
Figura 50. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 9 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento	151
Figura 51. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 9 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento en la red neuronal	152
Figura 52. Efecto de utilizar los pesos actuales en el control por modelo predictivo usando redes neuronales con 9 nodos capa oculta y 20000 datos de entrenamiento	153
Figura 53. Efecto de las perturbaciones en el control por modelo predictivo usando redes neuronales con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento	156
Figura 54. Efecto de las perturbaciones en el control por modelo predictivo con redes neuronales con 9 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento	156
Figura 55. Mapa retorno temporal t_n vs t_{n+1}	159
Figura 56. Mapa retorno de periodo-1, x_{3n} vs x_{3n+1} , y la bisectriz	165
Figura 57. Ampliación de la figura 56b	166

Figura 58. Región encerrada en el recuadro de la figura anterior	167
Figura 59. Linealización de la vecindad alrededor del punto fijo	167
Figura 60. Detalle de cómo se halla x_{3n}	168
Figura 61. Funcionamiento del control de la órbita de periodo-1	169
Figura 62. Mapa retorno de periodo-1 para diferentes valores del parámetro de control	172
Figura 63. Origen de la órbita de periodo-5 en el mapa retorno de periodo-1	173
Figura 64. Comportamiento cuasi periódico de la variable x_3	174
Figura 65. Comparación entre el ancho de la región de control y el desvío permitido en la perturbación	175

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Valores de offset para ciertos valores de ganancia encontrados en el control P	63
Tabla 2. Información para bosquejar la gráfica del lugar geométrico de las raíces con control P	80
Tabla 3. Información para bosquejar la gráfica del lugar geométrico de las raíces con control PI para diferentes valores de τ_I	91
Tabla 4. Valores de ganancia última encontrados con control P y PI, por el arreglo de Routh y por el método de sustitución directa	93
Tabla 5. Valores de offset encontrados con diferentes valores de <i>setpoint</i> para $k_c = 3$ y $k_c = 5$, con control P	96
Tabla 6. Error en estado estacionario para el control P con $k_c = 5$, control regulador cuando se introduce un cambio tipo escalón de $\pm 10\%$ para $t > 2$	102
Tabla 7. Valores de error en estado estacionario (<i>offset</i>) para diferentes estrategias de control, cuando se introduce un cambio escalón de $+10\%$ en la perturbación d_I	135

RESUMEN

TÍTULO

ESTRATEGIAS PARA EL CONTROL DE UN REACTOR CSTR CON COMPORTAMIENTO DINÁMICO CAÓTICO*

AUTOR

Laura Isabel Villamizar Sarmiento**

PALABRAS CLAVES

Control de procesos, CSTR, caos, control del caos, *feedback*, *feedforward*, redes neuronales.

DESCRIPCIÓN

El objeto del trabajo es comparar estrategias de control convencional, con un método de control del caos, sobre un sistema reaccionante químico que exhibe un comportamiento dinámico caótico. En concreto, se utilizó una estrategia de control *feedback*, una estrategia de control *feedforward*, un lazo combinado *feedforward-feedback*, una red neuronal artificial, y un método de control del caos sobre un sistema de dos reacciones consecutivas de primer orden, irreversibles, la primera exotérmica y la segunda endotérmica, que ocurre en un reactor CSTR que exhibe caos, por medio de, la ruta duplicación del periodo.

Primero que todo, se realizó el atractor extraño, las series de tiempo, mapa retorno, cálculo de los exponentes de Lyapunov.

De los métodos de control del caos, se utilizó el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa. En cuanto a, redes neuronales artificiales, se utilizó NLMPCC (*Nonlinear Model Predictive Controller*) usando redes neuronales, que viene implementado en el *Neural network toolbox* de Matlab. Respecto al control *feedback*, se hizo el análisis para el control P y el control PI. Se hizo el desarrollo en el dominio del tiempo, y en el dominio de Laplace, y, se utilizaron las pruebas de estabilidad de la teoría de control lineal, para encontrar los límites de estabilidad condicional.

Se encontró que, el sistema se puede controlar con la estrategia de control *feedback* y el lazo combinado *feedforward-feedback*. El algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, falla al controlar el sistema a la órbita periódica inestable de periodo-1, y, controla el sistema a la órbita de periodo-5. El control predictivo del modelo basado en redes neuronales, no es capaz de controlar el sistema en todo el rango de tiempo. Los mejores resultados se obtuvieron con el control *feedback*, de estos, el control P.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Físicoquímicas. Escuela de Ingeniería Química. Postgrado de Ingeniería Química.
Director: PhD, Msc., Carmelo Fuentes Lozano

SUMMARY

TITLE

CONTROL OF A CSTR REACTOR WITH CHAOTIC DYNAMIC BEHAVIOUR*

AUTHOR

Laura Isabel Villamizar Sarmiento**

KEYWORDS

Process control, CSTR, chaos, chaos control, feedback, feedforward, neural networks.

DESCRIPTION

The present work addresses the control of a chaotic system.

The object of this work is to compare conventional control methods with a method of control of chaos in a chemically reacting system that shows chaotic dynamic behavior. In particular, we used a feedback control strategy, a feedforward control strategy, a combined loop feedforward-feedback, an artificial neural network and a method of control of chaos about a system of two first order irreversible consecutive reactions, exothermic-endothemic occurring in a CSTR (Continuously Stirred Tank Reactor), that shows chaos by a period-doubling route.

First at all, we studied the portrait-phase, the time series, the return map and the calculation of the Lyapunov exponents.

In particular, about the method of control of chaos, we considered the map based proportional feedback algorithm. About artificial neural networks we used NLMPC (Nonlinear Model Predictive Controller) using neural networks that is implemented in the Neural Network Toolbox of Matlab.

About feedback control, we used the traditional P and PI control. Moreover, we did the analysis by the time domain and in the Laplace domain. Furthermore, we used the stability linear control proofs to find the limits of conditional stability.

We found that this system can be controlled by the feedback control and the combined loop feedforward-feedback controller. Also, the map-based algorithm fails to control the unstable periodic orbit of period-1 and controls the system to the orbit of period-5. By another hand, the NLMPC controller using neural networks can't control the system over all the range of the integration time. The best results were found with the traditional P control.

* Work Degree

** Faculty of Physicochemical Sciences. Chemical Engineering School. Chemical Engineering Postgraduate Course. Director: PhD, Msc., Carmelo Fuentes Lozano

INTRODUCCIÓN

En 1879 Henri Poincaré; matemático francés; al resolver el problema de los tres cuerpos, notó que un tercer cuerpo introducía inestabilidades y comportamiento complejo. Más adelante, en 1963 Edward Lorenz; meteorólogo estadounidense; al tratar de encontrar un modelo matemático que simulara la atmósfera terrestre, descubrió lo que se conoce como “*sensibilidad extrema a las condiciones iniciales*”; que denominó “*efecto mariposa*”. Asimismo, encontró el primer atractor extraño, que se conoce como el atractor de Lorenz. Luego, en el siglo XX los trabajos de las diferentes escuelas de Andronov, Littlewood, Cartwright, y Smale, sirvieron para establecer los fundamentos de la teoría del caos.

La teoría del caos es una subdisciplina matemática que estudia el comportamiento de los sistemas dinámicos con comportamiento complejo. Sin embargo, no hay una definición universalmente aceptada de caos, aunque, todos los científicos coinciden en afirmar que los sistemas caóticos presentan sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. No obstante, el término caos es muy general e involucra muchas connotaciones filosóficas diferentes. Así, se suele relacionar la palabra caos, con todos aquellos fenómenos incontrolables y aleatorios. Por eso, el término más preciso es “caos determinístico”, con el que designa el estudio de aquellos fenómenos que despliegan un comportamiento complejo, que se ve regido por reglas deterministas. Es decir, es determinístico, porque estos fenómenos están gobernados por reglas fijas: el presente es consecuencia de su estado anterior y causa de su estado futuro; y caos, porque, presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Igualmente, no hay una definición completamente establecida de atractor extraño. El atractor extraño es un ente estable que en su interior es inestable. En concreto,

es una estructura fractal, ya que, es autosimilar y tiene dimensión fractal no entera.

Referente a, la geometría fractal, ésta, apareció como una necesidad, dónde, la geometría euclidiana no era suficiente. En efecto, la geometría fractal describe formas geométricas complejas que sólo pueden reproducirse por los computadores. Aunque, lo primeros fractales datan desde 1903 con el “cantor set”, no fue sino hasta 1979 que Benoit Mandelbrot propuso el término fractal.

Podría decirse que un fractal: es autosimilar, tiene dimensión fractal no entera, y, es una estructura complicada. Los fractales se encuentran en la naturaleza, por ejemplo: el aparato circulatorio, los alvéolos pulmonares, las riberas de los ríos, los cristales de nieve, las montañas, las nubes, etc.

Del mismo modo, hay un gran número de sistemas caóticos en la naturaleza. Por ejemplo: el patrón de aves migratorias, la turbulencia en los fluidos, el clima, un péndulo doble, algunas reacciones químicas, etc.

Además, hay numerosas aplicaciones en las cuales se ha encontrado caos; esto es, en todas las ramas de la Ingeniería y la Física. En concreto, hay aplicaciones en geofísica, fisiología, neurofisiología, electrónica, sistemas de comunicación, mezclado, en física del plasma, ecología, meteorología, y muchas otras. Asimismo, en Ingeniería Química, se encuentra aplicaciones en mecánica de fluidos, turbulencia y mezclado, mecánica estadística, transporte, dinámica química, ingeniería de reacción, etc.

Paralelamente al estudio de la teoría del caos, surgió la necesidad por controlarlo. Es así como, en 1990 apareció por primera vez, en un artículo publicado por Ott, Grebogi y Yorke [57], un método para controlar el caos. Este método (método OGY) aplica una variación lo suficientemente pequeña a uno de los parámetros

del sistema, de modo que, estabiliza el sistema a una órbita periódica inestable de bajo periodo. Esto es, pues, transforma una trayectoria caótica en una periódica o viceversa.

Actualmente, hay varios métodos de control del caos, entre estos podemos mencionar: el método OGY, método *Ocassional Proportional Feedback*, método de Huebler, método de Pyragas, etc. [3,40,68,57,62]. Se han encontrado aplicaciones en láseres, tratamientos médicos de enfermedades como arritmia y epilepsia, sistemas de comunicación, sistemas mecánicos, circuitos, tecnologías químicas: mezclado de sólidos y mezclado de fluidos, etc.

Además, como es sabido, los procesos químicos son fuente de fuertes no linealidades, comportamiento aperiódico, incluso, caótico. Sin ir más lejos, el reactor químico es un ejemplo.

En la industria, los reactores de polimerización y los reactores bioquímicos se caracterizan, porque, son difíciles de controlar, e incluso, en ciertos casos, presentan un comportamiento caótico.

Entre las causas que conllevan a la presencia de este comportamiento, podemos mencionar: las fases de arranque y parada en el caso de los reactores batch, la dependencia de la temperatura en la constante de Arrhenius, las condiciones de operación extremas a las que someten los reactores por alcanzar un óptimo económico y de producción, etc. También, en muchos casos la influencia de un controlador PI o PID [60, 17].

De modo que, los ingenieros de procesos prefieren sobrediseñar, para compensar las incertidumbres del modelo y proveer unos márgenes de operación segura; con esto, se protegen de las zonas de operación compleja, pero, trae como consecuencia que aumentan los costos. De otra parte, se ha demostrado por

modelamiento y simulación, que, al operar los procesos químicos en las zonas de comportamiento caótico, es posible obtener conversiones más altas y por lo tanto, mayor eficiencia en el proceso [75].

De otro lado, en cuanto al control de procesos, es indudable que, las estrategias de control lineal gozan de una gran popularidad en el control de procesos químicos, dada, la sencillez que tiene aplicarlo, el rigor que poseen sus pruebas de estabilidad, y, los excelentes resultados que proporciona. Además, es una teoría bien fundamentada y con gran respaldo matemático. Es más, esta es la gran ventaja, respecto a, las otras teorías de control. Sin embargo, no provee resultados satisfactorios en sistemas medianamente no lineales [89, 69].

En concreto, el control P, produce cambios rápidos y bruscos en la respuesta del proceso [89]. El control PID parece ser inadecuado, ya que, sólo funciona para sistemas lineales y medianamente no lineales. En otro orden de cosas, las técnicas de control no lineal tienen leyes de control complejas y son difíciles de simular. Por otra parte, las redes neuronales artificiales no son capaces de controlar todo el rango de la región caótica [46]. En cuanto a, el método de control del caos, OGY, aunque, hay varias aplicaciones exitosas del método, es de lenta convergencia, debido a que, requiere de una acción de control muy pequeña [3].

Como es sabido, entender los esquemas de reacción más sencillos nos da fundamentos para entender los más complejos. Sin embargo, en el estudio de los sistemas dinámicos caóticos, se ha encontrado que nada se puede generalizar y que cada caso particular hay que estudiarlo por separado.

El esquema $A \rightarrow B$ es el que ha recibido mayor atención. Esto es, se ha estudiado su multiplicidad, su comportamiento dinámico [16, 35, 85], incluso, como aparece caos [60, 32, 63].

Luego, el esquema de reacción $A \rightarrow B \rightarrow C$ de primer orden, donde, ambas son exotérmicas, en un reactor CSTR, también, se ha estudiado su multiplicidad, ciclos límite [39], comportamiento dinámico, por medio de la teoría de la singularidad [5,6], y, se ha realizado su diagrama de bifurcación utilizando AUTO [21], igualmente, se ha encontrado caos y un atractor extraño [41].

Ahora bien, en el sistema de dos reacciones en serie $A \rightarrow B \rightarrow C$ de primer orden, en un reactor CSTR, donde, la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica, se encontró caos por medio de la ruta de duplicación del periodo [43]; además, se logró controlar utilizando el método: algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, que es, una variante del método OGY [7], igualmente, se logró controlar utilizando el control P y técnicas de control no lineal en una región del espacio-fase, donde, el sistema exhibe ciclos límite [89].

Bien pareciera por lo anterior que, para controlar este esquema de reacción, los investigadores han optado por uno de los dos caminos: utilizar estrategias de control convencional o estrategias de control del caos; pero, hasta el momento, no han comparado unas con otras en un mismo caso de estudio, ni, observado la conveniencia de utilizar una u otra. En resumidas cuentas, no se sabe con certeza, que estrategia de control sería más conveniente aplicar.

Por consiguiente, el objeto de este trabajo es, comparar estrategias de control convencional (control *feedback*, control *feedforward*); una red neuronal artificial y un método de control del caos, sobre un sistema reaccionante químico, que se sabe exhibe caos por medio de la ruta duplicación del periodo. En concreto, se trata de una reacción consecutiva $A \rightarrow B \rightarrow C$ exotérmica-endotérmica, irreversible, de primer orden, que se lleva a cabo en un reactor CSTR no isotérmico [43]. A fin de, explorar y entender los métodos de control del caos y sus beneficios, respecto a, las estrategias de control convencional. Por cierto, cabe señalar que, el trabajo es teórico.

De los métodos de control del caos, se utilizó el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa [62], dada la sencillez de la fórmula de control. En cuanto a, redes neuronales artificiales se utilizó NLMPCC (*Nonlinear Multistep Predictive Controller*) usando redes neuronales, que viene implementada en el *Neural Network Toolbox* de Matlab, y, que utiliza Simulink, dada la capacidad que tiene el método de manejar sistemas inestables en lazo abierto, y a su rápida convergencia [55, 67,54].

Referente al control *feedback* (control P y control PI) se hizo el desarrollo en el dominio en el tiempo, y en el dominio de Laplace, y, se aplicaron las pruebas de estabilidad de la teoría del control lineal para encontrar los límites de ganancia condicional. Es prudente advertir que, el hecho de utilizar un sistema de ecuaciones diferenciales linealizado, hace que los resultados sean sólo una aproximación válida en la región lineal alrededor del punto fijo. Respecto a, control *feedforward*, se utilizó el diseño de controlador *feedforward* en estado estacionario, *feedforward* dinámico, y, el lazo combinado *feedforward* en estado estacionario-*feedback*.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 5.3, se presenta la estrategia de control *feedback*; en el capítulo 5.4, el control *feedforward*; en el capítulo 5.5, redes neuronales artificiales; en el capítulo 5.6, el método de control del caos, y, finalmente, se presenta la comparación de las estrategias ensayadas.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Comparar diferentes estrategias de control convencionales con una estrategia de control del caos para el sistema de dos reacciones químicas en serie, de primer orden, irreversibles, $A \rightarrow B \rightarrow C$, en estado no estacionario llevada a cabo en un reactor CSTR dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica, que según Kahlert *et al.* [43] y Bandyopadhyay *et al.* [7] bajo ciertos valores de los parámetros, exhibe un comportamiento caótico.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ♥ Formular los balances de masa y energía de dos reacciones en serie de primer orden $A \rightarrow B \rightarrow C$ en estado no estacionario llevada a cabo en un reactor CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica.
- ♥ Ensayar una estrategia de control *feedback* sobre un esquema de dos reacciones en serie de primer orden $A \rightarrow B \rightarrow C$ en estado no estacionario, que ocurre en un reactor CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica.
- ♥ Verificar una estrategia de control *feedforward* sobre un sistema de dos reacciones en serie de primer orden $A \rightarrow B \rightarrow C$ en estado no estacionario, en un reactor CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica.

- ♥ Probar una estrategia de control de redes neuronales artificiales sobre dos reacciones consecutivas $A \rightarrow B \rightarrow C$ de primer orden, en un reactor CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda es endotérmica.

- ♥ Seleccionar la estrategia de control del caos a utilizar para este caso de estudio.

- ♥ Probar una estrategia de control del caos sobre un sistema de dos reacciones en serie de primer orden $A \rightarrow B \rightarrow C$ en estado no estacionario, llevada a cabo en un reactor CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda endotérmica.

- ♥ Comparar los resultados obtenidos de las estrategias ya mencionadas y determinar la conveniencia de aplicar una estrategia de control del caos a este caso de estudio.

2. ESTADO DEL ARTE

El punto de partida es tal vez el artículo de Uppal, Ray y Poore [85], dónde, muestra una galería de retratos-fase para el sistema de una reacción exotérmica de primer orden, irreversible $A \rightarrow B$ que ocurre en un CSTR. Más adelante, la escuela de Aris y Amundson realizó grandes aportes al estudio de la multiplicidad e inestabilidad de los sistemas químicos reaccionantes con comportamiento complejo [27, 39].

Posteriormente, apareció la serie de artículos de Balakotaiah y Luss, entre 1980 y 1986 [5,6], que dieron una visión diferente al estudiar el espacio paramétrico del esquema $A \rightarrow B \rightarrow C$, dónde ambas reacciones son exotérmicas, en un CSTR, por medio de, la teoría de la singularidad. La desventaja es que esta teoría es local.

Por otro lado, de la misma escuela de Amundson y Bilous; Jorgensen y Aris en 1983 [41], encontraron una cascada de duplicación del periodo que conduce a caos, y, un atractor extraño en el esquema de reacción $A \rightarrow B \rightarrow C$, dónde, ambas son exotérmicas de primer orden en un CSTR. Por cierto, es a quienes se les atribuye el primer ejemplo de un atractor extraño en Ingeniería Química [26].

Cabe señalar que, hay excelentes artículos tipo resumen sobre multiplicidad e inestabilidad en sistemas químicos reaccionantes [70], sobre caos y sus aplicaciones en ingeniería química [26], sobre el papel de los métodos de continuación en ingeniería química [77], y sobre el campo de aplicación de la teoría del caos en los procesos químicos [88].

Control del caos

Es importante diferenciar aquellos estudios que buscan controlar los reactores CSTR que exhiben un comportamiento caótico [7, 19, 89, 69], de aquellos que buscan estudiar la manera en que, los controladores pueden inducir el caos, en los reactores CSTR [60, 63]. Al respecto conviene decir que, éste último ha sido el tema más ampliamente estudiado, ya que, es indudable, que los controladores *feedback* pueden ocasionar inestabilidades y comportamiento caótico en los sistemas no lineales [17].

Respecto al, segundo punto la escuela de Pellegrini y Biardi, en los años 1990-1995 realizó diversos estudios sobre caos, comportamiento complejo y control de reactores químicos. En concreto, estudiaron, como los controladores P o PI inducen un comportamiento caótico en los reactores CSTR [60,61,32,58,33].

En concreto, Pellegrini y Biardi [60] estudiaron el mismo esquema de reacción que Uppal, Ray y Poore [85], es decir, una reacción exotérmica $A \rightarrow B$ irreversible, de primer orden, en un CSTR, a la que colocaron bajo la acción de un controlador PI para que exhiba caos. En efecto, encontraron caos por medio de la ruta de duplicación del periodo. Luego, Giona y Paladino [32] extendieron este estudio al caso en que el orden de reacción es n . Seguidamente, Paladino, Ratto y Costa [58] extendieron este estudio al caso en que el reactor es no ideal, es decir, no tiene mezcla perfecta, y lo compararon con el caso de mezcla perfecta. Luego, Pellegrini et al. [61] extendieron el estudio al caso en que está presente un reciclo. Pues bien, en todos los casos encontraron caos, sólo que, en el caso del reciclo los resultados no son de interés, porque, los valores son muy altos para ser reales. De otra parte, Giona, Patierno y Boy [33] combinaron el método OGY junto con el control PI para el control de un CSTR.

Por otro lado, Perez y Albertos [63] estudiaron el mismo esquema de reacción que Pellegrini y Biardi [60], pero, encontraron resultados diferentes. Aquí, el esquema de control consiste de dos controladores PI, y para encontrar el caos, utilizaron el teorema de Silkinov, que consiste en buscar la existencia de una órbita homoclínica. Pues bien, estudiaron la influencia de las variables de entrada, dónde, se observó que, mientras, unas están en estado estacionario, otras presentan comportamiento caótico.

Ahora bien, respecto al primer punto: Ott, Grebogi y Yorke [57], propusieron un método para controlar el caos, donde, se estabiliza el sistema a una órbita periódica inestable de bajo período, mediante, la perturbación de un parámetro accesible del sistema.

El método *Occasional proportional feedback*, es una modificación del método OGY, que fue, desarrollada simultáneamente por Hunt [40], y, por Peng, Petrov y Showalter [62]. A propósito, estos últimos lo denominaron algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa y la aplicación del método es continua, mientras que, Hunt lo utilizó en forma intermitente. Por cierto, Hunt lo aplicó en un circuito electrónico y Peng, Petrov y Showalter lo aplicaron en el contexto químico y biológico [62,64-65]. Aquí, el atractor extraño se describe por un mapa unidimensional. A causa de ello, la ley de control se reduce a un algoritmo geométrico. Por cierto, a diferencia, del método OGY que busca llegar al *manifold*¹ estable del punto fijo, éste método sólo trabaja con el mapa unidimensional.

¹ Un *manifold* n -dimensional es un conjunto que localmente se asemeja al espacio euclidiano R^n . Aquí, *asemeja* se refiere en el sentido topológico. Esto es, un pequeño trozo del *manifold* debe parecerse a un pequeño trozo de R^n . Ahora, los *manifold* estable e inestable emanan de los lados opuestos de un punto fijo u órbita periódica. Así, en un punto silla forman una "X" a través del punto fijo. Para un mapa lineal los *manifold* estable e inestable son líneas en la dirección de los eigenvectores. Para mapas no lineales estos pueden ser curvados y enredados. Por ejemplo: un punto silla, es inestable, porque, la mayoría de los valores iniciales cercanos a él se alejarían, a medida que itera el mapa, sin embargo, hay un conjunto de valores iniciales que convergen al punto silla, este es, el *manifold* estable [2].

Flynn y Wilson [29] propusieron una variante del método OGY mucho más simple de aplicar, y, muestra su aplicación en sistemas caóticos sencillos como el mapa logístico.

De otro lado, Koltsova, Cherenkov, Korchagin [47], utilizaron dos métodos para controlar el caos sobre una reacción de un proceso de cristalización de fosfito de plomo dibásico. A saber, el primero es el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa modificado, y, el segundo se conoce como método de destocastización² y no requiere *feedback*. En suma, con el primer método se obtuvieron los mejores resultados y un control más fino.

Del mismo modo, Lee y Chang [49], es un artículo tipo resumen, en lo que concierne a, la teoría del caos, fractales, dinámica no lineal y control del caos en Ingeniería Química. Además, presenta una aplicación, dónde, utilizó el método OGY, para controlar un CSTR dónde ocurren dos reacciones en paralelo, isotérmicas y autocatalíticas. En particular, éste método pudo controlar el sistema.

De otro lado, Pyragas [68] propuso otro método de control del caos, dónde, aplica una perturbación continua en el tiempo en la forma de *feedback* a un parámetro accesible del sistema. En este sentido, obtuvo buenos resultados, al controlar el sistema de Rössler, Lorenz y Duffing. Cabe señalar, que, los métodos de Pyragas no se ven afectados por el ruido.

Parmananda *et al.* [59,73] aplicó exitosamente el método de Pyragas a dos modelos de corrosión electroquímica: uno teórico y uno experimental; que pueden mostrar comportamiento periódico o caótico dependiendo de los valores de los

² Consiste en hallar una correlación entre el parámetro de bifurcación del sistema y el parámetro de bifurcación de la ecuación logística. Para esto, lleva las principales ecuaciones del modelo matemático a una forma de tipo logístico. Luego, el parámetro de bifurcación del sistema se perturba periódicamente mediante una función de forzamiento sinusoidal. No necesita aplicar *feedback*. En otras palabras, este método provee la estabilización del sistema, por medio de, una influencia externa sin la necesidad de un *feedback* [47].

parámetros. Pues bien, logró estabilizar tanto oscilaciones periódicas como caóticas a un estado estacionario inestable.

Por otra parte, Chen, Fu y Tsai [19] ensayaron dos métodos para controlar un sistema de dos reactores CSTR no isotérmicos, acoplados, que se sabe exhibe un comportamiento caótico. Efectivamente, utilizaron el método de Pyragas y un método de autoiteración³. En conclusión, se puede controlar este sistema con cualquiera de las dos estrategias.

Igualmente, Van de Bleek, Coppens, Schouten [86] aplicaron el método de Pyragas a un reactor multifase. En concreto, se realizó la simulación de la producción controlada e incontrolada de acrilonitrilo de propeno y amoníaco en un lecho fluidizado. Pues bien, se logró llevar el movimiento caótico de las burbujas a un comportamiento regular de período-4. De esta manera, se logró mejorar la producción de acrilonitrilo.

Kahlert, Rössler y Varma [43] estudiaron el esquema de dos reacciones en serie $A \rightarrow B \rightarrow C$ de primer orden que se lleva a cabo en un CSTR, dónde la primera reacción es exotérmica y la segunda es endotérmica. Cabe señalar, que este artículo es tal vez, el primero que busca caos en el sistema de dos reacciones en serie. De ahí, su importancia. En efecto, encontraron caos, por medio de la ruta duplicación del periodo.

Luego, Bandyopadhyay, Kumar y Kulkarni [7] aplicaron el método de control del caos: algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa para controlar el sistema de dos reacciones en serie $A \rightarrow B \rightarrow C$ de primer orden, que se llevan a cabo en un CSTR, dónde la primera es endotérmica y la segunda es exotérmica

³ El método de autoiteración requiere conocer el modelo matemático. En concreto, éste método toma la forma de un *feedback* no lineal, dónde, la ganancia puede tomar cualquier valor: positivo o negativo, y además, no está restringida. En resumen, en este esquema de control, el sistema caótico interactúa con sus propias señales, y cambia, las estabilidades de todos los puntos fijos del sistema caótico [19].

que exhibe caos. Pues bien, obtuvieron buenos resultados. En concreto, lograron controlar el sistema a la órbita de período-1 y de período-2.

Luego, Qammar *et al.* [69] ensayaron dos métodos para controlar un sistema de un reactor CSTR de polimerización en solución de acetato de vinilo que muestra un comportamiento caótico. Pues bien, por un lado utilizaron una estrategia de control lineal (control P), y por otro lado, una estrategia de control no lineal (NLMPC). En resumen, los mejores resultados, se obtuvieron, con el NLMPC, puesto que, tarda menos en alcanzar el estado estacionario, es más rápido y proporciona un mejor funcionamiento.

Por otro lado, Wei Wu [89] estudió el mismo esquema de reacción que Bandyopadhyay, Kumar y Kulkarni [7], dónde, explotó las potencialidades del control no lineal y además, utilizó una estrategia de control lineal. Ensayó cuatro estrategias diferentes: control P, linealización *feedback* entrada-salida, control *feedback* saturado más observador no lineal y una extensión de éste último diseño. En efecto, el control P, logró estabilizar el reactor, pero, los cambios en la respuesta son muy bruscos y rápidos, y los valores de la ganancia son muy altos para ser realizables en la práctica. Los mejores resultados los encontró con las técnicas de control no lineal.

En cuanto a, artículos tipo resumen, Andrievskii y Fradkov [3], presentaron uno, acerca de los problemas y métodos del control del caos; así, como aplicaciones científicas y técnicas en diferentes áreas del conocimiento. Por otro lado, Boccaletti *et al.* [11] describieron el método OGY y sus aplicaciones, también, expusieron el método Pyragas.

Asimismo, Ditto y Munakata [25] mostraron un breve estado del arte de los desarrollos y aplicaciones más importantes en la teoría del caos, incluso, describieron algunas aplicaciones.

Además, Ditto, Spano, Linder [24], describieron detalladamente el método OGY, sus modificaciones y aplicaciones. Como aplicaciones futuras del control del caos sugirieron estudiar los sistemas de alta dimensión y el control de los sistemas espacio-temporales; crear circuitos más flexibles que exploren el caos y su control; el control de reacciones químicas.

Control no lineal

Hay muchas investigaciones en las que se busca controlar los reactores CSTR no isotérmicos utilizando los métodos de control no lineal; por cierto, el más utilizado es el método de linealización *feedback*. Asimismo, en algunos estudios tienen en cuenta las restricciones del controlador [89].

Bequette [8], presenta un artículo resumen, sobre los métodos de control no lineal aplicados a los procesos químicos. A propósito, resalta que, los métodos más utilizados son los métodos de geometría diferencial.

Redes neuronales

Bhat y Mc Avoy [9] presentaron la definición de redes neuronales artificiales con entrenamiento *Backpropagation*. Además, mostraron una aplicación, dónde, el objeto era controlar el pH de un reactor CSTR, que es estable en lazo abierto. En concreto, compararon el modelamiento dinámico con redes neuronales, el modelamiento ARMA y el modelamiento por Convolución. En definitiva, éste último fue el que proporcionó los mejores resultados.

Después, Psychogios y Ungar [67] compararon diferentes estrategias de control basadas en el modelo junto con redes neuronales en un sistema estable en lazo abierto. Esto es, estudiaron IMC (*Internal Model Control*) y MPC (*Multistep Predictive Control*) sobre un reactor CSTR en el que ocurre una reacción $A \rightarrow R$

exotérmica y de primer orden. Por cierto, IMC no maneja sistemas inestables en lazo abierto. También, ensayaron el control indirecto, donde, la red que representa el modelo se invierte en línea. Asimismo, hicieron una prueba utilizando un modelo ARMAX (teoría de identificación de sistemas), que es útil, en casos donde no se conoce el modelo matemático. Referente a, MPC tiene la ventaja que maneja procesos inestables y puede controlar problemas que operan en regímenes complejos. La desventaja es que es de lenta convergencia. Al comparar los tiempos de cómputo de MPC, IMC y control inverso, encontraron que están en el orden de 30:3:1 respectivamente.

Luego, Zupan, Gasteiger [91] estudiaron el mismo ejemplo que Psychogios y Ungar [67] con IMC, con la diferencia que utilizaron para el aprendizaje de la red, el algoritmo de contrapropagación de errores. Igualmente, encontraron buenos resultados.

También, De Souza Jr., Pinto y Lima [20] utilizaron el control de modelo predictivo junto con redes neuronales para controlar un reactor de polimerización que muestra un comportamiento dinámico caótico. Aquí, para la identificación del proceso utilizaron un modelo CARMA (modelo ARMA corregido) en lugar del modelo matemático.

Seguidamente, Araromi, Afolabi, Aloko [4] utilizaron la técnica de *Model Reference Control* junto con redes neuronales para controlar un reactor CSTR en el cual ocurre una reacción exotérmica, $A \leftrightarrow B$ irreversible. Aunque, supone que es reversible para simplificar. Aquí, presentaron una aplicación del *Neural Network toolbox* de Matlab. Compararon los resultados con el control PID.

Más adelante, Kiss y Gáspár [46] propusieron una estrategia de control que combina un método de control del caos con redes neuronales. En concreto, utilizaron el método del algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa. Aquí,

el patrón de entrada a la red, se encontró resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales para diferentes valores de la variable manipulada y registrando los valores del mapa retorno, que se guardan siempre y cuando, se hallen en la vecindad del punto fijo. La salida de la red es el control a aplicar en la siguiente iteración. Pues bien, lo aplicaron en tres ejemplos: dos computacionales y uno experimental. Obtuvieron buenos resultados en los ejemplos teóricos, no obstante, en el ejemplo experimental, la red no pudo controlar el caos en toda la región de comportamiento caótico.

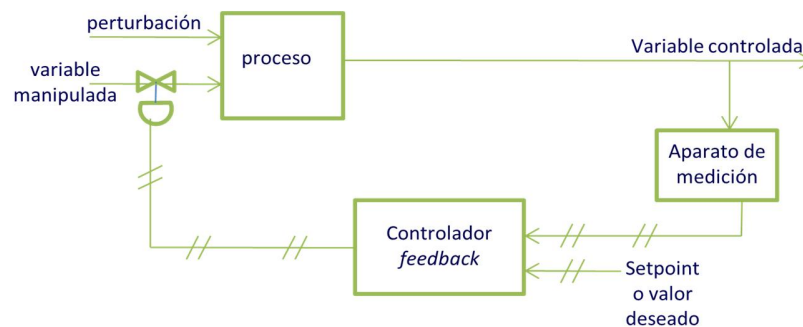
De otra parte, Vega, Lima y Pinto [87] estudiaron el control de un reactor tubular con reciclo, dónde, ocurre una reacción de polimerización en solución. Utilizaron una estrategia de control basada en el modelo junto con redes neuronales. En concreto, utilizaron el control predictivo no lineal. Respecto a, la validación utilizaron los diagramas de bifurcación. La mejor configuración se encontró con la estructura 2-2-1 para el caso SISO.

3. MARCO TEÓRICO

Control *Feedback*

La manera tradicional de controlar un proceso es medir la variable que va a ser controlada, comparar su valor con el valor deseado (*set point*), y alimentar la diferencia (el error) a un controlador *feedback* que cambiará una variable manipulada para conducir la variable medida (controlada) de vuelta a su valor deseado (ver Figura 1). La información es retroalimentada ("*feedback*") desde la variable de salida a una variable de entrada manipulada [50].

Figura 1. Estrategia de control *feedback*



Fuente: Luyben W., *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, First Edition, 1973, pag.10*

Existen tres modos de control:

- 1) Acción Proporcional:** Un controlador *feedback* proporcional cambia la señal de salida en proporción directa a la señal del error.

$$m_{(t)} = \bar{m} + K_c(c^{set} - c) \quad (1)$$

Dónde:

$m_{(t)}$ = presión de salida del controlador que va a la válvula de control, (*psig*)

\bar{m} = valor de sesgo del controlador o su presión de salida cuando el error es cero, (*psig*)

K_c = ganancia del controlador, (*psi/psi*)

c = señal de proceso del transmisor, (*psig*)

c^{set} =señal del *set-point*, (*psig*)

- 2) Acción Integral:** Mientras que la acción proporcional mueve la válvula de control en proporción directa a la magnitud del error, la acción integral mueve la válvula de control basada en la integral de tiempo del error.

$$m_{(t)} = \bar{m} + \frac{1}{\tau_I} \int e_{(t)} dt \quad (2)$$

Dónde τ_I es la constante de tiempo integral (minutos)

El objeto de, la acción integral es conducir el proceso de vuelta a su *set point*, cuando éste ha sido perturbado. Sin embargo, la acción integral, por lo general, es dinámicamente indeseable, ya que, tiende a hacer el lazo de control más oscilatorio y llevarlo hacia la inestabilidad. Pero, usualmente se requiere, para eliminar el error en estado estacionario.

- 3) Acción ideal derivativa:** También, se conoce como acción de razón de cambio o preacción. Esta, busca la derivada con respecto al tiempo del error.

$$m_{(t)} = \bar{m} + \tau_D \frac{de}{dt} \quad (3)$$

Dónde τ_D es el tiempo derivativo, (minutos).

En teoría, la acción derivativa debe mejorar la respuesta dinámica, y en efecto, esto es, lo que hace en muchos lazos. Sin embargo, en otros, los problemas de ruido hacen el uso de la acción derivativa indeseable.

Existen tres controladores comerciales básicos que utilizan estas tres acciones individualmente o combinadas:

1. **Proporcional (P):** con sólo acción proporcional
2. **Proporcional-integral (PI):** con acción proporcional más integral

$$m = \bar{m} + K_c \left(e + \frac{1}{\tau_1} \int edt \right) \quad (4)$$

La función de transferencia de un controlador PI es:

$$B_{(s)} = \left(\frac{M}{E} \right)_{(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{s} \right) = K_c \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_1 s} \quad (5)$$

3. **Proporcional-integral-derivativo (PID):** Incluye las tres acciones o “modos”. Por lo tanto, el controlador PID ideal es:

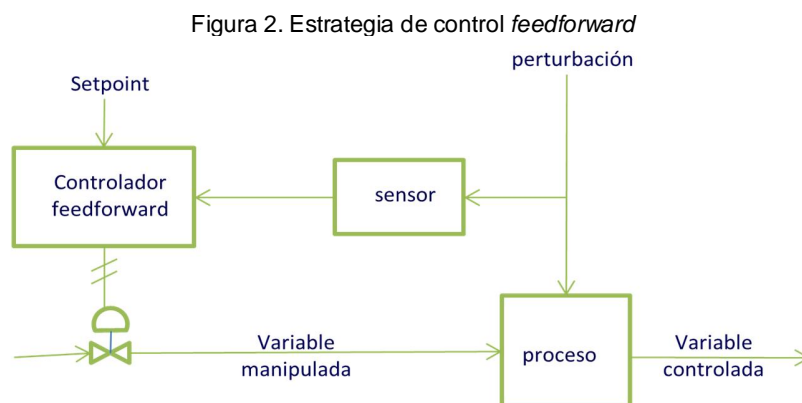
$$m = \bar{m} + K_c \left(e + \frac{1}{\tau_1} \int edt + \tau_D \frac{de}{dt} \right) \quad (6)$$

Sin embargo, conviene advertir que, es físicamente irrealizable. Así que, los controladores comerciales PID actuales tienen funciones de transferencia que son el producto de un controlador PI y un elemento adelanto-atraso[50].

$$B_{(s)} = K_c \left(\frac{\tau_1 s + 1}{\tau_1 s} \right) \left(\frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right) \quad (7)$$

Control *Feedforward*

La idea del control *feedforward* es detectar las perturbaciones a medida que estas entran al proceso y hacer ajustes en la variable manipulada, de modo que, la variable de salida permanezca constante. Es decir, no se espera hasta que la perturbación entre al proceso y altere todo para tomar una acción. Entonces, si es posible detectar las perturbaciones, a medida que, estas entran al proceso, tiene sentido tomar acción inmediata para compensar su efecto en el proceso. En la Figura 2 se observa el lazo de control *feedforward*. Se asume que un sensor está asociado a la perturbación [50,53].



Fuente: Murrill P., *Fundamentals of Process Control Theory, Second Edition, 1991, pag.158*

Asimismo, al igual que, en el control *feedback*, es necesario proveer un *set-point* o valor deseado de la variable controlada.

Sin embargo, el control *feedforward* adolece de algunas desventajas: asume que las perturbaciones se conocen y se pueden medir, y, también, que no hay perturbaciones significativas no medidas. En otras palabras:

1. Las perturbaciones deben ser detectadas; si no se pueden medir, no es conveniente utilizar el control *feedforward*.
2. Se debe conocer como la perturbación y la variable manipulada afectan el proceso. En efecto, deben conocerse las funciones de transferencia $G_L(s)$ y $G_M(s)$ al menos aproximadamente [50].

Además, el control *feedforward* se basa en el modelo matemático del proceso y su buen desempeño depende de que, tan bien, éste represente la dinámica del proceso. Igualmente, cuando se cometen errores en el modelamiento no hay acción correctiva.

A diferencia del control *feedback*, en el control *feedforward* cada controlador es específico para cada caso particular, asimismo, su hardware será diferente de caso a caso.

De igual modo, es raro cuando se implementa el control *feedforward* sólo. Lo usual es implementar el sistema combinado *feedforward-feedback*. De manera que, el controlador *feedforward* compensa los efectos producidos por las perturbaciones grandes y frecuentes, y el controlador *feedback* tiene en cuenta cualquier error que viene del proceso, debido a, la presencia de cualquier otra perturbación no medida, o, imprecisiones en el cálculo del controlador *feedforward*.

Como lo afirma Smith y Corripio [81] "...El controlador *feedforward* siempre que sea posible debe implementarse con compensación *feedback*..."

Sin embargo, la adición del controlador *feedforward* debe justificarse, ya que, su diseño, implementación y operación requiere de una cantidad significativa de ingeniería, instrumentación extra, entendimiento profundo del proceso y entrenamiento del personal. En otras palabras, el control *feedforward* es más costoso que el control *feedback*. Además, el control *feedforward* no es la solución

a todos los problemas de control, sólo es una buena estrategia para mejorar el control *feedback* en algunos casos [81].

Asimismo, es posible tener en cuenta varias perturbaciones, entonces, para cada perturbación se diseña un controlador *feedforward* diferente. Aunque, teóricamente se puede diseñar un controlador *feedforward* que tenga en cuenta todas las perturbaciones.

Cabe señalar que, la adición del controlador *feedforward* no tiene efecto en la estabilidad del sistema en lazo cerrado para sistemas lineales [50].

Diseño del controlador *feedforward*

Hay dos maneras de diseñar un controlador *feedforward*. Una es el diseño del controlador *feedforward* en estado estacionario y la otra es el diseño del controlador *feedforward* dinámico. Se prefiere siempre la primera opción, o, al menos empezar por ésta. Dado que, es más sencillo y además, se basa en el modelo matemático exacto del proceso. Ahora bien, si no funciona o no da buenos resultados, se procede al diseño del controlador *feedforward* dinámico.

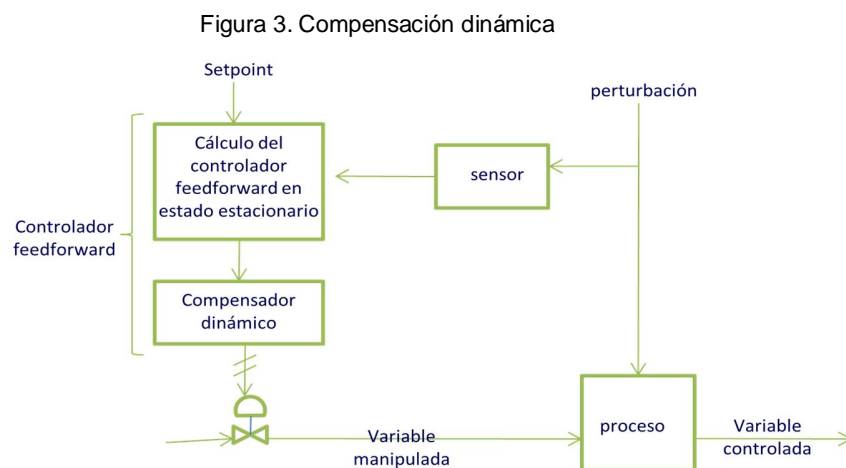
Diseño del controlador *feedforward* en estado estacionario:

La mejor manera para diseñar un controlador *feedforward* es utilizar los balances de masa y energía, es decir, el modelo matemático del proceso. De aquí, se utiliza la ecuación que involucre la variable a controlar (por ejemplo, si se trata de un lazo de temperatura, se elige el balance de energía). Se resuelve en estado estacionario. Luego, la variable a controlar toma el valor del *set point* y se despeja la variable manipulada. A éste tipo de controlador se le conoce como controlador *feedforward* no lineal.

Diseño del controlador *feedforward* dinámico:

Ahora bien, si se desea incrementar la precisión del controlador *feedforward*, se puede incluir los efectos de la dinámica del proceso. Esto se puede hacer mediante dos estrategias generales:

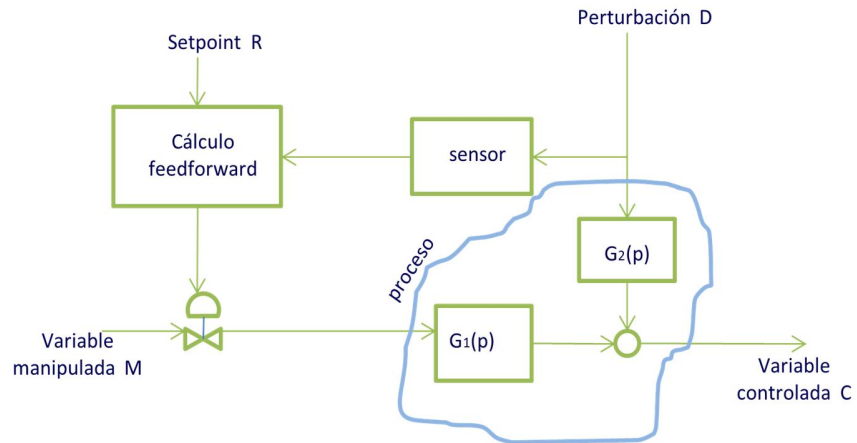
1. Empujar la señal de salida del compensador *feedforward* en estado estacionario a través de un compensador dinámico (Figura 3). Aquí, se puede utilizar una aproximación adelanto-atraso, que da muy buenos resultados en la mayoría de los casos.



Fuente: Murrill P., *Fundamentals of Process Control Theory, Second Edition, 1991, pag.160*

2. Utilizar las funciones de transferencia de la variable de perturbación y la variable manipulada (Figura 4). Es decir, se parte del sistema de ecuaciones diferenciales en estado no estacionario, el cual, se linealiza, se lleva a términos de variables de desviación y se calcula la transformada de Laplace, luego, se hallan las funciones de transferencia.

Figura 4. Diagrama de bloques del control *feedforward* generalizado



Aquí, $G_2(p)$ es la función de transferencia de la variable de perturbación, y, $G_1(p)$ es la función de transferencia de la variable manipulada. Fuente: Murrill P., *Fundamentals of Process Control Theory, Second Edition*, 1991, pag.160

Ahora, si se considera que la variable controlada se puede expresar en términos de dos variables de entrada que trabajan sobre el proceso, por ejemplo: la perturbación, D y la variable manipulada, M :

$$C = G_1(p)M + G_2(p)D \quad (8)$$

Resolviendo para la variable manipulada y sustituyendo la variable controlada, C , por la referencia o valor deseado, R :

$$(9)$$

Esta es la ecuación general de diseño del control *feedforward*. Aquí, D es medido, y, el *setpoint*, R , debe proporcionarse [53].

Ahora bien, si se obtienen funciones de transferencia que son irrealizables en la práctica, o, sencillamente no se conocen, se puede utilizar una aproximación de un elemento adelanto-atraso, o, un atraso de segundo orden [52]. También, se puede utilizar una aproximación de un elemento adelanto-atraso con tiempo muerto. Cabe señalar que, los parámetros del elemento adelanto-atraso, o, del atraso de segundo orden, se ajustan por prueba y error. Al respecto conviene decir que, Shinskey [80] y Smith y Corripio [81] presentan una amplia discusión de cómo sintonizar estos parámetros.

Por cierto, existe otra manera de diseñar un controlador *feedforward*, que es útil, cuando es difícil diseñarlo a partir del modelo matemático. Consiste en utilizar simuladores de procesos que utilizan diagramas de flujo en estado estacionario, junto, con técnicas de análisis de regresión. Aquí, se hacen simulaciones para diferentes condiciones (variable de perturbación y *set-point*) y se obtienen los valores de la variable manipulada para mantener el sistema en su valor deseado. Luego, se alimentan estos datos a un programa de regresión múltiple y se obtiene una ecuación que relaciona las variables manipuladas a las perturbaciones y el *set-point* [81].

Control *feedforward-feedback* combinado

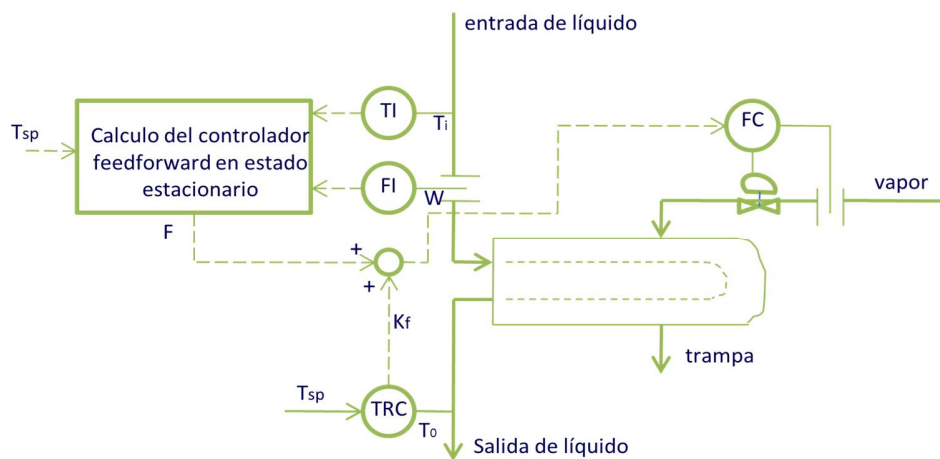
Paul Murrill [53] presenta dos formas de implementar el sistema *feedforward-feedback* combinado para un intercambiador de calor (Figura 5). En este ejemplo un líquido fluye a través de intercambiador de calor y se calienta con vapor. La variable controlada es la temperatura del líquido de salida (T_o), la variable manipulada es el flujo de vapor (F). Las perturbaciones son la temperatura del líquido de entrada (T_i) y el flujo de líquido (W).

En la Figura 5a un controlador *feedback* se utiliza para amortiguar la salida del controlador *feedforward*. Esto es, la señal de salida del controlador *feedback* se

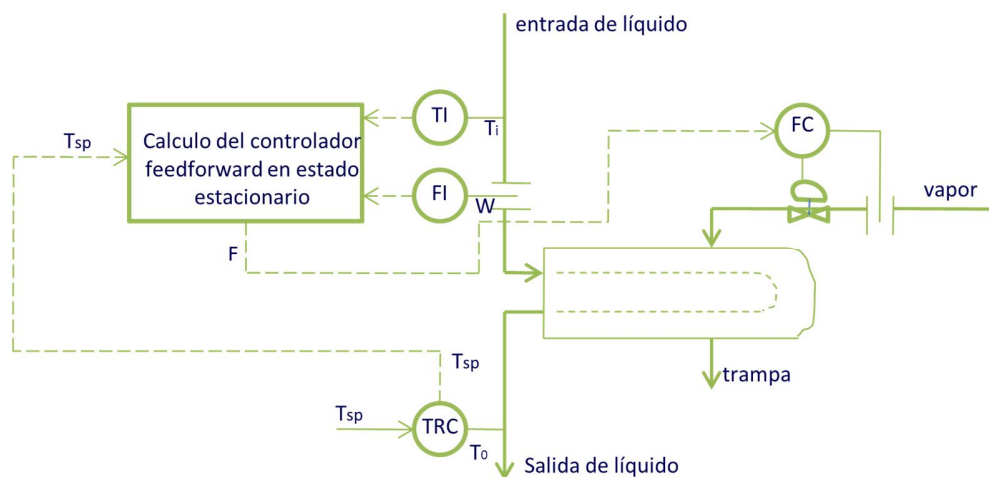
toma como una constante o *fudge factor* (k_f) que se agrega al controlador *feedforward*. En la Figura 5a, el controlador *feedback* manipulará el valor de k_f necesario para mantener la variable controlada en su *set-point* ($T_o = T_{sp}$).

La otra manera es utilizar la señal de salida del controlador *feedback* como *set-point* para el controlador *feedforward* (Figura 5b).

Figura 5. Dos maneras de utilizar el control *feedback* con el control *feedforward* para un intercambiador de calor. (a) agregando una constante, (b) ajustando el *setpoint*



(a) Agregando una constante



(b) Ajustando el *setpoint*

Fuente: Murrill P., *Fundamentals of Process Control Theory, Second Edition, 1991, pag. 162*

Redes Neuronales artificiales

Una red neuronal artificial es simplemente un programa computacional que transforma una variable- m de entrada en una variable- n de salida. Las unidades de la red se llaman neuronas, que son conectadas, por ejemplo: a una red *feedforward* en la cual la información es procesada a través de varias capas, tales como, la capa de entrada, las capas ocultas y la capa de salida. Una neurona, recoge información de todas las unidades de la capa superior y transforma esta red de entrada en una salida. La entrada total net_j a una unidad j es la suma de los pesos de la salida de todas las neuronas ($i = 1, 2, \dots, n$) conectadas a esta.

$$net_j = \theta_j + \sum_i w_{ji} y_i$$

Dónde, y_i , es la salida de la unidad i -ésima, w_{ji} es un peso que caracteriza la “fuerza” de conexión entre las unidades j e i ; y θ_j es un valor umbral. La entrada total net_j es transformada en una salida y_j por una función de transferencia:

$$y_j = \{1 + \exp(-net_j)\}^{-1}$$

La red es entrenada corrigiendo iterativamente los pesos w_{ji} de tal forma que, producen los valores de salida previamente especificados (los conjuntos objetivo), para tantos conjuntos de entrada como sea posible. El error de una red para un conjunto de entrenamiento dado, se calcula de la siguiente forma:

$$E = \frac{1}{2} \sum_j (y_j^{salida} - t_j)^2$$

Dónde, y_j^{salida} y t_j son respectivamente los valores de salida actual y deseado (objetivo) de neuronas en la capa de salida. Durante, la sesión de entrenamiento los pesos se actualizan de acuerdo a una “regla de aprendizaje” [46].

Método de Control del Caos

Uno de los métodos de control del caos más comúnmente utilizados es el método OGY [57]. Se basa en tomar ventaja del hecho que se puede predecir la evolución del comportamiento dinámico de un sistema caótico en la vecindad de un ciclo límite inestable, aunque, el comportamiento es impredecible a largo plazo.

Es decir, *desvía el punto inestable a propósito*, de modo que, el sistema caiga sobre el *manifold* estable del punto inestable original, en el siguiente retorno a la sección. Por cierto, éste método utiliza un algoritmo de *targeting*⁴ del *manifold* estable, que hace que, cualquier punto, no importa en qué lugar del atractor se encuentre, *se dirija rápidamente al estado estacionario inestable* de interés. Con este algoritmo, se reduce drásticamente el tiempo de transición para que la órbita pase cerca de la órbita seleccionada, sin embargo, éste algoritmo hace mucho más complejo el programa, especialmente si estamos tratando con un sistema de ecuaciones que es, complicado, difícil de integrar o que pueda presentar limitaciones numéricas.

De modo que, para estos casos se desarrolló una variante de éste método, que es, el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, que, *en lugar del algoritmo de targeting implementa un algoritmo geométrico que simplifica el método*. De manera que, en lugar de conducir el punto hacia el punto inestable, permite la evolución natural del sistema caótico [62, 40].

⁴ Los algoritmos de *targeting* son métodos que reducen el tiempo de espera por órdenes de magnitud en que la trayectoria pase cerca del punto fijo deseado. Es útil en aquellos casos, dónde, el vecindario del punto atractor (objetivo) es visitado con poca frecuencia. De modo que, resultan tiempos de espera muy largos para aplicar el control.

Ahora, esto tiene sus ventajas y desventajas. En comparación con el método OGY es más demorado en alcanzar el control, porque, tiene que esperar a que la trayectoria pase cerca del punto inestable. Esto es, la diferencia en el tiempo de transición entre uno y otro método, es tal que, mientras el algoritmo basado en el mapa necesita de aproximadamente 500 iteraciones para que la órbita caótica pase cerca del punto fijo de interés, con el algoritmo de *targeting*, éste tiempo se reduce a aproximadamente 20 iteraciones.

La ventaja de estos métodos es que no necesitan conocer el modelo matemático para implementarlos. Con que se conozca el comportamiento de una sola variable y con ayuda del método de reconstrucción de Takens se puede implementar. En otras palabras, es útil en sistemas experimentales dónde sólo se puede monitorear una variable.

El método algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, consiste en controlar una órbita periódica inestable dentro del atractor caótico, por medio de, una pequeña perturbación. Para esto, hace uso de los mapas de Poincaré, que son una representación discreta del atractor caótico que es continuo. Es una representación discreta $(m-1)$ -dimensional de un sistema continuo m -dimensional. Al reducir la dimensión, algo de la información se pierde. Sin embargo, son una herramienta muy útil para estudiar los sistemas dinámicos [26, 2].

Pues bien, como el método se basa en los mapas de Poincaré, es muy importante la exactitud con la cual se extraiga esta información. Cualquier error en su cálculo traerá consecuencias.

Es prudente advertir que, éste método al igual que los otros métodos de control del caos es aplicable sólo a sistemas de baja dimensión. Es decir, sistemas caóticos de alta dimensión, como el clima o la turbulencia atmosférica (que tienen número de Reynolds altos) no se pueden estudiar por medio de estas técnicas.

También, se requiere que el atractor extraño se pueda describir por un mapa unimodal unidimensional (1-D), porque estos mapas se pueden linealizar cerca del punto inestable o de cualquier punto inestable si hay varios.

Por otro lado, Pyragas propuso dos métodos para controlar los sistemas dinámicos caóticos aplicando una perturbación continua en la forma de *feedback*. Aquí, se controla el sistema en la órbita periódica inestable elegida, dentro del atractor caótico. El primero consiste en diseñar un oscilador externo que genere una señal proporcional a $y_i(t)$. Entonces, la diferencia entre la señal $y_i(t)$ y la señal de salida se utiliza como señal de control. En este sentido, la perturbación a aplicar está dada por:

$$F(t) = k[y_i(t) - y(t)] = kD(t) \quad (10)$$

Dónde k es parámetro ajustable.

Ahora, el segundo método no requiere de un oscilador externo. En su lugar utiliza la señal de salida retrasada en el tiempo. Se conoce como método de control *feedback* atrasado y está dado por:

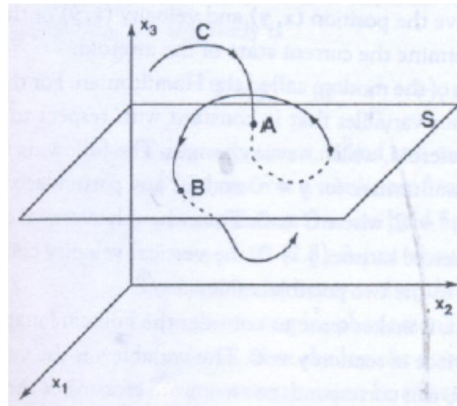
$$F(t) = k[y(t - \tau) - y(t)] = kD(t) \quad (11)$$

Aquí, τ es el período de la órbita periódica inestable a la cual se desea estabilizar el sistema, y , k es un peso del *feedback* [68]. Aplicaciones en el sistema de Lorenz, Rossler [68], en un sistema electroquímico [59] y en un sistema de dos reactores CSTR no isotérmicos acoplados [19].

Mapa de Poincaré

Henri Poincaré desarrolló una importante herramienta cualitativa útil para observar las trayectorias continuas que resultan al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. En efecto, en lugar de estudiar la trayectoria entera, encontró que mucha información importante se codifica en los puntos en los cuales la trayectoria pasa a través de un plano bidimensional.

Figura 6. Mapa de Poincaré derivado de una ecuación diferencial



El mapa G está definido para codificar las perforaciones descendentes del plano S por la curva solución C de la ecuación diferencial, tal que $G(A)=B$, y así, sucesivamente. Fuente: Alligood, Sauer, Yorke, 1996, pag.49

Por ejemplo, en la Figura 6 se observa una trayectoria C y un plano S que está definido por $x_3 = \text{constante}$. Ahora bien, cada vez que la trayectoria C perfora a S en la dirección descendente, por ejemplo, los puntos A y B , se registra el punto de perforación sobre el plano S . Estos puntos se pueden etiquetar como (x_1, x_2) . Con esto en mente, si se deja que A sea la k -ésima y B la $(k+1)$ -ésima perforación descendente del plano, el mapa de Poincaré, es el mapa bidimensional G , tal que, $G(A) = B$ [2].

En resumidas cuentas, el mapa de Poincaré registra las perforaciones al plano, que no necesariamente deben ser igualmente espaciadas en el tiempo. También, el plano se conoce como superficie de sección.

Exponente de Lyapunov

Es la medida para cuantificar la separación promedio de las trayectorias dentro del atractor. Esto es, aunque, dos puntos tengan condiciones iniciales muy cerca, sus trayectorias divergen exponencialmente con el tiempo.

Dado dos órbitas cercanas empezando en el instante $t = 0$ y con una separación d_0 , las trayectorias a lo largo del tiempo divergen, de modo que, su separación en el instante t , está dada por [71]:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t}$$

Dónde, λ es el exponente de Lyapunov

d_0 es la separación inicial de las trayectorias

$d(t)$ es la separación de las trayectorias en el instante t

- Un exponente de Lyapunov positivo es indicio de caos.
- Si un sistema es disipador, la suma será negativa.
- Si el sistema es conservativo, la suma de todos los exponentes de Lyapunov debe ser cero.
- Si el sistema es un flujo, un exponente siempre será cero.
- En un sistema hamiltoniano la suma sólo puede ser positiva si el sistema es un sistema abierto [72].
- En un sistema dinámico hay tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones del espacio-fase.

4. ORIGINALIDAD DEL TRABAJO

La originalidad del trabajo radica en lo siguiente: en primer lugar, se considera la estrategia de control *feedforward* para controlar un sistema dinámico caótico. A saber, cuando se ha utilizado estrategias de control lineal, sólo se ha utilizado el control P y en raras ocasiones el control PI.

También, es la primera vez, que sobre un mismo caso de estudio se comparan tres estrategias de control de naturaleza diferente, y más aún, sobre un sistema que es, inestable en lazo abierto, y, además, que exhibe un comportamiento dinámico caótico. En concreto, se trata de un método de control del caos, una red neuronal artificial, y, una estrategia de control lineal para controlar un sistema dinámico con comportamiento dinámico caótico. Ya que, lo que se encuentra en la literatura son comparaciones de estrategias de control *feedback* con estrategias de control no lineal, o, estrategias de control *feedback* con métodos de control del caos.

Igualmente, está el hecho, de encontrar la importancia de utilizar los métodos de control del caos en un sistema reaccionante químico, y, observar como es su desempeño frente a las estrategias de control que se utilizan tradicionalmente por los ingenieros de procesos.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1 BALANCES DE MASA Y ENERGIA

Cabe señalar que, se partió de un modelo matemático ya conocido, que se sabe bajo ciertos valores de los parámetros exhibe un comportamiento dinámico caótico.

De hecho, es un modelo matemático que describe un esquema de reacción estándar, sin embargo, es el que le sigue en complejidad al sistema de una reacción de primer orden, irreversible y exotérmica que se lleva a cabo en un CSTR, de mezcla perfecta y volumen constante $A \rightarrow B$. En concreto, se trata de un sistema de dos reacciones en serie, donde, la primera es exotérmica y la segunda es endotérmica, irreversibles, de primer orden que se llevan a cabo en un reactor CSTR, de mezcla perfecta y volumen constante.

El estudio de los esquemas de reacción más sencillos proporcionan los fundamentos para entender el comportamiento de reactores más complejos.

Entonces, el sistema bajo estudio es un CSTR no isotérmico ideal en el que ocurren dos reacciones en serie, $A \rightarrow B \rightarrow C$ la primera es exotérmica y la segunda es endotérmica. Son de primer orden. Se asume que el medio de enfriamiento se mantiene constante y que la corriente de alimento sólo contiene A . El volumen permanece constante. A continuación se presentan los balances de masa y energía:

$$V \frac{dC_A}{dt} = -V C_A \alpha_1 \exp\left(\frac{-E_1}{RT}\right) - v(C_A - C_{A0})$$

$$V \frac{dC_B}{dt} = VC_A \alpha_1 \exp\left(\frac{-E_1}{RT}\right) - VC_B \alpha_2 \exp\left(\frac{-E_2}{RT}\right) - vC_B \quad (12)$$

$$V\rho C_P \frac{dT}{dt} = (-\Delta H_1)VC_A \alpha_1 \exp\left(\frac{-E_1}{RT}\right) + \Delta H_2 VC_B \alpha_2 \exp\left(\frac{-E_2}{RT}\right) - v\rho C_P(T - T_0) - UA_H(T - T_c)$$

Dónde:

v : flujo del reactor, $v [=] \frac{\text{lbmol} \cdot \text{A}}{\text{h}}$

C : concentración, $C [=] \frac{\text{Btu}}{\text{lbm} \cdot ^\circ\text{R}}$

E : Energía de activación, $E [=] \frac{\text{Btu}}{\text{lbmol}}$

ΔH : Calor de reacción, $\Delta H [=] \frac{\text{Btu}}{\text{lbmol}}$

R : Constante de los gases, $R [=] \frac{\text{Btu}}{\text{lbmol} \cdot ^\circ\text{R}}$

T : temperatura, $T [=] ^\circ\text{R}$

V : volumen del reactor, $V [=] \text{ft}^3$

α : factor de frecuencia, $\alpha [=] \text{h}^{-1}$

A_H : área de transferencia de calor, $A_H [=] \text{ft}^2$

U : coeficiente global de transferencia de calor, $U [=] \frac{\text{Btu}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{R}}$

ρ : densidad, $\rho [=] \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$

t' : tiempo, $t' [=] \text{h}$

Ahora, colocándolo en forma adimensional, dónde:

B : aumento de temperatura adiabática adimensional, $B = \frac{(-\Delta H_1)C_{A0}}{\rho C_P T_0} \cdot \frac{E_1}{RT_0}$

α : relación o razón de los efectos de calor, $\alpha = \frac{-\Delta H_2}{-\Delta H_1}$

ε : energía de activación adimensional, $\varepsilon = \left(\frac{E_1}{RT_0}\right)^{-1}$

k : relación o razón de las energías de activación, $k = \frac{E_2}{E_1}$

x_1 : concentración adimensional de A, $x_1 = \frac{C_A}{C_{A0}}$

x_2 : concentración adimensional de B, $x_2 = \frac{C_B}{C_{A0}}$

x_3 : temperatura Frank-kameneckij, $x_3 = \left(\frac{T-T_0}{T_0}\right) \left[\frac{E_1}{RT_0}\right]$

β : coeficiente de transferencia de calor adimensional, $\beta = \frac{UA_H}{v\rho C_P}$

D_a : número de Damköhler, $D_a = \frac{\alpha_1 e^{-\left(\frac{E_1}{RT_0}\right)} V}{v} = \tau \alpha_1 e^{-\left(\frac{E_1}{RT_0}\right)}$

S : razón de las constantes de velocidad de reacción, $S = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \exp\left(\frac{E_1}{RT_0} \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right)\right)$

τ : tiempo de residencia, $\tau = \frac{V}{v}$

t : tiempo adimensional, $t = \frac{t'v}{V}$

Se llega al modelo matemático:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - x_{3c})\end{aligned}\quad (13)$$

Se supone que la única variable manipulada es la temperatura del agua de enfriamiento adimensional; x_{3c} , que se denominará de ahora en adelante: u_t .

Entonces, llamando $x_{3c} = u_t$ dónde:

$$u_t = \frac{T_c - T_0}{T_0} \left(\frac{E}{RT_0} \right) \quad (14)$$

Además, se supone que dos perturbaciones reales afectan al CSTR; (d_1, d_2). En concreto, estas se introdujeron para observar el efecto de la variable de carga, y, están dadas por:

$$d_1 = \frac{T - T_0}{T_0} \left(\frac{E}{RT_0} \right) \quad (15)$$

$$d_2 = \frac{C_A - C_{A0}}{C_{A0}}$$

Así pues, al introducir las perturbaciones adimensionales, d_1 y d_2 , en el modelo matemático (ec. 13), éste queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - d_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - x_{3c}) + d_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Cabe señalar que, este modelo matemático se tomó siguiendo a Kahlert *et al.* [43], Calvet y Arkun [12] y Wei Wu [89]. Sin embargo, si se supone, $x_{3c} = 0$, el modelo matemático queda igual al utilizado por Bandyopadhyay *et al.* [7]. Conviene advertir que, el modelo matemático utilizado por Wei Wu [89] y el utilizado por Bandyopadhyay *et al.* [7] son equivalentes.

Con esto en mente, se supone que las variables de salida son: x_1, x_2, x_3 . Por otro lado, las variables de entrada son: u, d_1, d_2 , dónde, éstas dos últimas representan la carga, mejor dicho, las perturbaciones.

5.2 VERIFICAR QUE EL SISTEMA ES CAÓTICO

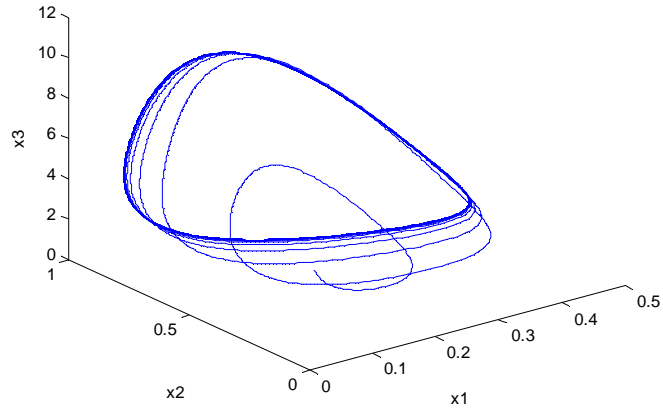
DINAMICA EN LAZO ABIERTO

Aunque, se conoce de antemano que el sistema bajo estudio exhibe un comportamiento dinámico caótico, bajo los valores de los parámetros reportados por Kahlert *et al.* [43], en primer lugar, se corroboró este hecho. En este sentido, se utilizaron herramientas cualitativas para el análisis de los sistemas dinámicos, como son: el atractor extraño, las series de tiempo, los mapas de Poincaré; y cuantitativas como el cálculo de los exponentes de Lyapunov.

Para empezar, se realizó la gráfica del retrato-fase (Figura 7), dónde, se observa que el sistema presenta un atractor extraño. Pero, como el caos no se puede detectar a simple vista, es necesario realizar pruebas cuantitativas, como el cálculo de los exponentes de Lyapunov.

Para los cálculos de las Figuras 7-8 y 10 se utilizó la rutina ode15s de MATLAB, que consiste en el método de Gear, debido a que, el sistema de ecuaciones es rígido (*stiff*). Dónde, se ajustó la tolerancia absoluta a 1×10^{-9} y la tolerancia relativa a 1×10^{-6} . Igualmente, se utilizaron los valores de los parámetros y la condición inicial reportada por Kahlert *et al.* [43], y, Bandyopadhyay *et al.* [7], que son: $\beta = 7.9999$, $D_a = 0.26$, $S = 0.5$, $\varepsilon = 0$, $k = 1$, $B = 57.77$, $\alpha = 0.426$, $x_{3c} = 0$, y la condición inicial: $x_1(0) = 0.0213$, $x_2(0) = 0.0375$, $x_3(0) = 4.629$. Dónde, x_1 y x_2 son las concentraciones adimensionales de A y B respectivamente, y, x_3 es la temperatura del reactor adimensional.

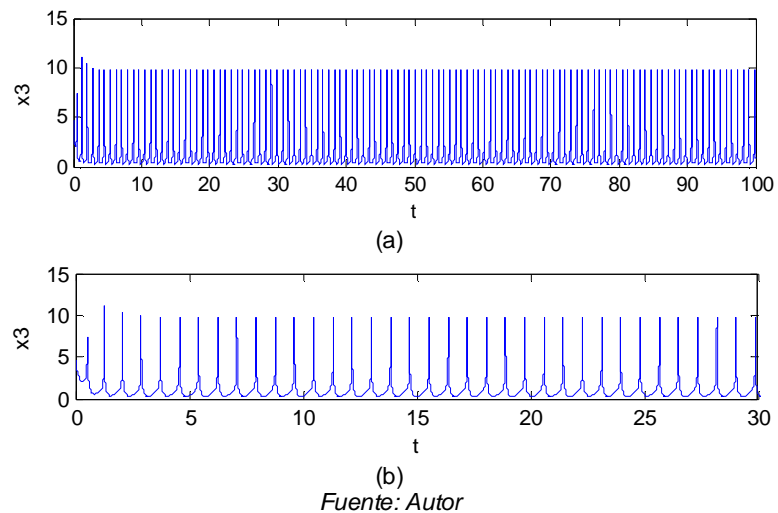
Figura 7. Gráfica del atractor extraño para el sistema de dos reacciones en serie exotérmica-endotérmica en un CSTR



Los valores de los parámetros, así como, la condición inicial se tomaron siguiendo a Kahlert *et al.* (1981) con $\beta = 7.9999$. Fuente: Autor

También, se muestra la serie de tiempo de la variable x_3 (Figura 8), dónde, se observa un comportamiento aperiódico, lo que sugiere que el sistema es caótico, para las condiciones de este estudio.

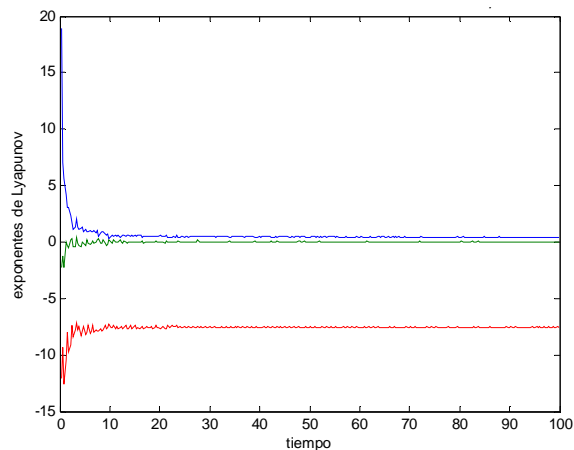
Figura 8. (a) Series de tiempo para el sistema de dos reacciones en serie exotérmica-endotérmica en un CSTR, (b) ampliación de (a)



Por otro lado, para el cálculo de los exponentes de Lyapunov se utilizó la rutina escrita en MATLAB por Govorukhin [34], que implementa el algoritmo de Wolf et al. [90]. Pues bien, este sistema al ser de tres estados, presenta tres exponentes de Lyapunov. En efecto, se encontró un exponente de Lyapunov positivo, lo que indica la presencia de caos. Como se observa en la Figura 9.

En concreto, los valores encontrados fueron: $L_1 = 0.422104$, $L_2 = 0.005110$, $L_3 = -7.553267$. Así, el mayor exponente de Lyapunov está alrededor de 0.4, también, la suma promedio de los exponentes de Lyapunov da un número negativo, lo que es característico de los sistemas dinámicos disipadores. Cabe señalar que, el valor obtenido del máximo exponente de Lyapunov, difiere al reportado por Kim y Chang [44], que es: 0.00446.

Figura 9. Exponentes de Lyapunov para el sistema de dos reacciones en serie exotérmica-endotérmica, en un CSTR

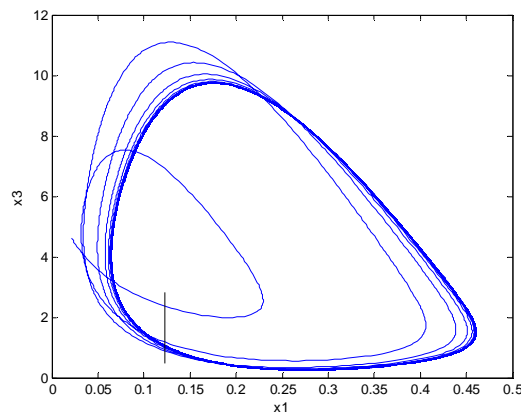


Estos son: $L_1 = 0.422104$, $L_2 = 0.005110$, $L_3 = -7.553267$. Fuente: Autor

Asímismo, se calculó el mapa de Poincaré siguiendo a Bandyopadhyay *et al.* [7]. Entonces, se consideró una sección de Poincaré en $x_1 = 0.13$ (línea vertical en la

Figura 10), en la dirección ascendente del flujo, esto es, $\dot{x}_1 > 0$. Para hallar las perforaciones a la sección de Poincaré, se utilizó el método de Runge-Kutta-Gill de cuarto orden con un tamaño de paso fijo de 1×10^{-6} . Por cierto, éste es un método explícito y ahorra más memoria de cómputo, en comparación, con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se utilizó simultáneamente el algoritmo de Henon [36], con el objeto de, evitar errores en la interpolación al hallar el punto exacto en la perforación a la sección de Poincaré, tal como lo recomienda Bandyopadhyay *et al.* [7], y Lee y Chang [49].

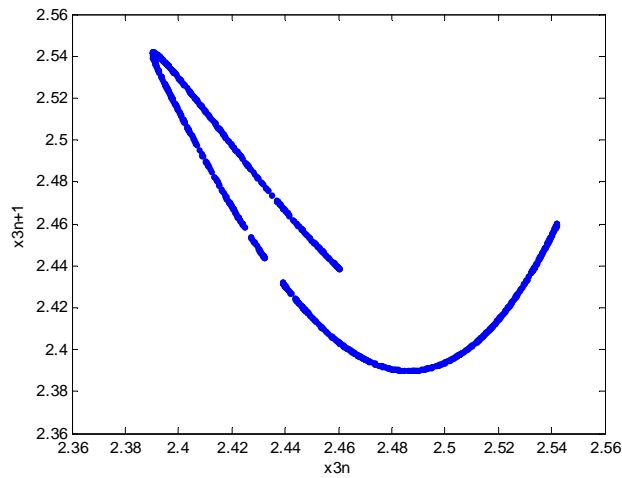
Figura 10. Plano-fase del sistema de dos reacciones en serie, exotérmica-endotérmica en un CSTR



La línea vertical denota la sección de Poincaré en $x_1=0.13$. Fuente: Autor

Entonces, con los datos obtenidos se realizó la gráfica del primer mapa retorno para x_3 , es decir, $x_{3,n}$ vs. $x_{3,n+1}$. Dónde, $n = 1, 2, \dots$, corresponde a la n -ésima perforación a la sección. De ello resulta que, los puntos se agrupan en forma de una curva definida, dando lugar a un mapa unidimensional, como se observa en la Figura 11.

Figura 11. Primer mapa retorno, $x_{3,n}$ vs. $x_{3,n+1}$



Fuente: Autor

Esto confirma que el comportamiento aperiódico observado es gobernado por reglas deterministas: dado x_n , el mapa determina x_{n+1} .

5.3 CONTROL FEEDBACK

El modelo matemático que describe el sistema bajo estudio es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - d_2 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\
 \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - x_{3c}) + d_1
 \end{aligned} \tag{16}$$

Donde, d_1 y d_2 son variables de carga o perturbaciones. En primer lugar, se va a estudiar el problema cuando no hay perturbaciones, utilizando un *set point* fijo. En

este sentido, se supone: $d_1 = d_2 = 0$ y $x_{3set} = 4$. También, se va a llamar a $x_{3c} = u_t$ que es, la temperatura de la chaqueta de enfriamiento adimensional; siguiendo a Wei Wu [89]; y se considerará como la única variable manipulada. De modo que, el sistema de ecuaciones (16) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - u_t)\end{aligned}\quad (17)$$

a) **Dominio del tiempo**

Control P

Entonces, en el caso del control proporcional *feedback*, la ley de control, se define:

$$u_t(t) = k_c (x_{3set} - x_3) \quad (18)$$

Dónde, k_c es la ganancia del controlador y x_{3set} es el *set-point* de la temperatura del reactor adimensional. Además, $k_c > 0$. Se asume que, el controlador es de acción inversa, y que la válvula es de falla para abrir (aire para cerrar).

Cabe señalar que, la estrategia de control seleccionada es la siguiente:

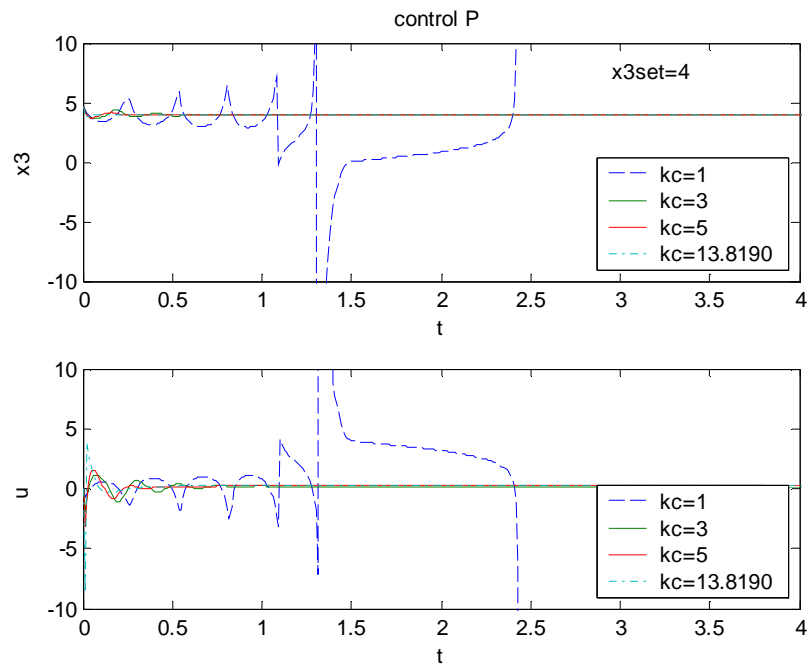
Se asume que, la temperatura del reactor adimensional, x_3 , es la variable controlada y que la temperatura de la chaqueta de enfriamiento adimensional, $x_{3c} = u_t$ es la variable manipulada.

En este sentido, el sistema de ecuaciones a resolver es, el conjunto de ecuaciones (17), junto con la ecuación (18).

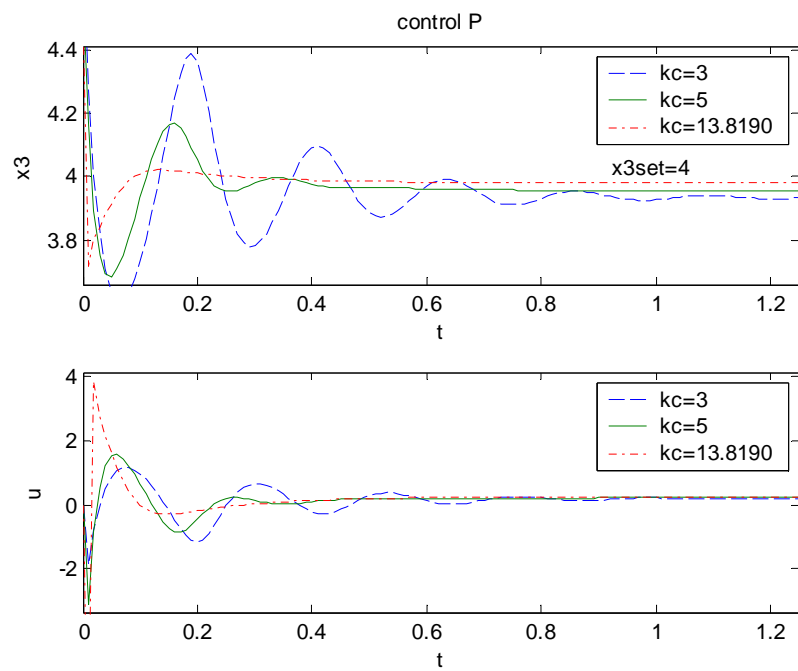
Detalles de la simulación

Cabe señalar que, en este caso el parámetro del controlador; (k_c); se eligió por prueba y error. Con esto en mente, se hizo la simulación en el dominio del tiempo para diferentes valores de ganancia (k_c). Se utilizó como *set-point*: $x_{3set} = 4$. Además, se utilizaron los valores de los parámetros reportados por Kahlert *et al.* [43], esto es, pues, $D_a = 0.26$, $B = 57.77$, $\alpha = 0.426$, $k = 1$, $S = 0.5$, $\varepsilon = 0$, $\beta = 7.9999$. Por cierto, se utilizó el método de Euler, con un tamaño de paso $h=0.01$. Como lenguaje de programación se utilizó Matlab versión 6.5, en un computador de escritorio Intel, Pentium, 4 CPU, 2.40 GHz, de 2.00 GB de RAM y la condición inicial en $t = 0$ reportada por Kahlert *et al.* [43]: $x_1(0)=0.0213$, $x_2(0)=0.0375$, $x_3(0)=4.629$. La integración se realizó en un rango de tiempo de 100 unidades de tiempo adimensional. En este sentido, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Figura 12. (a) Control P para diferentes valores k_c , (b) ampliación de la figura (a)



(a)



(b)

Fuente: Autor

Como se puede observar en la Figura 12, cuando la ganancia toma valores muy pequeños, por ejemplo, $k_c = 1$, el control P no controla el sistema. El comportamiento es inestable, de manera que, se descarta. En cambio, con $k_c = 3$, $k_c = 5$, $k_c = 13.8190$ si se controla. De estos tres últimos valores de ganancia $k_c = 3$, es el que muestra el mayor sobrepaso. En efecto, el comportamiento es bastante oscilatorio, y tarda más tiempo en alcanzar el control. Por otro lado, con $k_c = 13.8190$ se obtiene un comportamiento que no es subamortiguado, y, produce una salida muy rápida y brusca, lo que puede representar daños en el reactor. De aquí, el comportamiento más satisfactorio se obtiene con $k_c = 5$. Cabe señalar, que en ninguno de los casos ensayados se alcanza el *set-point*, sin embargo, está muy cerca. Es decir, siempre está presente el *offset* o error en estado estacionario, que es, característico del control P (ver Tabla 1). Además, se observó que el *offset* disminuye a medida que la ganancia aumenta.

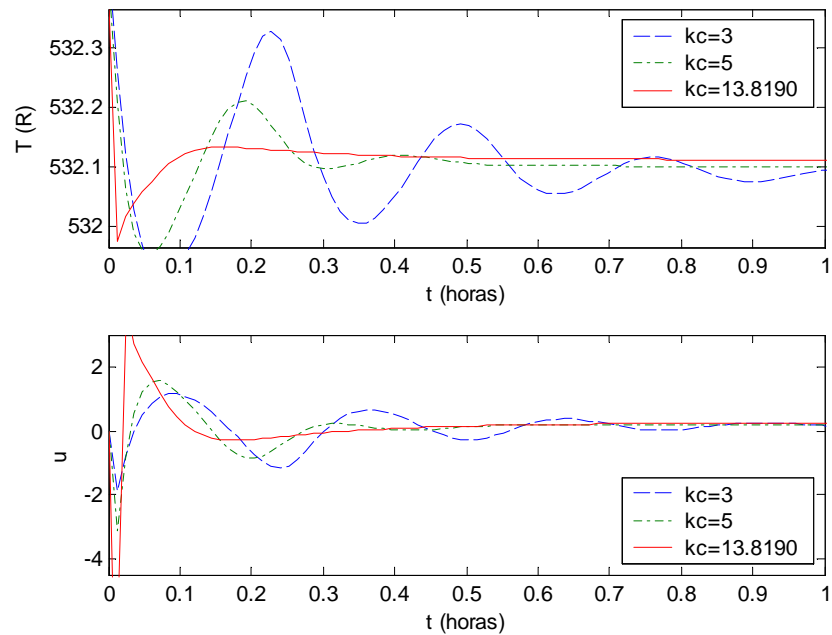
Tabla1. Valores de *offset* para ciertos valores de ganancia encontrados en el control P

Valor de ganancia (k_c)	<i>Offset</i>
3	0.0656
5	0.0443
13.8190	0.0182

Fuente: Autor

Ahora bien, al representarlo en términos de variables con dimensiones, se obtiene:

Figura 13. Control de la temperatura del reactor, utilizando control P para diferentes valores k_c



Fuente: Autor

Se observa en la Figura 13 que la temperatura del reactor si se controla. Cabe señalar que, aunque, el *offset* siempre está presente, éste no es muy grande.

Control PI

Al llegar a este punto, se utilizó la ley de control del controlador proporcional-integral, que es:

$$u_t = k_c \left(E + \frac{1}{\tau_i} \int E_{(t)} dt \right) \quad (19)$$

Donde, E , representa el error y está dado por la diferencia entre el *set-point* y la variable controlada, es decir:

$$E = x_{3\text{set}} - x_3 \quad (20)$$

Dónde,

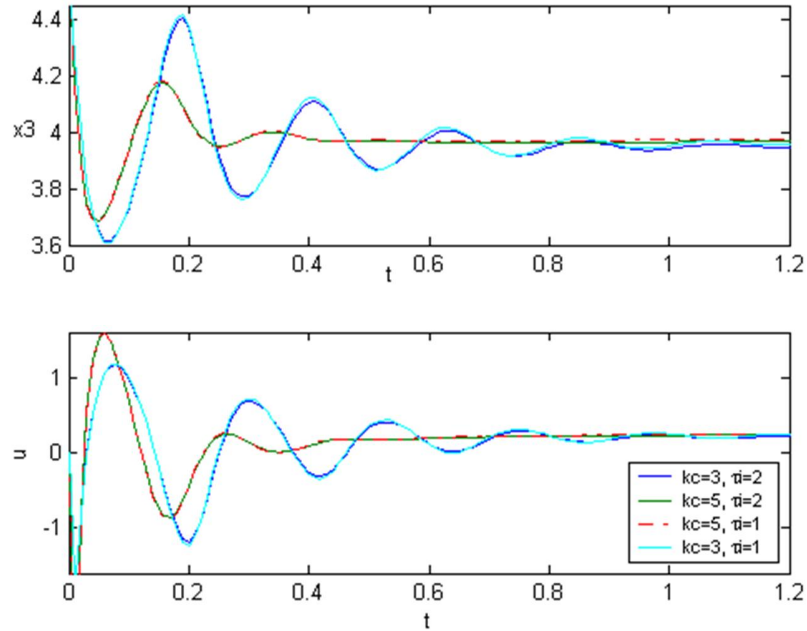
k_c es la ganancia del controlador

τ_I es la constante de tiempo integral

Aquí, se siguió a Luyben [50] para realizar la simulación. En este sentido, se hizo la simulación en el dominio del tiempo para diferentes valores de ganancia (k_c) y de constante de tiempo integral (τ_I). Esto es, se eligieron unos valores de k_c y de τ_I arbitrariamente. Estos son: $k_c = 3$, $k_c = 5$ y $\tau_I = 1$, $\tau_I = 2$.

De esta manera, los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Figura 14. Control PI para diferentes valores k_c y τ_I



Fuente: Autor

Se observa que en los casos ensayados el control PI controla el sistema y elimina el *offset*. Se observa que el comportamiento se ve afectado principalmente por el valor de la ganancia, ya que, no difiere mucho al cambiar de $\tau_I = 1$ a $\tau_I = 2$. Esto es, cuando $k_c = 3$ el comportamiento es más oscilatorio y tarda más en alcanzar el control.

Ahora, aunque la salida es similar con $\tau_I = 1$ y $\tau_I = 2$ entre más pequeño es τ_I más rápido tiende a alcanzar el *set-point*. Esto es, alcanza más rápido el *set-point* cuando $\tau_I = 1$.

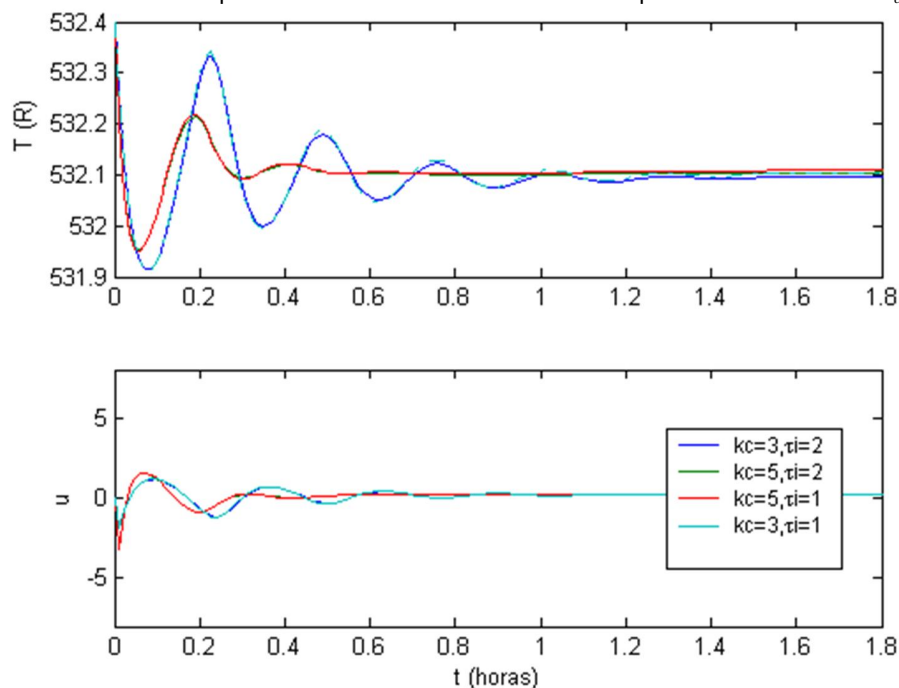
Entonces, de las configuraciones ensayadas se alcanza más rápido el *set-point* cuando $k_c = 5$, $\tau_I = 1$ que cuando $k_c = 3$, $\tau_I = 1$. Por cierto, los valores de sintonía se eligieron por prueba y error.

Conviene advertir que, en todos los casos ensayados la salida presenta cambios rápidos y bruscos, lo que hace que de pronto no sea posible de llevar a cabo en la práctica, dado que, puede ocasionar daños en el reactor. Estos se hacen más pronunciados con $k_c = 3$, que con $k_c = 5$.

En resumen, se observa que el comportamiento del control PI en comparación con el control P es mucho más oscilatorio. En otras palabras, el control PI es más inestable que el control P.

Ahora, en términos de variables con dimensiones:

Figura 15. Control de la temperatura del reactor utilizando control PI para diferentes valores k_c y de τ_i



Fuente: Autor

En efecto, se observa en la Figura 15 que el control PI controla la temperatura del reactor y elimina el error en estado estacionario.

b) Análisis de estabilidad

Los controladores *feedback* poseen problemas de estabilidad. Por lo tanto, es necesario hacer un análisis del mismo a la estrategia de control propuesta. Con esto en mente, se realizará el análisis de estabilidad del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado. Aunque, en el primer caso, sólo se realizará para verificar que el sistema bajo estudio es inestable en lazo abierto.

A este propósito, es necesario llevar el sistema de ecuaciones diferenciales al dominio de Laplace, hallar las funciones de transferencia, tanto, en lazo abierto,

como, en lazo cerrado; encontrar la ecuación característica y llevar a cabo las pruebas de estabilidad de la teoría del control lineal, por ejemplo: el criterio de Routh-Hurwitz. Posteriormente, se realizará las gráficas de lugar geométrico de las raíces (*root- locus*), que dan una visión más amplia, acerca de lo que está ocurriendo.

c) Dominio de Laplace

Se parte del modelo matemático, que es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - Da x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - d_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + Da x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - Da S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + Da B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - Da B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - u_t) + d_1\end{aligned}\quad (21)$$

Después de linealizar (21) y expresarlo en términos de variables de perturbación, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1^p}{dt} &= a_{11} x_1^p + a_{12} x_3^p + a_{13} d_2^p \\ \frac{dx_2^p}{dt} &= a_{21} x_1^p + a_{22} x_2^p + a_{23} x_3^p \\ \frac{dx_3^p}{dt} &= a_{31} x_1^p + a_{32} x_2^p + a_{33} x_3^p + a_{34} u_t^p + a_{35} d_1^p\end{aligned}\quad (22)$$

Dónde:

$$a_{11} = -1 - Da \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1 + \varepsilon \bar{x}_3}\right)$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -\frac{Da\bar{x}_1}{(1+\varepsilon\bar{x}_3)^2} \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{13} &= -1 \\
a_{21} &= Da \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{22} &= -1 - DaS \exp\left(\frac{k\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{23} &= \frac{Da\bar{x}_1}{(1+\varepsilon\bar{x}_3)^2} \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) - \frac{DaS\bar{x}_2k}{(1+\varepsilon\bar{x}_3)^2} \exp\left(\frac{k\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{31} &= DaB \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{32} &= -DaB\alpha S \exp\left(\frac{k\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) \\
a_{33} &= -1 + \frac{DaB\bar{x}_1}{(1+\varepsilon\bar{x}_3)^2} \exp\left(\frac{\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) - \frac{DaB\alpha S\bar{x}_2k}{(1+\varepsilon\bar{x}_3)^2} \exp\left(\frac{k\bar{x}_3}{1+\varepsilon\bar{x}_3}\right) - \beta \\
a_{34} &= \beta \\
a_{35} &= 1
\end{aligned} \tag{23}$$

Dónde, \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 son los valores de las variables en estado estacionario. Ahora bien, para hallarlos se supone un valor de \bar{x}_3 y se resuelve el sistema de ecuaciones (17) en estado estacionario.

Entonces, suponiendo $\bar{T} = 600$ R = 333.33 K, $\bar{T}_0 = 530$ R = 294.44 K, $E_I = 30000$ Btu/lbmol = 69733.80171 J/mol, $R = 1.99$ Btu/lbmol.R = 8.314 J/mol.K, dónde, \bar{T} es la temperatura del reactor en estado estacionario, \bar{T}_0 es la temperatura del alimento en estado estacionario, E_I es la energía de activación, R es la constante de los gases, se reemplaza en la definición de x_3 , que es:

$$\bar{x}_3 = \left(\frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{T}_0} \right) \left(\frac{E_1}{R\bar{T}_0} \right) \quad (24)$$

Con lo que se obtiene $\bar{x}_3 = 3.756768892$

Entonces, utilizando este valor en el sistema de ecuaciones de (17), con los valores de los parámetros reportados por Kahlert *et al.* [43] y Bandyopadhyay *et al.* [7] con $\beta = 7.9999$ se encuentra que \bar{x}_1 y \bar{x}_2 , están dados por:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0.082436367 \\ \bar{x}_2 &= 0.139650961 \end{aligned} \quad (25)$$

Al reemplazar estos valores en los $a_{ij,s}$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -12.1305685 \\ a_{12} &= -0.917563631 \\ a_{13} &= -1 \\ a_{21} &= 11.13056852 \\ a_{22} &= -6.56528426 \\ a_{23} &= 0.14036633 \\ a_{31} &= 643.0129434 \\ a_{32} &= -136.961757 \\ a_{33} &= 24.8809100 \\ a_{34} &= 7.9999 \\ a_{35} &= 1 \end{aligned} \quad (26)$$

Ahora bien, al sacar la transformada de Laplace del sistema de ecuaciones linealizado y expresado en términos de variables de perturbación, ec. (22), se llega a:

$$x_{1(s)}^p (s - a_{11}) = a_{12} x_{3(s)}^p + a_{13} d_{2(s)}^p \quad (27)$$

$$x_{2(s)}^p (s - a_{22}) = a_{21} x_{1(s)}^p + a_{23} x_{3(s)}^p$$

$$x_{3(s)}^p (s - a_{33}) = a_{31} x_{1(s)}^p + a_{32} x_{2(s)}^p + a_{34} u_{t(s)}^p + a_{35} d_{1(s)}^p$$

Luego, debe resolverse el sistema de ecuaciones (27) simultáneamente para hallar las funciones de transferencia del sistema en lazo abierto. De modo que, queda:

$$x_{1(s)}^p = G_{11(s)} d_{2(s)}^p + G_{12} u_{t(s)}^p + G_{13} d_{1(s)}^p \quad (28)$$

$$x_{2(s)}^p = G_{21(s)} d_{2(s)}^p + G_{22(s)} u_{t(s)}^p + G_{23} d_{1(s)}^p$$

$$x_{3(s)}^p = G_{31(s)} d_{2(s)}^p + G_{32(s)} u_{t(s)}^p + G_{33(s)} d_{1(s)}^p$$

Dónde, los $G_{ij,s}$ denotan las funciones de transferencia y están dados por:

$$G_{11(s)} = \frac{(s - a_{33})(s - a_{22})a_{13} - a_{13}a_{32}a_{23}}{I} \quad (29)$$

$$G_{12(s)} = \frac{a_{12}a_{34}(s - a_{22})}{I}$$

$$G_{13(s)} = \frac{a_{12}a_{35}(s - a_{22})}{I}$$

$$G_{21(s)} = \frac{a_{21}a_{13}(s - a_{33}) + a_{23}a_{13}a_{31}}{I}$$

$$G_{22(s)} = \frac{a_{21}a_{12}a_{34} + a_{23}a_{34}(s - a_{11})}{I}$$

$$G_{23(s)} = \frac{a_{21}a_{12}a_{35} + a_{23}a_{35}(s - a_{11})}{I}$$

$$G_{31(s)} = \frac{a_{13}a_{31}(s - a_{22}) + a_{13}a_{32}a_{21}}{I}$$

$$G_{32(s)} = \frac{a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I}$$

$$G_{33(s)} = \frac{a_{35}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I}$$

Donde, I es el polinomio característico en lazo abierto y está dado por:

$$I = (s - a_{11})(s - a_{33})(s - a_{22}) - a_{32}a_{23}(s - a_{11}) - a_{12}a_{31}(s - a_{22}) - a_{32}a_{21}a_{12} \quad (30)$$

La ecuación (30) corresponde a un polinomio de tercer orden que se puede expresar de la siguiente manera:

$$I = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (31)$$

Dónde, a_0 , a_1 , a_2 y a_3 son constantes y están dadas por:

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = -6.18505714 \quad (32)$$

$$a_1 = 223.7009116$$

$$a_0 = 726.4380059$$

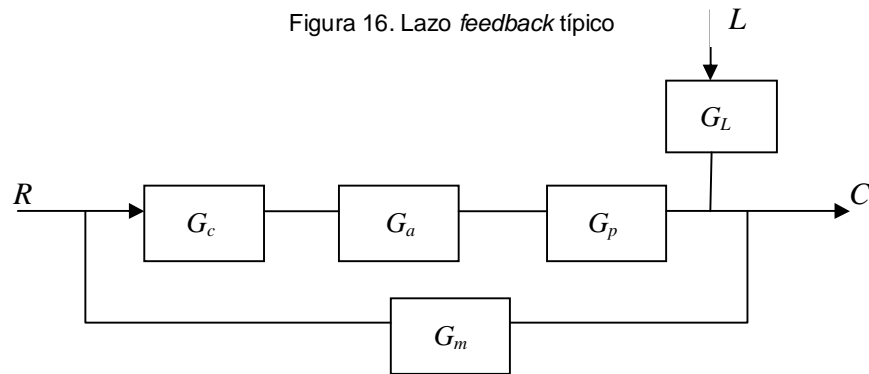
(33)

De aquí, $I = s^3 - 6.18505714 s^2 + 223.7009116 s + 726.4380059$

La prueba de los coeficientes, requiere que todos los coeficientes del polinomio característico sean definidos positivos para que el sistema sea estable. Como se ve, $a_2 < 0$, lo que indica que no satisface, y, el sistema es inestable en lazo abierto, o, tiene polos en el lado derecho del plano S .

Ahora bien, referente al, **lazo cerrado**, tenemos que:

El lazo *feedback* típico tiene la siguiente forma:



Fuente: Pao Chau, 2001, pag:5-18

$$C = \left[\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \right] R + \left[\frac{G_L}{1 + G_c G_p} \right] L \quad (34)$$

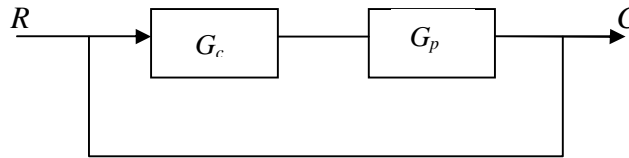
En el análisis de un sistema SISO no se tiene en cuenta simultáneamente cambios en el *set point* y en la carga. Sin embargo, cabe señalar que, la ecuación característica es la misma en los dos casos. De aquí, que el análisis de estabilidad es el mismo [18].

Nota: En el presente trabajo se hicieron las siguientes suposiciones que son válidas para todo el desarrollo de la estrategia de control *feedback*. Esto es, tanto, para el control P como para el control PI.

- ✓ Se supone un sistema SISO
- ✓ Se supone que se va a estudiar un servo problema, es decir, $L=0$.
- ✓ Se supone que la dinámica de la válvula y del aparato de medición es muy rápida con respecto a, la dinámica del proceso. De modo que, $G_m = G_a = 1$. Dónde, G_m es la función de transferencia del aparato de medición, y G_a es la función de transferencia del actuador.

Entonces, queda el esquema del lazo *feedback* unitario:

Figura 17. Lazo *feedback* unitario



Fuente: Pao, Chau, 2001, pag: 5-12

Y de (34) queda:

$$C = \left[\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \right] R$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (35)$$

Donde, C es la variable que se controla y R es la referencia o *set-point*.

Control P

Primero que todo, se considera un lazo de temperatura. Entonces, de (28) se elige la tercera ecuación:

$$x_{3(s)}^p = G_{31(s)} d_{2(s)}^p + G_{32(s)} u_{t(s)}^p + G_{33(s)} d_{1(s)}^p \quad (36)$$

Aquí conviene detenerse un momento, a fin de aclarar que, como el estudio se está realizando bajo el marco de un sistema SISO (*Single Input Single Output*), se debe escoger sólo una entrada al sistema. Entonces, se escoge como entrada u_t

(temperatura de la chaqueta de enfriamiento), de modo que, (36) se puede escribir como:

$$x_{3(s)}^p = G_{32(s)} u_{t(s)}^p + \dots$$

Dónde, la salida del sistema (variable controlada) es, x_3 , que es, la temperatura del reactor adimensional y la entrada al sistema (variable manipulada) es, u_t , que es, la temperatura de la chaqueta de enfriamiento adimensional.

Entonces, de la ec. (37):

$$\frac{x_{3(s)}^p}{u_{t(s)}^p} = G_{32} \quad (38)$$

En este sentido, llamando, G_p , a la función de transferencia del proceso, se puede decir que: $G_p = G_{32}$ (39)

Como es sabido, de (29): $G_{32} = \frac{a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I}$ (40)

Ahora bien, como se trata de un control P, la función de transferencia del controlador es:

$$G_c = k_c \quad (41)$$

Dónde, k_c es la ganancia del controlador.

Al reemplazar por las funciones de transferencia del controlador y del proceso en (35), se tiene que:

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{k_c a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I}}{1 + \frac{k_c a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I}} \quad (42)$$

Dónde, $C = x_3, y, R = u_r$.

Entonces, la ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1 + \frac{k_c a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I} = 0 \quad (43)$$

$$\text{Que es lo mismo que: } I + k_c a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11}) = 0 \quad (44)$$

Donde, I está dado por (ec. 33).

De aquí que, al simplificar y reemplazar por los valores numéricos de los $a_{ij,s}$, queda:

$$s^3 + (-6.18505714 + 7.9999 k_c) s^2 + (223.7009116 + 149.5649525 k_c) s + (726.4380059 + 637.1170794 k_c) = 0 \quad (45)$$

Que es, el polinomio característico en lazo cerrado.

Este polinomio se puede escribir como:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Donde,

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = -6.18505714 + 7.9999 k_c$$

$$a_1 = 223.7009116 + 149.5649525 k_c$$

$$a_0 = 726.4380059 + 637.1170794 k_c$$

Arreglo de Routh

Para encontrar los límites de estabilidad, primero que todo, se utilizará el arreglo de Routh. En particular, el arreglo de Routh para este caso queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \\ a_0 & \end{bmatrix}$$

Donde,

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0}{a_2}$$

Esto es,

$$b_1 = \frac{(-6.18505714 + 7.9999k_c)(223.7009116 + 149.5649525k_c) - (726.4380059 + 637.1170794k_c)}{(-6.18505714 + 7.9999k_c)}$$

Según el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, los coeficientes de la primera columna deben ser definidos positivos para que el sistema sea estable. Es decir, se debe cumplir que:

1) $a_2 > 0$

$$-6.18505714 + 7.9999k_c > 0$$

Es decir: $k_c > 0.77314180$

2) $a_0 > 0$

$$726.4380059 + 637.1170794k_c > 0$$

Esto es, $k_c > -1.14019546$

3) $b_1 > 0$

$$\frac{1196.504664k_c^2 + 227.4000666k_c - 2110.040927}{-6.18505714 + 7.9999k_c} > 0$$

Esto es:

$$1196.504664 k_c^2 + 227.4000666 k_c - 2110.04092 > 0$$

De modo que, al resolver se obtiene dos soluciones:

$$k_{c_1} > -1.4264$$

$$k_{c_2} > 1.2363$$

La solución negativa $k_{c_1} > -1.4264$ se presenta cuando el controlador tiene la acción equivocada⁵. Por consiguiente, se llega a que: $k_{c_2} > 1.2363$.

En resumen, para que los elementos de la primera columna sean definidos positivos, se debe cumplir que $k_c > 0.773141806$, $k_c > -1.140195467$, y, $k_c > 1.2363$. Como se ve, cuando $k_c > 1.2363$, se cumplen las otras dos condiciones. Con esto en mente, la respuesta es que $k_c > 1.2363$ para que el sistema sea estable.

Por sustitución directa

Para confirmar los resultados de ganancia última, se hallaron también, por el método de sustitución directa. En este sentido, se parte de la ecuación característica en lazo cerrado (ec. 43), que es lo mismo que la (ec. 45). Entonces, se parte de la ecuación (45), donde, se reemplaza s por iw , luego, se iguala a cero la parte real y la parte imaginaria, y se resuelve simultáneamente estas dos ecuaciones, donde, se encuentra dos soluciones:

⁵ Según Smith y Corripio (Segunda edición, 1997, pag. 279), muestra un ejemplo donde se presenta este caso y lo explica de la siguiente manera: "...la solución negativa corresponde a la inestabilidad monotónica causada por tener la acción equivocada sobre el controlador. En este caso, el sistema no oscila, pero, se mueve monotónicamente en una dirección a la otra"...

$$k_{cu} = 1.2363, \quad w_u = \pm 20.21405605 \text{ rad/s}, \quad T_u = 0.310832486 \text{ s}$$

$$k_{cu} = -1.140195467, \quad w_u = 0$$

Esta última es la solución cuando el controlador está en la acción equivocada. Por ejemplo, si se está asumiendo que el controlador es de acción inversa debería tomarse de acción directa.

Por consiguiente, la ganancia última es: $k_{cu} = 1.2363$, que ocurre con la frecuencia $w_u = \pm 20.21405605 \text{ rad/s}$, y, el periodo $T_u = 0.310832486 \text{ s}$. En efecto, se observa que el valor de k_{cu} es el mismo al obtenido por el arreglo de Routh. En definitiva, la ganancia última para el sistema con control P es $k_{cu} = 1.2363$.

Gráfica del lugar geométrico de las raíces

La ecuación característica en lazo cerrado con control P, está dado por la ecuación (43):

$$1 + k_c a_{34} \frac{(s - a_{22})(s - a_{11})}{I} = 0$$

Dónde, I es el polinomio característico en lazo abierto y está dado por ec. (33).

Entonces, llevándola a la forma polo-cero, se llega a:

$$1 + \frac{k_c a_{34} (s + 6.56528426)(s + 12.1305685)}{(s + 2.9046)(s - (4.5448 + 15.1475i))(s - (4.5448 - 15.1475i))} = 0 \quad (46)$$

Dónde, $a_{34} = 7.9999$.

Al inspeccionar la ecuación se observa que, el sistema tiene dos ceros y tres polos. Esto es, un polo real y un par imaginario conjugado complejo que se encuentra en el lado derecho del plano S .

En concreto, hay un polo ubicado en -2.9046 y un par imaginario conjugado complejo en $4.5448 \pm 15.1475i$. Además, hay dos ceros ubicados en -6.56528426 y -12.1305685 . La presencia del par imaginario conjugado complejo hace que el sistema sea inestable para ciertos valores de ganancia.

Seguidamente, se calculó el número de asíntotas, ángulo de la asíntota, centro de gravedad de la asíntota, punto de ruptura, y, punto en que cruza el eje imaginario. Información que es útil para realizar la gráfica del lugar geométrico de las raíces (Tabla 2). En resumen:

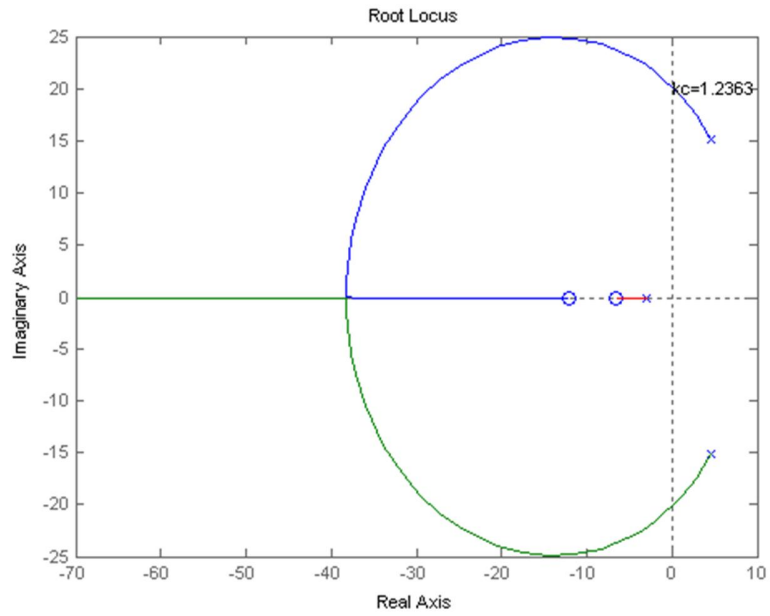
Tabla 2. Información para bosquejar la gráfica del lugar geométrico de las raíces con control P

Número de ceros	2
Número de polos	3
Ceros	$z_1 = -6.56528426$ $z_2 = -12.1305685$
Polos	$p_1 = -2.9046$ $p_2 = 4.5448+15.1475i$ $p_3 = 4.5448-15.1475i$
Locus	3
Asíntotas	1
Ángulo de la asíntota	$\pm 180^\circ$
Centro de gravedad de la asíntota	$\gamma = 24.8809$
Punto de ruptura	$s = -39.5552$
Punto que cruza el eje imaginario	$w = \pm 20.214056056i$, donde, $k_c = 1.2363$

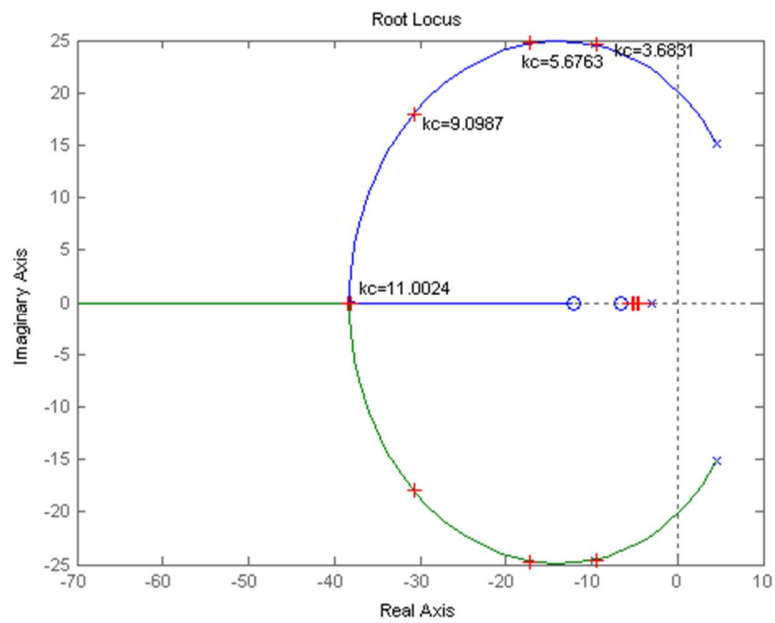
Fuente: Autor

En cuanto a, la dirección en la cual viajan los lugares geométricos de las raíces, puede decirse que, el lugar geométrico de las raíces (*locus*) que sale del polo ubicado en -2.9046 tiende hacia el cero ubicado en -6.56528426 . Ahora bien, los lugares geométricos de las raíces que se desprenden del par imaginario, llegan a un punto en el eje real donde, chocan, se bifurcan, y, uno tiende hacia el cero ubicado en -12.1305685 , mientras que, el otro tiende hacia $-\infty$ (Figura 18a).

Figura 18. Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el control P⁶



(a)



(b)

Fuente: Autor

⁶ Estas gráficas se realizaron en Matlab versión 6.1, utilizando el *toolbox* de control de sistemas, siguiendo a Pao Chau (2001).

De la Figura 18 se observa, que la gráfica del lugar geométrico de las raíces es parte de un círculo. Según Ogata [56] esto es común en los sistemas que poseen dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o, un polo y dos ceros⁷.

Pues bien, aquí, el sistema contiene tres polos y dos ceros, y, despliega esta forma circular. Al respecto conviene decir que, aunque lo usual es que los reactores químicos exotérmicos exhiban estabilidad condicional ($k_{min} < k_c < k_{max}$), en el caso bajo estudio, la presencia de dos ceros en el lado izquierdo del plano S modifica el comportamiento, de modo que, la gráfica de lugar geométrico de las raíces presenta, sólo un límite de estabilidad condicional: k_{min} .

Así, aunque lo acostumbrado en este tipo de sistemas es que debe haber un valor máximo de ganancia por encima del cual el sistema se hace inestable, en este caso los cálculos teóricos no lo muestran.

En concreto, de los cálculos teóricos se encontró que el valor de ganancia última⁸ es: $k_{cu} = 1.2363$, esto es, por debajo de este valor, el sistema se hace inestable. En otras palabras, para que el sistema sea estable se debe tomar valores de ganancia $k_c > k_{cu}$.

A saber, aparentemente, el sistema será estable para todo $k_c > 1.2363$. Sin embargo, de los resultados obtenidos de las simulaciones se observa que, para valores de ganancia por encima de $k_c > 27.68$ el sistema se hace inestable.

Incluso, cuando $k_c > 11$ y cuando $k_c > 14$ se observa que, el comportamiento desmejora bastante, puesto que, la salida no es subamortiguada y sufre cambios muy rápidos y bruscos en los primeros instantes de tiempo; difíciles de lograr en la

⁷ ...”Se observa que en este sistema, el lugar geométrico de las raíces en el plano complejo es parte de un círculo. Dicho lugar geométrico de las raíces circular no ocurre en la mayor parte de los sistemas. Los lugares geométricos de las raíces circulares ocurren en sistemas que contienen dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o, un polo y dos ceros. Incluso, en tales sistemas el que ocurran estos lugares geométricos de las raíces circulares depende de la ubicación de los polos y los ceros involucrados...” (Ogata, 1998, pag. 329).

⁸ En este caso podría decirse que no se trata de una ganancia última, sino de una ganancia crítica: $k_{ccritico}$

práctica; que se hacen más pronunciados, a medida que, k_c aumenta. Además, pueden ocasionar daños en el reactor, porque, de pronto, no se puede obtener el flujo de agua que se necesite.

Es decir, aunque con estos valores de ganancia logra controlar el sistema, el problema está en los primeros segundos. Por lo tanto, no se recomienda tomar valores de ganancia de $k_c > 11$.

La gráfica del lugar geométrico de las raíces ayuda a explicar este comportamiento. Como se observa en la Figura 18b, para valores de $k_c > 11$ el sistema sólo tiene raíces reales. Es decir, el comportamiento no es subamortiguado. Además, con pequeños incrementos en el valor de la ganancia, las raíces se acercan rápidamente al cero ubicado en -12.1305685 .

De otro lado, se observa que, para valores de ganancia entre $1.2363 < k_c < 11$ el sistema, aunque, es estable, presenta un comportamiento muy oscilatorio, debido a, la presencia de raíces imaginarias. Aquí, se explica la diferencia en el comportamiento con $k_c = 3$ y con $k_c = 5$. Recordemos que, la salida con $k_c = 3$ es mucho más subamortiguada que con $k_c = 5$. Pues bien, aquí, se aprecia que con $k_c = 5$ el sistema se aleja más del eje imaginario, contrario a lo que ocurre con $k_c = 3$, que se acerca más al límite de inestabilidad.

Control PI

Al cambiar al modo de control PI, cambia la función de transferencia del controlador. Entonces,

$$G_c = k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad (47)$$

Donde, τ_I es la constante de tiempo integral y k_c es la ganancia del controlador. También, se eligió un lazo de temperatura, y, como es un sistema SISO se elige una sola entrada; en este caso, u_i ; de modo que, aplica la ecuación 37.

La función de transferencia del proceso es la misma, es decir: $G_p = G_{32}$. Además, se mantienen las suposiciones hechas en el caso del control P. Esto es, la ecuación característica en lazo cerrado es: $1 + G_c G_p = 0$.

Que es lo mismo:

$$1 + k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \frac{a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})}{I} = 0 \quad (48)$$

Donde, I está dado por: (ec. 33).

Ahora bien, al simplificar, arreglar, reemplazar por los $a_{ij,s}$ y hacer un trabajo algebraico, se llega a:

$$\begin{aligned} & s^4 + (-6.18505714 + 7.9999k_c)s^3 \\ & + \left(223.7009116 + 149.5649525k_c + 7.9999\frac{k_c}{\tau_I} \right) s^2 \\ & + \left(726.4380059 + 637.1170794k_c + 149.5649525\frac{k_c}{\tau_I} \right) s \\ & + 637.1170794\frac{k_c}{\tau_I} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Que es el polinomio característico en lazo cerrado. Es un polinomio de cuarto orden que depende de k_c y τ_I .

Arreglo de Routh.

Este polinomio característico se puede escribir como:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Donde,

$$a_4 = 1$$

$$a_3 = -6.18505714 + 7.9999 k_c$$

$$a_2 = 223.7009116 + 149.5649525 k_c + 7.9999 k_c/\tau_I$$

$$a_1 = 726.4380059 + 637.1170795 k_c + 149.5649525 k_c/\tau_I$$

$$a_0 = 637.1170795 k_c/\tau_I$$

Y, el arreglo de Routh queda:

$$\begin{bmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ b_1 & a_0 & \\ c_1 & 0 & \\ a_0 & & \end{bmatrix}$$

Donde,

$$b_1 = \frac{a_3 a_2 - a_4 a_1}{a_3}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_1 - a_3 a_0}{b_1}$$

Para que el sistema sea estable, se debe cumplir que, todos los elementos de la primera columna deben ser definidos positivos, esto es, pues, se debe cumplir que:

1) $a_3 > 0$

$$-6.18505714 + 7.9999 k_c > 0, \text{ es decir}$$

$$k_c > 0.77314180$$

$$2) a_0 > 0$$

$$637.1170794 \frac{k_c}{\tau_I} > 0$$

Es decir, se debe cumplir, que: $k_c > 0$, y, $\tau_I > 0$

$$3) b_1 > 0$$

$$b_1 = \left(1196.504664 + \frac{63.99840001}{\tau_I} \right) k_c^2 + \left(227.4000665 - \frac{199.044791}{\tau_I} \right) k_c - 2110.04092$$

$$4) c_1 > 0$$

$$c_1 = \left(762313.5571 + \frac{178955.1632}{\tau_I} + \frac{9571.917658}{\tau_I^2} \right) k_c^3 + \left(1014066.928 + \frac{16736.01495}{\tau_I} - \frac{29770.12471}{\tau_I^2} \right) k_c^2 + \left(-1179151.04 - \frac{484554.741}{\tau_I} \right) k_c - 1532813.91$$

Como se puede observar, para resolver b_1 y c_1 es necesario suponer un valor de τ_I . En concreto, aquí, se utilizaron valores de $\tau_I = 0.1$, y, $\tau_I = 1$.

Entonces,

- con $\tau_I = 0.1$ se llega a:

$$b_1 = 1836.488664k_c^2 - 1763.04784k_c - 2110.04092$$

Resolviendo, se tiene:

$$k_{c1} = 1.6545$$

$$k_{c2} = -0.6945$$

De aquí, se concluye que $k_c > 1.6545$.

Asimismo,

$$c_1 = 3509056.955k_c^3 - 1795585.39k_c^2 - 6024698.45k_c - 1532813.918$$

Al resolver, se llega a:

$$k_{c1} = 1.6847$$

$$k_{c2} = -0.8775$$

$$k_{c3} = -0.2955$$

Esto es, se debe cumplir que: $k_c > 1.6847$.

Al llegar aquí, se concluye que, cuando $\tau_I = 0.1$, se debe cumplir que $k_c > 1.6847$. Puesto que, este valor reúne las otras tres condiciones: incluye a $k_c > 1.6545$, $k_c > 0.773141816$, y, $k_c > 0$.

- Del mismo modo, con $\tau_I = 1$:

$$b_1 = 1260.503064k_c^2 + 28.352755k_c - 2110.04092$$

Resolviendo, queda:

$$k_{c1} = 1.2826$$

$$k_{c2} = -1.3051$$

Entonces, de aquí, $k_c > 1.2826$.

Igualmente,

$$c_1 = 950840.638k_c^3 + 1001032.818k_c^2 - 1663705.781k_c - 1532813.918$$

Al resolver, se obtiene:

$$k_{c1} = 1.2850$$

$$k_{c2} = -1.5034$$

$$k_{c3} = -0.8344$$

Esto es, se debe cumplir que: $k_c > 1.2850$.

En resumidas cuentas, con $\tau_I = 0.1$	$b_I > 0$	$k_c > 1.6545$
	$c_I > 0$	$k_c > 1.6847$
con $\tau_I = 1$	$b_I > 0$	$k_c > 1.2826$
	$c_I > 0$	$k_c > 1.2850$

Entonces, se concluye que, con $\tau_I = 0.1$, $k_c > 1.6847$, y, con $\tau_I = 1$, $k_c > 1.2850$.

Por sustitución directa:

Se parte del polinomio característico en lazo cerrado (ec. 49), donde, se sustituye s por $i\omega$, luego, se iguala a cero la parte real y la parte imaginaria, y se resuelven simultáneamente estas dos ecuaciones. Aquí, se encuentra dos soluciones; la primera:

$$w = 0, \quad k_c = 0$$

Para hallar la segunda solución, es necesario suponer un valor de τ_I . Con esto en mente, se ensayó $\tau_I = 0.1$ y $\tau_I = 1$:

- Ahora, con $\tau_I = 0.1$:

$$w = \pm 24.3379, \quad k_c = 1.6847, \quad T_u = 0.2582$$

Entonces, la respuesta es que la ganancia última es $k_{cu} = 1.6847$, la frecuencia última es: $w_u = \pm 24.3379$ rad/s y el periodo último es: $T_u = 0.2582$ s, cuando $\tau_I = 0.1$

- con $\tau_I = 1$

$$w_u = \pm 20.5979, \quad k_{cu} = 1.2850, \quad T_u = 0.3050$$

Igualmente, cuando $\tau_I = 1$ la ganancia última es 1.2850, la frecuencia última es ± 20.5979 rad/s, y el periodo último es 0.3050 s.

Gráfica del lugar geométrico de las raíces

La ecuación característica en lazo cerrado está dada por la ec. 48, que es lo mismo que:

$$1 + k_c \left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) \frac{(7.9999)(s + 6.56528426)(s + 12.1305685)}{(s + 2.9046)(s - (4.5448 + 15.1475i))(s - (4.5448 - 15.1475i))} = 0 \quad (50)$$

A diferencia del control P, en este modo de control aparece un polo ubicado en $s = 0$, y un cero ubicado en $z = -1/\tau_I$. En resumen, este sistema presenta cuatro polos y tres ceros. Por lo tanto, tiene 4 locus. Los polos están ubicados en $s_1 = 4.5448 + 15.1475i$, $s_2 = 4.5448 - 15.1475i$, $s_3 = -2.9046$, y $s_4 = 0$. Y los ceros en $z_1 = -6.56528426$, $z_2 = -12.1305685$, y $z_3 = -1/\tau_I$. Además, tiene una asíntota, y, el ángulo de la asíntota es de $\pm 180^\circ$.

Por supuesto, la presencia del polo ubicado en $s = 0$, acerca más el sistema hacia la inestabilidad, por lo tanto, el control PI es más inestable que el control P. Sin embargo, el control PI, tiene la ventaja de eliminar el *offset*.

En cuanto al cero ubicado en $z = -1/\tau_I$, lo que más conviene es alejar el sistema del límite de inestabilidad, es decir, lo más conveniente es tomar τ_I tan pequeño como sea posible.

Como se indicó, el sistema presenta cuatro lugares geométricos de las raíces, y, a medida que, k_c incrementa, viajan de la siguiente manera: el lugar geométrico de las raíces que arranca en $s = 0$ tiende hacia el cero ubicado en $-1/\tau_I$, igualmente, el lugar geométrico de las raíces que parte del polo ubicado en -2.9046 tiende hacia el cero ubicado en -6.56528426 , y, finalmente, los lugares geométricos de las raíces que parten del par imaginario conjugado complejo, llegan a un punto sobre el eje real, chocan y se bifurcan, luego, uno tiende hacia el cero ubicado en -12.1305685 y el otro tiende hacia $-\infty$ (Figura 19).

Al igual que en el caso anterior, la presencia del par imaginario conjugado complejo, hace que el sistema sea inestable para los valores de ganancia $k_c < k_{cu}$. Para valores de $k_c > k_{cu}$ el sistema es estable, aunque, en la región en la que aparecen raíces complejas el comportamiento es bastante oscilatorio.

Al igual que en el control P, la gráfica tiene forma circular. Además, los cálculos teóricos, así como, la gráfica del lugar geométrico de la raíces no muestran un límite máximo de estabilidad. Esto es, un valor de ganancia por encima del cual el sistema se hace inestable. Aparentemente, el sistema será estable para todo $k_c > k_{cu}$. La presencia de cuatro polos y tres ceros, así como, la ubicación de los ceros influyen en el hecho de que, la gráfica despliegue esta forma, y, no la acostumbrada a ver en los reactores químicos exotérmicos.

Ahora bien, como hay un cero ubicado en $z_1 = -1/\tau_I$, se debe suponer un valor de τ_I para realizar la gráfica. Entonces, con $\tau_I = 0.1$, y, con $\tau_I = 1$, se tiene que:

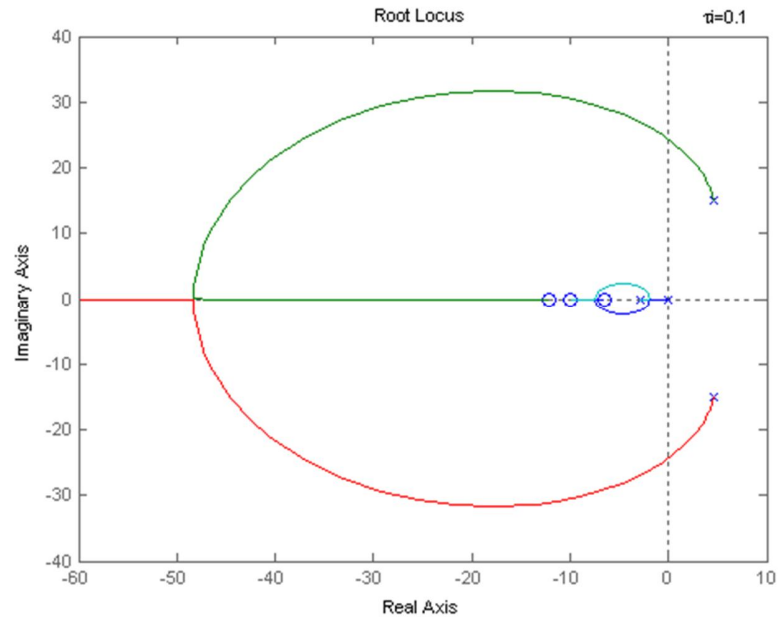
Tabla 3. Información para bosquejar la gráfica del lugar geométrico de las raíces con control PI para diferentes valores de τ_I

	$\tau_I = 0.1$	$\tau_I = 1$
Ceros	$z_1 = -10$ $z_2 = -6.56528426$ $z_3 = -12.1305685$	$z_1 = -1$ $z_2 = -6.56528426$ $z_3 = -12.1305685$
Polos	$p_1 = -2.9046$ $p_2 = 4.5448+15.1475i$ $p_3 = 4.5448-15.1475i$ $p_4 = 0$	$p_1 = -2.9046$ $p_2 = 4.5448+15.1475i$ $p_3 = 4.5448-15.1475i$ $p_4 = 0$
Centro de gravedad de la asíntota	$\gamma = 34.8808525$	$\gamma = 23.88085276$
Punto que cruza el eje imaginario	$w = \pm 24.3379i$, con $k_c = 1.6847$	$w = \pm 20.5979i$, con $k_c = 1.2850$

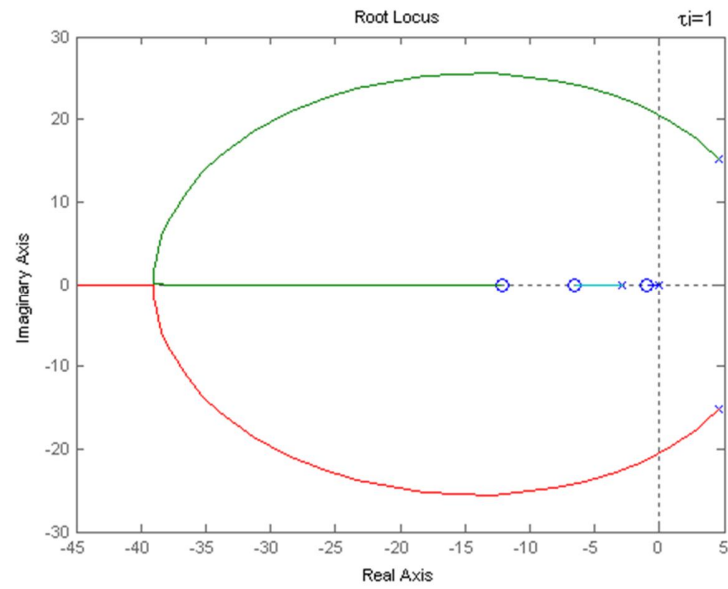
Fuente: Autor

El punto que cruza el eje imaginario se calculó por el método de sustitución directa, y, puede decirse que el valor de ganancia última con $\tau_I = 0.1$ es 1.6847, y, con $\tau_I = 1$ es 1.2850.

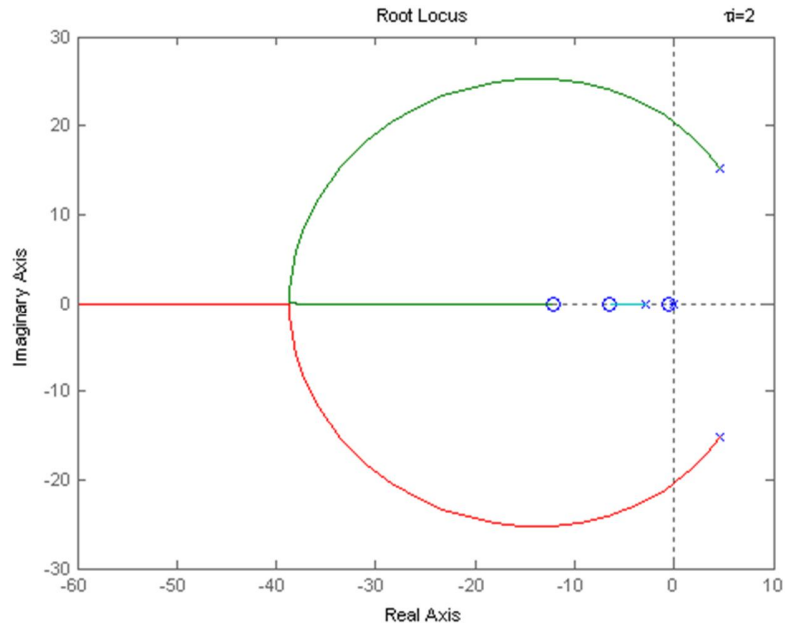
Figura 19. Gráficas de lugar geométrico de las raíces para diferentes valores de τ_I con control PI: (a) $\tau_I = 0.1$, (b) $\tau_I = 1$, (c) $\tau_I = 2$



(a)



(b)



(c)
Fuente: Autor

Finalmente, se presenta los valores de ganancia última encontrados para el control P, y, el control PI por dos técnicas diferentes (Tabla 4). Aquí, se observa que los resultados son exactamente iguales. En este sentido, se puede afirmar que el valor de ganancia última para el control P es $k_{cu} = 1.2363$, y, para el control PI depende del valor de τ_I , por ejemplo: cuando $\tau_I = 0.1$ es $k_{cu} = 1.6847$, y, con $\tau_I = 1$ es $k_{cu} = 1.2850$.

Tabla 4. Valores de ganancia última encontrados en control P y PI, por el arreglo de Routh y por el método de sustitución directa

	Arreglo de Routh	Sustitución directa
Control P	1.2363	1.2363 $w_u=20.21405605$ rad/s
Control PI, $\tau_I = 0.1$	1.6847	1.6847 $w_u=24.3379$ rad/s
Control PI, $\tau_I = 1$	1.2850	1.2850 $w_u=20.5979$ rad/s

Fuente: Autor

d) Análisis del problema: servo control y control regulador

Paralelamente, se hicieron pruebas con cambios en el *set-point* y cambios en la carga.

Servo control

En este caso se observa la respuesta para cambios en el *set-point* sin tener en cuenta las perturbaciones. En concreto, se ensayaron cambios de 10% alrededor del *set-point*. La configuración ensayada es:

$$\begin{aligned} \text{Para: } 0 < t \leq 20 & \quad x_{3set} = 4 \\ \text{Para: } 20 < t \leq 40 & \quad x_{3set} = 4.1 \\ \text{Para: } 40 < t \leq 60 & \quad x_{3set} = 4 \\ \text{Para: } t > 60 & \quad x_{3set} = 3.9 \end{aligned} \tag{51}$$

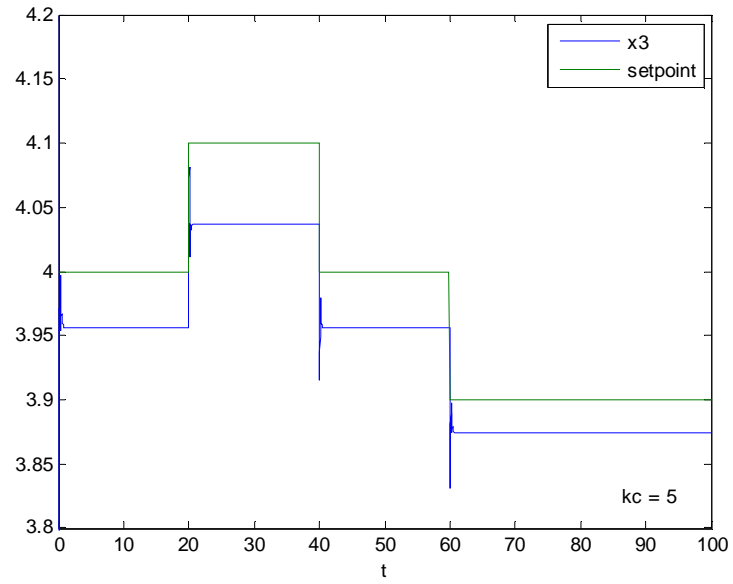
En el estudio se utilizaron los valores de ganancia proporcional de: $k_c = 3$ y $k_c = 5$.

Resultados:

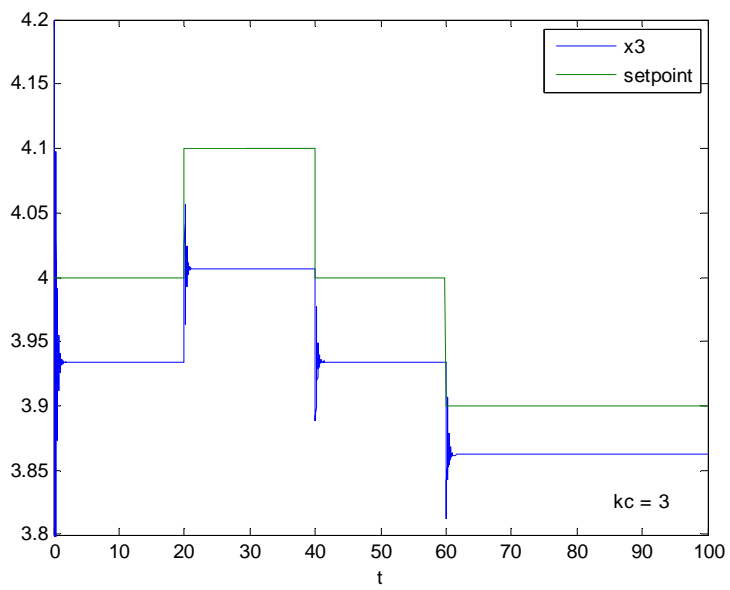
Control P

Respecto al control P, se observó que el comportamiento con $k_c = 3$ y con $k_c = 5$ es similar, sólo que con $k_c = 3$ la salida es más oscilatoria cuando se introduce el cambio en el *set-point*.

Figura 20. Cambios en el *set-point* en el sistema con control P, (a) $k_c = 5$, (b) $k_c = 3$



(a)



(b)

Fuente: Autor

Aquí, se encontró que el sistema es sensible a cambios en el *set-point*. En concreto, se observa que la salida sigue los cambios introducidos en el *set-point* (Figura 20). Además, siempre está presente un *offset*, que es, característico del controlador P, y, que se hace más pronunciado, a medida que, la ganancia disminuye (ver Tabla 5). También, se observa que, el *offset* aumenta, a medida que, el valor del *set-point* aumenta.

Tabla 5. Valores de *offset* encontrados con diferentes valores de *set point* para $k_c=3$ y $k_c=5$, con control P

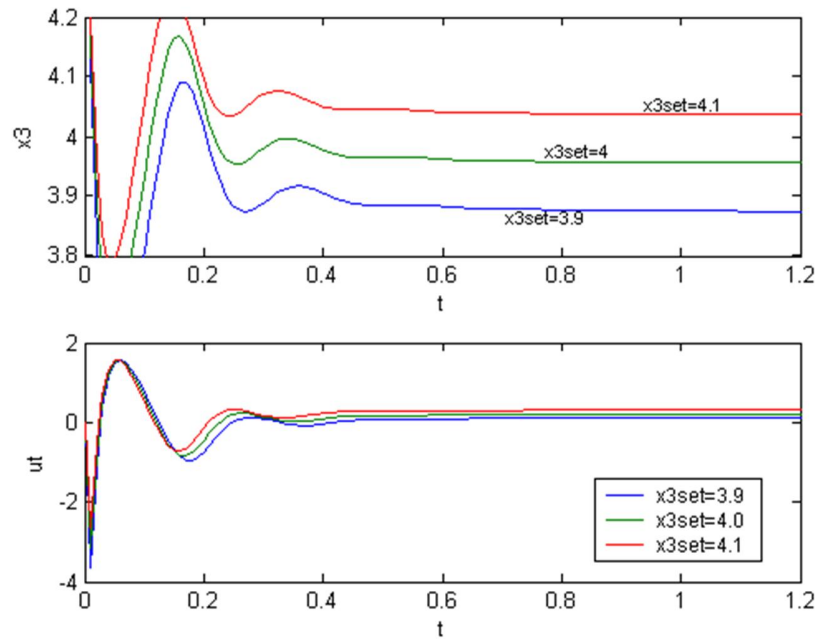
<i>Set point</i>	<i>Offset</i> con $k_c=5$	<i>Offset</i> con $k_c=3$
4.1	0.0631	0.0935
4.0	0.0443	0.0657
3.9	0.0256	0.0379

Fuente: Autor

Sin embargo, cabe señalar que, cuando se introduce el cambio en el *set-point*, la salida sufre un cambio rápido y brusco, que puede ocasionar daños en el sistema, por ejemplo: daños en el reactor, porque, de pronto, es imposible tener el flujo de agua de enfriamiento que se necesite. La salida es más oscilatoria cuando el valor de la ganancia disminuye.

Seguidamente, se observó la respuesta para diferentes valores de *set-point*, manteniendo fijo el valor del *set-point* en todo el intervalo de integración, con $k_c = 5$ (Figura 21). En concreto, se hicieron corridas con $x_{3set} = 3.9$, $x_{3set} = 4.0$, $x_{3set} = 4.1$, y, se observó que controla el sistema, pero, siempre está presente un *offset*.

Figura 21. Control P para diferentes valores de *set point*, $k_c=5$



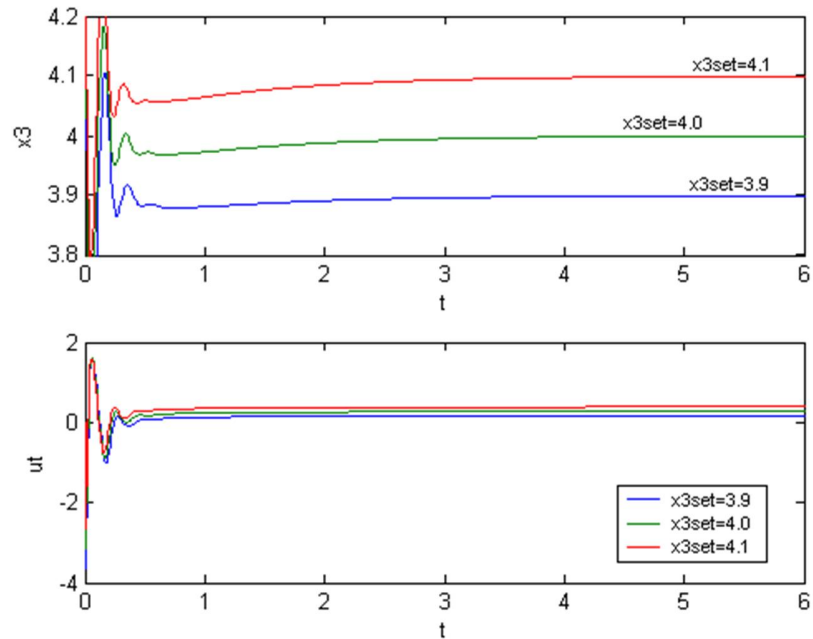
Fuente: Autor

CONTROL PI

Conviene advertir que, en el estudio se utilizó $\tau_I = 1$, con $k_c = 3$ y $k_c = 5$.

Se hizo el mismo análisis que en el control P. Esto es, primero se dejó un *set-point* fijo, durante todo el intervalo de integración, y, luego, se permitió que el *set-point* variara a través del tiempo. Se observó que la salida alcanza el *set-point* en todos los casos ensayados ($x_{3set} = 3.9$, $x_{3set} = 4$, $x_{3set} = 4.1$) (Figura 22). Es decir, la acción integral eliminó el *offset*, pero, el comportamiento es más oscilatorio, y, tarda más en alcanzar el control, respecto al control P.

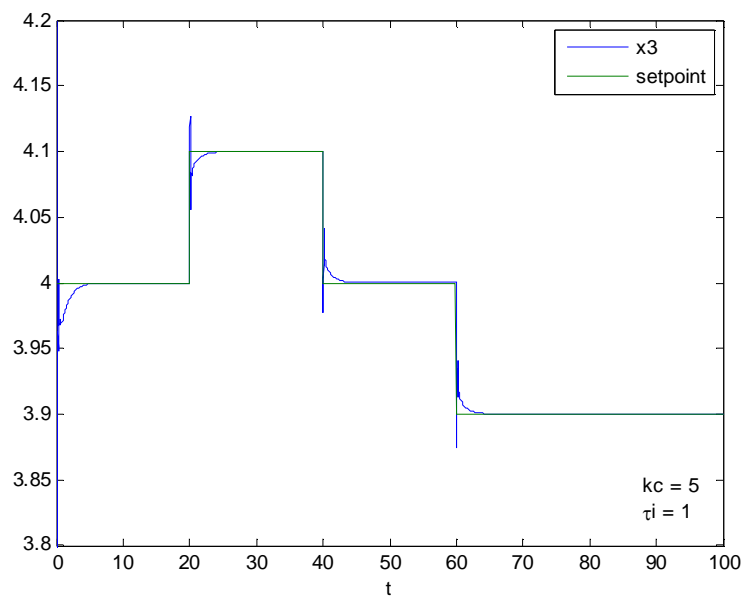
Figura 22. Control PI, $k_c=5$, $\tau_i=1$, para diferentes valores de *set point*



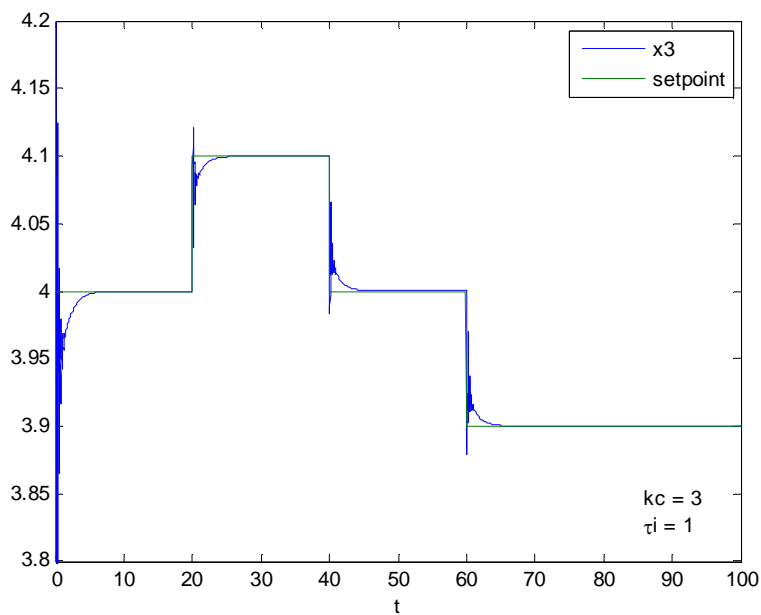
Fuente: Autor

Igualmente, cuando se introducen los cambios en el *set-point* a través del tiempo, la salida es mucho más oscilatoria que en el control P. Esto es, sufre cambios rápidos y bruscos, mucho más, que en el control P, tanto en la variable controlada como en la variable manipulada. Sin embargo, la salida sigue los cambios en el *set-point* y elimina el *offset* (Figura 23). El comportamiento con $k_c = 3$, $\tau_i = 1$ es similar a con $k_c = 5$, $\tau_i = 1$, sólo, que con $k_c = 3$ la salida es más oscilatoria y tarda más en alcanzar el control. En concreto, con $k_c = 5$ alcanza el *setpoint* en $t = 5$ s, mientras que, con $k_c = 3$ ocurre a los 6 s.

Figura 23. Control PI, el *set point* varía a través del tiempo, (a) $k_c = 5$, $\tau_i = 1$, (b) $k_c = 3$, $\tau_i = 1$



(a)



(b)

Fuente: Autor

Control regulador

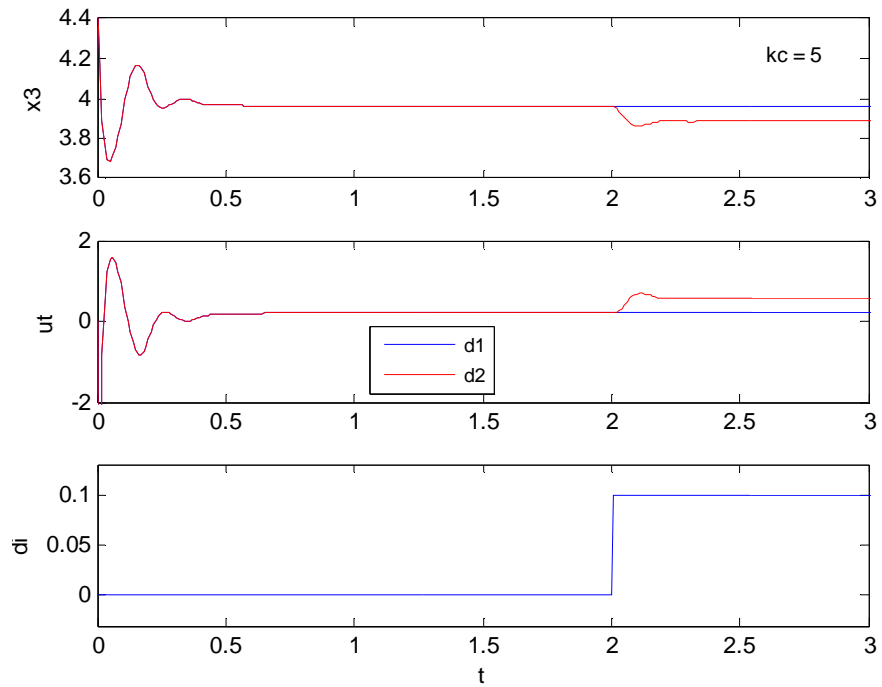
En este caso, se deja el *set point* fijo y se tiene en cuenta cambios en las perturbaciones. Aquí, se hizo el análisis para dos casos: primero, se introdujo un cambio tipo escalón de $\pm 10\%$ en la perturbación para todo $t > 2$. En segundo lugar, se permitió que la perturbación variara a través del tiempo. Es decir, que d_1 toma valores de $\pm 10\%$, $\pm 50\%$, $\pm 80\%$ en un rango de $1.2 < t < 3.0$ unidades de tiempo adimensional. Cabe señalar que, se dejó $x_{3set} = 4$, y la ganancia se dejó fija en $k_c = 5$.

Resultados:

CONTROL P

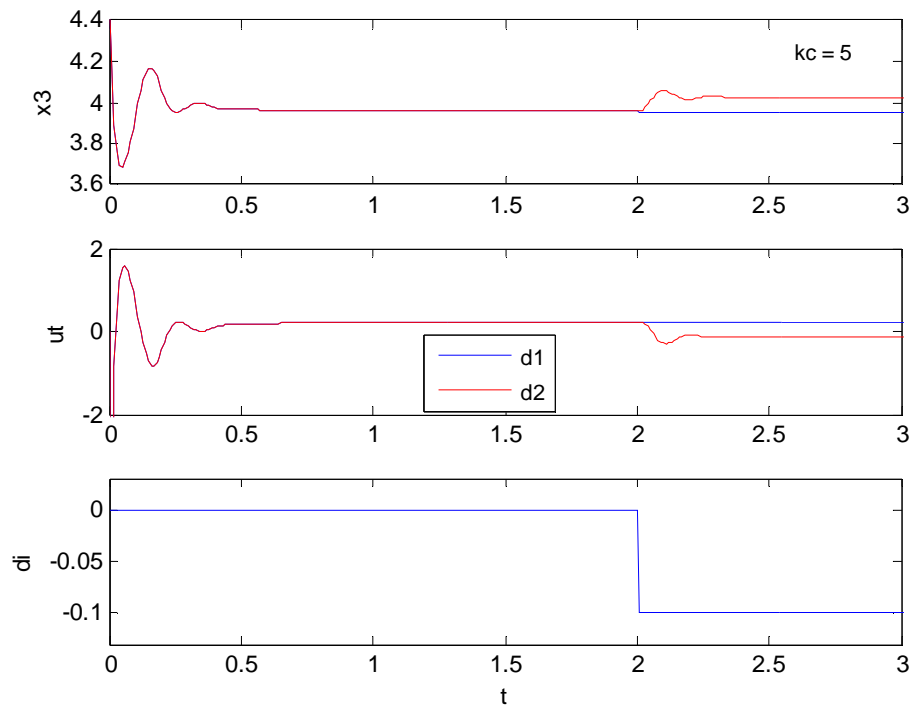
Respecto al primer caso, se observa que al introducir cambios en d_1 , el comportamiento no se ve afectado (línea azul en Figura 24). Esto es, el control P es robusto frente a cambios en la perturbación d_1 . Ahora, referente a d_2 , ésta es la perturbación que tiene el efecto más severo sobre el sistema, y lo afecta aún más, cuando el cambio es negativo (línea roja en Figuras 24 y 25).

Figura 24. Control P, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación de +0.1 para todo $t > 2$



Fuente: Autor

Figura 25. Control P, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación de -0.1 para $t > 2$.



Fuente: Autor

Además, siempre está presente un *offset*, debido que se está utilizando el control P, pero, no es muy grande. En la Tabla 6 se observa el error en estado estacionario para el control P cuando se introduce un cambio tipo escalón de $\pm 10\%$ en las perturbaciones, para $t > 2$. Aquí, $k_c = 5$.

Tabla 6. Error en estado estacionario para el control P con $k_c = 5$, control regulador cuando se introduce un cambio tipo escalón de $\pm 10\%$ para $t > 2$.

Perturbación	Offset
(sin perturbaciones) $d_1 = d_2 = 0$	0.0443
$d_1 = 0.1$ para $t > 2$	0.0423
$d_2 = 0.1$ para $t > 2$	0.1131
$d_1 = -0.1$ para $t > 2$	0.0463
$d_2 = -0.1$ para $t > 2$	-0.0243

Fuente: Autor

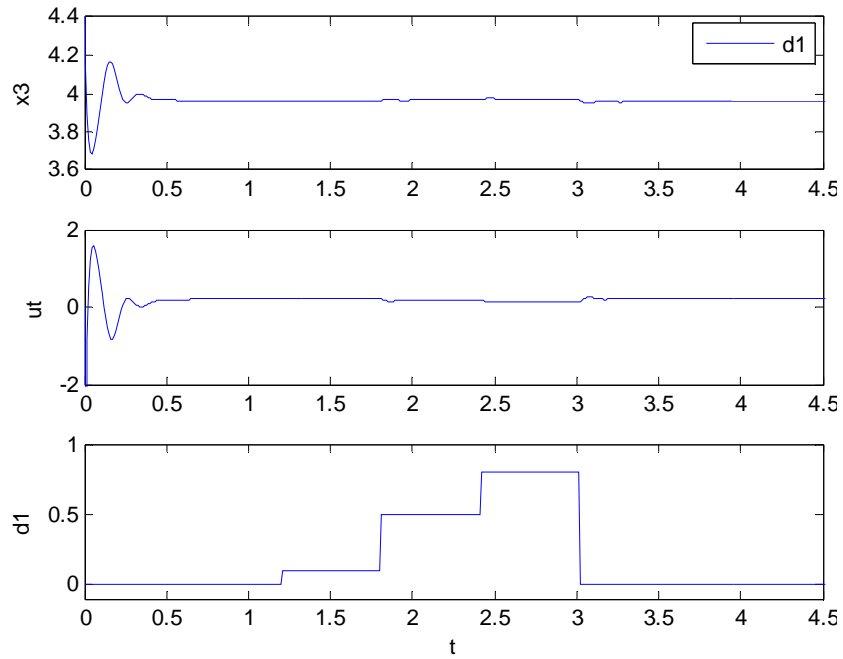
En otras palabras, aunque toda perturbación tiende a alejar el sistema del *set-point*, el control es mejor cuando está presente d_1 .

Ahora, cuando la perturbación varía a través del tiempo, se realizaron los siguientes cambios:

Para $t \leq 1.2$, $d_1 = 0$
 Para $1.2 < t \leq 1.8$, $d_1 = +0.1$
 Para $1.8 < t \leq 2.4$, $d_1 = +0.5$
 Para $2.4 < t \leq 3.0$, $d_1 = +0.8$
 Para $t > 3.0$ $d_1 = 0$

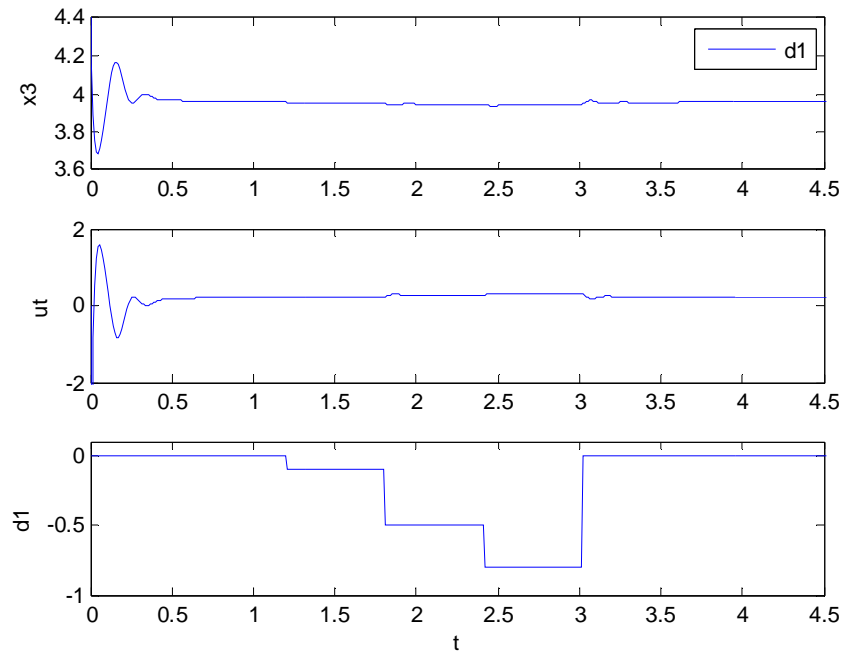
Primero, cuando los cambios son positivos y luego cuando son negativos. A continuación, se presentan los resultados.

Figura 26. Control P cuando la perturbación varía a través del tiempo y toma valores positivos. $d_1 = +0.1, +0.5, +0.8, d_2 = 0; k_c = 5$



Fuente: Autor

Figura 27. Control P cuando la perturbación varía a través del tiempo y toma cambios negativos. $d_1 = -0.1, -0.5, -0.8, d_2 = 0; k_c = 5$



Fuente: Autor

Se observa que el sistema no se ve afectado por introducir cambios en la perturbación d_1 (Figuras 26 y 27).

En resumen, el control no se ve afectado cuando está presente d_1 . Ahora, d_2 es la perturbación que tiene el efecto más severo sobre el sistema especialmente, si el cambio es negativo.

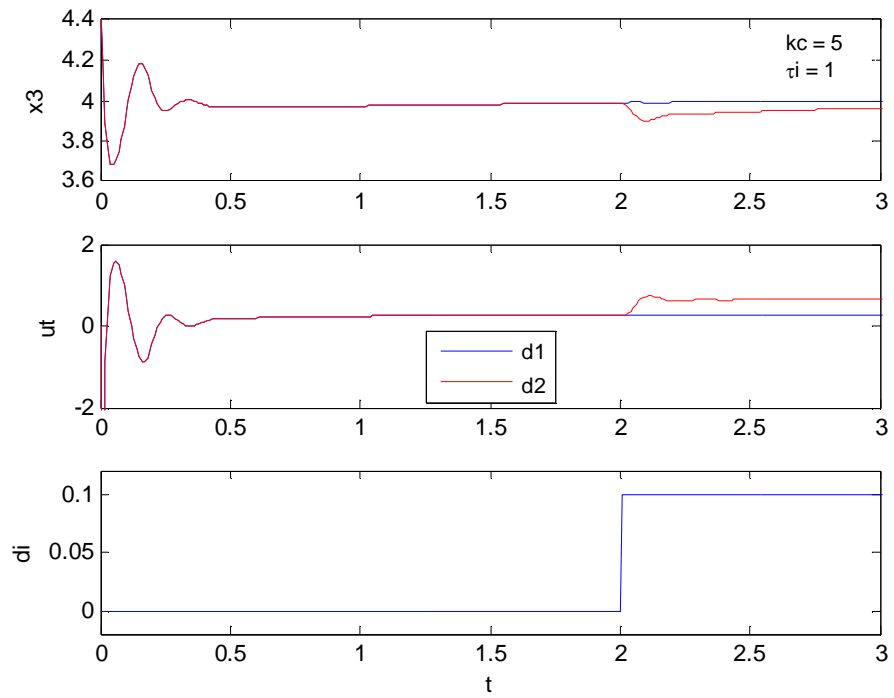
CONTROL PI

Se hizo el mismo análisis para el control PI. Dónde, se utilizó $k_c = 5$, $\tau_1 = 1$, y el *set-point* se dejó fijo en $x_{3set} = 4$.

Aquí, se observa un comportamiento similar al del control P. Dado que, cuando se introduce un cambio tipo escalón de $\pm 10\%$ en la perturbación d_1 , la salida no se ve afectada. Con d_2 el cambio es un poco más pronunciado, haciéndose más fuerte cuando el cambio es negativo (Figuras 28 y 29).

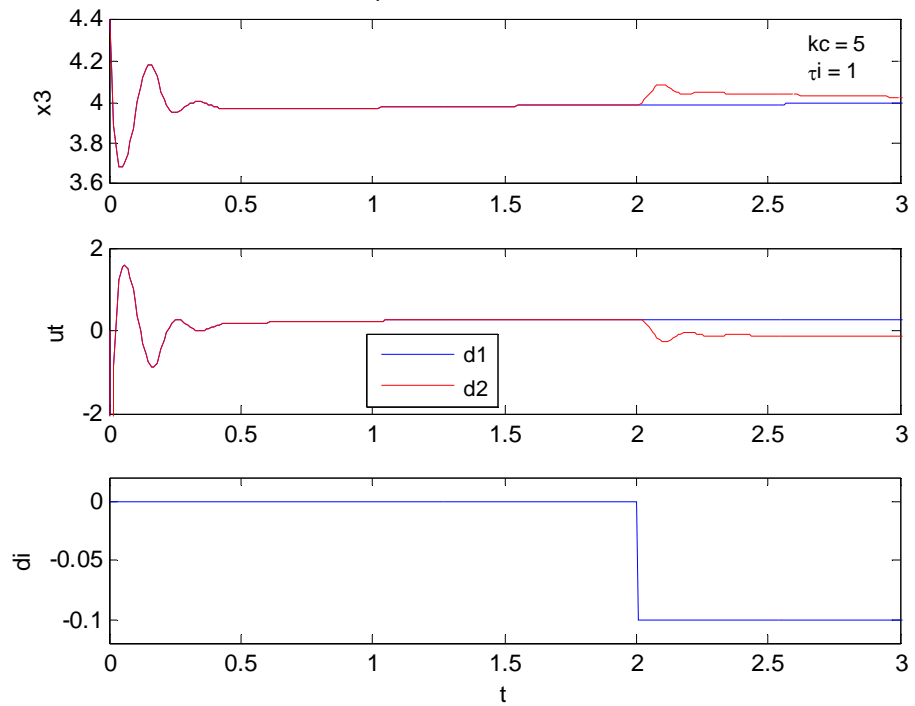
Ahora, cuando la perturbación cambia a través del tiempo se observa que el comportamiento no cambia al introducir cambios en d_1 . Además, el control elimina el *offset* y controla el sistema (Figuras 30 y 31).

Figura 28. Control PI, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón de +0.1 en la perturbación para todo $t > 2$



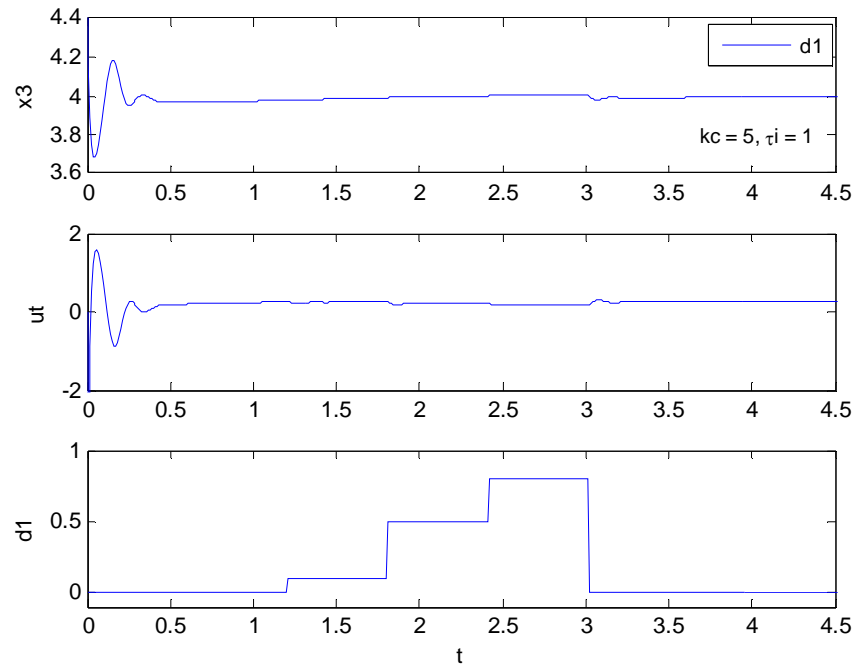
Fuente: Autor

Figura 29. Control PI, control regulador, cuando se introduce un cambio tipo escalón de -0.1 en la perturbación para todo $t > 2$.



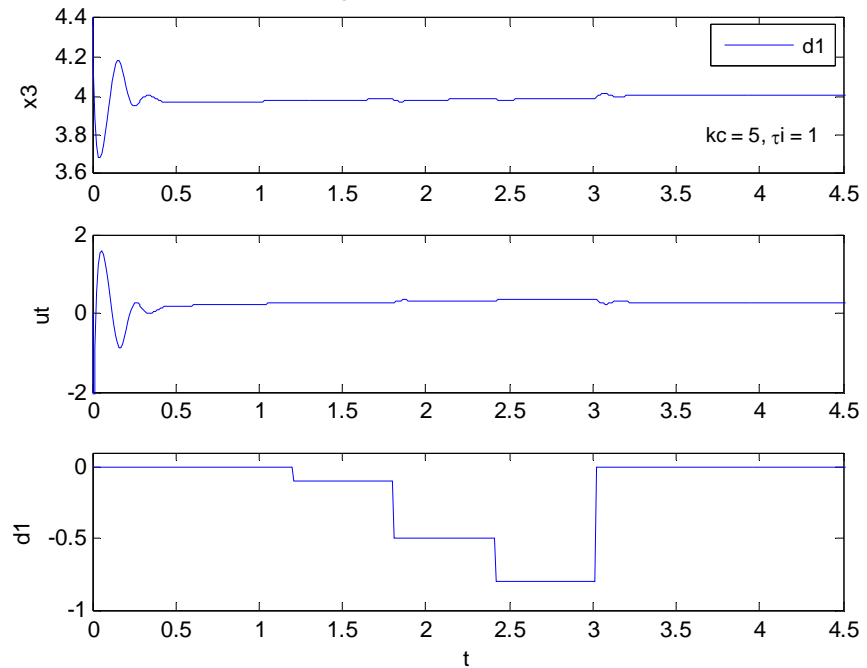
Fuente: Autor

Figura 30. Control PI con cambios positivos en las perturbaciones. $d_1 = +0.1, +0.5, +0.8, d_2 = 0$



Fuente: Autor

Figura 31. Control PI con cambios negativos en las perturbaciones. $d_1 = -0.1, -0.5, -0.8, d_2 = 0$



Fuente: Autor

En conclusión el control es robusto frente a la perturbación d_1 , mientras que, d_2 tiene el efecto más severo sobre el sistema, siendo, más considerable cuando el cambio es negativo.

En resumen, podría decirse que:

- ☉ Por la prueba de los coeficientes se encontró que el sistema es inestable en lazo abierto, ya que, no todos los coeficientes del polinomio característico son definidos positivos. Esto es, hay polos en el lado derecho del plano S .
- ☉ Como es sabido, un cero ayuda a estabilizar el sistema. Sin embargo, esto no es suficiente en este caso. Puesto que, aunque, el sistema en lazo abierto contiene dos ceros en el lado izquierdo del plano S , el sistema es inestable en lazo abierto.
- ☉ El control *feedback* controla el sistema tanto en el modo proporcional como en el modo proporcional-integral.
- ☉ Se observa que el control *feedback* es robusto frente a cambios en las perturbaciones, y, sigue los cambios en el *setpoint*, lo que indica un buen funcionamiento del controlador.
- ☉ El control P controla el sistema aunque está presente un *offset*.
- ☉ El control PI elimina el *offset*, sin embargo, la salida es más oscilatoria, y, tarda más en alcanzar el control.
- ☉ El control PI es más inestable que el control P.

En concreto, referente al control P:

- Respecto a, el control P, el resultado obtenido de las gráficas de lugar geométrico de las raíces está de acuerdo con el obtenido por el arreglo de Routh, y, el método de sustitución directa. Esto es, el valor de ganancia última es $k_{cu} = 1.2363$. Del mismo modo, estos valores están de acuerdo con los obtenidos en la simulación en el dominio en el tiempo. Esto es, con $k_c = 1$ el sistema es altamente inestable, porque, este valor es menor que k_{cu} .
- En $k_c = 3$ y $k_c = 5$ el comportamiento es muy oscilatorio, puesto que, estos valores de k_c están en la región en que se encuentran raíces complejas. Sin embargo, cabe señalar que, en este caso la respuesta del controlador es muy brusca para ser implementada en la práctica, ya que, se puede dañar el reactor, o, puede ser imposible, por ejemplo, tener el flujo de agua de enfriamiento que se necesite.
- Las raíces que se encuentran cercanas al eje imaginario son quienes dominan la respuesta dinámica. Pues bien, en este caso, corresponde a, los polos conjugados complejos que se encuentran en el lado derecho del plano S . El hecho que, estas raíces sean conjugadas complejas hacen que el comportamiento del sistema sea oscilatorio.
- La presencia de dos ceros y tres polos, hace que la gráfica del lugar geométrico de las raíces presente una forma circular, y, no la acostumbrada a ver en los reactores químicos exotérmicos. Como consecuencia, este sistema presenta sólo un límite de ganancia condicional: k_{min} . Es decir, aparentemente no hay un límite máximo de ganancia por encima del cual el sistema se hace inestable.

- ☉ Según las pruebas de estabilidad teóricas utilizadas (arreglo de Routh, método de sustitución directa, y, gráfica del lugar geométrico de las raíces) el sistema será estable para todo $k_c > k_{cu}$. Donde, en el caso del control P, $k_{cu}=1.2363$, y, en el caso del control PI con $\tau_1 = 0.1$, $k_{cu}=1.6847$, y, con $\tau_1 = 1$, $k_{cu}=1.2850$. Sin embargo, de las simulaciones realizadas, se observó que hay un valor de ganancia por encima del cual el comportamiento desmejora bastante, porque, la salida no es subamortiguada y sufre cambios rápidos y bruscos que se hacen más pronunciados y frecuentes, a medida que, el valor de la ganancia aumenta. En lo que concierne, al control P, este valor es de $k_c \geq 11$, además, con $k_c \geq 27.58$ el sistema se hace inestable.

Referente al servo control:

- ☉ El control P es sensible a cambios en el *set point*. Esto es, sigue los cambios introducidos en el *set-point*, aunque, siempre está presente un *offset*.

Control regulador:

- ☉ El control P es robusto frente a la perturbación d_1 , es decir, evita fluctuaciones en la variable controlada al estar presente la perturbación d_1 .
- ☉ La perturbación d_2 tiene el efecto más severo sobre el sistema, especialmente, si el cambio es negativo.
- ☉ Aunque, cualquier perturbación tiende a alejar el sistema del *set-point*, hay variaciones, al respecto, dependiendo de si el cambio es positivo o negativo. En concreto, cuando los cambios son positivos, d_2 es la que más aleja al sistema del *set point*.

Respecto al control PI:

- Es más conveniente la configuración $\tau_I = 1$ a la de $\tau_I = 2$, puesto que, causa que el cero esté más lejos del eje imaginario. Como es sabido, conviene aquella configuración que aleje al sistema del lado derecho del plano S .

Con referencia al servo control y control regulador:

- A diferencia del control P, en el control PI si se logra alcanzar el valor del *set point*. Aunque, tarda más tiempo en estabilizarse y es mucho más oscilatoria la respuesta.
- El control PI sigue los cambios introducidos en el *set-point*.
- No se aprecia un cambio en el comportamiento al introducir cambios en la perturbación d_1 .
- Cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación de $\pm 10\%$ en d_2 el efecto en la salida es más severo.

5.4 CONTROL *FEEDFORWARD*

Diseño del control *feedforward*

- Objetivo del control: Control de x_3 con u_t** (donde $u_t = x_{3c}$): Control de la temperatura del reactor (x_3) manipulando la temperatura de la chaqueta de enfriamiento (u_t).

Conviene advertir que, en la práctica no se acostumbra manipular la temperatura de la chaqueta de enfriamiento, sino, el flujo de la chaqueta de enfriamiento, porque es difícil hacer cambios rápidos en la temperatura de la chaqueta de enfriamiento. Cabe señalar que, aquí no se manipuló el flujo de la chaqueta de enfriamiento porque es necesario incluir una ecuación algebraica que relacione la temperatura de la chaqueta con el flujo de la chaqueta; y, en este trabajo se prefirió no alterar la dinámica, es decir, no alterar el sistema de ecuaciones, sino, utilizarlo tal como se conoce, muestra un comportamiento caótico, para controlarlo allí, en la zona de comportamiento complejo.

- 2) **Posibles perturbaciones medibles:** Se asume que la única perturbación de interés es d_1 , y que, d_2 no está presente ($d_2 = 0$).
- 3) **Diseño del controlador *feedforward* en estado estacionario**

Se parte del modelo matemático (ec. 21)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - d_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{k x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - u_t) + d_1 \end{aligned} \quad (21)$$

Como se desea controlar x_3 (temperatura del reactor) manipulando u_t (la temperatura de la chaqueta de enfriamiento), se utiliza la ecuación de energía (tercera ecuación de ec. 21). Esto es, se resuelve en estado estacionario, y, luego, la variable a controlar, se hace igual al valor del *set-point* ($x_3 = x_{3set}$).

$$0 = -x_{3set} + D_a B \bar{x}_1 \exp\left(\frac{x_{3set}}{1 + \varepsilon x_{3set}}\right) - D_a B \alpha S \bar{x}_2 \exp\left(\frac{kx_{3set}}{1 + \varepsilon x_{3set}}\right) - \beta(x_{3set} - u_t) + d_1 \quad (52)$$

Ahora, Se despeja u_t ; la variable manipulada; y se reemplazan los valores de los parámetros: $\varepsilon = 0$, y, $k = 1$:

$$u_t = \frac{x_{3set}(1 + \beta) + (\alpha S \bar{x}_2 - \bar{x}_1) D_a B \exp(x_{3set}) - d_1}{\beta} \quad (53)$$

Esta última es la ecuación de diseño del controlador *feedforward* en estado estacionario. Muestra cómo debe cambiar u_t para mantener la variable controlada en su *set-point*, cuando está presente un cambio en d_1 .

Ahora, al reemplazar por los valores de las variables en estado estacionario y los valores de los parámetros listados en las páginas 54 y 45, se llega a:

$$u_t = 1.125001563 x_{3set} - 0.09829365 \exp(x_{3set}) - 0.125001562 d_1 \quad (54)$$

Ecuación de diseño del controlador feedforward en estado estacionario.

El controlador *feedforward* en estado estacionario es la manera preferida de implementar el control *feedforward*. Sin embargo, aquí, no funcionó, ya que, presenta problemas numéricos. En concreto, se utilizó un *set point* fijo de $x_{3set} = 4$, y se consideró un cambio tipo escalón de +10%, en d_1 , pero, no dio buenos resultados, porque, presenta problemas de convergencia. Con esto en mente, se ensayó el controlador *feedforward* dinámico.

4) Diseño del controlador *feedforward* dinámico

Para diseñar el controlador *feedforward* dinámico se utilizó la fórmula general que utiliza las funciones de transferencia (ec. 9). Entonces, se parte del modelo matemático (ec. 21), se linealiza, luego, se lleva a términos de variables de desviación (ec. 22), seguidamente, se calcula la transformada de Laplace (ec. 27), y se hallan las funciones de transferencia (ec. 28 - 29).

Ahora bien, como se desea controlar x_3 con u_t , se elige la tercera ecuación de la ecuación (28) que está dada por:

$$x_3^p(s) = G_{31(s)}d_2^p(s) + G_{32(s)}u_t^p(s) + G_{33(s)}d_1^p(s) \quad (55)$$

Donde los $G_{ij,s}$ están dados por la ecuación (29).

Ahora, como se está suponiendo que la perturbación de interés es d_1 , mientras que d_2 no está presente, de (55) queda:

$$x_3^p(s) = G_{32(s)}u_t^p(s) + G_{33(s)}d_1^p(s) \quad (56)$$

Se despeja la variable manipulada:

$$u_t^p(s) = \frac{x_3^p(s) - G_{33(s)}d_1^p(s)}{G_{32(s)}}$$

Pero, como aquí la variable controlada no se mide y se realimenta, porque no hay *feedback*, entonces, se reemplaza la variable controlada por la referencia o valor deseado ($x_{3set}^p(s)$):

(57)

$$u_t^p(s) = \frac{x_{3set}^p(s) - G_{33(s)}d_1^p(s)}{G_{32(s)}}$$

Ecuación general de control feedforward dinámico.

Donde d_1 es medido, el *set-point* se proporciona, y, G_{33} y G_{32} están dados por la ecuación (29).

La ecuación (57) se puede escribir como:

$$u_t^p(s) = F_1 x_{3set}^p(s) + F_2 d_1^p(s) \quad (58)$$

$$\text{Donde: } F_1 = \frac{1}{G_{32(s)}} \quad (59)$$

$$F_2 = -\frac{G_{33(s)}}{G_{32(s)}} \quad (60)$$

F_1 y F_2 son los controladores *feedforward*.

Reemplazando los $G_{ij,s}$ (ec. 29) en (59) y (60), se obtiene:

$$F_1 = \frac{I}{a_{34}(s - a_{22})(s - a_{11})} \quad (61)$$

$$F_2 = -\frac{a_{35}}{a_{34}} \quad (62)$$

Dónde I está dado por la ecuación (30), y, como se indicó en el capítulo anterior, es un polinomio de tercer orden.

Se observa que el controlador que acompaña el set-point (F_1) no es físicamente realizable, dado que, el orden de S es mayor en el numerador que en el denominador. Pero, si se quisiera implementar éste controlador, se puede utilizar, en su lugar, aproximaciones que dan muy buenos resultados, por ejemplo: un elemento adelanto-atraso, o, un atraso de segundo orden. De otro lado, se observa que el controlador que acompaña a d_1 , (F_2), es un elemento de ganancia sin dinámica.

Aquí, se va a considerar solamente como debe moverse la variable manipulada cuando se introducen cambios en la perturbación. Es decir, no se va a tener en cuenta F_1 ; los cambios en el *set-point*, porque, se supone que los cambios en el *set-point* son menos frecuentes.

Entonces de (58):

$$u_t^p(s) = F_2 d_1^p(s) \quad (63)$$

Es decir:

$$F_2 = \frac{u_t^p(s)}{d_1^p(s)} \quad (64)$$

Dónde, F_2 está dado por ec. (62), y, al reemplazar por los $a_{ij,s}$ (ec.26) se llega a:

$$F_2 = k_1 \quad (65)$$

Donde: $k_1 = - 0.125001562$

Entonces, (63) se puede escribir como:

$$u_i^p(s) = k_1 d_1^p(s) \quad (66)$$

Donde, $k_1 = -0.125001562$.

Pasando al dominio del tiempo dónde se asume un cambio tipo escalón de +10% en d_1 :

$$u_i^p(s) = \frac{k_1(0.1)}{s} \quad (67)$$

Por transformada inversa de Laplace:

$$u_i^p(t) = 0.1(k_1) \quad (68)$$

En variables totales, dónde se asume que el valor en estado estacionario de la variable de perturbación d_1 es cero ($\bar{d}_1 = 0$):

$$u_i(t) - \bar{u}_i = 0.1(k_1)$$

$$u_i(t) = \bar{u}_i + 0.1(k_1) \quad (69)$$

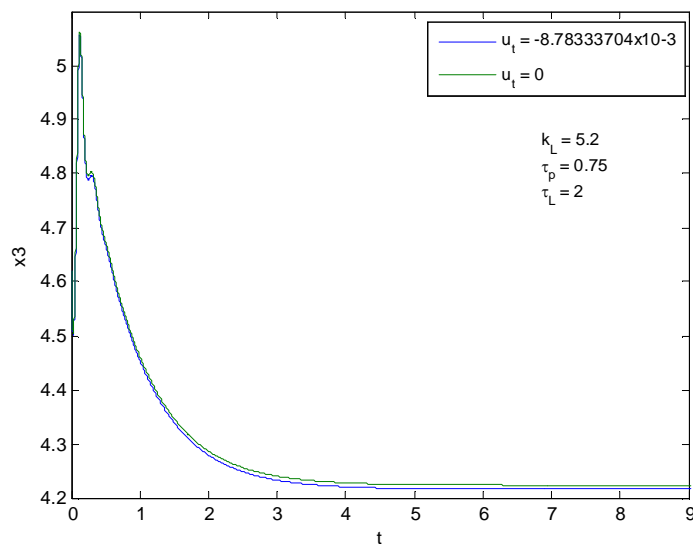
Donde, \bar{u}_i es el valor en estado estacionario de la variable manipulada.

Con el objeto de, encontrar el valor en estado estacionario de la variable manipulada (\bar{u}_i) se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales (17) en estado estacionario con las suposiciones hechas en la página 53, dónde se obtienen los valores de \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 , también se obtiene $\bar{u}_i = -8.78333704 \times 10^{-3}$. Ahora bien, se observa que este valor es muy pequeño, y, al realizar las simulaciones con $\bar{u}_i = -8.78333704 \times 10^{-3}$ y $\bar{u}_i = 0$, se observa que no hay una diferencia apreciable en la

respuesta del sistema (Figura 32). Con esto en mente, se va a aproximar $\bar{u}_t = 0$, sin perder generalidad en el carácter de la solución.

En la Figura 32 se implementó el control *feedforward* dinámico en la forma de un elemento adelanto-atraso (ec.70) asumiendo que se introduce un cambio tipo escalón de +0.1 en la perturbación d_1 a partir de $t > 0$.

Figura 32. Control feedforward dinámico cuando se introduce un cambio tipo escalón de +10% en d_1 para $t \geq 0$, con diferentes valores de \bar{u}_t



Fuente: Autor

Sintonización del controlador *feedforward* dinámico

Primero que todo se realizó la simulación del controlador *feedforward* dinámico utilizando la ley de control definida en la ecuación (69): $u_t(t) = \bar{u}_t + 0.1(k_1)$, donde $\bar{u}_t = 0$, y $k_1 = -0.125001562$, y se encontró que no controla el sistema. Entonces,

dado que, en este caso el controlador F_2 tiene la forma de un elemento de ganancia, se optó por ensayar otras aproximaciones diferentes.

En este sentido; siguiendo a Mejía, Villareal [52]; se ensayó una aproximación adelanto-atraso, un atraso de primer orden, un atraso de segundo orden, y un elemento que consiste de un cero positivo y dos atrasos, dónde, los parámetros del controlador como ganancias y constantes de tiempo se ajustaron por prueba y error. Ahora bien, los mejores resultados se encontraron con el elemento adelanto-atraso.

Aproximación elemento adelanto-atraso para el controlador F_2 :

Se asumió una aproximación de la forma:

$$F_2 = \frac{k_L(\tau_L s + 1)}{(\tau_p s + 1)} = \frac{u_i^p(s)}{d_1^p(s)} \quad (70)$$

$$u_i^p(s) = \frac{k_L(\tau_L s + 1)}{(\tau_p s + 1)} d_1^p(s) \quad (71)$$

Dónde τ_L y τ_p son las constantes de tiempo del adelanto y del atraso respectivamente, y, k_L es la ganancia.

Suponiendo un cambio tipo escalón de +10% en d_I :

$$d_1^p(s) = \frac{0.1}{s} \quad (72)$$

Reemplazando (72) en (71):

$$u_i^p(s) = \frac{k_L(\tau_L s + 1) 0.1}{(\tau_p s + 1) s} \quad (73)$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$u_i^p(s) = \frac{0.1}{s} k_L - \frac{0.1 k_L \left(-\frac{\tau_L}{\tau_p} + 1 \right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_p} \right)} \quad (74)$$

Llevando al dominio en el tiempo:

$$u_i^p(t) = 0.1 k_L \left[1 + \left(\frac{\tau_L}{\tau_p} - 1 \right) e^{-t/\tau_p} \right] \quad (75)$$

En variables totales, con $\bar{d}_1 = 0$:

$$u_i(t) = \bar{u}_i + 0.1 k_L \left[1 + \left(\frac{\tau_L}{\tau_p} - 1 \right) e^{-t/\tau_p} \right] \quad (76)$$

Dónde, $\bar{u}_i = 0$, y, k_L , τ_L , τ_p son parámetros ajustables. Por cierto, se ajustaron estos parámetros por prueba y error siguiendo a Smith y Corripio [81], Seborg, Edgar, Mellichamp [74], y Shinsky [80]. En concreto, se sintonizó la razón: τ_L/τ_p .

Se comenzó con $k_L = k_I = -0.125001562^9$. Luego, se ajustó la ganancia, dejando los valores de τ_L y τ_p a sus valores mínimos, por ejemplo: cero¹⁰. Seguidamente, se dejó la ganancia fija, se dejó τ_p fijo, en $\tau_p = 1$, y se ensayaron los valores de $\tau_L = 2.0, 1.4, 1.2, 0.8$. Posteriormente, se dejó τ_L fijo, en $\tau_L = 2$, y se ensayaron los

⁹ El valor de la ganancia en estado estacionario encontrado en la ec. (65).

¹⁰ Aunque, no exactamente cero, porque la división sobre cero no está definida.

valores de $\tau_p = 0.5, 0.75, 1.5$. Más adelante, con los valores apropiados encontrados de τ_L y τ_p se procuró eliminar el *offset* ajustando k_L , y finalmente, se redujo la distancia entre τ_L y τ_p aumentando o disminuyendo el valor de estos parámetros.

Se hizo la simulación para dos casos: primero asumiendo que la perturbación d_I se introduce para el tiempo $t \geq 5$, dónde, la perturbación sufre un cambio tipo escalón de +10%, es decir:

Para $0 < t < 5$ $d_I = 0.0$

Para $t \geq 5$ $d_I = 0.1$

Y, luego, asumiendo que la perturbación sufre un cambio tipo escalón de 10% para todo tiempo $t \geq 0$, es decir:

Para $t \geq 0$, $d_I = 0.1$

A este propósito se escribió un programa en Fortran que utiliza el método de RKG de cuarto orden con tamaño de paso fijo de $h = 1 \times 10^{-3}$, con los valores de los parámetros y la condición inicial mencionados en el capítulo 5.3 (página 45). Como lenguaje de programación se utilizó Visual Fortran 6.1, y las gráficas se realizaron en Matlab 6.5. Las características del equipo se reportan en la página 45.

Para encontrar el conjunto de parámetros que proporcionen la mejor respuesta se trató de encontrar el equilibrio entre la respuesta no sea oscilatoria, presente el menor sobrepaso y el tiempo de estabilización sea pequeño.

Resultados:

Cuando la perturbación se introduce para $t \geq 5$ los mejores resultados se encontraron con la configuración: $k_L = 5.5$, $\tau_L = 2$, $\tau_p = 0.75$. Es decir, la razón: $\tau_L / \tau_p = 2.66667$. El sistema se estabiliza en $x_3 = 4.2492$ y la salida presenta un *offset* de -0.2492 (Figura 33a).

Cuando la perturbación se introduce para $t > 0$, los valores de τ_L y τ_p no cambian, sólo cambia el valor de la ganancia. Aquí, se pudo reducir un poco más el valor de la ganancia, sin que la salida se muestre oscilatoria. En concreto, los valores de los parámetros que proporcionaron la mejor respuesta son: $k_L = 5.2$, $\tau_L = 2$, $\tau_p = 0.75$. El sistema se estabiliza en $x_3 = 4.2245$ y el *offset* es de -0.2245 (línea roja en Figura 33b).

Es diferente el valor de k_L que soporta el sistema al hacer la simulación introduciendo la perturbación en el tiempo $t = 0$, que en el tiempo $t \geq 5$. Cuando la perturbación se introduce para el tiempo $t \geq 0$ soporta valores menores de k_L , en cambio, cuando la perturbación se introduce para $t \geq 5$ no conviene reducir $k_L < 5.5$ porque la salida presenta ruido y se hace oscilatoria. Por supuesto, conviene hacer k_L tan pequeño como sea posible para reducir el *offset*.

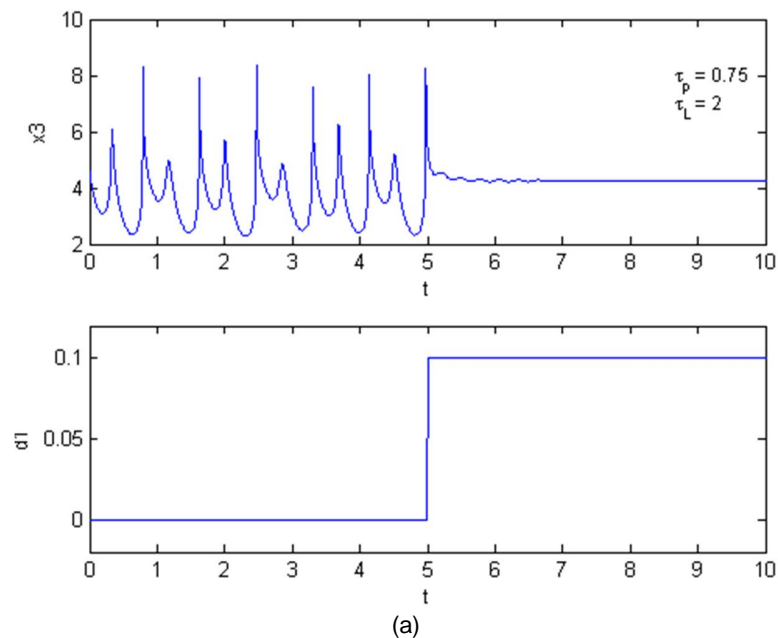
Aunque, el *offset* se puede reducir ajustando la ganancia k_L , en este caso, no se logró eliminar completamente, dado que, al reducir el valor de la ganancia, el *offset* se reduce, pero, aparece ruido en la señal de salida y se hace más oscilatoria la respuesta. Por el contrario, al aumentar el valor de la ganancia, el *offset* aumenta.

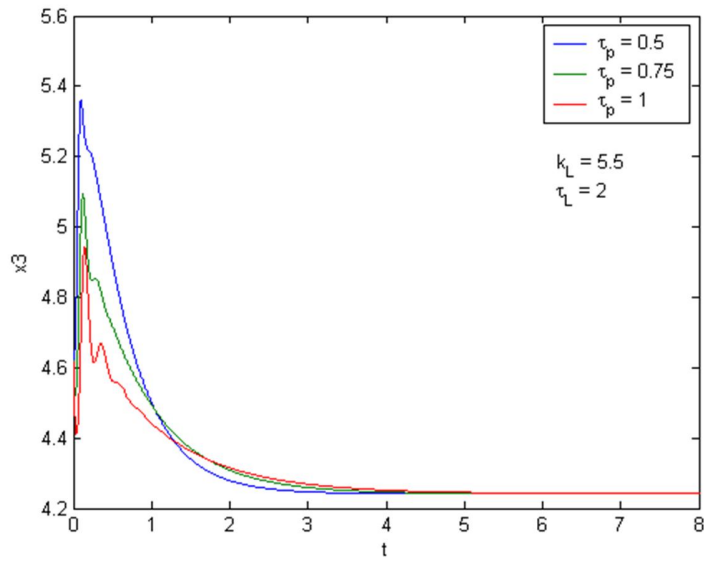
En teoría no debería haber *offset*, dado que, en el control *feedforward* el control perfecto puede obtenerse. Sin embargo, este controlador *feedforward* no es perfecto y las imperfecciones del mismo producen errores, que puede ser, debido

a la alta no linealidad del sistema, errores en el cálculo numérico, debido al modelo matemático, o, posibles perturbaciones no medidas. En resumen, el controlador *feedforward* F_2 sólo compensa para cambios en la perturbación d_1 . Cualquier otra variación en el sistema no será compensada por este controlador. Por eso, rara vez se encuentra en la práctica el control *feedforward* sólo. Por lo general, se implementa el lazo combinado *feedforward-feedback*.

Conviene advertir que, el controlador estabiliza el sistema cuando se introduce la perturbación que es en el primer caso para $t \geq 5$, es decir, para tiempos menores, el controlador no ejecuta ninguna acción. Por eso, aparece la salida en su estado natural, caótica, esto es, sin control (ver Figura 33a). En el segundo caso (Figura 33b) se observa que controla el sistema en todo el rango de integración, porque, allí se está introduciendo el cambio en la perturbación para todo $t > 0$.

Figura 33. Control *feedforward* dinámico, cuando se introduce un cambio tipo escalón de +10% en la perturbación d_1 , con $k_L = 5.5$. a) el cambio se introduce para $t \geq 5$ b) el cambio se introduce para $t \geq 0$ para diferentes valores τ_p





(b)
Fuente: Autor

En conclusión, el control *feedforward* dinámico controla el sistema cuando se introduce un cambio en la perturbación d_1 . Es decir, no compensa el sistema para otras perturbaciones no medidas o inexactitudes del controlador, dado que no hay *feedback* presente.

Al no observarse una variación en la perturbación, el controlador no actúa, y no compensa el sistema, por eso, aparece la salida en su estado natural, sin control (Figura 33a). Pero, cuando se introduce un cambio en la perturbación controla el sistema. Sin embargo, hay un *offset* presente, que es mayor que en el caso del control *feedback*. La presencia de este *offset* se debe a las imperfecciones del controlador. Además, la salida presenta un sobrepaso en los primeros instantes de tiempo, que depende del valor de la razón τ_L/τ_p . Esto es, a valores de τ_L/τ_p más grandes, la salida alcanza valores más altos, como se observa en la Figura 33b.

Discusión

Se hizo el análisis para cuando la perturbación se introduce para $t > 5$ y cuando se introduce para $t > 0$, y se encontró que el controlador *feedforward* no controla el sistema hasta que no se introduce un cambio en la perturbación. Es decir, si la perturbación no está presente, el controlador no actúa, por eso, el sistema luce en su estado natural, esto es, inestable, caótico. Además, aunque controla el sistema cuando se introduce un cambio en la perturbación, la salida presenta un sobrepaso y un *offset* considerable, que es mucho mayor que en el caso de las otras estrategias de control lineal ensayadas (control FB, FF+FB). Aunque, se sintonizaron los parámetros del controlador y se ensayaron diferentes aproximaciones en el controlador (adelanto-atraso, atraso de segundo orden, atraso de primer orden, cero positivo y dos atrasos) no se logró mejorar el comportamiento.

En resumen, se encontró que el control *feedforward* no controla sistemas inestables en lazo abierto, por eso, no controla éste sistema. A causa de ello, se optó por utilizar el lazo combinado *feedforward-feedback*.

5) Control combinado *feedforward-feedback*

a) Control *feedforward* en estado estacionario-*feedback*

Seguidamente, se implementó el lazo combinado *feedforward-feedback* de las dos maneras que lo presenta Murrill [53], es decir, agregando una constante (Figura 5a), y ajustando el *set point* (Figura 5b). La primera manera se denominará caso 1, y la segunda caso 2.

Conviene advertir que, se utilizó el diseño del control *feedforward* en estado estacionario, dado que, es la manera preferida de implementar el controlador

feedforward, porque, se deriva del modelo matemático, es un controlador no lineal y compensa fácilmente las no linealidades del proceso, no se utilizó ningún tipo de aproximación para linealizarlo, por lo tanto, es más preciso y representa mejor la dinámica del sistema.

Recuerde que el sistema de ecuaciones a resolver en el control *feedback* (control P) era el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 1 - x_1 - D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - d_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + D_a x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + D_a B x_1 \exp\left(\frac{x_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - D_a B \alpha S x_2 \exp\left(\frac{kx_3}{1 + \varepsilon x_3}\right) - \beta(x_3 - u_t) + d_1 \\ u_t(t) &= k_c (x_{3set} - x_3)\end{aligned}\tag{77}$$

Respecto al caso 1, que es, la combinación *feedforward-feedback* en la cual el control *feedback* se agrega como una constante k_f (Figura 5a). Se tiene que la ley de control es:

$$u_t = 1.125001563 x_{3set} - 0.09829365 \exp(x_{3set}) - 0.125001562 d_1 + k_f\tag{78}$$

Dónde, $k_f = k_c (x_{3set} - x_3)$

Aquí, u_t es la variable manipulada, d_1 es la perturbación, x_3 es la variable controlada, x_{3set} es el *set-point* o valor deseado de la variable a controlar, k_c es la ganancia del controlador proporcional *feedback* [53]. Por supuesto, aquí, debe proporcionarse un valor de *set-point*, y, de k_c .

Ahora bien, respecto al caso 2 (Figura 5b), se tiene que la ley de control está dada por:

$$k_f = k_c (x_{3set} - x_3)$$
$$u_t = 1.25001563 k_f - 0.09829365 \exp(k_f) - 0.125001562 d_1 \quad (79)$$

Igualmente, aquí, debe proporcionarse, k_c (ganancia del controlador proporcional *feedback*) y el *set-point* de la variable controlada (x_{3set}).

En concreto, se utilizaron los valores de ganancia proporcional *feedback* (k_c) que proporcionaron los mejores resultados en el caso del control *feedback*, esto es, pues, $k_c = 3$ y $k_c = 5$.

En primer lugar, se dejó el *set point* fijo en $x_{3set} = 4$, y, se permitió que la perturbación sufra un cambio tipo escalón de +10%. En segundo lugar, se permitió que el *set-point* sufra un cambio tipo escalón de +10%, y se asumió que no están presentes las perturbaciones. Las condiciones de la simulación son las mencionadas en la página 105.

Resultados:

Análisis para el caso 1: (FF+FB caso 1):

Primero que todo, se hizo la simulación con $k_c = 5$ (ganancia del controlador *feedback*), y, $x_{3set} = 4$, y se observó el comportamiento de la variable controlada para un cambio tipo escalón de 10% en la perturbación d_1 . Aquí, se observó que el sistema no sufre cambio alguno al introducirse cambios en las perturbaciones, y, controla el sistema (Figuras 34a y 35).

También, se observó la salida para cambios en el *set-point* de $x_{3set} = 4$ a $x_{3set} = 4.1$ (Figura 36), y se notó que el controlador es más sensible a cambios en el *set-point* que a cambios en las perturbaciones, lo que indica que el controlador *feedforward* está cumpliendo con su función, que es, mantener el sistema estable bajo cambios en las perturbaciones.

Asimismo, se ensayó el comportamiento para $k_c = 3$, y, al compararlo con el comportamiento con $k_c = 5$ se observa que en los dos casos la salida no se ve afectada por un cambio en la perturbación (Figura 35). Sin embargo, con $k_c = 3$ la salida es mucho más oscilatoria (Figuras 34b y 35). También, se aprecia que el tiempo en alcanzar el control es mayor: 0.9 unidades de tiempo adimensional versus 0.4 en el caso de $k_c = 5$. Igualmente, el subpaso (*undershoot*) que sufre en los primeros instantes de tiempo es mayor. En resumidas cuentas, es más oscilatorio con $k_c = 3$. En otras palabras, la salida tiende hacia la inestabilidad a medida que k_c disminuye. Conviene advertir que, en todos los casos ensayados hay un *offset* presente, pero, es de recordar que se está utilizando el control P en la compensación *feedback* (Figuras 34-36).

Figura 34. Control FF+FB (caso 1) de x_3 con u_1 , con $x_{3set} = 4$, y un cambio tipo escalón de $d_1=0.1$, para $t \geq 5$, (a) con $k_c=5$, (b) con $k_c=3$

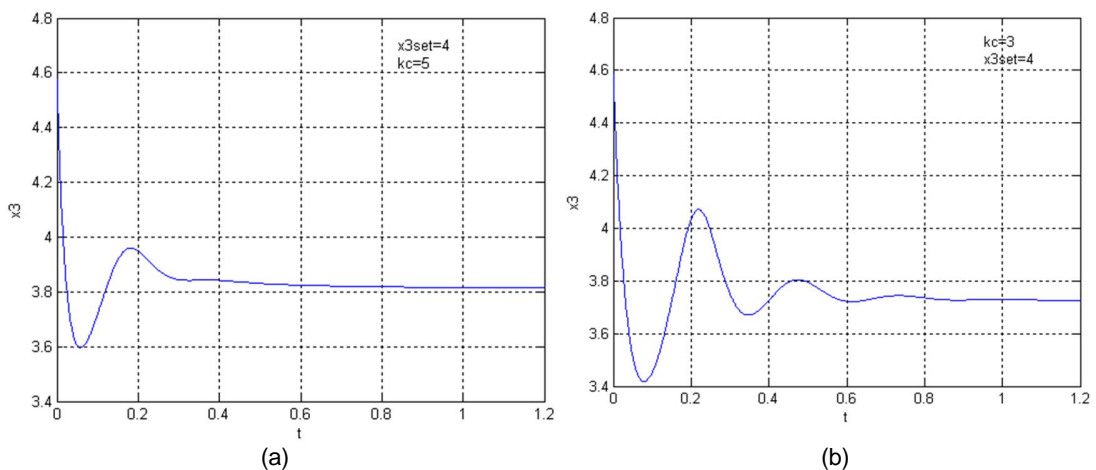
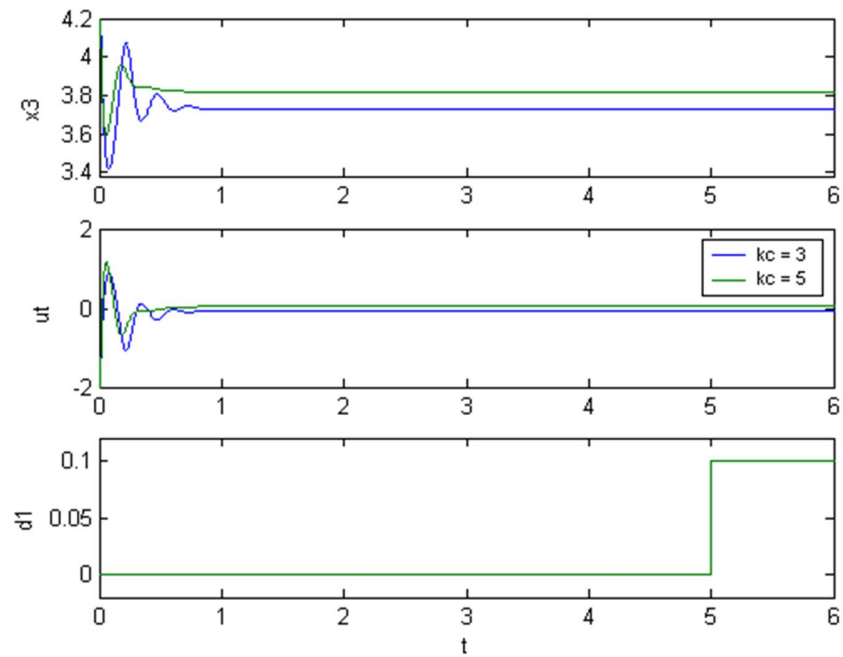
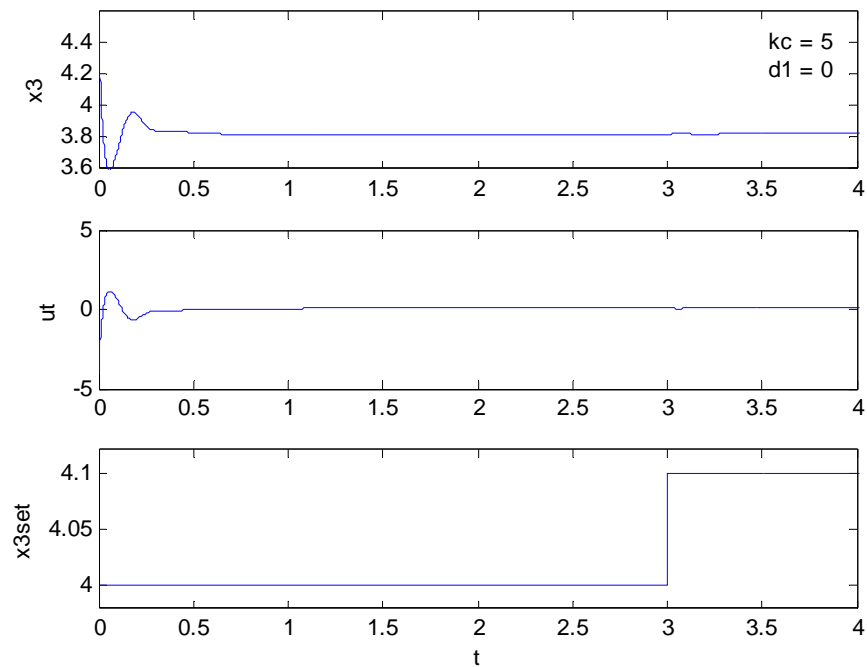


Figura 35. Control FF+FB (caso 1) de x_3 con u_t , con $x_{3set} = 4$, y un cambio tipo escalón de +10% en d_1 , para $t \geq 5$



Comportamiento de la variable controlada, variable manipulada y la perturbación. Fuente: Autor

Figura 36. Control FF+FB (caso 1) de x_3 con u_t , con un cambio tipo escalón de +10% en el setpoint para $t \geq 3$, $d_1 = d_2 = 0$



Comportamiento de la variable controlada (x_3), la variable manipulada (u_t), y, el setpoint. Fuente: Autor

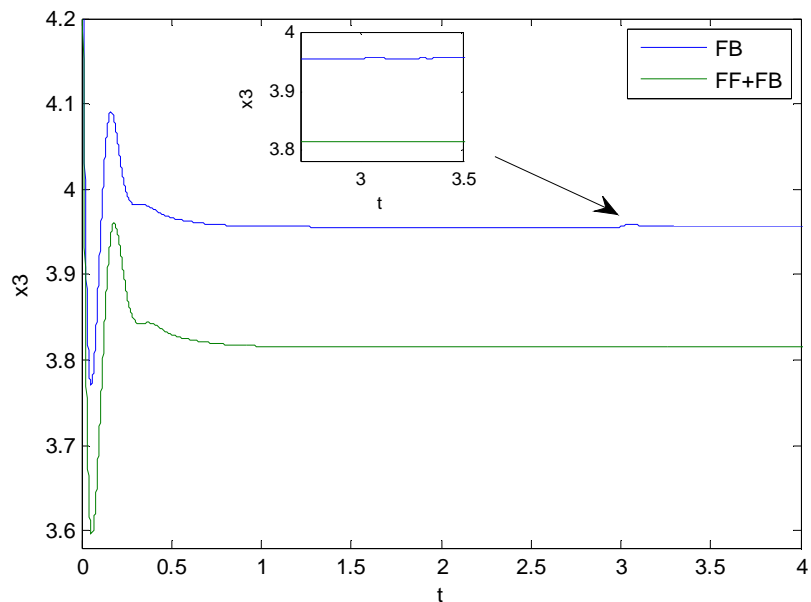
En resumen, se observa que la configuración FF en estado estacionario + FB controla el sistema. Con $k_c = 5$ se obtuvo un buen comportamiento. Ahora, al reducir el valor de la ganancia, el comportamiento es más oscilatorio, aumenta el error en estado estacionario y tarda más en alcanzar el control. Por consiguiente, no se recomienda reducir el valor de la ganancia proporcional *feedback* por debajo de $k_c = 5$. Aquí, se ensayó un cambio en la perturbación de +10%, y se observó, que en efecto, el sistema rechaza cualquier cambio en la variable controlada al introducirse un cambio en la perturbación, lo cual, es el objeto del, controlador *feedforward*.

De otro lado, se observa que el sistema es más sensible a cambios en el *set-point* que a cambios en las perturbaciones (Figura 36). Sin embargo, el cambio que sufre es muy pequeño, casi despreciable.

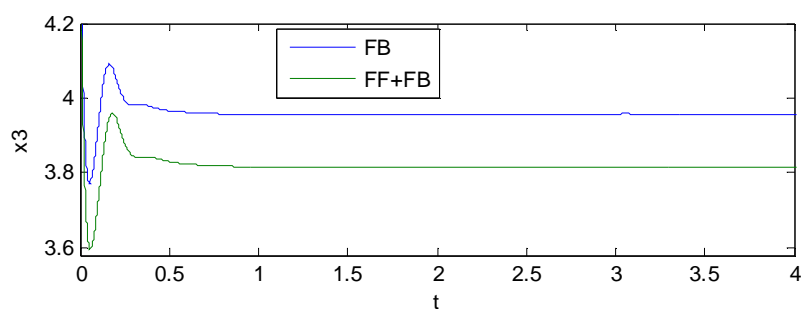
Con esto en mente, podría decirse que el control *feedforward* está cumpliendo su propósito, que es, rechazar los cambios en las perturbaciones.

Ahora bien, al comparar la salida del sistema con control *feedback* sólo, con la combinación *feedforward* en estado estacionario-*feedback* (caso 1), cuando se introduce un cambio tipo escalón en la perturbación, dejando fijo el *set-point*, se observa que, en efecto, en el caso del control *feedback* la salida muestra un pequeño cambio al introducirse la perturbación, pero, no es considerable (Figura 37). En cambio, en el caso del control combinado *feedforward* en estado estacionario-*feedback* el sistema rechaza cualquier cambio en la variable de salida al introducirse la perturbación, de modo que, la variable controlada permanece en su valor constante. Es decir, el controlador *feedforward* está ejerciendo su función que es, rechazar cambios a las perturbaciones.

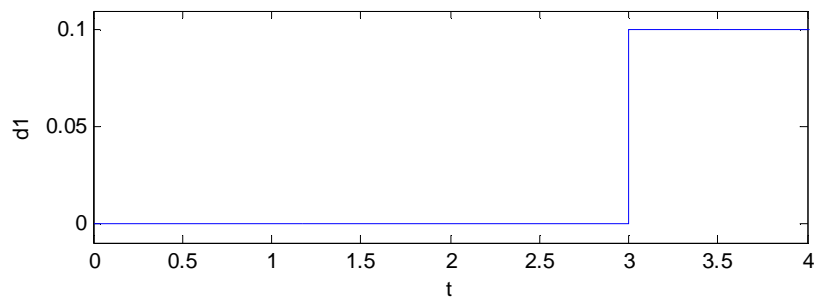
Figura 37. Comparación del control FB y FF+FB (caso 1) cuando se introduce un cambio escalón en la perturbación d_1 de 0.1 para $t \geq 3$



(a)



(b)



Aquí, $x_{3set} = 4$, y $k_c = 5$. Línea azul: control FB, línea verde: control FF+FB (caso 1). Fuente: Autor

Cabe señalar que, en este caso (caso 1), la mejora que el control *feedforward* produce sobre el control *feedback* es mínima, de modo que, no se justifica su implementación, teniendo en cuenta los altos costos que conllevaría.

Es prudente advertir que, la oscilación que se observa en la salida en los primeros instantes de tiempo (Figuras 34-37) se debe a la acción del controlador *feedback*, no a la acción del controlador *feedforward*. El controlador *feedback* hace un ajuste al calcular el error entre la salida y el *set-point* (de hecho, este error o comparación es el núcleo del controlador *feedback*). Respecto al controlador *feedforward*, éste no actúa hasta que se introduce un cambio en la perturbación. Entonces, al representar el lazo combinado *feedforward-feedback* lo que se aprecia es el comportamiento de un controlador *feedback* con la mejora, que la salida no se verá afectada por introducir un cambio en la perturbación.

Con esto en mente, se concluye que:

- ✓ El control *feedforward* no controla el sistema.
- ✓ El control *feedforward* actúa sólo cuando se introduce un cambio en la perturbación, y además, presenta un *offset*.
- ✓ El lazo de control combinado FF en estado estacionario+FB controla el sistema y rechaza cambios frente a las perturbaciones.
- ✓ El lazo de control *feedforward* representa una mejora sobre el control *feedback*, sin embargo, la mejora es muy pequeña, de modo que, no se justifica su implementación.
- ✓ El lazo de control combinado *feedforward* en estado estacionario-*feedback* es más sensible a cambios en el *set-point* que a cambios en las perturbaciones.
- ✓ No se recomienda reducir el valor de la ganancia del controlador proporcional *feedback* por debajo de $k_c = 5$.

Análisis para el caso 2 (FF+FB caso 2):

Seguidamente, se ensayó la otra configuración del controlador *feedforward* en estado estacionario-*feedback*, esto es, FF+FB caso 2 (ajustando el *set-point*). Primero para cambios en el *set-point* y luego para cambios en las perturbaciones. En el primer caso se introdujo un cambio tipo escalón de +10% en el *set-point* para $t \geq 3$, no hay perturbaciones presentes y $k_c = 5$.

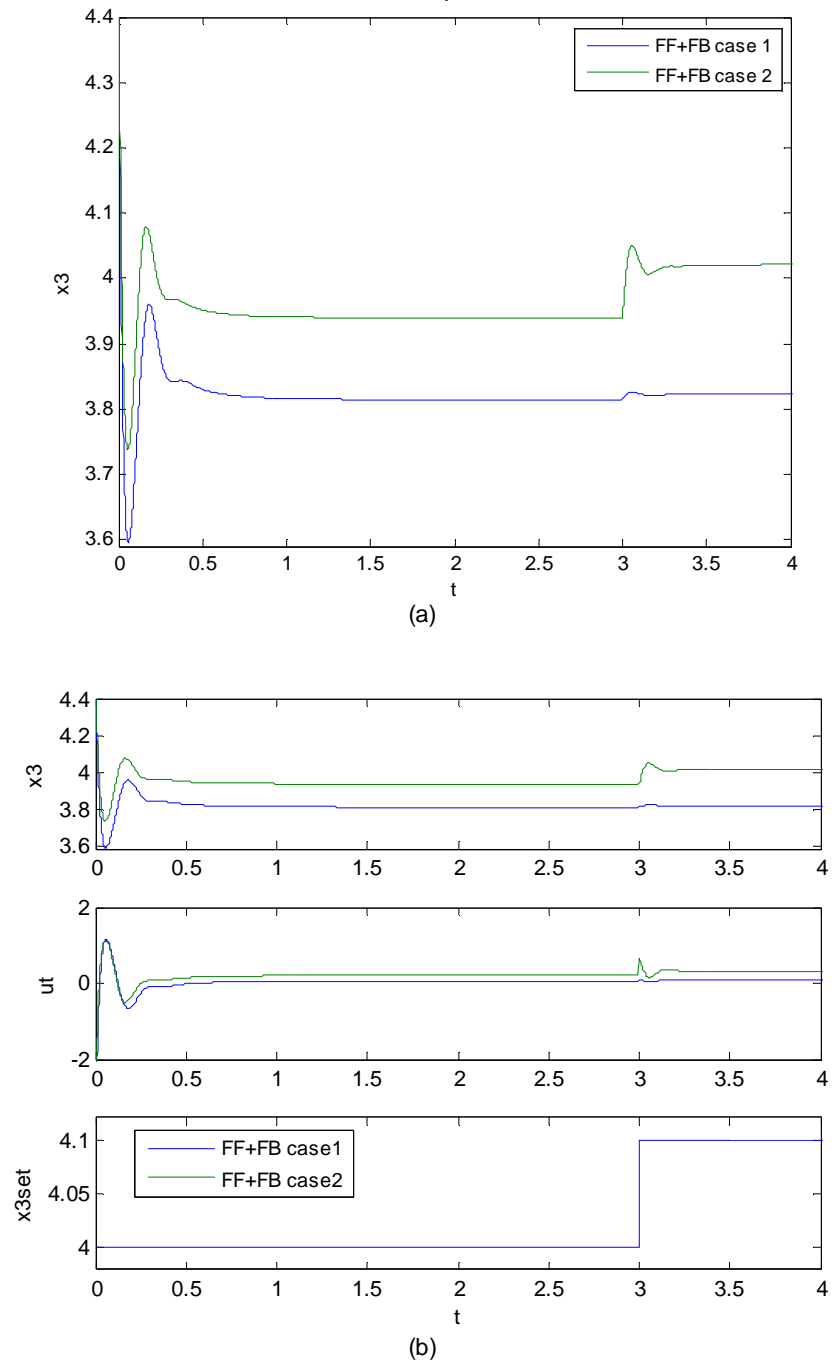
Se observó que la salida si es sensible a cambios en el *set-point*, y lo es mucho más que el caso 1 (Figura 38). Cuando se introduce el cambio en el *set-point*, la salida sufre un sobrepaso, hasta que se estabiliza en su nuevo valor en estado estacionario. Del mismo modo, la variable manipulada sufre un pequeño cambio rápido y brusco. Sin embargo, aunque, está presente un *offset*, éste no es tan grande como en el caso 1. Aquí, no se aleja tanto del *set-point*.

Respecto a cambios frente a las perturbaciones, esta estrategia compensa los cambios presentes en las perturbaciones. Además, el *offset* está muy cerca del *offset* del caso del controlador *feedback*, igualmente, el subpaso (Figura 39).

Se observó que, tanto para cambios en las perturbaciones, como para cambios en el *set-point*, el *offset* no es muy grande. Esto es, se reduce drásticamente en comparación de la primera configuración ensayada FF+FB (Figuras 38-39).

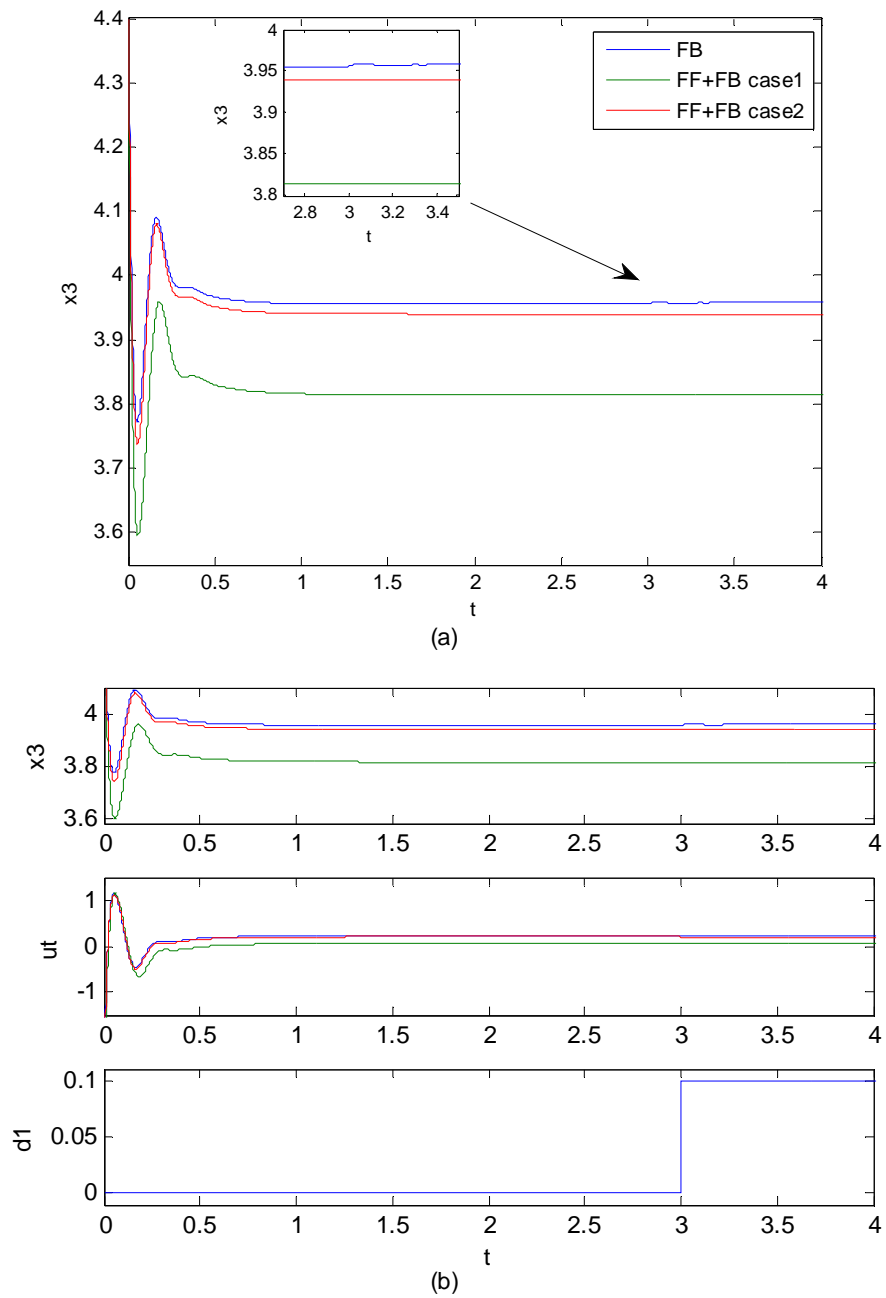
En otras palabras, esta configuración de *feedforward* en estado estacionario-*feedback* da una respuesta más satisfactoria.

Figura 38. Respuesta del control combinado *feedforward-feedback* de x_3 con u_t , cuando se introducen cambios en el *set-point*



Aquí, se introduce un cambio tipo escalón de +10% en el *setpoint* para $t \geq 3$. $k_c = 5$, $d_1 = d_2 = 0$. Azul: control FF+FB (caso 1), verde: control FF+ FB (caso 2), (a) comportamiento de la variable controlada; (b) comportamiento de la variable controlada (x_3), la variable manipulada (u_t) y el *setpoint*. Fuente: Autor

Figura 39. Control de x_3 con u_i al introducir un cambio tipo escalón de 0.1 en la perturbación d_1 para $t \geq 3$



a) ampliación de (b); b) Comportamiento de la variable controlada (x_3), la variable manipulada (u_i), y la perturbación (d_1). Aquí, $x_{3set} = 4$, y $k_c = 5$. Azul: control FB, verde: control FF+FB (caso 1), rojo: control FF+FB (caso 2) Fuente: Autor

El lazo combinado *feedforward-feedback* controla el sistema y rechaza cambios debido a las perturbaciones (Figura 39). Sin embargo, hay un *offset* presente que es más pronunciado en el caso FF+FB (caso 1). Se observa que siempre está presente un *offset* en los lazos combinados, y era de esperarse, porque, se está utilizando el control P, en el control *feedback*.

Respecto a, la diferencia en el error en estado estacionario entre los dos casos ensayados de *feedforward-feedback* (Figura 39), se atribuye a la forma en que se implementó el lazo combinado. La configuración que presenta el menor *offset* es el caso 2, dónde, el control *feedback* ajusta el *set-point* del control *feedforward* (ver Tabla 7). Se nota que esta manera de implementar el lazo combinado es más favorable. Entonces, de las dos maneras ensayadas de implementar el lazo combinado *feedforward-feedback* se prefiere la del caso 2 (ajustando el *set-point*), dado que, el *offset* es menor y es muy similar al del caso *feedback* sólo (ver Tabla 7).

Tabla 7. Valores de error en estado estacionario (*offset*) para diferentes estrategias de control, cuando se introduce un cambio escalón de +10% en la perturbación d_1

	$d_1 = 0.1$ para $t \geq 5$
Estrategia de control	Offset
FB	0.0423
FB+FF en estado estacionario caso 1	0.1852
FB+FF en estado estacionario caso 2	0.0598

Fuente: Autor

En resumen, el lazo FF+FB (caso 2) es el que presenta el mejor comportamiento. La salida de éste diseño de control es muy parecida a la del control FB, con la ventaja que rechaza cambios debido a la presencia de las perturbaciones. En otras palabras, es como un lazo FB mejorado,

porque rechaza cambios debido a las perturbaciones. Sin embargo, no se justifica implementar la acción *feedforward*, porque, la mejora que produce sobre el control FB es muy pequeña, respecto a los costos que implicaría.

Adviértase pues, que, esta pequeña mejora que produce el lazo *feedforward* se debe a que el control FB no se ve afectado de manera considerable por introducir cambios en las perturbaciones (Figura 39).

Análisis y discusión

Finalmente, al comparar las estrategias: *feedback* y *feedforward-feedback* (casos 1 y 2), se observa que, en todos los casos se controla el sistema, pero, el mejor comportamiento se obtuvo con el lazo *feedback*, y, el lazo combinado *feedforward-feedback* (caso 2). Ahora, de estas dos estrategias se ve que, aunque, el lazo *feedforward* está cumpliendo su función que es rechazar cambios en las perturbaciones, pues, no se justifica su implementación, dado que, la mejora que proporciona sobre el control es mínima en comparación con los altos costos que implicaría.

5.5 REDES NEURONALES ARTIFICIALES

El control basado en el modelo usando redes neuronales consta de dos etapas fundamentales. Una es la identificación del sistema y la otra es el diseño del controlador. Para la identificación del sistema puede utilizarse modelos de caja blanca, caja gris o caja negra¹¹. Usualmente se utilizan modelos lineales aproximados: ARMA, ARMAX, etc., propios de la *Teoría de Identificación de*

¹¹ Modelamiento caja negra: se basa en datos medidos, no se dispone del modelo matemático; modelamiento caja blanca: modelamiento puramente físico; modelamiento caja gris: existe cierta visión sobre el sistema, que se utiliza para mejorar el modelamiento empírico.

Sistemas que describen en una forma aproximada la dinámica del modelo. También, en otros casos se utilizan redes neuronales artificiales (modelos de caja negra), especialmente en casos, dónde, no se conoce el modelo matemático que describe el proceso. Por otro lado, la etapa de diseño del controlador depende de la estrategia de control a utilizar. En algunos casos se trata de una red neuronal, en otros, de un algoritmo de optimización [55].

De las estrategias de control basado en el modelo usando redes neuronales artificiales, Matlab tiene implementadas tres en su *Neural Network Toolbox*. En concreto, son: *Nonlinear Model Predictive Control* (control por modelo predictivo no lineal), NARMA-L2 (linealización *feedback*) y *Model Reference Control* (control de modelo de referencia) [54]. En particular, en este trabajo se eligió *Nonlinear Model Predictive Control*; que es como un MPC dónde se utiliza una red neuronal para aproximar el modelo del proceso; debido a que MPC (Control por Modelo Predictivo) puede manejar sistemas inestables en lazo abierto [55, 67]. Aquí, se encuentran bastantes restricciones, ya que, muchas técnicas de control basadas en el modelo junto con redes neuronales no manejan sistemas inestables en lazo abierto, ni sistemas con inversa inestable [55].

En NLMPC (*Nonlinear Model Predictive Control*) usando redes neuronales se resuelve un problema de optimización en cada paso de tiempo para obtener los movimientos futuros del control. Entonces, la función objetivo se minimiza sobre el horizonte de predicción, y generalmente se elige como la suma del error entre las salidas deseadas y predichas. También, aunque se calcula un perfil de variable de entrada sobre el horizonte de control, sólo se implementa la primera acción de control. Después, los horizontes de costo y control se desvían un paso de tiempo hacia adelante y todos los cálculos se realizan de nuevo. Este procedimiento se llama "*moving or receding horizon approach*", la cual es una de las características de MPC [1, 55].

En NL MPC usando redes neuronales, una red neuronal artificial se entrena fuera-de-línea para representar apropiadamente la dinámica del sistema, y luego estos datos se alimentan al controlador para determinar la señal de control que minimiza una función de costo.

La red neuronal tiene la ventaja del cálculo en paralelo, causando que el tiempo de cómputo se disminuya, además, representa bien los sistemas no lineales. A diferencia del MPC tradicional, los requisitos de cálculo en-línea se reducen, pero, requiere una gran cantidad de cálculos fuera-de-línea, debido a que, una red neuronal tiene que ser entrenada fuera-de-línea y ésta es la parte más consumidora y demandante de tiempo.

Esta técnica tiene problemas de robustez. Es sensible a errores de modelamiento involucrados en el entrenamiento de la red y puede mostrar *offset*. Esta técnica no tiene estabilidad garantizada. La estabilidad se garantiza sólo para dos casos: cuando se usa un horizonte de predicción infinito (o horizonte de costo), o cuando el horizonte de predicción se aproxima a infinito por introducir un término penalti terminal en la función objetivo. Sin embargo, estos dos requisitos son difíciles de obtener en la práctica [1, 37].

La sintonización de los parámetros se hace de una manera empírica y sólo existen unos pocos lineamientos heurísticos que trabajan bien en la mayoría de los casos [1, 55]. Sin embargo, debido a que no hay estudios de estabilidad, no es posible especificar un rango de parámetros de control que proporcionen estabilidad en lazo cerrado [37].

Generalmente, debe resolverse en línea un problema de optimización no lineal, no convexo, debido a que las ecuaciones del modelo son no lineales; por eso, se requiere el desarrollo de algoritmos de optimización rápidos y eficientes. Entonces, los principales problemas de éste método son la falta de robustez, la falta de

pruebas de estabilidad, grandes requisitos de tiempo de cómputo, y, requiere el desarrollo de nuevas técnicas de solución de programación no lineal eficientes y confiables para la implementación en-línea.

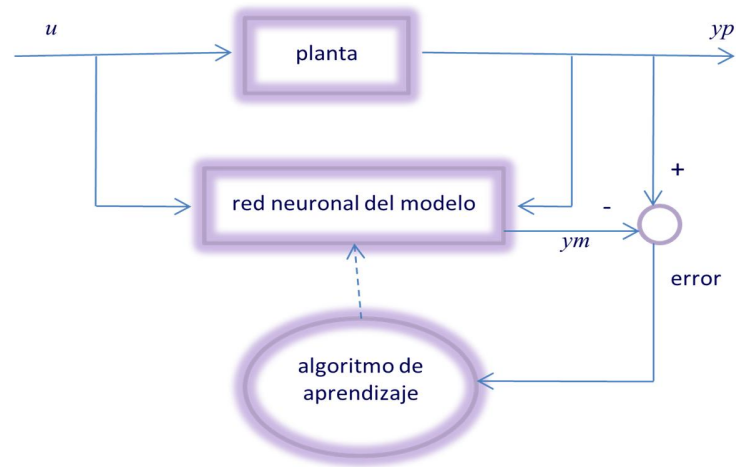
Sin embargo, es apropiado para manejar sistemas multivariables sujetos a restricciones en la variable de entrada y de salida. También, es capaz de manejar sistemas inestables en lazo abierto con inversa inestable y permite el control de procesos en regiones inestables [55]. No obstante, hay una deficiencia de estudios de procesos a gran escala y de importancia industrial [37]. Información sobre esta técnica se encuentra en la literatura [1, 55, 37, 67, 8].

Como ya se mencionó, en este trabajo se utilizó el controlador predictivo no lineal (NLMPC) de redes neuronales que está implementado en el *toolbox* de redes neuronales de Matlab [54].

El Control por Modelo Predictivo (*Model Predictive Control*) consta de una red neuronal que representa la dinámica del proceso, mientras que, el controlador es un algoritmo de optimización. En este esquema de control, se utiliza una red neuronal artificial que simula el comportamiento del proceso, de modo que, pueda predecir el funcionamiento del mismo. El controlador calcula la entrada que optimizará el funcionamiento de la planta sobre un horizonte de tiempo futuro pre-especificado [54].

Entonces, primero es necesario entrenar la red neuronal artificial para que represente la dinámica *forward* de la planta (Figura 40); ésta es la etapa de identificación del sistema. Aquí, el error de predicción entre la salida de la planta y la salida de la red neuronal se utiliza a su vez para entrenar la red neuronal del modelo. Esta red se entrena fuera-de-línea en modo *batch*, antes de implementarse en el esquema de control [54].

Figura 40. Etapa de identificación del sistema



Fuente: Neural Network Toolbox de Matlab

En cuanto al controlador, la red neuronal predice la respuesta de la planta sobre un horizonte de tiempo pre-especificado. Las predicciones son utilizadas por un programa de optimización para determinar la señal de control que minimiza el criterio de costo sobre un horizonte específico. Esta función de costo está dada por la siguiente expresión:

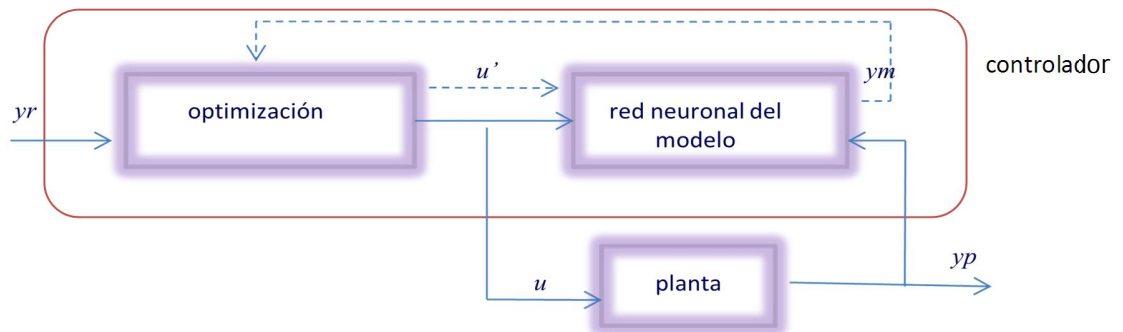
$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} (y_r(t+j) - y_m(t+j))^2 + \rho \sum_{j=1}^{N_u} (u'(t+j-1) - u'(t+j-2)) \quad (80)$$

Dónde N_1 es el horizonte de predicción mínimo (o horizonte de costo); N_2 es el horizonte de predicción (o horizonte de costo máximo); N_u es el horizonte de control (máximo); ρ es un factor de pesos que penaliza los cambios en la variable de control. La variable u' es la señal de control tentativa, y_r es la respuesta deseada y y_m es la respuesta deseada de la red neuronal del modelo [55, 54].

En la Figura 41 se muestra el proceso de control por modelo predictivo no lineal. El controlador consiste de una red neuronal del modelo y el bloque de

optimización. Este último determina los valores de u' que minimizan J , la función de costo. De modo que, el u óptimo es la entrada a la planta [54].

Figura 41. Esquema del control por modelo predictivo usando redes neuronales



Fuente: Neural Network Toolbox de Matlab

Control de x_3 con u_t , donde $u_t = x_{3c}$

Variable controlada: x_3

Variable manipulada: $u_t = x_{3c}$

Sin perturbaciones: $d_1 = d_2 = 0$

IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA

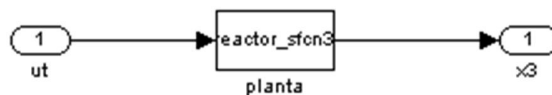
Se utilizó una red neuronal artificial para la identificación del sistema. La red se entrenó con un conjunto de 20000 datos, donde se eligió una fracción como conjunto de entrenamiento, otra como conjunto prueba y otra como conjunto de validación (Matlab lo hace por defecto). Para entrenar la red se utilizó el algoritmo de Levenberg Marquardt, que en Matlab viene implementado en la rutina *trainlm*. Para la validación de la red se utilizó el método *cross-validation*. Así: el entrenamiento de la red se detuvo cuando se observó un mínimo en la gráfica del

error de los conjuntos de entrenamiento, prueba y validación, una vez la meta del error se ha alcanzado. Con esto se evita que la red incurra en sobreaprendizaje, lo que es común, en las redes *Backpropagation* (BP).

El mejor resultado¹² se encontró con una estructura 1-4-1. Un nodo a la entrada correspondiente a la variable manipulada; la temperatura de la chaqueta de enfriamiento adimensional, u_i ; una capa oculta con 4 neuronas que usan una función de activación tangencial hiperbólica (*tansig*) y una neurona en la capa de salida que utiliza una función de activación lineal y corresponde a la temperatura del reactor adimensional, x_3 ; que es, la variable a controlar. Esta red es del tipo *perceptron* multicapas con aprendizaje *Backpropagation* (BP).

El modelo del sistema se escribió en Simulink en forma de una función-S (ver Figura 42). Dado que, es una alternativa a escribir los modelos matemáticos en forma de diagramas de bloques en Simulink, útil para modelos matemáticos complejos.

Figura 42. Bloque de la función-S que contiene el modelo matemático



Fuente: Autor

Los valores de los parámetros así como la condición inicial usados se mencionaron en el capítulo 5.3. El análisis se hizo primero sin y luego, con perturbaciones, dónde se utilizó un valor de 0.01 en d_1 , mientras que d_2 no está presente.

¹² Los parámetros de la red y del controlador se ajustaron por prueba y error. En cuanto a, la estructura de la red que realiza la identificación del sistema, se sabe de la literatura que lo más conveniente es que el número de pesos sea el menor posible para evitar que la red caiga en sobreaprendizaje, entonces, se comienza con un nodo en la capa oculta y se incrementan de uno en uno hasta encontrar el mejor comportamiento.

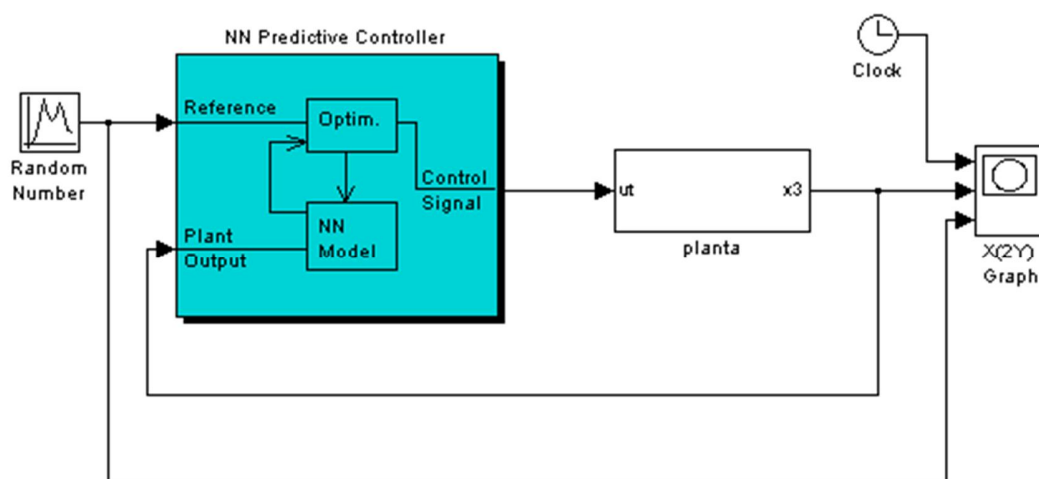
Los datos en la entrada se normalizaron entre -1 y 1 y se permitió que tomaran valores uniformes aleatorios que van desde 0 hasta 4, con el objeto que, la red aprenda las no linealidades del sistema. Por otro lado, la salida de la red no tiene restricciones, es decir, ésta puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, \infty)$. Aunque MPC es capaz de manejar explícitamente las restricciones, aquí se supone que sólo hay restricciones en la variable de entrada. Por cierto, la red se entrenó fuera-de-línea, antes de implementarla en el esquema de control.

DISEÑO DEL CONTROLADOR

Los parámetros del controlador se ajustaron por prueba y error, aunque hay algunos lineamientos heurísticos para hacerlo [1, 55].

Los valores de horizonte de costo (o horizonte de predicción máximo), horizonte de control, intervalo de muestreo, parámetro de pesos y parámetro de búsqueda usados fueron: $N_2 = 6$, $N_u = 3$, $\Delta t = 0.02$, $\rho = 0.05$ y $\alpha = 0.001$ respectivamente. Por lo general, se recomienda en MPC que N_2 sea el doble de N_u [67]. El horizonte de predicción mínimo es fijado en uno por Matlab ($N_1 = 1$). Respecto a, la optimización se realizó con un algoritmo de gradiente conjugado. En concreto, con el algoritmo *steepest descent*, que minimiza la función objetivo en la dirección negativa del gradiente, dado que, acelera la convergencia. Como función de búsqueda se utilizó la rutina *Backtracking* (Scrnbac) de Matlab, que es apropiada para los métodos de cuasi-Newton. En Simulink, el esquema de control luce de la siguiente manera:

Figura 43. Implementación en Simulink del control por modelo predictivo usando redes neuronales de un reactor CSTR en el que ocurren dos reacciones en serie, exotérmica-endotérmica



Fuente: Autor

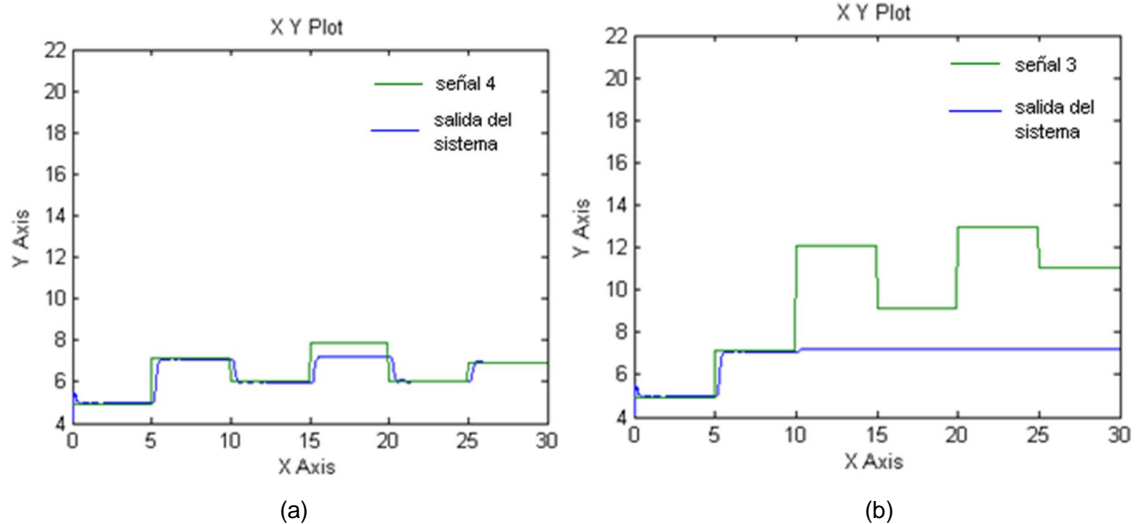
RESULTADOS

En las Figuras 44-45 se muestra los resultados de la simulación realizada con 4 nodos en la capa oculta, 20000 datos de entrenamiento, utiliza pesos actuales, 2 iteraciones por muestra. En la Figura 44a se utilizó como señal de entrada la señal 4, que es una señal definida por el autor que toma valores entre 5 y 8. En la Figura 44b se muestra la simulación que utiliza como señal de entrada la señal 3, que es una señal predefinida por el autor que toma valores entre 5 y 15. Se observa que la salida sigue a la señal de entrada cuando se utiliza la señal 4, mientras que, cuando se utiliza la señal 3, sólo controla el sistema en un rango de tiempo, esto es, entre 0 y 10 segundos. Ya que, por encima de los 10 segundos, aunque, controla el sistema no sigue los cambios de la señal de entrada. Se comporta como una función constante. En otras palabras, controla el sistema, pero, no lo lleva a la dinámica deseada, por lo tanto, el controlador no tiene un buen

funcionamiento. Igualmente, en la Figura 44a la salida muestra un *offset* cuando la señal de entrada toma valores grandes, cercanos a 8.

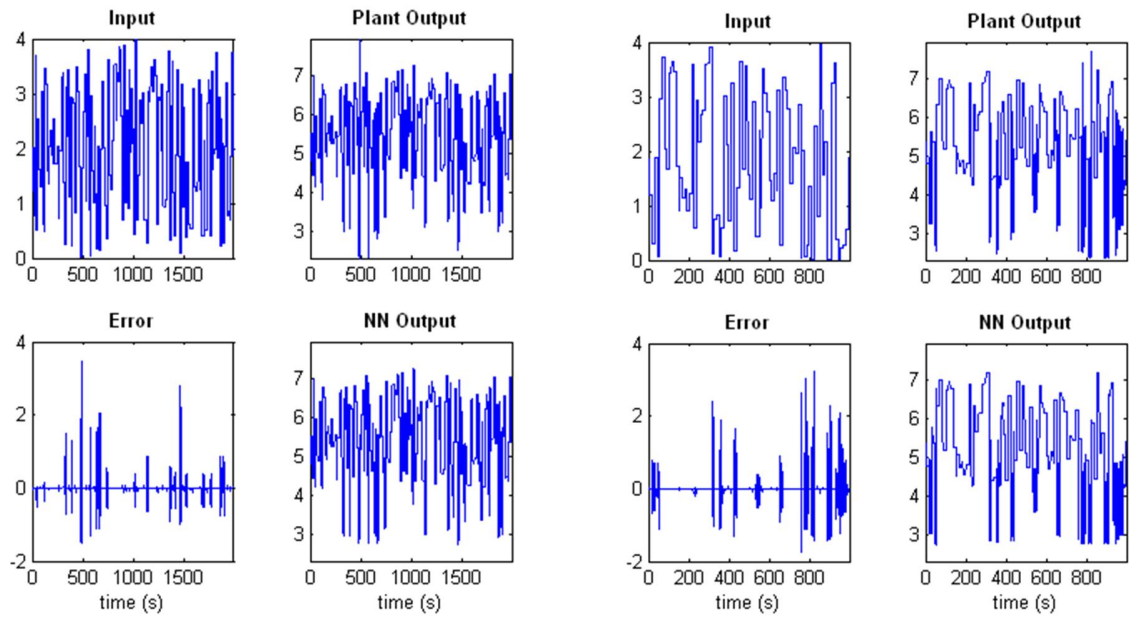
Asimismo, en la Figura 45 se muestra el conjunto de entrenamiento, validación y prueba. Se observa en el conjunto de entrenamiento (Figura 45a) que la entrada es una señal uniforme aleatoria y toma valores entre 0 y 4, y, que la salida de la planta y la salida de la red son similares. Por consiguiente, el error es mínimo. Igualmente, ocurre con el conjunto de validación (Figura 45b), y el conjunto prueba (Figura 45c).

Figura 44. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento en la red neuronal



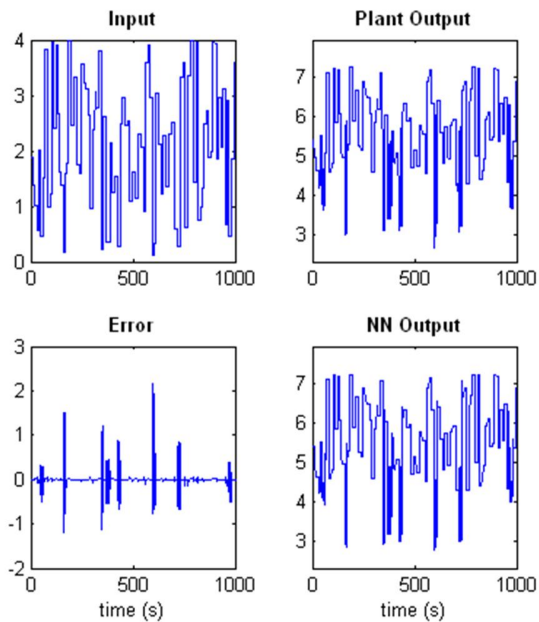
Fuente: Autor

Figura 45. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento

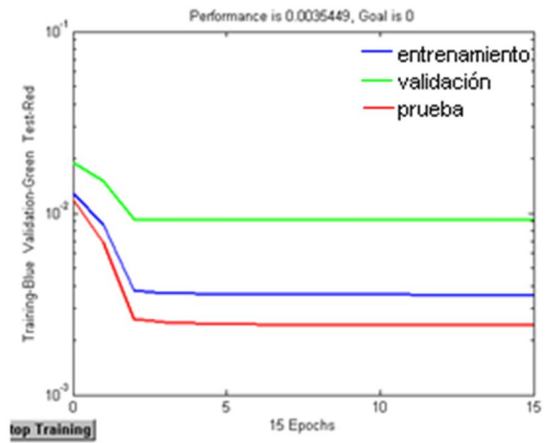


(a)

(b)



(c)

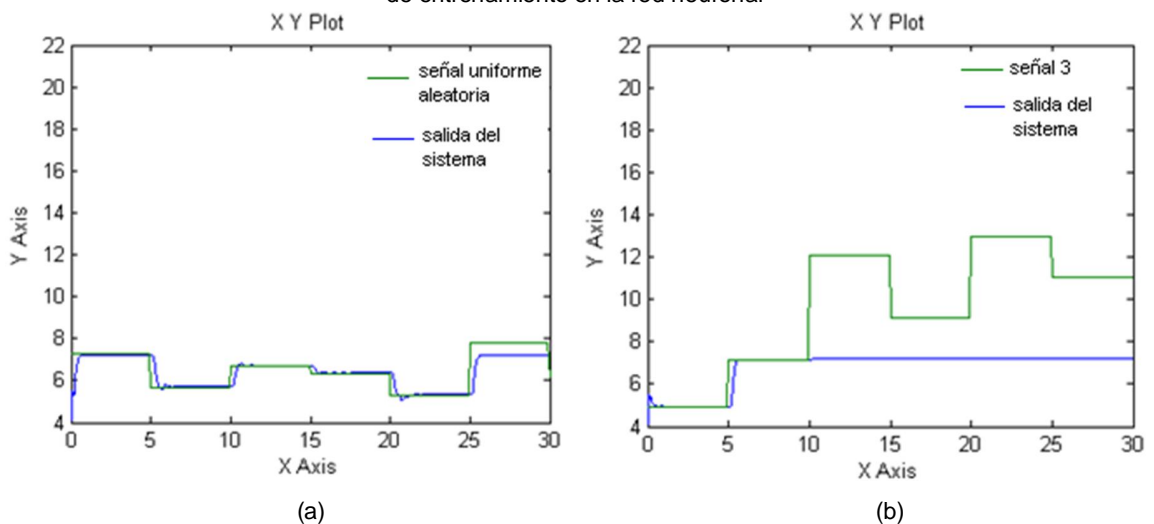


(d)

(a) Conjunto entrenamiento, (b) Conjunto validación. (c) Conjunto prueba, (d) Gráfica del error de los conjuntos entrenamiento, prueba y validación. Fuente: Autor.

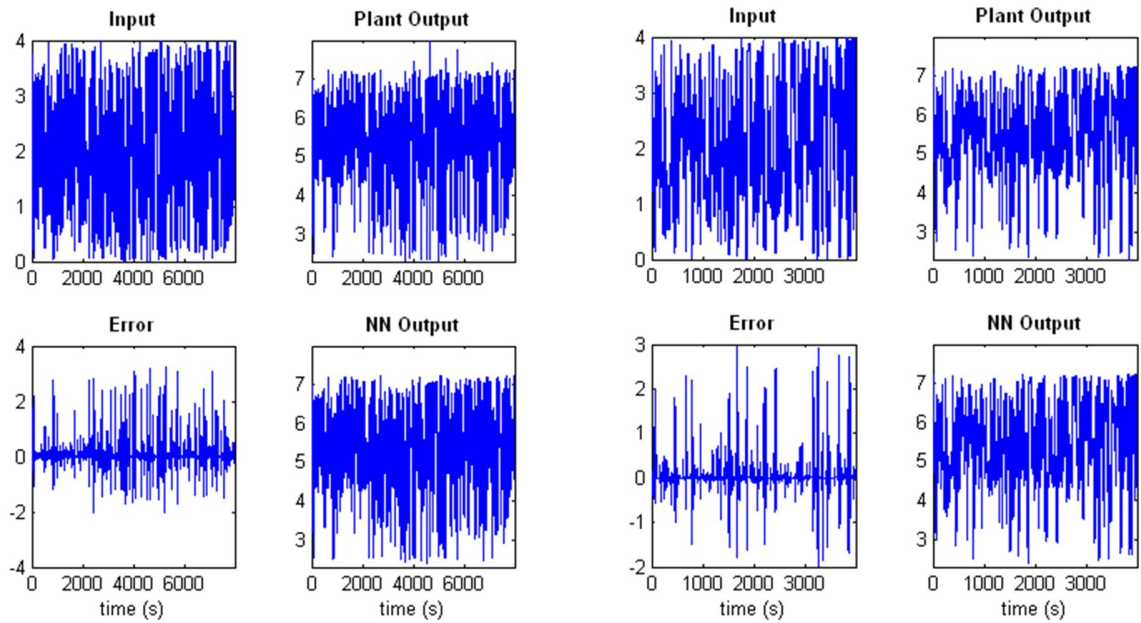
Seguidamente, se aumentó el número de datos de entrenamiento. Entonces, se presenta la simulación con 4 nodos en la capa oculta, 80000 datos de entrenamiento, 200 iteraciones de entrenamiento (*epochs*), utiliza pesos actuales, tomando como señal de entrada: una señal uniforme aleatoria definida por el autor que toma como límite mínimo: 5, y como límite máximo: 8 (Figura 46a), igualmente, se hizo la simulación tomando como señal de entrada la señal 3 (Figura 46b). El conjunto de entrenamiento, validación y prueba se muestra en la Figura 47. Pues bien, se observa que el comportamiento es similar al del caso anterior. Es decir, incrementar el número de datos de entrenamiento y el periodo de entrenamiento no afecta de manera considerable el comportamiento. Sin embargo, el error en los conjuntos prueba, validación y entrenamiento incrementa un poco (Figura 47). Esto se debe a que el número de pesos aumenta. Por eso, es conveniente mantener el número de pesos; como el número de neuronas en la capa oculta y el número de datos de entrenamiento; en su menor valor.

Figura 46. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento en la red neuronal



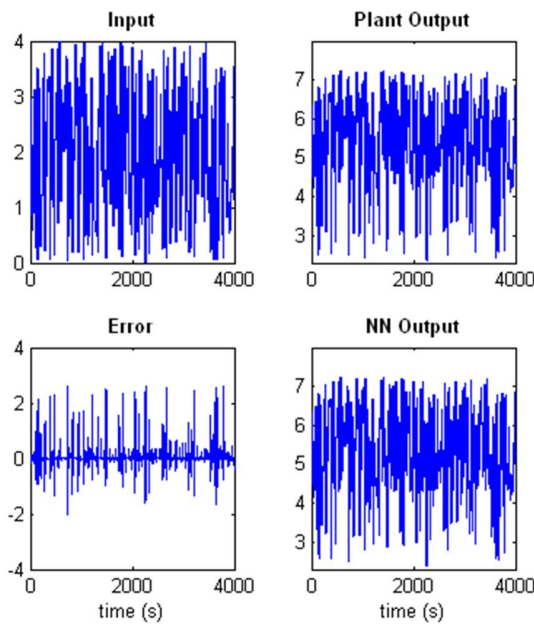
Fuente: Autor

Figura 47. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento

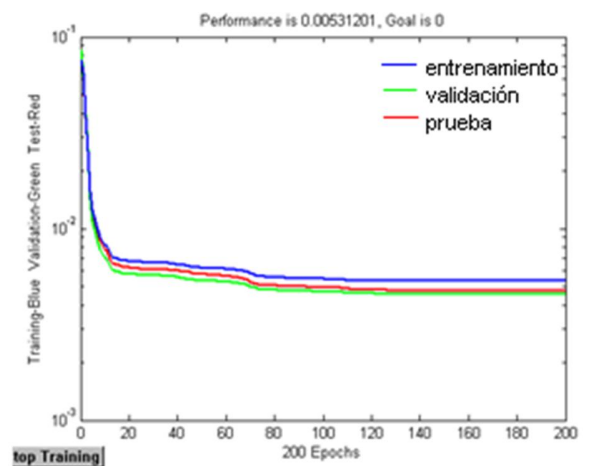


(a)

(b)



(c)

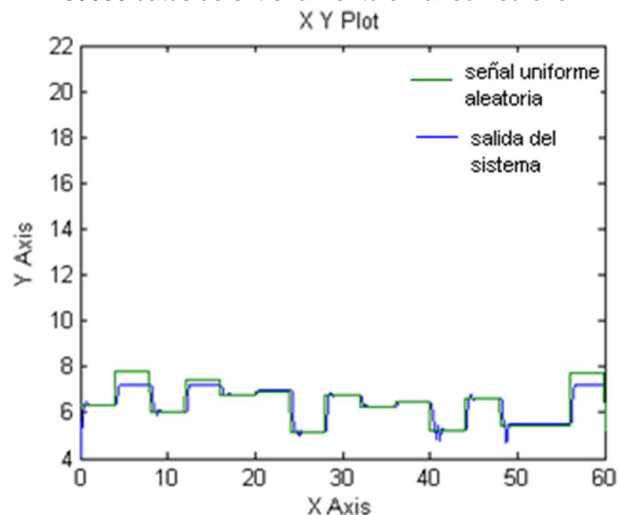


(d)

(a) Conjunto de entrenamiento, (b) Conjunto de validación, (c) Conjunto prueba, (d) Gráfica del error de los conjuntos entrenamiento, prueba y validación. Fuente: Autor

Seguidamente, se presenta la simulación con este mismo conjunto de parámetros y con una señal de entrada, que es, una señal uniforme aleatoria con límites entre 5 y 8, e intervalos de muestreo de 4 s (Figura 48). Aunque se redujo el intervalo de muestreo, se observa, que la estrategia controla el sistema. Asimismo, la Figura 48 muestra que cuando la señal de entrada toma valores grandes (cercanos a 8) la salida muestra un *offset*, debido a, errores en el entrenamiento de la red neuronal.

Figura 48. Simulación entre 0 y 60 s del control por modelo predictivo no lineal con 4 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento en la red neuronal



Fuente: Autor

Luego, se aumentó el número de nodos en la capa oculta. En este sentido, se muestra la simulación con 9 nodos en la capa oculta, 20000 datos de entrenamiento, periodo de entrenamiento: 100, 2 iteraciones por muestra, utiliza pesos actuales, con señal de entrada 4 (Figura 49a), y con una señal uniforme aleatoria definida por el autor, que toma valores entre 5 y 8 (Figura 49b). Del mismo modo, se presenta el conjunto de entrenamiento, validación y prueba (Figura 50). Se observa un buen comportamiento. Es decir, el método es capaz de

controlar el sistema. Sin embargo, está presente un *offset* no muy grande, respecto a, la simulación con 4 nodos en la capa oculta. Este *offset* puede atribuirse a errores en el entrenamiento de la red neuronal. También, se observa que la salida de la planta y la salida de la red son similares y que el conjunto prueba y el conjunto de validación presenta un error mínimo (Figuras 50b y 50c).

Figura 49. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 9 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento en la red neuronal

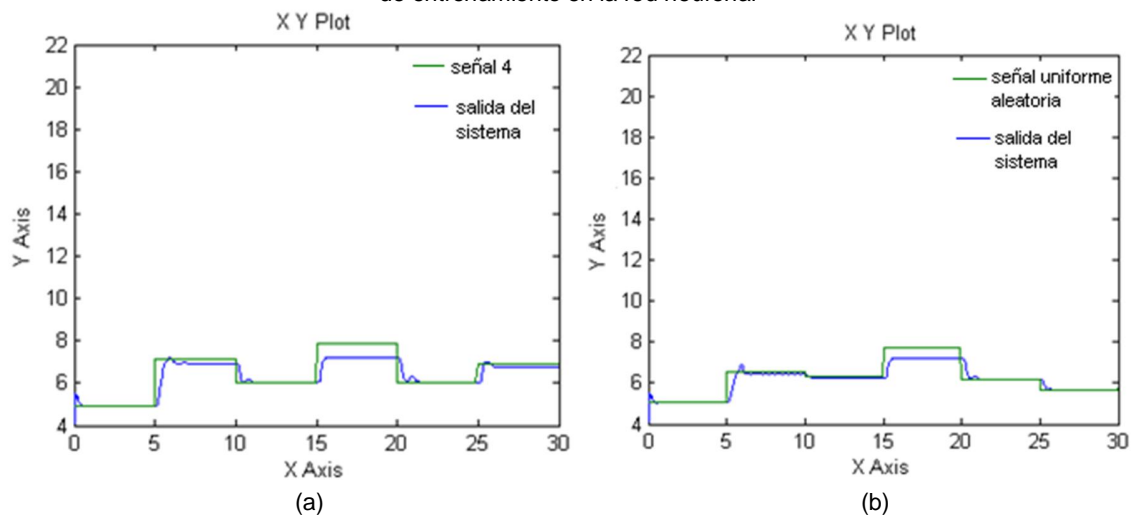
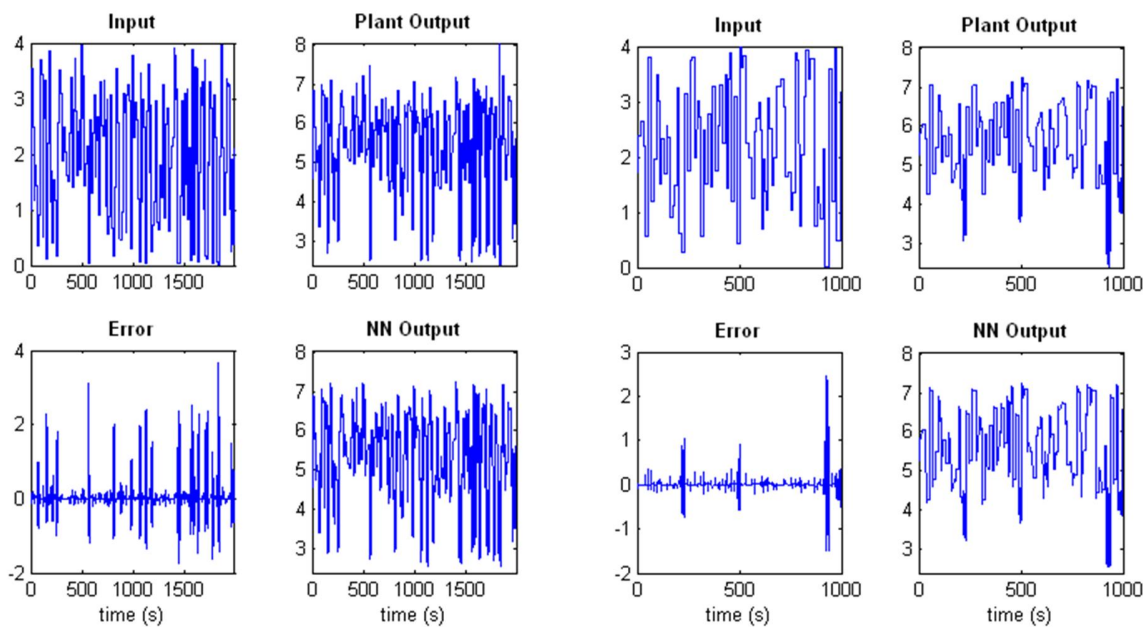
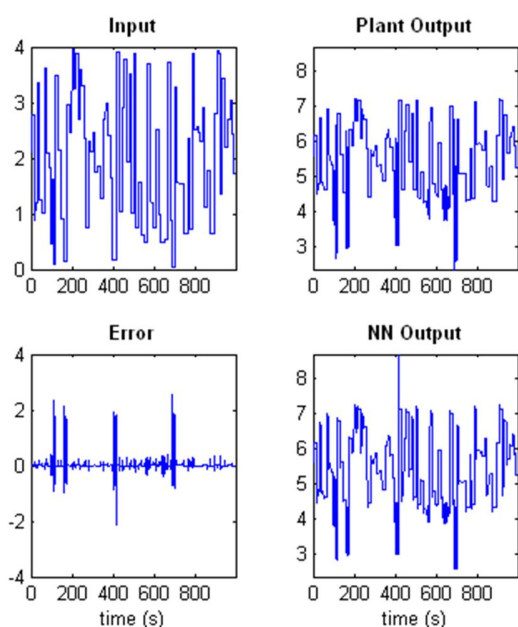


Figura 50. Conjunto de entrenamiento, validación y prueba de la red neuronal del modelo con 9 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento

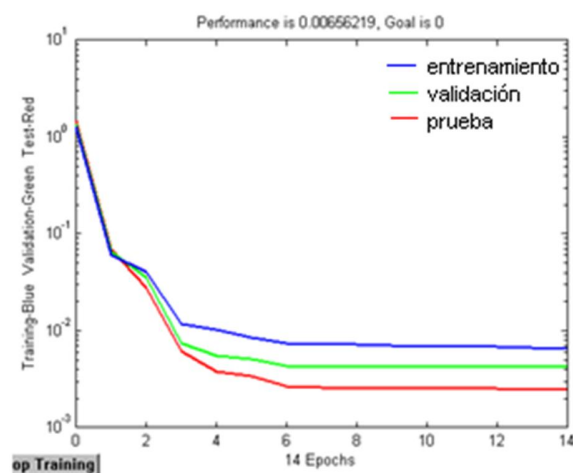


(a)

(b)



(c)

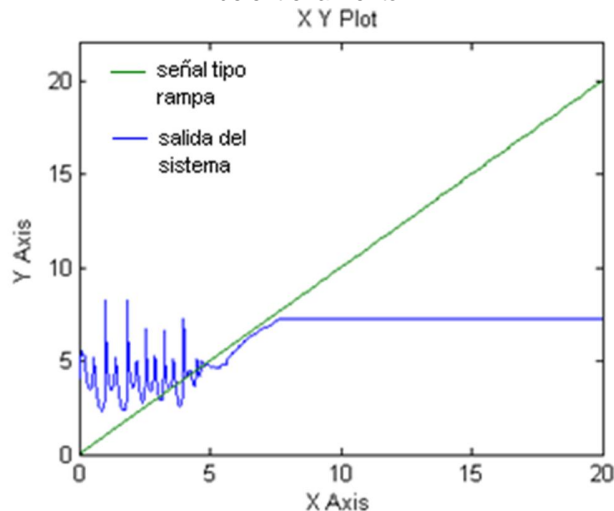


(d)

(a) Conjunto entrenamiento, (b) Conjunto prueba, (c) Conjunto validación. (d) Gráfica del error del conjunto entrenamiento, prueba y validación. Fuente: Autor

Del mismo modo, se muestra la simulación con una entrada tipo rampa, con 9 nodos en la capa oculta, 80000 datos de entrenamiento, 3 iteraciones por muestra, periodo de entrenamiento: 200, no utiliza pesos actuales (Figura 51). Es evidente que, no soporta valores de la señal de entrada muy altos, y con valores muy bajos (entre 0 y 4), no controla el sistema. Cuando la señal de entrada toma valores mayores a 8, la salida no sigue a la señal de entrada, sino que, se comporta como una función constante.

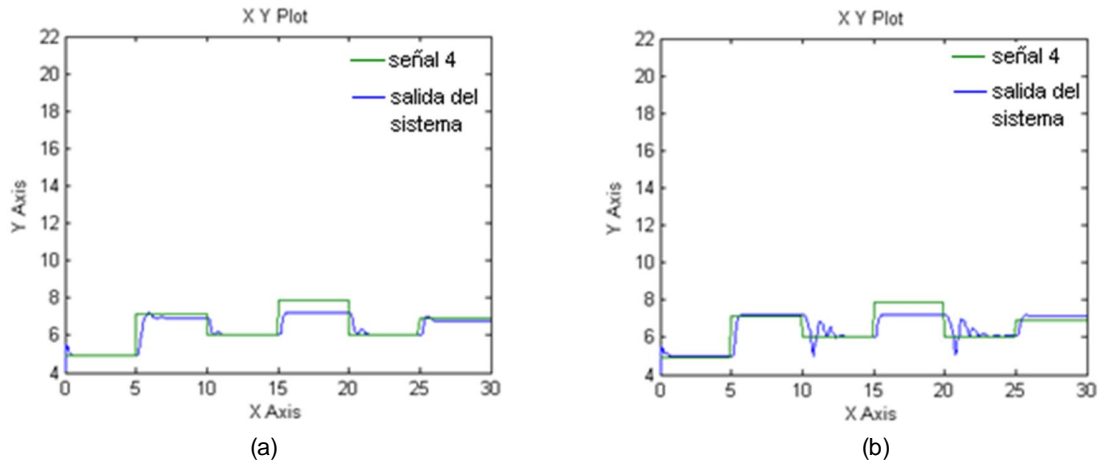
Figura 51. Simulación del control por modelo predictivo no lineal con 9 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento



Fuente: Autor

Asimismo, se muestra la influencia de utilizar pesos actuales. Se encontró que es recomendable utilizarlos. La Figura 52 muestra el caso con 9 nodos, 20000 datos, periodo de entrenamiento: 100, sin perturbaciones, 2 iteraciones por muestra, señal 4. Ahora bien, el efecto es más notorio a medida que aumenta el número de datos del conjunto de entrenamiento. Esto se explica porque aumenta el número de pesos en la red.

Figura 52. Efecto de utilizar los pesos actuales en el control por modelo predictivo usando redes neuronales con 9 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento



(a) Si utiliza pesos actuales (b) no utiliza pesos actuales. Fuente: Autor

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Sin perturbaciones: $d_1 = d_2 = 0$

Aunque, el mejor comportamiento se obtuvo con 4 nodos en la capa oculta, 20000 datos de entrenamiento, utiliza pesos actuales, $N_2 = 6$, $N_u = 3$. Cabe señalar que, con 5 nodos y con 9 nodos en la capa oculta, también, se observó un buen comportamiento. Con 5 nodos la salida es similar a con 4 nodos, y con 9 nodos el *offset* aumenta un poco. Igualmente, al utilizar un conjunto de 80000 datos de entrenamiento el comportamiento mejora.

No es recomendable aumentar el número de nodos en la capa oculta, por encima de 11, dado que, el comportamiento se vuelve muy oscilatorio e inestable. Así, se incrementa el número de datos de entrenamiento no se observa mejoría alguna. Por cierto, siempre está presente un *offset*, aunque, no es muy grande, éste incrementa a medida que incrementa el número de nodos en la capa oculta. Esto se explica por las no linealidades del modelo de la red neuronal, porque aumenta el número de pesos, aumenta el error.

Se encontró que esta estrategia de control es capaz de controlar el proceso, siempre y cuando, la señal de entrada no tome valores ni muy pequeños ni muy grandes. En concreto, ésta debe estar en el intervalo [5,8] unidades (límite del eje y). De modo que, si la señal de entrada toma valores mayores, entonces, sólo es capaz de controlar el sistema en un rango de tiempo. En concreto, en los primeros 10 segundos. Dado que, por encima de los 10 segundos no sigue el comportamiento de la señal de entrada, sino que, se muestra como una función constante. Ahora bien, si la señal de entrada toma valores muy pequeños, por ejemplo: entre 0.5-4 unidades, entonces, la respuesta es muy oscilatoria y no controla el sistema.

Cabe señalar que, los mejores resultados se obtuvieron al utilizar en el entrenamiento de la red, como señal de entrada, la señal uniforme aleatoria tal como viene predefinida en Simulink, con los parámetros por defecto (media:1, varianza:0, semilla:0, intervalo de muestreo: 0). Luego, en la simulación se utilizó una señal uniforme aleatoria definida por el autor, o la señal tipo rampa o cualquier otra. Aquí, se utilizó la rutina ode15s de Matlab que tiene el método de Gear, dónde, se ajustó la tolerancia absoluta a 1×10^{-9} , y la tolerancia relativa a 1×10^{-6} , en un tiempo de integración de 30 s.

Conviene advertir que, la respuesta varía dependiendo del entrenamiento de la red neuronal que realiza la identificación del sistema. En otras palabras, es muy sensible, dado que, al hacer dos corridas con los mismos datos, el comportamiento cambia. Es decir, no es posible obtener exactamente el mismo comportamiento dos veces, o reproducirlo con precisión. Porque, siempre se presentan algunas diferencias. Tal vez, por esto los ingenieros de control, utilizan en muchos casos un modelo de identificación lineal como NARMAX, ARMA, ARMAX, FTIR, etc., en lugar del modelo matemático, para entrenar la red que

identifica la planta¹³. También, no se puede ignorar que, el proceso bajo estudio es muy sensible, de hecho, es caótico bajo las condiciones que se está estudiando. Además puede influir el hecho que, la red se entrena con una señal uniforme aleatoria que cambia de corrida a corrida.

Igualmente, se encontró que no se recomienda aumentar el número de iteraciones por muestra, no es conveniente reducir el intervalo de muestreo, ni aumentar los atrasos a la entrada o salida, dado que, no da buenos resultados. Asimismo, cuando el número de nodos no es muy grande (por ejemplo: 4 o 5) no es sensible al número de datos de entrenamiento y el número de iteraciones de entrenamiento de la planta (*training epochs*). Pero, esta sensibilidad aumenta al incrementar el número de nodos en la capa oculta (por ejemplo: 9). Esto se explica porque aumenta el número de pesos de la red, por lo tanto, aumenta el error.

También, se recomienda utilizar un conjunto de datos de entrenamiento mayor o igual a 20000, y un número de nodos en la capa oculta no menor a 4.

Con perturbaciones: $d_1 = 0.01$, $d_2 = 0$

Sin embargo, no deja de sorprender, el hecho que ésta estrategia de control es robusta frente a las perturbaciones. Esto es, siempre y cuando, el número de nodos en la capa oculta no sea muy grande (por ejemplo: 4 o 5), dado que, a medida que, el número de nodos en la capa oculta incrementa (esto es: mayor o igual a 9), la respuesta es sensible a la perturbación. Aquí, se consideró la perturbación: $d_1 = 0.01$ (Figuras 53-54).

En la Figura 53 se muestra la simulación con 4 nodos en la capa oculta, 20000 datos de entrenamiento, periodo de entrenamiento: 100, utiliza pesos actuales, y con la señal de entrada 4. Se muestra sin y con perturbaciones. Se observa que

¹³ Pero, en sistemas caóticos no se recomienda debido a la alta no linealidad de los sistemas.

no hay un cambio apreciable en el comportamiento. Igualmente, en la Figura 54 se muestra la simulación con 9 nodos en la capa oculta, 80000 datos de entrenamiento, periodo de entrenamiento: 200, dos iteraciones por muestra, utiliza pesos actuales, señal de entrada: señal 4, se observa que la salida se deteriora considerablemente.

Figura 53. Efecto de las perturbaciones en el control por modelo predictivo usando redes neuronales con 4 nodos en la capa oculta y 20000 datos de entrenamiento

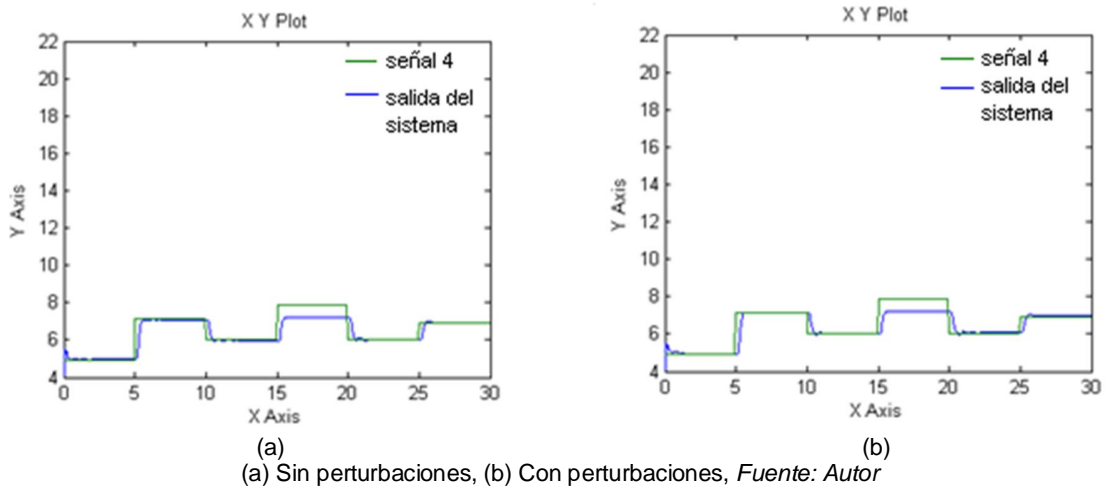
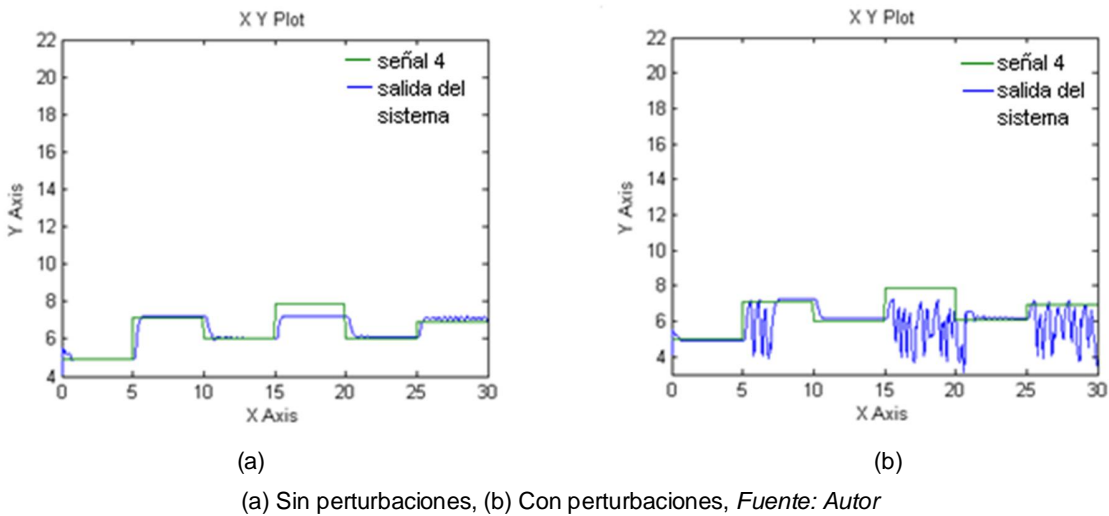


Figura 54. Efecto de las perturbaciones en el control por modelo predictivo usando redes neuronales con 9 nodos en la capa oculta y 80000 datos de entrenamiento



En conclusión:

- ④ La mejor configuración se obtuvo con una estructura 1-4-1. Las neuronas tienen aprendizaje BP, y, los datos de entrada están normalizados.
- ④ Al parecer el comportamiento mejora al utilizar pesos actuales.
- ④ Esta estrategia de control es robusta frente a las perturbaciones, siempre y cuando, el número de nodos en la capa oculta no sea muy grande (por ejemplo: 4 o 5).
- ④ Esta estrategia de control controla el sistema y sigue los cambios de la señal de entrada, siempre y cuando, la señal de entrada tome valores entre 5 y 8. Si toma valores mayores, aunque, controla el sistema, sólo sigue los cambios durante los primeros diez segundos, y, si toma valores menores, no controla el sistema.
- ④ Los mejores resultados se obtuvieron al entrenar la red con la señal uniforme aleatoria, definida con los parámetros que trae por defecto Simulink. Esto es, porque, ayuda a aprender las no linealidades del proceso.
- ④ No es recomendable incrementar el número de nodos en la capa oculta, por encima de 11, dado que, la red puede incurrir en sobreaprendizaje.
- ④ La salida se ve muy afectada por el entrenamiento de la red neuronal que se utiliza para la identificación del sistema.
- ④ En el caso bajo estudio, se puede decir que, éste método es muy sensible. Dado que, al hacer dos corridas con los mismos datos el comportamiento cambia. Es decir, no es posible obtener exactamente el mismo comportamiento

de corrida a corrida o reproducirlo con exactitud, porque, siempre se presentan algunas diferencias. Esto se explica porque el modelo matemático es altamente no lineal y la red neuronal artificial incurre en errores en la etapa de entrenamiento. Además, la red neuronal artificial sólo es una aproximación del modelo. Asimismo, nadie puede ignorar que el sistema bajo estudio es caótico. También, la señal de entrada es aleatoria, por consiguiente, cambia de corrida a corrida.

5.6 METODO DE CONTROL DEL CAOS

5.6.1 PARTE 1. SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CONTROL DEL CAOS

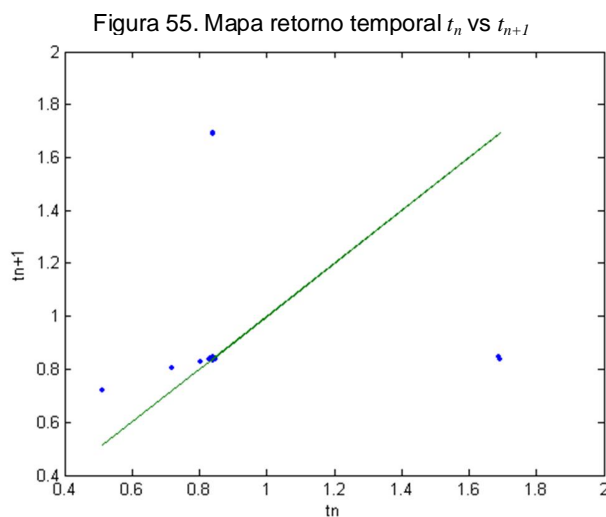
Dentro de los métodos de control del caos se eligieron los dos más utilizados que son: el método de Pyragas [68] y el método OGY [57], aunque, de éste último se consideró una variante del método, que es, el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa [62].

El método de Pyragas: control *feedback* atrasado ha sido ampliamente utilizado en sistemas mecánicos y en sistemas electroquímicos. La ley de control está dada por la ecuación (11), donde, τ es el tiempo de atraso y es igual al periodo de una órbita periódica inestable elegida y k es un peso del *feedback*. Por otro lado, el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, se basa en el mapa de Poincaré. Por lo tanto, necesita de una gran precisión para extraer dicho mapa, y, también, ha sido aplicado con éxito en algunos sistemas químicos y mecánicos.

El algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa se prefirió sobre el método Pyragas, porque, éste no posee un tiempo muerto. En efecto, como es sabido, los atrasos en el tiempo no son deseables y menos en los sistemas químicos. Por

eso, no se consideró apropiado aplicar esta estrategia de control al sistema bajo estudio. En este sentido, el algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa tiene una ventaja. Por eso, se eligió.

No obstante, se determinó el atraso en el tiempo que requiere el método de Pyragas para el caso de estudio. Entonces, para determinar el periodo de una órbita periódica inestable de periodo-1 se siguió a Kiss *et al.* [45] y Rivera *et al.* [73]. Esto es, primero que todo, se hizo un mapa retorno graficando el intervalo de tiempo que transcurre entre los mínimos sucesivos en la serie de tiempo de una variable de interés (que, en este caso, es x_3 , la temperatura del reactor adimensional). En este sentido, se graficó el mapa t_n vs t_{n+1} , que es, un mapa retorno temporal (Ver Figura 55). Luego, sobre ese mapa se graficó la bisectriz, y, en el punto de intersección, se encuentra el periodo de la órbita periódica inestable de periodo-1. Puesto, que, allí se cumple que, $t_n = t_{n+1}$. Ahora bien, en este caso se encontró que $\tau = 0.839$. En efecto, un tiempo muerto, o, un atraso en el tiempo de $\tau = 0.839$ unidades de tiempo adimensional es considerable, y, no es deseable. En otras palabras, es preferible que no haya tiempo muerto.



Fuente: Autor

5.6.2 PARTE 2. METODO DE CONTROL DEL CAOS: Algoritmo Proporcional *Feedback* Basado en el Mapa

El algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa es una versión simplificada del método OGY, por lo tanto, los principios son los mismos. Es decir, consiste en estabilizar una órbita periódica inestable de bajo periodo, por medio de, la perturbación a un parámetro accesible del sistema. Este método pretende explotar la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales que poseen los sistemas caóticos. A diferencia de las estrategias de control convencionales, no pretende llevar el sistema a una dinámica diferente, sino que, logra estabilizar el sistema dentro del atractor caótico. Cabe señalar que, la perturbación a aplicar debe ser muy pequeña, dado que, una pequeña variación produce un gran cambio en el comportamiento [57, 62].

No es de olvidar que, este método de control es aplicable, siempre y cuando, el atractor extraño pueda representarse por un mapa unimodal unidimensional. Por cierto, la descripción del método se encuentra en: [62, 65, 7].

Este método consiste de dos etapas. La primera se hace fuera-de-línea, y consiste en estudiar el comportamiento dinámico del sistema, de modo que, se pueda hallar dos constantes que son necesarias para implementar la ley de control. Esta etapa se conoce como construcción del mapa retorno. Y, la segunda que consiste en la implementación del control se realiza en-línea. Aquí, la perturbación apropiada se calcula y se aplica iterativamente a medida que se monitorea la respuesta del sistema.

5.6.2 ETAPA 1: CONSTRUCCIÓN DEL MAPA RETORNO

Primero que todo, se realiza el mapa retorno de periodo-1; (x_{3n} vs x_{3n+1}); para una variable de interés, que en este caso, es x_3 , la temperatura del reactor, que

es la variable que se desea controlar, y, se observa si el sistema se describe apropiadamente por un mapa unimodal unidimensional (1-D). Si esto ocurre, es posible aplicar el método. Para hacer esto se siguió a Bandyopadhyay *et al.* [7] y se eligió una superficie de sección ubicada en $x_1 = 0.13$. También, se eligió tomar en cuenta las perforaciones a la sección en la dirección ascendente del flujo, es decir, $\dot{x}_1 > 0$. Esto se hace para un valor nominal del parámetro de control, aquí se utilizó $u_t = 0$. Posteriormente, se grafica la bisectriz sobre el mapa, y en el punto de intersección, se encuentra el punto fijo de periodo-1 (x_{3s}), ya que, allí se cumple que: $x_{3n} = x_{3n+1}$. Por supuesto, para hallar el valor del punto fijo, es necesario utilizar una aproximación de mínimos cuadrados, en la región cercana al punto fijo.

Seguidamente, se hace lo mismo, pero, para un valor de u_t ligeramente diferente. Es prudente advertir que, la variación en u_t para hacer este segundo mapa debe ser muy pequeña para asegurar que el parámetro g sea aproximadamente constante.

Más adelante, se halla el valor de g , que es una constante de la ley de control. Bandyopadhyay *et al.* [7] lo denominaron “*coeficiente de sensibilidad*”, y, de hecho, el nombre es apropiado, porque, este parámetro es muy sensible, cambia drásticamente y se ve afectado por muchos factores, por ejemplo: la precisión con la cual se ha hallado el mapa de Poincaré, la aproximación utilizada al hacer la linealización, la región utilizada en la linealización, etc. Y, este parámetro es crucial en la aplicación exitosa del método.

Al respecto conviene decir que, hay dos enfoques para hallarlo. Por un lado, está el propuesto por: Ott, Grebogi y Yorke [57], utilizado por: Kiss *et al.* [45] y Lee y Chang [49], o, por otro lado, el propuesto por: Peng, Petrov, Showalter [62], y utilizado por: Bandyopadhyay *et al.* [7]. Ciertamente es que, los dos son equivalentes. De hecho, en este trabajo el factor g se calculó por los dos

métodos y se encontró que los resultados son similares, esto es, la variación es mínima y es sólo en algunas cifras decimales.

A continuación, se describe el procedimiento propuesto por Peng, Petrov, Showalter [62]: En concreto, básicamente consiste en medir la distancia horizontal entre los dos mapas¹⁴, $\Delta x_3 = x_{3n} - x_{3s}$. Y, luego, calcular $g = \frac{\Delta x_3}{\Delta u} \cong$ constante¹⁵.

Ya se conoce x_{3s} , y, para hallar x_{3n} , se hace una proyección horizontal desde el punto fijo, hasta que corte el segundo mapa, y este valor es x_{3n} .

5.6.2.1 ETAPA 2: CONTROL DEL SISTEMA

Luego, con estos valores calculados de x_{3s} y g se calcula el control, por medio de:

$$u_t = \frac{(x_{3n} - x_{3s})}{g} \quad (81)$$

$$\text{o, } u_t = k (x_{3n} - x_{3s}) \quad (82)$$

donde, $k = 1/g$

Se observa que en la ley de control sólo se necesita medir la diferencia ($x_{3n} - x_{3s}$) para aplicar la perturbación apropiada que estabilice el sistema. Pero, conviene advertir que, es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

→ La ley de control sólo se aplica cuando el sistema se encuentre en la región lineal del punto fijo.

¹⁴ El mapa hallado del valor nominal y aquel con el valor ligeramente diferente de u_r .

¹⁵ g se considera aproximadamente constante, porque, se basa en la suposición que el Δu es muy pequeño.

- La perturbación a aplicar debe ser muy pequeña, de modo que, es necesario limitarla a un valor máximo, u_{max} , de suerte que, si $u_t \geq u_{max}$, no se aplica el control, y se permite que el sistema se relaje, es decir, se deja $u_t = 0$.
- La perturbación se aplica en el momento en que la trayectoria cruce la sección de Poincaré; en el punto exacto de perforación; siempre y cuando, se encuentre en la región lineal del punto fijo.
- Para mantener el sistema estabilizado es necesario calcular la perturbación a aplicar en cada intersección a la sección [7,57,62].

Con esto en mente, el algoritmo de control consiste en lo siguiente: se monitorea la dinámica del sistema en términos de x_{3n} (la coordenada x_3 del punto de perforación a la sección), y, se espera a que la trayectoria pase cerca del punto fijo. En otras palabras, se espera a que la trayectoria se encuentre en la región lineal del punto fijo. Y, en ese momento se calcula y se aplica el control, siempre y cuando, sea menor que, un límite máximo (u_{max}), de lo contrario, se permite que el sistema se relaje (es decir, se hace $u_t = 0$). Por supuesto, este nuevo valor de u_t cambia la dinámica del sistema y hace que se acerque cada vez más al punto fijo. Luego, sigue así, en cada intersección a la sección, se calcula y se aplica la perturbación apropiada. En efecto, a las pocas iteraciones se estabiliza el sistema.

Resultados:

Control de la temperatura del reactor (x_3), manipulando la temperatura de la chaqueta de enfriamiento (u_t).

Variable controlada: x_3

Variable manipulada: $u_t = x_{3c}$

Sin perturbaciones: $d_1 = d_2 = 0$

1. ETAPA 1: CONSTRUCCIÓN DEL MAPA RETORNO

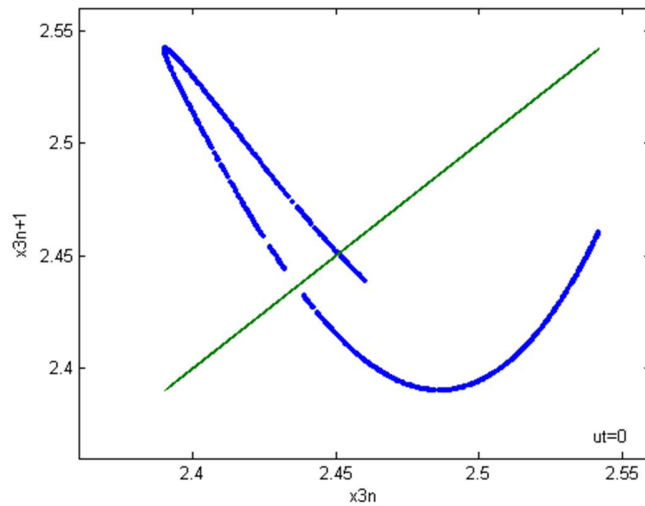
Aquí, se utilizó un mapa retorno de periodo-1 para la variable x_3 , esto es, pues, x_{3n} vs x_{3n+1} , primero se hizo en lazo abierto, con $u_t = 0$. Este mapa retorno se construyó tomando una sección de Poincaré en $x_1 = 0.13$ en la dirección ascendente del flujo, es decir, $\dot{x}_1 > 0$, siguiendo a Bandyopadhyay *et al.* [7].

En concreto, para hallar las perforaciones a la sección se escribió un programa en Fortran que realiza la integración del sistema de ecuaciones diferenciales (ec. 21) utilizando el método Runge Kutta Gill (RKG) de 4to orden con un tamaño de paso de $h=1 \times 10^{-6}$, y, simultáneamente se aplicó el método de Hénon¹⁶. Aquí, la integración se realizó entre $0 < t < 1200$ s, dejando un tiempo de transición de 150 s, necesario para permitir que las trayectorias se asienten en el atractor. Se utilizó la condición inicial y los valores de los parámetros reportados por Kahlert *et al.* [43] con $\beta = 7.9999$.

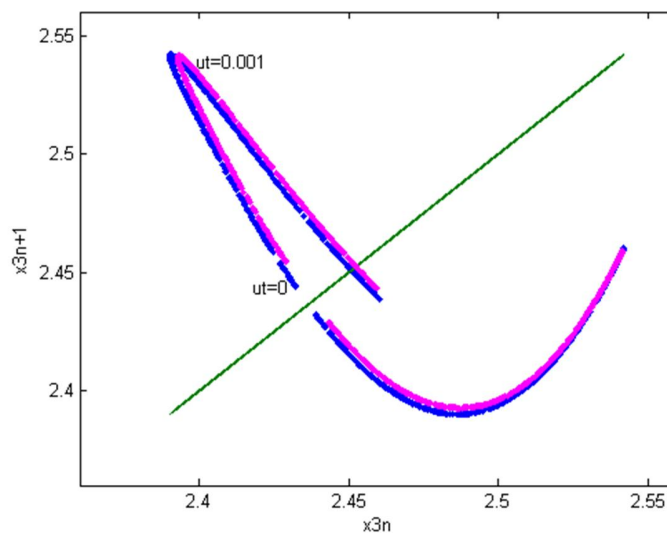
Primero que todo, esto se hizo con $u_t = 0$. Seguidamente se trazó la bisectriz y en el punto de corte con el mapa se encontró el punto fijo de periodo-1, x_{3s} (Figura 56a).

¹⁶ Se utilizó el algoritmo de Hénon (Hénon, 1982) para calcular el mapa de Poincaré, dado que, con esto se reduce el error que pueda ocurrir al realizar la interpolación y encontrar el punto exacto de perforación en la sección de Poincaré. Cabe señalar que, los sistemas disipadores son muy sensibles a este error, cosa que no ocurre en los sistemas conservativos. En concreto, el algoritmo de Hénon utiliza una integración *backward* en el tiempo, dónde, se cambia el tamaño de paso sólo por una iteración, con el objeto de, encontrar las coordenadas del punto exacto de perforación a la sección de Poincaré.

Figura 56. Mapa retomo de periodo-1, x_{3n} vs x_{3n+1} , y, la bisectriz



(a)



(b)

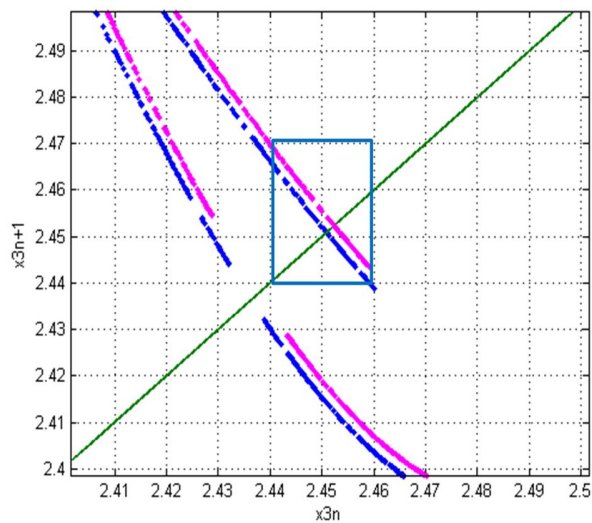
(a) azul: mapa retomo con $u_t = 0$, verde: bisectriz; (b) azul: mapa retomo con $u_t = 0$; rosado: mapa retomo con $u_t = 0.001$; verde: bisectriz Fuente: Autor

En la Figura 56 se observa que el mapa no es unimodal, que es, la condición para aplicar el método. También, se observa que la bisectriz corta el mapa en un solo punto, y, que el mapa alrededor del punto fijo es casi lineal (Figura 56-58), lo que facilita la ubicación del punto fijo. Aquí, se utilizó una aproximación de mínimos

cuadrados lineal para linealizar la región alrededor del punto fijo (Figura 59). Esto es, se eligieron los puntos entre $2.44 \leq x_{3n} \leq 2.46$ (Figura 57), y, se utilizó un polinomio de primer orden, con las funciones *polyfit-polyval* de Matlab. Allí, se encontró que $x_{3s} = 2.450905866$.

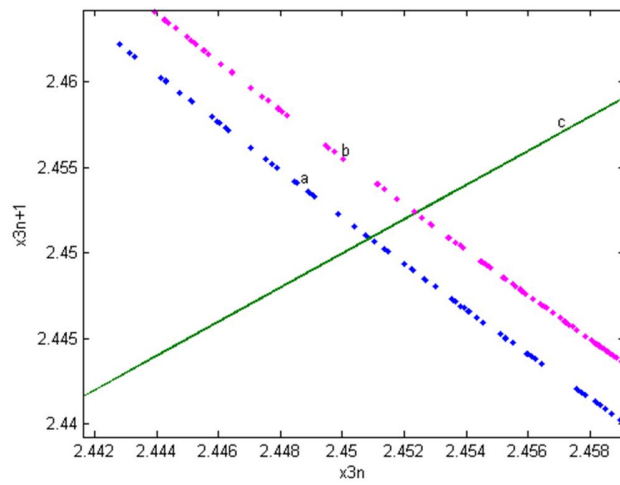
Luego, se hizo un mapa retorno de periodo-1 utilizando un valor de u_t ligeramente diferente. En concreto, se utilizó: $u_t = 0.001$ siguiendo a Bandyopadhyay *et al.* [7], dónde, se encontró que el mapa mantiene la pendiente, y, sólo se desvía ligeramente en el espacio-fase (curva rosada en Figura 56b). Del mismo modo, se linealizó la región alrededor del punto fijo (Figura 59).

Figura 57. Ampliación de la figura 56b



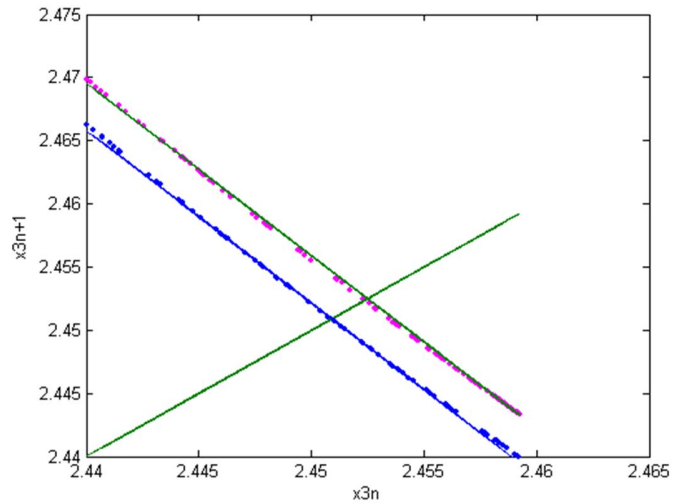
La región encerrada: $2.44 \leq x_{3n} \leq 2.46$, muestra que el mapa se comporta de manera casi lineal alrededor del punto fijo. Fuente: Autor

Figura 58. Región encerrada en el recuadro de la figura anterior



a. azul: $u_t = 0$, b. rosado: $u_t = 0.001$, c. verde: bisectriz. Fuente: Autor

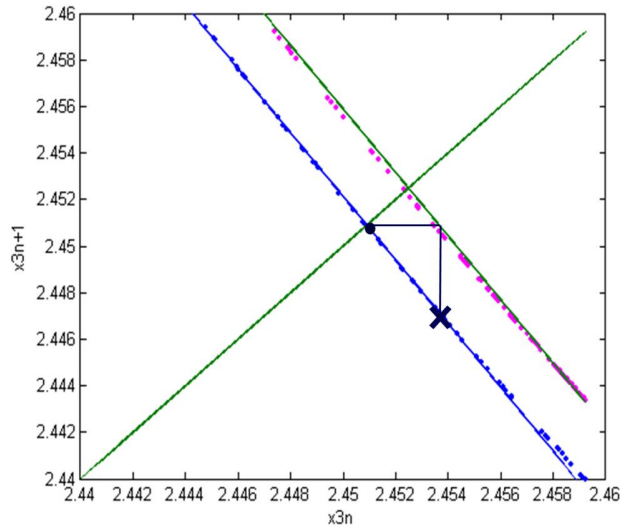
Figura 59. Linealización de la vecindad alrededor del punto fijo



Azul: $u_t = 0$, rosado: $u_t = 0.001$, Fuente: Autor

Seguidamente se hace una proyección horizontal del punto fijo al mapa en $u_t = 0.001$ (Figura 60), y, se encuentra que $x_{3n} = 2.453662101$. Así que, se obtiene que: $g = 2.7562349$.

Figura 60. Detalle de cómo se halla x_{3n}



Azul: $u_t=0$, rosado: $u_t=0.001$, verde: bisectriz, \times x_{3n} , \bullet x_{3s} . Fuente: Autor

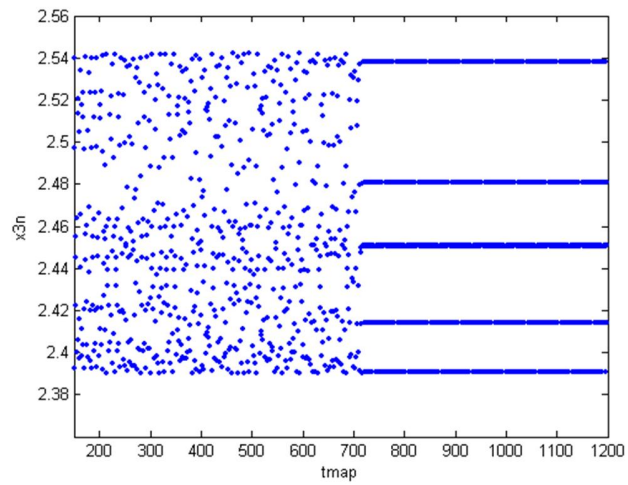
2. ETAPA 2: CONTROL DEL SISTEMA

Por cierto, la simulación se hizo en Fortran, y, las gráficas y las aproximaciones de mínimos cuadrados se realizaron en Matlab. Vale la pena advertir que, hasta aquí, los resultados obtenidos son consecuentes con los obtenidos por Bandyopadhyay *et al.* [7].

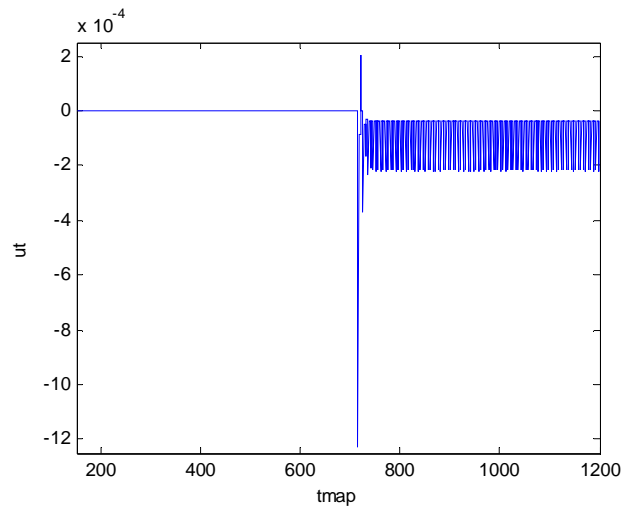
Ahora, con los valores calculados de x_{3s} y g se implementa el control. Entonces, se escribió un programa en Fortran que hace lo siguiente: Primero que todo, deja un tiempo de transición de 150 s, esto es, entre $0 < t < 150$, para que las trayectorias se asienten en el atractor. Luego, se permite que el sistema funcione en lazo abierto hasta $t = 700$ s ($u_t = 0$). Seguidamente, en $t = 700$ s se enciende el control. Aquí, el sistema espera a que la trayectoria se encuentre en la vecindad del punto fijo, esto es, entre $2.44 < x_{3n} < 2.46$, y, cuando esto ocurre calcula la perturbación apropiada y la aplica en el punto exacto de perforación a la sección, siempre y

cuando, se cumpla que: $u_t \leq u_{max}$. De lo contrario, se deja $u_t = 0$, es decir, se deja que el sistema se relaje y evolucione al atractor caótico de nuevo. Aquí, deliberadamente se eligió el valor máximo permitido de la perturbación a aplicar, y, se tomó: $u_{max} = 4 \times 10^{-3}$.

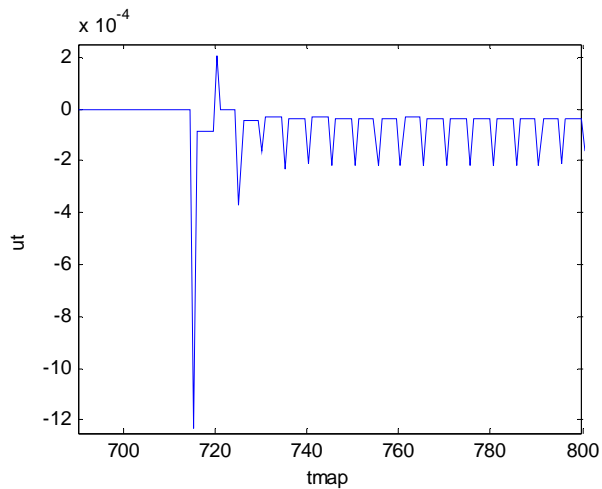
Figura 61. a) Funcionamiento del control de la órbita de periodo-1, b) comportamiento dinámico del controlador, c) ampliación de (b)



(a)



(b)



(c)

Fuente: Autor

Entonces, se monitorea x_{3n} (valor de la variable x_3 en el punto de intersección a la sección) vs. t_{map} (tiempo en que ocurre la intersección a la sección) (Figura 61a).

Ahora bien, de los resultados, se observa que el control se enciende en $t = 700$ s y en aproximadamente $t = 716$ s, el control estabiliza el sistema a la órbita de periodo-5, y, no a la órbita de periodo-1, como se deseaba. Recuerde que, los datos de punto fijo y del factor g se calcularon a partir de un mapa retorno de periodo-1, por lo tanto, se esperaría que el sistema se estabilice a la órbita de periodo-1. (Figura 61a).

En este punto los resultados obtenidos contrastan con los reportados por Bandyopadhyay *et al.* [7]. Ya que, ellos sí lograron estabilizar el sistema a la órbita periódica inestable de periodo-1.

Respecto al control, se observa que una vez se enciende el control, las perturbaciones a aplicar toman valores muy pequeños, del orden de -2.2×10^{-4} hasta -0.37×10^{-4} (Figuras 61b y 61c).

Discusión

Es indudable que el método falla al controlar el sistema a la órbita de periodo-1. Sin embargo, Bandyopadhyay *et al.* [7] lograron hacerlo. Aquí, se redujo la vecindad alrededor del punto fijo, se redujo el valor de u_t para desviar el mapa y hallar el factor g , se restringió el valor de la perturbación a aplicar, de modo que, sólo tome valores positivos, pero, no se consiguió estabilizar el sistema a la órbita de periodo-1.

Según Eugene Mihaliuk (Eugene Mihaliuk, comunicación personal, 26 marzo de 2010):

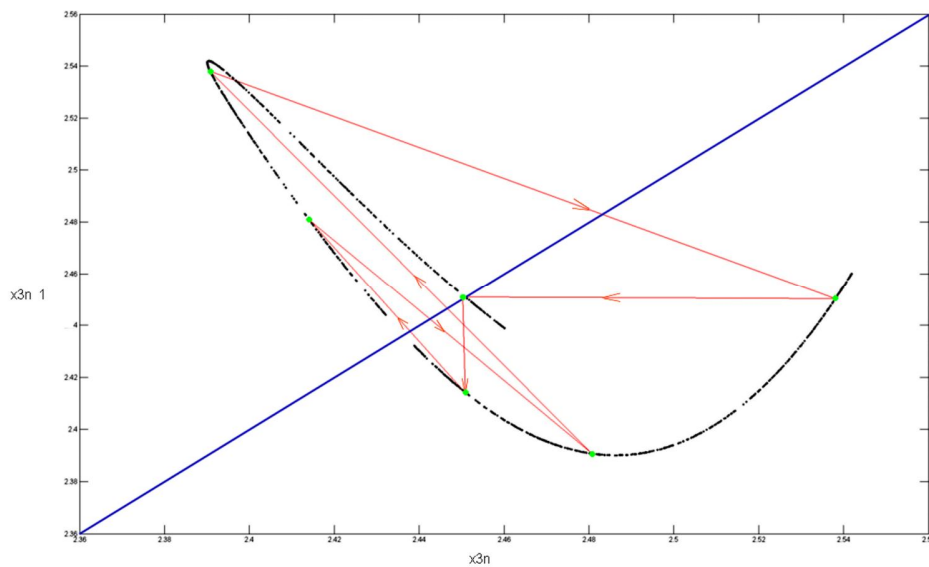
“...el problema radica principalmente en que el mapa no es unimodal, además, el sistema pasa de caótico a cuasi periódico cuando la perturbación a aplicar toma valores negativos, de otro lado, el hecho que la variable manipulada y la controlada se encuentren directamente relacionadas hace que pueda ocasionar dificultades en el algoritmo de control, del mismo modo, el desvío del mapa retorno es muy pequeño, respecto al, ancho de la región de control, lo que indica una región de estabilidad muy pequeña...”

Pues bien, en efecto, como lo afirma Eugene Mihaliuk el mapa no es unimodal, es decir, no se cumple el requisito para aplicar el método¹⁷ (Figuras 56 y 62). De hecho, este es el principal problema. La presencia de una segunda rama, hace que tan pronto se active el control, éste fácilmente salta de una rama a la otra y se escapa de la región de control ocasionando la ocurrencia de una órbita de periodo-5, hasta que regresa a la región que se está controlando, como se muestra en la Figura 62.

¹⁷ “...El algoritmo es aplicable en principio a todos los puntos inestables correspondientes a los ciclos límite inestables de un atractor extraño. El único requisito es que el atractor se describa efectivamente por una dinámica 1D en la región alrededor del punto inestable de interés...” (Petrov, Peng, Showalter (1992)).

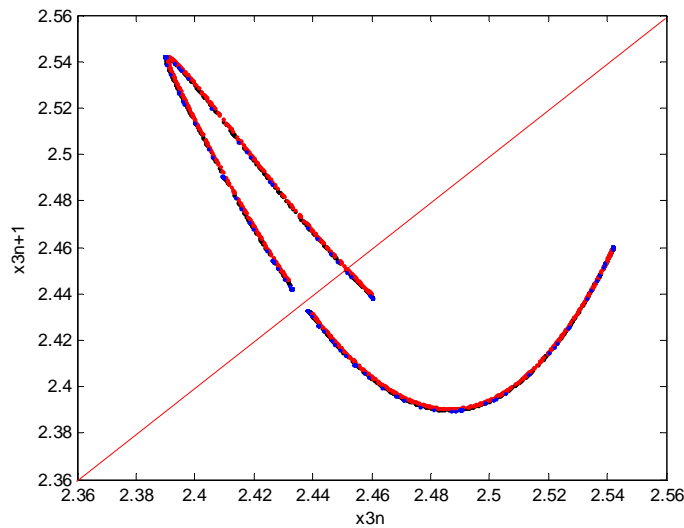
Ahora bien, en la Figura 62 se observa que en efecto $x_3 = 2.450905866$ puede ser una órbita de periodo-1, pero, también, hay una rama que va de 2.450905866, a, 2.415. Es decir, que existe la posibilidad de saltar a dicha rama. Por supuesto, esto sólo indica que el control puede en algunos casos comenzar en la rama equivocada, si este empieza en la órbita de periodo-1, no hay problema. A saber, es muy probable que esto sea lo que le ocurrió a Bandyopadhyay *et al.* [7], que tal vez, encontró la manera de comenzar el control en la órbita de periodo-1, y evitar que se escape a la segunda rama.

Figura 62. Origen de la órbita de periodo-5 en el mapa retorno de periodo-1



Fuente: Eugene Mihaliuk (comunicación personal, marzo 2010)

Figura 63. Mapa retorno de periodo-1 para diferentes valores del parámetro de control

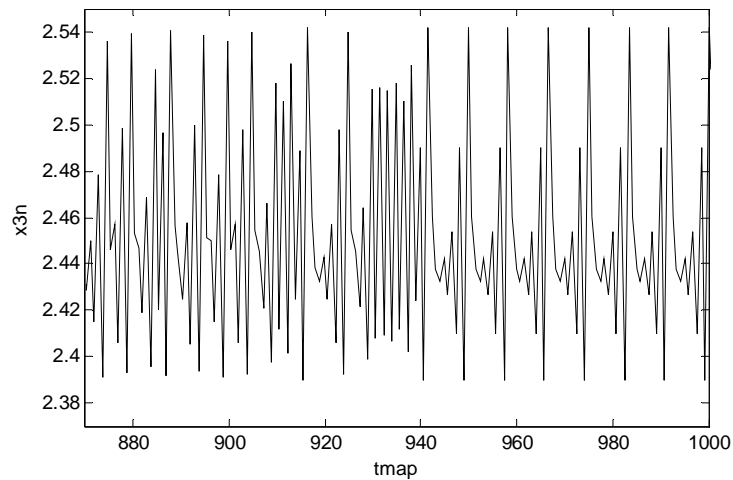


Negro: mapa con $u_t=0$, rojo: mapa con $u_t=2 \times 10^{-4}$, azul: mapa con $u_t=-2 \times 10^{-4}$, Fuente: Eugene Mihaliuk (comunicación personal, marzo 2010)

Precisamente, algunos autores advierten que esta posibilidad puede ocurrir [57, 7, 66]. Ott, Grebogi, Yorke [57] dice que en raros casos se puede llegar a controlar la órbita periódica equivocada. De otro lado, Bandyopadhyay *et al.* [7] advierte que se debe tener cuidado al aplicar el control, cuando la trayectoria entre al régimen lineal, pero, aún esté lejos del punto fijo, porque, se puede llegar a estabilizar alguna otra órbita periódica existente.

Por otro lado, al reconstruir el mapa retorno con valores de cero, positivos y negativos ($\pm 2 \times 10^{-4}$) del parámetro de control (Figura 63), se observa que, para valores positivos el mapa está bien, pero, para valores negativos el mapa caótico se destruye, y, aparece un comportamiento cuasi periódico (Figura 64). Así, en la Figura 64 se observa la serie de tiempo de la variable x_3 . Entre 0 y 940 s, funciona en lazo abierto ($u_t = 0$), y en $t = 940$ s, el control se cambia a $u_t = -2 \times 10^{-4}$. Se observa como el comportamiento cambia de caótico a cuasi periódico al tomar valores negativos en la perturbación.

Figura 64. Comportamiento cuasi periódico de la variable x_3

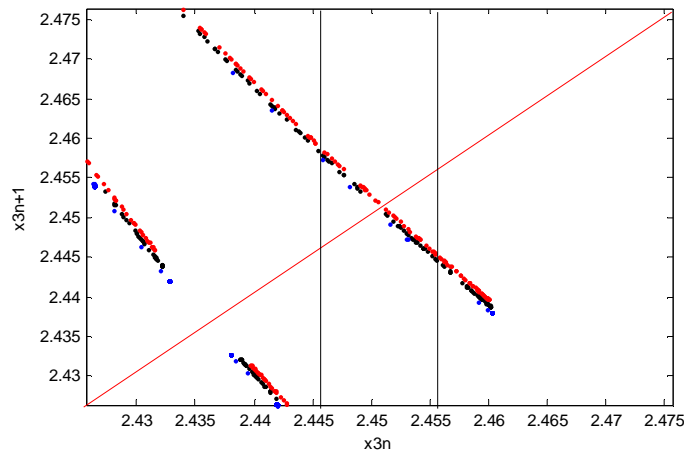


Fuente: Eugene Mihaliuk (comunicación personal, marzo 2010)

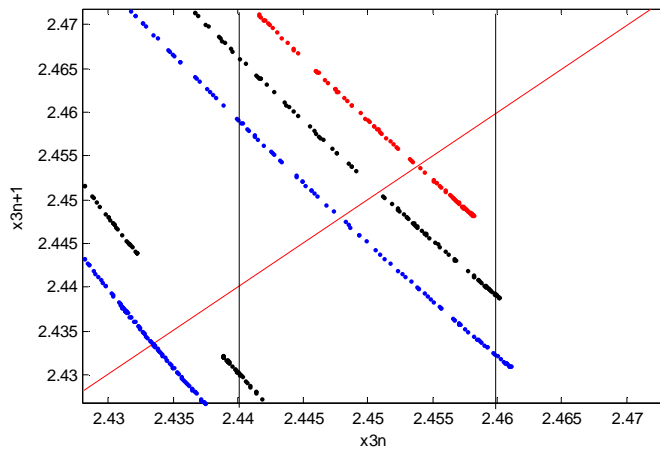
Cierto es que, en la simulación al activar el control en $t = 700$, se permite que éste tome valores positivos y negativos, siempre y cuando, sean menores que un valor máximo permitido de la perturbación a aplicar (u_{max}). Sin embargo, se observa que cuando $u_t = -2 \times 10^{-4}$, ya se presenta el cambio en el comportamiento dinámico. Con esto en mente, se hicieron pruebas, dónde, se restringió la perturbación para que sólo tome valores positivos, pero, no se pudo controlar el sistema en ningún momento.

Igualmente, está el hecho que la vecindad en la que se intenta aplicar el control ($2.44 \leq x_{3n} \leq 2.46$) que se está utilizando es muy grande, respecto a, la desviación permitida en el mapa para aplicar el control (Figura 65). Lo que indica una región de estabilidad muy pequeña. Esto también puede causar dificultad. Sin embargo, se hicieron pruebas reduciendo la vecindad ($2.446 \leq x_{3n} \leq 2.456$) y reduciendo el valor máximo de la perturbación a $u_{max} = \pm 4 \times 10^{-4}$, y el resultado siguió siendo el mismo.

Figura 65. Comparación entre el ancho de la región de control y el desvío permitido en la perturbación



(a)



(b)

Negro: mapa con $u_i=0$, rojo: mapa con $u_i=pert$, azul: mapa con $u_i=-pert$; (a) $pert = 2 \times 10^{-4}$, (b) $pert = 2 \times 10^{-3}$.
 Fuente: Eugene Mihaliuk (comunicación personal, marzo 2010)

También, está el hecho que la variable manipulada y la controlada se encuentran directamente relacionadas. Según Eugene Mihaliuk (Eugene Mihaliuk, comunicación personal, 26 marzo de 2010), esto puede ocasionar dificultad en un algoritmo de control basado en un simple algoritmo proporcional *feedback*. Sin embargo, Lee y Chang [49] lograron controlar un sistema de una reacción química autocatalítica que exhibe caos, mediante el método OGY, a la órbita de periodo-2, donde, se observa que, la variable controlada y manipulada se encuentra en la misma ecuación.

En resumidas cuentas, lo que está ocurriendo en este caso, es que se está estabilizando el sistema a la órbita de periodo-5, cuando, el objeto es estabilizar la órbita de periodo-1. Está claro que, el hecho que el mapa no sea unimodal representa la principal dificultad al aplicar este método, y, obtener buenos resultados, además, está el hecho que el sistema es muy inestable y tiene una región de estabilidad muy pequeña.

En conclusión:

- El algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa controla el sistema a la órbita de periodo-5 y falla al tratar de estabilizar el sistema a la órbita de periodo-1. Esto ocurre porque el sistema da origen a un mapa que aunque es unidimensional no es unimodal, por consiguiente, no cumple con el requisito para aplicar el método.
- No se recomienda utilizar los algoritmos de control que se basan en el mapa de Poincaré, y que requieren que el sistema, se pueda describir por un mapa unimodal unidimensional, ya que, el sistema bajo estudio no cumple.
- Se recomienda explorar el espacio-fase paramétrico del sistema, esto es, hacer el diagrama de bifurcación, para poder entender el comportamiento cuando la perturbación toma valores negativos.
- Es preferible que la variable controlada y la variable manipulada no estén directamente relacionadas, dado que, esto puede ocasionar dificultades en el algoritmo de control.
- Con Fortran los resultados son muy buenos. Mejora la precisión, la convergencia y el tiempo de cómputo se reduce notablemente. En Fortran es posible utilizar un método numérico explícito de tamaño de paso fijo, para

resolver un sistema de ecuaciones diferenciales rígido (*stiff*), como es el caso bajo estudio, en este sentido, se recomienda utilizar un paso muy pequeño del orden de $h \leq 1 \times 10^{-6}$, ya que, se necesita gran precisión para extraer el mapa de Poincaré.

- Los resultados obtenidos son consistentes con los resultados reportados por Bandyopadhyay *et. al.* [7], hasta el momento en que se calcula y aplica el control, ya que, de ahí en adelante están en contradicción, puesto que, ellos lograron controlar el sistema a la órbita periódica inestable de periodo-1. En otras palabras, no se logró verificar los resultados publicados por Bandyopadhyay *et. al.* [7].

- El método de control del caos: algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa tiene una flexibilidad enorme que no tienen las otras estrategias de control ensayadas en este trabajo, y, es que puede cambiar la dinámica de una órbita inestable de periodo-1, a una órbita inestable de periodo-2 y luego al caos, si lo desea. Controlando el sistema en diferentes dinámicas con sólo cambiar unos parámetros. Pero, es necesario explorarla aún más para poder explotarla. El hecho que éste método no funcionara en el sistema bajo estudio no indica que no dé buenos resultados en otros sistemas. Ya que, en dinámica no lineal nada se puede generalizar y cada caso particular hay que estudiarlo por separado.

5.7 COMPARACIÓN DE LAS DIFERENTES ESTRATEGIAS

A juzgar por los resultados, de las estrategias de control ensayadas se recomienda utilizar el control *feedback*. Puesto que, proporciona buenos resultados, es una estrategia fácil de implementar, sin complicaciones numéricas y fácilmente controla el sistema. De estas, se recomienda el control P, ya que, el *offset* no es muy grande, es robusto frente a las perturbaciones, sigue los cambios en el *set point*, y el comportamiento no es tan oscilatorio como en el caso del control PI. Sin embargo, se recomienda explorar aún más la estrategia de control: algoritmo proporcional *feedback* basado en el mapa, ya que, los resultados son interesantes. Además, posee la ventaja que controla el sistema dentro del atractor caótico. Aquí, se puede tomar ventaja de las propiedades de los sistemas caóticos, como por ejemplo: la flexibilidad que poseen, cosa que no ocurre en una estrategia de control por migración, como lo es, el control P.

Ahora, en cuanto a, el control *feedforward-feedback* podría decirse, que aunque controla el sistema, y de hecho cumple con su objetivo que es rechazar los cambios en la variable controlada al estar presentes las perturbaciones gracias a la presencia del lazo *feedforward*, pues, no se justifica su implementación, dado que, la mejora que proporciona en el control es muy pequeña en comparación con los altos costos que implicaría.

De otro lado, en cuanto a redes neuronales artificiales, la estrategia que se ensayó que fue NLMPCC usando redes neuronales, no da buenos resultados. Ya que, sólo es capaz de controlar el sistema en un rango de tiempo. Aunque, se incrementó el aprendizaje de la red, el número de datos de entrenamiento y el número de nodos en la capa oculta, no se obtuvo un buen comportamiento. Cabe señalar que, la red utilizada fue un perceptron multicapas con aprendizaje BP, dónde, los nodos de la capa oculta tiene función de activación tangencial hiperbólica y las neuronas de la capa de salida tienen función de activación lineal. Se recomienda dos cosas:

primero estabilizar el sistema mediante una estrategia de control *feedback*, y, luego, aplicar redes neuronales artificiales como lo sugiere Nørgaard *et al.* [55], o, escribir el programa que implemente el método MPC no lineal usando redes neuronales, en código, esto es, sin utilizar Simulink y las rutinas que vienen implementadas. Puesto que, es probable que las funciones tal como viene implementadas en Simulink presenten limitaciones, y, en sistemas como el caso de estudio no proporcione buenos resultados.

En resumen, el sistema se puede controlar con la estrategia *feedback* y *feedforward-feedback*. De estas, no se justifica la implementación del lazo *feedforward*. Ahora, con la estrategia de control del caos: algoritmo basado en el mapa se controla a la órbita de periodo-5, y con la red neuronal artificial no se puede controlar en todo el rango de integración.

Entonces, se concluye que con sólo la estrategia de control *feedback* es suficiente, en este sentido, se elige un control P.

6. CONCLUSIONES

Referente al control *feedback*:

- ④ El control *feedback* es robusto frente a la presencia de la perturbación d_1 . Ahora, d_2 es la perturbación que presenta el efecto más severo, especialmente, si el cambio es negativo.
- ④ El comportamiento en el control PI es mucho más oscilatorio, respecto a, el control P. Sin embargo, es posible alcanzar el valor exacto del *set point*. Por otro lado, con el control P, la respuesta es más suave, y el valor del *set point* no se alcanza exactamente, pero se mantiene muy cerca.
- ④ Este sistema es más sensible a cambios en el *set point* que a cambios en las perturbaciones.
- ④ El control *feedback* sigue los cambios en el *set-point*, lo que indica un buen funcionamiento del controlador.
- ④ En resumen, en el caso bajo estudio, al comparar el control P y el control PI, se concluye que es preferible el uso del control P, dado que, es robusto frente a las perturbaciones, sigue los cambios en el *set point* y el comportamiento no es tan oscilatorio como en el caso del control PI. Además, el *offset* es pequeño, por lo tanto, no justifica implementar la acción integral.
- ④ La respuesta dinámica se ve dominada por el par imaginario complejo que son las raíces que se encuentran cercanas el eje imaginario. De ahí que, el comportamiento del sistema sea subamortiguado.
- ④ El sistema es estable en lazo cerrado con control P para todo $k_c > 1.2363$.

Respecto al control *Feedforward*

- Ⓒ El control *feedforward*, no controla el sistema
- Ⓒ El lazo de control combinado FF+FB si controla el sistema.
- Ⓒ El lazo de control *feedforward* representa una mejora sobre el control *feedback*, sin embargo, la mejora es muy pequeña, de modo que, no se justifica su implementación.
- Ⓒ El lazo de control combinado *feedforward-feedback* rechaza cambios en las perturbaciones.
- Ⓒ El lazo de control combinado *feedforward-feedback* es más sensible a cambios en el *set-point* que a cambios en las perturbaciones.
- Ⓒ De las dos maneras ensayadas de implementar el lazo combinado *feedforward-feedback*, el mejor comportamiento se obtuvo con el caso 2 (ajustando el *set-point*), dado que, el error en estado estacionario es menor.
- Ⓒ Aunque, las estrategias de control: *feedback*, *feedforward-feedback* (casos 1 y 2) controlan el sistema, el mejor comportamiento se obtuvo con el lazo *feedback* y el lazo combinado *feedforward-feedback* (caso 2). Ahora bien, aunque, en esta última se observa que, el lazo *feedforward* está cumpliendo su función; que es rechazar cambios en las perturbaciones; no se justifica su implementación, dado que, la mejora que proporciona sobre el control es mínima en comparación con los altos costos que implicaría.

Respecto a redes neuronales:

- Ⓢ La mejor configuración se obtuvo con una estructura 1-4-1. Las neuronas tienen aprendizaje BP, y, los datos a la entrada están normalizados.
- Ⓢ En el caso bajo estudio, éste esquema de control no es capaz de controlar el sistema en todo el rango de integración. Aquí, se aumentó el número de datos de entrenamiento, el número de nodos en la capa oculta, el entrenamiento de la red, pero, no fue posible mejorar los resultados.
- Ⓢ El buen funcionamiento del controlador está sujeto a los valores que tome la señal de entrada, es decir, dependiendo de esto, puede controlar, no controlar, o, controlar sólo en un rango el sistema. En concreto, controla el sistema y sigue los cambios de la señal de entrada, siempre y cuando, la señal de entrada tome valores entre 5 y 8. Si toma valores mayores, aunque, controla el sistema, sólo sigue los cambios durante los primeros diez segundos, y, si toma valores menores, no controla el sistema.

Referente al método de control del caos:

- Ⓢ El método controla el sistema a la órbita periódica inestable de periodo-5, falla al tratar de estabilizar el sistema a la órbita de periodo-1.
- Ⓢ La presencia de una segunda rama en el mapa retorno de periodo-1, hace que al tratar de estabilizar el sistema en la vecindad del punto fijo, la trayectoria se escape de la región de control, y salte a la segunda rama, dando origen a una órbita periódica inestable de periodo-5.
- Ⓢ No se recomienda utilizar métodos de control del caos que se basen en el mapa de Poincaré, y que requieran que el atractor se pueda describir por un

mapa unimodal unidimensional en el sistema bajo estudio, ya que, éste no cumple esta condición.

- ⊗ No se recomienda utilizar el método de Pyragas para controlar el sistema bajo estudio. Dado que, los atrasos en el tiempo no son deseables en el control de procesos químicos, y un tiempo muerto de $\tau = 0.839$ unidades de tiempo adimensional es considerable.

BIBLIOGRAFÍA

1. AGACHI P.S., NAGY Z.K., CRISTEA M.V., IMRE-LUCACI Á. Model Based Control. Case Studies in Process Engineering. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006
2. ALLIGOOD Kathleen T., SAUER Tim D., YORKE James A., Chaos. An Introduction to Dynamical Systems. Springer, 1996
3. ANDRIEVSKII B.R., FRADKOV A. L., Control of chaos, Methods and applications. *Automation and remote control, reviews*, 2003, vol 64. No 5, p. 673-713
4. ARAROMI Dauda Olurotimi, AFOLABI Tinuade Jolaade, ALOKO Duncan, Neural Network Control of CSTR for Reversible Reaction Using Reverence Model Approach, *Leonardo Journal of Sciences*, vol 6, NO 10, p. 25-40, referencia en Internet: http://ljs.academicdirect.org/A10/025_040.pdf
5. BALAKOTIAH Vemuri, LUSS Dan, Structure of the Steady-State Solutions of Lumped-Parameter Chemically Reacting Systems, *Chem. Eng. Sci.*, 1982, vol 37, NO 11, p.1611-1623
6. -----, Multiplicity Features of Reacting Systems: Dependence of the Steady-States of a CSTR on the Residence Time, *Chem. Eng. Sci.*, 1983, vol 38, NO 10, p.1709-1721
7. BANDYOPADHYAY Jayanta K., RAVI KUMAR V., KULKARNI B. D., "Regulatory Control of a Chaotic Nonisothermal CSTR", *AIChE J.*, 1993, vol. 39, No. 5, p. 908-912
8. BEQUETTE, Wayne B. Nonlinear Control of chemical processes: a review. *Ind. Eng. Chem. Res.* 1991, vol 30, p. 1391-1413
9. BHAT N., MCAVOY T. J., Use of Neural Nets for Dynamic Modeling and Control of Chemical Process Systems, *Comput. Chem. Eng.*, 1990, vol 14, NO. 4/5, p. 573-583
10. BIARDI G., GIONA M., GIONA A.R., Chaos and fractals in chemical engineering. *Proceedings of the first national conference*. Rome Italy, 1994, p. 165-184

11. BOCCALETTI S., GREBOGI C., LAI Y.C., MANCINI H., MAZA D. The control of chaos: Theory and applications, *Physics Reports*, 2000, vol 329, p.103-197
12. CALVET Jean-Paul, ARKUN Yaman, "Feedforward and Feedback Linearization of Nonlinear Systems and Its Implementation Using Internal Model Control (IMC)", *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1988, vol. 27, p. 1822-1831
13. CALVO Oscar, CARTWRIGHT H. E., Fuzzy control of chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 8, 1998, p. 1743-1747
14. CARRILLO RINCON Elberto. Introducción a los Computadores. Problemario-Solucionario. Universidad Industrial de Santander, 1995
15. COUGHANOWR Donald R., "Process Systems Analysis and Control", Second Edition, McGraw-Hill International Editions, 1991
16. CHANG Hsueh-Chia y CALO Joseph M. Exact criteria for uniqueness and multiplicity of an n th order chemical reaction via a catastrophe theory approach. *Chem. Eng. Sci.*, 1979, vol 34, p. 285-299
17. CHANG Hsueh-Chia, CHEN Liang-Heng. Bifurcation characteristics of nonlinear systems under conventional PID control. *Chem. Eng. Sci.*, 1984, vol 39, No 7/8, p.1127-1142
18. CHAU Pao, Chemical Process Control: A first course with Matlab, 2001
19. CHEN Chien-Chong, FU Chun-Chong, TSAI Chong-Hung, Stabilized Chaotic Dynamics of Coupled Nonisothermal CSTRs, *Chem. Eng. Sci.*, 1996, vol. 51, N^o 23, p. 5159-5169
20. DE SOUZA Mauricio B. Jr., PINTO Jose Carlos, LIMA Enrique L., Neural Net Based Model Predictive Control of a Chaotic Continuous Solution Polymerization Reactor, Proceedings of the 1993 International Joint Conference on Neural Networks, 1993, p. 1777-1780
21. DOEDEL Eusebius J., HEINEMANN Robert F, Numerical Computation of Periodic Solution Branches and Oscillatory Dynamics of the Stirred Tank Reactor with $A \rightarrow B \rightarrow C$, *Chem. Eng. Sci.*, 1983, vol 38, N^o 9, p.1493-1499

22. DHOOGHE A., GOVARTES W., KUZNETSOV Yu A., MESTRON W. y RIET A.M., 2003,
<http://allserv.rug.ac.be/~adhooge/research.html>

23. DITTO W. L., RAUSEO S. N., SPANO M. L., Experimental Control of Chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, N^o. 26, p. 3211-3214

24. DITTO W. L., SPANO M. L., LIDNER John F., Techniques for the Control of Chaos, *Physica D*, 1995, vol.86, p. 198-211

25. DITTO W., MUNAKATA T., Principles and applications of chaotic systems, *Communications of the ACM*, 1995, vol 38, No. 11, p. 96-102

26. DOHERTY Michael F., OTTINO Julio M., Chaos in deterministic systems: Strange attractors, turbulence, and applications in chemical engineering, *Chem. Eng. Sci.*, 1988, vol 47, No 2, p.139-183

27. FARR W. W., ARIS R., "Yet who would have thought the old man to have had so much blood in him?"-reflections on the multiplicity of steady states of the stirred tank reactor. *Chem. Eng. Sci.*, 1986, vol 41, N^o 6, p. 1385-1402

28. FLORES Antonio, Modelamiento y linealización de sistemas no lineales usando SIMULINK-III, http://200.13.98.241/~antonio/cursos/control/notas/dynamics/modlin3_simulink.html

29. FLYNN Cathal, WILSON Niall. A simple method for controlling chaos. *Am. J. Phys.* 1998, vol 66, N^o 8, p. 730-735

30. GARCÍA DE JALÓN Javier, RODRIGUEZ José Ignacio, VIDAL Jesús, Aprende Matlab 7.0 como si estuviera en primero. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, 2005, referencia en internet: <http://mat21.etsii.upm.es/ayudainf/aprendainf/Matlab70/matlab70primero.pdf>

31. GEAR Charles William, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Englewood Cliffs, N. J.:Prentice-Hall, 1971

32. GIONA M., PALADINO O. Bifurcation analysis and stability of a controlled CSTR. *Comput. Chem. Eng.* 1994, vol 18, No 9, p. 877-887

33. GIONA M., PATTIERNO O., BOY S. Control of chaotic reactor dynamics. *Proceedings of the first national conference in Chaos and fractals in chemical engineering*, editors Biardi G., Giona M., Giona A. 1994, p. 201-217

34. GOVORUKHIN Vasily, Calculation Lyapunov Exponents for ODE, Matlab Central - File Exchange, 2004, referencia en internet:
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4628-calculation-lyapunov-exponents-for-ode>

35. HEINEMANN Robert F., POORE Aubrey B., Multiplicity, Stability, and Oscillatory Dynamics of the Tubular Reactor, *Chem. Eng. Sci.*, 1981, vol 36, p. 1411-1419

36. HENON M., "On the Numerical Computation of Poincaré Maps", *Physica 5D*, 1982, p. 412-414

37. HENSON M.A. Nonlinear model predictive control: current status and future directions. *Comput. Chem. Eng.* 1998, vol 23, p. 187

38. HILERA José R., MARTINEZ Victor J., Redes Neuronales Artificiales. Fundamentos Modelos y Aplicaciones. Alfaomega Grupo Editor, 2000

39. HLAVÁČEK, KUBICĚK y VISNÁK. Modelling of chemical reactors-XXVI multiplicity and stability analysis of a continuous stirred tank reactor with exothermic consecutive reactions $A \rightarrow B \rightarrow C$. *Chem. Eng. Sci.*, 1972, vol 27, p.719-742

40. HUNT E. R., "Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System: The Diode Resonator", *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 67, N^o. 15, p. 1953-1955

41. JORGENSEN D. V., ARIS Rutherford, On the Dynamics of a Stirred Tank with Consecutive Reactions, *Chem. Eng. Sci.*, 1983, vol 38, N^o 1, p.45-53

42. ----- More on the dynamics of a stirred tank with consecutive reactions. *Chem. Eng. Sci.*, 1984, vol 39, N^o 12, p. 1741-1752

43. KAHLERT C., RÖSSLER O.E., VARMA A., "Chaos in a Continuous Stirred Tank Reactor with Two Consecutive First Order Reactions, One Exo-one Endothermic", *Modelling of Chemical*

- Reaction Systems. Proceedings of an International Workshop, Heidelberg, Fed. Rep. of Germany, editors: K.H. Ebert, P. Deuffhard and W. Jäger. Springer-Verlag, 1981. p. 355-365*
44. KIM Hwi Jin, y CHANG Kun Soo, "A method of model validation for chaotic chemical reaction systems based on neural network", *Korean J. Chem. Eng.*, 2001, vol. 18, N^o 5, p. 623-629
 45. KISS I.Z., GÁSPÁR V., NYIKOS L., PARMANANDA Punit., Controlling Electrochemical Chaos in the Copper-Phosphoric Acid System. *J. Phys. Chem. A.*, 1997, vol. 101, p. 8668-8674
 46. KISS István Z., GÁSPAR Vilmos, Controlling Chaos with Artificial Neural Network: Numerical Studies and Experiments, *J. Phys. Chem. A.*, 2000, vol. 104, p. 8033-8037
 47. KOLTSOVA Eleonora M., CHERENKOV Mikhail V., KORCHAGIN Evgeniy Yu, Non-linear Processes and control of chaos in chemical technology. *Phys Con, IEEE*, 2003, p. 484-490
 48. KUO Benjamin C., *Sistemas de control automático. Séptima Edición*, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 1996
 49. LEE, Joon Suh y CHANG Kun Soo, "Applications of Chaos and Fractals in Process Systems Engineering", *J. Process Control.*, 1996, Vol. 6, N^o 2/3, p. 71-87
 50. LUYBEN William L., "Process Modeling Simulation and Control for Chemical Engineers", First Edition, Mc Graw Hill, 1973
 51. MARTIN DEL BRIO, Bonifacio; SANZ Molina, Alfredo. *Redes Neuronales y Sistemas Difusos*. Alfaomega Grupo Editor: Ra-Ma, 2002
 52. MEJÍA Enrique, VILLAREAL Gustavo, *Comparación de sistemas de control en columnas de destilación*. Tesis. Universidad del Atlántico, 1985
 53. MURRILL Paul W., *Fundamentals of Process Control Theory*, Second Edition, Instrument Society of America, 1991, cap.11
 54. *Neural Network Toolbox: Control Systems, User's Guide*. The Mathworks Inc. 1992-2010

55. NØRGAARD M., RAVN O., POULSEN N. K., HANSEN L. K., Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems. A Practitioner's Handbook, Springer-verlag, 2000
56. OGATA Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna, Tercera Edición, Pearson Educación, Prentice-Hall Hisapanoamericana, 1998
57. OTT Edward, GREBOGI Celso, YORKE James A., Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol.64, N0. 11, p. 1196-1199
58. PALADINO O., RATTO M., COSTA P. Stability and chaotic behavior of a controlled imperfectly mixed CSTR: order and non-ideality, *Proceedings of the first national conference in Chaos and fractals in chemical engineering*, editors Biardi G., Giona M., Giona A. 1994, p. 185-200
59. PARMANANDA P, MADRIGAL R., RIVERA M., NYIKOS L., Kiss I.Z., GÁSPÁR V., Stabilization of Unstable Steady States and Periodic Orbits in an Electrochemical System using Delayed-Feedback Control, *Phys. Rev. E.*, 1999, vol. 59, N0. 5, p. 5266-5271
60. PELLEGRINI L., BIARDI G. Chaotic behaviour of a controlled CSTR. *Comput. Chem. Eng.* 1990, vol 14, N0 11, p. 1237-1247
61. PELLEGRINI L., BIARDI G., TABLINO POSSIO C., ALBERTONI S. The role of time delay on the stability of chemical systems. *Proceedings of the first national conference in Chaos and fractals in chemical engineering*, editors Biardi G., Giona M., Giona A. 1994, p. 227-238
62. PENG Bo, PETROV Valery, SHOWALTER Kenneth, Controlling Chemical Chaos, *J. Phys. Chem.*, 1991, vol 95, p. 4957-4959
63. PÉREZ Manuel, ALBERTOS Pedro, Self-oscilating and chaotic behaviour of a PI controlled CSTR with control valve saturation, *J. Process Control*, 2004, vol 14, p. 51-59
64. PETROV Valery, PENG Bo, SHOWALTER Kenneth, A map-based algorithm for controlling low-dimensional chaos. *J. Chem. Phys.* 1992, vol 96, N^o 10, p. 7506-7513
65. PETROV Valery, GÁSPÁR Vilmos, MASERE Jonathan, SHOWALTER Kenneth, Controlling Chaos in the Belousov-Zhanotinsky reaction. *Nature* 361, 1993, pag. 240-243

66. PETROV V., MIHALIUK E., SCOTT Stephen, SHOWALTER K., Stabilizing and characterizing unstable states in high dimensional systems from time series. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, N^o. 5, p. 3988-3996
67. PSICHOGIOS Dimitris C., UNGAR Lyle H., Direct and Indirect Model Based Control Using Artificial Neural Networks, *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1991, vol 30, p. 2564-2573
68. PYRAGAS K., Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback, *Phys. Lett. A*, 1992, vol.170, p. 421-428
69. QAMMAR H., SESHADHRI K.R., GOMATAM R., VENKATESAN A. Control of a chaotic polymerization reaction using linear and nonlinear controllers. *Chem. Eng. J.*, 1996, vol 64, p. 141
70. RAZÓN Luis F., SCHMITZ Roger A., Multiplicities and instabilities in chemically reacting systems - A Review, *Chem. Eng. Sci.*, 1987, vol 42, N0 5, p.1005-1047
71. Referencia en internet:
http://descargas.cerventesvirtual.com/servlet/SirveObres/57961630323574941976613/005411_2.pdf
72. Referencia en internet: <http://es.wikipedia.org>
73. RIVERA M., MADRIGAL R., PARMANANDA P., EISWIRTH M., NYKOS L., KISS I. Z., GÁSPÁR V., Análisis numérico de caos espacio-temporal en sistemas extendidos espacialmente e investigación en la electrodisolución de metales. *Revista Mexicana de Física*, 2000, 46, suplemento 2, p. 11-15
74. SEBORG Dale E., EDGAR Thomas F., MELLICHAMP Duncan A., John Wiley & Sons Asia, reprint by Wiley India Edition, 2005, cap. 15
75. SEIDER Warren D., BRENGEL D.D., PROVOST A.M., Nonlinear analysis in process design. Why overdesign to avoid complex nonlinearities? *Ind. Eng. Chem. Res.* 1990, vol 29, p. 805-818

76. SEYDEL Rüdiger, From Equilibrium to Chaos Practical Bifurcation and Stability Analysis. Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1998
77. SEYDEL Rudiger y HLAVACEK Vladimir, Role of continuation in engineering analysis, *Chem. Eng. Sci.*, 1987, vol 42, N0 6, p.1281-1295
78. SHIMADA Ippei y NAGASHIMA Tomomasa, "A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems", *Progress of Theoretical Physics*, 1979, vol. 61, N^o 6, p. 1605-1616
79. SHINBROT Troy, GREBOGI Celso, OTT Edward, YORKE James A., Using Small Perturbations to Control Chaos. *Nature* 363, 1993, p. 411-417
80. SHINSKEY F. G., Process Control Systems. Application, Design and Tuning, Third Edition, Mc Graw Hill Inc., 1988, cap. 7
81. SMITH Carlos A., CORRIPIO Armando B., Principles and Practice of Automatic Process Control, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1997, p. 494-527
82. STEPHANOPOULOS George, Chemical Process Control. An Introduction to theory and Practice, Prentice-Hall International Series, 1984
83. STROGATZ Steven H., Studies in nonlinearity. Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Perseus Books, 1994
84. TOMAS Co. Short Tutorial on Matlab. Part 5. Using S-functions blocks in SIMULINK,2004, <http://www.chem.mtu.edu/~tbco/cm416/MatlabTutorialPart5.pdf>
85. UPPAL A., RAY W. H., POORE A. B., On the Dynamic Behavior of Continuous Stirred Tank Reactors, *Chem. Eng. Sci.*, 1974, vol 29, p.967-985
86. VAN DE BLEEK Cor M., COPPENS Marc-Olivier, SCHOUTEN Jaap C., Application of chaos analysis to multiphase reactors. *Chem. Eng. Sci.* 2002, vol 57, p. 4763-4778
87. VEGA M. P., LIMA E. L., PINTO J. C., Control of a Loop Polymerization Reactor Using Neural Networks, *Braz. J. Chem. Eng.*, 2000, vol 17, N_o 4-7, p. 471-481. ref en internet:

http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-66322000000400012&lng=en&nrm=iso

88. VILLERMAUX Jacques, Future Challenges for Basic Research in Chemical Engineering, *Chem. Eng. Sci.*, 1993, vol 48, N0 14, p. 2525-2535
89. WU Wei, "Nonlinear Bounded Control of a Nonisothermal CSTR", *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2000, vol. 39, p. 3789-3798
90. WOLF Alan, SWIFT Jack B., SWINNEY Harry L., VASTANO John A., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica 16D*, 1985, p. 285-317
91. ZUPAN Juse, GASTEIGER Johann, *Neural Networks for Chemists. An introduction*, VCH, 1993, p. 237-251