NÚMEROS REALES Y COMPLETACIÓN DE ESPACIOS PREMÉTRICOS EN MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVAS

JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2017

NÚMEROS REALES Y COMPLETACIÓN DE ESPACIOS PREMÉTRICOS EN MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVAS

JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO

Trabajo de grado para optar al título de

Matemático

Director

CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN

Ph. D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2017

Antes de pensar

ya tienes la respuesta.

No la dejes ir.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primero a mis padres, María y José, por su constante apoyo y por todo su afecto. Ambos me han aportado formas diferentes de ver y entender el mundo, pero que al final se complementan.

A mi director de tesis, el profesor Carlos Uzcátegui, quien supo encauzar mis ideas sobre este trabajo. Le agradezco mucho toda su colaboración y la inspiración que recibí de sus clases, pero también la calidez con la que me ha tratado y sus valiosos consejos.

Al profesor Rafael Isaacs, quien ha influido de gran manera en mi formación académica, y me motivó siempre a lo largo de la carrera.

A todos mis muy buenos amigos, y en especial, a Edwar Ramírez, por toda su colaboración y apoyo.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: NÚMEROS REALES Y COMPLETACIÓN DE ESPACIOS PREMÉTRICOS EN MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVAS.[1]

AUTOR: JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO.[2]

PALABRAS CLAVES: NÚMEROS REALES, COMPLETACIÓN, PREMÉTRICA, CONSTRUCTIVISMO, CAMPOS DE HEYTING.

DESCRIPCIÓN:

En 1872, Cantor y Dedekind presentaron definiciones de los números reales a partir de los números racionales, cerrando con esto un capítulo en la fundamentación del análisis matemático. Sin embargo, al adoptar un enfoque constructivo de las matemáticas, como el propuesto en las últimas décadas por Bishop y Richman, es necesario hacer una revisión de la noción de número real y de sus propiedades.

En este trabajo se presenta a los números reales a través del problema de la completación métrica de los racionales sin el empleo de elección numerable. Para esto se usa el concepto de espacio premétrico introducido por Richman en el 2007, y también sus ideas generales para obtener la completación de estos espacios. Se prueba además algunos resultados como la unicidad salvo isometrías de la completación de un espacio premétrico, y un teorema de extensión de funciones uniformemente continuas entre premétricos.

Después de obtener una versión métrica de los reales, se le añade a esta en el tercer capítulo, un orden parcial y una estructura algebraica. En esta última parte se propone estudiar una versión topológica del concepto de campo de Heyting, para dar un tratamiento constructivo más general de la estructura algebraica de los reales. De esta propuesta resulta que algunos anillos que no son campos, son en realidad campos de Heyting.

[1] Tesis

[2] Escuela de matemáticas. Facultad de ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Ph. D. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

ABSTRACT

TITLE: REAL NUMBERS AND COMPLETION OF PREMETRIC SPACES IN CONSTRUCTIVE MATHEMATICS.[3]

AUTHOR: JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO.[4]

KEYWORDS: REAL NUMBERS, COMPLETION, PREMETRIC, CONSRUCTIVISM, HEYTING FIELD.

DESCRIPTION:

In 1872, Cantor and Dedekind presented definitions of the real numbers based on rational numbers, closing with this a chapter in the foundation of mathematical analysis. However, by adopting a constructive approach for mathematics, as it was proposed in the last decades by Bishop and Richman, it is necessary to review the notion of real number and its properties.

In this dissertation real numbers are presented as a metric completion of rational numbers, but avoiding countable choice. For this purpose, it is used the concept of premetric space introduced by Richman in 2007, and also his general ideas to get the completion for this spaces. It is also proved some results, like the uniqueness of the completion of premetrics spaces up to isometries, and a extension theorem for uniformly continuous functions between premetrics spaces.

Once we have a premetric on the reals, it is finally added using the extension theorem, a partial order and an algebraic structure. At this point it is proposed to study a topological version of Heyting fields, to give a more general and constructive treatment of the algebraic structure of the reals. From this proposal results that some rings which are not fields, are actually abstract examples of Heyting fields.

[3]Thesis

[4]School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Ph. D. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

INTRODUCCIÓN

Existen básicamente dos formas estándar de definir los números reales: una es con sucesiones de Cauchy de números racionales, y la otra con cortaduras de Dedekind. Ambas conducen a la construcción de un campo ordenado completo, al que denotamos por $\mathbb{R}$, y que es el objeto fundamental con el que se hace análisis matemático. En este trabajo se revisarán dichas formas de obtener los reales usando un enfoque constructivo. Lo primero que trataremos es la noción de completitud métrica, basándonos en el propuesta que Fred Richman presenta en [12], en la que introduce el concepto de espacio premétrico. Después de esto obtendremos el orden y la estructura algebraica vía cortaduras de Dedekind.

La idea de espacio prémetrico se origina como una forma de describir los mismos espacios métricos sin tener que hacer referencia más que a números racionales. Para esto en vez de trabajar con una función métrica d que asigna a cada par puntos x, y un número real $d(x, y)$, usamos en cambio una relación matemática a la que llamamos premétrica, que dado un racional no negativo q, intuitivamente nos dice si

$$d(x, y) \leq q.$$

Desde esta noción de premétrica sobre un conjunto, Richman propone redefinir la noción de completitud señalando que la forma clásica de entender este concepto, a través de sucesiones de Cauchy, lleva al uso de una versión numerable del axioma de elección. Precisamente, una de las cosas que se busca evitar en matemáticas constructivas es el uso de este tipo de axiomas existenciales, ya que la filosofía básica que tenemos es la de dar descripciones y métodos con los que se puedan determinar los objetos que afirmemos existen.

La definición de completitud que propone Richman es algo más elaborada que la usual, aunque a cambio se obtiene una visión más abstracta del concepto de completitud. Primero se asocia a cada espacio premétrico X un conjunto $\hat{X}$ y una función inyectiva $X \xrightarrow{i} \hat{X}$. Los elementos de $\hat{X}$ son clases de equivalencia de familias de numerables subconjuntos de X, a las que Richman llama familias regulares. Una familia $\{S_q\}_q$ de subconjuntos de un espacio premétrico indexada por racionales positivos, es regular si para todo $x \in S_p$ y $y \in S_q$ se tiene que $d(x, y) \leq p + q$. La relación de equivalencia entre familias regulares consiste en que $\{S_q\}_q$ se relaciona con $\{T_q\}_q$, si para todo $x \in S_p$ y $y \in T_q$ se tiene que $d(x, y) \leq p + q$. De esta forma decimos que X es completo si la función i, en la que $i(x)$ es la clase de $\{\{x\}\}$, además de ser inyectiva es sobreyectiva. Esta definición de completitud como veremos en el segundo capítulo, resulta ser más fuerte que la noción secuencial clásica y efectivamente funciona en un enfoque sin elección.

Un aspecto faltante del trabajo de Richman, es que luego de definir lo que es completitud, dota de una premétrica a $\hat{X}$ al que se refiere siempre como la completación de X, pero para el que no prueba ni enuncia que en efecto se trate de espacio premétrico completo de acuerdo a su propia definición, esto es, no muestra que $\hat{X} \xrightarrow{i} \hat{\hat{X}}$ es un función sobreyectiva. Esto fue observado por A. Setzer en su revisión del trabajo de Richman [?]. Gran parte del presente trabajo está motivado por desarrollar la idea de Richman, enunciando y probando el teorema de que la completación es un espacio premétrico completo, además de su unicidad salvo isometrías. Además de esto también se propone el uso de familias no necesariamente numerables para definir tanto la completitud como la completación. Estas familias sobre un premétrico X las llamamos familias de Cauchy, y básicamente consisten en colecciones de subconjuntos del espacio cuyas intersecciones dos a dos es no vacía, y en las que para cada racional $\varepsilon > 0$ siempre podemos encontrar subconjuntos cuyo diámetro esté acotado por ε. Este concepto de familia de Cauchy es el que usamos en vez de el de familia regular, aunque al final mostraremos que producen definiciones equivalentes de completitud.

Una vez obtenida una versión métrica de los números reales, pasaremos a definir un orden parcial y una estructura algebraica. Para esto usaremos las cortaduras de Dedekind. La idea es que el conjunto de cortaduras visto como un grupo abeliano parcialmente ordenado, induzca una premétrica con la que resulta un espacio isométricamente isomorfo a la completación de los racionales. Usando luego teoremas de extensión sobre la multiplicación de los racionales, se obtendrá a los reales como un ejemplo de lo que llamaremos campo de Heyting, que es como algebraicamente funcionan los números reales desde un punto de vista constructivo.

Capítulo 1

MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVAS

El objetivo de este capítulo es dar una breve introducción a las matemáticas constructivas, suficiente para que el lector desarrolle una idea general del contexto en el que se presentan los espacios premétricos y la construcción de los números reales. Desafortunadamente la introducción al constructivismo matemático puede parecer en ocasiones estar demasiado llena de tecnicismos, por lo que la idea también de este capítulo es ofrecer una exposición simplificada de todo este enfoque alternativo de las matemáticas. Una introducción más completa sin embargo, la podemos encontrar en [1].

1.1. MOTIVACIÓN

Básicamente toda la propuesta que hace el constructivismo matemático surge de la discusión acerca de cómo probamos las afirmaciones del tipo

Existe x tal que ...

Una forma de ilustrar esto es usando el teorema fundamental del álgebra, que es además un resultado clásico de gran importancia histórica, y que afirma precisamente la existencia de raíces complejas para polinomios complejos no constantes. Una prueba estándar[6] de este teorema consiste en que si un polinomio $p(z)$ no tiene raíces, es decir, $p(z) \neq 0$ para todo complejo z, entonces la función $f(z) = 1/p(z)$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville tenemos entonces que $f(z)$ es constante, y por lo tanto $p(z)$ también lo es. Con esto se concluye que si $p(z)$ es un polinomio no constante, entonces existe z_0 complejo tal que $p(z_0) = 0$.

Esta puede parecer muy bien una prueba satisfactoria desde un punto de vista lógico. Pero, ¿qué pasa cuando dejamos las consideraciones abstractas y pensamos en objetos concretos? Si tomamos por ejemplo el polinomio

$$z^{537} - (1+i)z + \sqrt{2}.$$

Sabemos que es un polinomio no constante y que por el teorema de Liouville sería absurdo que no tuviera raíces. Sin embargo, la prueba que dimos, no proporciona indicación alguna sobre cómo localizar en el plano complejo tales raíces. De esta forma llegamos a la principal motivación que tenemos en matemáticas constructivas: que las pruebas que presentemos sobre la existencia de un objeto con determinada propiedad, sean esencialmente las indicaciones de cómo encontrarlo, o de cómo construirlo.

La primera propuesta de hacer matemáticas adoptando por completo este enfoque, fue desarrollada por el matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966), quien es también conocido por sus aportes en topología algebraíca y en especial por el teorema de punto fijo que lleva su nombre. El planteamiento de Brouwer, conocido como *el intuicionismo*, aparece a principios del siglo XX como resultado del gran debate que por aquel entonces se daba sobre los fundamentos de las matemáticas. Sin entrar mucho en detalles[1] estas son muy resumidamente las ideas principales que defiende el intuicionismo:

1. La noción que tenemos de los números naturales resulta en realidad de nuestra percepción del tiempo, es por eso que la validez del principio de inducción

[1] Ver [4, 5] para una introducción filosófica al intuicionismo.

matemática no se reduce ni a definiciones, ni a verdades tautológicas, ni a nuestra experiencia con el mundo exterior.

2. Aunque usamos el lenguaje para transmitir conocimiento matemático, este solo acompaña el intelecto humano. La exactitud de las matemáticas está en los proceso mentales que llevamos a cabo y no en las descripciones axiomáticas o formales que hacemos de ella.

Es curioso que este tipo de reflexiones acerca de los números naturales y el lenguaje hayan evolucionado hacia una forma de constructivismo. Pero es precisamente el hecho de reconocer en las matemáticas mucho más que aspectos formales, lo que lleva al intuicionismo a buscar mayor evidencia epistemológica a la hora de tratar enunciados de existencia, que simplemente la de tener demostraciones "lógicamente correctas". Esta esencialmente es la filosofía que seguimos manteniendo en las matemáticas constructivas actuales, la de buscar que haya más que solo consistencia lógica en nuestros argumentos.

Ya con esta idea general del constructivismo, volvemos al tema de los polinomios complejos y sus raíces. Una pregunta natural que puede tener el lector ahora es ¿cuál sería entonces un argumento constructivo para probar el teorema fundamental de álgebra? Aunque no vamos a presentar aquí una prueba constructiva por completo, sí damos una indicación para llegar a una, con la que se muestra de paso aspectos importantes en este tipo de pruebas.

Lo primero que hacemos antes de hablar de polinomios complejos, es hacer una observación básica sobre polinomios en anillos finitos. Si $p(t)$ un polinomio sobre $\mathbf{Z}_n$, esto es, el anillo de residuos módulo n, entonces con a lo sumo n evaluaciones de $p(t)$ en los elementos de $\mathbf{Z}_n$ podemos o bien encontrar una raíz de $p(t)$, o verificar si $p(t)$ no tiene raíces en el anillo. No importa cuán grande sea el grado de $p(t)$, o si $n = 2^{1000}$ por ejemplo, se trata de procedimiento que al menos idealmente podríamos llevar a cabo. No hay por lo tanto problemas de construcción y la lógica es compatible con nuestros objetivos. Es decir, si supiéramos que es absurdo que

$p(t)$ no tiene raíces, entonces podemos encontrarlas.

Ahora, en el caso de polinomios sobre los complejos la infinidad del dominio en el que buscamos la solución, hace que naturalmente no podamos aplicar la misma lógica. Lo que hacemos entonces es una “aproximación finitista”, usando en forma clave la continuidad y la compacidad. Esto es, si $p(z)$ es un polinomio sobre los complejos entonces para cada compacto A y $\delta > 0$, podemos escoger un conjunto finito de puntos

$$\{z_1, ..., z_n\} \subseteq A$$

lo suficientemente grande, de forma que para cada $z \in A$ haya algún i para el que z se aproxime por z_i, y $p(z_i)$ aproxime a $p(z)$. Así con la evaluación de $p(z)$ en cada z_i podemos chequear si $|p(z)| > 0$ para todo $z \in A$, o si existe $z_0 \in A$ tal que $|p(z_0)| < \delta$.

Teniendo en cuenta esto, tomamos un radio r para el que $|p(z)| > 0$ para todo z tal que $|z| > r$. De esta forma si $|p(z)| > 0$ para todo z en el disco cerrado $\overline{D(0,r)}$, entonces como consecuencia del teorema de Liouville $p(z)$ sería constante. Por lo tanto, si $p(z)$ no es constante tenemos garantía para cada $\delta > 0$ de que existe $z_0 \in \overline{D(0,r)}$ tal que $|p(z_0)| < \delta$. Aunque esto no prueba que haya un punto del disco que se anule completamente, sí es un primer acercamiento con el que ya usando más herramientas matemáticas como el método de Newton-Raphson podemos encontrar explícitamente las raíces (ver [9], teorema 3.1 p. 295).

El argumento que proponemos consiste entonces en dos partes; la primera es un poco más heurística y sugiere observar una muestra finita para encontrar las condiciones iniciales de la segunda parte, que es más algorítmica, y consiste en la construcción de una sucesión de Cauchy que converge a la raíz. Señalamos también que esta primera parte al igual que como dijimos con lo polinomios sobre $\mathbf{Z}_n$, plantea un procedimiento que puede resultar siendo bastante ideal. Sin embargo desde un punto de vista constructivo no hay objeciones incluso si la implementación de un prueba durara por ejemplos eones[2], por lo que muchas veces sentimos algo así como lo que Galois, en un contexto también algebraico, expresó sobre su teoría "Si ahora me das una ecuación y quieres saber si es o no soluble por radicales, no tengo más nada que hacer que indicarte el camino para responder tu pregunta, sin obligar ni a mí ni a nadie a hacerlo. En pocas palabras, los cálculos son en la práctica irrealizables".[3]

Con esto queremos subrayar el carácter idealista de las matemáticas constructivas, y mostrar que aunque hay cierta relación, tampoco se trata netamente de cuestiones computacionales. De hecho el asumir consistentemente un enfoque constructivo tiene consecuencias mucho más interesantes que la de solo encontrar otra forma distinta de probar los mismos teoremas. Al revisar por ejemplo la noción de números reales resulta que algunas afirmaciones básicas como la ley de la tricotomía y el teorema del valor intermedio, no tenemos como probarlas constructivamente, lo que abre un nuevo horizonte y da otra perspectiva de las matemáticas.

1.2. PRINCIPIOS DE OMNISCIENCIA

Como ya advertimos en la sección anterior de motivación, hay proposiciones en matemáticas para las que no podemos esperar pruebas constructivas. Una justificación formal para esto se encuentra en ciertos argumentos conocidos en la literatura como *contraejemplos Brouwerianos* (ver [3, 9]). Básicamente un contrajemplo Brouweriano para una proposición P, es una prueba de que P implica alguna afirmación general sobre sucesiones binarias, para la que consideramos que esencialmente no hay una justificación constructiva. Este tipo de afirmaciones fueron llamadas por Bishop *principios de omnisciencia*, siendo el principal de ellos el siguiente:

Principio limitado de omnisciencia (PLO). Para todo $(b_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ se da que, o bien para cada n natural $b_n = 0$, o existe m tal que $b_m = 1$.

---

[2] No confiemos en las matemáticas constructivas en caso de una invasión extraterrestre. Ver [15] p. 4

[3] NEUMANN, Peter M. The mathematical writtings of Évariste Galois. European Mathematical Society, 2011. p. 227

La objeción que hacemos a este principio está en el hecho que en general al definir una sucesión, aunque sepamos como obtener cada uno de sus términos, apriori solo tenemos “acceso” a segmentos iniciales de esta, por lo que en cierta forma, dada una sucesión binaria no tenemos de entrada cómo forzar a que todos sus términos se anulen, o a que haya al menos uno que sea positivo. Desde luego, hay instancias de este principio que podemos verificar. Pero por otro lado, también hay situaciones naturales en las que podemos percibir esa sensación de no tener justificación constructiva alguna para dicho principio.

Consideremos por ejemplo la sucesión binaria $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en la que para cada n natural $k_n \equiv d_n \pmod 2$ con k_n el número perfecto más grande menor que $n+7$. Un entero es un número perfecto si es la suma de sus divisores propios positivos, como 6 que es $1+2+3$, o 28 que es

$$1+2+4+7+14.$$

Una cuestión abierta en la actualidad es establecer si hay o no números perfectos que sean impares. Desde hace mucho se sabe e incluso desde los tiempos de Euclides, que $2^{n-1}(2^n-1)$ es un número perfecto siempre que 2^n-1 sea primo. Con esto tenemos formas de buscar números perfectos pares, pero hasta el momento no contamos con fórmulas que den con números perfectos impares. La sospecha es que tales números no existen, pero hasta el momento no se han dado pruebas que refuten su existencia.

Sin embargo una prueba constructiva de PLO, aplicada en particular a la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$, nos daría una prueba de que todo número perfecto es par, o nos proporcionaría un número natural ν y la evidencia de que hay un número perfecto impar menor $\nu+7$. Así de haber tal prueba para PLO, tendríamos información valiosa sobre los números perfectos, y en general sobre casi cualquier cosa que nos preguntemos sobre los números naturales. De ahí el uso precisamente la palabra omnisciencia.

Para ver ahora cómo es que se usan estos principios presentamos un contrajemplo brouweriano sobre el teorema de Bolzano-Weierstrass, uno de los resultados clásicos del análisis matemático.

Sea $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión binaria. Consideramos ahora la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en la que

$$a_n = (-1)^{t_n} + 2^{-n}$$

con $t_n = \text{máx}\{b_i : i \leq n\}$. Esta nueva sucesión es inyectiva y todos sus términos se encuentran en el intervalo $[-2, 2]$. Por lo tanto, el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

es infinito y acotado, satisfaciendo de esta forma las condiciones del teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma para este tipo de conjuntos la existencia de puntos de acumulación en la recta. Lo primero que observamos es que si logramos garantizar que todos los términos de la sucesión binaria se hacen cero, entonces 1 es un punto de acumulación de A. Pero tan pronto como encontremos un uno, en la sucesión binaria, al estabilizarse entonces $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tenemos que -1 es el punto de acumulación A. De hecho, en cualquiera de los dos casos, el punto de acumulación es en realidad el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Ahora, una prueba constructiva del teorema de Bolzano-Weierstrass proporcionaría en particular indicaciones para calcular un número real x tal que $x \in A'$. Supongamos entonces que tenemos dicha prueba y que con ella hemos obtenido $a \in A'$. Esto significa que para cualquier real $\varepsilon > 0$ hay una infinidad de elementos de A que están a menos de ε de a, es decir, hay siempre un índice i tan grande como uno quiera tal que $|a - a_i| \leq \varepsilon$. Al tomar por lo tanto $\varepsilon = 1/2$ y aplicando desigualdad triangular tenemos índices i arbitrariamente grandes tales que $|a_k - a_i| \leq 1$ para un elemento a_k fijo. Así al chequear si $a_k > 1$ o $a_k < 0$ tenemos una idea de donde están localizados infinitos puntos de A, pudiendo mostrar así al menos una de las siguientes afirmaciones:

1. Hay infinitos números naturales n para los que $a_n > 1$.

2. Hay infinitos números naturales n para los que $a_n < 0$.

La primera afirmación implica a su vez que todos los términos de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se hacen cero. En efecto, para cada n natural sabemos que $b_n = 0$, o que $b_n = 1$, pero si tuviéramos que $b_n = 1$ entonces la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se estabilizaría en 1 y por lo tanto tendríamos que $a_l < 0$ para todo $l \geq n$. De esta forma no habría infinitos $a_n > 1$, por lo que necesariamente se debe verificar que $b_n = 0$ para todo natural n. En cuanto a la segunda afirmación, ya con solo tener un natural k tal que $a_k < 0$ es suficiente para que haya algún m tal $b_m = 1$. Por lo que hemos mostrado así que cualquier prueba del teorema de Bolzano-Weierstrass se puede transformar en una prueba de PLO, concluyendo así nuestro contrajemplo.

Además de PLO usaremos también otros dos principios de omnisciencia más débiles:

Principio fuertemente limitado de omnisciencia (PFLO). Para todo $(b_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ si a lo sumo existe un natural m tal que $b_m = 1$, entonces para todo n natural $b_{2n} = 0$, o para todo n natural $b_{2n+1} = 0$.

Principio de Markov. Para todo $(b_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, si no se tiene que para todo n natural $b_n = 0$, entonces existe m natural tal que $b_m = 1$.

Naturalmente si tenemos una sucesión binaria que como mucho tiene un término no nulo, entonces PLO nos informaría cuál es ese término en caso de existir. De esta forma podemos determinar siempre en cual de las dos subsucesiones, en la de índices pares o en la de índices impares, tenemos que todos sus términos se anulan. Por otro lado si lo que tenemos es una sucesión binaria para la que es imposible que todos sus términos se anulen, entonces puede suceder que siempre que observemos términos de la sucesión estos sean iguales a cero. Aplicando nuevamente PLO, localizaríamos el término no nulo que por lógica debería existir.

Tenemos así que PLO implica tanto PFLO como el principio de Markov. La razón por la que consideramos a estos dos últimos principios de omnisciencia como enunciados más débiles que PLO, es otra vez una cuestión de intuición. En el caso de PFLO, que es algo así como un principio del palomar, al hablar de subsucesiones constantes se evade la pregunta de si hay o no un término igual a uno, y en el caso del principio de Markov, para que este funcione se necesita primero una evidencia que no todos los términos se anulan, algo que de entrada no tenemos.

Todo esto de los principios de omnisciencia y los contraejemplos Brouwerianos aparecerá en el tercer capítulo cuando tratemos con las propiedades de orden entre cortaduras y hagamos la construcción de los números reales como un campo parcialmente ordenado. En el capítulo de espacios premétricos, al tratar específicamente con números racionales y evitar así la referencia a una estructura tan compleja como los números reales, la teoría que resulta es en cierta forma bastante canónica, por lo que solo señalamos un aspecto no constructivo que en general está muy presente en toda la matemática: el uso de elección.

Capítulo 2

ESPACIOS PREMÉTRICOS

En un espacio métrico tenemos un conjunto no vacío X y una función d que asigna a cada para de puntos x, y, un número real $d(x, y)$. A esta función d la llamamos métrica, y satisface además ciertas propiedades naturales que corresponden a una idea intuitiva de distancia. En este trabajo la idea es construir los números reales, por lo que usamos un concepto más general que es el de espacio premétrico, que solo supone la existencia de números racionales. Este concepto fue introducido en el contexto de las matemáticas constructivas por Fred Richman, en [12], y la idea es que en vez de tratar con funciones que asignen distancias, tengamos una relación que para cada par de puntos x, y y q un racional no negativo dado, intuitivamente diga si

$$d(x, y) \leq q.$$

Hacemos también una revisión del trabajo de Richman referente a estos espacios, con los que propone redefinir las nociones métricas de completitud y completación.

2.1. GENERALIDADES

Presentamos en esta sección la definición formal de espacio premétrico, y reescribimos algunas definiciones sobre espacios métrico con las que el lector seguro esta familiarizado.

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto no vacío y d una relación binaria entre los elementos de $X \times X$ y los racionales no negativos. Decimos que d es una *premétrica* sobre X, y escribimos $d(x,y) \leq q$ en vez de $((x,y),q) \in d$, si se cumple lo siguiente:

P1 $d(x,y) \leq 0$ si y solo si $x = y$.

P2 Si $d(x,y) \leq q$ entonces $d(y,x) \leq q$.

P3 Si $d(x,z) \leq p$ y $d(z,y) \leq q$ entonces $d(x,y) \leq p+q$.

P4 $d(x,y) \leq p$ si y solo si para todo $q > p$ se tiene que $d(x,y) \leq q$.

Un conjunto con una premétrica es llamado un *espacio premétrico*. Algunas veces usaremos la notación (X,d) para especificar además del conjunto, la premétrica que estamos considerando sobre él. En caso de que $((x,y),q) \notin d$, escribimos desde luego, $d(x,y) \nleq q$.

Ejemplo 2.1.2.

a) El ejemplo más natural de espacio premétrico resulta al tomar $\mathbf{Q}$ y definir $d(x,y) \leq q$ simplemente como $-q \leq x-y \leq q$, lo que también se escribe como $|x-y| \leq q$.

b) Sea X un conjunto no vacío cualquiera, podemos definir una premétrica sobre X haciendo que $d(x,y) \leq q$ sea equivalente a $x = y$, con lo que se satisface trivialmente la definición.

c) Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ elementos de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, decimos entonces que $d(x,y) \leq q$ si y solo si para todo número natural k con $q < 2^{-k}$ se cumple que $x_i = y_i$ para todo $i \leq k$. Esta premétrica nos dice que tan cerca están dos sucesiones entre sí cuando comparamos sus términos iniciales.

Una observación que hacemos es que los espacios que resultan en el ejemplo *b*) pueden tener puntos x, y para los que $d(x,y) \nleq q$ para todo q. Hubiese sido algo natural exigir que esto no ocurriera, y haber incluido en la definición:

P5 Para todo $x, y \in X$ existe un racional q tal que $d(x,y) \leq q$.

Esta condición hace parte de la definición original de Richman, sin embargo como el mismo autor señala tal condición solo es importante si lo que se busca es que la noción de espacio premétrico coincida con la de espacio métrico. Aquí estudiamos los espacios premétricos *perse*, por lo que no tomamos P5 como parte de la definición.

Una noción adicional que aquí introducimos, siguiendo el orden de las ideas, es la de *espacio pseudo-premétrico*, que resulta al sustituir P1 por la condición más débil de que $d(x,x) \leq 0$ para todo punto x del espacio. La utilidad de estos espacios pseudo-premétricos está en que obtenemos espacios premétricos al identificar apropiadamente sus puntos. La relación de equivalencia es por supuesto

$$x \sim y \text{ si } d(x,y) \leq 0.$$

Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva no son más que instancias de la nueva condición y de P2 y P3 respectivamente. La premétrica sobre el cociente se define como $d([x],[y]) \leq q$ si $d(x,y) \leq q$. La consistencia de esta definición se debe a que si $x \sim u$, y $y \sim v$, entonces $d(x,u) \leq 0$ y $d(y,v) \leq 0$, por lo que aplicando nuevamente P2 y P3 se tiene que $d(x,y) \leq q$ si y solo si $d(u,v) \leq q$.

Además de los espacios pseudo-premétricos, también imitamos otras definiciones clásicas sobre espacios métricos

Definición 2.1.3. Sea $S \subseteq X$ con X un espacio premétrico, decimos que S es *denso* en X, si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $s \in S$ tal que $d(x,s) \leq \varepsilon$. Decimos que S es *acotado*, si existe un racional M tal que $d(x,y) \leq M$ para cualesquiera $x, y \in S$.

Definición 2.1.4. Sean (X,d) y (Y,d') espacios premétricos, decimos que $f : X \to Y$ es *morfismo* si para todo subconjunto acotado $A \neq \emptyset$ de X y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ siempre que $d(x,y) \leq \delta$ para cualesquiera $x, y \in A$.

Definición 2.1.5. Sean (X,d) y (Y,d') espacios premétricos, decimos que $f : X \to Y$ es una *isometría* entre esos espacios, si $d(x,y) \leq q$ si y solo si $d'(f(x), f(y)) \leq q$.

Definición 2.1.6. Sean $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de un espacio premétrico X. Decimos que tales sucesiones son *equivalentes*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe N natural tal que $d(x_m, y_n) \leq \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Definición 2.1.7. Sea $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de un espacio premétrico X. Decimos $(x_n)_n$ es una *sucesión de Cauchy* si es $(x_n)_n$ equivalente a si misma. Decimos es *convergente* si existe $c \in X$ tal que la sucesión $(y_n)_n$con $y_n = c$ para todo n, es equivalente a $(x_n)_n$, lo que denotamos como $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

2.2. COMPLETACIÓN

Uno de los principales recursos clásicos que buscamos evitar en este trabajo, es el axioma de elección, o más específicamente, el axioma de elección restringido a familias numerables de conjuntos. Esta forma débil de elección aparece con frecuencia en el análisis matemático, y en particular se usa para probar que la completación por sucesiones de Cauchy de un espacio métrico, es precisamente un espacio métrico completo. Sin entrar mucho en detalles, una idea para obtener este resultado es que si X es un espacio métrico, y S es un subconjunto denso de X, entonces para cada sucesión $(x_n)_n$ sobre X, y $n \in \mathbf{N}$, el conjunto

$$F_n = \{s \in S : d(x_n, s) \leq 1/(n+1)\}$$

es no vacío, por lo que *escogiendo* $s_n \in F_n$ obtenemos una sucesión $(s_n)_n$ en S equivalente a $(x_n)_n$. Con esto se puede probar que si toda sucesión de Cauchy sobre S converge en X, entonces también lo hace toda sucesión de Cauchy sobre X. Este argumento en particular aplica cuando X es la completación estándar de S, en la que los puntos son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy sobre S, cuyos límites en X resultan siendo la propia clase a la que pertenecen.

En general no sabemos cómo escoger s_n para cada $n \in \mathbf{N}$, y es por eso que se usa elección en este argumento. De hecho, la elección es necesaria en cualquier otro argumento que se presente ya que hay modelos sin elección de los números reales construidos por sucesiones de Cauchy de números racionales en los que la completitud falla (ver [8]). Esto lleva a replantear el proceso de completación de forma que funcione desde un punto de vista constructivo. La propuesta que hace Richman desde los premétricos, es evitar la elección trabajando directamente con familias numerables de conjuntos de puntos (indizados por $\mathbf{Q}^+$), y usarlas tanto para definir la noción de completitud, como para describir la completación. Esta propuesta incluye además una revisión más abstracta, en la que primero se asocia a cada espacio premétrico X, un conjunto $\hat{X}$ y una inyección canónica $X \xrightarrow{i} \hat{X}$, definiendo luego la completitud de un espacio como el caso en que la función i es sobreyectiva. Después de esto se dota a $\hat{X}$ de una premétrica, quedando i como una isometría cuya imagen es densa en $\hat{X}$.

Aunque el trabajo de Richman es sin duda interesante, hay un punto delicado en su trabajo, y es que se refiere a $\hat{X}$ como la "completación" de X, pero no prueba ni enuncia que en efecto $\hat{X}$ es espacio completo de acuerdo a su propuesta, esto es, que $\hat{X} \xrightarrow{i} \hat{\hat{X}}$ es sobreyectiva para todo espacio X. Esto ha servido como motivación del presente trabajo. Lo que aquí se plantea es seguir la idea de Richman probando el aspecto faltante que señalamos, pero abandonando desde el principio la noción de numerabilidad en la descripción de $\hat{X}$.

Presentamos ahora el concepto alternativo al de sucesión de Cauchy, que proponemos para desarrollar una descripción no secuencial de completitud y completación.

Definición 2.2.1. Sea $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ con X un espacio premétrico, decimos que F es una *familia de Cauchy* sobre X si satisface lo siguiente:

i) Para todo $S, T \in F$ se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S \in F$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$ para todo $x, y \in S$.

Ejemplo. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy, definimos para cada k natural el conjunto $X_k = \{x_n : n \geq k\}$. De esta forma, la colección

$$F = \{X_i : i \in \mathbf{N}\}$$

es un ejemplo de familia de Cauchy, y es además el que sugiere el concepto.

La condición *ii)* se puede resumir introduciendo la relación binaria $\operatorname{diám} A \leq q$, en la que $A \subseteq X$ y cumple con que $d(x, y) \leq q$ para todo $x, y \in A$. Con esta abreviación presentamos ahora la definición de una pseudo-premetrica sobre la colección de familias de Cauchy sobre un espacio.

Definición 2.2.2. Sean F y F' familias de Cauchy sobre un espacio premétrico X, decimos que $d(F,F') \leq q$, si para cada $\varepsilon > 0$ existen $S \in F$ y $T \in F'$ tales que:

i) $\text{diám}\, S, \text{diám}\, T \leq \varepsilon$.

ii) $\text{diám}(S \cup T) \leq q + \varepsilon$.

Teorema 2.2.3. *La relación $d(F,F') \leq q$, en la que F y F' son familias de Cauchy sobre un espacio premétrico X, es en efecto, un pseudo-premétrica sobre X.*

Demostración. Si $F = F'$, probar que $d(F,F') \leq 0$ se reduce a aplicar la condición *ii)* de la definición de familia de Cauchy. De la misma forma, no hay ninguna dificultad en ver que la condición P2 también se cumple.

Si $d(F,G) \leq p$ y $d(G,H) \leq q$, para probar que se satisface P3, es decir, que $d(F,H) \leq p+q$, fijamos $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{2}$ tenemos por lo tanto los conjuntos $S \in F$, $U \in H$ y $T, T' \in G$ tales que $\text{diám}\, S$, $\text{diám}\, T$, $\text{diám}\, T'$, $\text{diám}\, U \leq \frac{\varepsilon}{2}$, y que ademas cumplen con que $\text{diám}\,(S \cup T) \leq p + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\text{diám}\,(T' \cup U) \leq q + \frac{\varepsilon}{2}$. Por la condición *i)* de familia de Cauchy, $T \cap T' \neq \emptyset$, es decir, existe t tal que $t \in T$ y $t \in T'$, de esta forma si $x \in S$ y $y \in U$, como $d(x,t) \leq p + \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(t,y) \leq q + \frac{\varepsilon}{2}$, entonces por la misma condición P3 que se satisface en X, tenemos que $d(x,y) \leq p+q+\varepsilon$, o lo que es lo mismo, que $\text{diám}(S \cup U) \leq (p+q)+\varepsilon$. Usando también la condición P4 en X tenemos que $\text{diám}\, A \leq \varepsilon$ si $\text{diám}\, A \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $A \subseteq X$, por lo que los conjuntos S y U son entonces los respectivos elementos de F y H que debíamos encontrar.

Solo queda ahora probar la condición P4. Probamos primero que si $d(F,F') \leq q$ entonces $d(F,F') \leq p$ para todo $p > q$. En efecto, volvemos aplicar la misma estrategia de la prueba anterior, fijando $\varepsilon > 0$ y tomando los conjuntos $S \in F$ y $T \in F'$ tales que $\text{diám}\, S, \text{diám}\, T \leq (p-q)+\varepsilon$, para los que $\text{diám}\,(S \cup T) \leq q + (p-q) + \varepsilon = p + \varepsilon$. Para probar el reciproco, una vez fijado $\varepsilon > 0$ hacemos $p = q + \frac{\varepsilon}{2}$, de esta forma, como $p > q$ tenemos en este caso para S y T que $\text{diám}\, S$, $\text{diám}\, T \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y que $\text{diám}\,(S \cup T) \leq p + \frac{\varepsilon}{2} = q + \varepsilon$. □

Con esta pseudo-premétrica sobre la colección de familias de Cauchy de un espacio premétrico, podemos hablar ya de un espacio cociente asociado.

Definición 2.2.4. El cociente y la premétrica inducidos por la pseudo-premétrica en el conjunto de familias de Cauchy sobre X, son denotados por $(\hat{X}, \hat{d})$. Además, cada $x \in X$ es identificado en $\hat{X}$ con la clase de equivalencia de la familia $\{\{x\}\}$, la cual denotamos simplemente por x^*.

Mostramos ahora que todo espacio premétrico X se puede encajar isométricamente en $\hat{X}$.

Teorema 2.2.5. *La función $i : X \to \hat{X}$, en la que $i(x) = x^*$, es una isometría cuya imagen es densa en $\hat{X}$.*

Demostración. Primero veamos que i es una isometría. En efecto, si $d(x, y) \leq q$ entonces debemos tener que $\hat{d}(x^*, y^*) \leq q$, lo que es equivalente a que $d(\{\{x\}\}, \{\{y\}\}) \leq q$, pero esto se tiene porque para cada $\varepsilon > 0$ y $a \in X$ se cumple que diám $\{a\} \leq \varepsilon$ y porque la condición P4 nos garantiza que $d(x, y) \leq q + \varepsilon$. Recíprocamente, si lo que tenemos $\hat{d}(x^*, y^*) \leq q$, usamos de nuevo su equivalencia para concluir que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $d(x, y) \leq q + \varepsilon$, lo que implica por el reciproco de la condición P4 que $d(x, y) \leq q$.

Probamos ahora que $i(X)$ es denso en $\hat{X}$. Sea entonces $\varepsilon > 0$ y $x \in \hat{X}$, como x es la clase de equivalencia de alguna familia de Cauchy F, tomamos entonces $S \in F$ tal que diám $S \leq \varepsilon$. Como $S \neq \emptyset$, existe $s \in S$ que al ser un elemento de X, se presenta como un candidato para que $d(x, s^*) \leq \varepsilon$. Para esto es suficiente ver que $d(F, \{\{s\}\}) \leq \varepsilon$, por lo que fijamos $\varepsilon' > 0$. Tomamos ahora $T \in F$ tal que diám $T \leq \varepsilon'$, y vemos que si $t \in T$, al tener que $S \cap T \neq \emptyset$, es decir, al existir u tal que $u \in S$ y $u \in T$, podemos usar entonces que $d(t, u) \leq \varepsilon'$ y $d(u, s) \leq \varepsilon$ para concluir que $d(t, s) \leq \varepsilon + \varepsilon'$, lo que significa que diám $(T \cup \{s\}) \leq \varepsilon + \varepsilon'$, y que efectivamente $d(x, s^*) \leq \varepsilon$. Por la tanto $i(X)$ es denso. □

Ahora sí, ya con este resultado establecido presentamos la definición de completitud que adoptamos en este trabajo.

Definición 2.2.6. Un espacio premétrico X es *completo* si la isometría natural entre X y $\hat{X}$ es sobreyectiva. Decimos que Y es una *completación* de X si existe una isometría $\phi : X \to Y$ cuya imagen sea densa en Y.

Lo curioso que resulta de esta definición es que para todo espacio premétrico X, ya hemos construido su completación, la cual es $\hat{X}$, solo que todavía no lo probamos. Este es un aspecto faltante del trabajo de Richman, probar que su construcción de $\hat{X}$ es de hecho un espacio premétrico completo.

Antes de presentar lo que es el teorema central de esta sección, introducimos los siguientes lemas.

Lema 2.2.7. *Sea $f : X \to Y$ una isometría, tenemos entonces lo siguiente:*

i) Para todo $A \subseteq Y$ si $\text{diám}\, A \leq q$ entonces $\text{diám}\, f^{-1}(A) \leq q$.

ii) Si G es una familia de Cauchy sobre $f(X)$, entonces $F = \{S \subseteq X : f(S) \in G\}$ es una familia de Cauchy sobre X.

Demostración. Sea $A \subseteq Y$ con $\text{diám}\, A \leq q$, tenemos que si $x, y \in f^{-1}(A)$ entonces $f(x), f(y) \in A$, luego $d(f(x), f(y)) \leq q$, pero por ser f isometría se tiene que $d(x, y) \leq q$, por lo que $\text{diám}\, A \leq q$. Sea ahora G una familia de Cauchy sobre $f(X)$ y $F = \{S \subseteq X : f(S) \in G\}$. Si $S, T \in F$, entonces como G es de Cauchy $f(S) \cap f(T) \neq \emptyset$, por lo tanto existe $y \in f(X)$ tal que $y \in f(S)$ y $y \in f(T)$. Tenemos que $y = f(s) = f(t)$ para cierto $s \in S$ y cierto $t \in T$, luego $d(f(s), f(t)) \leq 0$ y por ser f isometría entonces $d(s, t) \leq 0$, es decir, $s = t$ y $S \cap T \neq \emptyset$. Ahora, para todo $\varepsilon > 0$ al ser G de Cauchy existe $U \in G$ tal que $\text{diám}\, U \leq \varepsilon$. Tenemos por *i)* que $\text{diám}\, f^{-1}(U) \leq \varepsilon$, y además que $f(f^{-1}(U)) = U$ por que $U \subseteq f(X)$ y f de X en $f(X)$ es sobreyectiva , con lo que $f^{-1}(U) \in F$, y concluimos que F es de Cauchy sobre X. $\square$

Lema 2.2.8. *Sean X, Y espacios premétricos, con X subconjunto denso de Y. Si para cada familia de Cauchy F sobre X, existe $y \in Y$ tal que la clase de equivalencia $[F] = y^*$, entonces Y es un espacio premétrico completo.*

Demostración. Sea $i : Y \to \hat{Y}$ la isometría natural entre Y y $\hat{Y}$. La estrategia para probar que i es sobre, esto es, que para cada $w \in \hat{Y}$ existe $y \in Y$ tal que $w = i(y) = y^*$, consiste simplemente en usar que w es la clase de equivalencia de alguna una familia de Cauchy G, que a su vez es equivalente a una familia de Cauchy F sobre X.

Definimos entonces para cada $A \subseteq Y$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, t) \leq \varepsilon \text{ para algún } t \in A\}.$$

De esta forma definimos la familia $F = \{N(S, \varepsilon) : S \in G, \varepsilon > 0\}$.Para probar que F es de Cauchy observamos primero que al existir a tal que $a \in S$ y $a \in T$ para cualesquiera $S, T \in G$, la densidad de X nos garantiza que hay $b \in X$ para el que $d(a, b) \leq \text{mín}\{\varepsilon, \delta\}$ para todo $\varepsilon, \delta > 0$, por lo que $a \in N(S, \varepsilon) \cap N(T, \delta)$ y se cumple la primera condición para ser de Cauchy. Ahora fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos el conjunto $U \in G$ tal que $\text{diám}\, U \leq \frac{\varepsilon}{3}$, tenemos entonces aplicando repetidamente P3 que $\text{diám}\, N(U, \frac{\varepsilon}{3}) \leq \varepsilon$, llegando a que F es de Cauchy sobre X. El argumento anterior en el que se determinan los conjuntos U y $N(U, \frac{\varepsilon}{3})$, también nos permite llegar a que $d(F, G) \leq 0$, es decir, que F equivalente a G. Con esto podemos concluir que i es sobreyectiva y que Y es completo. $\square$

La importancia del lema que acabamos de probar, está en que su prueba nos muestra precisamente el punto en donde se evita el uso de elección. Como se puede observar, la construcción de F a partir de G no requiere elección en lo absoluto. Con esto ya podemos probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.9. *El espacio premétrico $(\hat{X}, \hat{d})$ es una completación de (X, d).*

Demostración. Para probar que $(\hat{X}, \hat{d})$ es una completación de (X, d), observamos primero que por el teorema 2.2.5 tenemos ya una isometría entre X y $\hat{X}$ cuya imagen es densa, quedando solo por ver que $\hat{X}$ es completo. En efecto, como $i(X)$ es denso en $\hat{X}$, por el lema anterior 2.2.8 es suficiente ver que para cada familia de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre $i(X)$ su clase de equivalencia es y^* (en donde $y^* \in \hat{\hat{X}}$) para algún $y \in \hat{X}$. Esto es lo que es lo mismo que decir que $\mathcal{F}$ es equivalente a $\{\{y\}\}$.

La clave ahora está en que $i(X)$ no es más que una copia isométrica de X, de esta forma definimos para cada familia de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre $i(X)$ su correspondiente versión isométrica sobre X

$$F = \{S \subseteq X : i(S) \in \mathcal{F}\}.$$

En virtud del lema 2.2.7 tenemos que F es a su vez una familia de Cauchy sobre X, por lo que tomamos $y = [F]$ y afirmamos que y es el elemento de $\hat{X}$ que estamos buscando. Para esto observamos que si diám $\mathcal{S} \leq \varepsilon$ para cualquier $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, entonces $\hat{d}(y, x^*) \leq \varepsilon$ para todo $x^* \in \mathcal{S}$. Esto último se traduce en que $d(F, \{\{x\}\}) \leq \varepsilon$ siempre que $x^* \in \mathcal{S}$, para cualquier $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ tal que diám $\mathcal{S} \leq \varepsilon$. Fijamos entonces $\varepsilon' > 0$ y consideramos $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ tal que diám $\mathcal{T} \leq \varepsilon'$ (en lo que sigue de la prueba de la observación mantenemos también fijos a x, $\mathcal{S}$ y ε). Denotamos por T la imagen inversa de $\mathcal{T}$ bajo i, es decir, que $i(T) = \mathcal{T}$. Tenemos por ser $\mathcal{F}$ de Cauchy, que existe $t^* \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, por lo que $\hat{d}(x^*, z^*) \leq \varepsilon + \varepsilon'$ para cualquier $z^* \in \mathcal{T}$ (por P3). Como i es una isometría tenemos que diám $T \leq \varepsilon$ y que $d(x, z) \leq \varepsilon + \varepsilon'$ para cualesquiera que $z \in T$. Esto último significa que diám $(T \cup \{x\}) \leq \varepsilon$, y como $T \in F$, podemos concluir la observación que habíamos hecho.

Usamos ahora la observación anterior para llegar a que si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ con diám $\mathcal{S} \leq \varepsilon$, entonces diám $(\{y\} \cup \mathcal{S}) \leq \varepsilon$. Aplicando por lo tanto la definición de pseudo-premétrica para familias de Cauchy sobre $\hat{X}$, llegamos a que $\hat{d}(\{\{y\}\}, \mathcal{F}) \leq 0$, es decir, que $\{\{y\}\}$ y $\mathcal{F}$ son equivalentes y que $y^* = [\mathcal{F}]$, que era a lo que queriamos llegar para ver que $\hat{X}$ es completo. □

2.3. UNICIDAD DE LA COMPLETACIÓN

Una vez probado que la completación de todo espacio premétrico X, es en efecto $\hat{X}$, la cuestion natural que se presenta ahora es si $\hat{X}$ es la única completación de X salvo isometrías. La respuesta a esto es que sí, la completación es única, y para probarlo hacemos uso de un teorema de extensión de morfismos. La prueba de este resulta bastante técnica, pero la ventaja es que al final nos permite dar una demostración transparente de la unicidad de la completación.

Lema 2.3.1. *Sean $f, g : X \to Y$ morfismos tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$, con S un subconjunto denso de X, tenemos entonces que $f = g$.*

Demostración. Probar que $f = g$ equivale a decir que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Para esto es suficiente con ver que $d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y usar P4 para probar la igualdad. Tomamos entonces para cada $x \in X$ el conjunto acotado $T = \{t \in X : d(x,t) \leq 1\}$, de forma que para todo $\varepsilon > 0$ existen por ser f, g morfismos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $d(f(y), f(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ si $d(y,z) \leq \delta_1$ y $d(g(y), g(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ si $d(y,z) \leq \delta_2$, siempre que $x, y \in T$. Usamos ahora la densidad de S para encontrar $s \in S$ tal que $d(x,s) \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y así tener que $d(f(x), f(s)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(g(s), g(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f(s) = g(s)$ entonces por P3 concluimos que $d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$, justo como queríamos ver. $\square$

Lema 2.3.2. *Sea F una familia de Cauchy sobre un espacio premétrico X, entonces todo morfismo $f : X \to Y$ transforma F en una familia de Cauchy G sobre Y.*

Demostración. La palabra *transforma* significa simplemente que si F es una familia de Cauchy sobre X, entonces $G = \{f(S) : S \in F\}$ es una familia de Cauchy sobre Y.

Observamos primero que si $S, T \in F$ entonces existe x tal que $x \in S$ y $x \in T$, luego $f(x) \in f(S) \cap f(T)$. Ahora tomamos

$$A = \bigcup \{x \in X : x \in S \text{ para algún } S \in F \text{ tal que diám } S \leq 1\}$$

teniendo que A es acotado. De esta forma dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe por ser f morfismo, $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplan con que $d(x,y) \leq \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, por lo que al escoger $U \in F$ tal que $\text{diám}\, U \leq \text{mín}\{1, \delta\}$, tenemos que $U \subseteq A$ y por lo tanto que diám $f(U) \leq \varepsilon$, lo que termina de probar que G es de Cauchy sobre Y. $\square$

Teorema 2.3.3. *Sean X, Y, Z espacios premétricos, y sea $f : X \to Z$ un morfismo y $j : X \to Y$ una isometría cuya imagen es densa en Y, entonces existe un único morfismo $g : Y \to \hat{Z}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Y & \xrightarrow{g} & \hat{Z} \end{array}$$

Demostración. Probamos primero la parte más fácil, la cual es la unicidad. Supongamos que existen morfismos g y g' que hacen que el diagrama conmuten, esto significa que para cada $x \in X$ se tiene $g(j(x)) = (f(x))^* = g'(j(x))$, esto decir que ambos morfismo coinciden en $j(X)$, el cual es subconjunto denso de Y, por lo que aplicando el lema 2.3.1 llegamos a que $g = g'$.

Probamos ahora la existencia. Para eso primero definimos $g : Y \to \hat{Z}$, luego mostramos que g es un morfimo, y finalmente vemos que g hace que el diagrama conmute. Definimos ahora para cada $y \in Y$ y $\delta > 0$ el conjunto $S_\delta^y = \{x \in X : d(j(x), y) \leq \frac{\delta}{2}\}$. De esta forma para $\delta, \delta' > 0$ tenemos por la densidad de $j(X)$ que existe $t \in X$ tal que $d(j(t), y) \leq \frac{1}{2} \text{mín}\{\delta, \delta'\}$, por lo que $S_\delta^y \cap S_{\delta'}^y \neq \emptyset$. También tenemos por P3 y por ser j isometría que diám $S_\delta^y \leq \delta$, con lo que llegamos a que $\{S_\delta^y\}_{\delta>0}$ es una familia de Cauchy sobre X. Usamos ahora el lema 2.3.2 para obtener la familia de Cauchy

$$F^y = \{f(S_\delta^y) : \delta > 0\}.$$

Definimos ahora $g(y) = [F^y]$. Para ver que g es un morfismo, fijamos $\varepsilon > 0$ y B un subconjunto acotado de Y. Tomamos el conjunto

$$A = \{x \in X : d(j(x), y) \leq 1 \,\text{para algún}\, y \in B\},$$

el cual es un subconjunto acotado de X. Tenemos entonces por ser f morfismo que existe $\delta > 0$ tal que para todo $s, t \in A$ si $d(s, t) \leq \delta$ entonces $d(f(s), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Sean ahora $u, v \in B$ con $d(u, v) \leq \frac{\delta}{3}$, por la densidad de $j(X)$ existen $j(s), j(t) \in j(X)$ tales que $d(j(s), u) \leq \text{mín}\{1, \frac{\delta}{3}\}$y $d(j(t), v) \leq \text{mín}\{1, \frac{\delta}{3}\}$.Tenemos por un lado que $s, t \in A$, y por P3 que $d(j(s), j(t)) \leq \delta$.

Mostraremos ahora que $\hat{d}((f(s))^*, g(u)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Para ver esto, es decir, que $d(\{\{f(s)\}\}, F^u) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, aplicamos la definición de pseudo-premétrica para las familias de Cauchy de Z. Sea $\varepsilon' > 0$, como F^u es de Cauchy, existe $T \in F^u$ tal que diám $T \leq \varepsilon'$. Haciendo $\delta' = 2 \,\text{mín}\{1, \frac{\delta}{3}\}$, tenemos que $f(s) \in f(S_{\delta'}^u)$, y como $f(S_{\delta'}^u) \in F^u$ entonces existe $a \in Z$ tal que $a \in T$ y $a \in f(S_{\delta'}^u)$. Como $a \in f(S_{\delta'}^u)$ entonces $a = f(b)$ para cierto $b \in S_{\delta'}^u$, y como $S_{\delta'}^u \subseteq A$, usamos que $d(s, b) \leq \delta' < \delta$ para llegar a que $d(f(s), a) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Por otro lado tenemos que $a \in T$, por lo que usando P3 obtenemos $d(f(s), z) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon'$

para todo $z \in T$, es decir que diám $(\{f(s)\} \cup T) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon'$. Ergo $d(\{\{f(s)\}\}, F^u) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ como queríamos ver. Análogamente también tenemos que $\hat{d}((f(t))^*, g(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Una vez probada la anterior observación, volvemos a que $s, t \in A$ y $d(s,t) \leq \delta$ y que por lo tanto $d(f(s), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De esta forma lo que tenemos hasta el momento es que $\hat{d}(g(u), (f(s))^*) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, que $\hat{d}((f(s))^*, (f(t))^*) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, y que $\hat{d}((f(t))^*, g(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Combinando todo esto con P3 tenemos que $\hat{d}(g(u), g(v)) \leq \varepsilon$ si por supuesto, $u, v \in B$ y $d(u,v) \leq \frac{\delta}{3}$. Por lo que se ha probado que g es un morfismo.

Solo queda ver que g hace que el diagrama conmute. Pero esto se tiene por que que para todo $x \in X$ se tiene que $\{S_\delta^{j(x)}\}_{\delta>0}$ es equivalente $\{\{x\}\}$, luego por el lema anterior se tendría que $F^{j(x)}$ sería equivalente $\{\{f(x)\}\}$, es decir, que $g(j(x)) = (f(x))^*$. $\square$

Presentamos un último lema cuya prueba no representa mayor dificultad.

Lema 2.3.4. *Sean $f : X \to Y$ un morfismo y D un subconjunto denso de X. Si $f \restriction_D$ es una isometría, entonces f es una isometría.*

Ya con todos estos resultados previos la prueba de la unicidad de la completación resulta casi categórica.

Teorema 2.3.5. *La completación de un espacio premétrico es única salvo isometrías.*

Demostración. La unicidad salvo isometrías significa que dados los espacios premétricos X, Y y una isometría $f : X \to Y$ con $f(X)$ denso en Y y Y completo, entonces podemos encontrar una isometría $g : Y \to \hat{X}$ que sea sobreyectiva.

Sean entonces X, Y y f como ya se ha descrito, y las isometrías naturales $i : X \to \hat{X}$ y $j : Y \to \hat{Y}$. Si denotamos por $\mathrm{id}(x)$ la función identidad en X, tenemos usando el teorema anterior que existen morfismos g, h tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "g"] & \hat{X} \arrow[r, "h"] & \hat{Y} \end{tikzcd}$$

Tenemos también que por la conmutatividad del diagrama que $g(f(x)) = x^*$, y que además, $\hat{d}(x^*, y^*) \leq q$ si y solo si $d(x, y) \leq q$ y si y solo si $d(f(x), f(y)) \leq q$, por lo tanto, $g \restriction_{f(X)}$ es una isometría, luego por el lema anterior tenemos g más que un morfismo, es una isometría, quedando por probar que g es sobreyectiva. Por otro lado los morfismos f y j también son isometrías, por lo que aplicando el mismo argumento anterior llegamos a que h es una isometría.

Analizamos ahora la versión contraída del diagrama conmutativo, quedándonos con

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j} \\ Y & \xrightarrow{h\circ g} & \hat{Y} \end{array}$$

Por la unicidad que nos proporciona el teorema (2.3.4) tenemos que $h \circ g = j$. Esto nos permite probar de una forma muy directa la sobreyectividad de g usando que por supuesto, que Y es completo, lo cual no habíamos usado hasta el momento . En efecto, si $x \in \hat{X}$ y queremos encontrar $y \in Y$ tal que $g(y) = x$, lo que hacemos simplemente tomar $y \in Y$ tal que $j(y) = h(x)$, el cual existe por que Y es completo y por lo tanto j es sobreyectiva. Como $h \circ g = j$, tenemos que $h(g(y)) = j(y) = h(x)$, es decir, que $\hat{d}(h(g(y)), h(x)) \leq 0$. Por lo tanto, ya que h es una isometría, tenemos que $d(g(y), x) \leq 0$. Con esto concluimos (por P1) que $g(y) = x$ y de esta forma g es una isometría sobreyectiva entre Y y $\hat{X}$ como queríamos probar. $\square$

2.4. COMPLETITUD SECUENCIAL

Como muestra de la ganancia que se obtiene al revisar las nociones clásicas de completitud y completación, tenemos el siguiente resultado cuya prueba no requiere elección.

Teorema 2.4.1. *Si X un espacio premétrico completo, entonces toda sucesión de Cauchy converge.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy sobre X. Queremos ver existe $x \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Definimos ahora una familia asociada $(x_n)_n$ justo como en el ejemplo dado de familia de Cauchy, es decir, $F = \{X_i : i \in \mathbf{N}\}$ en donde $X_k = \{x_n : n \geq k\}$. Como X es completo la isometría $i : X \to \hat{X}$ es sobreyectiva. Esto significa que $[F] = x^*$ para algún $x \in X$, es decir, F es equivalente $\{\{x\}\}$. Como F es equivalente a $\{\{x\}\}$, entonces $d(F, \{\{x\}\}) \leq 0$, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe $X_N \in F$ tal que diám $(X_N \cup \{x\}) \leq \varepsilon$, lo que se traduce en que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$, como queríamos ver. $\square$

Hemos mostrado entonces que la noción de completitud que adoptamos es en un contexto sin elección, más fuerte que la definición clásica. La equivalencia desde luego, se obtiene al introducir algo de elección.

Teorema 2.4.2. *Sea X un espacio premétrico en el que toda sucesión de Cauchy converja. Asumiendo el axioma del elección numerable se tiene que X es completo.*

Demostración. Probar que la isometría $i : X \to \hat{X}$ es sobreyectiva, es equivalente a tener que para cada familia de Cauchy F sobre X existe $x \in X$ tal que $[F] = x^*$. Sea por lo tanto F de Cauchy sobre X. Definimos para cada $n \in \mathbf{N}$ el conjunto

$$S_n = \bigcup \{S \in F : \operatorname{diam} S \leq 2^{-n}\}.$$

Observamos que $S_n \neq \emptyset$, por lo que el axioma de elección numerable nos permite hablar de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $x_n \in S_n$. Tenemos ahora que $(x_n)_n$es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como F es de Cauchy tenemos que existe $S \in F$ tal que $\operatorname{diam} S \leq 2^{-N} < \frac{\varepsilon}{3}$ para algún N natural. Sean ahora $n, m \geq N$, como $x_n \in S_n$ y $x_m \in S_m$ entonces $x_n \in T$ y $x_m \in U$ para ciertos $T, U \in F$ tales que $\operatorname{diam} T \leq 2^{-n} \leq 2^{-N}$ y $\operatorname{diam} U \leq 2^{-m} \leq 2^{-N}$. Como también $S \cap T \neq \emptyset$ y $S \cap U \neq \emptyset$, existen por lo tanto $s, s' \in S$ tales que $s \in T$ y $s' \in U$. Así tenemos que $d(x_n, s) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, que $d(s, s') \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y que $d(s', x_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, por lo que aplicando P3 $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ para todo $m, n \geq N$, como queríamos ver.

Como $(x_n)_n$es de Cauchy entonces es convergente, es decir, existe $x \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $N \in \mathbf{N}$ para el que se tenga que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. La idea ahora es probar $d(F, \{\{x\}\}) \leq 0$. Para eso fijamos $\varepsilon > 0$

a partir del cual encontramos N_0 natural tal que $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N_0$. Luego consideramos N_1 natural tal que $2^{-N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ y tomamos $k = \max\{N_0, N_1\}$. De esta forma tenemos que $d(x_k, x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, y como $x_k \in S_k$, entonces existe $x_k \in T$ con algún $T \in F$ tal que diam $T \leq \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $d(y, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in T$. Usando P3 llegamos a que $d(y, x) \leq \varepsilon$ para todo $y \in T$, por lo tanto diam $(T \cup \{x\}) \leq \varepsilon$ y de esta forma podemos concluir que F es equivalente a $\{\{x\}\}$, y que X es completo. $\square$

Por último presentamos una proposición sencilla, pero que usamos para redondear la idea con la que iniciamos la discusión de la sección de completación.

Proposición 2.4.3. *Sea X un espacio premétrico, entonces asumiendo el axioma de elección numerable se tiene que para cada $x \in \hat{X}$ existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} s_n^* = x$.*

Demostración. En efecto, para cada $x \in \hat{X}$ tenemos una familia numerable $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ en la que

$$F_n = \{s \in X : d(x, s^*) \leq 2^{-n}\}.$$

Por la densidad de X en $\hat{X}$, cada elemento de la familia es no vacío, por lo que usando elección se obtiene la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cuyo límite es x. $\square$

Teniendo en cuenta que como ya mencionamos, hay modelos de los números reales construidos por sucesiones de Cauchy de racionales, en los que precisamente no toda sucesión de Cauchy converge, entonces eso quiere decir que sin elección obtenemos una nueva versión métrica de los números reales en $\widehat{\mathbf{Q}}$. Esto es, tenemos dos opciones: O representamos a los números reales como sucesiones de Cauchy de racionales, perdiendo la completitud, o representamos a los números reales de forma no secuencial, pero a cambio de que toda sucesión de Cauchy converja. Aquí nos decantamos por la segunda opción.

2.5. EL ENFOQUE ORIGINAL DE RICHMAN

En esta sección reproducimos algunas definiciones originales del trabajo de Richman. Al final probamos la equivalencia entre la versión de completitud dada por Richman con la que aquí presentamos.

Definición 2.5.1. Sea X un espacio premétrico. Una familia $\{S_q\}_q$ de subconjuntos de X indexados por racionales positivos es una *familia regular* si para cada $x \in S_p$ y $y \in S_q$ se tiene que $d(x, y) \leq p + q$.

Definición 2.5.2. Si $\{S_q\}_q$ y $\{T_q\}_q$ son familias regulares, decimos que son equivalentes si para cada $x \in S_p$ y $y \in T_q$ se tiene que $d(x, y) \leq p + q$ para todo p y q racionales positivos.

Definición 2.5.3. Denotamos por X_r al conjunto de clases de equivalencia de familias regulares sobre X. Definimos además la función $i_r : X \to X_r$ en la que a cada $x \in X$, se tiene que $i_r(x)$ es la clase de la familia regular en la que $S_q = \{x\}$ para todo $q \in \mathbf{Q}^+$. Decimos que X es *completo por familias regulares* si i_r es sobreyectiva.

Teorema 2.5.4. *Sea X un espacio premétrico, tenemos que X es completo si y solo si es completo por familias regulares.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea X un espacio premétrico completo. Queremos ver que $i_r : X \to X_r$ es sobreyectiva. Fijamos por lo tanto $t \in X_r$. Tenemos que t es la clase de equivalencia de una familiar regular $\{S_q\}_q$, por lo que definimos para cada q racional positivo el conjunto

$$U_q = \bigcup \{S_q : q \leq p\}.$$

De esta forma $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ y diám $U_{\varepsilon/2} \leq \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $F = \{U_q : q \in \mathbf{Q}^+\}$ es una familia de Cauchy sobre X. Por la completitud de X tenemos entonces que $[F] = i(x) = x^*$ para algún $x \in X$.

Afirmamos que la familia $\{T_q\}_q$ en la que $T_q = \{x\}$ para todo q, es equivalente a $\{S_q\}_q$. Sean entonces p, q racionales no negativos. Como F es equivalente como familia de Cauchy a $\{\{x\}\}$, entonces existe una familia U_r tal que diám $(U_r \cup \{x\}) \leq p$. Esto implica en particular que diám $(S_\varepsilon \cup \{x\}) \leq p$ para cada $\varepsilon \leq p$, lo que significa que para todo $y \in S_\varepsilon$ se tiene que $d(y, x) \leq p$ siempre que $\varepsilon \leq p$. Así, por P3 se tiene que $d(x, z) \leq p + q + \varepsilon$ para todo $z \in S_q$ y para ε arbitrariamente pequeño. Aplicando por lo tanto P4 tenemos que $\{T_q\}_q$ y $\{S_q\}_q$ son familias regulares equivalentes, con lo que concluimos que $t = i_r(x)$ y en consecuencia que i_r es sobreyectiva.

$\Longleftarrow$) Sea X un espacio premétrico completo por familias regulares, queremos ver $i : X \to \hat{X}$ es sobreyectiva. Fijamos por lo tanto $t \in \hat{X}$. Tenemos que t es la clase de equivalencia de una familia de Cauchy F sobre X, por lo que definimos para cada q racional positivo el conjunto

$$S_q = \bigcup \{U \in F : \operatorname{diám} U \leq q\}.$$

Obtenemos así una familia regular $\{S_q\}_q$ que por ser X completo por familias regulares, resulta ser equivalente a una familia $\{T_q\}_q$ en la que $T_q = \{x\}$ para todo q.

Afirmamos que t es la clase de equivalencia de $\{\{x\}\}$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $d(x, z) \leq \varepsilon$ para todo $z \in S_\varepsilon$, y en particular para todo z en cualquier $U \in F$ tal que $\operatorname{diám} U \leq \varepsilon$. Con esto llegamos a que $\{\{x\}\}$ es equivalente a F, y a que $t = [F] = i(x) = x^*$, lo que significa que i es sobreyectiva. $\square$

Capítulo 3

NÚMEROS REALES

En este capítulo haremos otra presentación de $\widehat{\mathbf{Q}}$, construyendo un espacio isométricamente isomorfo en el que los puntos son ahora cortaduras de Dedekind. En esta presentación de $\widehat{\mathbf{Q}}$ la premétrica se define a través de la estructura de grupo abeliano ordenado obtenida en el conjunto de cortaduras. Sin embargo, desde un punto de vista constructivo es necesario hacer primero una revisión del concepto de cortadura, resultando una definición de cortadura que, aunque es clásicamente equivalente a la usual o estándar, precisa más claramente la intuición que tenemos de los números reales.

Por último definiremos lo que son campos de Heyting, que es una noción propia de las matemáticas constructivas, y del que los números reales son el ejemplo paradigmático. Para esto usaremos repetidamente resultados de la sección 2.3, y en especial el teorema 2.3.3 sobre extensión de morfismos, redondeando con esto las aplicaciones del segundo capítulo.

3.1. CORTADURAS DE DEDEKIND

Antes de presentar la definición de cortadura que usaremos a lo largo del capítulo, recordamos primero al lector la definición estándar de cortadura que aparece en textos clásicos de análisis (ver por ejemplo [13]).

Definición 3.1.1. Sea $S \subseteq \mathbf{Q}$, decimos que S es una *cortadura clásica* si

C1 Si $p \in S$ entonces $q \in S$ para todo $q < p$.

C2 Si $p \in S$ entonces existe $q \in S$ tal que $p < q$.

C3 $\emptyset \neq S \neq \mathbf{Q}$.

Esta definición de cortadura no puede juzgarse como constructiva o no, ya que se trata simplemente de una definición. Sin embargo no es la más apropiada si queremos para probar constructivamente propiedades fundamentales de los números reales. Es por eso que adoptamos en este trabajo una definición más diciente de cortadura, que es la que vamos a usar para dar otra presentación de la completación métrica de los racionales.

Definición 3.1.2. Sea $L \subseteq \mathbf{Q}$, decimos que L es una *ε-cortadura* si

L1 Si $p \in L$ entonces $q \in L$ para todo $q < p$.

L2 Si $p \in L$ entonces existe $q \in L$ tal que $p < q$.

L3 Para todo $\varepsilon > 0$ existen $q \in L$ y $p \notin L$ tales que $p - q < \varepsilon$.

Las condiciones L1 y L2 son las mismas condiciones C1 y C2. La condición L3 sin embargo, además de ser intuitiva tiene un contenido bastante significativo desde un punto de vista constructivo. En particular observamos que al hacer $\varepsilon = 1$, se tiene que la condición L3 implica C3, por lo que toda ε-cortadura es también una cortadura clásica.

Mostramos ahora que la noción de cortadura clásica es (constructivamente) más débil que la de ε-cortadura. Para esto presentamos un contraejemplo Brouweriano en el que mostramos que la equivalencia entre las dos definiciones de cortadura implica PLO.

Sea $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión binaria. Definimos el conjunto

$$S_b = \{t \in \mathbf{Q} : t < b_k \text{ para algún } k \in \mathbf{N}\}.$$

Se verifica sin problemas que S_b es una cortadura clásica. Supongamos entonces que S_b es además una ε-cortadura. Eso quiere decir que en particular para $\varepsilon = 1$ existen

$q \in S_b$ y $p \notin S_b$ tales que $p - q < 1$. Si $q \geq 0$, como $q \in S_b$ existe entonces b_i tal que $0 \leq q < b_i$, teniéndose necesariamente que $b_i = 1$. Por otro lado si $q < 0$, entonces $p < 1 + q < 1$, por lo que el valor de b_n para cada natural n no puede ser 1, ya que $p \notin S_b$, resultando así que $b_n = 0$ para cada $n \in \mathbf{N}$. De esta forma tenemos PLO.

Lo que intuitivamente nos dice este contraejemplo Brouweriano, es que la definición de cortadura clásica abarca a subconjuntos, que puede que no señalen efectivamente esa "brecha" entre los racionales que tenemos en mente cuando pensamos en cortaduras. Es por eso que de ahora en adelante cuando hablemos de cortaduras, la definición con la que trabajamos es la de ε-cortadura. Esta tiene además una muy bonita caracterización, pero antes de presentarla enunciamos primero una proposición básica cuya prueba realizamos con algo de detalle. Advertimos que las demostraciones que siguen también están escritas con este cuidado, necesario para que el lector pueda verificar que no estamos aplicando razonamientos clásicos no constructivos.

Proposición 3.1.3. *Sea L una cortadura, entonces para todo número racional q se tiene que $q \notin L$ si y solo si $q > p$ para todo $p \in L$.*

Demostración. $\Longrightarrow$)Sea $p \in L$ y $q \notin L$, tenemos por la ley de la tricotomía en los números racionales que se cumple alguna de las siguientes afirmaciones

$$p < q \qquad p = q \qquad p > q$$

Si $p = q$ entonces $q \in L$ porque $p \in L$ (contradicción). Si $q < p$ entonces $q \in L$ por L1 (¡contradicción de nuevo!). Concluimos entonces que $p > q$.

$\Longleftarrow$)Sea $q > p$ para todo $p \in L$. Supongamos ahora que $q \in L$, luego por L2 existiría $r > p$ tal $r \in L$, lo cual es contradictorio porque si $r \in L$ entonces $p < r$. □

Teorema 3.1.4. *Sea $L \subseteq \mathbf{Q}$, tenemos que L es cortadura si y solo si*

1. $L \neq \emptyset$
2. $\mathbf{Q} \backslash L \neq \emptyset$
3. Si $p \in L$ entonces existe $q \in L$ tal que $p < q$

4. Si $p < q$, entonces o bien $p \in L$, o $q \notin L$.

Demostración. $\Longrightarrow$)(1) y (2) son inmediatas y se reducen al aplicar L3 tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$. En el caso de (3), tenemos que es el mismo enunciado L2, por lo que solo queda fijar p y q racionales y probar (4).

Si $p < q$ entonces $q - p > 0$, y por L3 se tiene que existen $a \in L$ y $b \notin L$ tales que $b - a < q - p$. Ahora, si $p < a$ entonces por L1 se tiene que $p \in L$. Si $a \leq p$ entonces tenemos

$$b < a + (q - p) \leq p + (q - p) = q.$$

De esta forma $b < q$ y por lo tanto $q \notin L$, ya que si tuviéramos $q \in L$ eso estaría en contradicción con L1, ya que $b \notin L$.

$\Longleftarrow$)Si $p \in L$ y $q < p$, entonces por (4) $q \in L$ o $p \notin L$. Ahora, no es el caso que $p \notin L$, por lo que se debe tener entonces que $q \in L$, probándose así L1. En cuanto L2 ya habíamos dicho que era el mismo enunciado (2). Probamos entonces L3.

Sean $a \in L$ y $b \notin L$, que existen por (1) y (2). Probamos por inducción que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen $a_n \in L$ y $b_n \notin L$ tales que

$$b_n - a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (b - a).$$

En efecto, si $n = 0$ entonces hacemos $a_0 = a$ y $b_0 = b$ y de esta forma se satisface trivialmente el caso base. Si se cumple para n, entonces tenemos por 3.1.3 que $a_n < b_n$, por lo que

$$a_n + \tfrac{1}{3}(b_n - a_n) < a_n + \tfrac{2}{3}(b_n - a_n).$$

Aplicamos ahora (4). Si $a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n) \in L$ entonces tomamos $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n)$ y $b_{n+1} = b$. Si $a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n) \notin L$, entonces tomamos $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n)$. En cualquier caso se tiene

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n - a_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b - a),$$

y por inducción se tiene entonces para todo $n \in \mathbf{N}$. Finalmente fijamos $\varepsilon > 0$ y escogemos un natural k lo suficiente grande como para que $\left(\frac{2}{3}\right)^k (b - a) < \varepsilon$, de forma que al hacer $q = a_k$ y $p = b_k$ tenemos que $p - q < \varepsilon$, y con esto probamos por lo tanto L3. $\square$

Esta caracterización de ε-cortadura tiene un aspecto un poco más cercano al de cortadura clásica, en el sentido de que se expresa solo términos de orden y pertenencia. De hecho, es la que usualmente se da como definición de cortadura en el ámbito constructivo (ver por ejemplo [11]). Resaltamos en particular de esta caracterización, el significado de la propiedad (4), en la que podemos pensar o bien como una "aproximación" a una instancia del tercero excluso, o en algo así como una especie de propiedad de selección. La "aproximación" de la que hablamos es que si L es una cortadura, apriori no tenemos que para cualquier s racional podamos verificar si $s \in L$, o si $s \notin L$, pero lo que sí nos dice la localización de L, es que para cada $\delta > 0$ se puede chequear

$$s \in L \quad \text{o} \quad s + \delta \notin L$$

Por otra parte si hacemos $U = \mathbf{Q} \backslash L$, la localización también afirma que para cada p y q racionales con $p \neq q$, se puede garantizar al menos para uno de los racionales que este pertenezca ya se sea a L, o a U, por lo que se podría decir que el par (L, U) selecciona al menos un racional de cada par de racionales distintos.

Como ejemplo básico de cortaduras, tenemos las cortaduras definidas por números racionales, que presentamos a través de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Sea $r \in \mathbf{Q}$, el conjunto $r^* = \{p \in \mathbf{Q} : p < r\}$ es una cortadura.*

Demostración. Consecuencia casi inmediata de 3.1.4. Por ejemplo (3) resulta de la transitividad del orden los racionales, y (4) se tiene porque si $p < q$, al comparar p con r podemos decidir si $p \in r^*$ o $q \notin r^*$. $\square$

3.2. ORDEN Y SUMA

Denotamos por $\mathbf{R}$ al conjunto de todas las cortaduras, al que vamos a dotar ahora de una estructura de grupo abeliano parcialmente ordenado. Además de esto revisamos también aspectos interesantes sobre el orden de $\mathbf{R}$.

Definición 3.2.1. Sean L y M cortaduras, decimos que $L < M$ si existe $q \in M$ tal que $q \notin L$, es decir, si $M \backslash L \neq \emptyset$.

Escríbimos $M > L$ si $L < M$, y $L \nless M$ en caso de no darse $L < M$. Para abreviar escribimos como es usual, $L < M < N$ cuando se tiene que $L < M$ y $M < N$.

Proposición 3.2.2. *Si p y q son racionales entonces $p < q$ si y solo si $p^* < q^*$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $p < q$ entonces tomamos r racional tal que $p < r < q$. Tenemos ahora que $r \in q^*$ y que $r \notin p^*$, lo que por definición es $p^* < q^*$.

$\Longleftarrow$)Si $p^* < q^*$ entonces existe r racional tal que $r \in q^*$ y $r \notin p^*$. Esto que se traduce en que $p \leq r < q$, por lo que $p < q$. $\square$

Proposición 3.2.3. *Sean L y M cortaduras tales que $L < M$, entonces existe un racional q tal que $L < q^* < M$.*

Demostración. Como $L < M$ entonces existe $p \in M$ tal que $p \notin L$. Luego por L2 existe $q > p$ tal que $q \in M$. Ahora, como $q \notin q^*$ entonces por definición $q^* < M$, y como $p \in q^*$ concluimos también que $L < q^*$. $\square$

El siguiente teorema es bastante significativo.

Teorema 3.2.4. *Sean L y M cortaduras, tenemos que $L \subseteq M$ si y solo si $M \nless L$. De esta forma, la relación $\nless$ es un orden parcial.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $M < L$, es decir, que hay un $q \in L$ tal que $q \notin M$. Entonces, como $L \subseteq M$ tenemos que $q \in M$, lo que es absurdo, luego $M \nless L$.

$\Longleftarrow$)Sea $q \in L$, queremos ver que $q \in M$ para probar la contención. En efecto, por L2 existe $p > q$ tal que $p \in L$. Aplicando entonces el teorema 3.1.4 tenemos al menos uno de los siguientes casos

$$q \in M \qquad p \notin M$$

Sin embargo, tener que $p \in L$ y que $p \notin M$ significa que $M < L$, lo que nos lleva a una contradicción ya que $M \nless L$. Descartamos por lo tanto $p \notin M$ y concluimos así que $q \in M$ y que $L \subseteq M$. $\square$

Lo notable del teorema anterior radica en un hecho sutil, y es que si L y M son cortaduras, la afirmación

$$L < M \quad \text{o} \quad L = M \quad \text{o} \quad M > L$$

en general, como vamos mostrar, no se tiene desde un punto de vista constructivo. Sin embargo lo que nos asegura el teorema 3.2.4, es que sí valen las demostraciones de igualdad por doble reducción al absurdo al estilo griego. Esto es, si logramos mostrar que $L \not< M$, y que $M \not< L$, eso quiere decir que $M \subseteq L$, y que $L \subseteq M$. Al tener por lo tanto la doble contención podemos concluir que $L = M$.

Definición 3.2.5. Sean L y M cortaduras, decimos que $L \leq M$ si $M \subseteq L$, o de forma equivalente, si $L \not< M$.

Aclaramos en seguida que con esta definición en realidad solo hemos introducido una notación formal, así que al escribir $L \leq M$, esto no significa en principio que $L < M$ o que $L = M$. De hecho vamos a mostrar precisamente a través de un contraejemplo Brouweriano, que $L \leq M$ no tiene porque implicar que $L < M$, o que $L = M$. Para esto hacemos uso de una proposición con la obtenemos una clase de cortaduras asociada a $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$.

Proposición 3.2.6. *Sea* $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *una sucesión binaria. Tenemos entonces que el conjunto*

$$L_b = \{t \in \mathbf{Q} : t < b_k 2^{-k} \text{ para algún } k \in \mathbf{N}\}$$

es una cortadura.

Demostración. L1 y L2 son inmediatas. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Tomamos un natural k tal que $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ y chequeamos en el conjunto finito $\{0, ..., k\}$ si hay algún m tal que $b_m = 1$. Si existe tal entero, entonces $L_b = \left(\frac{1}{2^\mu}\right)^*$ con μ el primer m tal que $b_m = 1$. En cambio si para todo $n \leq k$ se verifica que $b_n = 0$, entonces tenemos que $-2^{-k} \in L_b$ y que $2^{-k} \notin L_b$, por lo que en cualquier caso L_b satisface L3 y es por lo tanto un cortadura. $\square$

Usando esta proposición elaboramos ahora un contraejemplo Brouweriano para cada una de estas afirmaciones:

1. Para todo par de cortaduras L, M si $L \leq M$ entonces $L < M$ o $L = M$.

2. Para todo par de cortaduras L, M se tiene que $L \leq M$ o $M \leq L$, esto es, $\leq$ es un orden lineal sobre $\mathbf{R}$.

1. Sea $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión binaria. Observamos primero que $0^* \subseteq L_b$. Supongamos ahora que $0^* < L_b$ o $0^* = L_b$. Vamos a mostrar que esta suposición implica PLO. En efecto, en el caso en el que $0^* < L_b$, existe por definición un racional q tal que $q \in L_b$ con $q \geq 0$, lo que significa a su vez que existe b_i tal que $0 \leq q < b_i 2^{-i}$. Al ser por lo tanto $b_i 2^{-i}$ positivo, debemos tener necesariamente que $b_i = 1$.

En el segundo caso cuando $0^* = L_b$, en particular tenemos que $L_b \subseteq 0^*$. De esta forma para todo n natural, $b_n = 0$. De no ser así y haber $b_k = 1$, existiría $r \geq 0$ con $r \in L_b \subseteq 0^*$, lo que sería absurdo. Hemos mostrado por lo tanto o que bien existe $b_i = 1$, o que todos los términos de $(b_n)_n$ se anulan. Esto es lo que dice PLO.

2. Sea $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión binaria con a lo sumo un término igual a 1, y $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones en las que para todo n, $c_n = b_{2n}$ y $d_n = b_{2n+1}$. Afirmamos ahora que $L_c \leq L_d$ o $L_d \leq L_c$ implica PFLO, que dice que entre $(c_n)_n$ y $(d_n)_n$ alguna de ellas coincide con la sucesión constante cero. Para ver esto supongamos por ejemplo que tenemos $L_c \leq L_d$. Si hay algún k tal que $b_{2k} = 1$, entonces al haber a lo sumo un término no nulo en $(b_n)_n$, se tendría que $b_{2n+1} = 0$ para todo n. De esto último se deduce que $L_d = 0^* \subseteq L_c$, y en consecuencia que $L_c = L_d = 0^*$. Pero esto contradice precisamente que $b_{2k} = 1$, por lo que no puede haber entonces ningún k tal que $b_{2k} = 1$. Así para todo n se debe tener que $b_{2n} = 0$, y $(c_n)_n$ es la sucesión constante cero.

Si lo que tenemos es el otro caso en el que $L_d \leq L_c$, de forma análoga se muestra que $(d_n)_n$ es la sucesión constante cero. Por lo tanto hemos mostrado que si se tiene $L_c \leq L_d$ o $L_d \leq L_c$, entonces vale PFLO.

Aún así a pesar de estos contraejemplos hay propiedades naturales del orden que funcionan como se espera.

Teorema 3.2.7. *Sean L y M cortaduras, tenemos entonces las siguientes propiedades:*

i) Si $L < M$ entonces para cualquier N se tiene que $L < N$ o $N < M$.

ii) Si $L < M$ entonces $L \leq M$.

iii) Si $L < M$ y $M \leq N$ entonces $L < N$

Demostración. i) Sea N una cortadura. Como $L < M$, entonces existe $p \in M$ tal que $p \notin L$. Por L2 existe $q \in M$ tal $p < q$. Por el teorema 3.1.4 aplicado a la cortadura N, tenemos que $p \in N$ o $q \notin N$. En el primer caso $L < N$. En el segundo caso $N < M$.

ii) Si $L < M$ entonces existe $p \in M$ tal que $p \notin L$. Como $p \notin L$ se tiene entonces por la proposición 3.1.3 que $q < p$ para todo $q \in L$. Luego aplicando L1 en M obtenemos $L \subseteq M$ y por el teorema 3.2.4 se tiene que $M \not< L$, que por definición es $L \leq M$.

iii) Esto es una consecuencia de *i)*. En efecto, si $L < M$ y $M \leq N$ entonces aplicando *i)* tenemos que $L < N$ o $N < M$. Como $M \leq N$ entonces por definición $N \not< M$. Luego el caso que tenemos es $L < N$. □

La propiedad *i*) se usa mucho en matemáticas constructivas en reemplazo de la ley tricotomía. La ley de la tricotomía para cortaduras no se tiene, ya que implica que $\leq$ es un orden lineal. Esto curiosamente se tiene por *ii*), que nos dice que $L < M$ o $L = M$ sí implica que $L \leq M$, en contraste con el recíproco, para el que ya presentamos un contraejemplo Brouweriano.

Definición 3.2.8. Sean L y M cortaduras, definimos la suma de cortaduras como el conjunto

$$L + M = \{p + q : p \in L, q \in M\}.$$

Teorema 3.2.9. *Si L y M son cortaduras, entonces el conjunto $L + M$ es también cortadura.*

Demostración. (L1) Si $r < p + q$ con $p \in L$ y $q \in M$, entonces $r - p < q$. Por L1 se tiene que $r - p \in M$. De esta forma $r \in L + M$ ya que $r = p + (p - r)$.

(L2) Si $p \in L$ y $q \in M$ entonces por L2 existe $r > q$ con $r \in M$, por lo que $p + q < p + r$ con $p + r \in L + M$.

(L3) Sea $\varepsilon > 0$. Por L3 existen p, q, s, t tales que $p - q < \frac{\varepsilon}{2}$ y $s - t < \frac{\varepsilon}{2}$ con $q \in L$, $t \in M$ y $p \notin L$, $s \notin L$. Primero tenemos que $(p + s) - (q + t) < \varepsilon$. Ahora, si $a \in L$ y $b \in M$ entonces por 3.1.3 $a < p$ y $b < s$. Luego $a + b < p + s$, por lo que aplicando el reciproco de 3.1.3 llegamos a que $p + s \notin L + M$. Como $q + t \in L + M$ podemos concluir L3. □

Teorema 3.2.10. $(\mathbf{R}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. El candidato natural para elemento neutro es 0^*. En efecto, sea L una cortadura. Si $p \in L$ y $r \in 0^*$, entonces como $r < 0$ tenemos que $p + r < p$ y por lo tanto $p + r \in L$ (por L1). De esta forma $L + 0^* \subseteq L$. Ahora, si $q \in L$ entonces por L2 existe $s > q$ tal que $s \in L$, teniéndose que $q - s < 0$ y por lo tanto que $q - s \in 0^*$. Así llegamos a que $q \in L + 0^*$ ya que $q = s + (q - s)$.

Para ver que existe el inverso de L, definimos el conjunto

$$-L = \{t \in \mathbf{Q} : L < (-t)^*\}.$$

Probamos ahora que $-L$ es una cortadura. Usamos el teorema 3.1.4 y probamos que:

1. Como $\mathbf{Q} \backslash L \neq \emptyset$ tomamos entonces $p \notin L$. Ahora, como $p < p + 1$, es decir, como $p \in (p + 1)^*$ tenemos por definición que $L < (p + 1)^*$. Luego $-(p + 1) \in -L$ y $-L \neq \emptyset$.

2. Como $L \neq \emptyset$ tomamos $p \in L$. Por L1 $q \in L$ para todo $q < p$, lo que significa que $p^* \subseteq L$. Por el teorema 3.2.4 tenemos que $L \not< p^*$, por lo que llegamos a que $-p \notin -L$, lo cual es, que $\mathbf{Q} \backslash -L \neq \emptyset$.

3. Si $p \in -L$ eso significa que $L < (-p)^*$. Luego por 3.2.3 existe q racional tal que $L < q^* < (-p)^*$. Tenemos entonces que $-q \in L$ y que $q < -p$, es decir, que $p < -q$.

4. Sean p y q racionales tales que $p < q$. Tenemos entonces que $-q < -p$, de esta forma tomamos r racional tal que $-q < r < -p$ y usamos que $-q \in L$ o $r \notin L$. En el primer caso, usando de nuevo el teorema 3.2.4 llegamos a que $L \not< (-q)^*$, teniendo por lo tanto $q \notin -L$. En el segundo caso se tiene directamente que $L < (-p)^*$, es decir, que $p \in -L$.

Finalmente vemos que

$$L + (-L) = 0^*.$$

Sea entonces $q \in L$ y $t \in -L$. Debemos ver que $q + t \in 0^*$ para poder decir que $L + (-L) \subseteq 0^*$. En efecto, como $q^* < L$ y $L < (-t)^*$, entonces por *ii)* y *iii)* de 3.2.7 tenemos que $q^* < (-t)^*$. Esto último implica que $q < -t$ y que $q + t < 0$. De esta forma $q + t \in 0^*$ como queríamos ver.

Sea ahora $r \in 0^*$, esto es, $r < 0$. Por L3 existen $q \in L$ y $p \notin L$ tales que $p - q < -r$. Ahora, como $p < q - r$ podemos decir por definición que $L < (q - r)^*$. De esta forma $r - q \in -L$ y por lo tanto $r \in L + (-L)$, ya que $r = q + (r - q)$. Concluimos entonces la otra contención y llegamos que a $L + (-L) = 0^*$ como queríamos ver.

La conmutatividad y asociatividad se verifican de forma inmediata. $\square$

Teorema 3.2.11. *Sean L y M cortaduras, entonces se tiene que:*

i) Si $L < M$ entonces $L + N < M + N$ para cualquier cortadura N.

ii) Si $L \leq M$ entonces $L + N \leq M + N$ para cualquier cortadura N.

Demostración. i) Sea $L < M$ y N cualquier cortadura. Tenemos que existe $q \in M$ tal que $q \notin L$. Por L2 existe otro $p \in M$ tal que $p > q$. Tomamos ahora por L3 r, s tales que $r - s < p - q$, con $s \in N$ y $r \notin N$. Como $r < s + (p - q)$ tenemos que $t < s + (p - q)$ para todo $t \in N$ (por 3.1.3). Ahora, si $a \in L$ y $b \in N$, como $a < q$ y $b < s + (p - q)$ entonces $a + b < q + s + (p - q) = p + s$. Por lo tanto (por 3.1.3) $p + s \notin L + N$ y sin embargo, $p + s \in M + N$, lo cual es $L + N < M + N$.

ii) Consecuencia de lo anterior. Si $L \leq M$ y tuviéramos que $M + N < L + N$, entonces por *i)*

$$(M + N) + (-N) < (L + N) + (-N)$$

que por asociatividad se reduce a que $M < L$, lo que contradice que $L \leq M$, que es que $M \not< L$. Así pues llegamos a que $M+N \not< L+N$, lo cual es $L+N \leq M+N$. $\square$

Teorema 3.2.12. *La función $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ en la que $i(x) = x^*$, es un homomorfismo de grupos que además satisface que $x \leq y$ si y solo si $i(x) \leq i(y)$.*

Demostración. Probamos primero que i es un homomorfismo de grupos. Esto es, que

$$x^* + y^* = (x + y)^*.$$

En efecto, tenemos que $x^* + y^* \subseteq (x + y)^*$ ya que si p y q son racionales tales que $p \in x^*$ y $q \in y^*$, entonces $p < x$ y $q < y$. Por lo tanto $p + q < x + y$, es decir, $p+q \in (x+y)^*$. Ahora veamos que $(x+y)^* \subseteq x^* + y^*$. Sea entonces $r \in (x+y)^*$, es decir, $r < x+y$. Como tenemos que $r-x < y$, escogemos $\delta > 0$ tal que $(r-x)+\delta < y$. Hacemos ahora $s = (r - x) + \delta$ y $u = x - \delta$, teniendo por lo tanto que $s \in y^*$ y que $u \in x^*$. De esta forma $r = s + u \in (x^* + y^*)$.

Ahora, si $x \leq y$ entonces por ser x, y racionales tenemos que $x < y$ o $x = y$, luego tenemos que $x^* < y^*$ (por 3.2.2) o que $x^* = y^*$. En cualquier caso llegamos a que $x^* \leq y^*$. El reciproco se da porque si $x^* \leq y^*$ entonces $x^* \not< y^*$ por definición. Luego por 3.2.2 $x \not< y$, y por la tricotomía en los números racionales llegamos a que $x \leq y$. $\square$

La inmersión de $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ nos dice intuitivamente que hemos construido un nuevo espacio en el que podemos encontrar una copia de los racionales. Sin embargo hasta el momento no hemos mostrado un elemento de $\mathbf{R}$ que no se identifique con un racional. El ejemplo típico con el que se muestra que hay más que solo cortaduras determinadas por números racionales, es el de la cortadura que define a $\sqrt{2}$. Desde la antigüedad se ha hablado de magnitudes inconmensurables y se ha asentado un poco la idea de que la esencia de los números reales la encontramos en la existencia de números irracionales. Aquí más que en el hecho de tener números irracionales, hacemos énfasis en que la sola existencia de objetos que en principio solo concibamos mediante aproximaciones, ya da indicios de estar ante nuevo espacio matemático. Por ejemplo, uno de los casos actuales con los que se puede ilustrar esto es el de la constante γ de Euler-Mascheroni. Este número real surge al aproximar las sumas parciales de la serie armónica usando el logaritmo natural, su valor es cercano a $0,577$ y formalmente se define como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Una de las cosas que se sospecha sobre γ, es que sea irracional, e incluso trascendente. Sin embargo hasta el momento no se ha demostrado que en efecto se trate de un número irracional, y si lo pensamos bien, al no tener pruebas de ello en realidad γ no está obligado a ser o no un número racional.

Aunque en este trabajo no formalizamos la construcción de γ, sí mostramos con un contraejemplo Brouweriano que no podemos probar que el orden $\leq$ de $\mathbf{R}$ sea lineal. Con solo esto ya tenemos un indicio de que la noción de número real es esencialmente distinta a la número racional.

3.3. PROPIEDAD DEL SUPREMO

Una de las propiedades fundamentales que clásicamente se le atribuye a los números reales, es la de que todo subconjunto no vacío acotado superiormente tenga supremo. En esta sección no garantizamos algo tan fuerte, y solo probamos la existencia del supremo en conjuntos en los que siempre que haya elementos tan cerca como uno quiera de alguna cota superior. Esto será suficiente para probar la completitud de $\mathbf{R}$ una vez definamos una premétrica. Antes que nada recordamos primero al lector las definiciones básicas de cota superior, inferior, supremo e ínfimo.

Definición 3.3.1. Sea $(P, \preceq)$ un orden parcial. Si $A \subseteq P$ decimos un número real b es *cota superior* de A si para todo $a \in A$ se tiene que $a \preceq b$. Si lo que se tiene para todo $a \in A$ es que $b \preceq a$, entonces decimos que b es *cota inferior* de A.

Definición 3.3.2. Sea $(P, \preceq)$ un orden parcial. Decimos s es el *supremo* de A y lo denotamos como $s = \sup A$, si s es cota superior de A y si para toda cota superior b se tiene que $s \preceq b$. Análogamente, decimos que t es el *ínfimo* de A y escribimos $t = \text{ínf}\, A$ si t es cota inferior de A y si para toda cota inferior b se tiene que $b \preceq t$.

Teorema 3.3.3. *Sea* $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{R}$. *Si para todo racional* $\varepsilon > 0$ *existe* $M \in \mathcal{S}$ *y una cota superior* L *de* $\mathcal{S}$ *tal que* $L - M < \varepsilon^*$, *entonces existe* $S \in \mathbf{R}$ *tal que*

$$S = \sup \mathcal{S}.$$

Demostración. Definimos el conjunto

$$S = \bigcup \{U : U \in \mathcal{S}\}.$$

Mostramos primero que S es una cortadura (número real). Observamos que L1 y L2 son inmediatas, por lo que fijamos entonces un racional $\varepsilon > 0$ para probar L3. Tenemos ahora que existen L y M tales que $L - M < \varepsilon^*$ con L cota superior de $\mathcal{S}$ y M elemento de $\mathcal{S}$. Por el teorema 3.2.11 se tiene $L < M + \varepsilon^*$. Esto significa que existe $p \in M + \varepsilon^*$ tal que $p \notin L$. Por la definición de suma entre cortaduras $p = q + r$ con $q \in M$ y $r < \varepsilon$. Afirmamos que $p \notin S$ y que $q \in S$. En efecto, como L es cota superior de $\mathcal{S}$ entonces $U \leq L$ para todo $U \in \mathcal{S}$, o lo que es lo mismo (por 3.2.4), $U \subseteq L$ para todo $U \in \mathcal{S}$. De esta forma $S \subseteq L$, y por lo tanto $p \notin S$, ya que $p \notin L$. Ahora, como $q \in M$ y $M \subseteq S$ tenemos también que $q \in S$, por lo que hemos encontrado $p \notin S$ y $q \in S$ con $p - q = r < \varepsilon$, probando por lo tanto que S es cortadura.

Para ver que $S = \sup \mathcal{S}$ note primero que $U \subseteq S$ para todo $U \in \mathcal{S}$. De esta forma S es una cota superior de $\mathcal{S}$. Además, es la menor de las cotas superiores, ya que si L es cota superior de $\mathcal{S}$ entonces contiene a todos sus elementos, luego también contiene a S, esto es, $S \leq L$, concluyendo así la demostración. □

A modo de aplicación presentamos un resultado que es trivial clásicamente, pero sumamente útil e interesante desde un punto de vista constructivo.

Teorema 3.3.4. *Sea* $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{R}$ *y una función sobreyectiva*

$$f : \{0, ..., n\} \to \mathcal{B}$$

con $n \in \mathbf{N}$, *entonces existen* $S = \sup \mathcal{B}$ *y* $L = \text{ínf}\, \mathcal{B}$.

Demostración. Para probar que existe $S = \sup \mathcal{B}$ usaremos el teorema 3.3.3, por lo que fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada natural $i \leq n$ se tiene por los teoremas 3.2.3 y 3.2.7 que existe q_i racional tal que $f(i) \leq q_i^* < f(i) + \varepsilon^*$. Tomamos ahora $t = \text{máx}\{q_i : i \leq n\}$. Por el teorema 3.2.12 el orden de $\mathbf{Q}$ se preserva en $\mathbf{R}$, y por lo tanto también los máximos de los conjuntos. De esta forma $f(i) \leq t^*$ para todo $i \leq n$, es decir, t^* es cota superior de $\mathcal{B}$. Ahora, como $t = q_k$ para algún $k \leq n$ tenemos $t^* < f(k) + \varepsilon^*$, que por 3.2.11 es lo mismo que $t^* - f(k) < \varepsilon^*$, que era a lo que necesitábamos llegar según 3.3.3 para ver que existe $S = \sup \mathcal{B}$.

Para ver ahora que existe $L = \text{ínf}\, \mathcal{B}$ definimos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{-X : X \in \mathcal{B}\}$$

y la función $g : \{0, ..., n\} \to \mathcal{C}$ como $g(i) = -f(i)$. Observamos que g es también sobreyectiva, por lo que existe $L = \sup \mathcal{C}$. Usando las propiedades de grupo ordenado que hemos probado llegamos a que $\text{ínf}\, \mathcal{B} = -L$. $\square$

Con esto hemos probado que el orden parcial $(\mathbf{R}, \leq)$ es un retículo, lo que es algo notable ya que vimos que $\leq$ no es un orden lineal. Este tipo de resultados además de curiosos, son también útiles como ya dijimos, y muchas veces sacan de apuros. Por ejemplo, normalmente el valor absoluto de un número real x se define como

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0. \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Pero en un contexto constructivo ¿cómo definir $|x|$ si en principio no tenemos que $x \geq 0$ o $x \leq 0$? La respuesta a esto está en el teorema que acabamos de probar, y consiste en tomar $|x| := \sup\{x, -x\}$, lo que igual coincide razonando clásicamente, con la definición por casos.

3.4. COMPLETITUD DE LOS NÚMEROS REALES

En el segundo capítulo probamos que la completación de todo espacio premétrico es única salvo isometrías. Este resultado (teorema 2.3.5) lo ilustramos en esta sección mostrando que $\mathbf{R}$ es también la completación de $\mathbf{Q}$. De aquí en adelante ya no es necesario tener presente la definición de cortadura en las demostraciones, y podemos pensar simplemente que tenemos un grupo abeliano parcialmente ordenado, con las propiedades que ya hemos probado. Este paso de abstracción lo expresamos con un cambio de notación, usando letras minúsculas para denotar los elementos de $\mathbf{R}$, en vez de mayúsculas como veníamos haciendo.

Teorema 3.4.1. $\mathbf{R}$ *es un espacio premétrico en el que* $d(x,y) \leq q$ *se define como* $-q^* \leq x - y \leq q^*$.

Demostración. P1, P2 y P3 se deducen fácilmente de las propiedades básicas que hemos probado del orden y la suma. Probamos entonces P4).

$\Longrightarrow$) Si $-p^* \leq x - y \leq p^*$ y $p < q$ entonces tenemos también que $q^* \leq p^*$, luego por transitividad $-q^* \leq x - y \leq q^*$.

$\Longleftarrow$) Si $-q^* \leq x - y \leq q^*$ para todo $q > p$ y queremos ver que

$$-p^* \leq x - y \leq p^*$$

suponemos entonces que $p^* < x - y$. Por 3.2.3 podemos tomar q racional tal que $p^* < q^* < x - y$. Como $p < q$ entonces por hipótesis $x - y \leq q^*$, que por definición es $q^* \not< x - y$, llegando a una contradicción. De esta forma tenemos que $p^* \not< x - y$, es decir, $x - y \leq p^*$. De forma análoga obtenemos que $-p^* \leq x - y$. □

Teorema 3.4.2. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ *es la completación de* $\mathbf{Q}$.

Demostración. Tomamos la función $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ del teorema 3.2.12 en la que $i(x) = x^*$. Observamos que al ser un homomorfismo de grupo y una inmersión del orden de los racionales obtenemos que i es también una isometría.

Para probar que $i(\mathbf{Q})$ es denso fijamos $x \in \mathbf{R}$ y un racional $\varepsilon > 0$. Tenemos ahora que $-\varepsilon^* < \varepsilon^*$, y por lo tanto que $x - \varepsilon^* < x + \varepsilon^*$. Por la proposición 3.2.3 existe un racional q tal que $x - \varepsilon^* \leq q \leq x + \varepsilon^*$, con lo que llegamos a $-\varepsilon^* \leq x - q^* \leq \varepsilon^*$, siendo esto $d(x, q^*) \leq \varepsilon$.

Solo queda probar que $\mathbf{R}$ es completo, es decir, que $\widehat{\mathbf{R}}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbf{R}$. Esto no es más que el hecho de que toda familia de Cauchy sea equivalente a un conjunto unitario.

Mostramos primero que para cualquier $A \subseteq \mathbf{R}$ tal que diám $A \leq q$, entonces $t - q^*$ es cota inferior de A y $t + q^*$ es cota superior de A siempre que $t \in A$. En efecto, si $a \in A$ entonces $d(a, t) \leq q^*$, lo que implica que $-q^* \leq a - t$, y por lo tanto que $t - a \leq q^*$. De forma similar se tiene que $a \leq t + q^*$.

Sea ahora F una familia de Cauchy sobre $\mathbf{R}$. Definimos el conjunto

$$X = \bigcup_{S \in F} \{x \in \mathbf{R} : x \text{ es cota inferior de } S\}.$$

Tenemos que si y es cota superior de S para algún $S \in F$, entonces y es cota superior de X. En efecto, si $x \in X$ entonces x es cota inferior de T para algún $T \in F$. Luego, por ser F de Cauchy se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$, es decir, existe u tal que $u \in S$ y $u \in T$. Como $u \in S$ se tiene que $u \leq y$, ya que y cota superior de S. Como $u \in T$ se tiene que $x \leq u$ por ser x cota inferior de T. Por transitividad $x \leq y$, es decir, y es cota superior de X.

Ahora usaremos el teorema 3.3.3 para probar que X tiene supremo, así que fijamos un racional $\varepsilon > 0$. Como F es de Cauchy, entonces existe $S \in F$ tal que diám $S \leq \frac{p}{2}$ con p positivo y $p < \varepsilon$. Además, como $S \neq \emptyset$ podemos tomar $t \in S$, haciendo que $x = t - \left(\frac{p}{2}\right)^*$ sea una cota inferior de S y $y = t + \left(\frac{p}{2}\right)^*$ una cota superior de S. De esta forma se tiene $x \in X$ y y una cota superior de X tal que $y - x = p^* < \varepsilon^*$, probando así que existe $s_0 = \sup X$.

Finalmente probamos que $F \sim \{s_0\}$, lo que se reduce a encontrar para cada racional $\varepsilon > 0$ algún $S \in F$ tal que diám $S \leq \varepsilon$ y tal que $d(s_0, s) \leq \varepsilon$ para todo $s \in S$. Para eso simplemente escogemos cualquier $S \in F$ tal que diám $S \leq \varepsilon$, teniendo para todo $s \in S$ que $s - \varepsilon^* \in X$ y que $s + \varepsilon^*$ es una cota superior de X. Por definición de supremo $s - \varepsilon^* \leq s_0 \leq s + \varepsilon^*$, lo que significa que $d(s_0, s) \leq \varepsilon$. Concluimos así que $[F]$ es la clase de equivalencia de $\{s_0\}$ y por lo tanto, que $\mathbf{R}$ es completo y es además la completación de $\mathbf{Q}$. $\square$

3.5. CAMPOS DE HEYTING

En esta última sección del trabajo el objetivo principal es enriquecer aun más estructura algebraica que tenemos de $\mathbf{R}$, usando para ello el teorema 2.3.3 sobre extensión de morfismos del capítulo de premétricos. Aunque la idea en principio es que $\mathbf{R}$ resulte un campo al extender de forma continua las operaciones de suma y multiplicación de $\mathbf{Q}$, esto no es exactamente lo que se obtiene desde un punto de vista constructivo. La causa de este fenómeno está en que una vez que tengamos sobre $\mathbf{R}$ una estructura de anillo, el que un número real sea distinto de cero, en general no proporciona la suficiente información para calcular su inverso multiplicativo, siendo esta la propiedad que no resulta a la hora de probar $\mathbf{R}$ es un campo.

Una propuesta para rescatar un poco la idea de $\mathbf{R}$ como cuerpo algebraico, es la que Heyting presenta en [7], que consiste en definir una relación binaria con la que se carateriza constructivamente los elementos invertibles, usando esta relación como complemento a la igualdad. En su construcción de los números reales, Heyting usa sucesiones de Cauchy[1] de números racionales, y la relación que define y que denota por $\#$, consiste en que $(a_n)_n \# (b_n)_n$ si existen enteros positivos k y n tales que $|a_m - b_m| > 1/k$ para todo $m \geq n$. Esta relación $\#$ intuitivamente nos da una noción de "separación" que no tenemos con la negación de la igualdad, y con la que se consigue que un número real a es invertible si y solo si $a\#0$. Además $\#$ se porta bien con la suma y la multiplicación; si $a\#b$ entonces $a+c \# b+c$, y si $c\#0$, entonces también $ac \# bc$.

Es así como Heyting con base al caso de los números reales plantea una definición de campo, en la que se tiene un anillo conmutativo $(F, +, \cdot)$, con elemento 1 y con una relación abstracta $\#$, y en el que se satisface lo siguiente para todo $a, b, c \in F$:

1. Si $a\#b$, entonces $a \neq b$.

2. Si $a\#b$ no se da, entonces $a = b$.

[1]Incluso en el intuicionismo aparece el uso de algo de elección.

3. Si $a\#b$ entonces $a\#c$ o $b\#c$.

4. Si $a\#b$ y $c\#0$ entonces $a+c\,\#\,b+c$

5. $a\#0$ si y solo si a es una unidad.

6. Si $a\#b$ entonces $ac\,\#\,bc$.

Algo que podemos observar es que $a\#b$, aunque puede que tenga un significado constructivo, por (1) y (2) es lógicamente equivalente a $a \neq b$. Esto inmediatamente trivializa la idea de Heyting al llevarla al contexto clásico de las matemáticas. Es por eso que Bishop (quien inicia el movimiento constructivista actual), aunque en esencia sigue la propuesta de Heyting, en vez de introducir una nueva simbología plantea redefinir el lenguaje matemático, atribuyendo un significado más fuerte a «$\neq$» dependiendo de a que objetos se refiera.

En este trabajo no adoptamos las convenciones de Bishop con respecto al lenguaje matemático, y más bien se propone usar una noción que al igual que la de espacio premétrico, sirva para las matemáticas constructivas y en general pueda ser de interés en matemáticas clásicas. Esta noción de la que hablamos, es la que aquí se llama *campo de Heyting*, y que consiste en tomar $\#$ como una relación binaria descrita en términos de topología conjuntista. Con esto la idea es también reivindicar el uso de la topología conjuntista en matemáticas constructivas, la cual a veces se considera demasiada abstracta como para usarse en este ámbito.

Aclaramos que ese término de campo de Heyting aparece ya en la literatura (ver [12, 9, 2]) para referirse esencialmente a la noción de campo que Heyting propone, que como ya dijimos, desde un punto vista clásico no resulta ser otra cosa que la misma noción de campo común y corriente.

Definición 3.5.1. Sea X un conjunto no vacío, y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que τ es una *topología* sobre X si

i) $\emptyset, X \in \tau$.

ii) $\bigcup \mathcal{C} \in \tau$ para todo $\mathcal{C} \subseteq \tau$.

iii) $U \cap V \in \tau$ para todo $U, V \in \tau$.

Bajo estas condiciones decimos que el par (X, τ) es un *espacio topológico*, y llamamos *abiertos* a los elementos de τ .

El ejemplo más importante de espacio topológico que manejamos en esta sección, es el del espacio (X, τ_d) asociado a un premétrico (X, d), en el que τ_d es la colección de subconjuntos U de X tales que para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ para el que

$$\{t \in X : d(x, t) \leq \varepsilon\} \subseteq U.$$

La prueba de que τ_d es un topología sobre X es estándar[2].

Definición 3.5.2. Sea (X, τ) un espacio topológico con $x, y \in X$. Decimos que x e y están separados, y lo denotamos $x\#y$, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $x \notin U$, o $y \in U$ y $x \notin U$. Decimos que τ es un topología T_0 si $x \neq y$ es equivalente a $x\#y$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Una de las cosas que desde un punto de vista clásico se tiene al trabajar con espacios métricos, es que las topologías inducidas por la métricas más que T_0, son incluso Hausdorff. Esto no lo probaremos con las topologías inducidas por premétricas, ya que en en general que estas sean T_0 implica el principio de Markov. Para ver esto tomamos el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, en donde definimos la premétrica como $d((x_n)_n, (y_n)_n) \leq q$ si para todo k tal que $2^{-k} > q$ se tiene que $x_i = y_i$ para todo $i \leq k$. De esta forma, si suponemos que τ_d es T_0, entonces siempre que se tenga $(b_n)_n \neq \mathbf{0}$, con $\mathbf{0}$ la sucesión constante cero, podemos encontrar $b_m = 1$. En efecto, si $(b_n)_n \neq \mathbf{0}$ y τ_d es una topología T_0, existe entonces $U \in \tau_d$ tal que $(b_n)_n \in U$ y $\mathbf{0} \notin U$, o $\mathbf{0} \in U$ y $(b_n)_n \notin U$. En cualquier caso existe por definición de abierto, $p > 0$ tal que $d((b_n)_n, \mathbf{0}) \nleq p$. Una vez obtenido este racional p, podemos verificar en el conjunto finito $F = \{n : 2^{-n} > p\}$ para qué natural m se tiene que $b_m = 1$. Esto lo garantiza el hecho de que $b_n = 0$ para todo $n \in F$ implica que $d((b_n)_n, \mathbf{0}) \leq p$, lo

[2] La prueba de que $\emptyset \in \tau_d$, resulta por vacuidad. Puede parecer difícil juzgar si estos razonamientos son constructivos o no, pero aquí simplemente aceptamos los razonamientos sobre vacío como una mera convención lógica.

que sería absurdo, ya que precisamente tenemos $d((b_n)_n, \mathbf{0}) \not\leq p$. Por lo tanto si τ_d es T_0 tendríamos una prueba constructiva para el principio de Markov.

Observación 3.5.3. En general, en cualquier espacio premétrico $x\#y$ si y solo si existe $p > 0$ tal que $d(x, y) \not\leq p$.

Definición 3.5.4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con 1 y τ una topología sobre A. Decimos que A es un *campo de Heyting* con respecto a τ si para todos $a, b, c \in A$ se tiene:

H1. Si $a\#b$ entonces $a + c \# b + c$.

H2. $a\#0$ si y solo si a es una unidad.

H3. Si $a\#b$ y $c\#0$ entonces $ac \# bc$.

Naturalmente los campos de Heyting con respecto a topologías T_0 resultan ser campos.

Ejemplo 3.5.5.

a) $\mathbf{Q}$ con la estructura de campo usual y con $\tau = \mathcal{P}(\mathbf{Q})$.

b) Sea n un entero positivo y $\mathbf{Z}_{2^n} = \{0, ..., 2^n - 1\}$ el anillo de residuos módulo 2^n. Definimos τ como la colección de subconjuntos U de $\mathbf{Z}_{2^n}$ para los que siempre que $k \in U$, se tenga que $l \in U$ para todo l tal que $k \equiv l \pmod 2$. Observamos que τ es una topología sobre $\mathbf{Z}_{2^n}$, y que el ideal $\langle 2 \rangle$ de elementos pares de anillo, es un abierto que separa a pares de impares. Reciprocamente, si tenemos a, b elementos del anillo con $a\#b$, entonces necesariamente uno de ellos es par y el otro impar, lo que se mantiene al sumar cualquier c, esto es, $a + c \# b + c$ para todo c, que es la condición H1. En cuanto a H2, tenemos que se cumple también porque 0 es par, y las unidades son exactamente los impares, ya que q es impar si y solo si $\gcd(2^n, q) = 1$, siendo esto lo que caracteriza a las unidades en cualquier anillo de residuos. Por último tenemos que se verifica H3, ya que si c impar, entonces la paridad de ck es la misma que la de k, para cualquier entero k.

La idea ahora es presentar otro ejemplo de campo de Heyting, dotando a $\mathbf{R}$ de una estructura de anillo, y mostrando que se trata de un campo de Heyting con respecto a la topología inducida por la premétrica que definimos.

Lema 3.5.6. *Sean $X_1, ..., X_n$ espacios premétricos con D_i un subconjunto denso de X_i para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces tenemos que $\prod_{i=1}^{n} D_i$ es denso en $\prod_{i=1}^{n} X_i$.*

Proposición 3.5.7. *La operación binaria $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en la que*

$$+(x, y) = x + y$$

es un morfismo.

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ con

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \delta$$

entonces

$$\delta^* \leq x_1 - x_2 \leq \delta^* \quad \text{y} \quad \delta^* \leq y_1 - y_2 \leq \delta^*$$

Sumando las desigualdades llegamos a que

$$-2\delta^* \leq (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \leq 2\delta^*.$$

De esta forma, dado $\varepsilon > 0$ verificamos la continuidad uniforme sobre S haciendo $\delta = \varepsilon/2$. □

Proposición 3.5.8. *La operación binaria $\bullet : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ en la que*

$$\bullet(x, y) = xy$$

es un morfismo.

Demostración. Si $S \subseteq \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ es un subconjunto acotado con $S \neq \emptyset$, entonces podemos encontrar un racional $p > 0$ tal que $|t| \leq p$ y $|s| \leq p$ si $(t, s) \in S$. Ahora, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ con

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \delta$$

entonces $|x_1 - x_2| \leq \delta$ y $|y_1 - y_2| \leq \delta$. Luego usando las propiedades del valor absoluto de los racionales tenemos

$$\begin{aligned} |x_1y_1 - x_2y_2| &= |x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2)| \\ &\leq p|x_1 - x_2| + p|y_1 - y_2| \\ &\leq 2p\delta \end{aligned}$$

Por lo que dado $\varepsilon > 0$ verificamos la continuidad uniforme sobre S haciendo $\delta = \varepsilon/(2p)$. $\square$

Teorema 3.5.9. *Existe un único morfismo $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que para todo p y q racionales se tiene que $g(p^*, q^*) = (pq)^*$.*

Demostración. Como $f : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ con $f(x, y) = xy$ es un morfismo. Definimos entonces la isometría $j : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ como

$$j(x, y) = (i(x), i(y)).$$

Como $i(\mathbf{Q})$ es denso en $\mathbf{R}$ entonces por el lema 3.5.6 tenemos que $i(\mathbf{Q}) \times i(\mathbf{Q})$ es subconjunto denso de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. De esta forma el teorema 2.3.3 garantiza la existencia de un único morfismo g que hace el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} & \xrightarrow{f} & \mathbf{Q} \\ \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \widehat{\mathbf{Q}} \cong \mathbf{R} \end{array}$$

con lo que quedaría probado el teorema. $\square$

Corolario 3.5.10. *Sean f, g morfismos entre un espacio premétrico X y $\mathbf{R}$. Tenemos entonces que $f + g$ y fg son morfismos.*

Demostración. Si $*$ es una operación binaria en $\mathbf{R}$ que a su vez es un morfismo, entonces $f * g$ no es más que la composición del morfismo $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ en el que $h(t) = (f(t), g(t))$, con la operación binaria $*$. $\square$

Teorema 3.5.11. $(\mathbf{R}, +, \bullet)$ *es un anillo conmutativo con* 1.

Demostración. Ilustramos la estrategia general probando la distributividad del producto con respecto a la suma.

Definimos entonces las funciones $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ como

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3)$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

las cuales son morfismos por 3.5.10, ya que son suma y producto de proyecciones, que a su vez son morfismos. Por ejemplo, si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ entonces $f(\mathbf{x}) = \pi_1(\mathbf{x})(\pi_2(\mathbf{x})+\pi_3(\mathbf{x}))$. Tenemos también que f y g coinciden en $i(\mathbf{Q})^3$, que es denso por 3.5.6. Luego por el lema 3.5.6 llegamos a que $f = g$.

La asociatividad y conmutatividad se prueban de forma similar, y el uno del anillo es por supuesto 1^*. $\square$

Lema 3.5.12. *Para cualesquiera $x, y \in \mathbf{R}$, se tiene que si $d(x, 0^*) \leq p$ y $d(y, 0^*) \leq q$ entonces $d(xy, 0^*) \leq pq$.*

Demostración. Como $i(\mathbf{Q})$ es denso y $\bullet$ es un morfismo entonces para cualesquiera $\varepsilon > 0$ podemos encontrar racionales r, s tales que $d(x, r^*) \leq \varepsilon$, $d(y, s^*) \leq \varepsilon$, y $d(xy, r^*s^*) \leq \varepsilon$. Ahora, como $d(x, 0^*) \leq p$ y $d(y, 0^*) \leq q$, entonces $d(r^*, 0^*) \leq p+\varepsilon$ y $d(s^*, 0^*) \leq q + \varepsilon$ (por P3). Al ser $i(\mathbf{Q})$ una copia isométrica de $\mathbf{Q}$ tenemos también que $|r| \leq p + \varepsilon$ y $|s| \leq q + \varepsilon$, por lo que usando las propiedades del valor absoluto en los racionales llegamos a que

$$|rs| \leq pq + \varepsilon^2 + \varepsilon p + \varepsilon q.$$

Haciendo $\delta = \varepsilon^2 + \varepsilon p + \varepsilon q$ tenemos $d(r^*s^*, 0^*) \leq pq + \delta$, y usando nuevamente P3 llegamos a que $d(xy, 0^*) \leq pq + \delta + \varepsilon$. Como podemos escoger ε de forma que

$\delta + \varepsilon$ sea menor cualquier racional positivo, entonces usando P4 concluimos que $d(xy, 0^*) \leq pq$. $\square$

Teorema 3.5.13. $(\mathbf{R}, +, \bullet)$ *es un campo de Heyting con respecto a* τ_d.

Demostración. H1) Se deduce de la observación de que $d(a, b) \leq p$ si y solo si $d(a + c, b + c) \leq p$.

H2) $\Longrightarrow$) Si $a\#0^*$ tenemos entonces que $d(a, 0^*) \not\leq p$ para algún $p > 0$. Definimos por lo tanto el conjunto

$$S = \{x \in \mathbf{R} : d(x, 0^*) \not\leq p\}.$$

A partir de S definimos a su vez $K = i^{-1}(S) \cap \mathbf{Q}$, teniéndose que $i(K)$ es denso S. Para ver esto supongamos que tenemos $\varepsilon > 0$. Lo primero que usamos es la propiedad i) del teorema 3.2.7, que nos dice que $-p^* < a$, o $a < p^*$. Como $a \in S$, la disyunción que tenemos es excluyente, ya que si $-p^* < a < p^*$, entonces $-p^* \leq a \leq p^*$ y $d(a, 0^*) \leq p$.

Consideramos ahora el caso en el que $-p^* < a$. En este caso necesariamente $a \not< p^*$, que por definición es $p^* \leq a$. Tomamos ahora un racional t tal que $a < t^* < a + \varepsilon$. Así, t cumple que $d(t^*, a) \leq \varepsilon$ y que $t^* > p^*$, que su a vez implica que $d(t^*, 0^*) \not\leq p$ y que $t \in S$. De forma análoga si $a < p^*$, conseguimos un racional $t^* \in S$ que este a menos de ε de a.

Usamos ahora la función $f : K \to \mathbf{Q}$ en la que $f(x) = x^{-1}$, la cual es continua ya que si $x, y \in K$, entonces $|x|, |y| > p$, y así $|x^{-1} - y^{-1}| \leq p^{-2} |x - y|$. Aplicando por lo tanto teorema 2.3.3 obtenemos un morfismo g tal que

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbf{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ S & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \end{array}$$

Con esto el morfismo $h : S \to \mathbf{R}$ con $h(x) = xg(x)$ coincide en $i(\mathbf{Q}) \cap S$ con el morfismo $u(x) = 1^*$. Teniendo entonces que $ag(a) = 1^*$ y que a es por lo tanto una unidad.

$\Longleftarrow$)Observamos primero que por la densidad de $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$ tenemos la siguiente versión de la propiedad arquimediana:

$$\textit{Para todo } x \in \mathbf{R} \textit{ existe } n \in \mathbf{N} \textit{ tal que } d(x, 0^*) \leq n.$$

Ahora, si a es unidad entonces existe b tal que $ab = 1^*$. Escogemos por lo tanto naturales $l > n$ con $d(b, 0^*) \leq n$ y afirmamos que $d(a, 0^*) \nleq l^{-1}$. En efecto, si $d(a, 0^*) \leq l^{-1}$ entonces por el lema 3.5.12 tendríamos $d(ab, 0^*) \leq n/l$. Como $ab = 1^*$ tendríamos también que $d(1^*, 0) \leq n/l$, y por lo tanto que $1 \leq n/l < 1$. Contradicción.

H3)$\Longrightarrow$) Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$ con $a\#b$ y $c\#0^*$. Tenemos entonces que existe un racional $p > 0$ tal que $d(a, b) \nleq p$. Por otro lado, como $c\#0^*$, existe por lo que acabamos de probar c^{-1}. A su vez c^{-1} es invertible, y por lo tanto $c^{-1}\#0^*$. De esta forma existe también $q > 0$ tal que $d(c^{-1}, 0^*) \nleq q$. Afirmamos ahora que $d(ac, bc) \nleq pq^{-1}$. En efecto, por el lema 3.5.12 si $d(ac, bc) \leq pq^{-1}$ entonces $d(acc^{-1}, bcc^{-1}) \leq pqq^{-1}$, esto es, $d(a, b) \leq p$. Absurdo. Concluimos por lo tanto que $ab\#bc$. $\square$

Por último presentamos un sencillo resultado, para motivar un poco el estudio de la definición propuesta de campo de Heyting.

Proposición 3.5.14. *Sea n un entero positivo y $\mathbf{Z}_n$ el anillo de residuos módulo n. Tenemos entonces que $\mathbf{Z}_n$ es campo de Heyting con respecto a alguna topología τ, si y solo si $n = p^\nu$, con p primo y $\nu > 1$.*

Demostración. $\Longrightarrow$)Supongamos que existen primos diferentes p y q tales que $p \mid n$ y $q \mid n$. Entonces para cualquier elemento a del anillo, se tiene por el teorema chino del resto que existe t tal que

$$t \equiv a \pmod{p}.$$
$$t \equiv 0 \pmod{q}.$$

Esto significa que $p \mid t - a$ y $q \mid t$, y que por lo tanto t y $t - a$ no son unidades del anillo. Así, si $\mathbf{Z}_n$ es un campo de Heyting con respecto a alguna topología τ, entonces para cualquier abierto U tal que $0 \in U$, se tiene necesariamente que $t - a, t \in U$, esto es, no existe un abierto que separe a t y $t-a$. Sin embargo, si a es unidad, por H2 $a\,\#\,0$, por lo que aplicando H1 tendríamos que $t\,\#\,t-a$, absurdo. Concluimos que n solo puede tener un divisor primo para que $\mathbf{Z}_n$ pueda ser campo de Heyting.

$\Longleftarrow$)Sea $n=p^\nu$ y $a\in\mathbf{Z}_n$, tomamos entonces como abierto básico

$$B_a=\{t\in\mathbf{Z}_n : t\equiv a\,(\operatorname{mod} p)\}.$$

Afirmamos ahora que $\mathbf{Z}_n$ es un campo de Heyting con respecto la topología τ definida por la colección $\{B_k\}_{k<n}$. Para ver esto mostramos primero que $a\#b$ si y solo si $a-b$ es unidad. En efecto, si $a\#b$, entonces $p\nmid a-b$, ya que $p\,|\,a-b$ significa que $a\equiv b\,(\operatorname{mod} p)$, y por lo tanto que en cualquier abierto en el que esté a está b y viceversa. De está forma tenemos que $\operatorname{mcd}(a-b,p^\nu)=1$, y así que $a-b$ es unidad. Recíprocamente si $a-b$ es unidad, entonces $\operatorname{mcd}(a-b,p^\nu)=1$, por lo que $a\not\equiv b\,(\operatorname{mod} p)$, y a y b están en abiertos básicos distintos.

Ahora, si $a\#b$ entonces $a-b=(a+c)-(b+c)$ es unidad, lo que equivale a que $a+c\#b+c$ para cualquier c. Además, si $c\,\#\,0$, entonces c es unidad, y como el producto de unidades es unidad, se tiene entonces que también $(a-b)c=ac-bc$ es unidad, es decir, $ac\,\#\,bc$. $\square$

REFERENCIAS

[1] Erret Bishop. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, 1967.

[2] Douglas Bridges and Steve Reeves. Constructive mathematics, in theory and progamming practice. *Philosophia Mathematica*, 7(3):65 – 104, 1999.

[3] Douglas Bridges and Fred Richman. *Varieties in constructive mathematics.* Cambridge University press, 1987.

[4] L. E. J. Brouwer. Intuitionism and formalism. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 20:81 – 96, 1913.

[5] L. E. J. Brouwer. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism.* Cambridge Universty Press, 1981.

[6] Benjamin Fine and Gerhard Rosenberger. *The Fundamental Theorem of Algebra.* Springer, 1997.

[7] Arend Heyting. *Intuitionism, an introduction.* North-Holland, 1956.

[8] Robert Lubarksy. On the Cauchy completeness of constructive Cauchy reals. *Math. Log. Quart.*, 53:396 – 414, 2007.

[9] Ray Mines, Fred Richman, and Wim Ruitenburg. *A Course in Constructive Algebra.* Springer-Verlag, 1988.

[10] Peter M. Neumann. *The mathematical writings of Évariste Galois.* European Mathematical Society, 2011.

[11] Fred Richman. The fundamental theorem of algebra: a constructive development without choice. *Pacific Journal of mathematics*, 196:213 – 130, 2000.

[12] Fred Richman. Real numbers and other completions. *Math. Log. Quart.*, 54(1):98 – 108, 2008.

[13] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.

[14] Anton Setzer. Review real numbers and other completions. *Math. Log. Quart.*, 54(1):98 – 108, 2008. MR2387400.

[15] Joel H. Spencer. *Ten lectures on the Probalistic Method.* SIAM, 1994.

BIBLIOGRAFÍA

BISHOP, Erret. Foundations of Constructive Analysis. McGraw-Hill, 1967

BRIDGES, Douglas y RICHMAN, Fred. Varieties in constructive mathematics. Cambridge University Press. 1987

BROUWER, L.E.J. Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism. Cambridge University Press. 1981

HEYTING, Arend. Intuitionism, an introduction. North-Holland. 1956

NEUMANN, Peter M. The mathematical writtings of Évariste Galois. European Mathematical Society, 2011. p. 227

RICHMAN, Fred. Real numbers and other completion. Math. log. Quart. Vol. LIV. No. 1, 2008.