EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS CON ESTUDIANTES DE ONCE GRADO ALREDEDOR DE SUS COMPETENCIAS COMUNICATIVAS EN MATEMÁTICAS: UNA ALTERNATIVA DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD

SILVIA JOHANNA ROJAS SEPÚLVEDA

SONIA ROCÍO SUÁREZ CÁLIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA 2013

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS CON ESTUDIANTES DE ONCE GRADO ALREDEDOR DE SUS COMPETENCIAS COMUNICATIVAS EN MATEMÁTICAS: UNA ALTERNATIVA DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD

Tesis que presentan

SILVIA JOHANNA ROJAS SEPÚLVEDA

SONIA ROCÍO SUÁREZ CÁLIZ

Trabajo para obtener el título de

Licenciadas en Matemáticas

Directora:

Sandra Evely Parada Rico

Dra. en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA, 2013

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la influencia directa o indirecta de muchas personas a las que agradecemos profundamente por estar presentes en las distintas etapas de su elaboración, así como en el resto de nuestras vidas.

A la profesora Sandra Evely Parada Rico por orientar nuestro trabajo de grado, por su constante motivación, amistad, confianza, colaboración y apoyo en este proceso de realización.

A Luis Eduardo, Cristian, Giovanny, Axel Gissel, Miguel Ángel, Sandra, Tatiana, Paola Andrea, Ronny y Erika Juliana, educandos de Colegio Técnico Industrial José Elías Puyanna, por ser los protagonistas de esta experiencia.

Al Colegio Técnico Industrial José Elías Puyanna, en especial a la profesora Claudia Montañez, por apoyar este trabajo y creer en nosotras.

A todos los docentes de la Universidad Industrial de Santander que compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que nuestra formación profesional se resuma en satisfacciones académicas.

A nuestros amigos y compañeros. Con quienes trabajamos durante cinco cortos años poniendo lo mejor de su energía y empeño por el bien de nuestra formación profesional, en especial a Luis Carlos, Wilson David, Paola, Sebastián, Edwin, Freddy y a Mónica quienes compartieron su confianza, tiempo, y los mejores momentos que vivimos durante esta etapa como estudiantes de pregrado, dentro y fuera del campus.

Por último y no en menor importancia a nuestras familias y seres más queridos, en especial a nuestros padres y hermanos por darnos siempre su apoyo y amor.

Esta tesis la dedico especialmente a ti, mi Señor Jesucristo, dueño y señor de mi vida. Tú eres la razón de mi existencia y la fuente de mi inspiración. Hoy con todo mi corazón te rindo este logro, que no hubiera sido posible sin tu ayuda. Gracias por tu sabiduría, misericordia, fidelidad y tu gran amor.
¡Te amo mi Jesús!

A mis papitos Daniel y Martha por todas sus enseñanzas, esfuerzo y dedicación. A ti Mami, gracias por tu amor y tu amistad incondicional, eres la mejor mamá del mundo. A ti Papi, gracias por ser mi papá, por tu gran cariño y apoyo.
Este triunfo es de ustedes ¡Los amo!

A mis hermanitas Katerine Paola y Erika Juliana, a quienes amo mucho, por compartir cada momento conmigo, su cariño y su amistad. Ocupan un lugar muy especial en mi corazón. A mí amada nona María por su gran compañía en aquellas noches de desvelo y a Mateo, quien estuvo presente en este proceso.

A Soni que más que mi compañera de tesis, mi amiga con la que compartí experiencias inolvidables a su lado. Con todo mi corazón te deseo lo mejor.
A mis demás seres queridos en especial a mi gran familia en Cristo por todos sus consejos, apoyo y enseñanzas. Gracias por enseñarme a confiar en el que todo lo puede.

Silvia Johanna

Inicialmente deseo dedicarles este trabajo a todas las personas que estuvieron presentes en el proceso de mi formación profesional.

A Dios por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor, y mi dedicación especial a la Santísima Virgen María por contar siempre con ella.

A mi papi Román y a mi mami Yanira, quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo mí apoyo en todo momento. Es por ellos que soy lo que soy ahora.

A mis hermanos Román Alexis y Ana María porque siempre he contado con ellos para todo, gracias a la confianza que siempre nos hemos tenido; por el apoyo y amistad.

A la memoria de mi Tía Gladys, quiero dedicarte este triunfo y te pido que me sigas ayudando para seguir escalando los peldaños de las metas que me faltan alcanzar.

A David por la paciencia, el cariño y amor de su noble corazón, por motivarme en la realización de este proyecto, por compartir conmigo cada instante de alegría y tristeza en mi vida... gracias por todo los momentos vividos

A Silvis por aceptar vivir esta experiencia conmigo, por brindarme su amistad incondicional y por todas aquellas aventuras que vivimos que jamás podré olvidar.

Sonia Rocío

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO: EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS CON ESTUDIANTES DE ONCE GRADO ALREDEDOR DE SUS COMPETENCIAS COMUNICATIVAS EN MATEMÁTICAS: UNA ALTERNATIVA DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD*

AUTORES: Silvia Johanna Rojas Sepúlveda, Sonia Rocío Suárez Cáliz**

Palabras clave: habilidades comunicativas, experiencias didácticas, resolución de problemas, pensamiento algebraico

Exponemos en este documento algunos resultados de una investigación cualitativa que tuvo como objetivo diseñar experiencias que posibilitaron el desarrollo de habilidades comunicativas en estudiantes de once grado, y analizar como dichas habilidades contribuyen en el progreso de su pensamiento algebraico. Entendemos por habilidades comunicativas la capacidad que tienen las personas de expresar sus ideas hablando y escribiendo, de comprender, de interpretar y de sustentar ideas; además formular preguntas, y producir argumentos persuasivos y convincentes (MEN, 1998)

Este estudio surge para atender una problemática identificada en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, quienes en una prueba inicial dejan ver que sus respuestas incorrectas refieren más a su baja interpretación de enunciados que a la incorrecta aplicación de algoritmo. Esta problemática es reportada también por el proyecto *diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la universidad industrial de Santander* presentado por la vicerrectoría académica en el presente año.

Para la consecución de dicho objetivo se diseña e implementa un plan de intervención alrededor de la habilidad para interpretar y la habilidad para explicar con estudiantes de once grado de una institución pública.

Las reflexiones resultantes de la aplicación de las actividades posibilitaron un avance en el desarrollo de dichas habilidades en los estudiantes que participaron del plan de intervención, donde ellos reconocieron la importancia de la traducción de expresiones en sus diferentes representaciones para la resolución de problemas.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Dra Sandra Evely Parada Rico

ABSTRACT

TITLE: TEACHING EXPERIENCES FOR GRADE ELEVEN STUDENTS ABOUT THEIR COMMUNICATION SKILLS IN MATHEMATICS: AN ALTERNATIVE PREPARATION FOR COLLEGE ENTRANCE.*

AUTHORS: Silvia Johanna Rojas Sepúlveda, Sonia Rocío Suárez Cáliz**

Keywords: communication skills, learning experiences, problem solving, algebraic thinking

We present in this paper some results of a qualitative study that aimed to design experiences that enabled the development of communication skills in grade eleven students, and analyze how these skills contribute to the progress of their algebraic thinking. We understand communication skills the ability of people to express their ideas, speaking and writing, to understand, to interpret and support ideas further questions and produce persuasive and convincing arguments (MEN, 1998)

This study was created to address a problem identified in new students to the university , who in an initial test reveal that incorrect answers refer more to its low interpretation of statements that the incorrect application of algorithm. This problem is also reported by the project diagnosis of the causes of student desertion and retention of undergraduate programs faces the Santander Industrial University presented by the academic vicerrectoría this year.

To achieve this objective is designed and implemented an intervention plan around the ability to interpret and the ability to explain, with eleven grade students of a public institution.

The reflections resulting from the implementation of the activities enabled progress in the development of these skills in students who participated in the intervention plan, where they recognized the importance of the translation of expressions in their different representations for the resolution of problems.

* Work of degree

** Faculty of Science. Math teacher program. Dra Sandra Evely Parada Rico

INTRODUCCIÓN

Los profesores de todas las áreas de enseñanza, en particular del área de ciencias humanas y ciencias, coinciden en la importancia de posibilitar el desarrollo de las competencias comunicativas y *Matemáticas* en sus estudiantes pero, ¿qué relación hay entre ellas? Pues bien, el aprendizaje de las Matemáticas requiere de la competencia comunicativa ya que se hace uso del lenguaje propio para caracterizar los objetos de estudio; esta comunicación puede hacerse de manera oral, gráfica o escrita. Al respecto Chevallard (1991) define un objeto matemático como "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito".

En particular, en la resolución de problemas se señala la relevancia de esta competencia pues es el vehículo a través del cual el estudiante manifiesta los razonamientos y procesos realizados para alcanzar el objetivo de la actividad matemática que el profesor le propone; incluso, el lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que caracteriza por la exactitud de sus términos y por su carácter sintético, simbólico y abstracto.

No obstante, la experiencia en el Trabajo de Grado I nos señaló que, aunque es clara la trascendencia de las competencias comunicativas en el aprendizaje de (no sólo) las matemáticas, los estudiantes presentan dificultades al momento de emplear el lenguaje en situaciones discursivas con mayor dificultad en la escritura; problemática que llega también a las universidades y que se convierte en una variable que incide en el fracaso académico de muchos estudiantes de primer semestre. (Ortega y Ortega, 2001)

Consecuentemente, actualmente se hace visible la preocupación de la comunidad académica por las escasas competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes a la Universidad Industrial de Santander (UIS). Ante ello la Escuela de Matemáticas ha desarrollado algunos iniciativas, mismas que se han condensado en un proyecto institucional en el que se plantean alternativas curriculares para atender, específicamente, la problemática relacionada con el curso de Cálculo Diferencial de la UIS (Parada, 2012).
Así, a través de esta investigación, queremos presentar una propuesta que ayudará a contrarrestar la problemática que se esbozó (y que se ampliará más adelante) desde el aula de matemáticas. Para esto, este trabajo se ha organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo se dará una descripción general del problema de estudio y se dan a conocer algunos antecedentes de investigaciones relacionadas con el problema planteado.

El capítulo 2 contiene los referentes conceptuales sobre los cuales se caracteriza la competencia comunicativa a partir de cuatro habilidades: habilidad para interpretar, habilidad para explicar, habilidad para justifica y habilidad para argumentar, tomando las dos primeras como categorías de análisis de la información. Asimismo se presenta los elementos que se retomaron de la metodología de resolución de problemas por Polya (1945) y tendrá diferentes aspectos del pensamiento algebraico en el que se centra la otra parte de este estudio.

El proceso metodológico se expondrá paso a paso en el capítulo 3, aquí se presentará la población de estudio, los aspectos logísticos y las etapas en las que fue desarrollada la investigación. El estudio preliminar, diseño e implementación de un plan de intervención, sistematización de datos, análisis de resultados y por último elaboración del reporte de investigación.

El capítulo 4 contiene las descripciones de las actividades y la implementación del plan de intervención diseñado para la investigación**.** Los capítulos 5 y 6 exponen el análisis de los datos alrededor de las habilidades para interpretar y para explicar respectivamente y las repercusiones de éstas en la resolución de problemas.

En el capítulo 7 se comunican las conclusiones de nuestra investigación, se divide en tres apartados: en el primero se comunican los resultados generales de la investigación y se da respuesta a la pregunta de investigación, en el segundo se anuncian las influencias interpretativas en la resolución de problemas y en el tercero, las influencias explicativas en la resolución de problemas.

La investigación tuvo una duración aproximada de 12 meses en la que en los primeros 4 meses se realizó el estudio preliminar que nos condujo al planteamiento de nuestro problema, los siguientes 2 meses se realizó el diseñó y la implementación del trabajo de campo y en lo restantes el procesamiento y análisis de la información que culminan con la presentación de este documento escrito el cual se constituye en el trabajo de grado de la licenciatura de quienes escriben.

1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Reportes de investigación realizados en los últimos años sobre los procesos lecto escritores en el marco de distintos proyectos tales como “Proyecto de Articulación Universidad – Escuelas Medias, Secretaría de Políticas Universitarias 2003”, “Programa de Mejoramiento de la Calidad Educativa y Retención Estudiantil, Universidad Nacional del Comahue 2004” entre otros, indican que un porcentaje elevado de estudiantes del nivel medio tiene serios problemas para comprender y producir discursos en las diferentes disciplinas que integran los currículos.

Según el Ministerio de Educación (2012) los resultados de Colombia en las pruebas PISA de 2009 reflejan que falta mucho camino por recorrer para que nuestros jóvenes sean capaces de analizar, inferir y relacionar información implícita y explicita en diferentes textos escritos. Casi el 50% de los estudiantes de 15 años se encuentran por debajo del nivel mínimo aceptable según los estándares internacionales. Esto significa que reconocen ideas principales de un texto y establecen algunas relaciones; pero tienen dificultades para comprender textos complejos, información implícita, asumir una posición crítica y argumentar sobre la misma.

Mullis, Martin, Foy & Drucker (2012) exponen en el más reciente estudio internacional de competencia lectora (Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS) realizado en el 2011 que evaluó a alumnos de cuarto y sexto grado de 49 países que el 66% de los colombianos pierden en comprensión de lectura, es decir, tienen dificultad para entender e interpretar textos complejos; por lo que ubica a Colombia en el grupo de más bajo desempeño con un puntaje de 3,4.y es preocupante si se tiene en cuenta que la habilidad para leer es fundamental a lo largo de la vida escolar y es clave para encaminar el proyecto de desarrollo personal, tener bienestar económico y participar en la sociedad; por lo que estar en bajo desempeño es preocupante.

Ortega y Ortega (2001) declaran que las grandes diferencias entre la enseñanza de las matemáticas en secundaria y en la universidad no sólo es debida a los contenidos, que naturalmente tienen que estar de acorde con los niveles académicos a los que corresponden, sino a las formas de impartir dichos contenidos. Este desfase en las formas de exponer las matemáticas entre la educación preuniversitaria y la universitaria, debido al **lenguaje matemático,** lleva al fracaso escolar de muchos alumnos que, siendo unos estudiantes con conocimientos y notas suficientemente buenas, e incluso en algunos casos notables en las matemáticas preuniversitarias, en los primeros contactos con las impartidas en la universidad se encuentran con grandes dificultades, en algunos casos insalvables.

Paz, Rocha, Gonzáles & Alvéstegui (2011) afirman que los estudiantes ingresan a la universidad con una capacidad básica de lectura suficiente, que puede reproducir información pero no les alcanza para realizar operaciones más complejas tales como la inferencia o el aprovechamiento de esa información en su escritura. Asimismo, los resultados muestran que el puntaje obtenido en escritura es considerablemente más bajo que en lectura, lo cual indica que los estudiantes enfrentan una dificultad mayor al sostener opiniones, puntos de vista o al hacer comentarios en la escritura, mientras que el extraer información de los textos no les produce tanta dificultad.

Martínez, Echenique & Lavalle (2004) mencionan que las dificultades que se vinculan con la lectura y la escritura pueden ser por la falta de comprensión lectora de enunciados, de interpretación de textos, de competencias para la comunicación oral y escrita (gramática, registros, géneros académicos). También por el desconocimiento de la estructura lógica del texto, de vocabulario específico de la disciplina y la ausencia de actividad lectora.

Rodríguez & Belladona (2006) exponen que los datos empíricos relevados mediante registros escritos de clases de matemática, entrevistas con docentes del nivel medio y evaluación de alumnos ingresantes a la universidad, revelan que uno de los obstáculos para el aprendizaje que surge como evidente y preocupante, es la comprensión lectora, tanto para interpretación de consignas y enunciados de problemas, como para el acceso a los contenidos mediante la lectura de textos. No menos importante resulta la producción escrita, por parte de los alumnos en nuestra asignatura, ya sea para dar respuestas adecuadas a los problemas planteados, como para elaborar consignas o argumentaciones con sentido y coherencia que requieren de un manejo fluido del lenguaje coloquial.

Arias (2008) menciona en un análisis descriptivo sobre los contextos de investigación y problemáticas de facultades de educación de universidades de Bogotá que su asunto es la competencia comunicativa. Una de las universidades mencionadas es la Universidad Antonio Nariño donde la mayoría de sus trabajos se centra en las problemáticas didácticas en procesos de aprendizaje en competencias comunicativas, escritura de diferentes textos, argumentación, significado de la lectura, composición y métodos didácticos para la comprensión y producción de textos. Así como esta universidad presentan muchas otras más, por lo que se podría decir, que el asunto en primera instancia son las competencias comunicativas.

Así mismo el Ministerio de Educación Nacional de Colombia propuso este año el proyecto “Intervención integral con énfasis en el factor académico para disminuir la deserción académica”, el cual hace parte de los proyectos aprobados por el MEN dentro del acuerdo nacional para disminuir la deserción estudiantil en educación superior, en éste la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander ha desarrollado algunas iniciativas con estudiantes de primer ingreso a la universidad, convenio 901, MEN-UIS mismas que se han condensado en el proyecto “Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander" (Parada, 2012); en las cuales se hace evidente la dificultad en la comprensión e interpretación de enunciados y por tanto, el estudiante no resuelve correctamente los problemas planteados.

Dichas alternativas se organizan desde dos frentes: las preventivas y las remediales. Desde las primeras se busca atender la problemática antes de que los estudiantes se enfrenten con las dificultades de aprendizaje de los contenidos de la materia. Para ello se propone aplicar una prueba diagnóstica inicial a estudiantes de primer nivel con el fin de identificar o caracterizar sus presaberes, para que a partir de allí se le puedan plantear alternativas de apoyo: i) participación en un curso de precálculo y, ii) seguimiento y acompañamiento académico durante el semestre.

Un estudio preliminar que nos conduce al planteamiento de nuestra investigación, corresponde al análisis de los resultados de pruebas diagnósticas aplicadas durante 3 semestres consecutivos (en el marco del proyecto Alternativas curriculares para atender la problemática relacionada con el curso diferencial de la Universidad Industrial de Santander (Parada 2012), el cual se aplicó a algunos grupos cada semestre a un total de 683 estudiantes. En la prueba aplicada en el segundo semestre de este estudio se revisaron a profundidad los procesos realizados por cada estudiante para dar respuesta a los ítems propuesto, dicha prueba constó de 19 ítems (10 del componente algebraico y 9 del variacional). Del análisis de esos procesos surgieron resultados como: a) los estudiantes presentaron bajos presaberes en trigonometría; b) los conocimientos relacionados con límites y continuidad son prácticamente inexistentes para este grupo de estudiantes y c) los estudiantes de nuevo ingreso a la UIS tienen escasa interpretación de enunciados, no sólo en los que intervienen el lenguaje matemático.

Por todo lo anterior se proyecta un estudio en el que se pretenden diseñar y poner aprueba una serie de actividades para trabajar las competencias comunicativas en estudiantes de once grado, asumimos como hipótesis que con éstas se puede ayudar a que los estudiantes tengan mejor comprensión de los problemas matemáticos, ya que como lo menciona el MEN (2006) un individuo competente en matemáticas será “capaz de dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos, de argumentar, de dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz” (p.51).

Por lo cual, a través de este trabajo de investigación pretendemos responder a la pregunta *¿Cómo influyen las habilidades comunicativas en el desempeño de matemáticas en estudiantes de 11 grado?* Para responde a dicha pregunta planteamos como objetivo principal *posibilitar experiencias que permitan valorar las competencias comunicativas en estudiantes de once grado, y analizar como dichas competencias influyen en sus procesos de resolución de problemas, específicamente los relacionados con el pensamiento algebraico.*

2. REFERENTES CONCEPTUALES

Ser considerado competente en la práctica matemática tiene mucho que ver con ser considerado competente en el contexto cultural y social donde se produce dicha práctica, y esto conlleva necesariamente compartir o simular determinados significados y valores legitimados en ese contexto (Pinxten, 1997). En este sentido, la construcción del conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables. En particular las intervenciones positivas o negativas que se intercambian en estos procesos de comunicación facilitaran o dificultaran la construcción del conocimiento matemático. Para esta investigación se integraron diferentes aportes. Por un lado, los relacionados con las competencias matemáticas y la competencia comunicativa; y por otro, sobre aspectos inherentes al desarrollo del pensamiento algebraico.

2.1 COMPETENCIA MATEMÁTICA

Según Godino (2002) expone la competencia matemática como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. La competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático.

El programa PISA de la OCDE (2006) estipula que “el concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (p.3).

Según los NCTM (2000) ser competente en un campo complejo como el matemático supone tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto en otro contexto. Se basa en un aprendizaje en el que se comprende lo aprendido. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas por cada uno de estos autores encontramos algunos puntos en común que nos orientan para plantear que un estudiante es competente en matemáticas cuando es capaz de formular, plantear, transformar y resolver problemas mediante el lenguaje cotidiano y los distintos lenguajes matemáticos. De igual manera, utilizando las diferentes representaciones de un objeto matemático y justificando los procedimientos realizados.

2.2 COMPETENCIA COMUNICATIVA

El MEN (1998) menciona que en todas las actividades que realizamos los seres humanos es indispensable tener la habilidad de comunicarnos, en ella puede construirse y comunicarse las matemáticas a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. Un estudiante es comunicativo cuando puede expresar sus ideas a sus compañeros dándose a entender y entendiendo lo que sus compañeros dicen.

Presmeg (2001) plantea que la adquisición de la competencia comunicativa es la adquisición de todo aquello que es necesario saber para poder relacionarse con eficacia en contextos cultural y socialmente significativos sin que se produzcan discontinuidades que lo impidan. No solo se trata de construir enunciados en el lenguaje coloquial y matemático.

Según el MEN (1998) plantean que en todas las profesiones las personas deben tener la capacidad de expresar sus ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas; que puedan comprender, interpretar y evaluar ideas. De igual manera, que puedan construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas, hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y producir argumentos persuasivos y convincentes.

Por lo tanto, “La comunicación matemática va más allá de resolver un problema, ésta involucra la escritura, la presentación y la argumentación de ideas (Maciel, 2003, p 75), tiene que ver con modos de interpretación que los estudiantes le dan a un contenido matemático haciendo uso de su lenguaje cotidiano para expresar las ideas de las diferentes representaciones del problema y de solución del problema.

Según el MEN (1998) plantean que los estudiantes están comunicando matemáticas cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real o cuando propone conjeturas sobre una figura geométrica.

De todo lo anterior vamos a caracterizar las competencias comunicativas a partir de algunas habilidades que desde nuestra perspectiva nos pueden ayudar a caracterizar el desarrollo de las competencias comunicativas en matemáticas de los estudiantes, las llamaremos dentro de nuestra investigación “habilidades comunicativas”, estas son: i) habilidad para interpretar, ii) habilidad para explicar, iii) habilidad para justificar y iv) habilidad para argumentar.

2.2.1 Habilidad para Interpretar

Al realizar un análisis de algunas definiciones de la interpretación en el plano matemático como proceso, se pueden citar la que ofrece Hernández, Delgado y Fernández (2001), quien la define como la atribución de significados a las expresiones matemáticas de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.

El ICFES (2012) plantea que interpretar es la acción encaminada a encontrar el sentido de un texto, un problema, una gráfica, un plano de ingeniería, un diagrama de flujo, una ecuación, un circuito eléctrico, entre otras situaciones, donde se le proporciona un contexto al estudiante. La interpretación sigue unos criterios de veracidad, los cuales no implican sólo la comprensión de los contextos, sino que se debe dirigir a la situación concreta y reflexionar sobre sus implicaciones y los procesos de pensamiento involucrados con el recuerdo, la evocación, comprensión, análisis, medición, etc.

Según el ICFES (2010) saber interpretar es una actividad sistemática y rigurosa, en virtud de que se trata de un proceso de reconstrucción y construcción de significados, formas de significar, de atribuir sentido y de actuar, en conformidad. Es decir, el estudiante, mediante tal actividad, ha de ir aproximándose paulatinamente a la manera de interpretar estructuras conceptuales y metodológicas. Se trata del cambio en los conceptos, en las metodologías, en la mirada estética, en las actitudes y en las valoraciones con las que los estudiantes ingresan para sumergirse creativamente en el lenguaje y procederes de las ciencias.

De acuerdo a lo anterior, Gallego (2011) afirma que las acciones realizadas dentro de ésta desarrollan procesos de pensamiento como: Observación y atención, comprensión, procesos de aplicación, clasificación y codificación.

Montenegro (1999) plantea que la interpretación de un problema significa atribuir significado a las condiciones iniciales del problema, de modo que todas las expresiones lógicas estructuradas en él adquieran sentido, lo cual encierra distinguir los elementos primarios que intervienen en el enunciado y las relaciones lógicas que se dan entre ellas.

Así mismo, Niño (2005) menciona que la interpretación es un acto consistente en la captura de una información presente en un contexto determinado, atribuyéndole un significado dentro de un campo del conocimiento, lo cual se hace a partir de las experiencias previas del individuo.

Gonzales y Paniagua (2011) afirman que el acto de interpretar se constituye en un ejercicio propio de un individuo en tanto que éste hace una lectura de la realidad a partir de sus estructuras cognitivas y en este caso otro individuo no puede suplantarlo en dicho ejercicio, es decir, interpretar por él. Otra de las consideraciones que se deben tener en cuenta en la interpretación de enunciados de problemas en el campo de las matemáticas, es que por la naturaleza misma de estas últimas, sólo es posible la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático en aquellos que tengan relación con el número y la medida. Por ende, la interpretación en el campo matemático es simple, ya que tiene unas pautas muy específicas, es decir un dominio muy concreto que permite la sistematización del proceso de traducción. (p.4)

A partir de las definiciones presentadas anteriormente, definimos para nuestra investigación la habilidad interpretativa como la capacidad del estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático); así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio.

2.2.2 Habilidad para Explicar

Según la RAE, la explicación es una declaración o exposición de cualquier materia, doctrina o texto con palabras claras o ejemplos, para que se haga más perceptible. La palabra explicación viene a significar el hecho de 'desplegar' lo que estaba doblado (plegado, implicado) y oculto en su interior, que no es visible o perceptible a la razón, haciendo comprensible lo que en un primer momento no lo sería. Es decir, lo que se busca por medio de la explicación es aclarar a los demás cualquier situación, proceso o resultado.

En la revisión de la literatura se ha caracterizado el proceso explicativo desde diferentes perspectivas, entre ellas rescatamos las siguientes:

- Balacheff, (1982) utiliza el término explicación como una idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración. Una explicación es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado,
- Duval (1999) la explicación es una actividad reflexiva en relación a otra, entonces la explicación es un medio explicito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar las ideas. Da una o más razones para volver comprensible un dato, un fenómeno, un resultado, un comportamiento.
- Piaget (1970) dice que explicar, “en el terreno de las ciencias deductivas”, es en primer lugar despejar las “razones” para “responder a la pregunta del por qué”.
- De Villiers (1993) destaca la función de explicación de las demostraciones, pues no es sólo cuestión de asegurarse, sino de explicar por qué la proposición es cierta, de hacer la actividad significativa, a la vez que constituye un elemento de motivación.

Por último, los NCTM (2000) plantean que los alumnos deberían ser capaces de explicar los métodos que han empleado en la solución de un problema, puedan aprender a explicar sus respuestas y a ser capaces de explicar por qué. Además, escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión. Las explicaciones de los niños serán en su propio lenguaje y, con frecuencia, se presentarán verbalmente o mediante objetos; mientras que en los niveles medios y en Secundaria, las explicaciones deberían llegar a ser cada vez más rigurosas matemáticamente.

Teniendo en cuenta los aportes dados por cada uno de estos autores citados anteriormente, definimos la habilidad para explicar cómo la aptitud que tiene un estudiante para exponer la descripción del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando él por qué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento.

2.2.3 Habilidad para Justificar.

El MEN (1998) considera que el estudiante debe justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas, por lo que es una de las habilidades importantes que debe desarrollar un estudiante.

Entre los autores que hablan de la justificación encontramos a Rigo, Rojano y Pluvinage (2011) que se refieren al término de justificación como a todo tipo de recursos argumentativos que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él.

Además afirman que una justificación suele tener dos propósitos: uno epistemológico, que consiste en aseverar, explicar o fundamentar una verdad matemática y uno psicológico, que consiste en que el interlocutor consiga algún aprendizaje, así como un estado epistémico (convencimiento, convicción o persuasión (Rigo,Ibid) hacia la verdad en ciernes.

Según Durango, Parra, Toro, Zapata, (2010) el contexto de justificación hace referencia a las actividades y procesos en los que el estudiante emplea argumentos matemáticos para validar los enunciados. Aquí se incluyen las pruebas y las demostraciones.

Jorba (1998) expone que justificar es producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los objetivos los contenidos objeto de la tesis.

En nuestra investigación, definimos la habilidad para justificar como la capacidad que tiene un estudiante para sustentar una idea, explicar el porqué de un proceso, aceptar o refutar una conclusión por medio de razones relevantes como la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo.

2.2.4 Habilidad para argumentar

De la literatura consultada podemos observar que diferentes autores coinciden que cuando se habla de la argumentación tiene que ver con el hecho de dar razones, defender una opinión, o tratar de convencer.

Leitão (2007) define a la argumentación como una actividad social de naturaleza discursiva que se realiza por la justificación de puntos de vista y consideración de ideas alternativas con el objetivo de aumentar o reducir la aceptabilidad de un punto de vista en cuestión.

Calderón y Corredor (2001) deducen del trabajo de Perelman et al. (1988), que argumentar es “intentar convencer o persuadir, en forma razonada, a otro de las tesis que se tienen por ciertas”. De esta definición, colegimos que la argumentación como práctica comunicativa se sustenta en tres principios fundamentales: el carácter dialógico de sus interacciones verbales con fines convincentes; el carácter razonable y razonado de sus procesos discursivos; y el nivel de convicción personal frente a lo argumentado.

Según Herrera (2012) el argumentar en matemáticas se hace importante en la medida que fortalece la competencia comunicativa en dicha área, ya que, en la medida que el estudiante se sienta en la necesidad de argumentar se verá en la obligación de manejar de manera adecuada el lenguaje y el discurso matemático. Cuando un estudiante argumenta debe realizar las siguientes acciones: comprender el ejercicio o problema, seleccionar el medio de argumentación adecuado y formular un juicio a partir de realizar una o varias de estas operaciones: la identificación de un concepto, la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo.

Por último, el MEN (1998) plantea que los estudiantes deben dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones; así como utilizar argumentos propios para exponer ideas.

Teniendo en cuenta los aportes dados por cada uno de estos autores encontramos algunos puntos en común que nos orientan para plantear nuestra aproximación a lo que puede ser la habilidad para argumentar.

La habilidad para argumentar está relacionada con el hecho de convencer o defender la aprobación de una idea o de resultados obtenidos por medio de razones relevantes; va acompañada del uso adecuado del lenguaje y del discurso matemático.

Se espera que las habilidades previamente descritas contribuyan en el desarrollo de las competencias comunicativas, no obstante desde nuestro estudio solo abordaremos la habilidad para interpretar y la habilidad para explicar en términos de cualidades que podamos favorecer mediante talleres para que el alumno pueda **comprender** y posteriormente de **descripciones** alrededor de un **o**bjeto matemático y de esta manera dichas habilidades puedan contribuir en los procesos de resolución de problemas.

Nos enfocamos en el pensamiento algebraico específicamente en el tema de sistemas de ecuaciones porque mediante éstos se permite ver la capacidad que tiene un estudiante para traducir diferentes representaciones matemáticas al resolver problemas, así como lo afirma Kaput(1989) que parte de una acepción amplia de sistemas de representación, que incluye los sistemas familiares de gráficas cartesianas, ecuaciones, etc., así como las representaciones no matemáticas del lenguaje natural y los diagramas o dibujos. Sugiere además que el aprendizaje de la matemática puede mirarse como construcción de significados. Sobre la base de lo anterior, afirma que los significados matemáticos pueden ser establecidos al menos de cuatro maneras. Las tres primeras son:

1) por transformación dentro de un sistema particular de representación sin referencia a ninguna otra representación;
2) por traducción entre distintos sistemas matemáticos de representación; y

3) por traducción entre representaciones matemáticas y representaciones no matemáticas.

2.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el proceso de resolución de problema Polya (1945) identifica etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeña un papel importante. Estas etapas son:

1. Entendimiento del problema. En esta etapa se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. Por ejemplo, ¿cuál es la información dada por el problema (datos)?, ¿Cuál es la incógnita?, y ¿Cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?, son algunas preguntas que merecen atención en la fase del entendimiento del problema.

Otra de las heurísticas importantes es dibujar una gráfica o diagrama, e introducir una notación adecuada.

2. Diseño de un plan. En esta etapa se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del problema que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución. Responde a preguntas como ¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿Conoce un problema relacionado con este?, ¿Podría enunciar el problema de otra forma?, ¿Ha empleado todos los datos? En la psicología, la habilidad de establecer relaciones se identifica como un indicador de la inteligencia. Es importante que, como métodos de solución, el individuo diferencie propiedades estructurales profundas de características superficiales, como la existencia de palabras comunes de los posibles métodos de solución.

(Santos, 1995) propone algunas estrategias que pueden ayudar a construir un plan de solución, estas son:

a) Pensar en un problema conocido que involucre la misma clase de incógnita, pero que sea más simple. Por ejemplo, un problema de tres dimensiones puede pensarse en el plano o en la recta. Esto además puede ayudar a visualizar el problema gráficamente.

b) Simplificar el problema por medio de una transformación a casos especiales. Esto es muy usual, por ejemplo, en la búsqueda de patrones que incluyan números naturales. O también al resolver desigualdades de números con varias variables, a veces ayuda reducir el número de parámetros.

3. Ejecución del plan. Aquí se consideran aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución. Una idea fundamental es tratar de resolver del problema en una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida. De hecho esta etapa tiene conexión con lo que Polya (1945) denomina una visión retrospectiva del proceso de solución. También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

4. Examinar la solución obtenida.

También denominada la etapa de la visión retrospectiva, en esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento seguido De preguntarse: ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros: Polya (Op.cit.) plantea que cuando se resuelve un problema se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera.

De hecho, es muy válido verificar si se puede obtener el resultado de otra manera; si bien es cierto que no hay una única forma o estrategia de resolver un problema pueden haber otras alternativas. Precisamente, esta visión retrospectiva tiene por objetivo que veamos esta amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema.

2.4 PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Según Jeannotte (2010) y Mason (1985), mencionados por Kieran (2011), el pensamiento algebraico va en primer lugar enfocado como un todo, siendo este un término mucho más amplio, y en segundo lugar se fundamenta y se desprende de las capacidades que tienen los estudiantes para dar sentido matemáticamente.

Según Butto y Rojano (2008) el pensamiento algebraico involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones. Así mismo que algunos autores afirman que, para el desarrollo del pensamiento algebraico, es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que, sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético, puedan construir las nociones básicas del álgebra.

Kaput (2008), caracteriza el pensamiento algebraico en dos aspectos fundamentales; el primero consistente en hacer y expresar las generalizaciones en los sistemas de símbolos de una forma cada vez más formal y convencional y segundo el razonamiento simbólico que incluyen la manipulación sintáctica guiada de las formas simbólicas.

Kieran (2011) propone una ruta específica para ir creciendo en la consecución del pensamiento algebraico, (ver Tabla 1) y cómo esa ruta nos llevará a la construcción del modelo algebraico independiente de la situación problemática que se presente, claro está teniendo en cuenta que dicha situación sea susceptible de ser modelada algebraicamente.

Podemos decir entonces que un modelo algebraico es una elaboración que existe del cambio puramente numérico a una elaboración mediante ciertas etapas que no necesariamente deben ceñirse a un orden preestablecido, de una norma o modelo de cálculo que relaciona el contexto mediante situaciones problemas consistente en la construcción de una notación algebraica a la que conoceremos análogamente como representaciones externas.

Tabla 1 Ruta recomendada para la consecución del pensamiento algebraico

Consecución del pensamiento algebraico (Kieran, 2011)
Pensamiento acerca de lo general en lo particular
Pensamiento sobre reglas racionales de patrones
Pensamiento relacional sobre la cantidad, números, y operaciones numéricas
Pensamiento representacional acerca de relaciones en situaciones problema
Pensamiento conceptual acerca de procedimientos
Anticipando, conjeturando y justificando
Señalando, visualizando y traduciendo

MODELO ALGEBRAICO

Según NCTM (2000) afirma que los estudiantes necesitan comprender del (álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones. Así mismo, en los NCTM se menciona que en los últimos grados de la educación básica se debe estimular desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos con actividades transitorias entre el aritmética y el álgebra. Operar con símbolos en la simplificación de expresiones algebraicas o en la resolución de ecuaciones, es tan solo una dimensión de lo que significa aprender algebra cuyo concepto es más amplio; está relacionado con una lista considerable de habilidades de la mente. Por lo tanto, en el desarrollo del pensamiento algebraico de esta investigación tendremos en cuenta el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación que desarrollamos es de tipo cualitativo de corte fenomenológica. Los datos que emergieron del proceso los analizamos en dos categorías que puedan dar cuenta del desarrollo de las competencias comunicativas de los estudiantes y estas son las dos primeras de las cuatro “habilidades comunicativas” que describimos en el apartado 2.2

Para LeCompet (1995) la investigación cualitativa podría entenderse como “una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, transcripciones de audio y vídeo cassettes, registros escritos de todo tipo, fotografías o películas y artefactos”. Para esta autora la mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el entorno de los acontecimientos y centran su indagación en aquellos contextos naturales, o tomados tal y como se encuentran, más que reconstruidos o modificados por el investigador, en los que los seres humanos se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente.

Según Denzin y Lincoln (1994) el objetivo de la investigación cualitativa es la comprensión, centrando la indagación en los hechos. Desde la investigación cualitativa se pretende la comprensión de las complejas interrelaciones que se dan en la realidad.

Morse (1994) presenta una clasificación de los métodos que se utilizan en la investigación cualitativa, entre ellos está el de tipo fenomenológico, la investigación fenomenológica, destaca el énfasis sobre lo individual y sobre la experiencia subjetiva: “la fenomenología es la investigación sistemática de la subjetividad”. En definitiva, busca conocer los significados que los individuos dan a su experiencia, lo importante es aprender el proceso de interpretación por el que la gente define su mundo y actúa en consecuencia.

2.5 3.1 POBLACIÓN

Las actividades se desarrollaron con estudiantes entre 16 y 18 años, que voluntariamente desearon participar de la experiencia. Para esto se invitaron los alumnos de un curso de grado 11 del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana ubicado en el municipio de Floridablanca (Santander).

Las pruebas diagnósticas se aplicaron a todo el grupo conformado por 42 estudiantes, pero en los talleres que componen el plan de intervención se hizo sólo con 9 estudiantes que asistieron a las actividades extra curriculares a quienes llamaremos con seudónimos por Andrea, Susana, Lalo, Germán, Carlos, Paula, Manuel, Rubén y Teresa. Para ello se realizó un proceso oficial, solicitamos permisos por escrito a los padres familia para que los estudiantes pudieran asistir a las instalaciones de la universidad. También se pidió a apoyo formal al rector de la institución para que la profesora del curso facilitara los espacios de clase para la aplicación de las pruebas diagnósticas.

3.2 ASPECTOS LOGÍSTICOS

Se desarrollaron los aspectos logísticos de la siguiente manera:

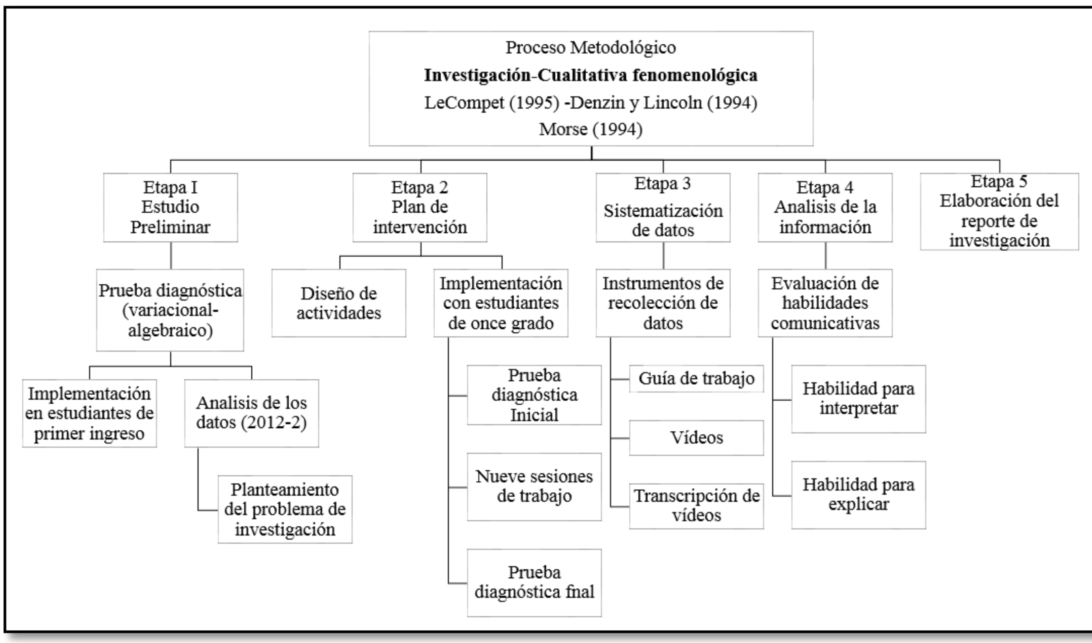
- Se presentó el proyecto a los estudiantes de once grado el día 10 de mayo en las instalaciones del colegio y se les hizo entrega de una carta (ver **Anexo A**) en la que expone las fechas del trabajo de campo y se solicita permiso por escrito a los padres de familia para la asistencia de los estudiantes al campo universitario (ver **Anexo B**).

- Presentamos al rector de la Institución el proyecto como parte del proyecto escolar en el área de Matemática y solicitamos por escrito su autorización para desarrollarlo (ver **Anexo C**).

3.3 ETAPAS DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN

La investigación se desarrolló por medio de 5 etapas que se describen en los siguientes apartados y se sintetizan en el esquema que aparece en la Figura 1

Figura 1 Etapas del proceso metodológico de la investigación



Etapa 1. Estudio preliminar.

Para el planteamiento del problema de la investigación se realizó un estudio preliminar en donde se diseñó e implementó una prueba diagnóstica elaborada por competencias, siguiéndonos de la caracterización propuesta por el Instituto colombiano para el Fomento de la Educación Superior en las pruebas de estado ICFES. La prueba constó de 19 ítems, de los cuales 10 referentes al componente algebraico y 9 al componente variacional. El instrumento estaba estructurado en tres partes: enunciados de los problemas, los 10 ítems del componente variacional fueron seleccionados del trabajo de grado basado en la implementación del modelo Rasch para la estimación de la habilidad algebraica de los estudiantes de primer semestre de ciencias e ingenierías de la UIS de Adriana Barajas y Orlando Esparza del 2010. Los 9 ítems del componente variacional se seleccionaron del libro de precálculo sexta edición de James Stewart; una segunda parte contenía una hoja de respuestas de opción múltiple y por último, una hoja de procesos en donde el estudiante justificaba la respuesta a los problemas planteados. Dicha prueba se aplicó en los semestres correspondientes al año 2012 y en el primero del año en curso, a un total de 683 estudiantes que cursaban calculo I. Para el análisis de resultados y procesos se tuvo en cuenta la prueba que se aplicó en el segundo semestre de 2012.

Inicialmente se realizó un análisis en general para tener una visión de las posibles dificultades que presentan los estudiantes, posteriormente estos resultados se revisaron a partir de las competencias mencionadas previamente.

Para la identificación de la temática presentada en cada ítem asumimos las abreviaturas de la Tabla 2

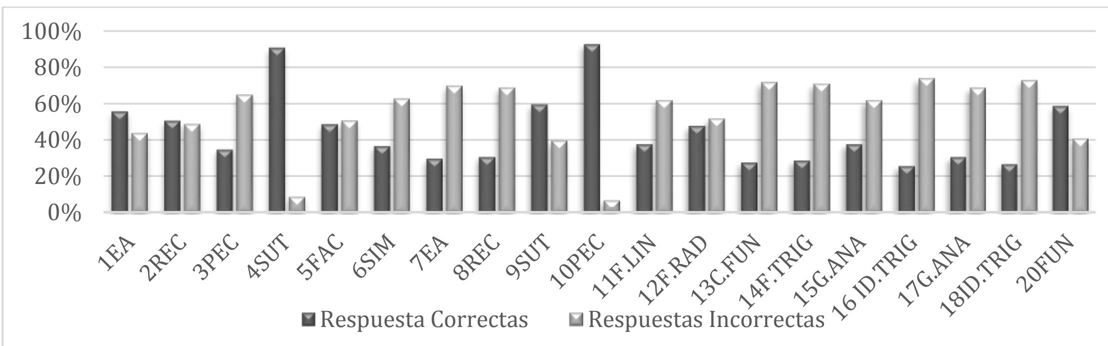
Tabla 2 Abreviatura de la temática de cada ítem

TEMATICA	ABREVIATURA
Manejo de expresiones algebraicas	**EA**
Resolución de ecuaciones	**REC**
Planteamiento de ecuaciones	**PEC**
Sustitución de variables	**SUT**
Simplificación y factorización	**FAC**
Función lineal	**F. LIN**
Funciones radicales y su	**F. RAD**

dominio	
Composición de funciones	**C. FUN**
Funciones trigonométrica	**F. TRIG**
Geometría analítica	**G. ANA**
Identidades trigonométricas	**ID. TRIG**
Funciones	**FUN**

En la Figura 2 encontramos los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para cada ítem

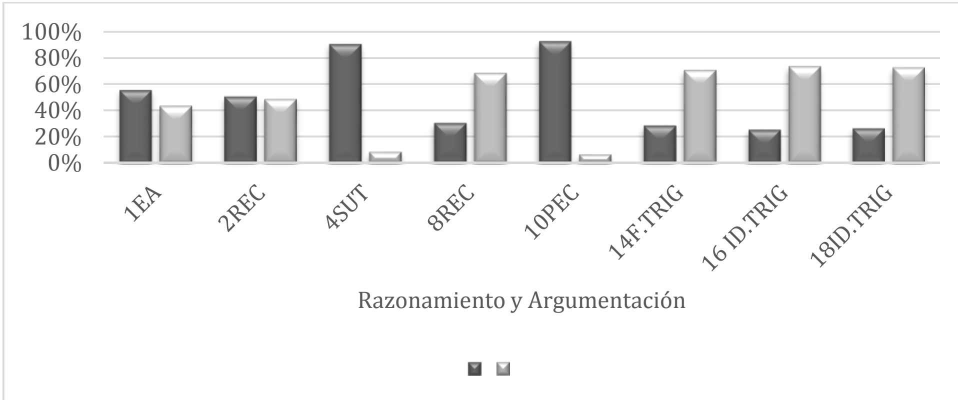
Figura 2. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para cada ítem



En la Figura 2, vemos que el ítem 4 referente a sustitución de variables y el ítem 10: planteamiento de ecuaciones del componente algebraico tuvieron un porcentaje mayor de respuestas correctas que incorrectas. El mayor porcentaje de respuestas incorrectas se presentaron en el componente variacional especialmente en los ítems referentes a trigonometría.

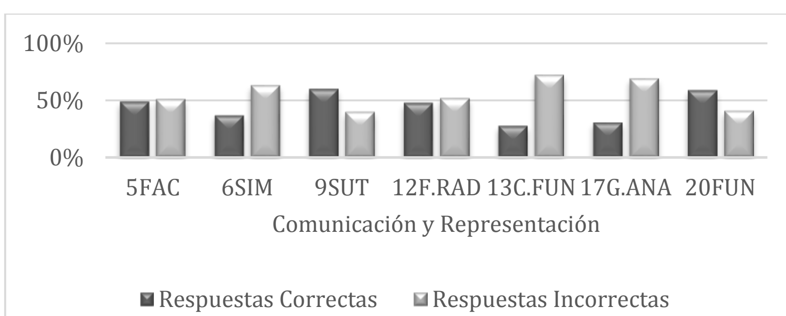
La Figura 3 muestra los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas de los ítems diseñados para evaluar la competencia de razonamiento y argumentación.

Figura 3. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para la competencia de razonamiento y argumentación.



Se observa en la Figura 3 que los ítems 8 de resolución de ecuaciones, 14 de funciones trigonométricas y 16, 18 de trigonometría tuvieron un porcentaje de respuestas correctas e incorrectas similares. Los ítems de mayor porcentaje de respuestas correctas fueron los correspondientes a sustitución de variables (ítem 4) y planteamiento de ecuaciones (ítem 10). Los ítems referentes a trigonometría (ítems 16-18) en esta competencia se caracterizaron por altos porcentajes de respuestas incorrectas. La Figura 4 muestra los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas de los ítems diseñados para evaluar la competencia de comunicación y representación.

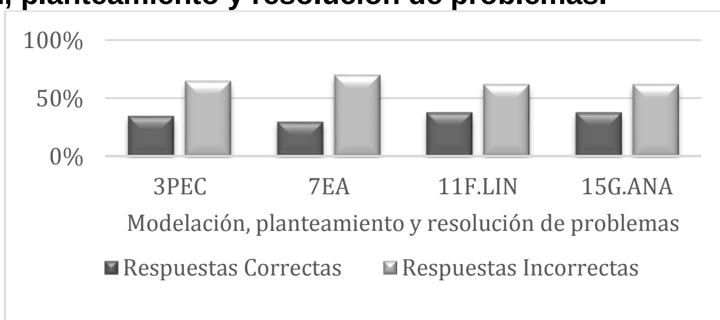
Figura 4. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para la competencia de comunicativa y representación



Se observa que los ítems de sustitución de variables (ítem 9) y de funciones (ítem 20) fueron los únicos donde el porcentaje de respuestas correctas fue mayor con relación al porcentaje de respuestas incorrectas. Además los ítems relacionados con Geometría Analítica (ítem 17) y composición de funciones (ítem 13) se caracterizan por tener los mayores porcentajes de respuestas incorrectas.

La Figura 5 muestra los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas de los ítems diseñados para evaluar la competencia de modelación, planteamiento y resolución de problemas.

Figura 5. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para la competencia de modelación, planteamiento y resolución de problemas.



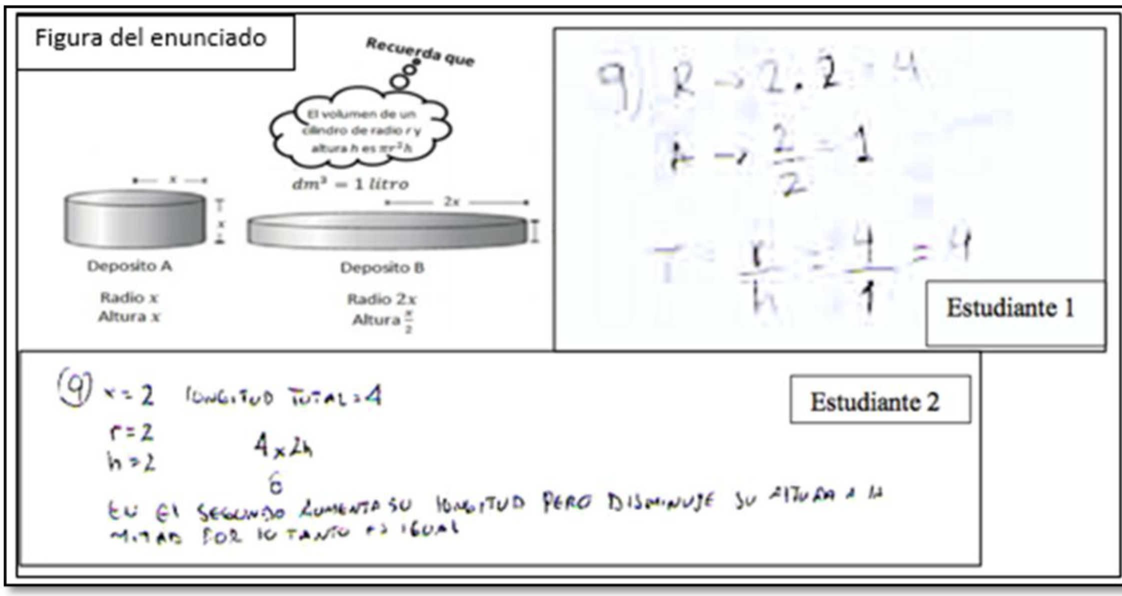
.

Se observa en la Figura 5 que en ningún ítem el porcentaje de respuestas correctas fue mayor con relación al porcentaje de respuestas incorrectas. El ítem con mayor porcentaje de respuestas incorrectas para esta competencia fue el correspondiente a manejo de expresiones algebraicas (ítem 7). En general, se hace evidente que los estudiantes en cada una de las competencias evaluadas presentan bajo desempeño.

De la revisión de las hojas de procedimientos se pudo observar que los estudiantes no contestaron o contestaron mal los problemas por su baja interpretación y comprensión de los enunciados. A continuación se presentan dos ejemplos de los procesos realizados por estudiantes que hace evidente lo expuesto previamente.

- *Para almacenar gasolina se utilizan depósitos cilíndricos como los que se muestran en la siguiente figura. Si x=2dm, la capacidad del depósito B es:*

Figura 6. Solución dada por estudiantes en el enunciado número 9 de la prueba diagnóstica

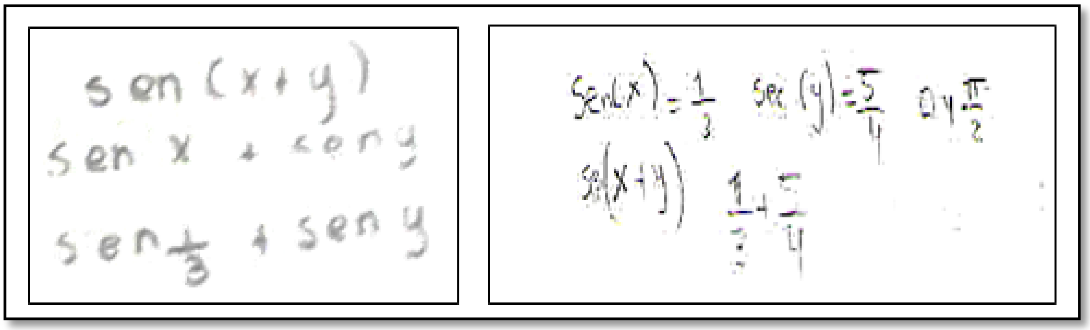


- El estudiante 1 al querer dar respuesta al enunciado, realiza operaciones que lo llevan a despejar y dar el valor de π sin hacer un análisis a profundidad de lo realizado, puesto que se puede observar que el valor que obtuvo no es realmente el valor de π, y además no halló el volumen del depósito B que era lo que planteaba el problema
- El estudiante 2 claramente no entendió lo que debía realizar, puesto hace una comparación entre el ancho y el alto de los depósitos y no da una respuesta acertada.

En el siguiente enunciado el estudiante debía hacer uso de la identidad trigonométrica *seno de la suma de dos ángulos,* pero como se puede observar en la Figura 7 carecen del conocimiento de dicha identidad para aplicarla en el ejercicio.

Si $sen(x) = \frac{1}{3}$ y $sec(y) = \frac{5}{4}$ donde x e y están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ al evaluar $sen(x + y)$ se obtiene:

Figura 7. Soluciones dadas por estudiantes al enunciado número 18 de la prueba diagnóstica



En general del análisis que se realizó se obtienen las siguientes reflexiones

- Los estudiantes no traen las bases conceptuales necesarias de su formación escolar, lo que constituye una causa principal de la problemática, y por ello no logran comprender los contenidos del curso de Cálculo Diferencial.
- Los estudiantes que presentaron la prueba tienen bajos presaberes en trigonometría, como se muestra en la Figura 7. Además se puede evidenciar que los contenidos relacionados con límites y continuidad son prácticamente inexistentes.
- Se evidenció la escasa interpretación de enunciados lo que nos conduce a percibir el bajo nivel de las competencias comunicativas de los estudiantes, esta dificulta la podemos observar en la Figura 6

Etapa 2. Diseño e implementación del plan de intervención y de las actividades que comprende la experiencia

El cual constó de una prueba diagnóstica inicial, nueve sesiones de trabajo y una prueba diagnóstica final. En la Tabla 3 se presenta la organización de cada una de las sesiones programadas para el desarrollo de la investigación en donde se especifica las habilidades y el aspecto a trabajar. En ésta misma se puede observar la programación de todas las actividades con sus respectivas fechas y lugar de desarrollo.

Tabla 3. Plan de actividades de intervención

Sesión	*Habilidades a trabajar*	*Aspecto*	*Hora*	*Fecha*	*Lugar*
1.	Habilidades comunicativas previas	Diagnóstico inicial	6:00-8:00	10 de mayo	Colegio
2.	Habilidad para interpretar	Traducción del lenguaje verbal al leguaje algebraico	15:00-17:00	15 de mayo	UIS
3.	Habilidad para explicar	Planteamiento de situaciones a partir de un sistema de ecuaciones dado	14:30-17:30	17 de mayo	
4.	Habilidad para explicar	Explicación de los procesos realizados	15:00- 17:00	20 de mayo	
5.	Habilidad para interpretar	Traducción grafica al lenguaje algebraico	15:00-17:00	22 de mayo	
6.	Habilidad para explicar	Comunicación de los procedimientos que se van a realizar	14:30-17:30	24 de mayo	
7.	Habilidad para explicar	Formular y proponer conjeturas a partir de un sistema de ecuaciones	14:30–17:30	27 de mayo	
8.	Habilidad de explicar	Relación del sistema de ecuaciones y contenidos geométricos	15:00-17:00	29 de mayo	
9.	Habilidades comunicativas	Interpretación y comunicación de enunciados algebraicos en sus diferentes representaciones	15:00-17:00	31de mayo	
10.	Habilidades comunicativas	Interpretación y comunicación de enunciados algebraicos en sus diferentes representaciones	15:00-17:00	03 de julio	
11.	Habilidades comunicativas posteriores a la intervención	Diagnóstico final	6:00-8:00	5 de julio	Colegio

En el capítulo siguiente se describen detalladamente cada una de las actividades diseñadas y la implementación de éstas con los propósitos previstos para favorecer el desarrollo de las habilidades comunicativas de la población bajo estudio.

Etapa 3. Sistematización de datos

Los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron para esta investigación, son las guías de los talleres aplicados a nuestros casos de estudio, y los videos que se realizaron en el desarrollo de cada una de las actividades de intervención. Para la organización de los datos se llevó a cabo la transcripción de los videos con el fin de extraer los momento más relevantes de las sesiones y la revisión de las respuestas adquiridas de los estudiantes que participaron de las experiencias.

Etapa 4. Análisis de la información Se retomaron de las grabaciones de las sesiones de trabajo episodios en los cuales emergen evidencias del desarrollo de las dos primeras habilidades comunicativas (descritas en los referentes teóricos). De la calidad de los datos seleccionamos algunos episodios con los cuales podamos reportar avances resultantes del proceso de intervención.

Etapa 5. Elaboración del reporte de investigación Se hizo una evaluación de habilidades comunicativas en los estudiantes que participaron en la intervención. Vale la pena señalar que compararemos los procesos logrados por estos estudiantes con relación a los demás estudiantes del grupo que no participaron de las actividades. Y finalmente se caracterizaron los aprendizajes adquiridos por estos estudiantes con el desarrollo de las experiencias.

4. DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DISEÑADAS E IMPLEMENTADAS

En este capítulo presentamos una descripción de cada una de las actividades que hizo parte del plan de intervención de nuestra investigación (mismo que se describe en la Tabla 3), de cada actividad se describe tanto su diseño (se detallan cada uno de los incisos que conforman la actividad, el objetivo y lo que se esperaba que el estudiante hiciera teniendo en cuenta los errores que posiblemente pudieran cometer) y la manera como se implementó.

Las nueve sesiones del trabajo de campo se realizaron en las instalaciones de la UIS en las salas de cómputo especializado de la escuela de Matemáticas, en los horarios establecidos en la Tabla 3 mostrada anteriormente. Y las actividades diagnósticas se realizaron en las instalaciones del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana en el municipio de Floridablanca.

Antes de iniciar a contestar la prueba inicial se realizó una intervención en la que se presentó a los estudiantes el proyecto, allí se les hizo unos comentarios generales acerca de lo que se tenía previsto realizar, empezando por la razón que dio paso al planteamiento de nuestro problema de investigación que es precisamente el bajo desempeño en las competencias comunicativas que presentan los estudiantes de primer ingreso a la universidad, posteriormente se describió en qué consistía las experiencias planeadas y se hizo énfasis en que en cada una de ellas se trabajaría una habilidad comunicativa, cordialmente se hizo la invitación para que hicieran parte de éstas por medio de una carta (**Anexo A**) enviada a los padres de familia en la que se exponía con más claridad la problemática y el plan de intervención diseñado.

2.6 PRUEBA DIAGNÓSTICA INICIAL

Como actividad diagnóstica inicial se elaboró una prueba (ver Figura 8 y Figura 9) que contó con 6 ítems, cada uno de ellos evaluó una competencia del pensamiento algebraico y una habilidad comunicativa (interpretación o explicación). **La prueba tenía como objetivo: reconocer y determinar las habilidades comunicativas que traían los estudiantes que iban a participar en las experiencias didácticas.**

En el primer ejercicio (Ver Figura 8) se evaluaba la habilidad para interpretar en la que el estudiante debía demostrar la capacidad de traducir del lenguaje verbal al lenguaje algebraico. El estudiante debió interpretar el problema para poder plantear correctamente el sistema de ecuaciones: $3M + P = 12B$ y $P = M + 8B$, y saber que B pesa 200 gramos.

> *Entre las posibles dificultades que previmos presentaran los estudiantes al interpretar el enunciado de este problema, es que algunos podían confundir docena con decena. También que al leer el enunciado realizaran signos de puntuación donde no los había y quizás otros, no reconocieran que la "y" en la oración representa una suma. Luego, no realizarían un sistema de ecuaciones.*

En el segundo ejercicio (ver Figura 8) se pretendía evaluar al igual que en el primero la habilidad para interpretar pero esta vez considerando la capacidad que tiene el estudiante para realizar la traducción del lenguaje grafico al algebraico. El sistema de ecuaciones en este ejercicio lo conformaban las ecuaciones de las dos rectas que se intersecaban en el punto (2,3) ($y = -\frac{1}{2}x4$; $y = \frac{3}{4}x + 1.5$). El estudiante lograría la solución correcta al aplicar los conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta: saber qué es y cómo hallar la pendiente, reconocer que b en la ecuación de la recta $y = mx + b$ es el corte con el eje y.

En este ejercicio se esperaba que los estudiantes plantearan diferentes respuestas como que son funciones lineales; que son dos rectas que se intersecan en un punto; que el sistema de ecuaciones es (2,3) (punto de intersección entre las dos rectas), o quizás algunos podrían decir que el sistema de ecuaciones era (0,4) unido (8,0) y (0,1.5) unido (2,3) tomando toda la información contenida en la gráfica, o por último plantear las ecuaciones generales sin hacer uso de los datos: $y_1 = m_1x_1 + b_1$ *y* $y_2 = m_2x_2 + b_2$
.

En el tercer ejercicio (ver Figura 8) se pretendía evaluar la habilidad para explicar donde el estudiante demostraría la capacidad de sustentar los procesos realizados por medio de razones usando su lenguaje natural. Para que el estudiante pudiera explicar cómo hacer el ejercicio debe entender el planteamiento del enunciado y realizarlo; de esta forma podría exponer paso a paso el procedimiento a seguir para llegar a la solución.

En este ejercicio se esperaba que los estudiantes dieran respuestas como que se debería dividir la herencia en tres y repartir el dinero por igual, o decir que como doña María es la mamá, entonces le corresponde la mitad de la herencia y la otra mitad se la reparten por igual entre los mellizos, o haciendo una mala interpretación al problema podrían responder que a la mamá le pertenecen 70 millones, al niño 35 y a la niña 140 millones o en otros casos expresar que no se puede responder

Con el cuarto inciso (ver Figura 9) se quería evaluar la habilidad de interpretar al traducir del lenguaje algebraico al lenguaje verbal. Se debía reconocer las variables como números y no como simples letras.

En este ejercicio se esperaba que los estudiantes respondieran tres por el doble de equis, o tres equis elevado a la dos o cinco abre paréntesis equis más cuatro cierra paréntesis elevado a la tres o raíz de a por b por c

Figura 8 Hoja 1 de la prueba diagnóstica inicial

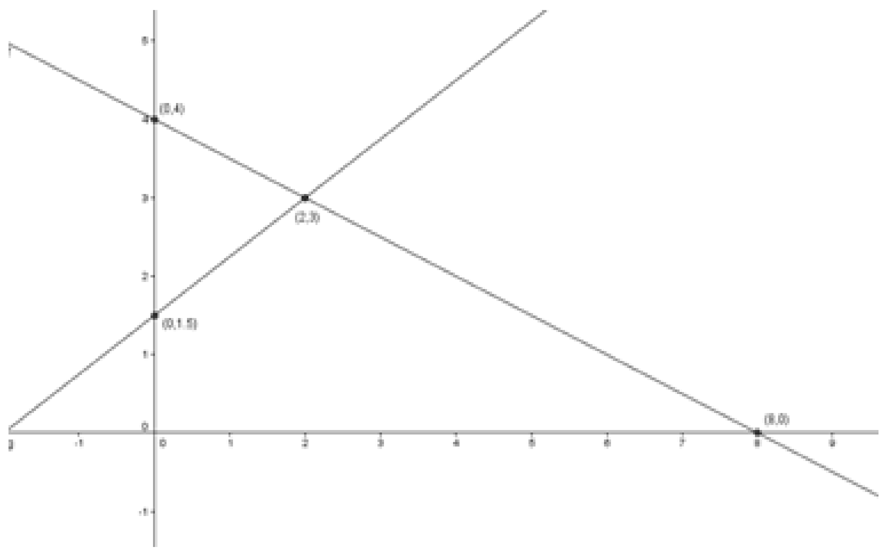
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

PRUEBA DIAGNÓSTICA INICIAL

Nombre ____ Edad _____
E-mail: ____
Número de celular o fijo: _________________________________

1. Don Pedro está apurado pesando varias frutas en una balanza. Después de varias pesadas, se da cuenta que tres mandarinas y una papaya pesan lo mismo que una docena de bananos; además, advierte que la papaya pesa tanto como una mandarina y ocho bananos. Si cada banano pesa 200 gramos, ¿Cuánto crees que pesa una papaya? Explica tu respuesta.

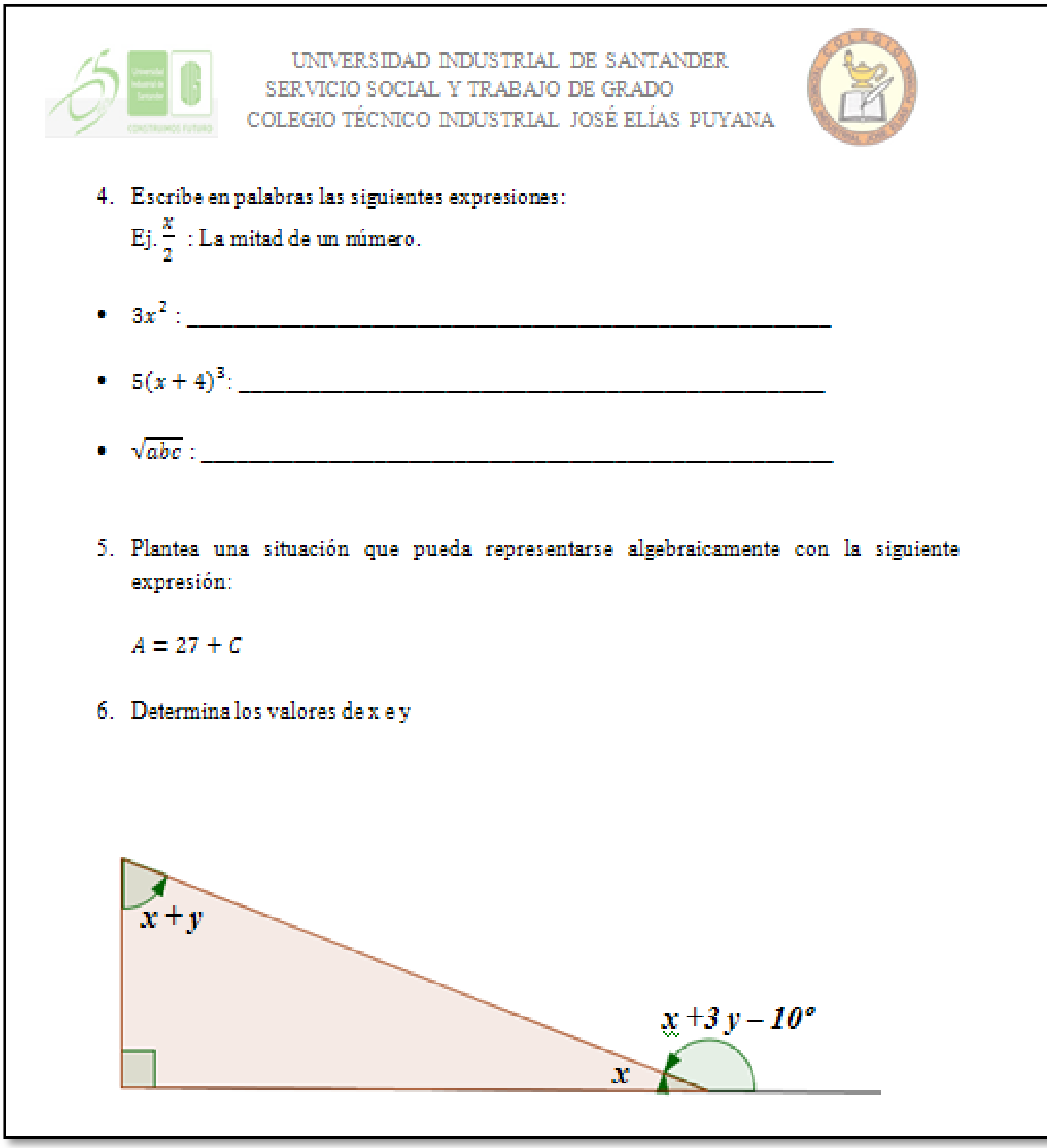
2. Halla el sistema de ecuaciones que representa la siguiente gráfica.



3. Explica con tus palabras cómo resolverías el siguiente problema:

   Don Emilio dejo en su testamento 140 millones de pesos a su esposa María y al hijo que esperaba para que se las repartieran de la siguiente forma: si el bebé era una niña, recibiría el doble de doña María; pero si era un niño, la esposa recibiría el doble que el recién nacido. Pasados unos meses doña María dio a luz unos preciosos mellizos, una niña y un niño. ¿Cómo se repartieron la herencia siguiendo fielmente las instrucciones del difunto Don Emilio?

Figura 9 hoja 2 de la prueba diagnóstica inicial



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

4. Escribe en palabras las siguientes expresiones:

   Ej. $\frac{x}{2}$: La mitad de un número.

- $3x^2$: ____________________
- $5(x+4)^3$: ____________________
- $\sqrt{abc}$: ____________________

5. Plantea una situación que pueda representarse algebraicamente con la siguiente expresión:

   $A = 27 + C$

6. Determina los valores de x e y

En el quinto ejercicio (ver Figura 9) se evaluaba la habilidad para explicar al plantear situaciones a partir de un sistema de ecuaciones dado. Aquí en este ejercicio, los estudiantes podrían plantear diferentes tipos de problemas para los cuales se cumpliera la ecuación planteada.

> *En este ejercicio se esperaba respuestas donde los estudiantes podrían demostrar su falta de comprensión al enunciado, como por ejemplo*

darles valores a las variables para que se cumpla la igualdad o realizar operaciones algebraicas para despejar la otra letra, es decir, en este caso despejar la letra C.

En el último inciso (ver Figura 9) se evaluaba la habilidad de justificar al resolver problemas relacionados con el sistema de ecuaciones y los contenidos geométricos. Para poder determinar los valores de x e y, el estudiante debería aplicar conocimientos sobre contenidos geométricos como la suma de los ángulos internos y ángulos suplementarios. Así podría plantear dos ecuaciones con dos incógnitas y poder desarrollar el sistema.

En este ejercicio se esperaba que los estudiantes dieran respuestas como: Que la suma de los ángulos internos del triángulo sea igual a 360 grados y realicen el sistema con este error, o el estudiante sabe que $x + x + 3y - 10 = 180$ *y despeja la x, obteniendo* $x = \frac{190-3y}{2}$ *luego, al no saber que más hacer, igual a* $\frac{190-3y}{2} = x + y$.

La prueba se aplicó a 42 estudiantes del curso 11-1 quienes se encontraban en clase de matemáticas con el profesor titular de la materia. El trabajo realizado durante esta prueba fue individual con una duración de aproximadamente hora y media.

En los siguientes apartados presentamos las actividades diseñadas para trabajar el desarrollo de competencias comunicativas, específicamente, la interpretativa y la explicativa. Todas las experiencias didácticas que diseñamos constaron de tres partes: **Motivación, desarrollo y finalización.**

2.7 SESIÓN 1. JUEGO GYMKHANA MATEMÁTICA

El primer taller (ver Figura 10) se elaboró para trabajar alrededor de la habilidad interpretativa. El juego consiste una competencia entre parejas en la que se les daría una tabla con enunciados a los estudiantes y debían primero traducirlos a su expresión simbólica, simplificando al máximo las expresiones. Cuando la tabla se encuentra llena se inicia la competencia que consiste en una serie de preguntas referentes a la solución de ecuaciones con las expresiones de la tabla. Ganaría la persona que respondiera más preguntas de forma correcta. Con la elaboración de este taller buscábamos que los estudiantes se divirtieran y no se sintieran presionados sino motivados, para que a través del juego fortalecieran la habilidad para interpretar en la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico y para que siguieran participando de estas experiencias, ya que la primera impresión es la que cuenta.

El objetivo que planteado para esta actividad es que **el estudiante interpretara y transformara el enunciado en una expresión algebraica**. Para lograr esto, **él debería identificar la incógnita y utilizar los diferentes métodos de resolución de ecuaciones para poder dar solución a los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.**

En esta sesión el mismo juego planteado hacía parte de la actividad de motivación, el desarrollo estaba en llenar la tabla con los enunciados y como actividad de finalización, la competencia realizada primero entre parejas y luego con todos los estudiantes.

Los estudiantes podrían presentar varios errores al buscar la expresión correspondiente a los enunciados (ver Figura 10), entre ellas, las que mencionamos a continuación: principalmente por la baja interpretación de enunciados.

- *Cada una de los nombres de las personas corresponde a la expresión relacionada con el puntaje de cada una de ellas. Los estudiantes podrían no tener en cuenta que el enunciado siguiente se relaciona con el anterior y tener gran cantidad de incógnitas como nombres, cuando en toda la tabla solo se trabajarían dos (x e y). posiblemente habrán estudiantes que confunden el doble de un número con el cuadrado de un número.*
- *Para el enunciado 3 (A Pablo le faltaban 500 puntos para tener el puntaje de Isabel), el estudiante posiblemente al ver la palabra "faltaba" lo relacionaría con resta pero podría realizar mal la*

operación al restarle a Pablo para obtener lo de Isabel y no al restárselo a Isabel, que es lo correcto.

- *Para el enunciado 5 (Lo de Pilar más cinco veces lo de Sergio es diez veces lo de Ana) seguramente los estudiantes podrían decir que los puntos de Pilar son 10 veces los puntos de Ana más cinco veces lo de Sergio (*$10A + 5S$*) con A: Ana y S: Sergio.*
- *En enunciados como: Los puntos de Raquel con los puntos de Rafael dan los puntos de Pablo (preguntando por los puntos de Raquel), juntas Teresa y Patricia suman ocho veces lo de Martha (puntaje de Teresa) y el puntaje de Pedro menos el puntaje de Martha nos da el de Fabián menos 200 puntos (los puntos de Pedro); probablemente habrían estudiantes que tenderían a plantear las expresiones tomando la información que le dan sin analizar si realmente es o no lo que corresponde, es decir, si dice suma ponen suma en la expresión o si dice resta ponen resta sin preguntarse quién es la incógnita y cuál es la expresión que me queda al despejarla*
- *El último enunciado (María obtuvo la cuarta parte de Pedro) posiblemente algunos confundan la cuarta parte con cuatro veces.*

Figura 10 Guía de trabajo de la sesión 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Nombre: ____ Fecha: _____________

Este año, se realizó una Gymkana en el Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana. De la primera fase clasificaron a la segunda fase 15 alumnos: Daniel, Ana, Rafael, Pablo, Sergio, Isabel, Pilar, Martha, Raquel, Patricia, Teresa, Fabián, Luis, Pedro y María. Todos ellos obtuvieron puntuaciones muy buenas en la primera parte, sus profesores de matemáticas registraron sus puntajes tal como aparece en la tabla siguiente.

TABLA CON ENUNCIADOS

ENUNCIADO	EXPRESIÓN	EXPRESIÓN REDUCIDA
Ana tiene *x* puntos		
Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos		
A Pablo le faltaban 500 puntos para tener el puntaje de Isabel.		
Sergio consiguió *y* puntos.		
Lo de Pilar más cinco veces lo de Sergio es diez veces lo de Ana. Pilar tuvo entonces:		
Martha tuvo la quinta parte de lo de Pilar		
A Rafael le faltan 1000 puntos para tener lo de Sergio.		
Los puntos de Raquel con los puntos de Rafael dan los puntos de Pablo. Raquel obtuvo entonces:		
Patricia tiene tres veces lo de Raquel menos 300 puntos.		
Juntas Teresa y Patricia suman ocho veces lo de Martha. Teresa obtuvo:		
Daniel obtuvo cuatro veces lo de Ana más el doble de lo de Sergio.		
Fabián tuvo la mitad de la parte de Daniel más 1000 puntos		
El puntaje de Isabel con el doble de Rafael, es el puntaje de Luis		
El puntaje de Pedro menos el puntaje de Martha nos da el de Fabián menos 200 puntos. Pedro obtuvo		
María obtuvo la cuarta parte de Pedro		

En la realización de esta actividad se inició con la entrega del taller, allí se encontraba la hoja de enunciados (ver Figura 10), se dio una explicación de lo que se debía hacer, lo que generó discusión pues los estudiantes no entendían como hallar las expresiones con las que se llenaba la tabla, a lo que debimos intervenir en los primeros enunciados hasta dejar claro lo que se pretendía realizar, en ese momento cada uno de los estudiantes empezó a realizar el trabajo, algunos lo hicieron de forma individual otros en compañía, pasamos por los puestos verificando que estuviesen trabajando de forma correcta, después de hacer un sondeo de cómo iba cada uno, socializamos las expresiones que habían obtenido en el tablero en donde debían explicar cómo llegaban a dicha respuesta. Cuando se completó la tabla y se verificó la veracidad de las expresiones se formaron parejas para realizar una competencia entre los grupos.

A cada grupo se le entregó unas tarjetas numeradas del 1 al 30 (ver Figura 11), en donde se planteaban preguntas que debían ser resueltas con la tabla de enunciados llenada previamente, nosotros decíamos un número al azar y el grupo debía buscarlo entre sus tarjetas, leer el problema y resolverlo, y la primera pareja que diera la respuesta correcta ganaba un punto.

Figura 11. Tarjetas para la competencia del juego Gymkhana Matemática

1. Si Raquel obtuvo $4x$ puntos y si Rafael ganó 1100 puntos. ¿Cuántos puntos sacó Teresa?	2. Si Daniel y Pablo juntaron $6x+y+300$ puntos. ¿Cuántos puntos ganó Sergio?	3. Si Pilar consiguió $5x-5y+150$ puntos y Sergio obtuvo 120. ¿Cuántos tuvo Patricia?	4. Si Isabel obtuvo la misma puntuación de María más 500 puntos. ¿Cuántos puntos sacó Pedro?	5. Si Pablo y Daniel juntaron ellos dos los puntos de Patricia más 4000 puntos. ¿Cuántos puntos alcanzó Rafael?
6. La puntuación de Pedro menos la de Pablo fue de 1320 puntos. ¿Cuántos tuvo María?	7. Sumando lo de Fabián y lo de Luis obtenemos el puntaje de Daniel más 400 puntos y si Ana ganó 2000 puntos ¿Cuántos sacó Raquel?	8. Lo de Sergio más lo de Martha fueron 5000 puntos. ¿Cuántos ganó Ana?	9. Lo de Pablo menos lo de María fueron 1400 puntos. ¿Cuántos puntos obtuvo Isabel?	10. Si la mitad del puntaje de Daniel es el mismo que el de Luis más 2000 puntos y si Pedro obtuvo 2400 puntos. ¿Cuántos puntos sacó Pilar?
11. Si el puntaje de Ana fue de 1200 puntos. ¿Cuántos obtuvo Pablo?	12. Si Isabel ganó 500 puntos y Rafael obtuvo 6900. ¿Cuántos puntos ganó Fabián?	13. Si Pilar ganó $12000-5y$ Puntos y Pedro 2000. ¿Cuántos obtuvo Martha?	14. Si restamos lo de Fabián y lo de Luis obtenemos 300 puntos y si María ganó 1300 ¿cuántos puntos alcanzó Daniel?	15. El triple de los puntos de Sergio son 1200 y la novena parte de los de Ana son 1000 puntos. ¿Cuántos puntos sacó Luis?
16. El doble de los puntos de Luis son los mismos de Daniel. ¿Cuántos alcanzó Rafael?	17. Raquel obtuvo $1800-y$ puntos. ¿Cuántos sacó Isabel?	18. Si restamos los puntos de Daniel y Pedro obtenemos 3200 puntos. ¿Cuántos obtuvo Sergio?	19. Si restamos el puntaje de Daniel y el de Luis obtenemos 2500 puntos. ¿Cuántos puntos ganó María?	20. Si Pedro obtuvo $6x$ puntos. ¿Cuántos alcanzó Ana?
21. Si Rafael hubiese sacado 100 puntos más obtendría 7520 y si Teresa sacó $5100-5y$ puntos. ¿Cuántos puntos ganó Fabián?	22. La quinta parte de los puntos de Pilar más la mitad de los de Daniel eran 20000 puntos. ¿Cuántos puntos obtuvo Pablo?	23. Si el triple de los puntos de Pablo son los mismos puntos de Pedro y si Sergio ganó 150 puntos. ¿Cuántos puntos sacó Teresa?	24. Diez veces los puntos de Pablo son 10000. ¿Cuántos ganó Pedro?	25. Si Sergio obtuvo lo mismo que Martha que fueron 2500 puntos. ¿Cuántos Puntos obtuvo Patricia?
26. Tres veces lo de Rafael más lo de Patricia son 6900 puntos. Además, Raquel obtuvo $2x-1750$. ¿Cuánto obtuvo Pilar?	27. La mitad de Ana son 1500 y la mitad de Sergio son 2000. ¿Cuántos puntos tuvo Luis?	28. El puntaje de Daniel menos el de Luis son 10900 puntos y si Sergio ganó 5000. ¿Cuántos puntos ganó Martha?	29. La mitad del puntaje de Luis es el de María y el triple del puntaje de Pedro son 8400 puntos. ¿Cuántos alcanzó Raquel?	30. Si Isabel ganó 5900 puntos y Rafael tuvo 900. ¿Cuántos obtuvo Daniel?

2.8 SESIÓN 2. ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN PARA TRABAJAR LAS REPRESENTACIONES

Para la segunda sesión se planeó un taller en el que los estudiantes comunicarían los procedimientos que iban a realizar, esto, con el fin de fortalecer la habilidad para justificar. El objetivo de esta actividad era **lograr que los estudiantes comunicaran las matemáticas a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. Que el estudiante pudiera expresar sus ideas a sus compañeros dándose a entender y entendiendo lo que sus compañeros dicen.**

Como actividad de motivación planteamos dos juegos: uno, el juego del "teléfono roto" en el que se le daban a cada grupo de estudiantes (dos filas) una tarjeta que contenía expresiones algebraicas ver (Figura 12). El primer estudiante recibiría la tarjeta, leería la expresión y esa la comunicaría al siguiente estudiante (sin mostrarle la tarjeta) y el siguiente al siguiente, hasta terminar los estudiantes. El último estudiante escribiría la expresión escuchada y la mostraría a los compañeros. Habría buena comunicación si la primera y la última tarjeta tuvieran la misma expresión.

En este ejercicio no solamente los estudiantes escuchaban sino debían escribir lo escuchado y transmitirlo.

Las tarjetas de la actividad fueron:

Figura 12. Tarjetas con las expresiones algebraicas de la actividad de motivación

$\boxed{10(x+4)}$ $\boxed{5(y-1)^3}$ $\boxed{x^2+2x}$ $\boxed{\frac{x^2}{2}}$ $\boxed{x(\frac{y}{2})}$ $\boxed{a^2+\frac{y}{2}}$

En este ejercicio se esperaría que los estudiantes comunicaran las expresiones de la siguiente manera obteniendo expresiones diferentes a las de las tarjetas:

- *Diez veces equis más cuatro, interpretándose por* $(10x+4)$
- *La suma de un número y cuatro multiplicado por 10, lo que puede causar una mala interpretación en el que escucha ya que el estudiante podría escribir* $(x+4(10))$
- *Cinco veces el cubo de y menos uno, pensándose como* $(5y^3-1)$.
- *La diferencia entre y e 1 elevado al cubo multiplicado por 5,expresándolo así, alguno podría pensar en* $(y-1)^{(3)(5)}$
- *El cuadrado de un número más el doble de un número, interpretado por* x^2+2y
- *Equis elevada al cuadrado más dos por equis.*
- *El doble de un número dividido en dos. Confundiendo el doble de un número con el cuadrado de un número.*
- *Un número multiplicado por otro número dividido en dos, pensando en* $\frac{x.y}{2}$

El otro juego planeado se trataba en armar parejas de estudiantes, en los que a uno de ellos se les entregaría una situación (un problema de sistemas de ecuaciones) (ver Figura 13) que se trabajó "supuestamente" en clase de matemáticas y se la debía contar (no leerla) a su compañero que no fue a la clase. Cuando el estudiante la escucha, la interpreta y la entiende, él debía contarla al resto de estudiantes.

En este ejercicio los estudiantes se expresarían verbalmente, dándose a entender y entendiendo a los demás.

Las situaciones que se presentarían a las parejas serían las siguientes:

Figura 13. Tarjetas con problemas para la segunda actividad de motivación

Beatriz es una feliz madre de cuatro hermosas niñas. La mayor tiene cuatro años más que la segunda, que es a su vez cuatro años mayor que la tercera, la cual es cuatro veces mayor que la pequeña. Esta última tiene la mitad de años que la hija mayor de edad. ¿Ya sabes los años

Ismael es un niño muy curioso y siempre anda haciendo preguntas. Un día le pregunta a su abuela: "Abuelita, y tu ¿cuántos años tienes?" A lo que ella responde: si restas 8 de mi edad, los ¾ del resto hacen 60.

Don Buñuelo y doña croqueta se encuentran después de varios años sin verse. En este tiempo, don Buñuelo se ha casado y tiene tres hijas.

- ¿Cuántos años ya tienen sus hijas?- pregunta doña Croqueta..

-Te diré que el producto de las edades de mis hijas es igual a 36.- contesta don Buñuelo.

-¿y cuál es la suma? – pregunta doña Croqueta.

-El número del portal de la casa de enfrente.

-Así y todo, aún me falta un dato.

- Mi hija mayor toca el piano.

- ¡Ahora sí! ¡Ya sé qué edades tienen tus hijas!

¿Y tú? ¿Sabes qué edades tienen las hijas de don Buñuelo?

Para esta segunda parte de la etapa de motivación se podría encontrar estudiantes interesados por aprenderse de memoria el problema para transmitirlo tal cual pero sin entenderlo, otros, enfocándose en detalles insignificantes y no en la verdadera esencia del problema y quizás habrán otros estudiantes que realmente se interesan por comprender lo que dice la situación y procuraran darle respuesta.

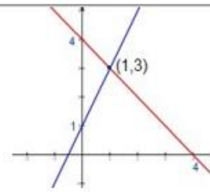
Para la actividad de desarrollo se planeó la siguiente guía (ver Figura 14) que consiste en una tabla con distintas expresiones como la algebraica, verbal y gráfica, en la que los estudiantes debían realizar las trasformaciones apropiadas y justificar su respuesta. Con esta actividad buscábamos reforzar el aspecto que se trabajaría en la primera sesión y se observaría las habilidades de los estudiantes para transformar las expresiones gráficas; ya que estas no han sido fortalecidas.

Figura 14 Guía de trabajo de la sesión 2

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Nombre: ____ Fecha: ______________

Completa de manera individual la siguiente tabla atendiendo las indicaciones del profesor.

Expresión Algebraica	Expresión Gráfica	Expresión Verbal	Justifique su Respuesta
$(x-2)^2+y^2=9$			
			
		¿Qué número soy? Soy un número de tres cifras. La suma de las tres cifras da 18. La primera cifra es la mitad de la segunda y un tercio de la tercera. ¿Sabes qué número soy?	

Se esperaría en los estudiantes al llenar la tabla lo siguiente:

- *Para la expresión algebraica del primer cuadro (ver Figura 14), algunos estudiantes podrían no reconocer la expresión como la ecuación de un círculo y no saberla graficar. Además habrán otros que dirán en la expresión verbal de esa expresión algebraica que es el cuadrado de la diferencia entre x e 2 sumado con el cuadrado de otro número igual a nueve. Cuando lo que el ejercicio buscaba en la expresión verbal era que se le escribiera lo que dice la expresión gráfica, es decir, que es una circunferencia que está corrida dos lugares a la derecha y es de radio igual a 3.*
- *Para la expresión gráfica del segundo cuadro (ver Figura 14) se esperaba que algunos estudiantes hallaran las ecuaciones de las dos rectas y expresaran que se trataba de dos rectas que se intersecaban en el punto (1,3). Pero también habrían estudiantes que reconocerían la ecuación de la recta e identificarían a b como el corte en el eje y pero quizás no sabrían la pendiente o viceversa.*

También posiblemente nos encontraríamos con estudiantes que diera de respuesta el punto de intersección (1,3).

- *Para la expresión verbal del último cuadro (ver Figura 14), se debía realizar una correcta interpretación al enunciado para poder solucionarlo. Se esperaba que algunos estudiantes realizaran un dibujo representativo de la situación aunque no hubiera expresión gráfica. Para la expresión algebraica encontraríamos respuestas como que la primera cifra es la mitad de la segunda y la segunda es un tercio de la tercera (mala comprensión de lectura) de lo que no se obtendría una respuesta correcta.*

Como actividad de finalización se preparó una discusión entre parejas comparando las respuestas de la tabla con las de su compañero y llenando una nueva tabla con la solución acordada entre los dos, es decir, después de la discusión a conciencia, escogerían la respuesta que ellos creerían la correcta y justificarían el por qué. Al final de la clase, socializaríamos entre todos la actividad.

En esta etapa de finalización, se esperaba que los estudiantes al socializar entre ellos sus respuestas, se dieran cuenta de los errores cometidos por ellos y no los volvieran a cometer.

El desarrollo de esta actividad lo iniciamos con una de las actividades de motivación como se había planeado, jugamos al teléfono roto con expresiones algebraicas (ver Figura 12), se explicó en qué consistía en juego y se dio inicio con la organización de los grupos.

Terminada la actividad de motivación se repartieron las guías del taller (ver Figura 14) y se explicó lo que debía hacer, se dio la indicación de que se realizara un trabajo individual, pasados 20 minutos se cambió la metodología pensada puesto que se presentaron inconvenientes para completar la tabla presentada, se procedió a completar la tabla con ayuda de todo el grupo. Para la solución de los problemas pasaron dos estudiantes al tablero a realizarlos, posibilitando de esta manera que todos llenaran la tabla.

Finalmente se formaron parejas y a uno de los integrantes de cada pareja se le entregó una tarjeta (ver Figura 13) que contenía un problema, él lo leía y le contaba a su compañero lo que entendió del problema, y éste pasaba al frente del salón y le describía al resto de sus compañeros lo que su pareja le había explicado. Por último nosotras leíamos las tarjetas y los estudiantes juzgaban si se había hecho una correcta interpretación del enunciado.

2.9 SESIÓN 3. GRÁFICAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

En esta sesión se preparó un taller (ver Figura 15 y Figura 16) elaborado en Geogebra sobre las gráficas y las expresiones algebraicas para fortalecer la habilidad para interpretar cuando los estudiantes debieran traducir de la expresión gráfica a la algebraica. Su objetivo era **que los estudiantes pudieran visualizar y reconocieran a través de Geogebra los elementos principales que componen la ecuación de la recta como la pendiente y el corte con el eje Y. De igual manera, que ellos consiguieran la relación existente entre dos rectas con pendientes iguales, con pendientes diferentes pero eje de corte en Y iguales, entre otras.**

> *En la **fase exploratoria** de la guía (ver Figura 15) se esperaba que los estudiantes pudieran reconocer a m como la pendiente y lo que esta significa: el grado de inclinación de una recta y a b como el corte en el eje Y, es decir, que se dieran cuenta que b es el valor de Y cuando x vale cero. Sin embargo, habría estudiantes que al realizar la exploración en Geogebra dijeran que b es el corte en el eje X.*
>
> *Para la **fase dirigida** (ver Figura 16) se esperaba que los estudiantes descubrieran lo que sucedería a dos rectas con pendientes diferentes, en este caso, las rectas se intersecaban en un punto y esa sería la única solución al sistema de ecuaciones resultante. También lo que le sucedería a dos rectas con pendientes iguales pero cortes en el eje Y diferentes (son rectas paralelas y el sistema de ecuaciones no tendría solución por cuanto no hay punto de intersección) y lo que sucedería a dos rectas con pendientes iguales y cortes en el eje Y iguales (en este*

caso el sistema de ecuaciones tendría infinitas soluciones al ser la misma recta, ya que infinitos puntos pertenecen a ambas).

En la ***tercera fase*** *(ver Figura 15) se esperaba que a partir de una gráfica que representaría una recta realizada por ellos, el estudiante pudiera determinar la ecuación de la recta.*

Para muchos estudiantes les sería difícil ver con facilidad lo dicho anteriormente aunque la ayuda de Geogebra les permitiera visualizar más rápido las cosas. Por tanto, se planeó que esta fase fuera dirigida por el docente para irlos guiando al objetivo.

Para la actividad de finalización se propuso el último ejercicio de esta guía que consistía en relacionar una ecuación con su respectiva gráfica, en la que los estudiantes demostrarían lo aprendido y lo significativo del taller con el software. Buscábamos que los estudiantes aplicaran lo comprendido en cada una de las fases de la actividad y resolvieran correctamente el ejercicio.

Como ejercicio final (ver Figura 16) se le daría la ecuación de una recta, a la que se esperaba que los estudiantes le identificaran todas las características y elementos de esa ecuación y escogieran la gráfica correspondiente a esa ecuación.

Figura 15 Hoja 1 de la guía de trabajo de la sesión 3

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

NOMBRE: ______________________________ FECHA: ____________

GRAFICAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Actividad con el uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas.

- Abre el archivo ACTIVIDAD 3.ggb y responde las siguientes preguntas.

Fase exploratoria

1. Mueve el deslizador $\mathbf{m_1}$, ¿Qué sucede con la recta?
2. Que representa $\mathbf{m_1}$ en la recta azul
3. Mueve el deslizador b_1 ¿Qué sucede con la recta?
4. Que representa b_1 en la recta azul
5. Mueve el deslizador $\mathbf{m_2}$, ¿Qué sucede con la recta?
6. Que representa $\mathbf{m_2}$ en la recta verde
7. Mueve el deslizador b_2 ¿Qué sucede con la recta?
8. Que representa b_2 en la recta verde

Fase dirigida

Recuerda que la ecuación de la recta es $y=mx + b$

- Abre el archivo ACTIVDAD 3.ggb y sigue las indicaciones del docente para responder las siguientes preguntas.

9. ¿Qué valor tiene m_1, es decir la pendiente de la recta azul?
10. ¿Qué valor tiene b_1? ¿cómo lo determinaste?
11. Determina la ecuación de la recta azul
12. ¿Qué valor tiene m_2, es decir la pendiente de la recta verde?
13. ¿Qué valor tiene b_2? ¿cómo lo determinaste?
14. Determina la ecuación de la recta verde.

Ubícate en el deslizador m_1 y en propiedades del objeto, en la opción muestra rotulo, elige nombre y valor, haz lo mismo para los deslizadores m_2, b_1 y b_2, sigue las indicaciones del docente y responde las siguientes preguntas.

15. ¿Qué sucede cuando m_1 y m_2 tienen diferente valor? ¿Qué sucede con el sistema de ecuaciones resultante?
16. ¿Qué representa el punto A, con respecto al sistema de ecuaciones?
17. ¿Qué sucede cuando m_1 y m_2 son iguales pero b_1 y b_2 son diferentes? ¿Qué sucede con el sistema de ecuaciones resultante?
18. ¿Qué sucede cuando $m_1 - m_2$ y $b_1 = b_2$? ¿Qué sucede con el sistema de ecuaciones resultante?

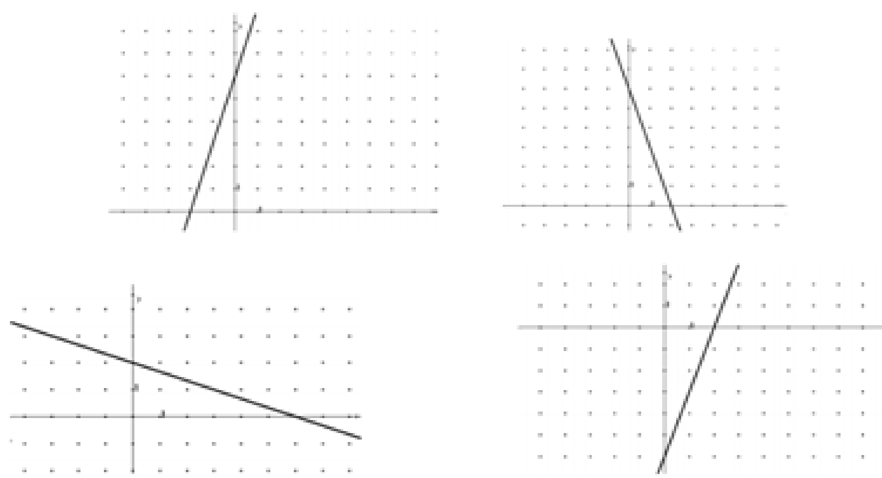
Figura 16 Hoja 2 de la guía de trabajo de la sesión 3

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

- Abre un archivo nuevo en Geogebra.

19. Dibuja el punto (2,3)
20. Dibuja una recta que pase por ese punto y tenga pendiente igual a 3.
21. Determina otro punto que contenga la recta
22. ¿Cuál es la ecuación de la recta?
23. En entrada, ingresa la ecuación que acabas de determinar. ¿Qué observas?

- Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = -3x + 6$



Nota: La distancia entre dos puntos consecutivos es una unidad.

La implementación de esta actividad se inició dando la indicación de abrir el archivo ACTIVIDAD 3.ggb en el software Geogebra y se les entregó la guía del taller (ver Figura 15 y Figura 16), y se empezó a trabajar la primera parte del taller, como era una fase exploratoria cada uno debía responder 8 preguntas que se planteaban, después de un tiempo prudente se socializó las respuestas dadas a cada una de ellas, se presentaron dificultades en la comprensión de lo que representaba “m” y “b” en las diferentes representaciones de la recta, tanto en la representación gráfica como en la expresión algebraica, se hicieron preguntas que permitieron que los estudiantes se apropiaran de estos objetos matemático, posteriormente se inició con la fase dirigida se trabajó una a una las indicaciones y preguntas que se presentaban en el taller, al igual que en la fase anterior se tuvo que realizar preguntas que permitieron la comprensión de lo que estaban visualizando los estudiantes en la construcción que se les presentó.

Finalmente después de realizar esta primera hoja que conformaba el taller (ver Figura 15) se prosiguió con la segunda hoja (ver Figura 16), debido a que se había hecho un buen trabajo y los estudiantes estuvieron activos en el desarrollo de la parte inicial, responder el último enunciado no fue de mayor dificultad para la mayoría de los participantes.

2.10 SESIÓN 4. EL CRUCERO

En esta sesión se presentaron unas actividades en las que pretendíamos que los estudiantes explicaran los procesos que realizaban al solucionar un problema con el fin de fortalecer la habilidad para explicar. El objetivo consistía en (que a través de un ejemplo: la carta), **lograr que los estudiantes pudieran expresarse por escrito mediante la realización de una carta en la que debían explicar un tema, donde lo significativo era que tanto el lector como el escritor se entendieran. Además, fundamentar al estudiante en la importancia de los argumentos a la hora de escoger la respuesta correcta.**

Como actividad de motivación se leería una carta escrita por una niña de 10 años, quien presenta el tema de proporciones de una manera muy creativa, este texto se retomó de Parada (2005) puesto que esta autora expresa que “producir un texto” quiere decir, de manera explícita y general, incentivar, desarrollar y ejercitar en el educando la capacidad de explicar y manifestar, mediante una información escrita u oral organizada, un concepto trabajado al interior del aula. Ellos escucharían la carta (ver Figura 17) y realizarían una con el mismo tema siguiendo como ejemplo la leída.

Figura 17. Carta leida en la actividad de motivación de la sesión 4

Bucaramanga, septiembre 20 de 2004

Querido Sinforoso de las Nieves de la Santísima Trinidad Mora Rico

Después de saludarlo, quiero explicarle que en matemáticas existe la **razón**, que es una comparación de igualdad entre dos números; es decir, algo parecido a lo que usted hace cuando piensa: Carmen es **tan** linda como Pepa, o cuando su mamá dice: mi vecina Elogia tiene el jardín **tan** bonito como el mío, o cuando mi tío piensa quisiera tener **tantas** fincas como Pedro.

Como te darás cuenta en la vida diera utilizamos razones. Es más, hasta las empleadas que no han tenido oportunidad de ir a la escuela son las que más utilizan razones ya que conocen de recetas y tienen las medidas exactas para cada cosa, así por ejemplo, para preparar arequipe utilizan que por cada dos pocillos de leche agregó un pocillo de azúcar, o para preparar arroz, que utilizan por cada pocillo de arroz dos de agua.

Si quisieras hacer uso de las razones para preparar arequipe lo expresarías así: 2 tazas de azúcar por 3 litros de leche: 2/3 para dos invitados. Pero si tenías preparado todo para 2 invitados y te llegan el doble, deberás adicionar 4 tazas de azúcar por 6 de leche, así: 4/6. Y si llegan otros dos invitados, deberás agregar 8 tazas de azúcar por 12 litros de leche, así: 8/12.

El sabor del arequipe no cambia porque 2/3=4/6=8/12 dependiendo del número de invitados. Si algún día te llegan 14 invitados tendrías que sumar todas las tazas de azúcar y todas las tazas de leche para formar un gran arequipe así:

2+4+8=14 (tazas de azúcar) y 3+6+9=21 (tazas de leche)

Te insisto que siempre es igual la proporción entre el azúcar y la leche, o sea que 14 tazas de azúcar por cada 21 tazas de leches, 14/21, que es igual a 2 tazas de azúcar por 3 de leche 2/3. Entonces 14/21=2/3

Espero me hayas entendido que es la razón y lo importante que es aplicarla en nuestra vida diaria.

Atentamente,

Alejandra del Pilar

Para la realización de este ejercicio se esperaba que los estudiantes redactaran una corta historia en la que dieran a entender el tema de proporciones (tema de la carta de ejemplo) a los demás compañeros haciendo uso de su creatividad. Sin embargo, como son jóvenes con edades que oscilan entre los 15 y los 17 años, se esperaba que ellos no realizaran el protocolo de una carta sino que escribieran lo que entendieran por el tema.

Como actividad de desarrollo se planteó un problema con dos soluciones (ver Figura 18) una correcta y una incorrecta, en la que el estudiante debía escoger cual era para él la respuesta correcta sustentando con argumentaciones válidas.

Para la actividad de desarrollo, los estudiantes evaluarían de acuerdo a sus conocimientos las dos soluciones dadas por Andrés y Juan, en las que sólo una es la solución correcta.

> *Se esperaba que el estudiante indicara como solución errónea la de Andrés, ya que no se planteaban ecuaciones sino expresiones algebraicas y por ende, no podrían hallar cada una de las incógnitas. Aunque podríamos esperar de algunos estudiantes que escogieran esta solución porque al leer el ejercicio pareciere que las expresiones estuvieran planteadas tal cual lo dice el enunciado, es decir, que si dice: La segunda embarcación invierte dos veces más tiempo que la primera (y la segunda embarcación es llamada B entonces la ecuación sería* $B+2A$ *con A como primera embarcación). Como había un dos, una suma, una primera y una segunda embarcación, entonces para ellos esta expresión sería la correcta sin darle la verdadera interpretación a la frase. En general, se esperaba que los estudiantes trataran de dar los mejores argumentos para convencer a los demás que la solución que ellos escogerían fuera la correcta.*

Figura 18 Guía de trabajo de la sesión 4

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

NOMBRE: ________________________________ FECHA: ____________

Juan y Andrés han dado solución al siguiente enunciado, ¿Cuál de las dos soluciones se encuentra bien?

EL CRUCERO

Tres embarcaciones realizan un crucero. La segunda embarcación invierte dos veces más tiempo que la primera, pero dos veces menos que la tercera. Y la tercera invierte 30 días más que la primera. ¿Cuánto tiempo invierte cada embarcación en hacer el crucero?

Solución Juan

Embarcación 1: t_1
Embarcación 2: t_2
Embarcación 3: t_3

$$t_2 = 2t_1$$
$$t_2 = \frac{t_1}{2}$$
$$t_3 = t_1 + 30$$

Luego,

$$\frac{3}{2}t_1 = 15$$
$$3t_1 = 30$$
$$t_1 = 10$$

Por consiguiente

$$t_1 = 10$$
$$t_2 = 20$$
$$t_3 = 40$$

Solución Andrés

Embarcación 1: A
Embarcación 2: B
Embarcación 3: C

$$B + 2A \qquad (1)$$
$$B - 2C \qquad (2)$$
$$C = A + 30 \qquad (3)$$

Luego,

$$B + 2C$$
$$B - 2(A + 30)$$
$$B - 2A + 60$$

Por eliminación entre (1) y (2) se obtiene que $B = 30$

Por consiguiente reemplazando B en las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$A = 15$$
$$B = 30$$
$$C = 45$$

Esta sesión la iniciamos plantando algunos problemas lógicos como actividad de motivación, en los que requerían interpretar y utilizar de la mejor manera la información que se les estaba dando para poder dar respuesta al enunciado planteado.

Luego de terminar la actividad de motivación leímos una carta muy creativa que le escribía una niña a su primo para explicarle el tema de razones (ver Figura 17), finalizada la lectura les planteamos a los estudiantes escribir a alguno de sus compañeros una carta donde les explicaran que era una razón, cada uno se puso a realizar la tarea indica mientras tanto íbamos realizando un sondeo de cómo iban con la escritura, cuando terminaron de realizar la carta, pasamos a cada uno de ellos a que la leyeran, y la compartiera con sus compañeros, algunos fueron claros en lo que querían expresar y otros presentaron dificultades pero finalmente realizaron la actividad de la mejor manera.

Posterior a las lecturas de las cartas se entregó la guía del taller (ver Figura 18), se dieron las explicaciones pertinentes para el desarrollo de la actividad y se indicó que realizaran el trabajo de forma individual, pasamos por los puestos verificando que hubiesen entendido lo que debían hacer, en este recorrido ellos nos justificaban las respuesta que estaban escogiendo como correcta, finalmente se realizó una encuesta de cual creían que era la respuesta correcta, 6 de los ocho estudiantes concordaron con una respuesta y dos con otra, tres estudiantes pasaron a explicar su razonamiento

.

2.11 SESIÓN 5. ACTIVIDAD DE PRODUCCIÓN DE TEXTOS: CARTA

Se preparó para esta sesión, una actividad diferente que se complementaría con la sesión anterior en la que los estudiantes a través de su creatividad fortalecerían la habilidad para explicar al tener que plantear situaciones a partir de un sistema de ecuaciones dado. El objetivo era **que los estudiantes pudieran construir nuevos problemas a partir de sus conocimientos, evaluaran sus ideas, formulándose preguntas y que produjeran argumentos válidos para la solución del problema.**

La actividad que se realizó en esta sesión consistía en que los estudiantes escribirían una carta dirigida a uno de sus compañeros donde les explicarían un problema inventado por ellos referente a sistemas de ecuaciones y la solución que le darían a dicho problema. Cuando todos hubieran terminado sus cartas, se las enviarían unos a otro y cada uno analizaría el contenido de esa carta (el problema y la solución), para luego compartirlas con todos.

> *Con la experiencia de su primera carta, se esperaba que los estudiantes en esta actividad procuraran escribir con más facilidad, se expresaran con más libertad, y en la que posiblemente inventaran un problema muy parecido a los trabajados en clase y trataran de darle solución.*

El desarrollo de esta actividad se inició recordando que se había dejado una tarea, cada uno de los asistentes debía traer una carta escrita para algún compañero en la que debían inventarse un problema que se resolviera con un sistema de ecuaciones, ninguno de los estudiantes llegó con la carta así que el trabajo se realizó fue la elaboración de ésta, se les explicó inicialmente en qué consistía la actividad para que no quedara duda de lo que se debía plantear. Se dio un tiempo prudente para que inventaran y escribieran la situación y cuando todos la tenían lista pasaron a leerla, como en la carta debían además de plantear la situación darle solución, los mismos estudiantes eran los encargados de refutar o afirmar si la solución que su compañero estaba dando era la correcta. Finalmente se socializó la actividad y los estudiantes llegaron a la conclusión que antes de pensar en la situación que querían plantear, debían tener presente el sistema de ecuaciones al que quería dar solución puesto que si no lo hacían probablemente su situación no se iba poder resolver.

2.12 SESIÓN 6. APRENDIENDO A CONJETURAR

Uno de los aspectos que posiblemente causaría dificultad en los estudiantes, sería él trabajado en esta sexta sesión, en la que ellos formularían y propondrían conjeturas a partir de un sistema de ecuaciones para fortalecer la habilidad para producir textos, con el objetivo de **Incentivar a los estudiantes a que formularan conjeturas a partir de pequeños grados de generalidad, desarrollando en ellos la capacidad de hacer observaciones, evaluar ideas y construir nuevas representaciones.**

Como actividad de motivación se planteó el juego de las ranas (ver Figura 19), con el que buscábamos que a través de la experimentación, los estudiantes encontraran una generalidad. Primero se iniciaría con dos ranas a cada lado, luego con tres y así sucesivamente, hasta que ellos encontraran un patrón.

> *Se esperaba en la realización del juego de las ranas que a través de la experimentación los estudiantes comprendieran el "truco" para lograr el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas con dos ranas a cada lado, pero también con tres, cuatro y n ranas.*

Como actividad de desarrollo, se propuso el segundo ejercicio (ver Figura 19), en el que ellos debían darle valores a las letras para que el sistema de ecuaciones dado cumpliera las condiciones requeridas. Con este ejercicio buscábamos reforzar lo trabajado en la sesión número 3.

Para el sistema de ecuaciones (ver Figura 19 Guía de trabajo de la sesión 6) en los que los estudiantes debían buscar la k y la s para que obedeciera unas condiciones

Figura 19 Guía de trabajo de la sesión 6

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

NOMBRE: ______________________________ FECHA: ____________

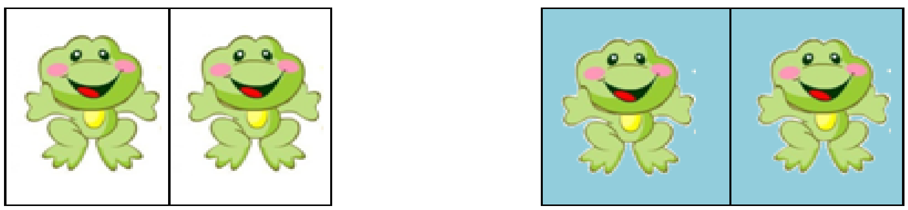
APRENDIENDO A CONJETURAR

Juego:

El objetivo del juego, con el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas.

Enunciado:

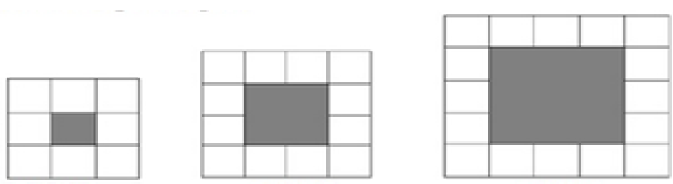
Se necesita un cierto número de fichas de dos colores, blancas y azules. Se colocan las fichas blancas a la izquierda de un espacio libre y a la derecha las fichas azules.



1. En el sistema $\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + ky &= s \end{aligned}$

   - ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema no tenga solución?
   - ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema tenga infinitas soluciones?
   - ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema tenga una solución?

2. Observa las siguientes figuras: ¿cuántos cuadrados hay en la posición 100? ¿cómo llegaste a la solución?



Posición 1. Posición 2. Posición 3.

Se esperaba que los estudiantes recordaran lo aprendido en la sesión 3 sobre los sistemas de ecuaciones: cuando hay infinitas soluciones, una única solución o no hay solución; ya que esto sería indispensable para poder conjeturar los posibles valores de k y s.

Como actividad de finalización (ver Figura 19), se presentó un ejercicio más sencillo en el que los estudiantes complementarían la idea principal del taller y lo socializaríamos entre todos.

> *Para el último ejercicio planteado en esta actividad, se esperaba que los estudiantes analizaran cada uno de las posiciones dadas encontrando en ellas un patrón, para poder responder a la pregunta: ¿cuántos cuadrados hay en la posición 100? Quizás habría estudiantes que intentaran hallar más posiciones porque a lo mejor observarían el patrón pero no sabrían cómo expresarlo matemáticamente.*

En la implementación de esta actividad se inició con el juego planeado (ver Figura 19), empezamos explicando en qué consistía el juego. Repartimos dos ranitas de cada color a cada estudiantes y les pedimos que encontraran en cuantos saltos las ranas habían intercambiado de lugar, les tomó tiempo realizar la actividad ya que se estaban entendiendo las reglas del juego y buscando estrategias de cómo podían hacerlo. Cuando todos lograron intercambiar el par de ranas, les entregamos 1 de cada color más para que ahora lo hicieran con tres ranitas (de cada color), luego le dimos otra de cada color para terminar haciéndolo con 4 ranas.

Enseguida tomamos nota de los saltos obtenidos en cada parte del juego y empezamos a preguntarles que como haríamos para saber cuántos saltos harían ***n*** ranas para intercambiarse de lugar, los estudiantes daban ideas, hasta que una de ellos se fijó en un dato que era clave y a partir de ahí entre todos sacaran una ecuación general para determinar cuántos saltos deben hacer ***n*** ranas.

Posteriormente se realizó el segundo punto del taller (ver Figura 19), en el desarrollo de éste recordamos los visto en la SESIÓN 3. GRÁFICAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS. Con respecto a cómo deben ser las pendientes del sistema de ecuaciones para que tenga solución, tenga infinitas soluciones y no tenga solución, de esta manera ellos hallaron los valores para k y s en cada una de las situaciones, para finalizar se dejó de tarea el último punto para que los estudiantes hicieran el ejercicio de conjeturar en su casa.

2.13 SESIÓN 7. CONEXIONES MATEMÁTICAS

En esta sesión quisimos **concientizar a los alumnos sobre las conexiones matemáticas. Que reconocieran y usaran las conexiones entre ideas matemáticas para que su comprensión fuera más profunda y duradera**. Para esto, se realizó un trabajo con la relación del sistema de ecuaciones y contenidos geométricos para profundizar la habilidad de justificar.

En este taller (ver Figura 20 y Figura 21) se observaría las conexiones matemáticas entre temas matemáticos como lo es la relación entre los sistemas de ecuaciones y los contenidos geométricos.

Como actividad de motivación se presentó un ejercicio de ubicación en el plano (ver Figura 20) en el que al unir los puntos se formaría una figura geométrica.

> *Para la realización del segundo ejercicio se esperaba que el estudiante se ubicara correctamente en el plano (ver Figura 21) ya que se le daría toda la información necesaria. Se esperaba que tomara las rectas horizontales como las "carreras" y las rectas verticales como las "calles". Era indispensable una buena ubicación en el plano ya que al unir los puntos se obtendría un triángulo al que se le debería hallar el sistema de ecuaciones para cada par de lados. Para lograr esto, se esperaba que el estudiante en la sesión 3 hubiera aprendido lo referente a la ecuación de la recta ya que teniendo los 3 vértices (puntos) del triángulo determinaría las ecuaciones de cada segmento de recta del triángulo.*

Como actividad de desarrollo se planteó el primer problema (ver Figura 20) referente al planteamiento de ecuaciones cuyas variables son las dimensiones de un rectángulo.

Se esperaba que los estudiantes tuvieran los contenidos básicos de geometría que se requerían para la solución de estos problemas como lo era el perímetro y el área de un rectángulo, así como una buena interpretación a los enunciados.

Como actividad de finalización se presentó este último ejercicio (ver Figura 21) que fue tomado de la prueba diagnóstica inicial para trabajarlo en clase y para que los estudiantes recordaran esas propiedades de los triángulos que son necesarias en este ejercicio (la suma de ángulos internos de un triángulo y ángulos suplementarios). Además, buscábamos que al llevar trabajadas seis sesiones, se les facilitaría a los estudiantes plantear sistemas de ecuaciones.

Se esperaba que en esta sesión los estudiantes tuvieran la plena seguridad que para determinar los valores de las incógnitas (x e y) debían plantear dos ecuaciones, que se podrían obtener si el estudiante tuviera los conocimientos geométricos nombrados anteriormente.

Figura 20. Hoja 1 de la guía de trabajo de la sesión 7

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

NOMBRE____FECHA__________

1. Resuelve el siguiente problema:

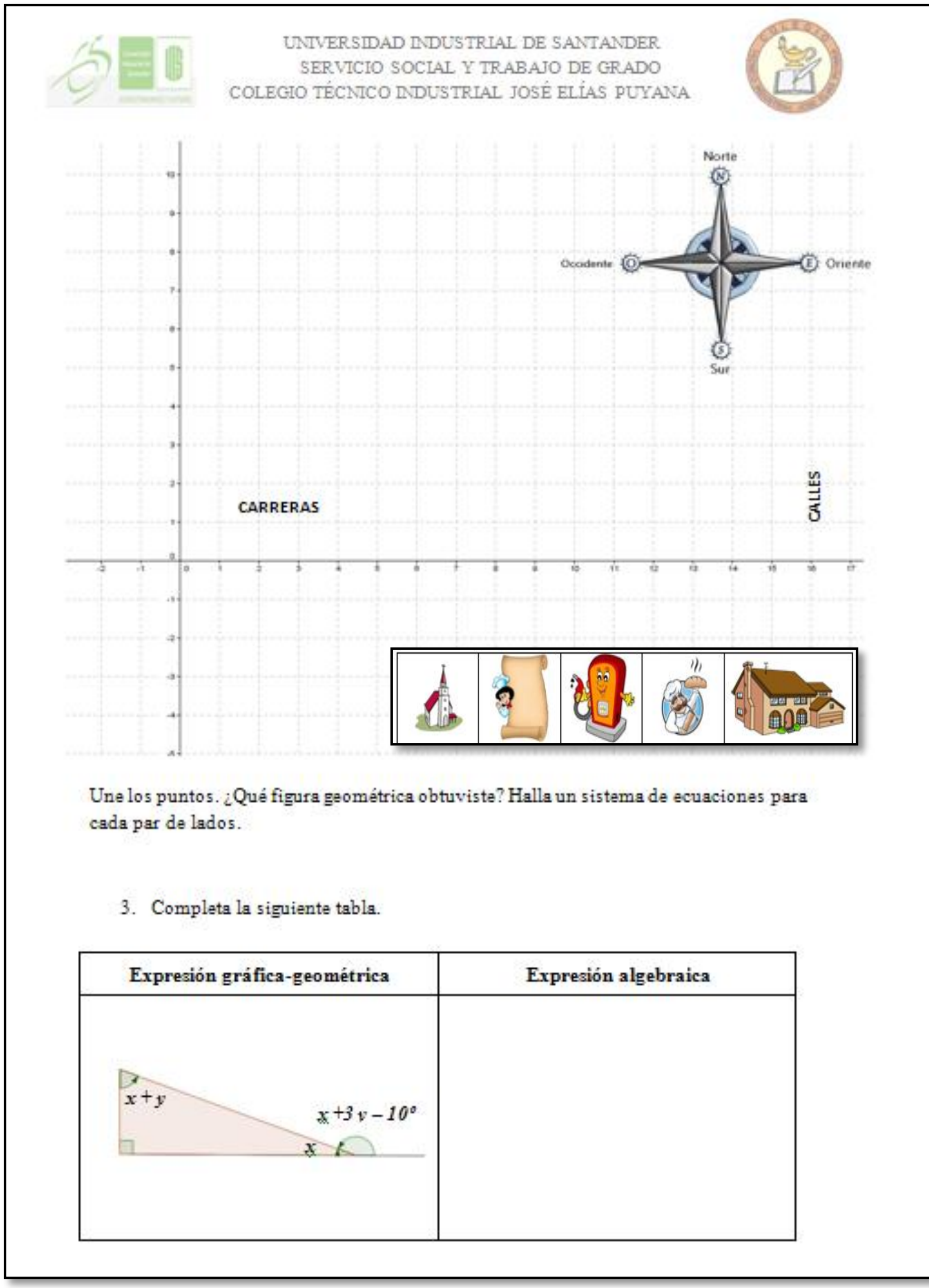
   El perímetro de un rectángulo mide 36 metros. Si se aumenta en 2 metros su base y se disminuye en 3 metros su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.

2. Fernando es un joven que va de la vereda *Ojo de Agua* a visitar a su novia Laura que vive en el pueblo. Como no conoce el pueblo, Laura le da las siguientes indicaciones desde la estación de servicio "*Las Palmitas*" lugar donde deja el trasporte a Fernando y los sitios que va a encontrar en el camino antes de llegar a su casa.

Ubique en el plano cartesiano cada uno de los lugares por los que Fernando pasó antes de llegar a la casa de su novia Laura, y determine la correspondiente pareja ordenada.

- Estación de servicio "Las Palmitas": ubicada en la carrera 3 con calle 4 esquina.
- Camine dos cuadras al norte y cruce hacia la derecha tres cuadras, allí encontraras el restaurante de Doña Pepa.
- Siga derecho tres cuadras y voltee hacia el norte dos cuadras, en esta esquina encontrarás la Iglesia.
- Baja por la diagonal hasta la carrera 4 con calle 12 allí se encuentra ubicada la panadería "Pan Palitos". Que por cierto venden un pan delicioso.
- Baja por toda la calle 12 hasta la carrera 1 y voltea hacia el Oriente dos cuadras y en toda la esquina ¡VIVO YO!

Figura 21 Hoja 2 de la guía de trabajo de la sesión 7



Esta sesión se da inicio con el primer punto del taller (ver Figura 20), este problema empezaron trabajándolo individualmente, con el fin que cada uno de ellos aportara ideas de cómo se podía resolver, en vista que después de un tiempo no llegaban a la solución correcta, se socializó de tal manera que daban sus opiniones y sus planteamientos para poder resolverlo, con la ayuda de todos se llegó a la solución. Luego de esto se continuó en el desarrollo del taller, en el segundo punto (ver Figura 20) también se realizó trabajo individual, los estudiantes, leyeron, ubicaron los puntos que se indicaban y pegaron las imágenes, en este proceso se generó discusión de cuáles eran las calles y cuales las carreras, puesto que si no quedaba claro esta duda en la ubicación de los puntos la figura que se iba a obtener iba a ser diferente a la que esperábamos se formara, posteriormente graficaron la figura geométrica que se formó y prosiguieron a hallar las ecuaciones de cada par de lados del triángulo, pero no recordaban como se hallaban estas ecuaciones, así que esta parte del taller se realizó de manera grupal en donde los guiamos a la solución. Finalmente se trabajó el último punto del taller (ver Figura 21), de forma grupal, los estudiante por medio de las interpretaciones que realizaban de la figura presentada daban idea y planteamientos que contribuyeron en la solución del enunciado.

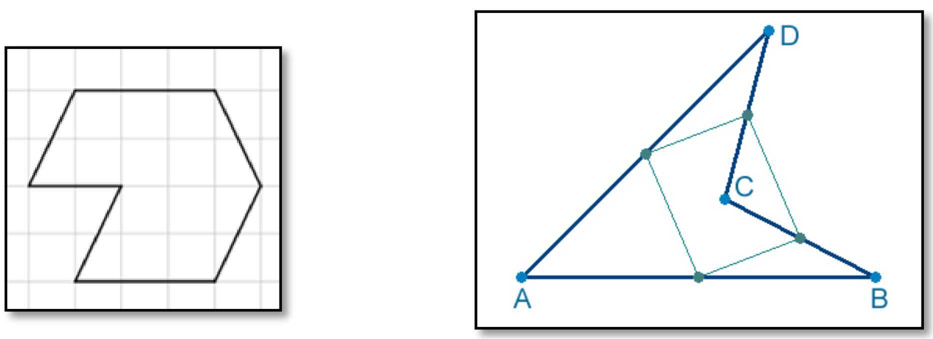
2.14 SESIÓN 8 Y 9. ACTIVIDADES PARA TRABAJAR DIFERENTES REPRESENTACIONES

En estas dos últimas sesiones buscábamos reforzar todas las habilidades comunicativas trabajadas en las sesiones anteriores en las que los estudiantes interpretarían y comunicarían enunciados algebraicos en sus diferentes representaciones. Su objetivo consistía en **repasar todos los aspectos trabajados durante las sesiones anteriores para solventar cualquier dificultad que hubiera quedado en cada uno de los estudiantes. Lo importante de todas estas sesiones no era que los estudiantes se aprendieran de memoria los ejercicios y su solución sino que fortalecieran las habilidades comunicativas para obtener un mejor desempeño matemático.**

Esta actividad se planeó para dos sesiones ya que cada ejercicio propuesto requiere tiempo: en una primera sesión se realizaría la actividad de motivación (descrita posteriormente) que se trabajaría en parejas en donde cada uno expresaría lo que observa. Además se desarrollaría una parte de la tabla de la segunda actividad (ver Figura 23 y Figura 24).
Para la otra sesión (sesión 9), se continuaría con los problemas de la tabla y se realizaría el último ejercicio propuesto sobre conjeturas.

Como actividad de motivación se realizó la siguiente situación:
"Imagínese que usted está hablando con un compañero de clase por teléfono y le va a describir la figura (ver Figura 22) que dejaron de tarea en la clase de matemáticas. El otro estudiante no puede ver la figura. Entonces debe darle una serie de instrucciones para que su compañero pueda dibujar la figura tal y como se muestra a continuación".

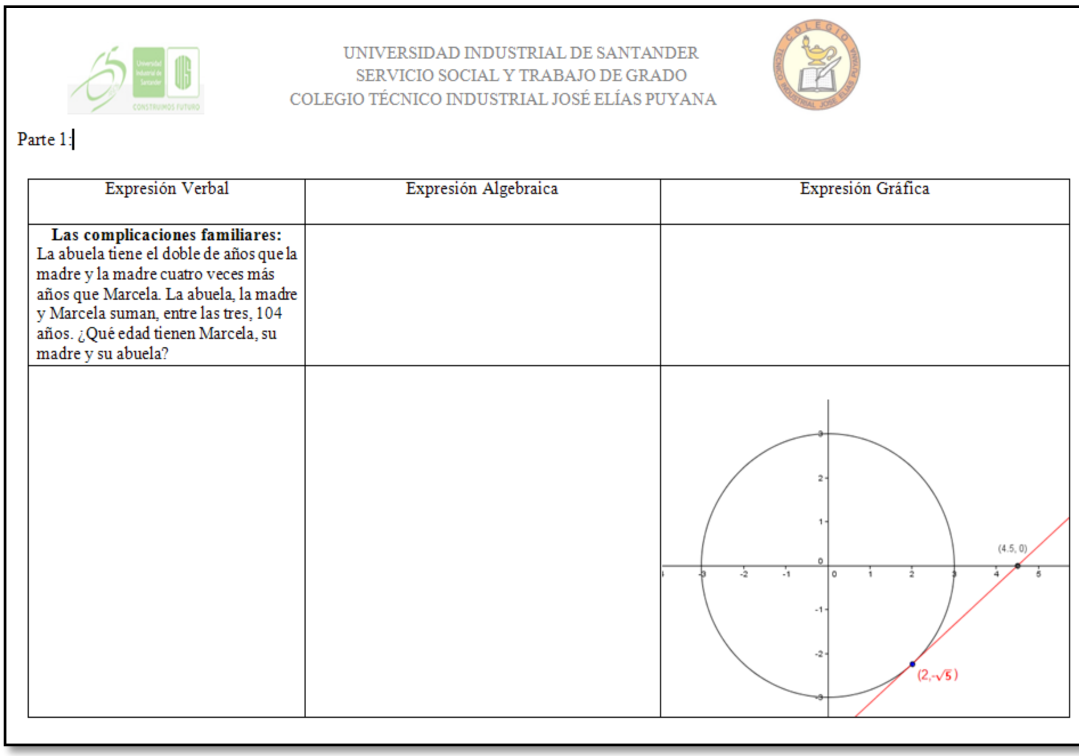
Figura 22. Imágenes para la descripción en la actividad de motivación



Se esperaba que los estudiantes expresaran verbalmente lo que estaban viendo en las figuras basándose en el conocimiento que tienen sobre estas. Algunos podrían expresar de la figura que está a la izquierda que es un hexágono al que le voy a quitar una porción de triángulo a la parte inferior izquierda, otros podrían decir indicaciones para ubicar puntos en el plano y al final unirlos formando la figura propuesta. De igual manera, se podrían dar indicaciones para ubicar los puntos y formar la gráfica de la figura de la parte derecha, pero al *ser esta figura más complicada, el estudiante tendría que dar más características de lo que observa.*

Como actividad de desarrollo se propuso una guía (ver Figura 23 y Figura 24) en la que los estudiantes demostrarían sus habilidades para traducir expresiones gráficas, algebraicas y verbales.

Figura 23. Hoja 1 guía de trabajo de las sesiones 8 y 9



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Parte 1:

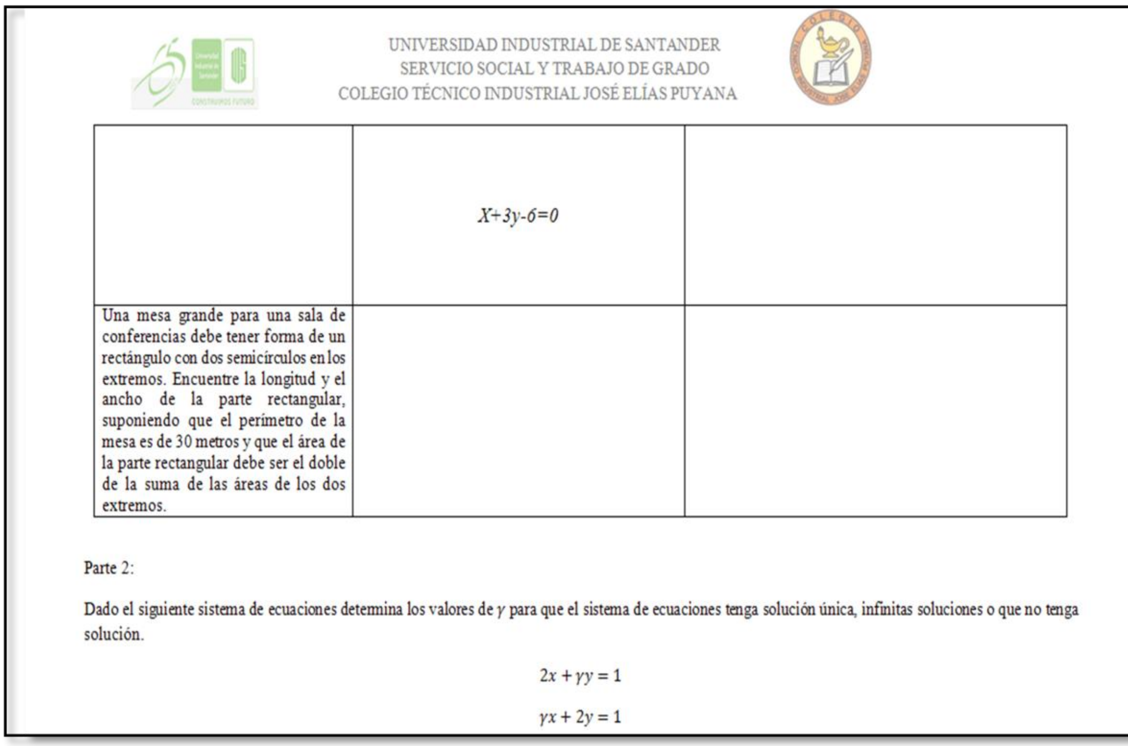
Expresión Verbal	Expresión Algebraica	Expresión Gráfica
Las complicaciones familiares: La abuela tiene el doble de años que la madre y la madre cuatro veces más años que Marcela. La abuela, la madre y Marcela suman, entre las tres, 104 años. ¿Qué edad tienen Marcela, su madre y su abuela?		

La estructura de los ejercicios propuestos en esta actividad de desarrollo (ver Figura 23) ha sido trabajada durante las sesiones anteriores, lo cual se esperaba que los estudiantes la realizaran sin dificultad.

- ❖ *Para los problemas planteados en la parte de expresión verbal, se esperaba que los estudiantes interpretaran, comprendieran y analizaran cada situación, aplicaran lo aprendido en cada una de las sesiones planteando el sistema de ecuaciones y resolvieran los problemas.*

- *Para la expresión gráfica se esperaba que los estudiantes identificaran la ecuación de la recta y del círculo. Además que reconocieran que el punto de intersección entre el circulo y la recta es la solución del sistema de ecuaciones.*
- *Para la expresión algebraica se esperaba que los estudiantes reconocieran la expresión como una recta, identificando la pendiente y el corte en el eje y, para que se le facilita la gráfica.*

Figura 24. Hoja 2 guía de trabajo de las sesiones 8 y 9


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

	$X+3y-6=0$	
Una mesa grande para una sala de conferencias debe tener forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Encuentre la longitud y el ancho de la parte rectangular, suponiendo que el perímetro de la mesa es de 30 metros y que el área de la parte rectangular debe ser el doble de la suma de las áreas de los dos extremos.		

Parte 2:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones determina los valores de γ para que el sistema de ecuaciones tenga solución única, infinitas soluciones o que no tenga solución.

$$2x + \gamma y = 1$$

$$\gamma x + 2y = 1$$

Para la actividad de finalización se planeó el último ejercicio de la guía (ver Figura 24), el cual se trabajaría entre todos.

Para el ejercicio final de la actividad propuesta en la que se debía determinar los valores de γ*, aunque es un tipo de ejercicio que siempre causa dificultad en los estudiantes se esperaba que los estudiantes recordaran lo aprendido en la sesión 3 sobre los sistemas de ecuaciones: cuando hay infinitas soluciones, una única solución o* *no hay solución; ya que esto era indispensable para poder conjeturar los posibles valores de γ.*

- **Implementación de la actividad en la octava sesión de trabajo:**

Esta sesión la iniciamos con un ejercicio de motivación, se dio la indicación que se hicieran en parejas, 1 persona por pareja salía de salón y a la otra persona se le daba a conocer una figura (ver Figura 22), debía pensar cómo explicarle a su compañero en qué consistía la figura para que él lo dibujara en el tablero, algunos de estos estudiantes cuando estaban dando sus indicaciones presentaron dificultad en expresarse pues su compañero que estaba recibiendo las indicaciones no comprendía lo que debía dibujar, algunos grupos no lograron terminar la actividad por las dificultades presentadas, después de que todos los grupos pasaran se hizo cambio de estudiantes, ahora los que estaban dando indicaciones eran los que las recibían, terminada esta actividad se dio inicio a la taller (ver Figura 23 y Figura 24) , se entregaron las guías y los estudiantes formaron grupos para el desarrollo de los enunciados propuestos, se realizó solo la primera parte pero no se socializó.

- **Implementación de la actividad en la novena sesión de trabajo:**

Iniciamos esta sesión con una actividad de motivación, jugamos al teléfono roto en donde se formaron dos hileras, al estudiante que estaba en la primera posición se le decía al odio una expresión y éste debía escribirlo y decírselo a su compañero de al lado y así sucesivamente hasta que el ultimo estudiante nos decía que expresión le había llegado, este proceso se realizó con tres expresiones. Luego se continuó con el desarrollo del taller (ver Figura 23 y Figura 24), para que recordaran lo que ya habían resuelto y terminaran lo que les hacía falta, lo realizaron algunos de manera individual y otros en grupos, posteriormente se socializó los procesos realizados en el tablero, por cada uno de los ejercicios planteados pasó un estudiante al tablero a exponer lo que había realizado.

2.15 PRUEBA DIAGNÓSTICA FINAL

Como actividad diagnóstica final se elaboró una prueba de 5 ítems (ver Figura 25 y Figura 26), en los que cada uno evaluaba un aspecto y habilidad consolidada en las sesiones trabajadas anteriormente. La prueba diagnóstica se aplicó a todo el grupo del que se seleccionaron nuestros casos de estudio. **El objetivo del diagnóstico final fue evaluar las habilidades comunicativas fortalecidas durante las sesiones de trabajo, para luego ser comparadas con los resultados obtenidos en la prueba inicial y poder concluir si las experiencias didácticas trabajadas con los estudiantes fueron realmente significativas en estos estudiantes, es decir, si produjo resultados positivos.**

En el primer ejercicio (ver Figura 25) se evaluaba las habilidades comunicativas ya que el problema planteado involucraba al estudiante en la interpretación de la gráfica, justificación y argumentación de su respuesta.

> *Se esperaba que el estudiante pudiera interpretar la gráfica y darse cuenta que en el punto más alto de la parábola se obtiene el valor más costoso del árbol. Por lo que en ese punto conviene vender el árbol.*

En el segundo ejercicio (ver Figura 25) se evaluaba la habilidad de interpretar al traducir del lenguaje algebraico al lenguaje verbal y viceversa. Debían reconocer las variables como números y no como simples letras.

> *Se esperaba que los estudiantes pudieran traducir estas expresiones y oraciones sin ninguna dificultad; que cuando se mencionaba la palabra "veces" el estudiante reconociera que es un producto y tuviera claro la diferencia del doble con el cuadrado.*

En el tercer ejercicio (ver Figura 25) se evaluaba la habilidad para explicar al plantear situaciones a partir de un sistema de ecuaciones dado.

> *Se esperaba que los estudiantes plantearan diferentes situaciones que representen la ecuación planteada.*

En el cuarto ejercicio (ver Figura 26) se evaluaba la habilidad de explicar al formular conjeturas de un sistema de ecuaciones dado. En este caso, los estudiantes debían hallar la constante k que cumpliera las condiciones,

> *Se esperaba que los estudiantes hubieran aprendido a reconocer los sistemas de ecuaciones: cuando hay infinitas soluciones, una única solución o no hay solución.*

En el quinto ejercicio (ver Figura 26) se evaluaba la habilidad para explicar al sustentar los procesos realizados por medio de argumentaciones.

> *Se esperaba que el estudiante le hiciera una buena interpretación al ejercicio y lo comprendiera para que pudiera obtener la respuesta correcta con argumentaciones significativas*

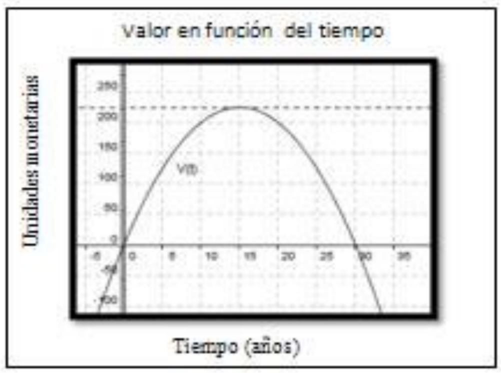
Figura 25 Hoja 1 de la prueba diagnóstica final

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Nombre: ____ Fecha: ____________

PRUEBA DIAGNÓSTICA FINAL

1. Un agricultor ha planteado un árbol frutal, que según las previsiones debería vivir unos 30 años. El valor del árbol, que varia a medida que pasa el tiempo, viene dado por la función $v(t) = 30t - t^2$ para una determinada unidad monetaria (u.m.). ¿En que momento comento convendría vender el árbol?

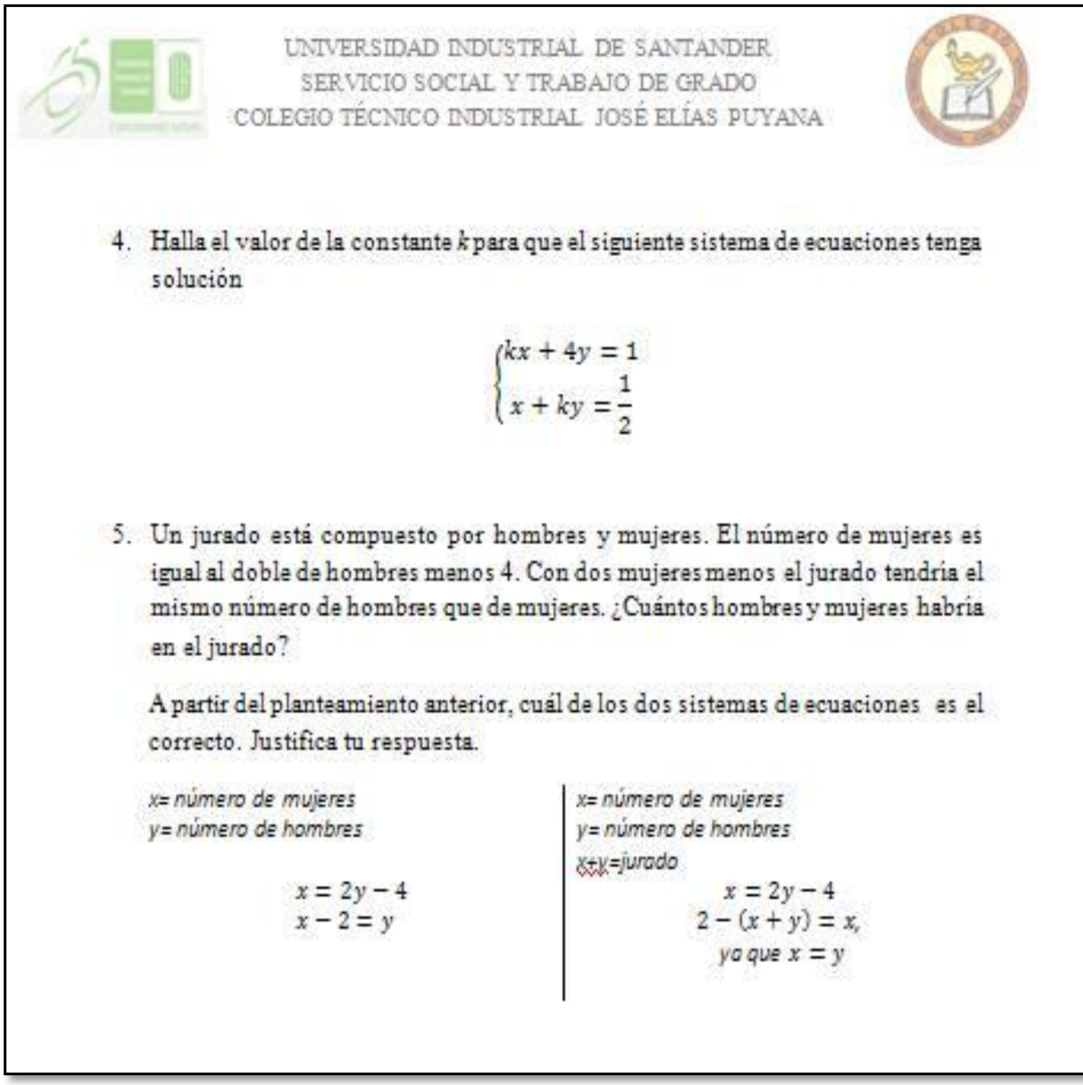


2. Escribe en palabras o la expresión algebraica según sea el caso los siguientes enunciados.
   - $2(3x^3 + 4)$: ________________________________
   - Cinco veces la suma de dos números: ____________________
   - $x - 8(x + y)$: ________________________________
   - El producto de dos números diferentes aumentado en 2: ____________

3. Plantea una situación que se pueda representar algebraicamente con la siguiente ecuación. Justifica tu respuesta.

$$2(3x + 4)$$

Figura 26 Hoja 2 de la prueba diagnóstica final



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

4. Halla el valor de la constante k para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución

$$\begin{cases} kx + 4y = 1 \\ x + ky = \frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habría en el jurado?

A partir del planteamiento anterior, cuál de los dos sistemas de ecuaciones es el correcto. Justifica tu respuesta.

x= número de mujeres y= número de hombres $x = 2y - 4$ $x - 2 = y$	x= número de mujeres y= número de hombres x+y=jurado $x = 2y - 4$ $2 - (x + y) = x,$ ya que $x = y$

La implementación de la prueba diagnóstica final se realizó en el Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, se aplicó a los 42 estudiantes del curso 11-1 quienes respondieron la prueba de manera individual, los estudiantes duraron aproximadamente 1 hora y media respondiendo la prueba, al finalizar cuando todos los estudiantes habían hecho entrega de sus hojas se hizo entrega de un certificado de asistencia a los estudiantes que habían participado en el trabajo de campo de nuestra investigación.

5. HABILIDADES INTERPRETATIVAS Y SUS REPERCUSIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya (1945) discute el potencial de los métodos heurísticos para resolver un problema matemático, entre ellos descomponer un problema en subproblemas; para ello, es indispensable la interpretación de enunciados presentados en términos matemáticos o verbales. Con enunciados verbales nos referimos al conjunto de palabras con las que se expone o plantea un problema matemático. En términos matemáticos los enunciados pueden ser presentados de manera pictórica (aquí se incluyen el uso de figuras, gráficas o diagramas como medio para representar el problema) o algebraica (basados en números, variables, signos de igualdad, expresiones o ecuaciones algebraicas).

Al respecto, Santos (2007) menciona que la interpretación de problemas es una etapa fundamental ya que allí se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender sus condiciones, respondiendo a interrogantes como: ¿cuál es la información del problema? ¿Cuál es la incógnita? Y ¿cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema? Este capítulo lo estructuramos teniendo en cuenta la interpretación de los enunciados de los problemas presentados tanto de manera verbal, pictórica o algebraica.

2.16 5.1 INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS VERBALES

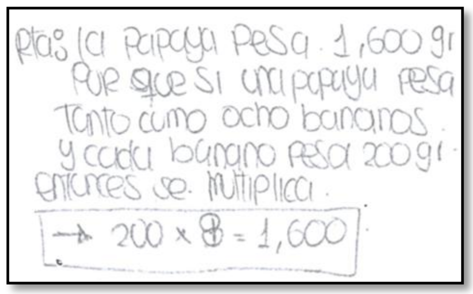
Iniciamos analizando los datos emergentes de la prueba diagnóstica, en el inciso 1 (ver Figura 8) trabajamos un problema que requería de la comprensión de cada una de sus frases, pues de cada una de ésta se planteaban las ecuaciones de un sistema. Recordemos el problema.

> *“Don Pedro está apurado pesando varias frutas en una balanza. Después de varias pesadas, se da cuenta que tres mandarinas y una papaya pesan lo mismo que una docena de bananos; además advierte*

que la papaya pesa tanto como una mandarina y ocho bananos. Si cada banano pesa 200 gramos. ¿Cuánto crees que pesa una papaya?"

En la Figura 27 vemos la interpretación de la estudiante Susana al problema, quien nos deja ver su escasa comprensión del enunciado pues ella excluye el dato relacionado con la mandarina. Como menciona Montenegro (1999) la interpretación de un problema permite dar significado a las condiciones iniciales del mismo además distinguir las relaciones lógicas que esos datos aportan.

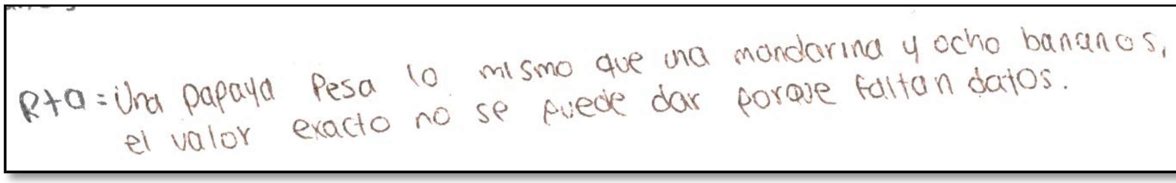
Figura 27 Respuesta dada por Susana al problema.



Además la estudiante realiza una incorrecta traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, lo que no permite dar la solución acertada. Gonzales y Paniagua (2011) afirman que en un esquema de resolución de problemas el individuo requiere de una interpretación o de una lectura comprensiva para poder traducir de un problema en lenguaje verbal a uno en lenguaje simbólico o matemático y poder realizar todas las operaciones necesarias para obtener la solución correcta. Concordando con los autores, esa situación le ocurrió a Susana pues al ella hacer una mala interpretación del problema, realiza una traducción incorrecta de cada frase en cada ecuación, y en su conjunto un sistema que no la lleva a la respuesta correcta del problema.

Eso mismo le sucede a Lalo, quien nos deja ver que no comprende las condiciones que relacionan los datos en el problema, pues menciona que no puede contestar la pregunta porque le hacen falta datos (ver Figura 28). Al respecto, Bednarz y Guzman (2003) mencionan que cuando los estudiantes no establecen las relaciones implicadas en un problema no pueden verlo en su globalidad, por tanto no llegan a una solución de la situación.

Figura 28 Respuesta de Lalo al inciso 1 de la prueba diagnóstica


Rta = Una papaya Pesa lo mismo que una mandarina y ocho bananos, el valor exacto no se puede dar porque faltan datos.

Debido a que Lalo no relacionó las ecuaciones procedentes del problema, no pudo obtener el valor numérico del peso de la papaya, siendo esto causa de la incorrecta interpretación que realizó.

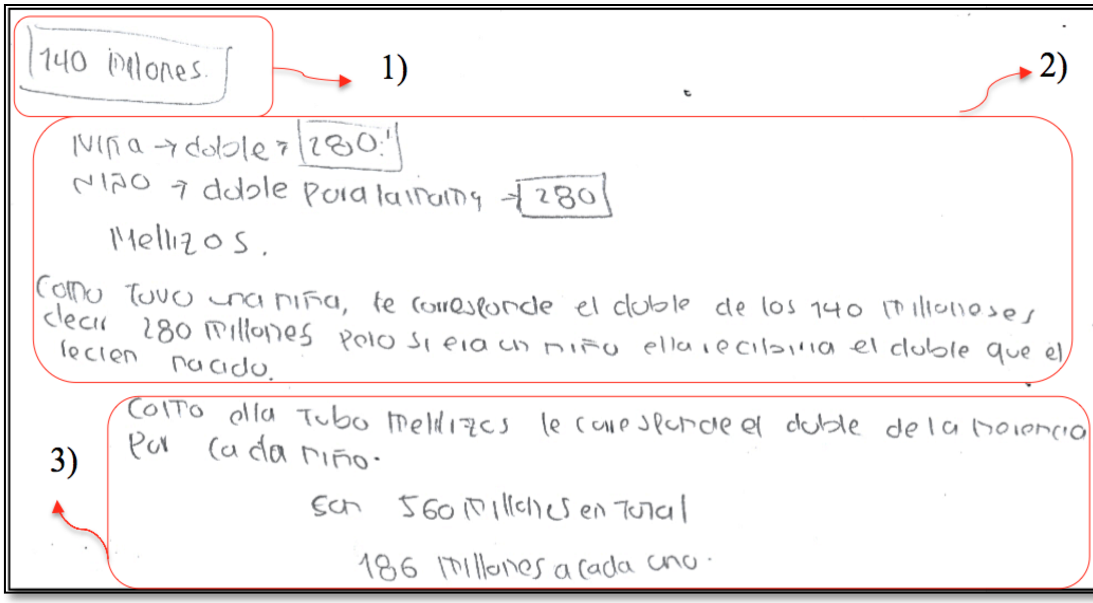
5.1.1 Identificando dificultades en la interpretación de problemas

Otro problema que nos permitió ver la baja interpretación en los problemas propuestos de la prueba diagnóstica fue el inciso tres (ver Figura 8) que consistía en el siguiente problema:

> *"Don Emilio dejo en su testamento 140 millones de pesos a su esposa María y al hijo que esperaba para que se las repartieran de la siguiente forma: si el bebé era una niña, recibiría el doble de doña María; pero si era un niño, la esposa recibiría el doble que el recién nacido. Pasados unos meses doña María dio a luz unos preciosos mellizos, una niña y un niño. ¿Cómo se repartieron la herencia siguiendo fielmente las instrucciones del difunto Don Emilio?"*

Polya (1945) menciona que el primer paso para resolver un problema es comprenderlo y esto tiene que ver con reconocer los datos involucrados en el problema. En este aspecto vemos un ejemplo, el de Andrea (ver Figura 29) quien da como resultado de la situación antes enunciada una cantidad mayor a la cantidad que se debía repartir.

Figura 29 Respuesta dada por Andrea al inciso 3 de la prueba diagnóstica final.



De la respuesta de Andrea, hacemos un análisis que presentamos refiriendo cada uno de los incisos siguientes a las flechas marcadas en la Figura 29, así:

1) La interpretación en matemáticas para este caso, es entender el lenguaje verbal pero ese lenguaje verbal tiene sus significados, por ejemplo, cuando se habla de “añadir” el estudiante lo relaciona con la suma, o cuando se habla de “quitar” con la resta; en este caso se estaba trabajando la noción de reparto. No obstante, Andrea en su explicación nos deja ver que no tiene clara esta noción o no la toma en cuenta desde el inicio, ya que ella utiliza el valor de la herencia (140 millones) como una cantidad base no para dividirla (como se muestra en la flecha 1 de la
2) Figura 29).
3) En estas líneas (señaladas en el recuadro 2 de la
4) Figura 29) se observa la manera como Andrea está tratando de entender el problema. Ella empieza a transcribir lo que dice el enunciado pretendiendo encontrar datos claves que le permitan llegar a la solución. Además, de esta

parte se puede percibir que ella no realiza una lectura comprensiva, puesto que las condiciones del enunciado que identifica no corresponden a éste, ya que tomo el monto a repartir como un monto base para hacer operaciones.

5) En la explicación que Andrea presenta en el tercer recuadro de la
6) Figura 29, nos permite ver que su interpretación del enunciado la condujo a dar una respuesta incorrecta. Además, ella no se percata que esta solución no es coherente con la pregunta ni con los datos.

5.1.2 Interpretación de los enunciados de la Gymkhana Matemática

Polya (1945) habla de la fase del entendimiento del problema donde es importante comprender la información del enunciado del problema y las posibles relaciones entre los datos. Para saber si el estudiante realmente comprende debe responder a estas preguntas: ¿distingues cuáles son los datos? ¿Sabes a qué quieres llegar? ¿Hay suficiente información? ¿Relación entre los datos y la incógnita del problema?

En la primera sesión, cuando trabajamos el juego de *Gymkhana Matemática* pudimos encontrar interpretaciones de los enunciados en los que se evidencia que los estudiantes no responden a las preguntas que plantea Polya. En el siguiente fragmento se puede leer una discusión entre estudiantes que intentan traducir la tercera expresión que se muestran en la Figura 30.

Figura 30 Tabla de enunciados del juego.

TABLA CON ENUNCIADOS		
ENUNCIADO	**EXPRESIÓN**	**EXPRESIÓN REDUCIDA**
Ana tiene x puntos	x	x
Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos	$2x-100$	$2x-100$
A Pablo le faltaban 500 puntos para tener el puntaje de Isabel.	$2x-100-500$	$2x-600$

[1]. **Profesora: ¿**Cuál es el puntaje de Pablo?
[2]. **Andrea:** x menos 500
[3]. **Lalo:** dos equis (x)
[4]. **Andrea:** no… menos 500
[5]. **Germán:** el puntaje de pablo es paréntesis dos equis menos 100 paréntesis menos 500 [(2x – 100)-500]
[6]. **Profesora:** ¿Están todos de acuerdo con Germán?
[7]. **Andrea:** no…yo no sé…
[8]. **Profesora:** ¿por qué?
[9]. **Andrea:** porque yo no entiendo.
[10]. **Paula:** ahí no nos están diciendo cual es el puntaje de Isabel, o sea ¿de dónde salen los cien puntos?
[11]. **Germán:** El puntaje de Isabel es dos equis menos 100.
[12]. **Paula:** [la estudiante interpreta como sigue la tercera línea de la Figura 33] nos están diciendo que faltan 500 puntos para igualar a Isabel y ahí nos están restando los 500…
[13]. **Germán:** entonces más 500 [Germán aquí transforma lo expresión en (2x – 100) +500].
[14]. **Lalo:** no, porque le faltaba 500 para tener lo de Isabel.
[15]. **Andrea:** por eso pero ahí se lo está sumando
[16]. **Germán:** ¡no!… el puntaje de Isabel es el doble de Ana menos 100
[17]. **Profesora:** el doble de Ana menos 100… ese es el de Isabel, el anterior, Entonces sería: a Pablo le faltaban 500 para tener el puntaje de Isabel.
[18]. **Lalo:** lo de Isabel menos 500

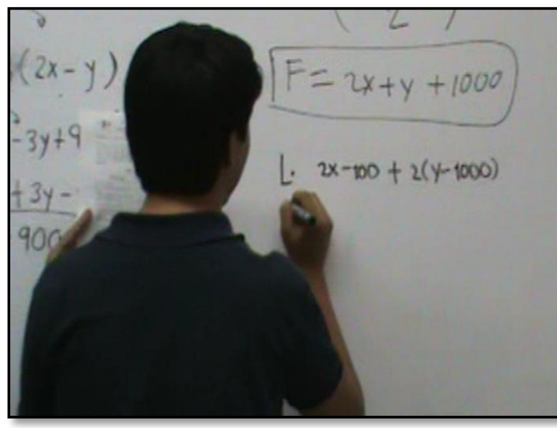
En esta discusión podemos ver que las estudiantes Andrea y Paula presentan inconvenientes en la interpretación de los datos del problema, siendo esto parte fundamental para hacer la traducción del lenguaje verbal al algebraico: en la línea [4] se observa que para Andrea lo importante al traducir este enunciado es darle sentido a las palabras “le faltan 500” sin tener en cuenta el puntaje de Isabel, conduciéndola a no entender (ver línea [9]) la correcta interpretación que hace Germán como se muestra en la línea [5]. Lo mismo le sucede a Paula que en la línea [12] nos deja ver que al parecer ella está interpretando el enunciado como $P + 500 = I$, siendo “P” Pablo e “I” Isabel y no entiende porque le están restando 500, aun sabiendo que al despejar la incógnita (P) de la ecuación que ella tiene presente el 500 pasaría a restar. Andrea no percibe que el puntaje de Isabel depende del de Ana y que el de Pablo del de Isabel, sin tener clara esta relación era difícil encontrar la expresión algebraica que resolvería el problema.

Dada la discusión anterior, se procede a hacer las traducciones de las otras expresiones del juego y vemos como el ejercicio inicial (relatado anteriormente) posibilita que Lalo use la habilidad que allí se pudo desarrollar. La expresión que trabajó él fue **“el puntaje de Isabel con el doble de Rafael, es el puntaje de Luis” (**ver Figura 10**)**. En este momento ya se habían construida las equivalencias de los puntajes de Isabel y Rafael, así:

Isabel: $2x - 100$

Rafael: $y - 1000$

Tabla 4 Interpretación de Lalo del enunciado 4 del juego Gymkhana Matemática

– El *puntaje de Isabel con el doble de Rafael, es el puntaje de Luis, entonces el de Isabel era 2X-100, eh, con el de Rafael, o sea sería más dos por lo de Rafael, lo de Rafael era Y menos 1000.* (Lalo)	

En la Tabla 4, vemos la interpretación que expone este estudiante. Gregorio (2005) menciona que resolver un problema supone entender el mensaje y las palabras con las que está enunciado. Lalo identifica la relación existente entre los puntajes de los anteriores participantes a Luis e interpreta la palabra “con” como la operación de adición y el doble con la multiplicación por dos.

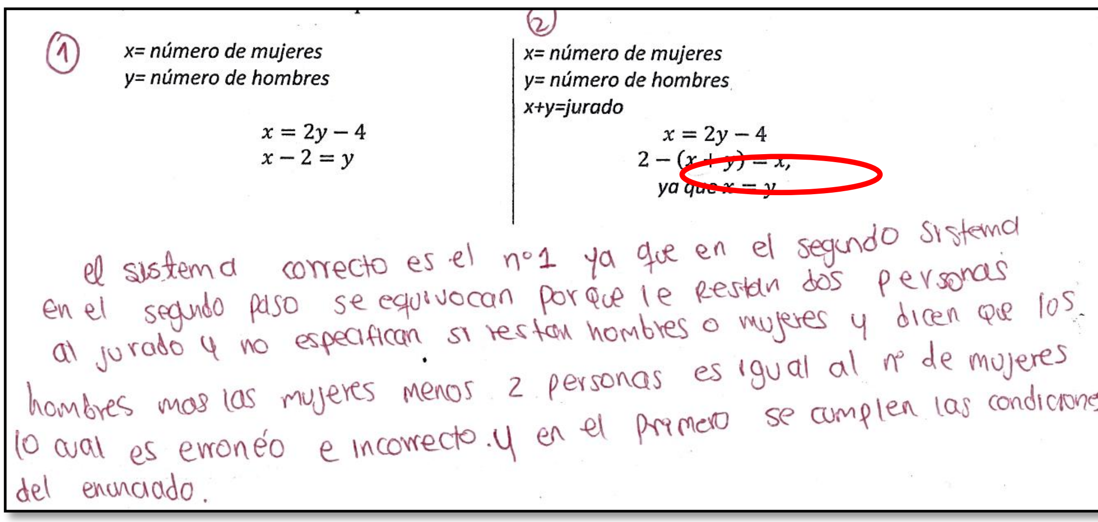
5.1.3 Interpretación de enunciados en la prueba diagnóstica final

En el inciso cinco de la prueba diagnóstica final (ver Figura 26) se planteó un problema con dos sistemas de ecuaciones: uno correcto y el otro incorrecto. Recordemos el problema:

> *Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habría en el jurado?*

A continuación presentamos la interpretación que realiza Lalo a este enunciado.

Figura 31 Respuesta de Lalo al inciso 5 de la prueba diagnóstica final



1

x= número de mujeres
y= número de hombres

$$x = 2y - 4$$
$$x - 2 = y$$

2

x= número de mujeres
y= número de hombres
x+y=jurado

$$x = 2y - 4$$
$$2 - (x + y) = x,$$
ya que $x = y$

el sistema correcto es el n°1 ya que en el segundo sistema en el segundo paso se equivocan porque le restan dos personas al jurado y no especifican si restan hombres o mujeres y dicen que los hombres mas las mujeres menos 2 personas es igual al n° de mujeres lo cual es erronéo e incorrecto. y en el primero se cumplen las condiciones del enunciado.

En la Figura 31 se puede observar la correcta interpretación que hace Lalo de la situación presentada y de los dos sistemas planteados de acuerdo al enunciado. Aunque Lalo en su explicación se equivoca al decir que en la línea dos (marcada en la Figura 31) se le están restando dos al jurando, en su lectura e interpretación se evidencia su comprensión a cada una de las frases que componen el problema, permitiéndole dar una respuesta acertada destacando su habilidad para interpretar enunciados verbales.

Del análisis presentado sobre la habilidad para interpretar enunciados verbales podemos observar cómo iniciando el trabajo de campo con la prueba diagnóstica se evidencia escasa interpretación por parte de los estudiantes, y en el trascurso de las actividades de intervención en donde se enfrentaron a distintas situaciones fueron superando aquellas dificultades que no les posibilitaba la traducción a otra representación partiendo de la verbal, permitiendo ver en la prueba diagnóstica final un avance en el desarrollo de esta habilidad en los estudiantes. En las actividades que desarrollamos se presentaron situaciones en las que posibilitamos la identificación de elementos que hacen parte de la interpretación de enunciados influyendo en la resolución de problemas en los estudiantes, pues cuando el estudiante tiene la capacidad de identificar los datos, incógnitas, condiciones del problema, palabras, o encontrar datos no explícitos en el enunciado, siendo estos elementos claves en la resolución de problemas, podría llegar a la solución.

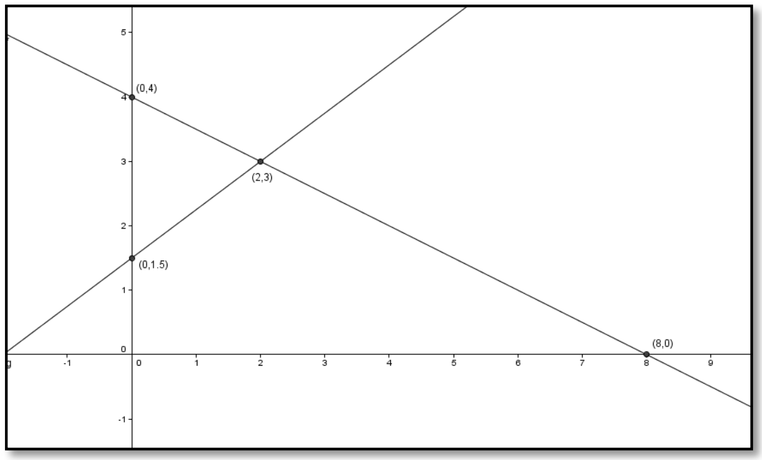
2.17 5.2 INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS PICTÓRICOS

Duval (1992) menciona que para proceder a la interpretación global de las propiedades de las figuras se debe considerar lo siguiente: la forma de su escritura algebraica, llevar a cabo un análisis de congruencia entre dos registros de representaciones de un objeto o de una información y debe haber la asociación "variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica".

Para estos enunciados empezamos analizando los datos emergentes de la prueba diagnóstica, en el inciso 2 (ver Figura 8) trabajamos un ejercicio que requería de la comprensión de una gráfica, y a partir de ésta se plantean las ecuaciones de un sistema. Recordemos el problema.

Halla el sistema de ecuaciones que representa la siguiente gráfica.

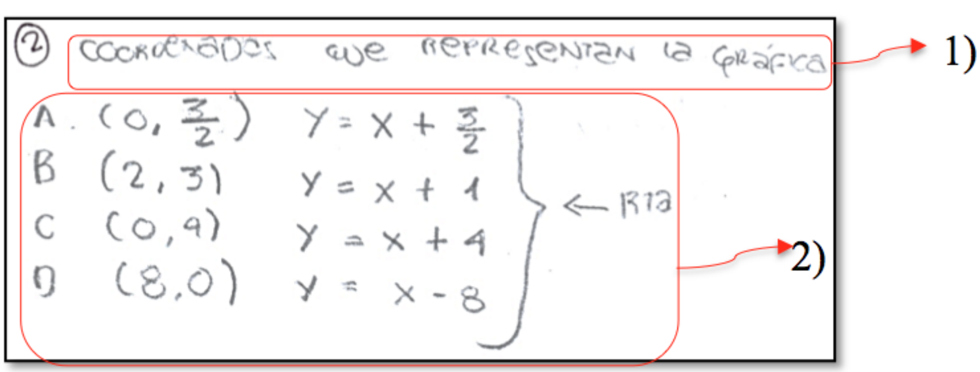
Figura 32 Inciso 2 de la prueba diagnóstica inicial



Para la solución de este problema esperamos que el alumno identificara los términos que se encuentran presentes en la gráfica: cuatro puntos, dos rectas, dos ejes y un solo cuadrante, además que relacionara estos elementos para el planteamiento del sistema de ecuaciones como se indicaba en el enunciado.

En la revisión de las pruebas encontramos que la mayoría de los estudiantes no dieron respuesta a este ítem y los que lo hicieron (como Rubén) presentan dificultades en su interpretación (como se pude ver en la Figura 33). Allí se muestra que él cae en confusiones de nociones como punto, recta, plano, gráfica. En los apartados siguientes y de la Figura 33 mostramos evidencias de la interpretación de este estudiante.

Figura 33 Respuesta de Rubén al inciso 2 de la prueba diagnóstica inicial



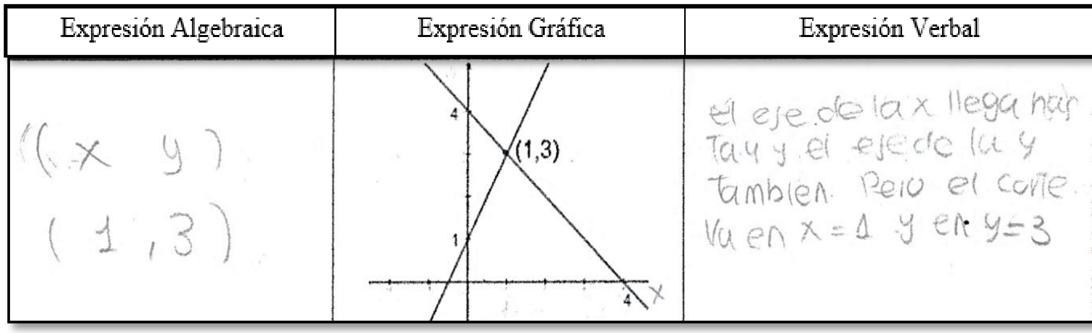
1) Rubén identifica de la gráfica dada (Figura 32) cuatro (4) puntos que para él representan las “coordenadas” de ésta. Entonces nos queda en duda ¿qué entiende este alumno por una gráfica? Pues en su interpretación no tiene en cuenta que lo que está representado en la gráfica es la intersección de dos rectas.
2) Para poder hallar el sistema de ecuaciones de la gráfica, el estudiante identifica los puntos y los utiliza para determinar las ecuaciones de las rectas, se puede observar en su solución que lo hace de manera incorrecta pues obtiene cuatro ecuaciones de rectas. Además Rubén no reconoce los parámetros en la ecuación de la recta: pendiente y corte con el eje Y, ya que en sus expresiones todas las rectas tienen la misma pendiente y el corte con el eje Y lo obtuvo restando las coordenadas de los puntos.

Un problema como estos es imposible de resolver por estudiantes como Rubén que no tiene clara estas nociones, pues como lo afirma Bressan dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Este conocimiento proporciona el dominio formal de cada estructura conceptual.

5.2.1 Interpretaciones alrededor de las actividades de visualización en diferentes representaciones

En la segunda sesión como se mencionó en el capítulo 4 se trabajó una actividad en la que se requería hacer la traducción de una expresión en diferentes representaciones. La Figura 34 muestra la traducción que hace Susana de la expresión gráfica a la verbal y de la expresión gráfica a la algebraica.

Figura 34. Solución de Susana al enunciado 2 de la actividad de la sesión 2



Expresión Algebraica	Expresión Gráfica	Expresión Verbal
((x y) (1 , 3)	4, (1,3), 1, 4, X	el eje de la x llega hasta 4 y el eje de la y tambien. Pero el corte va en x = 1 y en y=3

- *Traducción de la expresión gráfica a la verbal:* En la explicación que nos brinda Susana podemos observar que identifica los ejes del plano cartesiano como dos rectas que hacen parte de la gráfica e intenta expresar que los dos ejes se cortan en un punto pero no reconoce cuál es éste y aclara que las otras dos rectas se están cortando en $x = 1$ y $y = 3$, esta escasa lectura de la gráfica no permite que Susana interprete lo que representa ésta.
- Esto mismo se observa en la *traducción de la expresión gráfica a la algebraica,* donde las expresiones que ella propone hace referencia a los dos puntos de cortes que ella está visualizando en la gráfica y expresa verbalmente.

Lo anterior ocurre porque Susana no entiende la gráfica, pues como lo afirma Acuña (2006) para interpretar una gráfica debe haber una traducción o descripción verbal de los significados asociados a ella y como lo mencionamos la estudiante no identifica los elementos que conforman la representación dada por lo que se le dificulta realizar las traducciones a las otras representaciones y resolver el enunciado

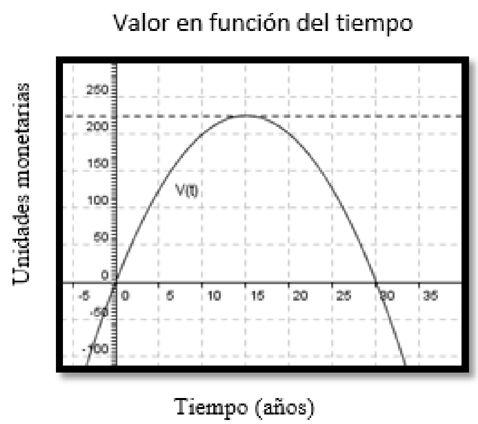
.

5.2.2 Interpretaciones de gráficas logradas al final del proceso

En la prueba diagnóstica final se presentó una situación que es representada por medio de una gráfica; para dar respuesta a la pregunta que surge de este planteamiento, los estudiantes debían realizar una lectura de ésta que le permitiera interpretar los datos que les estaba ofreciendo. Recordemos el enunciado

Tabla 5 Inciso 1 de la prueba diagnóstica final

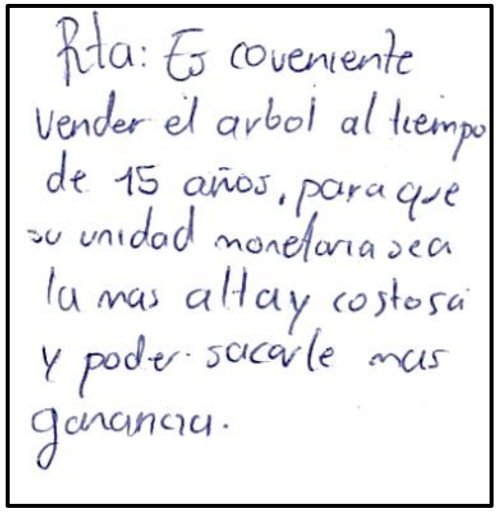
Un agricultor ha planteado un árbol frutal, que según las previsiones debería vivir unos 30 años. El valor del árbol, que varía a medida que pasa el tiempo, viene dado por la función $v(t) = 30t - t^2$ *para una determinada unidad monetaria (u.m.). ¿En qué momento convendría vender el árbol?*



En la respuesta dada por Carlos (ver Figura 35) se puede apreciar que él al observar la gráfica identifica la dependencia de las variables, además reconoce el comportamiento de la gráfica, puesto que a medida que pasa el tiempo las ganancias aumenta hasta un punto en donde empieza a decaer, siendo esto el motivo que le permite emitir el juicio correcto.

Carlos hace una buena interpretación de la lectura que realiza a la gráfica puesto que relaciona ésta con la situación, como lo afirma la semiótica de Peirce entender una gráfica es describirla y esto requiere de la relación entre el signo (grafica) y un referente (situación)

Figura 35. Respuesta dada por Carlos


Rta: Es coveniente
Vender el arbol al tiempo
de 15 años, para que
su unidad monetaria sea
la mas altay costosa
y poder sacarle mas
ganancia.

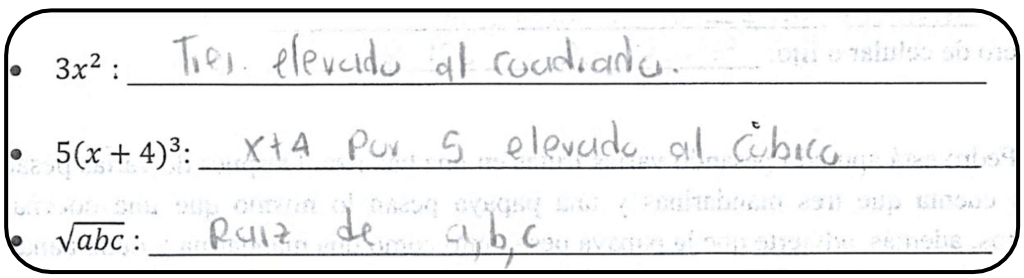
En las actividades implementadas alrededor de los enunciados pictóricos, siempre se presentó a los estudiantes un ejercicio en el que debían traducir no solo del lenguaje algebraico al verbal y viceversa sino que también se incluía el lenguaje gráfico. De los datos que recuperamos y el desarrollo de las actividades encontramos que la traducción que causo más dificultad en los estudiantes es la traducción del lenguaje gráfico, debido a que los estudiantes manifestaban que estas traducciones no son frecuentes en el aula de clases. En este ir y venir de una expresión a otra favoreció el progreso de la interpretación de las gráficas y la resolución de problemas que se pudo evidenciar en los resultados de la prueba diagnóstica final.

5.3 INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS

Socas (1997) considera que el uso del lenguaje habitual en la representación verbal favorece la interpretación de los signos utilizados en el lenguaje algebraico pero hay que considerar que el lenguaje matemático es más preciso que el lenguaje natural ya que está sometido a unas reglas exactas y es necesario interpretar de manera correcta los signos utilizados. Del mismo modo, es necesario cuidar el uso de ciertas palabras que según el contexto en el que se utilicen pueden ocasionar confusiones de conceptos. Así mismo, tener en cuenta el orden en que se enuncia una expresión algebraica pues es necesario entender si se está haciendo de manera secuencial o no.

En el inciso 4 de la prueba diagnóstica inicial, se presentaron tres expresiones algebraicas que el estudiante debía traducir en palabras lo que representaban. En la Figura 36 se evidencia las respectivas interpretaciones que realiza Germán a cada una de las expresiones planteadas.

Figura 36 respuesta dada por Germán al inciso 4 de la prueba diagnóstica inicial



- $3x^2$: Tres. elevado al cuadrado.
- $5(x+4)^3$: X+4 Por 5 elevado al cúbico
- $\sqrt{abc}$: Raiz de a,b,c

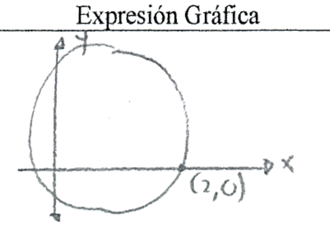
1) *$3x^2$:* En esta expresión Germán nos deja ver en su interpretación que no comprende la estructura de la expresión, pues en su traducción omite la “x”
2) *$5(x+4)^3$:* aquí se puede observar que lo que realiza Germán es una lectura literal de lo que dice la expresión, sin realizar una interpretación de lo que realmente significa ésta
3) $\sqrt{abc}$: al igual que en la expresión anterior el estudiante la lee tal y como está escrita, es decir, no realiza una lectura interpretativa además no reconoce que la operación que se está realizando entre a,b y c es una multiplicación

Así como Germán muchos estudiantes presentaron dificultades al realizar este inciso, por lo que deducimos que si un alumno de este nivel no tiene la capacidad de traducir del lenguaje algebraico al verbal es porque no comprende el significado de la expresión como se observa en la Figura 36 que las interpretaciones de Germán no fueron acertadas y por ende no le permitió solucionar de manera correcta el enunciado.

5.3.1 Interpretación alrededor de las diferentes representaciones

En la actividad de desarrollo de la sesión 2 (apartado 4.3) se trabajó una tabla con diferentes representaciones de una expresión en la que los estudiantes debían hacer la traducción de una representación a otra. Cuando trabajamos el primer inciso de esa tabla, encontramos evidencias de cómo las interpretaciones de la expresión dada de forma algebraica (correcta o incorrectamente) refleja no sólo el nivel del estudiante para traducir este tipo de expresiones a la manera verbal o pictórica, sino que también le puede mostrar al profesor el nivel de comprensión de los objetos matemáticos que están en juego.

Figura 37 Respuesta dada por Paula al inciso 1 de la actividad de la sesión 2

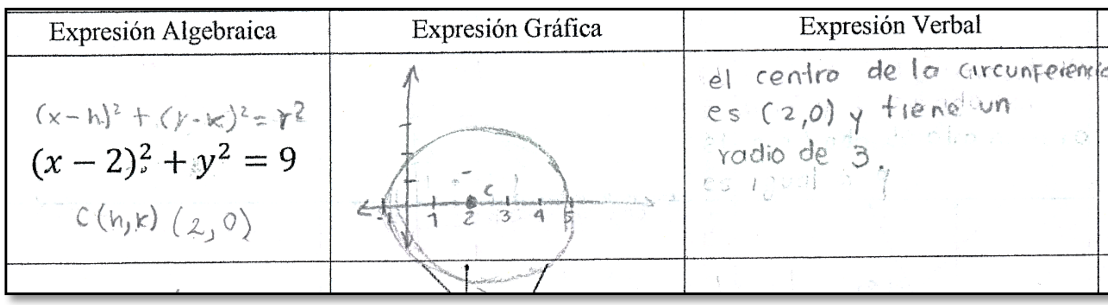
Expresión Algebraica	Expresión Gráfica	Expresión Verbal
$(x-2)^2 + y^2 = 9$		una Circunferencia de Radio 3 Con Centro 2,5.

En la Figura 37 se observa que en la traducción de la expresión algebraica a la gráfica Paula reconoce esta ecuación como la de una circunferencia y el punto $(h,k) = (2{,}0)$ como el corte con el eje x, siendo este último el centro de la circunferencia, por lo que nos deja inferir que no identifica los elementos de la ecuación.

En la traducción de la expresión gráfica a la verbal, al Paula inicialmente tener una gráfica errónea esta traducción no va ser en totalidad correcta pues como se observa en su repuesta dice que es un circunferencia con radio 3 pero su centro no es correcto. Esto nos conduce a preguntarnos ¿el error de Paula fue de interpretación o de saberes? Si no tengo los presaberes necesarios aun haciendo una buena interpretación no podría solucionar el problema.

Al contrario de lo anterior vemos la interpretación que realiza Germán (Figura 38) en donde en cada una de las traducciones realizadas reconoce los elementos implicados y los expresa de manera correcta.

Figura 38 Respuesta dada por Germán al inciso 1 de la actividad de la sesión 2



Germán al comprender el ejercicio explica a sus compañeros la interpretación utilizada para el desarrollo del enunciado posibilitando que Paula se diera cuenta de su error y corrigiera su respuesta. De esto podemos destacar la importancia de la comunicación de los procesos de los estudiantes para que el otro (el que está confundido) pueda corregir y aprender.

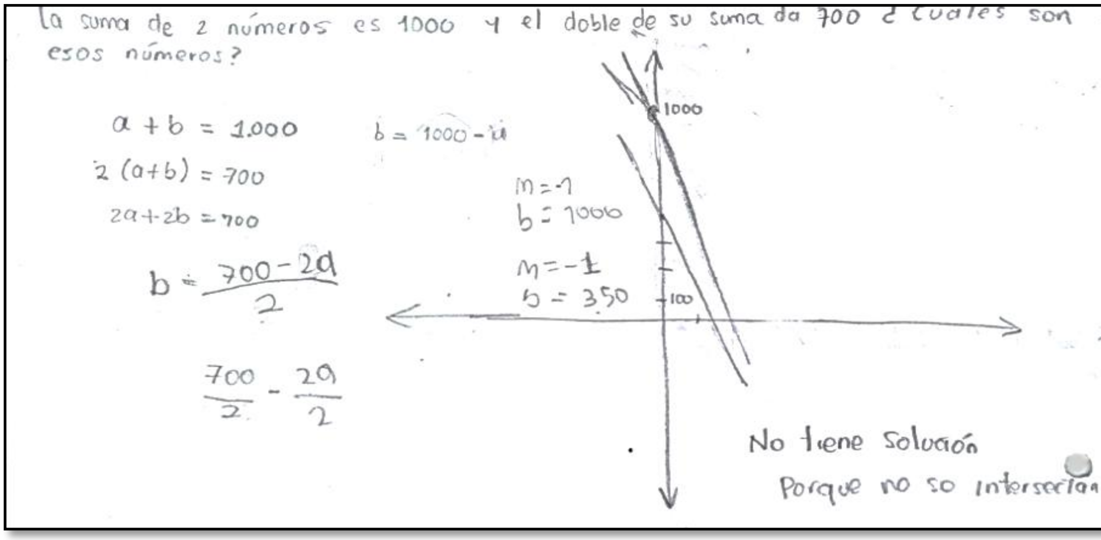
5.3.2 Interpretación de gráficas finalizando el plan de intervención

Este enunciado surge en el desarrollo de la actividad de la sesión 9 como ejercicio complementario para reforzar la interpretación de gráficas. El problema consistía en lo siguiente

> *La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700 ¿cuáles son estos números?*

En la Figura 39 se observa el procedimiento que Germán realizó para dar respuesta al enunciado.

Figura 39. Interpretaciones realizadas por Germán al enunciado



En primera instancia se observa que Germán realiza la traducción del lenguaje verbal al algebraico, en donde plantea correctamente un sistema de ecuaciones que al desarrollarlo no le permite encontrar los valores de las incógnitas, luego se observa que hace la traducción del lenguaje algebraico al gráfico obteniendo dos rectas que no se intersectan, con esta información que ya tiene hace una buena interpretación y de esta manera logra la solución del ejercicio.

En este ejemplo como lo expresa Duval (1992) el estudiante Germán al obtener inicialmente la expresión algebraica de un enunciado y relacionar las diferentes representaciones logra interpretar y dar respuesta correcta a éste.

Esta última evidencia nos permite concluir que las actividades desarrolladas durante el trabajo de campo de nuestra investigación posibilitó que en la mayoría de los estudiantes que participaron se produjera un avance en el desarrollo de la habilidad para interpretar enunciados ya sean verbales, pictóricos o algebraicos, reflejándose en la resolución de problemas ya que cuando el estudiante realizaba una buena interpretación a la situación, la podía traducir correctamente y si contaba con los presaberes necesarios entonces lo lograba solucionar.

6. HABILIDADES EXPLICATIVAS Y SUS REPERCUSIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Harel y Sowder (1998), citados por Recio (2002) plantean que la argumentación explicativa se trata de formas muy elementales de argumentación, que sirven para exponer el significado de proposiciones a partir de su aplicación a casos particulares. En este tipo de argumentaciones no existe una intención validativa, sino totalmente explicativa. Pueden ser consideradas como el primer estrato del proceso demostrativo. De las evidencias encontradas identificamos dos maneras en la que se puede presentar la habilidad para explicar, la primera explicaciones basadas en argumentos matemáticos a nivel de estudiantes de once grado, entendiendo que ellos aún no cuentan con las herramientas suficientes para realizar procedimientos formales y la segunda explicaciones basadas en consideraciones propias que se expresan por medio del lenguaje natural.

A partir de la revisión de la literatura y la confrontación de ésta con los datos recogidos en la implementación de las experiencias didácticas en las que se reforzó las habilidad para explicativa, encontramos que el desarrollo de ésta puede fortalecer las competencias comunicativas y por ende aportar en la construcción de aprendizajes matemáticos en tres direcciones, mismas que describimos a continuación y que usaremos en este capítulo como subcategorías de análisis.

- Las ***explicaciones pueden constituirse en una herramienta para comprender,*** Duval (1999) expone que una explicación da una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno o resultado. Por otra parte, los NCTM (2000) plantean que cuando a un estudiante se le pide dar una explicación o escuchar las explicaciones de los demás sobre un objeto matemático de estudio tienen más posibilidades de comprenderlo.

- Balacheff (1982) infiere que para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo. Este reconocimiento puede ser objeto de un debate donde la significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores. Esto nos lleva a categorizar las ***explicaciones como herramienta provocadora de discusiones para la construcción colaborativa de conocimiento.***
- Schoenfeld (1992) propone que los estudiantes deben ir más allá́ de describir sus algoritmos para resolver un problema y más bien debe dárseles la oportunidad para que expliquen las estrategias que van a usar y porqué las han seleccionado. Para Schoenfeld el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas puede depender de estrategias cognitivas o heurísticas que involucren formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer subtemas, descomponer el problema en casos simples, etc. Es así de donde deducimos que las ***explicaciones pueden convertirse en una herramienta de búsqueda de información que no sólo posibilita dar respuesta a un enunciado sino la construcción significativa de conocimiento.***

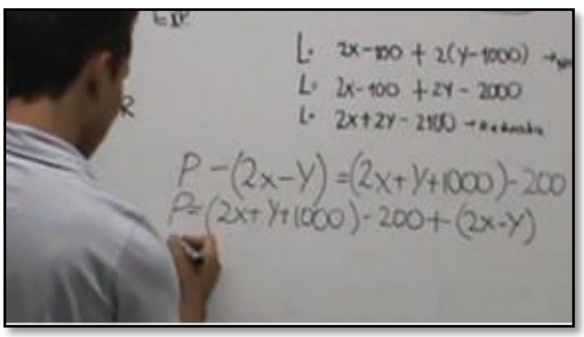
6.1 EXPLICACIONES COMO UNA HERRAMIENTA PARA COMPRENDER.

Según Balacheff (1982) la explicación es un intento personal para autoconvencerse de la validez de una proposición. Se usa el conocimiento propio y se siguen reglas propias de decisión. No obstante, finalmente está dirigido a hacer inteligible a otro la verdad. La base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

6.1.1 Expresando razones alrededor de la solución de un problema

El juego Gymkhana Matemática nos ofrece un episodio en donde se percibe que Carlos está explicando a su compañera Paula el procedimiento que ha realizado para despejar “P” en el enunciado “El puntaje de Pedro menos el puntaje de Martha nos da el de Fabián menos 200 puntos. Pedro obtuvo.” Allí “P” hace alusión a Pedro

Tabla 6 Explicación de Carlos en el despeje de la incógnita P

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Paula: ¿cierto que se podría pasar a multiplicar lo del paréntesis?
Profesora: ¿por qué a multiplicar?
Paula: para eliminarlo
Carlos: no porque este el paréntesis que está después del igual: $(2X + Y + 1000) - 200$ quedó igual y este $(-(2X - Y))$ paso al otro lado, pasa acá a sumar. Mire es que este $(2X + Y + 1000) - 200$ está a la derecha y queda aquí a la derecha (del igual), en cambio este $(-(2X - Y))$ está a la izquierda y paso a la derecha y como paso al otro lado pasa a sumar.
Paula: ah ya entendí
</td>
</tr>
</table>

Como lo plantean Harel y Sowder (1998), Carlos está llevando a cabo una argumentación explicativa, utilizando argumentos elementales para dar a entender a su compañera detalladamente los recursos matemáticos que hizo uso para realizar el despeje de P. Esta explicación le permite a Paula comprender en este ejercicio el procedimiento que se realiza cuando se desea despejar una incógnita.

Podemos decir que Carlos (ver Tabla 6) comprende cómo despejar una incógnita no solo porque posee la información sino que es capaz de realizar una explicación con sus propias palabras de lo que significa este procedimiento.

6.1.2 Exponiendo argumentos que justifiquen una respuesta.

En la actividad de desarrollo de la sesión 4 en donde se plantea un problema y a éste se le presentan dos soluciones una correcta y la otra incorrecta nos encontramos con la explicación que está dando Andrea a la solución escogida por ella. Recordemos el enunciado

> *Tres embarcaciones realizan un crucero. La segunda embarcación invierte dos veces <u>más</u> tiempo que la primera, pero dos veces <u>menos</u> que la tercera. Y la tercera invierte 30 días <u>más</u> que la primera. ¿Cuánto tiempo invierte cada embarcación en hacer el crucero?*

Andrea en su explicación (ver Tabla 7) como lo expresa Duval (1999) está haciendo una descripción del problema para encontrar la solución correcta, aunque la explicación que realiza hace referencia a los datos enunciados y ella les busca relación con la respuesta que está escogiendo, Andrea no hace una buena interpretación del problema. Ella no se preocupa por comprender el significado de cada una de las frases enunciadas en este, si no que relaciona las palabras con las operaciones que debe realizar aun cuando éstas no son relevantes en el planteamiento, además cabe resaltar que Andrea no diferencia entre una ecuación y una expresión.

Tabla 7 Explicación de Andrea a la respuesta escogida en el problema de la sesión 4

Solución escogida	Explicación
Solución Andrés Embarcación 1:A Embarcación 2:B Embarcación 3:C $B + 2A$ (1) $B - 2C$ (2) $C = A + 30$ (3) Luego, $B + 2C$ $B - 2(A + 30)$ $B - 2A + 60$ Por eliminación entre (1) y (2) se obtiene que $B = 30$ Por consiguiente reemplazando B en las ecuaciones (1) y (2) se obtiene $A = 15$ $B = 30$ $C = 45$	Porque mire, *aquí nos dice: son tres embarcaciones, la segunda embarcación invierte dos veces más que la primera, ahí hay* ***suma****, pero dos veces menos que la tercera,* ***resta****; y la tercera invierte 30 días, entonces son* ***más*** *30 días. Entonces el problema nos está dando el proceso que se debe llevar, nos dice que se* ***suma*** *y que se* ***resta*** *y en este problema nos están dando una ecuación en la que se estás* ***sumando*** *y se están* ***restando,*** *aquí está sumando, restando, sumando y restando (señalando las ecuaciones de la solución de Andrés) y está ecuación (las ecuaciones de la solución de Juan(*ver Figura 18*) yo digo que no es porque acá no se está llevando ni una suma ni una resta solamente se está llevando una división, entonces por eso yo digo que es la solución de Andrés*.[ ]

En el desarrollo del plan de intervención los estudiantes dejaron ver que tenían un nivel medio para realizar explicaciones cuyo propósito era expresar sus interpretaciones fueran correctas o incorrectas. Una buena explicación no depende de la interpretación que se realice puesto que en ocasiones se expresan razonamientos errados, y esto no impide que lo que se está comunicando no se entienda, al contrario esta explicación se convierte en el camino que permite una buena interpretación, debido a que esto conlleva a una discusión y aclaración posibilitando al estudiante que está explicando que comprenda el problema o situación que había mal interpretado.

6.2 EXPLICACIONES COMO HERRAMIENTA PROVOCADORA DE DISCUSIONES PARA LA CONSTRUCCIÓN COLABORATIVA DE CONOCIMIENTO.

Schoenfeld (1987) sugiere que entre las ideas que pueden ayudar a promover la discusión de los estudiantes esta que el maestro cuestione aspectos relacionados con el entendimiento de problema, puede plantearles: ¿ha entendido cada uno del problema? ¿Cómo podemos encontrar el sentido del problema? ¿Han explorado las condiciones del problema?, etc. Después se evalúan algunos métodos de resolución sugeridos por los propios estudiantes. Un mensaje en esta primera interacción es que el estudiante debe estar seguro de que entiende el problema antes de intentar obtener la solución, después de haber avanzado en algún intento de solución, es importante que se haga una pausa y se discuta la viabilidad del método (aun cuando la dirección sea la correcta) esto permitirá decidir si se continúa en esta dirección o se considera otra vía de solución. La idea es que se ilustre la importancia de que uno siempre debe evaluar el progreso hacia la solución y estar dispuesto a reconsiderar los caminos iniciados. Esta evaluación debe aparecer durante todo el proceso hasta alcanzar la solución. Después se analiza lo que se hizo al resolver el problema y se discuten otras alternativas de solución. Schoenfeld asegura que este tipo de discusiones con todo el grupo ayudan a que los estudiantes desarrollen estrategias de autorregulación al resolver los problemas.

En la actividad donde los estudiantes debían escribir una carta inventando un problema relacionado con un sistema de ecuaciones (sesión 5) nos encontramos con la siguiente discusión que se generó a partir del planteamiento y solución que le da Susana a su enunciado.

El problema planteado por Susana y la solución son los siguientes (Tabla 8):

Tabla 8 Enunciado y solución del problema de Susana

Enunciado	Solución:
Hay una competencia en la cual participa Pablo, Isabel, Pedro y Rafael en donde Pablo obtuvo 10 puntos, Isabel obtuvo dos veces más que Pablo pero tres veces menos que Pedro. Pedro obtuvo el doble que Pablo y Rafael obtuvo 30 veces más que Pedro. *¿Quién obtuvo más puntos en la competencia y quien menos puntos*	Pablo= $10\ puntos$ Pedro: $2Pab$ Isabel: $2Pab(-3Pe)$ Rafael: $30Pe$ línea [20] de la discusión. Pablo→ $10\ puntos$ Isabel→ $2Pab(-3Pe)$ $20(-60)$ Línea [21] $-0{,}3\ puntos$ Pedro → $2Pab$ $2x10$ $20\ puntos$ Línea [25] Rafael → $30Pe$ $30x20$ $600\ puntos$ Rta: Rafael obtuvo más puntos con 600 puntos e Isabel obtuvo -0,3 puntos fue la que menos puntos obtuvo.

Presentamos a continuación la discusión generada.

[19]. **Profesora:** 30 veces que Pedro, ¿más? ¿Menos?

[20]. **Susana:** <u>30 veces más, dice y Rafael obtuvo 30 veces más que Pedro, entonces sabemos que Pablo son 10 puntos. Isabel entonces obtuvo dos más que Pablo y 3 que Pedro</u>

[21]. **Susana:** […] <u>entonces seria acá 20 menos sesenta</u>

[22]. **Profesora:** ¿si es eso?

[23]. **Susana:** si porque Pablo obtuvo 10

[24]. **Profesora:** ¿Cuánto obtuvo Pedro?

[25]. **Susana:** Pedro obtuvo 20 puntos, porque Pedro es dos veces más que Pablo, dos por 10 eso es igual a 20 entonces daría menos 60 eso es igual a 0,3 puntos

[26]. **Profesora:** ¿20 menos 60 es igual a 0,3 puntos?

[27]. **Carlos:** es igual a menos 40

[28]. **Profesora:** ¿ósea que Isabel obtuvo menos 40 puntos?

[29]. **Susana:** entonces cómo hago porque es que se le quitaban punticos

[30]. **Profesora:** miremos otra vez las ecuaciones que ella planteó, dice que Pablo obtuvo diez puntos, Isabel obtuvo dos veces más que Pablo pero tres veces menos que Pedro, ¿está bien como ella lo planteó?

[31]. **Susana:** Pedro obtuvo veinte, entonces seria […]

[32]. **Lalo:** pues ahí daría que el puntaje es como cero

[33]. **Profesora:** ¿Cómo cero? ¿Será que el problema si está bien planteado?

[34]. **Lalo:** no

[35]. **Profesora:** dice dos veces más que Pablo, sí, pero tres veces menos que Pedro

[36]. **Lalo:** ah no entonces le quedo mal planteado porque le da menos cuarenta

[37]. **Profesora:** ¿da menos cuarenta?

[38]. **Lalo:** si lo de Isabel si da eso

[39]. **Lalo: […]** venga le digo una cosa ¿Por qué ella le puso el paréntesis ahí? porque empezó a multiplicar ¿no? Si era menos tres Pedro

[40]. **Profesora:** si ¿seguros que es menos tres Pedro?, Isabel obtuvo dos veces más que Pablo pero tres veces menos que Pedro

[41]. **Lalo:** ósea sería Pedro sobre tres

En este fragmento de la discusión generada alrededor del planteamiento que hace Susana, vemos que ella inicialmente realiza una explicación sobre la solución del enunciado en base a las ecuaciones que plantea a partir de su interpretación, aunque el enunciado es inventado por ella no se fija que al traducirlo al lenguaje algebraico lo hace de manera incorrecta; este errado planteamiento provoca la discusión presentada, conduciendo tanto a Susana como a los demás compañeros a reflexionar sobre la veracidad de las ecuaciones, como se puede observar en la intervención que hace Lalo en la línea [39]. Sin embargo a esta altura de la discusión aún no había comprendido el problema.

Schoenfeld (1987) sugiere que después de haber avanzado en la solución de un problema es importante que se haga una pausa y se discuta sobre la viabilidad del método; como se aprecia en las siguientes líneas en donde la profesora tuvo que intervenir para facilitar la comprensión del enunciado.

[42]. **Profesora:** imagínese que yo tengo cien pesos, y usted tiene dos veces lo que yo tengo, doscientos, ¿sí?, y además yo tengo tres veces menos que lo que tiene Carlos, ¿Cuánto tendría Carlos?
[43]. **Susana:** él tiene seiscientos
[44]. **Profesora:** sí, seiscientos, ¿ósea cuánto tiene usted?, la tercera parte de lo que tiene Carlos, pero lo que yo tengo es independiente de lo que tiene Carlos.
[45]. **Lalo:** <u>entonces Carlos tendría seiscientos</u>… ¡ah ya!
[46]. **Profesora:** ¿sí?, entonces
[47]. **Lalo:** <u>entonces Pedro tendría… esto… veinte… cuarenta… sesenta</u>
[48]. **Profesora:** ósea Isabel tiene dos veces lo que tiene Pablo y aparte lo que tiene, ósea ¿qué otra ecuación puedo formar?
[49]. **Lalo:** <u>ósea seria como dos opciones</u>, u<u>na opción sería dos veces lo de Pablo y otra opción que ya tiene es que es tres veces lo de Pedro</u>
[50]. **Profesora:** no, aparte debe hacer otra ecuación
[51]. **Lalo:** <u>que sería Isabel igual a Pedro sobre tres</u>
[52]. **Susana:** pero si dicen que son dos opciones y luego se suman
[53]. **Profesora:** no, son independientes porque como les digo, si yo tengo cien pesos y tiene Carlos cuatrocientos pesos ¿qué relacion tiene?, ninguna, ¿no?, pero entonces usted tiene la mitad de lo que yo tengo pero tres veces menos que lo que él tiene

Polya (1945) propone que una de las estrategias que ayudan a construir un plan de solución es pensar en un problema conocido que involucre la misma clase de incógnitas pero que sea más simple; con el ejemplo propuesto por la profesora podemos ver a continuación como esta estrategia fue útil para la comprensión de la situación.

[54]. **Lalo:** Pedro sobre tres

[55]. **Profesora:** pedro obtuvo el doble que Pablo y Rafael 30 veces más que Pedro, ¿entonces cuánto va tener Rafael? ¿Cuánto va tener Isabel?

[56]. **Susana:** Rafael tiene treinta veces lo de Pedro pero Pedro tiene veinte

[57]. **Profesora:** si

[58]. **Susana:** pero entonces ¿con cuánto quedaría Isabel?

[59]. **Profesora:** Isabel tiene las dos opciones, dos veces lo de pablo

[60]. **Susana:** ¿se tiene que solucionar las dos o una sola?

[61]. **Profesora:** las dos porque tiene que corroborar que las dos condiciones se le cumplen, ¿si se cumplen?

[62]. **Lalo:** yo digo que está mal planteado porque eso no le va a dar

[63]. **Susana:** Pedro son veinte

[64]. **Profesora:** son veinte sobre tres, ¿veinte tercios es igual a veinte?

[65]. **Lalo:** ahí tenía que dar veinte, obviamente no va a dar

[66]. **Susana**: ¿cuánto da veinte sobre tres?

[67]. **Profesora:** seis punto seis

Después de este proceso en donde se observan las explicaciones e interpretaciones por parte de los estudiantes y las intervenciones de la profesora, vemos como Lalo llega a la conclusión de que el problema está mal planteado y por consiguiente no tiene solución. En la finalización de esta actividad los estudiantes manifestaron que cuando deseen plantear una situación, deben tener en cuenta el sistema de ecuaciones que va a resultar ya que si no lo hacen posiblemente les suceda lo que pasó con el problema de Susana.

En todas las actividades que se realizaron en el plan de intervención siempre estuvo presente la discusión de los estudiantes alrededor de las soluciones dadas a las situaciones planteadas, en donde cada una de estas explicaciones aportaban algo nuevo en ellos, ya fuese en conocimientos como en estrategias resultantes en el marco de la resolución de problemas

6.3 EXPLICACIONES COMO HERRAMIENTA DE BÚSQUEDA DE INFORMACIÓN PARA DAR RESPUESTA A UN ENUNCIADO.

Labarrere (1988) plantea que la solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución.

6.3.1 Produciendo un texto para explicar la noción de razón en matemáticas.

La actividad inicial que se desarrolló en la sesión 4 como se mencionó en el capítulo 4.5 consistió en explicar la noción de razón en matemática por medio de una carta. A continuación se presenta la carta realizada por Germán.

> **Germán:** Bucaramanga 22 de mayo del 2013, querido Sinforoso déjame tratar de explicarte que es una razón, lo que puedo recordar por razón es una fracción y esta es la imagen que tengo de ella eme sobre ele (m/l) el número que se encuentra arriba es el numerador y el número de abajo es el denominador en el que se divide una unidad. Un ejemplo donde podemos hallar una razón es el siguiente: un carro viaja a 48 kilómetros por hora, lo que quiere decir que en una hora el carro avanzó 48 kilómetros. Espero haberte podido ayudar con tu duda. Con cariño, tu primo Germán. Posdata más específicamente una razón es una comparación entre dos cantidades y más específicamente se expresa a dos puntos b y se lee ***a*** es a ***b***.

Como lo afirma Schoenfeld (1992) el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas puede depender de estrategias cognitivas o heurísticas que involucren formas de representar y explorar los problemas. En la carta se puede percibir que Germán sabe que es una razón pero no cuenta con la esquematización de este concepto ya que no puede expresarse en términos matemáticos que le permitan darse a entender por lo que se apoya de un ejemplo que le ayuda a explicar con mayor facilidad la noción de razón al destinatario.

6.3.2 Explicando argumentos que justifiquen una respuesta.

Otra de las respuestas encontradas para el problema planteado en la sesión 4 es la que nos brinda Manuel quien escoge como verdadera la respuesta de Juan, refutando la solución de Andrés.

> **Manuel:** encontré como que no era verdadera la de Andrés, bueno nos decía… yo me guie por la segunda parte que decía que era dos veces más que la primera y aquí (osea C=45) decía que era dos veces menos entonces 45 dividido en dos es 22,5 y no concuerda con 30. Luego para que hubiera sido por lógica C tendría que ser 60 para poder dividirlo entre dos y que nos diera los 30, yo me quede con la segunda que era dos veces menos, la mitad de 20 es 10 y acá (t2 igual a 20) dos veces más, el doble de 20, es 40 y 30 días más entonces 10 más 30 días va a dar 40.

Valle, Juárez y Guzmán (2007) identifican estrategias que emplean los estudiantes para solucionar un problema, entre ellas se encuentra hacer una lista en donde se relacionan todos los posibles resultados y el que cumpla con las exigencias planteadas en el problema, entonces se considera que se tiene la solución. Aquí se utiliza la comprobación para verificar la solución. En la explicación que nos transmite Manuel podemos apreciar que en la búsqueda de solución él se centra en la respuesta comparándola con el enunciado, buscando la relación que ésta debe tener con los datos que se presentan.

En el desarrollo de nuestro trabajo de campo se observó un avance en los estudiantes para llegar a las soluciones de los problemas, puesto que en las últimas sesiones ellos mostraban interés e inquietud por encontrar las respuestas, generando discusiones que los conducía a la búsqueda de estrategias, contrario a lo sucedido en las sesiones iniciales donde ellos manifestaban no entender o que simplemente la situación no se podía resolver.

7. REFLEXIONES FINALES

Las reflexiones que presentamos a continuación son el resultado de la experiencia realizada, a través de ella, recopilamos la información que nos permitió dar respuesta a la pregunta de investigación: **¿cómo influyen las habilidades comunicativas en el desempeño de matemáticas en estudiantes de once grado?**

Este capítulo se divide en 3 partes principales. En la primera y segunda parte se presentan las reflexiones sobre el desempeño de los estudiantes en la realización de las experiencias didácticas, a través de las dos habilidades como categorías de análisis. Donde se analizan las influencias de la habilidad para interpretar y la habilidad para explicar respectivamente en los procesos de resolución de problemas. Finalmente, en la tercera parte en la que se presentan las reflexiones finales del estudio con las cuales se evalúan las competencias comunicativas trabajadas en el estudio que estamos reportando en este documento.

7.1 INFLUENCIA DEL DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA INTERPRETAR EN LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- La habilidad para interpretar enunciados verbales, pictóricos o algebraicos, planteada como parte fundamental de las competencias comunicativas en matemáticas, se constituye en una posibilidad más que nos permite favorecer los procesos de resolución de problemas.
- Un estudiante ha desarrollado la habilidad para interpretar enunciados verbales cuando tiene la capacidad de identificar los datos, las incógnitas, las condiciones del problema, o encontrar datos no explícitos en el enunciado verbal. Además influye en los procesos de resolución de problemas cuando

el estudiante hace uso de estos elementos claves que le permiten llegar a la solución.

- La traducción que causó más dificultad en los estudiantes es la traducción del lenguaje gráfico, debido a que estas traducciones no son frecuentes en el aula de clases. Un estudiante interpreta una gráfica cuando reconoce los elementos significativos en ella y es capaz de utilizar esto en la resolución de problemas.
- Para la resolución de problemas no sólo es necesario la interpretación de enunciados sino también los presaberes matemáticos necesarios; puesto que si un estudiante interpreta correctamente el enunciado pero no tiene los conocimientos, no podrá resolver el ejercicio satisfactoriamente.
- Es importante que el estudiante maneje las diferentes traducciones de las representaciones ya sea de la verbal a la gráfica, de la algebraica a la gráfica o de la verbal a la algebraica y viceversas, ya que esto le permite tener una mejor comprensión de un objeto matemático y por ende facilitar el proceso de resolución de problemas

7.2 INFLUENCIA DEL DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA EXPLICAR EN LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

- La interpretación y la explicación son habilidades independientes que se complementan entre sí. Puesto que en ocasiones los estudiantes expresan razonamientos erróneos sin que esto impida una explicación. Pero cuando se realiza esta acción permite al estudiante que está explicando recibir de sus compañeros ideas que lo conduzcan a corregir aquella mala interpretación. Por otro lado una buena explicación procede de una correcta interpretación, ya que cuando el estudiante comprende lo que se enuncia, puede organizar sus ideas y esto se ve manifestado en su explicación.

- Es importante que los estudiantes comuniquen los procesos desarrollados a sus compañeros, realizar esta actividad le permite a los interlocutores comprender el objeto matemático en estudio, además pueden juzgar si sus planteamientos son correctos o incorrectos y corregir si es necesario sus errores para de esta manera aprender de ellos.
- Provocar discusiones alrededor del planteamiento de un enunciado proporciona explicaciones que conllevan a la búsqueda de información y estrategias cognitivas o heurísticas, que permiten la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos para facilitar la comprensión de situaciones en la resolución de problemas.

7.3 CONSIDERACIONES FINALES DEL ESTUDIO.

- En el desarrollo de las actividades del plan de intervención, se observó que los estudiantes asumieron una posición activa, mostrando interés por superar sus dificultades; lo que facilitó un avance en sus competencias comunicativas en matemáticas demostradas en los resultados de la prueba diagnóstica final.
- En los resultados de la prueba diagnóstica inicial aplicada a todo el curso se encontraron estudiantes con desempeño medio-alto en las habilidades comunicativas, no obstante, estos estudiantes no participaron en el plan de intervención. Con respecto a los estudiantes que hicieron parte del trabajo de campo de este proyecto, se observó un avance alrededor de sus habilidades comunicativas en la prueba diagnóstica final.

  Como es el caso de Carlos que en la prueba inicial no respondió a ninguno de los ítems. Sin embargo, no podemos asegurar que fuese porque no entendía puesto que existen otros factores que pudieron influir en esto. En el desarrollo del plan de intervención, Carlos estuvo motivado en participar y en aprovechar de las actividades que se les estaban presentando, esto se vio reflejado en su prueba diagnóstica final puesto que en sus respuestas había presencia de habilidades comunicativas. Resultados similares se observaron en las respuestas dadas por la mayoría de los participantes del plan de intervención.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, C. (2008). ¿Y que investigan las facultades de educación sobre las didácticas en competencias comunicativas? *Horizontes pedagógicos*, 10 (1), 9-18. Recuperado de http://www.iberoamericana.edu.co/images/R10_ARTICULO1_HORIZ.pdf

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. En Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 3, nº 3 (pp. 261-304).

Barajas, A. y Esparza, O. (2010). *Implementación del modelo Rasch para la estimación de la habilidad algebraica de los estudiantes del primer semestre de ciencias e ingeniería de la Universidad Industrial de Santander.* Trabajo de grado. (Publicada en http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2010/134776.pdf)

Bednarz, N. y Guzmán J. (2003) ¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos al álgebra? Un estudio exploratorio. México-Quebec. Fondo de Cultura Económica. México, pp. 11-40

Bustamante, C (2012) Hacia la construcción de modelos algebraicos multiplicativos en el grado sexto. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/6785/1/71334871.2012.pdf

Butto y Rojano (2010) Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86. Recuperado de http://scielo.unam.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a4.pdf

Calderón y Corredor (2001) Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Relime, 4(1)*, pp.5-21.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité Mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. Grenoble, France: LSD2, IMAG-Université Joseph Fourier.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. Revista Epsilon, 26, 15-30.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.) Handbook of qualitative research (pp. 1-17). Thousand Oaks, CA: Sage.

Durango, J., Parra, M., Toro, J. & Zapata, M. (2010) Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 29, 66-81.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. Antología en

Educación Matemática. Cinvestav. IPN. México.

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallego, D. (2011*). Enseñanza por competencias para un aprendizaje significativo en matemáticas.* Universidad nacional de Colombia sede Medellín.

Gregorio. J (2005) La resolución de problemas en primaria. Sigma 27. 9-34

Godino, J. (2002) Competencia y comprensión matemática. ¿Qué son y cómo se consiguen? *Revista Uno.* 29, 9-19.

Gonzales, M, Paniagua, C (2011). Interpretación de problemas matemáticos I. Decanatura de Ciencias. Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín.

Hans, R. (2011) La Producción de textos desde el enfoque comunicativo textual. Instituto Pedagógico Nacional Monterrico.

Harel, G. y Soxden, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En:Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), Research on Collegiate Mathematics Education, vol. III., 283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

Hernández, H., Delgado, J., & Fernández, B. (2001). Cuestiones de didáctica de la matemática. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Herrera (2012) Evaluación de la competencia argumentativa en matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

ICFES. (2010)¿Qué se evalúa? ¿Cómo se interpretan los resultados individuales? Bogotá.

ICFES (2012). ICFES Interpretar para Triunfar. Bogotá

Jorba, J. (1998) la comunicació i les habilitats cognitivo linguistiques en J. Jorba, Gómez y A. prat (coords.) parlar y escriure per aprende: us de la llengua en situació d´esenyament-aprenentatge de less árees curriculars (37-58),. Bellaterra: ICE-UAB

Kaput. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra, en Wagner, S. y Kieran, C. (eds.), pp. 167-194

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for Research and Teaching. In J. Cai, & E. Knuth, Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives (pp. 579-594). New York: Springer

Labarrere (1987) Bases psicopedagogicasigas de la solución de problemas matemático. Ed Pueblo y. Educación, la habana

LeCompte, M.D. (1995). Un matrimonio conveniente: diseño de investigación cualitativa y estándares para la evaluación de programas. RELIEVE, vol. 1, n. 1. Consultado en http://www.uv.es/RELIEVE/v1/RELIEVEv1n1.htm

Leitão, S. (2001) "Argumentação como processo de construção do conhecimento". II Encuentro Internacional: Lenguaje, Cultura y Cognición. Faculdade de Educação da UFMG.

Maciel, D. (2003). A avaliação no processo ensino-aprendizagem de Matemática, no ensino médio: uma abordagem formativa sócio-cognitivista. Tesis de maestría. Campinas: Editora da Unciamp.

Martínez, Echenique & Lavalle (2004) Prácticas de acompañamiento y seguimiento a estudiantes. Experiencias en la Universidad del Comahue. Universidad Nacional del Comahue. Secretaría Académica. Argentina. Recuperado de http://www.uncoma.edu.ar/academica/programas_y_proyectos/publicaciones/ponencia_san_martin.pdf

Ministerio de Educación Colombia (1998) Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Colombia (2006) Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación (2012) Leer bien, una tarea pendiente. Centro Virtual de Noticias de la Educación (CNVE). Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-295488.html

Montenegro, E. (1999). Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del Análisis Matemático en la Licenciatura en Educación carrera Matemática – Computación. Tesis en opción del título de master.

Morse, J. M. (1994). "Designing funded qualitative research", en N. K. Denzin y Y. Lincoln (eds.): Handbook of qualitative research, Thousand Oaks, CA: Sage, pp. 220-235

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Drucker, K.T. (2012). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niño Rojas, V. M. (2005). Competencias en la Comunicación. Hacia las prácticas del discurso. Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

OCDE (2006). El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve. París: OCDE. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Ortega, J. F .& Ortega, J.A. (2001). Matemáticas: ¿un problema de lenguaje? Consultado el 24 de octubre de 2013 en: http://uv.es/asepuma/jornadas/laspalmas/Doco06.pdf

Parada, S. (2005). La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga

Parada, S., (2012) Alternativas curriculares para atender la problemática relacionada con el curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander (UIS). *En memorias del IV Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación.* Bucaramanga, Colombia.

Paz, A., Rocha, O., Gonzáles, G., & Alvéstegui, M. (2011) Cómo leen y escriben los bachilleres al ingresar a la universidad: Diagnóstico de competencias comunicativas de lectura y escritura. La Paz: Universidad Católica Boliviana San Pablo; Fundación PIEB. Recuperado de http://lpz.ucb.edu.bo/Forms/Publicaciones/Libros/Como_leen_y_escriben.pdf

Perelman, Ch. & Olbrech−Tyteca, L. (1988). Tratado de la argumentación. Barcelona, España: Gredos

Pinxten, R. (1997). Applications in the teaching of mathematics and sciences. En A.B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), Challengingeurocentrism in mathematics education (pp. 373-402). New York: SUNY.

Presmeg, N.C. (2001). Shifts in meaning during transitions. En G. deAbreu et al (Eds.), Transitions between contexts of mathematical practice (pp. 213-228). London: Kluwer Academic Publishers.

Polya, G. (1945). How to solve it, Princeton University Press. Princeton.

Recio, Á. M. (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En Moreno, M. F. y otros (Ed.) Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática Universidad de Almería. (pp. 29-43).

Rigo, M., Rojano, T., Pluvinage, F. (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 445-452). Santander: SEIEM.

Rodríguez, S, & Belladona, S, (2006) La lecto-escritura en matemática. Universidad Nacional del Comahue - Patagonia – Argentina.

http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Reflexiones/CRG1.pdf

Santos Trigo, M. (1995). ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. *Educación Matemática,* 7 (1), 46-61.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Solar, H., Azcárate, C., Deulofeu, J. (2009). Competencia de modelización en la interpretación de gráficas funcionales. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 499-510). Santander: SEIEM.

Stewart, J (2008). *Cálculo: Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning editores.

Valle, Juárez y Guzmán (2007) identifican estrategias que emplean los estudiantes para solucionar un problema, entre ellas se encuentra hacer una lista en donde se relacionan todos los posibles resultados.

Villanueva, G. (2009). *Las matemáticas por competencias*. Ponencia presentada en el tercer foro nacional de ciencias básicas. Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_67.pdf

Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. México: siglo veintiuno editores.

ANEXOS

Anexo A. Carta enviada a los padres de familia

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TECNICO INDUSTRIAL JOSE ELIAS PUYANA

Bucaramanga, 10 de mayo de 2013

Señores
PADRES DE FAMILIA
Estudiantes de 11-1 Jornada de la mañana
E.S.M

Reciban un cordial saludo,

En los últimos años se está sintiendo una gran preocupación por las competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes a la Universidad Industrial de Santander. Alrededor de dicha problemática la Escuela de Matemáticas ha desarrollado algunos proyectos que reflejan, que algunas de sus debilidades están relacionadas con sus habilidades comunicativas.
Es por ello que hemos planteado la investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad**", misma que tiene como objetivo diseñar experiencias que posibiliten el desarrollo de dichas habilidades, para luego analizar la relación de éstas con el desarrollo de sus competencias matemáticas, específicamente las del pensamiento algebraico.
Para el desarrollo de la investigación se ha propuesto el plan de trabajo descrito en la Tabla que aparece a continuación, el cual esperamos desarrollar con el apoyo de la profesora Claudia Montañez.

No.	ASPECTO	TIEMPO	FECHA	LUGAR
1.	Diagnostico Inicial	6:00-8:00	10 de mayo	Colegio
2.	Traduccion del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.	15:00-17:00	15 de mayo	UIS
3.	Comunicar los procedimientos que va a realizar.	15:00-17:00	17 de mayo	
4.	Traduccion grafica al lenguaje algebraico.	14:30-17:30	18 de mayo	
5.	Argumentacion de los procesos realizados.	15:00- 17:00	20 de mayo	
6.	Plantear situaciones a partir de un sistema de ecuaciones dado.	15:00-17:00	22 de mayo	
7.	Formular y proponer conjeturas a partir de un sistema de ecuaciones.	14:30-17:30	25 de mayo	
8.	Relacionar sistemas de ecuaciones y contenidos geometricos.	14:30–17:30	1 de junio	
9.	Repaso	15:00-17:00	5 de junio	
10.	Diagnostico Final	6:00-8:00	7 de junio	Colegio

Es de nuestro interés que su hijo(a) participe en el proyecto, para tal efecto necesitamos su autorización para que él (ella) asista a las actividades. Si usted está de acuerdo, le solicitamos de manera atenta que firma el desprendible que aparece en la parte inferior de la siguiente hoja.

Agradecemos su colaboración

Sonia Rocio Suárez Cáliz- Silvia Johanna Rojas Sepúlveda
Estudiante Lic. Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Sandra Evely Parada Rico
Profesora Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Claudia Montañez Villamizar
Profesora de Matemáticas
Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana

Anexo B. Desprendibles de autorización por parte de los padres de familia.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, _____ de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Arnhold Kg Giovanny Gelvez S para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

[illegible] y ____________________
Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Torres de Sevilla T4 Apt 103 Cra 27 # 195-125 (Autopista Florida)
Teléfonos (fijos y celulares): 320 8012326
Correos electrónicos: johana.2712@hotmail.com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, 15 de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Cristian Forero Moncada para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

MYRIAM MONCADA MALAGON
Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Calle 84 a No 44-10 2° Piso
Teléfonos (fijos y celulares): 6480882
Correos electrónicos: mmon_4moncada@hotmail.es cristianfm_@hot..com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, 15 de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Luis Eduardo Reyes Arias para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad**". Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

_________ y Rafael Reyes
Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: calle 5 # 7-19 - Floridablanca casco antiguo.
Teléfonos (fijos y celulares): 6498022 - 3164030478 - 3165188808
Correos electrónicos: luiseduardo reyes 20@outlook.com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, _____ de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Axel Gisel Zuluaga para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad**". Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

_________ y Alexandra Bedrillo
Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: sector 19 Bucarica
Teléfonos (fijos y celulares): 3178554666
Correos electrónicos: axelitta_94 @hotmail.com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, _____ de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Miguel Ángel Liñán Gómez para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Cra 6 # 4-92 Santa Ana
Teléfonos (fijos y celulares): 3154569895
Correos electrónicos: miguel-linan@Hotmail.com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, 14 de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Sandra Suarez Ferrer. para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

Betcy Margarita ferreR A. y ____________________
Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Bloque 11-18 APT 301 BUCARICA.
Teléfonos (fijos y celulares): 317 7697873 6533132.
Correos electrónicos: KARKU_doe@HOTMAIL.COM.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, _____ de mayo de 2013

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Jenniffer Tatiana Velasco R. para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

__________ y __________

Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Bloque 12-13 Apto 501

Teléfonos (fijos y celulares): 3185696578

Correos electrónicos: patawijo@Gmail.com

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
COLEGIO TÉCNICO INDUSTRIAL JOSÉ ELÍAS PUYANA

Bucaramanga, 14 de mayo de 2013

Paola Andrea Suárez Barrios

Por medio de la presente, autorizo a mi hijo (a) Doris Barrios Sandoval para que participe en las actividades del proyecto de investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad".** Además me comprometo para que él (ella) asista a las sesiones de trabajo descritas previamente y que se desarrollarán en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander.

Atentamente,

Doris Barrios y S.

Padres de familia (o acudiente autorizado)

DATOS DE CONTACTO

Dirección: Calle 102 # 33 a - 13

Teléfonos (fijos y celulares): 3156060669

Correos electrónicos: andreitasuarez_685@hotmail.com

Anexo C. Carta enviada al rector de la institución

Bucaramanga, 16 de mayo de 2013

Señor
Hugo Hernán Serrano Mantilla
Rector Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana
E.S.M

Reciban un cordial saludo,

En los últimos años se está sintiendo una gran preocupación por las competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes a la Universidad Industrial de Santander. Alrededor de dicha problemática la Escuela de Matemáticas ha desarrollado algunos proyectos que reflejan, que algunas de sus debilidades están relacionadas con sus habilidades comunicativas.

Es por ello que quien escribe y dos estudiantes de último semestre de la licenciatura en Matemáticas hemos planteado la investigación "**Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad",** misma que tiene como objetivo diseñar experiencias que posibiliten el desarrollo de dichas habilidades, para luego analizar la relación de éstas con el desarrollo de sus competencias matemáticas, especificamente las del pensamiento algebraico.

Para la planeación del trabajo de campo que nos permita recoger información suficiente para alcanzar nuestro objetivo de investigación nos hemos apoyado de la profesora Claudia Montañez, quien labora como docente de los primeros niveles de la universidad y de once grado de la institución que usted dirige. Lo anterior porque la profesora cuenta con amplia experiencia docente y además es conocedora de la problemática que se aborda en nuestra investigación.

Es por ello que hemos solicitado a la profesora Claudia nos permita desarrollar la investigación con algunos de sus estudiantes de 11 grado. Por lo cual esperamos contar con su autorización y la de los padres de familia a quienes se les solicitará por medio escrito la aprobación para que sus hijos asistan a las actividades que se tiene programadas en las instalaciones de la universidad. Actividades que están organizadas en 8 sesiones de dos horas en la jornada de la tarde entre el 20 de mayo y el 7 de junio.

Agradecemos su colaboración y quedamos atentos a cualquier duda o inquietud al respecto.

Sandra Evely Parada Rico
Profesora Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Ciudadela universitaria. Oficina 257
Teléfono 6 34 40 00 Ext. 2315
Correo electrónico: sparada@matematicas.uis.edu.co