

**Análisis tridimensional de objetos a 360° de observación y campo amplio
con múltiple configuración proyector-cámara a partir de iluminación
estructurada**

M. Sc. Carlos Ricardo Contreras Pico

**Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2014**

**Análisis tridimensional de objetos a 360° de observación y campo amplio
con múltiple configuración proyector-cámara a partir de iluminación
estructurada**

M. Sc. Carlos Ricardo Contreras Pico

**Tesis de Doctorado para optar al título de
Doctor en Ciencias Naturales Físicas**

**Director
Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca**

**Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2014**

Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos:

Al Doctor Jaime Meneses por su paciencia, orientación y apoyo en la realización de este proyecto y por los conocimientos impartidos en mis estudios de Pregrado, Maestría y Doctorado.

A mi familia, en especial a mi madre y a mi padre por el apoyo y el afecto recibidos.

A mi esposa y a mi hijo por el amor que me dan.

A mis amores eternos, a mis amores efimeros

Tabla de contenido

Introducción	20
1. Métodos de reconstrucción tridimensional	22
1.1. Hardware	23
1.2. Software	23
1.2.1. Filtrado de datos	23
1.2.2. Registro de datos e integración	23
1.2.3. Reconstrucción de la superficie	23
1.2.4. Simplificación y suavizado de datos	23
1.2.5. Segmentación de datos	24
1.2.6. Detección de características	24
1.2.7. Comparación de datos	24
1.3. Clasificación de los sistemas hardware	24
1.4. Métodos de contacto	25
1.5. Métodos de no contacto	26
1.6. Sistemas pasivos	26
1.7. Sistemas activos	27
1.8. Reconstrucción 3D por el método de proyección de franjas	30
1.9. Algoritmo de corrimiento de fase	34
2. Calibración de un módulo de reconstrucción 3D	37
2.1. Modelo <i>Pinhole</i>	39
2.2. Cámaras digitales (CCD o CMOS)	46
2.3. Aberraciones geométricas	47
2.4. Calibración de la cámara	50
2.5. La técnica de calibración de Zhang	52
2.6. Distorsión radial	58
2.7. Cálculo de los coeficientes de la distorsión radial	59
2.8. Calibración experimental de una cámara digital	60

2.9.	Calibración de una unidad de proyección-adquisición	67
2.10.	Modelo propuesto para la calibración	67
2.11.	Coordenadas (m,n)	79
2.12.	Calibración experimental de un sistema de proyección-adquisición	87
2.13.	Descripción del procedimiento experimental	91
3.	Corrección del error de fase para un sistema no tele-céntrico	107
3.1.	Relación entre la fase y la coordenada m	109
3.2.	Reconstrucción 3D	110
3.3.	Corrección del error de fase	119
3.4.	Generación de la estructura de datos que modeliza el error de fase	122
3.5.	Resultados experimentales	125
4.	Reconstrucción 3D a 360° de observación usando un sistema de proyección-adquisición, aplicaciones en la industria del petróleo	130
4.1.	Tuberías flexibles	131
4.2.	Tubería no metálica compuesta	132
4.3.	Fallas en tuberías flexibles con refuerzo no metálico	132
4.3.1.	Grietas	132
4.3.2.	Poros y ampollas	132
4.3.3.	Deformaciones excesivas	133
4.4.	Resultados experimentales	133
4.5.	Reconstrucción 3D de la tubería a 360° de observación	140
4.6.	Evaluación metrológica del sistema de reconstrucción	149
5.	Reconstrucción 3D a 360° de observación usando múltiples sistemas de proyección-adquisición	156
5.1.	Resultados experimentales	158
5.2.	Estrategia propuesta para unificar las nubes de puntos adquiridas por cada sistema de reconstrucción	159
5.3.	Evaluación metrológica de uno de los sistemas de proyección-adquisición	167
6.	Reconstrucción 3D usando un proyector y dos cámaras digitales	171

6.1.	Resultados experimentales	172
6.2.	Estrategia propuesta para unificar las nubes de puntos adquiridas por cada sistema de reconstrucción	173
6.3.	Evaluación metrológica de uno de los sistemas de proyección-adquisición	179
Conclusiones		182
Perspectivas		185
Bibliografía		187

Lista de Figuras

1. Clasificación de los métodos de adquisición de datos 3D	25
2. Montaje experimental de un sistema de proyección de franjas	32
3. Sistemas coordenados implementados en el modelo <i>pinhole</i>	40
4. Semejanza de triángulos: (a) plano $X_c - Z_c$; (b) plano $Y_c - Z_c$	41
5. Vista frontal del plano imagen	43
6. Transformación euclidiana entre el sistema coordenado del mundo y el de la cámara	44
7. Componentes de la distorsión	48
8. Patrón de calibración utilizado	61
9. Identificación de esquinas mediante la CCT para la primera imagen adquirida: (a) Imagen adquirida. (b) Esquinas detectadas	62
10. Coordenadas, experimentales y teóricas, calculadas para la primera imagen adquirida	65
11. Error de retroproyección en píxeles	66
12. Posiciones de los planos adquiridos respecto al sistema coordenado de la cámara	66
13. Esquema del proyector	67
14. Variación del esquema del proyector	68
15. Geometría <i>pinhole</i> del proyector	69
16. Sistema coordenado de la LCD	69

17. Línea sobre la LCD del proyector: (a) m_x en x_p^l . (b) n_y en y_p^l	70
18. Representación gráfica del vector \mathbf{r}	70
19. Proyección del plano: (a) Vertical. (b) Horizontal	71
20. Vectores que pertenecen al plano vertical que pasa por m_x	72
21. Vectores que pertenecen al plano horizontal que pasa por n_y	73
22. Sistemas coordenados para el sistema de proyección-adquisición	75
23. Patrón de puntos pseudoaleatorio. (a) Proyectado por el proyector. (b) Adquirido por la cámara	80
24. (a) Retroalimentación de desplazamiento lineal. (b) Secuencia binaria pseudoaleatoria	81
25. Primeras 9 filas del patrón de puntos mostrado en la Figura 23a	83
26. Transformada de Fourier del patrón de puntos mostrado en la Figura 23b	85
27. Fase discontinua e intensidad asociadas al patrón de puntos	86
28. Imagen aumentada del patrón de puntos de la Figura 23b con sus res- pectivas curvas de nivel	87
29. Sistema de reconstrucción 3D implementado	87
30. Plano de referencia intersecado por la línea recta que pasa por los pun- tos O_c y P_c	89
31. (a) Patrón de calibración. (b) Proyección del patrón de puntos sobre el plano de calibración	90
32. (a) Plantilla de colores. (b) Imagen monocromática de la plantilla de co- lores	90

33. Colores seleccionados para el patrón de calibración. (a) R: 165, G: 255, B: 0. (b) R: 255, G: 150, B: 0	91
34. Patrones proyectados. (a) Patrón de puntos. (b) Patrón de color R: 255, G: 150, B: 0	92
35. Imágenes de calibración. (a) Patrón de puntos. (b) Tablero ajedrezado	92
36. Patrón de puntos y fase discontinua. (a) Distribución de fase en la dirección horizontal. (b) Distribución de fase en la dirección vertical	93
37. Distribución de fase continua. (a) Dirección horizontal. (b) Dirección vertical	94
38. Coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control correspondientes a la primera imagen adquirida	94
39. Patrón de puntos en la LCD. Las cruces de color rojo muestran los puntos para los cuales se conocen tanto sus coordenadas (m, n) como sus coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y})	95
40. Coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control vistos por la cámara CCD	96
41. Representación gráfica de los vectores \mathbf{r}_w , \mathbf{C} , \mathbf{r}_c , \mathbf{X}_c y \mathbf{X}_w	99
42. Coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) del punto de control de la Figura 40	101
43. Coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) de todos los puntos de control	102
44. Proyección de la franja vertical x_p^l sobre la LCD del proyector	110
45. Sección de la tubería	111
46. Imágenes del patrón de franjas adquiridas por la cámara CCD. (a) I_1 ; $\delta_1 = 0^\circ$. (b) I_2 ; $\delta_2 = 90^\circ$. (c) I_3 ; $\delta_3 = 180^\circ$. (d) I_4 ; $\delta_4 = 270^\circ$	111
47. Fase discontinua del sistema de franjas proyectado	112

48. Corte en intensidad en dirección del eje x realizado a la imagen de la Figura 47	112
49. Fase continua del sistema de franjas proyectado	113
50. Corte en intensidad en dirección del eje x realizado a la imagen de la Figura 49	113
51. Procedimiento de reconstrucción 3D	114
52. Punto p_C con coordenadas (1024,768)	115
53. Punto P en el sistema coordenado de la cámara	118
54. Nube conformada por 786432 puntos que pertenecen a la superficie de la tubería	118
55. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 54	119
56. Procedimiento de generación de la imagen en la cámara	122
57. Polinomio que modeliza la fase ideal	122
58. Fase ideal y fase real	123
59. Error de fase	124
60. Error promedio e interpolación	124
61. Error de fase asociado a diferentes periodos del patrón de franjas pro- yectado	125
62. Imágenes del patrón de franjas reflejadas por el objeto plano y adquiri- das por la cámara CCD. (a) $I_1; \delta_1 = 0^\circ$. (b) $I_2; \delta_2 = 90^\circ$. (c) $I_3; \delta_3 = 180^\circ$. (d) $I_4; \delta_4 = 270^\circ$	126
63. Reconstrucción 3D del objeto plano. (a) Reconstrucción 3D sin corregir el error de fase. (b) Reconstrucción 3D corrigiendo el error de fase	127

64. Error de fase (correspondiente a un periodo de 128 píxeles) antes de la corrección	128
65. Error de fase (correspondiente a un periodo de 128 píxeles) después de la corrección	128
66. Error de fase (correspondiente a un periodo de 8 píxeles) antes de la corrección	129
67. Error de fase (correspondiente a un periodo de 8 píxeles) después de la corrección	129
68. Estructura de la tubería flexible con refuerzo no metálico	132
69. Sección de la tubería a reconstruir	133
70. Imágenes del patrón de franjas reflejadas por la tubería y adquiridas por la cámara CCD. (a) I_1 ; $\delta_1 = 0^\circ$. (b) I_2 ; $\delta_2 = 90^\circ$. (c) I_3 ; $\delta_3 = 180^\circ$. (d) I_4 ; $\delta_4 = 270^\circ$	134
71. Nube de datos que representa la superficie de la tubería	135
72. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 71	135
73. Nube de puntos después de eliminar la curvatura promedio	136
74. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 73	137
75. Mapa de profundidades correspondiente a la nube de puntos mostrada en la Figura 74	137
76. Mallado correspondiente a la región seleccionada del mapa de profundidades	138
77. Corte realizado sobre el mapa de profundidades mostrado en la Figura 75. La línea número 1 de color negro muestra la región donde se realizó el corte	138

78. Corte realizado sobre el mapa de profundidades mostrado en la Figura 75. La línea número 2 de color negro muestra la región donde se realizó el corte	139
79. Corte realizado sobre el mapa de profundidades mostrado en la Figura 75. La línea número 3 de color negro muestra la región donde se realizó el corte	139
80. Primera nube de datos adquirida	144
81. Ampliación de la nube de datos de la Figura 80	144
82. Segunda nube de datos adquirida	145
83. Ampliación a la nube de datos de la Figura 82	145
84. Superposición de las dos primeras nubes de datos adquiridas	146
85. Ampliación de las nubes de datos mostradas en la Figura 84	147
86. Reconstrucción 3D de la tubería a 360° de observación	148
87. Nube de puntos correspondiente al primer plano reconstruido	151
88. Conjunto de puntos correspondiente al primer plano interpolado	151
89. Conjunto de puntos correspondiente al segundo plano interpolado	152
90. Planos interpolados	153
91. Desplazamientos experimentales contra desplazamientos teóricos	154
92. Vista superior del montaje experimental implementado	159
93. Objeto de control	160
94. Nube de datos correspondiente al primer sistema	161
95. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 94	162
96. Nube de datos correspondiente al segundo sistema	162
97. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 96	163
98. Empalme de las dos primeras nubes de datos adquiridas	163

99. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 98	164
100. Reconstrucción 3D del objeto de control	164
101. Modelo del torso humano	165
102. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 1	166
103. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 2	166
104. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 3	167
105. Reconstrucción 3D del objeto de estudio	168
106. Separación teórica entre puntos de nubes de datos consecutivas	169
107. Sistema de reconstrucción 3D implementado	173
108. Objeto de control	173
109. Nube de datos correspondiente al sistema de la izquierda	174
110. Ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 109	175
111. Nube de datos correspondiente al sistema de la derecha	175
112. Ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 111	176
113. Nubes de datos obtenidas por cada uno de los sistemas, antes de la transformación	176
114. Empalme de las nubes de puntos	177
115. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 114	177
116. Reconstrucción 3D del modelo de rostro humano mostrado en la Figura 105	178
117. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 116	179
118. Desplazamientos experimentales contra desplazamientos teóricos	180

Lista de Tablas

1. Métodos ópticos de reconstrucción 3D en función de las dimensiones transversales del objeto, resolución y rango de medición [27]	30
2. Puntos de control recuperados de las 7 imágenes adquiridas	102
3. Norma del error residual obtenida para diferentes interpolaciones efectuadas sobre la fase ideal	123
4. Error eficaz, antes y después de la corrección, para diferentes periodos de las franjas proyectadas	127
5. Distancias entre baricentros para cada una de las transformaciones	149
6. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales de los planos reconstruidos	155
7. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales de planos consecutivos reconstruidos	
8. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales	167
9. Distancias entre baricentros después de aplicar la transformación	170
10. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales del primer plano y el n-ésimo plano reconstruido	178
	181

Análisis tridimensional de objetos a 360° de observación y campo amplio con múltiple configuración proyector-cámara a partir de iluminación estructurada*

Autor: M. Sc. Carlos Ricardo Contreras Pico**

Palabras Clave: reconstrucción tridimensional, múltiples sistemas, proyección de franjas

Resumen

Los sistemas de reconstrucción tridimensional son implementados en campos industriales, médicos e investigativos con el propósito de realizar mediciones con alta precisión. Para obtener tal precisión es necesario efectuar un procedimiento de calibración apropiado. En la técnica de proyección de franjas, este procedimiento permite establecer una relación entre la fase absoluta y la información tridimensional de la superficie del objeto en estudio; sin embargo, para llevar a cabo tal procedimiento es necesario utilizar unidades de traslación muy precisas. Un sistema de reconstrucción tridimensional que implementa la técnica de proyección de franjas está formado por un proyector, una cámara digital y una unidad de control, denominada unidad de proyección-adquisición en este trabajo. La calibración de la unidad de proyección-adquisición consiste en establecer los parámetros que se requieren para transformar la fase, asociada a las franjas proyectadas, a coordenadas métricas de la superficie del objeto. Estos parámetros son función de los parámetros intrínsecos y extrínsecos tanto del proyector como de la cámara, debido a que el proyector se modeliza como una cámara inversa. Para llevar a cabo el procedimiento de calibración, en este trabajo se propone una técnica novedosa y flexible que permite calibrar cualquier sistema de reconstrucción 3D por proyección de franjas. En éste se usa un plano de referencia, que se ubica en posiciones aleatorias al interior del espacio de trabajo, y la proyección de un patrón de puntos codificados, denominados puntos de control. Los parámetros de la cámara son calculados usando la técnica de calibración de Zhang, mientras que los parámetros del proyector son calculados a partir de los parámetros de la cámara y la fase asociada al patrón de puntos de control, la cual es determinada usando análisis de Fourier. Aplicaciones específicas llevadas a cabo en la industria del petróleo y la medicina estética demuestran el buen desempeño del método de calibración propuesto.

*Tesis

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca (Director)

Three-dimensional analysis of objects to 360° observation and wide field with multiple projector-camera setup from structured light*

Autor: M. Sc. Carlos Ricardo Contreras Pico**

Keywords: three-dimensional reconstruction, multiples systems, fringe projection

Abstract

In order to get measures with a high accurate, three-dimensional reconstruction system are implemented in industrial, medical, and investigative fields. To obtain high accurate is necessary to carry out an appropriate calibration procedure. In fringe projection profilometry, this procedure allows obtaining a relation between absolute phase and three-dimensional information of the object in study; however, to execute such procedure a precise movement stage is required. A fringe projection system is formed by a projector, a digital camera and a control unit, called like a projection-acquisition unit in this paper. The calibration of the projection-acquisition unit consists in to establish the parameters that are required to transform the phase of the projected fringes to metric coordinates of the object surface. These parameters are a function of the intrinsic and extrinsic parameters of both camera and projector, due to the projector is modeled as an inverse camera. For this purpose, in this paper a novel and flexible calibration method that allows calibrating any device that works with fringe projection profilometry is proposed. In this method are used a reference plane, that is placed in random positions in the work space, and the projection of an encoded pattern of control points, which is determined by using Fourier analysis. Experimental results are presented to demonstrate the performance of the calibration method. Specific applications that were made in the oil industry and in the esthetic medicine show the good performance of the calibration method proposed.

*Thesis

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca (Director)

Introducción

La digitalización o reconstrucción tridimensional (3D) de objetos es una temática que constantemente produce un alto interés científico, y permite obtener información metrológica que resulta útil en aplicaciones médicas, industriales e investigativas, entre otras [84]. Actualmente se pueden encontrar en el mercado diferentes dispositivos que permiten extraer o recuperar información 3D, basados en principios mecánicos, magnéticos, ultrasónicos u ópticos, principalmente [8]. Debido a su naturaleza no invasiva, amplio rango de trabajo y resoluciones variadas, los dispositivos de reconstrucción 3D por medios ópticos han tenido una fuerte demanda, principalmente en el sector industrial, en aplicaciones como ingeniería inversa o control de calidad [24].

Las técnicas de reconstrucción 3D basadas en la proyección de luz estructurada se caracterizan por presentar gran variedad de diseños y principios, cada una de ellas también posee sus ventajas y desventajas, dependiendo del problema a solucionar [9]. La exigencia metrológica puede estar enfocada en precisión, resolución, tiempo de procesamiento apropiado a la aplicación, amplio campo de observación, etc. Sin embargo, existen relaciones de carácter inverso entre algunas de estas exigencias cuando se quiere diseñar un dispositivo de reconstrucción 3D, por ejemplo, entre el campo de observación y la resolución; tanto más resolución tenga el dispositivo diseñado, menor campo visual tendrá [85].

Del mismo modo, la profundidad de trabajo del sistema de reconstrucción 3D varía de forma inversa al aumento de la resolución, esto es, a mayor resolución, menor profundidad de trabajo y viceversa. Adicionalmente, otro problema que es inherente al sistema de reconstrucción, como las zonas ocultas o zonas del objeto que son de difícil acceso para el mismo, ocasiona un impedimento para obtener una completa y detallada información topográfica

del objeto de estudio. Situaciones metrológicas reales imponen condiciones exigentes, y más aún, si se quieren reconstruir objetos de estudio con variaciones topográficas del orden de las decenas o centenas de micras. De igual forma, se exigen más condiciones si estas variaciones están distribuidas en una gran extensión, es decir en regiones que se podrían extender por fuera del campo visual del dispositivo o en zonas ocultas [86].

En el presente trabajo de investigación se desarrollaron sistemas de reconstrucción 3D que permiten explorar con alta precisión y alta resolución detalles ubicados en regiones de difícil acceso y en objetos de estudio con grandes dimensiones, es decir, objetos para los cuales no es posible obtener su completa reconstrucción a partir de un único módulo o sistema; lo que implica utilizar más de un sistema de reconstrucción o en su defecto mover el mismo alrededor del objeto o a través de este, dependiendo de la aplicación que se esté realizando; en este caso los sistemas desarrollados permiten resolver, principalmente, tres problemas específicos y de tipo metrológico. El primero permite reconstruir tridimensionalmente y a 360° de observación la superficie externa de las tuberías con refuerzo no metálico, las cuales son utilizadas para el transporte de hidrocarburos; la reconstrucción 3D que se obtiene permite analizar si las fallas o grietas presentes en la superficie de la tubería pueden afectar la integridad estructural de la misma. El segundo dispositivo, formado por cuatro módulos de proyección-adquisición, permite obtener la reconstrucción 3D y a 360° de observación de los objetos de estudio; el dispositivo desarrollado ha sido utilizado para reconstruir un modelo de torso humano, los resultados experimentales obtenidos permiten concluir que el mismo se podría utilizar para evaluar cuantitativamente la eficacia de procedimientos, ya sean quirúrgicos o terapéuticos, que son implementados para eliminar tejido adiposo. El tercero, formado por dos cámaras digitales y un proyector portable, permitiría reconstruir, con alta resolución y alta precisión el rostro humano con el objetivo de evaluar la eficacia de procedimientos terapéuticos o productos farmacéuticos con los que se quieren eliminar arrugas o líneas de expresión.

Capítulo 1

Métodos de reconstrucción tridimensional

La reconstrucción 3D es un procedimiento que permite digitalizar las coordenadas de la superficie de un objeto de estudio para su posterior análisis cuantitativo o cualitativo; el proceso de digitalización se puede llevar a cabo a través de métodos de contacto, en los cuales es necesario el contacto entre el sistema de reconstrucción y la superficie del objeto, o a través de métodos de no contacto, en los que no es necesario el contacto con la superficie a digitalizar. Un dispositivo de reconstrucción 3D puede ser flexible o versátil de modo que sus componentes se puedan adaptar en un ambiente dinámico. Una de las principales tareas de implementar un dispositivo versátil es identificar cambios que ocurren durante el proceso de producción, principalmente cuando se trabaja en un ambiente industrial. Cuando se presentan cambios en la forma de un objeto de estudio se requiere un sistema de visión para realizar el registro de los mismos. El proceso de transferir los datos adquiridos a una representación virtual puede ser complejo, dependiendo de la aplicación que se desee realizar, por tal razón las tecnologías actuales aún se enfrentan a desafíos en la aplicación, de las técnicas de reconstrucción 3D, en ambientes que pueden ser médicos, industriales e investigativos.

Un sistema de reconstrucción 3D está formado por un software y un hardware. El hardware adquiere un conjunto de datos, generalmente llamado nube de puntos, usando mecanismos o fenómenos establecidos por medio de la interacción con la superficie del objeto de interés. El software procesa el conjunto de datos adquiridos y los transforma en una representación virtual del objeto.

1.1. Hardware

Un dispositivo de reconstrucción 3D es un instrumento que muestrea las coordenadas 3D de una región específica de una superficie [1], para llevar a cabo esta tarea se pueden aplicar diferentes técnicas para medir los elementos que permiten obtener la digitalización 3D de dicha superficie. Cada método usa algún mecanismo o fenómeno para interactuar con la superficie del objeto a digitalizar.

1.2. Software

Cuando los datos son adquiridos a través del hardware del sistema de digitalización, deben ser procesados y transformados en información útil para una aplicación específica. La interpretación de los datos adquiridos que permite obtener un modelo digitalizado del objeto de estudio es un proceso que involucra los siguientes problemas [2]:

1.2.1. Filtrado de datos. Los datos adquiridos pueden contener ruido, distorsiones o datos no válidos, los cuales son ocasionados por el hardware o por el ambiente. Por lo tanto los datos adquiridos deben ser filtrados para eliminar datos no deseados y ruidosos [3].

1.2.2. Registro de datos e integración. Un dispositivo de reconstrucción 3D sólo puede adquirir información de la superficie del objeto que se encuentra dentro del campo de visión del mismo. Por lo tanto, se necesitan múltiples vistas para adquirir datos de toda la superficie. El registro se usa para determinar la transformación de los datos obtenidos a partir de vistas diferentes, de modo que éstos se puedan integrar bajo el mismo sistema de coordenadas [4].

1.2.3. Reconstrucción de la superficie. Usando la nube de puntos o los datos volumétricos adquiridos es posible construir una aproximación digital de la superficie de estudio [5].

1.2.4. Simplificación y suavizado de datos. Una aproximación compacta de un objeto de estudio puede reducir requerimientos de memoria y acelerar el procesamiento de datos. Este procedimiento puede acelerar el cómputo relacionado con el reconocimiento de objetos, el cual puede incluir análisis de elementos finitos, caracterización de formas, y visualización. La simplificación es útil para hacer más eficientes el almacenamiento, la transmisión, el cómputo, y la visualización [6].

1.2.5. Segmentación de datos. La segmentación hace referencia al proceso de extraer regiones de interés, seleccionadas a partir del resto de los datos, usando técnicas manuales o automáticas. El filtrado de datos y la segmentación son dos aspectos diferentes del mismo problema. Un proceso de filtrado podría distinguir entre regiones de interés y los bordes entre éstas. Tal proceso de filtrado asume, implícitamente, que la segmentación es conocida [7].

1.2.6. Detección de características. Los defectos o algunos elementos básicos sobre una superficie pueden ser tratados como características. Ejemplos de tales características incluyen, tamaño, posición, medición de contornos a partir de detección de bordes, así como análisis de textura sobre regiones específicas [3]. La detección de características se usa para revelar defectos con ciertas propiedades o validar si los datos adquiridos se ajustan a un modelo específico.

1.2.7. Comparación de datos. Un modelo de referencia usualmente está disponible para la comparación de datos, en esta se calculan las variaciones o diferencias entre un modelo físico y un modelo de referencia. Este procedimiento se aplica para realizar control de calidad, inspección, o diseño asistido por computadora (Computer Aided Design, o CAD por sus siglas en inglés). Por ejemplo, (i) en detección de características, la nube de puntos se puede usar para caracterizar elementos geométricos tales como planos, círculos, cilindros, esferas o contornos; y (ii) en monitoreo y control, los modelos diseñados y construidos son comparados de modo que se puedan evaluar las diferencias entre los mismos.

1.3. Clasificación de los sistemas hardware

Los investigadores han clasificado los sistemas de adquisición de datos 3D a partir de los mecanismos que estos emplean. Por ejemplo, Varaday et al. [8] han clasificado los dispositivos de adquisición en sistemas de no contacto y sistemas de contacto (ver Figura 1). Un sistema de no contacto usa la luz, el sonido o campos magnéticos para interactuar con la superficie del objeto a digitalizar; mientras que un sistema de contacto usa una punta esférica, ubicada generalmente en el extremo de un brazo robotizado, para tocar la superficie a reconstruir. Isgro et al. [9] han clasificado los dispositivos de no contacto en sistemas pasivos y sistemas activos. Los sistemas pasivos no proyectan ningún tipo de energía sobre la

superficie del objeto a reconstruir. Los sistemas activos proyectan energía, por ejemplo un patrón de luz u ondas ultrasónicas, sobre la superficie del objeto.

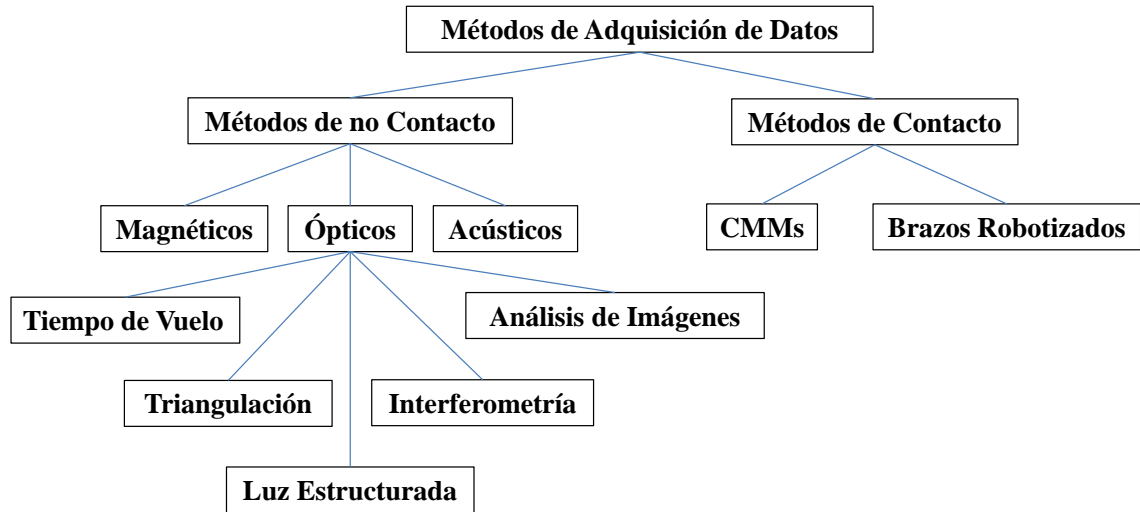


Figura 1. Clasificación de los métodos de adquisición de datos 3D.

1.4. Métodos de contacto

Los métodos de contacto o táctiles son métodos clásicos para adquirir información 3D. Estos usan brazos mecánicos o robotizados para tocar la superficie del objeto de estudio. Estos métodos en su mayoría están restringidos por las limitaciones de los dispositivos de medición. Por ejemplo, una máquina fresadora de tres ejes se puede equipar con una sonda de contacto y ser usada para llevar a cabo mediciones muy precisas a través del contacto con la superficie del objeto; sin embargo, esta no resulta muy efectiva para realizar mediciones sobre superficies cóncavas. También existen diversos sistemas robotizados que se usan como sistemas de medición táctil. Estos se encuentran entre los más robustos, debido a su alta resolución, a que los resultados que arrojan son menos ruidosos y más precisos, y a que los mismos garantizan repetibilidad; sin embargo también son los más lentos para adquirir datos 3D. Probablemente el método de contacto más común hace uso de las máquinas de medición de coordenadas (Coordinate Measure Machines, o CMMs por sus siglas en inglés). Estas máquinas se pueden programar para que sigan un camino a través de una superficie y adquieran información con alta precisión y con poco ruido. Xiong [10] propor-

ciona una discusión a fondo de las mediciones y los errores obtenidos por los métodos táctiles. Sahoo y Meng [11] usan sistemas táctiles para adquirir información 3D de esculturas con superficies complejas. Butler [12] muestra una comparación entre los métodos táctiles y realiza un análisis de sus desempeños.

1.5. Métodos de no contacto

Los métodos de no contacto pueden interaccionar con el objeto proyectando energía sobre este o no [13]. Los métodos que proyectan energía se llaman activos y los que no proyectan energía se llaman pasivos. Los métodos activos se dividen en métodos basados en transmisión, aquellos que adquieren la energía transmitida por el objeto, y en reflexión, aquellos que adquieren la energía reflejada por el objeto.

1.6. Sistemas pasivos

Los métodos pasivos están basados en la extracción de información 3D de un objeto o escena mediante el uso de una o varias cámaras. Un sistema pasivo emplea las técnicas de extracción de formas a partir de sombras [14], extracción de formas a partir de movimiento [15], variación de flujo óptico, o visión estéreo pasiva [16]; con el objetivo de adquirir datos 3D. La técnica de extracción de formas a partir de sombras usa una cámara digital para observar el objeto bajo diferentes condiciones. Estudiando los cambios en el brillo sobre la superficie del objeto se puede calcular cierta información de profundidad. La técnica de extracción de formas a partir de movimiento usa un conjunto de imágenes del objeto, las imágenes son adquiridas desplazando la cámara alrededor del objeto a reconstruir. También hay sistemas que pueden obtener información 3D de un objeto partir de planos de enfoque [17], en este caso la profundidad de campo del sistema se reduce al mínimo con el propósito de aumentar la resolución de las mediciones, tanto más pequeña sea la profundidad de campo del sistema, mayor será su resolución; la reconstrucción 3D se obtiene a partir de varias imágenes que son adquiridas desplazando el objeto en dirección del eje óptico del sistema de observación, para esto es necesario conocer los desplazamientos efectuados para cada imagen adquirida. La técnica de visión estéreo usa dos o más cámaras para obtener imágenes del mismo objeto dando información 3D de este a partir de triangulación. Las

ventajas de un sistema pasivo son: (i) menor sensibilidad al ambiente; y (ii) se pueden usar como un sistema portable y no requieren de fuentes de energía externa para interactuar con el objeto a digitalizar. Sin embargo las técnicas de extracción de formas a partir de sombras y extracción de formas a partir de movimiento presentan los siguientes inconvenientes: (i) la correcta adquisición de los datos 3D depende de las propiedades reflectantes de la superficie del objeto; (ii) capacidad limitada para trabajar o procesar superficies con texturas no uniformes; y (iii) la dificultad para proporcionar profundidad absoluta. La visión estéreo pasiva tiene un problema crítico para encontrar puntos correspondientes entre dos imágenes. Para resolver este problema, características como bordes o puntos, son extraídas y analizadas. Sin embargo, los procedimientos de extracción y emparejamiento son complejos y computacionalmente demorados.

1.7. Sistemas activos

Los sistemas activos se pueden clasificar en términos del principio físico que estos emplean: triangulación, tiempo de vuelo e interferometría.

La técnica de triangulación hace uso de la trigonometría para calcular las coordenadas 3D de un punto sobre la superficie del objeto, a partir de la posición relativa entre el sistema de proyección y el de adquisición. A partir de análisis completamente geométricos se calculan las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) , respecto al sistema coordenado del sistema de observación, de los puntos de la superficie que son iluminados por el sistema de proyección. Existen diferentes tipos de sensores que utilizan la técnica de triangulación: los puntuales, los lineales y los que proyectan un patrón específico con el propósito de codificar la topografía del objeto de estudio; entre los últimos se encuentran los que trabajan con la técnica de proyección de franjas y los que proyectan un patrón de luz infrarroja. Un escáner puntual adquiere información punto a punto, mientras que un escáner lineal permite la proyección de una línea y por lo tanto la adquisición simultánea de un perfil completo de puntos [18,19]. Los escáneres puntuales y lineales, que por lo general usan un láser como sistema de proyección, comprometen su desempeño entre su campo de visión y su resolución y son muy sensibles a la luz ambiental; además, se necesita de mucho tiempo para adquirir la nube de

puntos 3D que permite digitalizar la superficie del objeto. Los sistemas que implementan la técnica de proyección de franjas, proyectan un patrón de franjas paralelas entre sí, generalmente con un perfil sinusoidal y de periodo constante, sobre la superficie del objeto [20,21]. Cuando el patrón es proyectado sobre una superficie plana las franjas no se distorsionan, lo que implica que siguen siendo paralelas entre sí y de paso constante, sin embargo cuando el patrón se proyecta sobre un objeto con variaciones topográficas las franjas se distorsionan. La topografía del objeto puede ser codificada a partir de esta distorsión. Estos sistemas proporcionan alta resolución y alta precisión, sin embargo las mediciones se pueden ver afectadas por la iluminación ambiental y por las propiedades reflectantes del objeto. El uso de los sistemas que proyectan un patrón de luz infrarroja sobre la superficie o escena a reconstruir es relativamente reciente [22]. Éstos están formados, principalmente, por un sensor infrarrojo (emisor y receptor), una cámara digital de video (CMOS y RGB) y un acelerómetro. Estos sistemas presentan muchas ventajas ya que permiten obtener reconstrucciones en tiempo real y las mediciones no se ven afectadas por la iluminación ambiental, ya que el patrón proyectado no se encuentra en el espectro visible; sin embargo sus resoluciones no son tan altas como las que se obtienen con los escáneres lineales, los escáneres puntuales o los sistemas que usan la técnica de proyección de franjas.

Los sistemas que usan la técnica de tiempo de vuelo generan una onda electromagnética que incide sobre la superficie del objeto, la radiación reflejada por este es recibida por un sensor que mide la diferencia temporal, o la diferencia de fase, entre la señal emitida y la señal recibida [23]. El recorrido de la onda se mide como una consecuencia directa del retardo en la propagación de la misma. Los sistemas que emplean esta técnica requieren de medidores de tiempo muy precisos y generalmente proporcionan resoluciones moderadas (clásicamente de centímetros y ocasionalmente de milímetros) para llevar a cabo aplicaciones de mediano y largo alcance. Los escáneres que usan la técnica de interferometría, miden distancias o alturas en función de longitudes de onda, usando patrones de interferencia. Las técnicas de interferometría se usan frecuentemente con objetos que tienen superficies que son relativamente planas y poseen pequeñas variaciones de profundidad. Aunque la precisión de estos dispositivos es más pequeña comparada con la de un escáner láser pun-

tual o lineal equivalente [24], el uso de luz incoherente remueve el ruido producido por el ‘*speckle*’ asociado a los láseres, lo que permite obtener datos suavizados.

Existen otros métodos de no contacto como los acústicos, en los cuales el sonido es reflejado por la superficie del objeto, y los magnéticos, en los cuales un campo magnético interactúa con la superficie del objeto. Los métodos acústicos han sido usados desde hace décadas para medir distancias [25]. Por ejemplo, algunas cámaras de enfoque automático usan métodos acústicos para determinar la posición del plano de enfoque. El principio físico que emplea este método es el mismo que se usa en el método de tiempo de vuelo, en este caso una onda sonora es reflejada por la superficie del objeto de estudio y luego se mide la distancia entre la fuente que emite la onda y la superficie, teniendo en cuenta que se conoce la rapidez de propagación del sonido en el medio donde se encuentra el objeto o escena a digitalizar. La interferencia acústica y el ruido externo representan un problema en este caso. Los métodos magnéticos involucran la medición de la intensidad de un campo magnético. La técnica más conocida es la imagen por resonancia magnética (Magnetic Resonance Imaging, o MRI por sus siglas en inglés), la cual es una técnica no invasiva que utiliza el fenómeno de la resonancia magnética nuclear para obtener información sobre la estructura y composición del cuerpo a analizar [26]. La información adquirida es procesada y transformada en imágenes, bidimensionales o tridimensionales, del interior de lo que se ha analizado.

De igual manera si se desea escoger un sistema de reconstrucción para una aplicación particular, se deben considerar muchos factores, incluyendo resolución, precisión, rapidez de adquisición y procesamiento, profundidad de campo, influencia de la luz ambiental, campo de visión, dispositivos de registro y sistemas formadores de imágenes. Sin embargo, existen relaciones de carácter inverso entre algunas de estas exigencias al momento de diseñar un dispositivo de reconstrucción 3D, por ejemplo, entre el campo de observación y la resolución; tanto más resolución tenga el dispositivo diseñado, menor campo visual tendrá. La Tabla 1 clasifica algunos métodos ópticos de reconstrucción 3D en función de las dimensiones transversales del objeto.

Método	Rango de Medición	Dimensiones del objeto	Resolución relativa
Proyección de franjas	1 mm : 300 mm	1000 mm × 1000 mm	1/1000 : 1/5000
Proyección de franjas	0.1 mm : 50 mm	100 mm × 100 mm	1/1000 : 1/5000
Proyección de franjas	0.05 mm : 1 mm	50 mm × 50 mm	1/500 : 1/5000
Microscopía interferométrica	0.001 mm : 0.05 mm	10 mm × 10 mm	1/100 : 1/5000
Interferometría con luz blanca	2 nm : 400 μm	5 mm × 5 mm	1/100000
Microscopía confocal	0.001 mm : 0.056 mm	1 mm × 1 mm	1/100 : 1/5000
Interferometría UV	0.001 mm : 0.01 mm	0.3 mm × 0.3 mm	1/2000

Tabla 1. Algunos métodos ópticos de reconstrucción 3D en función de las dimensiones transversales del objeto, resolución y rango de medición [27].

1.8. Reconstrucción 3D por el método de proyección de franjas

Los métodos ópticos [28] juegan un papel importante en la reconstrucción 3D de superficies y la deformación de objetos debido a que poseen características, tales como, alta precisión, amplio campo de trabajo y a que el uso de los mismos no implica el contacto con la superficie del objeto. Entre estos métodos, el de proyección de franjas ha sido muy estudiado y aplicado, debido a su sencillo montaje experimental, procesamiento automático [29] y alta precisión.

Un sistema clásico de proyección de franjas está formado por un proyector, una cámara digital y una unidad de control, ver Figura 2. El proyector se usa para proyectar un patrón de franjas sobre la superficie del objeto, las franjas proyectadas por lo general tienen un perfil que está representado matemáticamente por una función sinusoidal y cuyo argumento o fase es una función lineal. Debido a las variaciones de altura de la superficie el patrón proyectado se distorsiona, dichas variaciones quedan codificadas en la fase de las franjas, la cual también se distorsiona y deja de ser lineal. El patrón distorsionado se adquiere usando la cámara digital con el propósito de decodificar la fase mencionada anteriormente, la cual

a su vez está relacionada directamente con las variaciones de altura de la superficie del objeto de estudio. La fase o mapa de fase bidimensional (2D), se puede obtener a partir de diferentes métodos, tales como el método de la transformada de Fourier [30-32], el método de la transformada de Hilbert [33] o la técnica de corrimiento de fase [34,35]. Takeda et al. [30] presentaron el método de la transformada de Fourier para obtener el mapa de fase a partir de una sola imagen proyectada; el mapa de fase se puede obtener realizando un procesamiento en el dominio de la frecuencia; en la técnica de la transformada de Hilbert también se obtiene el mapa de fase a partir de una sola imagen proyectada, sin embargo en este caso el mapa de fase se obtiene a partir de un procesamiento en el dominio espacial. Para obtener el mapa de fase usando la técnica de corrimiento de fase se necesitan al menos dos imágenes que poseen una diferencia de fase que por lo general se conoce [36,37]. Por consiguiente, aunque puede proporcionar alta precisión, esta técnica se usa muy poco en medición dinámica.

Sin embargo, en los últimos años se han propuesto algunos métodos que permiten usar la técnica de corrimiento de fase en medición dinámica [38-40]. Pan et al. [38] codifican en una sola imagen RGB, tres imágenes que por lo general son proyectadas en niveles de gris en la técnica tradicional de corrimiento de fase. Por lo tanto, sólo se necesita una imagen RGB para digitalizar la superficie del objeto de estudio. En [39] se presenta un método que codifica tres patrones de franjas triangulares en un patrón RGB, una ventaja adicional de este método es que no se usa la función tangente inversa para calcular la fase asociada a la topografía del objeto de estudio. Primero se proyecta el patrón de franjas triangulares codificadas, luego el método propuesto calcula una relación de intensidad evaluando los tres patrones de franjas independientes (rojo, verde y azul) los cuales son adquiridos usando una cámara 3CCD. Esta relación de intensidad se calcula con el propósito de obtener una cantidad física equivalente a la fase empleada en la técnica tradicional de corrimiento de fase. En [40] se presenta un sistema con el que se obtienen reconstrucciones tridimensionales en tiempo real, en éste se hace uso de una cámara 3CCD, la cual está formada por tres cámaras CCDs independientes, cada una de las cuales se usa para adquirir imágenes por separado de los colores primarios (rojo, verde y azul), y un proyector de video formado por un MEMS (Micro-Electro-Mechanical System) y tres diodos láser de diferentes longitudes de onda.

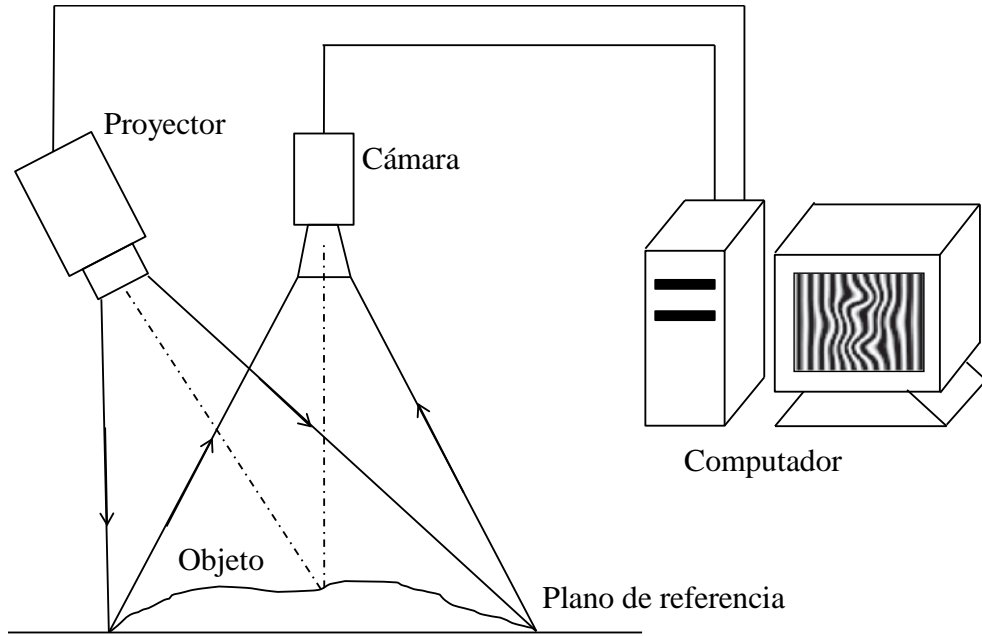


Figura 2. Montaje experimental de un sistema de proyección de franjas.

Por medio de un procedimiento de calibración que permite convertir el mapa de fase 2D a alturas sobre la superficie del objeto, procedimiento que también es llamado mapeo fase-altura, se puede reconstruir o digitalizar dicha superficie.

La revisión bibliográfica permite establecer diferentes estrategias con las cuales es posible calibrar un sistema de proyección de franjas. Básicamente los montajes experimentales son de dos tipos particulares y generalizados. En el primer caso la cámara y el proyector se ubican en posiciones específicas. Por ejemplo [41] ubica el eje óptico de la cámara perpendicular al plano de referencia y el eje óptico del proyector forma un ángulo con respecto al eje óptico de la cámara, estos ejes se cruzan sobre el plano de referencia. La pupila de entrada de la cámara y la pupila de salida del proyector se encuentran en un plano perpendicular al plano de referencia. Para esta situación la ecuación de transformación fase-altura depende de los parámetros del montaje y está dada por [41]

$$h(x, y) = \frac{l_0 \Delta\phi(x, y)}{\Delta\phi(x, y) + 2\pi f_0 d}, \quad (1.1)$$

donde d y l_0 son parámetros del montaje óptico; d representa la distancia entre la pupila de entrada de la cámara y la pupila de salida del proyector, l_0 es la distancia entre la pupila de salida de la cámara y el plano de referencia y f_0 representa la frecuencia espacial del patrón de franjas proyectado. En la Ecuación (1.1) $\Delta\phi(x, y)$ representa la fase que está relacionada directamente con la forma del objeto. En algunos casos dichos parámetros se pueden medir, pero generan errores en la medición por la dificultad de definir los ejes ópticos o las posiciones de las pupilas, etc. En otros casos [42], estos valores son determinados de manera indirecta usando un objeto patrón de dimensiones conocidas. En los montajes experimentales generalizados la cámara y el proyector no tienen condiciones específicas, sólo se busca que sus campos de observación se superpongan para explorar el objeto de estudio. La calibración del sistema de proyección-observación se realiza desplazando el plano de referencia en dirección perpendicular al eje óptico de la cámara y a incrementos conocidos, empleando sistemas de traslación de alta precisión, de esta manera, para cada píxel en el plano imagen de la cámara se obtienen datos experimentales de fases y alturas para el volumen de calibración. Estos se ajustan a partir del método de mínimos cuadrados empleando polinomios o funciones fraccionarias.

El principal inconveniente se presenta debido al uso de sistemas de alta precisión. Aunque la coordenada z de un punto sobre la superficie del objeto se determina a partir de la curva de calibración, las coordenadas transversales (x, y) son calculadas en función del montaje experimental. En situaciones particulares donde el eje óptico de la cámara es perpendicular al plano de referencia, se asume un modelo tele-céntrico de observación, con lo cual es posible calcular las coordenadas transversales de un punto a partir del factor de ampliación. En situaciones más exactas o generalizadas, debido al carácter no tele-céntrico en la proyección y en la observación, se suele usar el modelo de proyección puntual, o modelo ‘*pin-hole*’, para modelizar el sistema. Este modelo emplea parámetros de calibración extrínsecos e intrínsecos, comúnmente usados en la calibración de las cámaras CCDs. En este caso se recurre, tradicionalmente, al uso de un patrón ajedrezado y a un procedimiento de optimización no lineal. Sin embargo modelizar de la misma forma el proyector es difícil debido a su naturaleza inversa: proyecta imágenes en vez de formarlas en el plano imagen como lo

hace la cámara. En [43] se modeliza y calibra el proyector como si éste formara imágenes, para tal propósito la cámara se calibra previamente. La idea es construir una imagen virtual del proyector, asociando un punto del proyector a un punto en píxeles sobre el plano imagen de la cámara, de esta forma una imagen proyectada por el proyector es convertida en una imagen virtual de la cámara. En [44] se emplea el modelo puntual de calibración a la cámara y al proyector y se obtiene una ecuación de transformación de fase a altura que depende de los parámetros extrínsecos e intrínsecos de la cámara y el proyector. Estos parámetros se calculan usando un objeto de forma conocida y un procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados. Zappa et al. [45] desarrollaron un procedimiento de calibración manual y flexible, en éste no se requiere de sistemas de desplazamiento motorizados y se emplea un patrón de calibración que sirve para calibrar la cámara individualmente y el sistema de proyección-observación. El patrón de calibración se ubica manualmente en posiciones aleatorias dentro del campo de visión de la cámara. Aunque el procedimiento es versátil y fácil de implementar, no se obtiene una resolución apropiada para cuantificar pequeñas variaciones topográficas presentes en la superficie del objeto de estudio.

1.9. Algoritmo de corrimiento de fase

La técnica de corrimiento de fase es muy usada en metrología óptica debido a que posee las siguientes características: (i) medición punto a punto, (ii) baja sensibilidad a las propiedades reflectantes de la superficie del objeto de estudio, (iii) proporciona mediciones con alta resolución y alta precisión. Se han desarrollado una variedad de algoritmos de corrimiento de fase, que implican la proyección de dos, tres, cuatro imágenes o más [83]. En el último caso la diferencia de fase entre cada patrón de franjas proyectado es igual a $\pi/2$, y la intensidad de cada uno de los patrones está dada por:

$$I_1 = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (1.2)$$

$$I_2 = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi(x, y) - \pi/2], \quad (1.3)$$

$$I_3 = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi(x, y) - \pi], \quad (1.4)$$

$$I_4 = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi(x, y) - 3\pi/2]. \quad (1.5)$$

Donde $I'(x, y)$ es la intensidad promedio, $I''(x, y)$ es la intensidad de modulación y $\phi(x, y)$ es la fase que se debe recuperar. A partir de las ecuaciones (1.2) - (1.5) se puede obtener la fase mencionada anteriormente, la cual está dada por:

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3} \right), \quad (1.6)$$

y el contraste de las franjas por,

$$I''(x, y) = \frac{\sqrt{(I_4 - I_2) + (I_1 - I_3)^2}}{2}. \quad (1.7)$$

La ecuación (1.6) proporciona una fase con valores ubicados en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y con discontinuidades de 2π . El intervalo de discontinuidades se encuentra entre $(-\pi, \pi)$ y no entre $(-\pi/2, \pi/2)$ debido a que en el procesamiento de imágenes se usa la función $\arctan 2$ y no la función \arctan . Esta fase es conocida como fase discontinua; la fase continua se puede obtener a partir del algoritmo ‘*unwrapping*’ [46] o del algoritmo ‘*temporal unwrapping*’ [47,48]. El primero es un algoritmo espacial que transforma la fase discontinua en continua, adicionando apropiadamente múltiplos enteros de 2π a la fase discontinua. En el segundo se calcula una secuencia de mapas de fases discontinuas, que son obtenidas a partir de diferentes patrones de franjas cuyo periodo cambia en función del tiempo; en este caso la fase continua se obtiene a partir de una operación aritmética entre puntos, que pertenecen a mapas de fases diferentes, pero cuyas coordenadas son iguales.

La fase continua, que se obtiene a partir de la fase discontinua, es llamada fase relativa ya que es relativa a algún punto en el mapa de fase. La fase absoluta es el valor de fase que es relativo a las fases predefinidas. Para obtener la fase absoluta, la cual se obtiene a partir de la fase continua, al menos un punto con coordenadas conocidas debe tener un valor de fase también conocido, o predefinido. Una marca, ya sea un punto, una línea o cualquier otra característica visible se puede usar como referencia para transformar la fase relativa en fase absoluta. Dicha marca es trazada por el proyector y capturada a través de la cámara, luego se usa un algoritmo que permite identificarla. Debido a que la fase de la marca es conocida, la fase relativa debe ser desplazada para asegurar que el valor de fase de la marca corresponda al valor conocido. Por lo general se asume que la marca o punto de referencia tiene un valor de fase absoluta igual a cero y en el mapa de fase calculado, un valor de fase relativa de ϕ_0 , por lo tanto el mapa de fase relativa se puede transformar en el mapa de fase absoluta por medio de:

$$\phi_a(x, y) = \phi(x, y) - \phi_0. \quad (1.8)$$

Ahora bien, como se mencionó en la sección anterior, por medio del procedimiento de calibración, el cual transforma el mapa de fase absoluta 2D a alturas sobre la superficie del objeto, se puede reconstruir o digitalizar dicha superficie.

En este trabajo se propone un método de calibración novedoso, versátil y flexible, con el cual es posible calibrar dispositivos de reconstrucción 3D que implementen la técnica de proyección de franjas. El análisis teórico-experimental del método desarrollado, el cual ha dado lugar a un trabajo de pregrado [50], a un trabajo de maestría [51] y a dos publicaciones referenciadas [52-53], es mostrado en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Calibración de un módulo de reconstrucción 3D

Diversos trabajos destacan la importancia de la técnica de proyección de franjas en diferentes campos en los que se busca obtener información precisa de la forma 3D de un objeto de estudio [54-57]. El auge de esta técnica se atribuye a características como versatilidad, alta precisión, bajo costo, medición en tiempo real, y a que la digitalización del objeto no requiere del contacto con el mismo; entre otras. Sin embargo, con el propósito de obtener dicha digitalización es necesario realizar una transformación fase-altura, la cual permite transformar la fase absoluta asociada al objeto y relacionada directamente con su superficie, en unidades métricas correspondientes. Para determinar tal transformación es necesario conocer algunos parámetros del montaje óptico, tales como, el ángulo entre el eje óptico de la cámara y el eje de proyección del proyector, la distancia entre el centro óptico de la cámara y el plano de referencia, y la distancia focal de la cámara, básicamente. Ahora bien, medir con precisión estos parámetros es complicado, lo que dificulta ejecutar el procedimiento de calibración. Por tal motivo se hace necesario implementar otros métodos de calibración, tales como los métodos directos, en los que la relación entre la fase absoluta y la altura se ajusta a un polinomio, y los basados en modelo o fotogramétricos, en los que la cámara y el proyector se ajustan a un modelo matemático.

En los métodos directos se ubica el plano de calibración perpendicular al eje óptico de la cámara, se define una posición de referencia en la cual se enfocan la proyección y la observación, luego el plano se desplaza y se ubica en diferentes posiciones garantizando que en cada posición el plano sea perpendicular al eje óptico de la cámara y que los desplazamien-

tos introducidos para cada una de éstas sean medidos con alta precisión [58]. Cualquier error en el procedimiento de calibración producirá errores en la reconstrucción obtenida [44,45].

Debido a estas exigencias, la implementación de estos métodos es complicada; por esta razón, en los últimos años se ha incrementado el desarrollo de nuevos métodos de calibración que no dependan de los parámetros del montaje ni de unidades precisas de traslación. Por ejemplo, Du et al. [56] propusieron un método basado en el desarrollo de un algoritmo que hace uso del álgebra matricial para determinar la transformación fase-altura. En éste, los componentes del sistema son ubicados de manera arbitraria, también con el propósito de evitar las mediciones de los parámetros del montaje, Vargas et al. [57] presentaron un método de calibración que no necesita de unidades de traslación de alta precisión. En éste se proyecta una fase absoluta sobre un plano de calibración que contiene un conjunto de círculos y el cual se ubica en posiciones aleatorias; los círculos están igualmente espaciados, tanto en dirección vertical como horizontal, y tres de ellos se diferencian levemente de los demás con el propósito de identificar el origen del sistema coordenado ubicado sobre el plano de calibración. Los parámetros intrínsecos de la cámara y la posición espacial de cada plano son calculados usando el método de calibración de Zhang [49]. Para obtener la posición absoluta de un punto del objeto se calculan su coordenada de profundidad y sus coordenadas laterales, la coordenada de profundidad se calcula a partir de una calibración que ajusta a un polinomio la relación entre las fases absolutas proyectadas sobre el plano y las coordenadas de profundidad de algunos puntos que pertenecen al mismo. Sus coordenadas laterales son calculadas a partir de su coordenada de profundidad, los parámetros intrínsecos de la cámara y las coordenadas en píxeles del punto imagen correspondiente. Un método similar fue propuesto por Da et al. [44]; en éste se usa un plano de calibración para determinar con exactitud los parámetros del sistema. El plano de calibración contiene un conjunto de círculos negros; las coordenadas 2D, de los centros de cada uno de estos círculos, respecto a un sistema coordenado ubicado sobre el plano de calibración son conocidas con exactitud, lo que permite calcular los parámetros de la cámara. La intersección entre dos patrones de franjas ortogonales entre sí y que se proyectan sobre el plano de calibración, y

los parámetros de la cámara permiten determinar los parámetros de calibración del sistema proyector-cámara.

Por otra parte Zappa et al. [45] desarrollaron un método en el cual se usa un plano de calibración ajedrezado con cuadros verdes y rojos que se ubica en posiciones aleatorias, y el método de calibración de Zhang [49] para calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara. Los parámetros extrínsecos de la cámara permiten conocer las posiciones de los planos, estas posiciones son usadas como referencia para calibrar el sistema de proyección.

En el presente trabajo se propone un método de calibración novedoso, versátil y flexible. En este se usa un plano de calibración ajedrezado, el cual se ubica en posiciones aleatorias al interior del campo de observación de la cámara y sobre el cual se proyecta un patrón de puntos codificados. Los parámetros de la cámara se calculan usando la técnica de calibración de Zhang [49] la cual hace uso del modelo *pinhole*. Los parámetros del proyector se calculan a partir de los parámetros de la cámara y la fase asociada al patrón de puntos que es proyectado; esta última se calcula haciendo uso del análisis de Fourier.

2.1. Modelo *pinhole*

Existen en la literatura diferentes estrategias que permiten modelizar el comportamiento de un sistema formador de imágenes y caracterizarlo matemáticamente a través de parámetros específicos. Para el caso de una cámara digital, tradicionalmente se implementa el modelo de proyección puntual o modelo *pinhole*, el cual se esquematiza en la Figura 3. En este modelo se define un plano, llamado plano imagen, sobre el que se proyectan los puntos del espacio tridimensional. El centro del plano imagen se conoce como el punto principal p , y es colineal con el centro de la pupila de entrada del sistema óptico de la cámara, O_c . Dichos puntos son, independientemente, el origen de un sistema coordenado euclidiano y se encuentran sobre el eje principal de la cámara o eje Z_c , también llamado eje óptico de la cámara. En la Figura 4 se puede observar cómo un punto P_0 ubicado en el espacio tridi-

mensional y con coordenadas $(X_c, Y_c, Z_c)^T$ es mapeado a un punto p_i ubicado en el plano imagen y con coordenadas $(x, y)^T$.

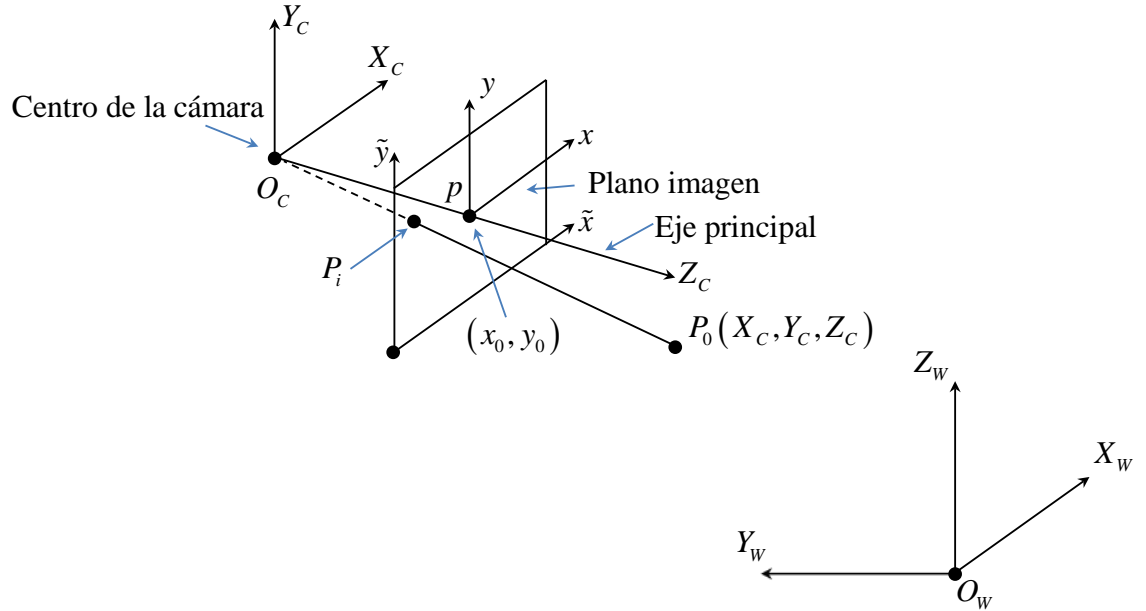
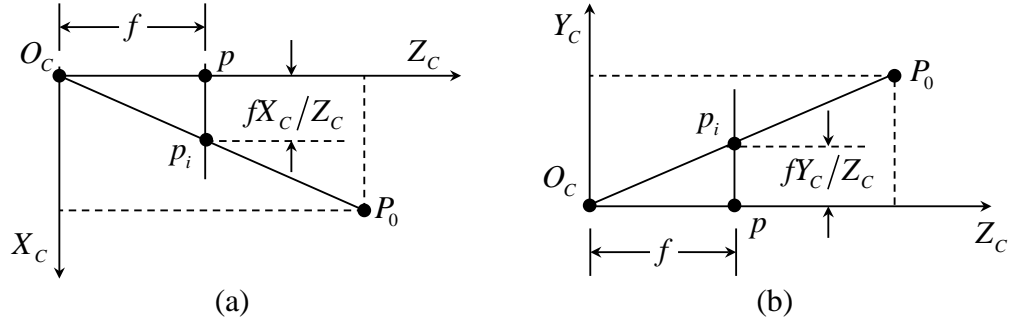


Figura 3. Sistemas coordenados implementados en el modelo *pinhole*.

El plano imagen, que coincide con el plano Z_c , está ubicado a una distancia f del centro de la cámara, por lo tanto las coordenadas tridimensionales del punto p_i con respecto al punto $O_c(X_c, Y_c, Z_c)$ son $(x, y, f)^T$. Los puntos P_0 , p_i y O_c son colineales, por lo tanto las coordenadas del punto p_i en la imagen y en unidades métricas, se pueden calcular a partir de una relación de triángulos semejantes (ver Figura 4) y están dadas por

$$\frac{X_c}{Z_c} = \frac{x}{f} \Rightarrow x = f \frac{X_c}{Z_c}, \quad (1.9)$$

$$\frac{Y_c}{Z_c} = \frac{y}{f} \Rightarrow y = f \frac{Y_c}{Z_c}. \quad (1.10)$$


 Figura 4. Semejanza de triángulos: (a) plano $X_c - Z_c$; (b) plano $Y_c - Z_c$.

Entonces, las coordenadas de la imagen final se pueden deducir a partir de

$$(X_c, Y_c, Z_c)^T \mapsto (fX_c/Z_c, fY_c/Z_c)^T. \quad (1.11)$$

La anterior transformación describe el mapeo de las coordenadas 3D de un punto en el espacio a las coordenadas 2D del mismo punto sobre la imagen. Este es un mapeo desde el espacio euclidiano 3D al espacio euclidiano 2D ($\square^3 \mapsto \square^2$).

Aplicando conceptos de geometría proyectiva, los puntos del mundo real y los de la imagen se pueden representar como un mapeo lineal de sus coordenadas homogéneas [59]. En este caso la ecuación (1.11) se puede expresar en términos de una multiplicación de matrices, de la siguiente manera:

$$(fX_c/Z_c, fY_c/Z_c)^T = \begin{pmatrix} fX_c/Z_c \\ fY_c/Z_c \end{pmatrix}, \text{ es equivalente a } \begin{pmatrix} fX_c \\ fY_c \\ Z_c \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX_c \\ fY_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

La matriz de la ecuación (1.13) se puede expresar como $\text{diag}(f, f, 1)[\mathbf{I} | \mathbf{0}]$; donde $\text{diag}(f, f, 1)$ es una matriz diagonal y $[\mathbf{I} | \mathbf{0}]$ una matriz formada por una matriz identidad de 3×3 , y un vector columna con todos sus elementos iguales a cero.

Si se asume que un punto en el espacio está representado por un vector tetradimensional en coordenadas homogéneas dado por $\mathbf{X} = (X_C, Y_C, Z_C, 1)^T$, mientras que su respectivo punto imagen está representado por un vector tridimensional en coordenadas homogéneas dado por $\mathbf{x} = (fX_C, fY_C, Z_C)^T$, y que el mapeo entre el vector \mathbf{X} y el vector \mathbf{x} está representado por una matriz homogénea \mathbf{P} ; dicho mapeo se puede representar a través de una transformación proyectiva y está dado por,

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}. \quad (1.14)$$

En la ecuación anterior la matriz \mathbf{P} define la matriz de la cámara en el modelo *pinhole* y está dada por,

$$\mathbf{P} = \text{diag}(f, f, 1)[\mathbf{I} | \mathbf{0}]. \quad (1.15)$$

Por otra parte la ecuación (1.11) asume que el origen de coordenadas del plano imagen es el punto principal p ; sin embargo esto no se cumple en la práctica, por lo tanto dicha ecuación se debe modificar dando origen a:

$$(X_C, Y_C, Z_C)^T \mapsto (fX_C/Z_C + p_x, fY_C/Z_C + p_y)^T, \quad (1.16)$$

donde (p_x, p_y) son las coordenadas del punto principal, ver Figura 5.

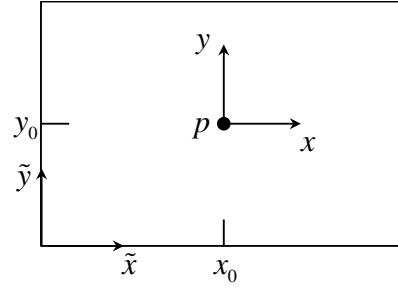


Figura 5. Vista frontal del plano imagen.

En coordenadas homogéneas la ecuación (1.16) se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX_c + Z_c p_x \\ fY_c + Z_c p_y \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (1.17)$$

y de forma compacta como,

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}[\mathbf{I} | \mathbf{0}] \mathbf{X}. \quad (1.18)$$

La matriz \mathbf{K} se conoce como la matriz de calibración de la cámara y está dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Por otra parte, los puntos del espacio tridimensional están ligados a otro sistema coordinado diferente al de la cámara, que algunos autores denominan el sistema coordinado del mundo. En la Figura 6 $\tilde{\mathbf{X}}_w$ es un vector con las coordenadas del punto P respecto al sistema coordinado del mundo $O_w (X_w, Y_w, Z_w)$, $\tilde{\mathbf{X}}$ contiene las coordenadas del mismo punto

en el sistema coordenado de la cámara, y $\tilde{\mathbf{C}}$ las coordenadas del centro de la cámara en el sistema coordenado del mundo.

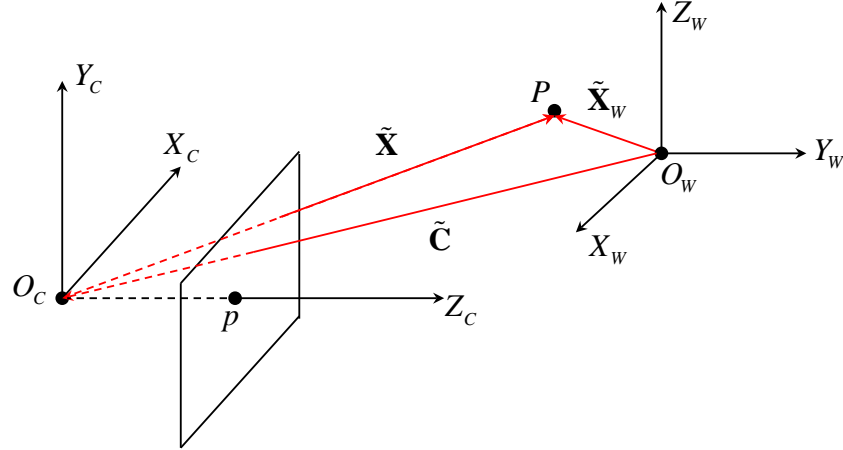


Figura 6. Transformación euclidiana entre el sistema coordenado del mundo y el de la cámara.

El sistema coordenado del mundo y el sistema coordenado de la cámara están relacionados por:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}_w - \tilde{\mathbf{C}}. \quad (1.20)$$

En situaciones más generales el sistema coordenado del mundo y el sistema coordenado de la cámara están relacionados por medio de una rotación y una traslación. Por esta razón en la ecuación (1.20) se incluye una matriz \mathbf{R} con tres grados de libertad y que da lugar a la siguiente ecuación:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}_w - \mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) aparece frecuentemente en la literatura como

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}_w + \mathbf{t}, \quad (1.22)$$

donde \mathbf{t} representa el término $-\mathbf{RC}$. Ahora bien, la ecuación (1.21) se puede expresar, en coordenadas homogéneas, como un producto de matrices, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}_w - \mathbf{RC} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RC} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_w \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RC} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_w.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Reemplazando la ecuación (1.23) en la ecuación (1.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{RC} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -(r_{11}C_1 + r_{12}C_2 + r_{13}C_3) \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -(r_{21}C_1 + r_{22}C_2 + r_{23}C_3) \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -(r_{31}C_1 + r_{32}C_2 + r_{33}C_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -\mathbf{r}_1^T \tilde{\mathbf{C}} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -\mathbf{r}_2^T \tilde{\mathbf{C}} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -\mathbf{r}_3^T \tilde{\mathbf{C}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & 1 & -C_3 \end{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ &= \mathbf{KR} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \mathbf{X}_w.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Donde \mathbf{X}_w es un vector con las coordenadas del punto P respecto al sistema coordenado del mundo y en coordenadas homogéneas. La ecuación (1.24) representa el mapeo general dado por una cámara *pinhole*. Se puede ver que la matriz $\mathbf{P} = \mathbf{KR} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}$, que representa

dicho mapeo, tiene nueve grados de libertad: 3 para \mathbf{K} (los elementos f, p_x, p_y), 3 para \mathbf{R} , y 3 para $\tilde{\mathbf{C}}$. Los parámetros contenidos en \mathbf{K} son llamados parámetros internos de la cámara, o la orientación interna de la cámara. Los elementos de \mathbf{R} y $\tilde{\mathbf{C}}$ que relacionan la orientación y la posición de la cámara respecto al sistema coordenado del mundo son llamados parámetros externos u orientación externa de la cámara.

2.2. Cámaras digitales (CCD o CMOS)

El modelo *pinhole* descrito en el apartado anterior asume que las coordenadas de la imagen son coordenadas euclidianas con escalas iguales en ambas direcciones axiales. En el caso de las cámaras digitales esto por lo general no es cierto ya que los píxeles de las mismas no son cuadrados, lo que obliga a introducir factores de corrección en cada uno de los ejes. Por lo tanto, asumiendo m_x y m_y como los factores de corrección para el eje x y el eje y respectivamente, se tiene que la transformación desde el sistema de coordenadas del mundo hacia el sistema coordenado ubicado sobre el plano imagen y cuyas unidades son píxeles, está dada por la multiplicación de la matriz de calibración, ecuación (1.19), con la matriz $\text{diag}(m_x, m_y, 1)$. Por lo tanto, la forma general de la matriz de calibración de una cámara digital es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_x f & 0 & m_x p_x \\ 0 & m_y f & m_y p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

donde $\alpha_x = m_x f$ y $\alpha_y = m_y f$ representan la longitud focal de la cámara, en píxeles, en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. De manera similar, $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_0, y_0)$ es el punto principal, en píxeles, con coordenadas $x_0 = m_x p_x$ y $y_0 = m_y p_y$. Por lo tanto una cámara digital tiene 10 grados de libertad.

Algunos autores [59] incluyen en la matriz de calibración, ecuación (1.25), un parámetro de oblicuidad, el cual está directamente relacionado con el ángulo que forman los ejes coordenados de la cámara y que para la mayoría es igual a 90° , ya que los fabricantes garantizan que dichos ejes son perpendiculares; lo que implica que el parámetro de oblicuidad es igual a cero. En el caso específico en el que dicho parámetro sea diferente de cero, la matriz de calibración tendrá la forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

2.3. Aberraciones geométricas

En los apartados anteriores se ha supuesto que un modelo lineal es un modelo preciso para describir el proceso de formación de imágenes. Por lo tanto, en este modelo, un punto en el espacio tridimensional, su respectivo punto imagen y el centro de la cámara son colineales y las líneas en el espacio tridimensional son mapeadas en líneas sobre el plano imagen. Para lentes reales, es decir aquellas que no se ajustan al modelo *pinhole*, esta suposición no es válida y las imágenes que son adquiridas por medio de cámaras que poseen este tipo de lentes aparecerán distorsionadas. Las distorsiones de las lentes pueden clasificarse como radiales o tangenciales [60].

La distorsión radial es una deformación de la imagen a lo largo de la dirección del vector que apunta desde un punto llamado centro de distorsión hasta el punto imagen en cuestión, la distorsión tangencial es una deformación perpendicular a dicha dirección, ver Figura 7. Sin embargo, en muchas ocasiones los efectos de la distorsión tangencial no se tienen en cuenta debido a que son menos significativos que los efectos de la distorsión radial.

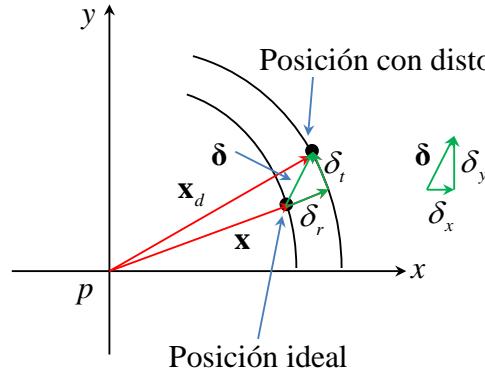


Figura 7. Componentes de la distorsión.

La ecuación que relaciona un punto ideal (sin distorsiones), con un punto con distorsiones está dada por

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = L(r) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Las coordenadas (x, y) corresponden a las del punto ideal, el cual obedece a una proyección lineal, mientras que (x_d, y_d) es la posición del mismo punto pero afectada por la distorsión radial; $L(r)$ es un factor de distorsión que es función de la distancia radial r , la cual se mide desde el centro de distorsión que por lo general coincide con el punto principal.

En píxeles, las coordenadas de la corrección se escriben como se muestra a continuación:

$$\hat{x} = \tilde{x}_c + L(\tilde{r}) \left({}^m\tilde{x} - \tilde{x}_c \right), \quad (1.28)$$

$$\hat{y} = \tilde{y}_c + L(\tilde{r}) \left({}^m\tilde{y} - \tilde{y}_c \right). \quad (1.29)$$

Donde $({}^m\tilde{x}, {}^m\tilde{y})$ son las coordenadas medidas, (\hat{x}, \hat{y}) son las coordenadas corregidas, y $(\tilde{x}_c, \tilde{y}_c)$ es el centro de la distorsión radial, con $\tilde{r}^2 = ({}^m\tilde{x} - \tilde{x}_c)^2 + ({}^m\tilde{y} - \tilde{y}_c)^2$. La función

$L(\tilde{r})$ solo está definida para valores positivos de \tilde{r} y $L(0)=1$. Una aproximación a una función arbitraria $L(\tilde{r})$ se puede obtener por medio de una expansión en series de Taylor de la siguiente manera

$$L(\tilde{r}) = 1 + k_1\tilde{r} + k_2\tilde{r}^2 + k_3\tilde{r}^3 + \dots \quad (1.30)$$

Los coeficientes para la corrección radial $\{k_1, k_2, k_3, \dots, x_c, y_c\}$ son considerados parte de la calibración interna de la cámara. Con base en este modelo los coeficientes $\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ son infinitos, sin embargo, de acuerdo a las deducciones realizadas por Tsai [61], es posible obtener buenos resultados teniendo en cuenta solo el coeficiente k_1 . Por otro lado, la variación sobre la posición ideal (x, y) de un punto en unidades métricas y ubicado sobre el plano imagen, debida al error introducido por la distorsión (δ_x, δ_y) , ver Figura 7, está dada por

$$x_d = x + \delta_x, \quad (1.31)$$

$$y_d = y + \delta_y. \quad (1.32)$$

Donde δ_x y δ_y están dadas por [62]:

$$\delta_x = xk_1r^2 + xk_2r^4 + 2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2), \quad (1.33)$$

$$\delta_y = yk_1r^2 + yk_2r^4 + 2p_2xy + p_1(r^2 + 2y^2), \quad (1.34)$$

donde p_1 y p_2 son coeficientes para la distorsión tangencial y $r^2 = x^2 + y^2$.

Considerando las componentes de la distorsión geométrica, la matriz de calibración, dada por la ecuación (1.26), se transforma en

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 + \tilde{\delta}_x \\ 0 & \alpha_y & y_0 + \tilde{\delta}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

En definitiva, hay varias componentes de error en los procesos de medición que utilizan imágenes que han sido adquiridas con algún tipo de cámara digital; por tal razón trabajos desarrollados en el campo de la metrología óptica [62,63] sugieren que la mejor forma de estimar los parámetros de la cámara consiste en minimizar la diferencia entre los puntos ideales del modelo matemático sin distorsiones y los puntos medidos u obtenidos a partir del sistema formador de imágenes. Como consecuencia de esto, el cálculo de los parámetros se convierte en un procedimiento de optimización no lineal cuya función de error está dada por:

$$F = \sum_{i=1}^N \left(x_i^d - x_i \right)^2 + \left(y_i^d - y_i \right)^2, \quad (1.36)$$

donde N es el número de puntos de observación, (x_i, y_i) son las coordenadas ideales y (x_i^d, y_i^d) son las coordenadas distorsionadas.

2.4. Calibración de la cámara

Para llevar a cabo la calibración de una cámara digital se suelen implementar principalmente dos métodos, el método de Tsai [61] o el método de Zhang [49].

En el método de calibración de Tsai la cámara se modeliza a partir del modelo *pinhole* con distorsión radial de primer orden. Este método puede llevarse a cabo utilizando puntos 3D coplanares o no coplanares. Generalmente se utiliza un objeto 3D con geometría conocida y con marcas ubicadas sobre su superficie, cuyas posiciones también son conocidas. Las mar-

cas son detectadas en el plano imagen de la cámara a calibrar, lo que proporciona un conjunto de correspondencias 3D-2D. El método de Tsai inicialmente obtiene una estimación lineal de los parámetros de calibración que realiza mediante una serie de restricciones geométricas; para ello utiliza una técnica basada en dos etapas. En una primera etapa se computan la orientación y posición de la cámara respecto al sistema coordenado del mundo. Luego, a partir de la estimación de la orientación y la posición de la cámara, se obtienen los parámetros intrínsecos de la misma. Tras la estimación inicial de los parámetros, éstos son refinados mediante un algoritmo de optimización que minimiza el error de retroproyección, el cual está dado por la ecuación (1.36).

El resultado del proceso de calibración son los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, así como el coeficiente de distorsión radial k_1 , ver ecuaciones (1.33) y (1.34). El método de Tsai asume que hay ciertos parámetros que tienen que ser proporcionados por el fabricante, esto reduce el número de parámetros a calibrar en la primera etapa, aunque puede producir resultados poco precisos o erróneos si no se dispone de valores exactos o no se dispone de estos en absoluto.

El método de calibración de Zhang requiere que la cámara observe un plano con marcas en al menos dos posiciones arbitrarias distintas. Las posiciones de las marcas en el plano son conocidas. Las marcas son detectadas en el plano imagen de la cámara a calibrar, lo que proporciona un conjunto de correspondencias 3D-2D para cada plano. Es importante resaltar que cada plano de calibración tiene asociado un sistema coordenado con el eje Z_w paralelo a la normal del plano de calibración.

En el método de Zhang, inicialmente se calculan las matrices de proyección u homografías que transforman las coordenadas 3D de las marcas sobre los planos de calibración al plano imagen de la cámara. Estas homografías se calculan mediante el método de transformación lineal directa (Direct Linear Transformation, o DLT por sus siglas en inglés) [59]. Una vez computadas las homografías es posible obtener, a partir de dos restricciones geométricas, una estimación analítica de los parámetros intrínsecos y extrínsecos. Después se procede a realizar una primera optimización no-lineal que sirve de base para realizar una última optimización que tiene en cuenta las distorsiones de la lente. Las optimizaciones no lineales se

realizan mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt que se basa en minimizar el error de retroproyección. En este caso la distorsión radial se modeliza mediante dos coeficientes, k_1 y k_2 .

2.5. La técnica de calibración de Zhang

Como se mencionó en el apartado anterior, en la técnica propuesta por Zhang se requiere que el plano de calibración sea visto por la cámara en al menos dos posiciones diferentes. El objeto de calibración por lo general es un tablero ajedrezado, el cual se ubica en posiciones aleatorias al interior del campo de observación de la cámara. Comparada con otras técnicas de calibración, la propuesta por Zhang es más versátil, y tal vez la más adecuada para realizar aplicaciones fuera del laboratorio.

La técnica de calibración se basa en el modelo *pinhole*, y asume que el patrón de calibración observado por la cámara se encuentra en una posición respecto al sistema coordenado del mundo tal que $Z_w = 0$. De este modo la ecuación (1.24) se puede expresar como,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{K} [\mathbf{R} | \mathbf{t}] \mathbf{X}_w \\
 &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{K} \begin{pmatrix} r_{11}X_w + r_{12}Y_w + t_1 \\ r_{21}X_w + r_{22}Y_w + t_2 \\ r_{31}X_w + r_{32}Y_w + t_3 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & t_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

La ecuación (1.37) indica que un punto ubicado en el plano de calibración y su respectivo punto ubicado sobre el plano imagen, están relacionados por medio de una homografía definida por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]. \quad (1.38)$$

Si se asume que $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3]$ la ecuación (1.38) se puede expresar como

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]. \quad (1.39)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.39) \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{t} se pueden expresar como

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3. \quad (1.42)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la ortonormalidad entre \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ahora bien, sean

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{K}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & 0 & 0 \\ -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{1}{\alpha_y} & 0 \\ \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

El producto $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$ que aparece en las ecuaciones (1.43) y (1.44) se define como la matriz \mathbf{B} [49], como se muestra a continuación:

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & -\frac{s}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} \\ -\frac{s}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{s^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} & -\frac{s(sy_0 - x_0 \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{y_0}{\alpha_y^2} \\ \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} & -\frac{s(sy_0 - x_0 \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{y_0}{\alpha_y^2} & \frac{(sy_0 - x_0 \alpha_y)^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{y_0^2}{\alpha_y^2} + 1 \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, las ecuaciones (1.43) y (1.44) se pueden escribir como

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{B} \mathbf{h}_2 = 0, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{B} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{B} \mathbf{h}_2. \quad (1.49)$$

Resolviendo la ecuación (1.48) se obtiene:

$$\begin{aligned} & (h_{11} \quad h_{12} \quad h_{13}) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & (B_{11} \quad B_{12} \quad B_{22} \quad B_{13} \quad B_{23} \quad B_{33}) \begin{pmatrix} h_{11}h_{21} \\ h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21} \\ h_{12}h_{22} \\ h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23} \\ h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23} \\ h_{13}h_{23} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Como se observa en la anterior ecuación, la operación se puede reducir al producto interno de dos vectores de seis elementos. Resolviendo la ecuación (1.49) el resultado será similar:

$$\begin{aligned} & (h_{11} \quad h_{12} \quad h_{13}) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = (h_{21} \quad h_{22} \quad h_{23}) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & (B_{11} \quad B_{12} \quad B_{22} \quad B_{13} \quad B_{23} \quad B_{33}) \begin{pmatrix} h_{11}h_{11} \\ h_{11}h_{12} + h_{12}h_{11} \\ h_{12}h_{12} \\ h_{13}h_{11} + h_{11}h_{13} \\ h_{13}h_{12} + h_{12}h_{13} \\ h_{13}h_{13} \end{pmatrix} = \varphi \\ \Rightarrow & (B_{11} \quad B_{12} \quad B_{22} \quad B_{13} \quad B_{23} \quad B_{33}) \begin{pmatrix} h_{21}h_{21} \\ h_{21}h_{22} + h_{22}h_{21} \\ h_{22}h_{22} \\ h_{23}h_{21} + h_{21}h_{23} \\ h_{23}h_{22} + h_{22}h_{23} \\ h_{23}h_{23} \end{pmatrix} = \varphi. \end{aligned} \quad (1.51)$$

A partir de las ecuaciones (1.50) y (1.51) se definen los siguientes vectores,

$$\mathbf{b} = (B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33})^T, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{v}_{ij} = (h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3}, h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3}, h_{i3}h_{j3})^T. \quad (1.53)$$

De acuerdo con esto, las ecuaciones (1.48) y (1.49) se pueden expresar de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{pmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.54)$$

Si se adquieren n imágenes del patrón de calibración y se agrupan en una sola todas las ecuaciones, se obtiene

$$\mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.55)$$

Donde \mathbf{V} es una matriz de $2n \times 6$. Una vez que se conoce \mathbf{b} se pueden calcular todos los componentes de la matriz \mathbf{K} , ecuación (1.26), la cual contiene los parámetros intrínsecos de la cámara. Estos parámetros se pueden deducir a partir de la ecuación (1.46):

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\alpha_x^2} \\ \Rightarrow \alpha_x &= \frac{1}{\sqrt{B_{11}}}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\frac{-s}{\alpha_x^2 \alpha_y} = B_{12}, \quad (1.57)$$

$$\frac{s^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} = B_{22}, \quad (1.58)$$

$$\frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} = B_{13}, \quad (1.59)$$

$$\frac{-s(sy_0 - x_0 \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{y_0}{\alpha_y^2} = B_{23}. \quad (1.60)$$

A partir de la ecuación (1.57) se tiene que

$$s = -\alpha_x^2 \alpha_y B_{12}, \quad (1.61)$$

reemplazando la ecuación (1.61) en la ecuación (1.58) y operando con el propósito de calcular α_y , tenemos

$$\alpha_y = \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}}, \quad (1.62)$$

reemplazando (1.62) y (1.56) en la ecuación (1.61) se obtiene el valor de s :

$$s = -\frac{B_{12}}{B_{11}} \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}}. \quad (1.63)$$

Por otra parte haciendo uso de la ecuación (1.59) tenemos

$$x_0 = \frac{sy_0 - B_{13} \alpha_x^2 \alpha_y}{\alpha_y}, \quad (1.64)$$

reemplazando (1.64) en (1.60) y operando con el propósito de calcular y_0 , se tiene

$$y_0 = \frac{B_{12}B_{13} - B_{23}B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}. \quad (1.65)$$

Reemplazando (1.65), (1.63), (1.62) y (1.56) en la ecuación (1.64) se puede calcular el valor de x_0 , que está dado por

$$x_0 = \frac{B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}. \quad (1.66)$$

Por último, a partir de las ecuaciones (1.40), (1.41) y (1.42) es posible calcular los parámetros extrínsecos de la cámara. Haciendo uso de las ecuaciones (1.40) y (1.41) se pueden calcular las dos primeras columnas de la matriz de rotación \mathbf{R} , el vector que define la tercera columna de esta matriz se puede calcular a partir del producto cruz entre los vectores que definen las dos primeras, de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (1.67)$$

el vector de traslación está definido a partir de la ecuación (1.42).

2.6. Distorsión radial

Sean (\tilde{x}, \tilde{y}) las coordenadas ideales en píxeles y $({}^m\tilde{x}, {}^m\tilde{y})$ las respectivas coordenadas medidas. Los puntos ideales son aquellos que son mapeados de acuerdo al modelo pinhole. De manera similar, sean (x, y) las coordenadas ideales en unidades métricas y $({}^m x, {}^m y)$ las respectivas coordenadas medidas. En este caso se tiene

$${}^m x = x + x \left[k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right], \quad (1.68)$$

$${}^m y = y + y \left[k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right], \quad (1.69)$$

donde k_1 y k_2 son los coeficientes de la distorsión radial. El centro de la distorsión es el mismo punto principal. Teniendo en cuenta que ${}^m\tilde{x} = x_0 + \alpha_x {}^m x$, y ${}^m\tilde{y} = y_0 + \alpha_y {}^m y$, se tiene

$${}^m\tilde{x} = \tilde{x} + (\tilde{x} - x_0) \left[k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right], \quad (1.70)$$

$${}^m\tilde{y} = \tilde{y} + (\tilde{y} - y_0) \left[k_1 (x^2 + y^2) + k_2 (x^2 + y^2)^2 \right]. \quad (1.71)$$

2.7. Cálculo de los coeficientes de la distorsión radial

Como se espera que la distorsión radial no sea significativa, los otros cinco parámetros intrínsecos se pueden calcular por medio del procedimiento descrito anteriormente. La estrategia consiste en calcular los coeficientes k_1 y k_2 después de haber calculado los otros parámetros, los cuales darán las coordenadas ideales en píxeles (\tilde{x}, \tilde{y}) . Luego, a partir de (1.70) y (1.71) se tienen dos ecuaciones para cada punto en cada imagen:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{x} - x_0)(x^2 + y^2) & (\tilde{x} - x_0)(x^2 + y^2)^2 \\ (\tilde{y} - y_0)(x^2 + y^2) & (\tilde{y} - y_0)(x^2 + y^2)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^m\tilde{x} - \tilde{x} \\ {}^m\tilde{y} - \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Si se tienen N puntos por imagen y se tienen en total m imágenes, se obtienen $2Nm$ ecuaciones lineales, que se pueden expresar matricialmente como

$$\mathbf{D}\mathbf{k} = \mathbf{d}, \quad (1.73)$$

donde $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$. La solución a este sistema de ecuaciones estará dada por

$$\mathbf{k} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{d}. \quad (1.74)$$

2.8. Calibración experimental de una cámara digital

Para el procedimiento de calibración experimental se requiere de un patrón de calibración bien caracterizado metrológicamente, de tal forma que se puedan identificar las coordenadas de los puntos de referencia o puntos de control. Con el objetivo de calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, se adquiere un conjunto de imágenes del patrón de calibración el cual se ubica en posiciones aleatorias al interior del campo de observación de la cámara. Por lo general se usa como patrón un plano ajedrezado, en este caso los puntos de control serán las esquinas de cada uno de los cuadros que conforman el patrón. En una primera etapa y mediante procesamiento digital de imágenes se calculan las coordenadas en píxeles, las cuales son denominadas coordenadas teóricas $({}^t\tilde{x}, {}^t\tilde{y})$, de cada uno de los puntos de control y las coordenadas en unidades métricas de los mismos en el sistema coordenado del mundo, esto último debido a que se conocen las dimensiones de los cuadros en unidades métricas. A partir de esta información es posible calcular, para cada una de las imágenes adquiridas del patrón de calibración, la homografía que representa el mapeo de los puntos de control desde el espacio 3D hacia el plano imagen de la cámara. Teniendo en cuenta las homografías obtenidas, es posible calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, como se describió en el apartado anterior.

Los parámetros calculados siguiendo este procedimiento, el cual no tiene en cuenta las distorsiones, son utilizados, como variables iniciales, para aplicar un algoritmo de optimización no lineal que permite calcular los parámetros de calibración teniendo en cuenta las distorsiones y que minimiza el error de retroproyección. En este caso a partir de los parámetros obtenidos se calculan las coordenadas experimentales y en píxeles de los puntos de control $({}^e\tilde{x}, {}^e\tilde{y})$. La función de error a minimizar está dada por

$$F = \sum_{i=1}^N ({}^t\tilde{x}_i - {}^e\tilde{x}_i)^2 + ({}^t\tilde{y}_i - {}^e\tilde{y}_i)^2. \quad (1.75)$$

Una de las herramientas más usada y referenciada para la calibración de cámaras digitales es un algoritmo de código abierto desarrollado dentro del lenguaje de programación

MATLAB[®] y de libre distribución llamado herramienta de calibración de cámaras (Camera Calibration Toolbox, o CCT por sus siglas en inglés). Esta herramienta se basa en la técnica de calibración de Zhang para calcular los parámetros de la cámara y permite modelizar las aberraciones teniendo en cuenta tanto la distorsión radial como la distorsión tangencial [64].

Para llevar a cabo el procedimiento de calibración se utilizó una lámina de vidrio con dimensiones 22.0 cm × 28.0 cm × 0.5 cm, adhiriendo a una de sus caras un patrón ajedrezado con cuadros de 10 mm × 10 mm. El patrón de calibración utilizado se muestra en la Figura 8.

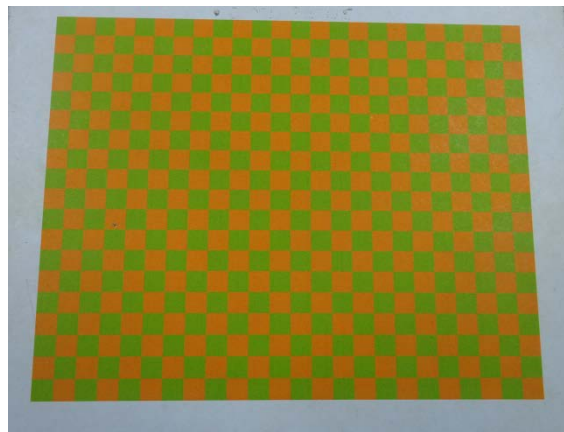


Figura 8. Patrón de calibración utilizado.

La cámara digital a calibrar es una cámara CCD de la marca Edmund Optics, referencia EO-0813M, monocromática y resolución 1024 píxeles × 768 píxeles; el lente utilizado es uno de la marca computar de 16 mm y referencia M1614-MP2 2/3”.

El procedimiento de calibración inicia con la adquisición de más de dos imágenes del patrón de calibración. Para este experimento se adquirieron 7 imágenes, cada una en una posición diferente y arbitraria al interior del campo de observación de la cámara, en la Figura 9a se muestra una de las imágenes adquiridas. Una vez adquiridas las imágenes el programa procede a calcular las coordenadas $({}^t\tilde{x}, {}^t\tilde{y})$ en píxeles del mayor número posible de puntos de control. Para tal propósito, mediante técnicas de procesamiento digital de imágenes, la

CCT identifica las esquinas de los cuadros contenidos en una región definida por el usuario, donde también se define el sistema coordenado del plano imagen, ver Figura 9b.

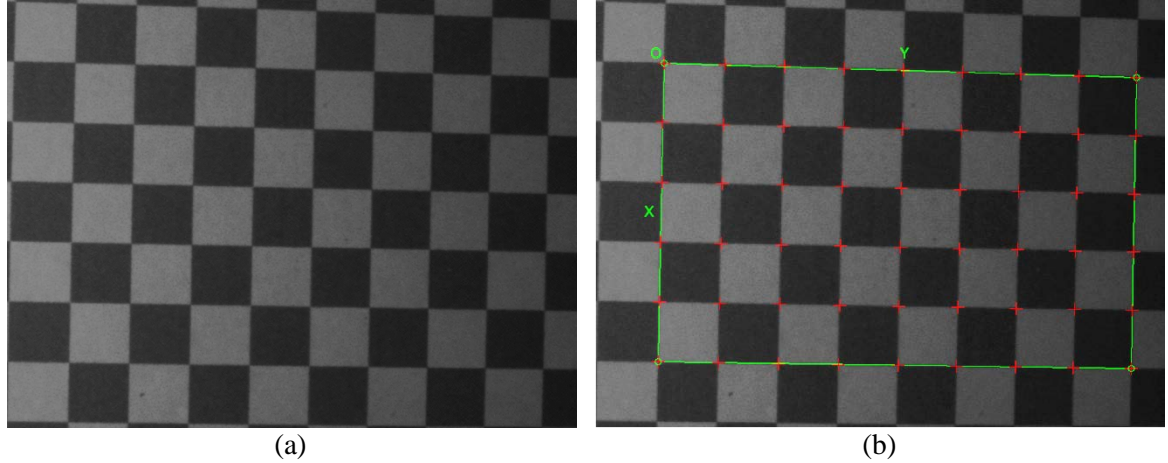


Figura 9. Identificación de esquinas mediante la CCT para la primera imagen adquirida: (a) Imagen adquirida. (b) Esquinas detectadas.

Las coordenadas de las esquinas de los cuadros son calculadas mediante técnicas de procesamiento digital de imágenes especializadas en detección de bordes. Este procedimiento se realiza para todas las imágenes adquiridas. Luego de calcular las coordenadas de las esquinas para cada una de las imágenes adquiridas se procede a obtener los parámetros de calibración; para esto, inicialmente se calculan las matrices \mathbf{H}_i que definen cada una de las homografías. Las matrices obtenidas se muestran a continuación:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -0.201 & 9.773 & 91.354 \\ 9.995 & 0.082 & 108.291 \\ 0.000 & -0.004 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} -0.240 & 11.023 & 120.546 \\ 10.763 & 0.380 & 111.718 \\ 0.000 & 0.004 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.77)$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0.085 & 10.874 & 120.818 \\ 10.840 & 0.127 & 86.252 \\ 0.004 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.78)$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} -0.505 & 10.743 & 92.083 \\ 10.103 & 0.062 & 48.806 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.79)$$

$$\mathbf{H}_5 = \begin{bmatrix} 0.157 & 9.842 & 78.935 \\ 10.295 & 0.170 & 39.056 \\ 0.001 & -0.006 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{H}_6 = \begin{bmatrix} 0.584 & 11.037 & 59.897 \\ 10.806 & -0.318 & 152.292 \\ 0.001 & 0.001 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad (1.81)$$

$$\mathbf{H}_7 = \begin{bmatrix} 0.421 & 11.102 & 101.931 \\ 10.825 & -0.203 & 130.864 \\ 0.001 & 0.001 & 1.000 \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

Una vez conocidos los valores h_{ij} correspondientes a cada imagen, se crea la matriz \mathbf{V} , con el propósito de calcular los elementos del vector \mathbf{b} , ecuación (1.55), a partir de los cuales se calculan los elementos de la matriz de calibración \mathbf{K} . La matriz de calibración (que contiene los parámetros intrínsecos de la cámara), calculada a partir de la CCT está dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3492.1 & 0 & 538.7 \\ 0 & 3456.4 & 389.0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (1.83)$$

Finalmente se calculan, a partir de la matriz de calibración y de cada una de las homografías, las matrices de rotación y los vectores de traslación que ubican cada uno de los planos respecto al sistema coordinado de la cámara. Las matrices rotación y los respectivos vectores de traslación se muestran a continuación:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -0.022 & 0.990 & -0.137 \\ 0.999 & 0.023 & 0.006 \\ 0.009 & -0.137 & -0.990 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} -34.45 \\ -27.88 \\ 345.22 \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -0.020 & 0.993 & 0.120 \\ 0.999 & 0.021 & -0.008 \\ -0.011 & 0.120 & -0.993 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} -40.31 \\ -26.42 \\ 320.40 \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.990 & -0.007 \\ 0.993 & 0.012 & 0.121 \\ 0.121 & -0.005 & -0.992 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} -40.33 \\ -28.81 \\ 320.69 \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} -0.010 & 0.999 & -0.012 \\ 0.974 & 0.007 & -0.226 \\ -0.226 & -0.014 & -0.973 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_4 = \begin{pmatrix} -43.42 \\ -32.62 \\ 324.10 \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} -0.009 & 0.981 & -0.191 \\ 0.988 & 0.038 & 0.147 \\ 0.152 & -0.187 & -0.970 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_5 = \begin{pmatrix} -46.48 \\ -34.91 \\ 337.40 \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

$$\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} 0.016 & 0.993 & 0.108 \\ 0.973 & -0.041 & 0.224 \\ 0.227 & 0.101 & -0.968 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_6 = \begin{pmatrix} -45.75 \\ -22.59 \\ 319.51 \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

$$\mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} -0.001 & 0.989 & 0.147 \\ 0.968 & -0.035 & 0.244 \\ 0.247 & 0.142 & 0.958 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_7 = \begin{pmatrix} -41.73 \\ -24.47 \\ 318.19 \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Los anteriores parámetros intrínsecos y extrínsecos fueron calculados sin tener en cuenta la influencia de aberraciones. A partir de tales parámetros y de las coordenadas de los puntos de control en unidades métricas, es posible calcular las coordenadas experimentales en píxeles de los puntos de control. De este modo, la función de error a optimizar está dada por la ecuación (1.75). El proceso de optimización se realiza asumiendo como variables las diez constantes que definen los parámetros intrínsecos y extrínsecos y los cinco coeficientes de distorsión que definen la aberración radial, Ecuación (1.91). El software toma como valores iniciales los parámetros intrínsecos y extrínsecos calculados anteriormente y permite ajustar manualmente los valores iniciales de los cinco coeficientes k_i . En la Figura 10 se muestran, para una de las imágenes adquiridas, las coordenadas teóricas de los puntos de control (señaladas con cruces rojas) y sus respectivas coordenadas experimentales, después de realizar el procedimiento de optimización (señaladas con cruces de color azul).

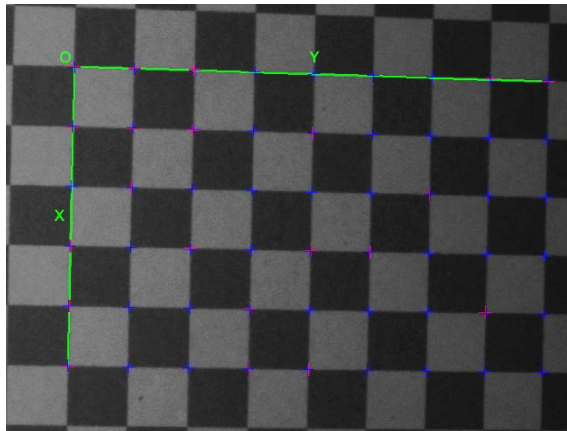


Figura 10. Coordenadas, experimentales y teóricas, calculadas para la primera imagen adquirida.

En la Figura 11 se muestra la nube de error final. La posición de cada cruz en la gráfica corresponde a la diferencia entre las coordenadas teóricas y las experimentales para cada uno de los puntos de control de cada una de las imágenes adquiridas. En el procedimiento

de optimización se emplean cinco coeficientes para definir las aberraciones radiales, en nuestro caso estos están dados por:

$$\mathbf{k}_d = (0.01673 \quad -5.99274 \quad 0.00075 \quad 0.00373 \quad 0.00000). \quad (1.91)$$

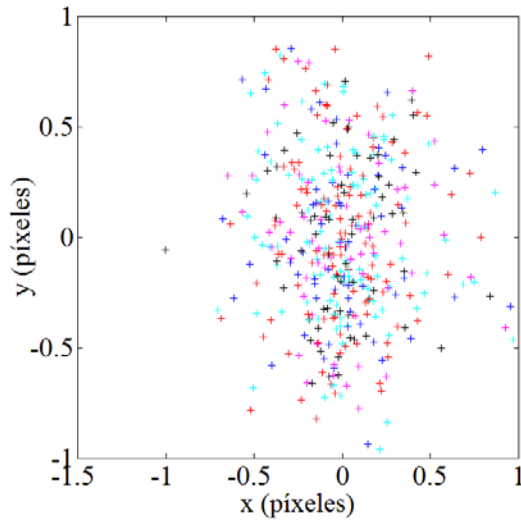


Figura 11. Error de retroproyección en píxeles.

En la Figura 12 se muestran las posiciones, de los planos adquiridos, respecto al sistema coordenado de la cámara.

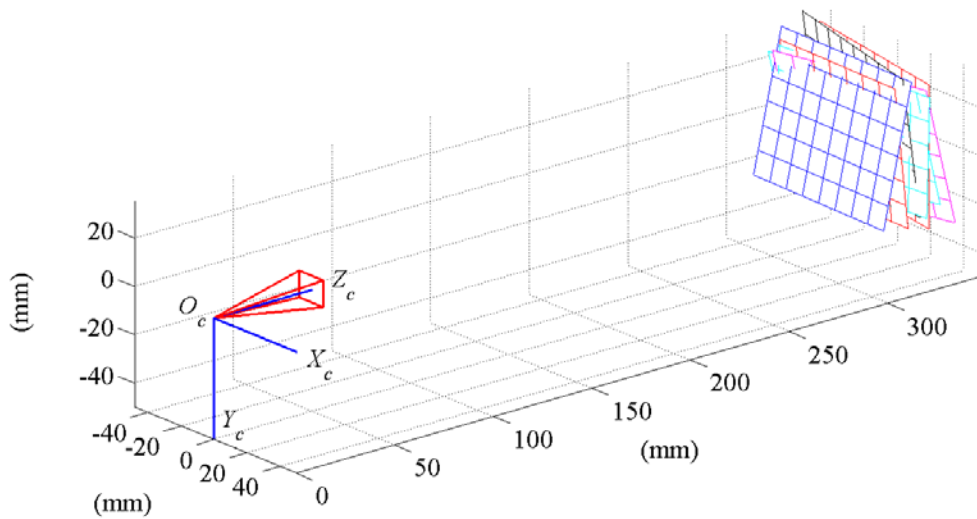


Figura 12. Posiciones de los planos adquiridos respecto al sistema coordenado de la cámara.

2.9. Calibración de una unidad de proyección-adquisición

Una unidad de proyección-adquisición está formada por un proyector y una cámara digital. La técnica de proyección de franjas, en su forma más general, consiste en proyectar franjas, con perfil sinusoidal y fase lineal, sobre la superficie del objeto a reconstruir. La cámara digital adquiere las imágenes de las franjas deformadas debido a las variaciones topográficas de la superficie del mismo; dicha deformación altera la fase de las franjas. La calibración de la unidad de proyección-adquisición consiste en calcular los parámetros necesarios para transformar la fase, asociada a las franjas deformadas, en coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) métricas de la superficie del objeto. Estos parámetros deben ser función de los parámetros intrínsecos y extrínsecos del proyector y de la cámara. Para tal propósito en este trabajo se propone una estrategia basada en el cálculo de la fase de un patrón de puntos codificados, el cual contiene información cifrada con las coordenadas de los píxeles de la pantalla de cristal líquido (Liquid Cristal Display, o LCD por sus siglas en inglés) del proyector.

2.10. Modelo propuesto para la calibración

Gráficamente se pueden representar el funcionamiento y los componentes básicos de un proyector como se muestra en la Figura 13.

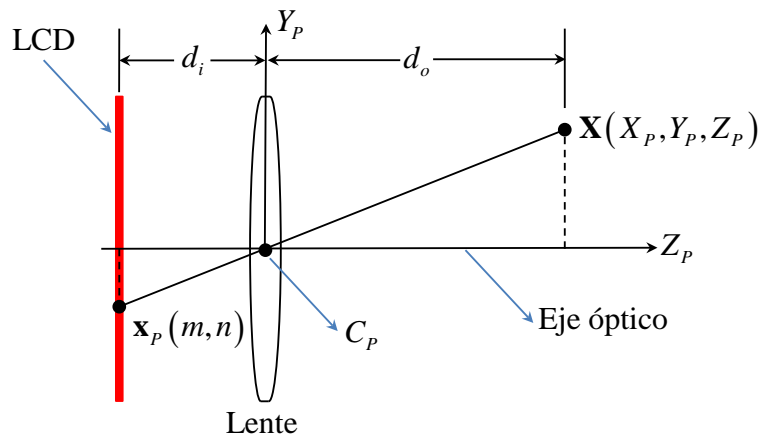


Figura 13. Esquema del proyector.

En la Figura 13 se muestra cómo un punto \mathbf{x}_p con coordenadas (m, n) y ubicado en la LCD del proyector, a una distancia d_o respecto al centro de la lente C_p , es proyectado a un punto \mathbf{X} en el espacio tridimensional y con coordenadas (X_p, Y_p, Z_p) , ubicado a una distancia d_i respecto a C_p . El rayo de luz, representado por la línea recta que une los puntos, pasa por el centro de la lente; y la coordenada n del punto \mathbf{x}_p , que ha sido invertida previamente mediante un procedimiento electrónico propio del proyector, vuelve a su posición original para que la imagen proyectada se conserve fiel a la imagen real. Para excluir el procedimiento de inversión del modelo del proyector, se asume que la LCD está ubicada delante de la lente a una distancia $d_o \approx f_p$ respecto a C_p , ver Figura 14.

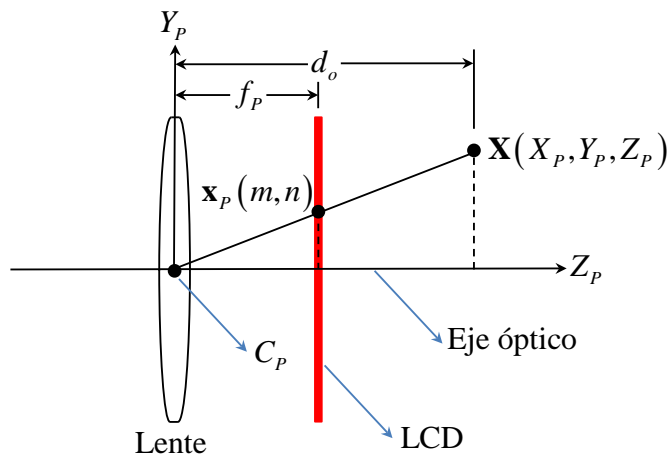


Figura 14. Variación del esquema del proyector.

Al comparar la Figura 14 con la geometría de la cámara propuesta en el modelo *pinhole*, Figura 3, la única diferencia es la dirección de la luz, por lo que este modelo se conoce con el nombre de cámara inversa [43]. En la Figura 15 se muestra la geometría del proyector según este modelo.

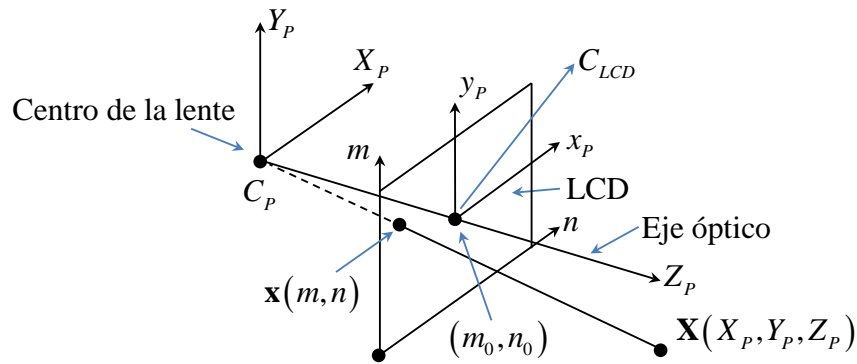


Figura 15. Geometría *pinhole* del proyector.

Las ecuaciones del modelo del proyector se deducen a partir del modelo *pinhole*. Sobre la LCD del proyector se define un sistema coordenado (m, n) , ver Figura 16. Las coordenadas del centro de la LCD son (m_0, n_0) .

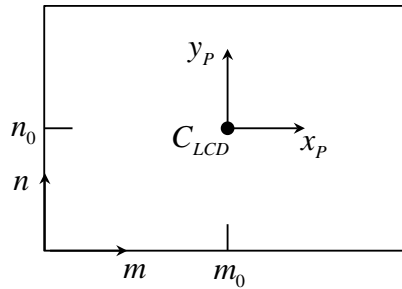


Figura 16. Sistema coordenado de la LCD.

Considerando una fila n_y y una columna m_x sobre la LCD del proyector, en posiciones y_p^l y x_p^l respectivamente, como se muestra en la Figura 17, un punto en la LCD se puede definir como la intersección entre estas dos líneas; o bien se puede definir por el vector posición \mathbf{r} con coordenadas métricas (x_p^l, y_p^l, Z_p) , donde $Z_p \approx f_p$, ver Figura 18.

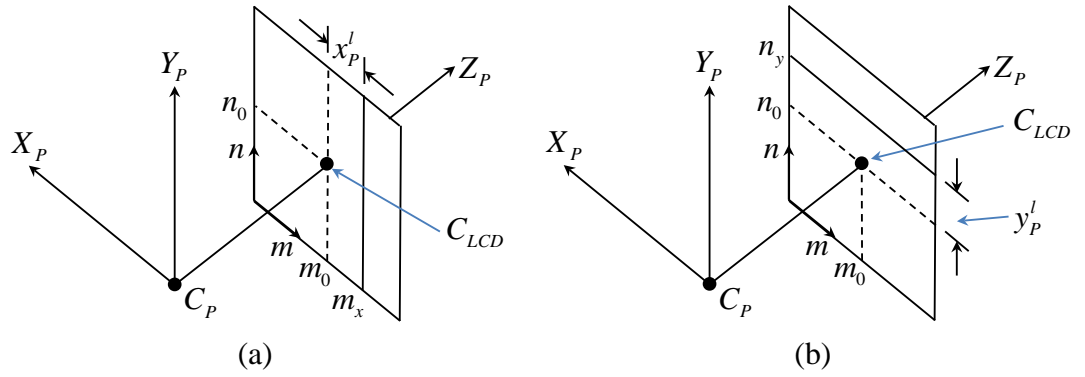


Figura 17. Línea sobre la LCD del proyector: (a) m_x en x'_P . (b) n_y en y'_P .

Las ecuaciones que relacionan a x'_P con m_x , y , a y'_P con n_y están dadas por:

$$x'_P = D_{x_p} (m_x - m_0), \quad (1.92)$$

$$y'_P = D_{y_p} (n_y - n_0). \quad (1.93)$$

Los coeficientes D_{x_p} y D_{y_p} corresponden a los factores de conversión de milímetros a píxeles en los ejes horizontal y vertical respectivamente.

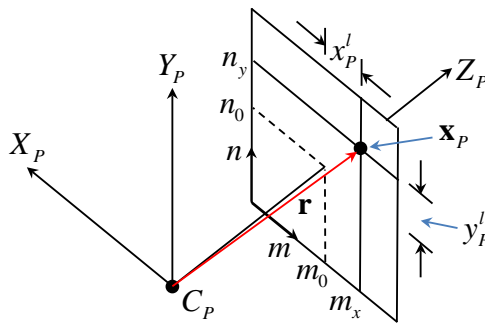


Figura 18. Representación gráfica del vector \mathbf{r} .

Cuando se efectúa la proyección, la luz emitida por el proyector se propaga en el espacio como dos planos con el propósito de formar las líneas, ver Figura 19.

Entonces el punto $\mathbf{r} = (X_p, Y_p, Z_p)$ se puede descomponer como la intersección de dos planos que pasan por la columna m_x y la fila n_y .

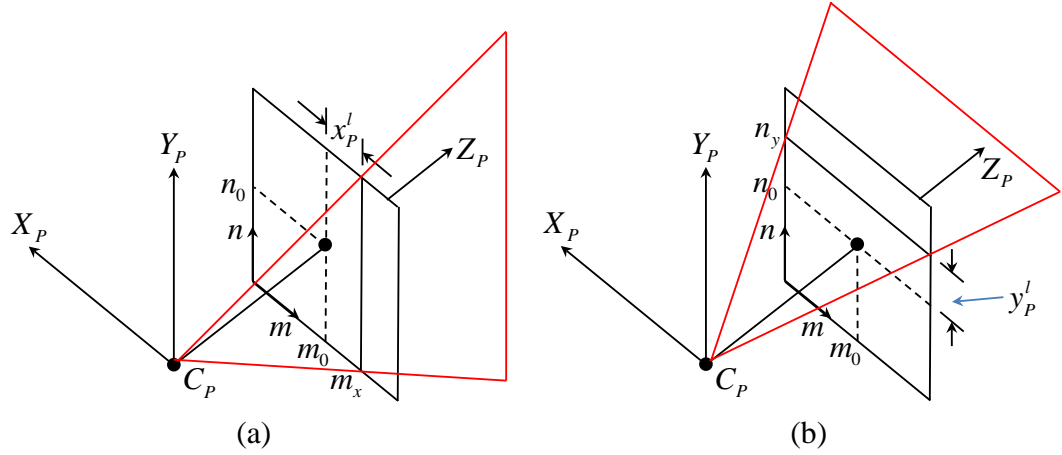


Figura 19. Proyección del plano: (a) Vertical. (b) Horizontal.

En la búsqueda de la ecuación del plano vertical que pasa por la columna m_x , se definen los vectores coplanares \mathbf{r}_{x_1} y \mathbf{r}_{x_2} , los cuales están definidos por:

$$\mathbf{r}_{x_1} = (x_p^l, 0, f_p), \quad (1.94)$$

$$\mathbf{r}_{x_2} = (x_p^l, a_y, f_p). \quad (1.95)$$

Donde x_p^l está dado por la ecuación (1.92), a_y corresponde a la mitad del total de píxeles verticales en la LCD (expresada en milímetros) y f_p es la distancia focal del proyector en milímetros. En la Figura 20 se muestran los vectores \mathbf{r}_{x_1} y \mathbf{r}_{x_2} .

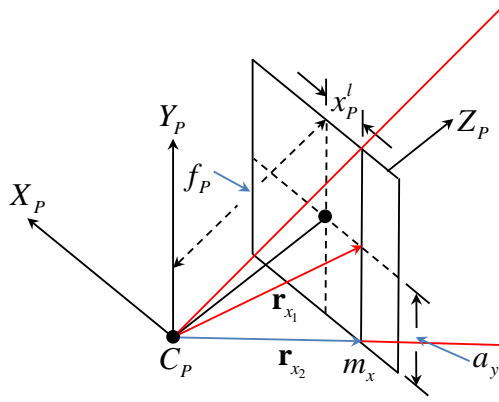


Figura 20. Vectores que pertenecen al plano vertical que pasa por m_x .

Con el producto cruz entre \mathbf{r}_{x_1} y \mathbf{r}_{x_2} se calcula el vector \mathbf{N}_V que es normal al plano vertical, que posteriormente sirve para calcular la ecuación del plano que pasa por m_x , al resolver el producto punto entre el vector \mathbf{N}_V y el vector $\mathbf{r} = (X_P, Y_P, Z_P)$. El vector normal al plano vertical está dado por,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_V &= \mathbf{r}_{x_1} \times \mathbf{r}_{x_2} \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_P^l & 0 & f_P \\ x_P^l & a_y & f_P \end{vmatrix} \\
 &= (-a_y f_P) \hat{i} + (x_P^l a_y) \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

El producto punto entre el vector \mathbf{N}_V y el vector \mathbf{r} , está dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_V \cdot \mathbf{r} &= (-a_y f_P, 0, x_P^l a_y) \cdot (X_P, Y_P, Z_P) \\
 &= -a_y f_P X_P + x_P^l a_y Z_P.
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano vertical, que se obtiene al igualar a cero el producto punto obtenido en la ecuación anterior, está dada por:

$$f_p X_p - x_p^l Z_p = 0. \quad (1.98)$$

Del mismo modo, los vectores \mathbf{r}_{y_1} y \mathbf{r}_{y_2} son coplanares, pertenecen al plano horizontal que pasa por la fila n_y y están definidos por

$$\mathbf{r}_{y_1} = (0, y_p^l, f_p), \quad (1.99)$$

$$\mathbf{r}_{y_2} = (a_x, y_p^l, f_p). \quad (1.100)$$

Donde y_p^l está dado por la ecuación (1.92), a_x corresponde a la mitad del total de píxeles horizontales en la LCD (expresada en milímetros) y f_p es la distancia focal del proyector en milímetros. En la Figura 21 se muestran los vectores \mathbf{r}_{y_1} y \mathbf{r}_{y_2} .

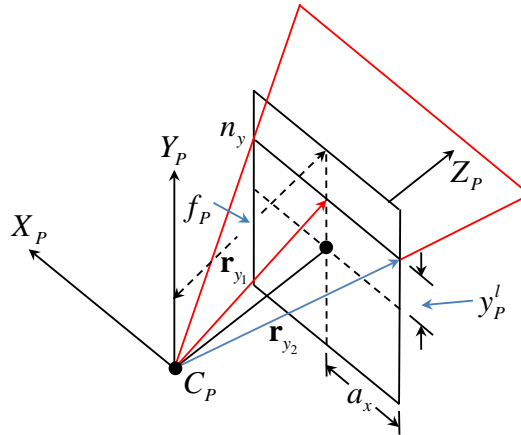


Figura 21. Vectores que pertenecen al plano horizontal que pasa por n_y .

En este caso, el vector \mathbf{N}_H que es normal al plano horizontal, está dado por,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_H &= \mathbf{r}_{y_1} \times \mathbf{r}_{y_2} \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & y_P^l & f_P \\ a_x & y_P^l & f_P \end{vmatrix} \\
 &= (a_x f_P) \hat{j} + (-y_P^l a_x) \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

El producto punto entre el vector \mathbf{N}_H y el vector \mathbf{r} , está dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_H \cdot \mathbf{r} &= (0, a_x f_P, -y_P^l a_x) \cdot (X_P, Y_P, Z_P) \\
 &= a_x f_P Y_P - y_P^l a_x Z_P.
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano horizontal, que se obtiene al igualar a cero el producto punto obtenido en la ecuación anterior, está dada por:

$$f_P Y_P - y_P^l Z_P = 0. \tag{1.103}$$

Las ecuaciones (1.98) y (1.103) definen los planos que pasan por un punto en la LCD en coordenadas del proyector. La Figura 22 muestra los sistemas coordenados empleados por el sistema de proyección-adquisición.

El sistema coordenado del proyector y el sistema coordenado de la cámara están relacionados por, (ver Figura 22):

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{X}_C - \mathbf{r}_{PC}. \tag{1.104}$$

Sin embargo, en situaciones más generales estos sistemas están relacionados por medio de una rotación y una traslación. Por esta razón en la ecuación (1.104) se incluye una matriz \mathbf{R}_C que da lugar a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{R}_C \mathbf{X}_C - \mathbf{R}_C \mathbf{r}_{PC}. \quad (1.105)$$

La ecuación anterior se puede expresar como

$$\mathbf{X}_P = \mathbf{R}_C \mathbf{X}_C + \mathbf{t}_C, \quad (1.106)$$

Donde \mathbf{t}_C representa al término $-\mathbf{R}_C \mathbf{r}_{PC}$.

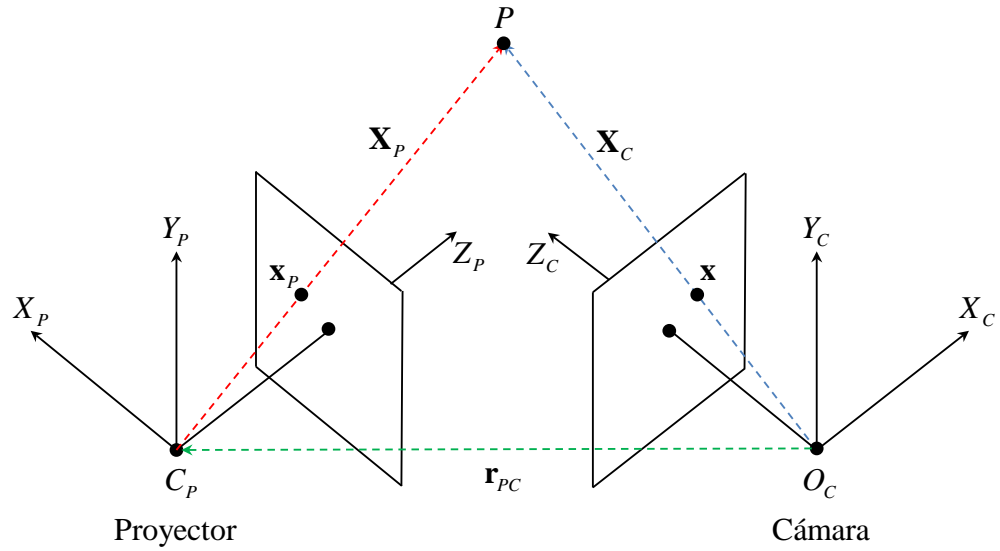


Figura 22. Sistemas coordenados para el sistema de proyección-adquisición.

Por otra parte, la ecuación (1.106) se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{C11} & r_{C12} & r_{C13} \\ r_{C21} & r_{C22} & r_{C23} \\ r_{C31} & r_{C32} & r_{C33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{C1} \\ t_{C2} \\ t_{C3} \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

De la ecuación (1.107) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$X_P = r_{C_{11}} X_C + r_{C_{12}} Y_C + r_{C_{13}} Z_C + t_{C_1}, \quad (1.108)$$

$$Y_P = r_{C_{21}} X_C + r_{C_{22}} Y_C + r_{C_{23}} Z_C + t_{C_2}, \quad (1.109)$$

$$Z_P = r_{C_{31}} X_C + r_{C_{32}} Y_C + r_{C_{33}} Z_C + t_{C_3}. \quad (1.110)$$

Reemplazando los valores de X_P , Y_P y Z_P , dados por las anteriores ecuaciones y los valores de x'_P y y'_P dados por las ecuaciones (1.92) y (1.93) respectivamente, en las ecuaciones (1.98) y (1.103); se obtienen las ecuaciones de los planos con coordenadas en unidades métricas. Dichas ecuaciones se muestran a continuación:

$$f_P (r_{C_{11}} X_C + r_{C_{12}} Y_C + r_{C_{13}} Z_C + t_{C_1}) - D_{x_P} (m_x - m_0) (r_{C_{31}} X_C + r_{C_{32}} Y_C + r_{C_{33}} Z_C + t_{C_3}) = 0, \quad (1.111)$$

$$f_P (r_{C_{21}} X_C + r_{C_{22}} Y_C + r_{C_{23}} Z_C + t_{C_2}) - D_{y_P} (n_y - n_0) (r_{C_{31}} X_C + r_{C_{32}} Y_C + r_{C_{33}} Z_C + t_{C_3}) = 0. \quad (1.112)$$

Resolviendo las ecuaciones (1.111) y (1.112) se obtiene:

$$\begin{aligned} & (f_P r_{C_{11}} + D_{x_P} m_0 r_{C_{31}}) X_C + (f_P r_{C_{12}} + D_{x_P} m_0 r_{C_{32}}) Y_C + (f_P r_{C_{13}} + D_{x_P} m_0 r_{C_{33}}) Z_C \\ & + (f_P t_{C_1} + D_{x_P} m_0 t_{C_3}) - D_{x_P} m_x r_{C_{31}} X_C - D_{x_P} m_x r_{C_{32}} Y_C - D_{x_P} m_x r_{C_{33}} Z_C - D_{x_P} m_x t_{C_3} = 0, \end{aligned} \quad (1.113)$$

$$\begin{aligned} & (f_P r_{C_{21}} + D_{y_P} n_0 r_{C_{31}}) X_C + (f_P r_{C_{22}} + D_{y_P} n_0 r_{C_{32}}) Y_C + (f_P r_{C_{23}} + D_{y_P} n_0 r_{C_{33}}) Z_C \\ & + (f_P t_{C_2} + D_{y_P} n_0 t_{C_3}) - D_{y_P} n_y r_{C_{31}} X_C - D_{y_P} n_y r_{C_{32}} Y_C - D_{y_P} n_y r_{C_{33}} Z_C - D_{y_P} n_y t_{C_3} = 0. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Dividiendo las ecuaciones (1.113) y (1.114) entre los factores D_{x_P} y D_{y_P} se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 w_{11}X_C + w_{12}Y_C + w_{13}Z_C + w_{14} - w_{31}m_x X_C - w_{32}m_x Y_C - w_{33}m_x X_C - w_{34}m_x &= 0 \\
 \Rightarrow w_{11}X_C + w_{12}Y_C + w_{13}Z_C + w_{14} &= w_{31}m_x X_C + w_{32}m_x Y_C + w_{33}m_x X_C + w_{34}m_x \\
 \Rightarrow w_{11}X_C + w_{12}Y_C + w_{13}Z_C + w_{14} &= m_x (w_{31}X_C + w_{32}Y_C + w_{33}X_C + w_{34}) \\
 \Rightarrow w_{11}X_C + w_{12}Y_C + w_{13}Z_C + w_{14} &= \alpha m_x.
 \end{aligned} \tag{1.115}$$

$$\begin{aligned}
 w_{21}X_C + w_{22}Y_C + w_{23}Z_C + w_{24} - w_{31}n_y X_C - w_{32}n_y Y_C - w_{33}n_y X_C - w_{34}n_y &= 0 \\
 \Rightarrow w_{21}X_C + w_{22}Y_C + w_{23}Z_C + w_{24} &= w_{31}n_y X_C + w_{32}n_y Y_C + w_{33}n_y X_C + w_{34}n_y \\
 \Rightarrow w_{21}X_C + w_{22}Y_C + w_{23}Z_C + w_{24} &= n_y (w_{31}X_C + w_{32}Y_C + w_{33}X_C + w_{34}) \\
 \Rightarrow w_{21}X_C + w_{22}Y_C + w_{23}Z_C + w_{24} &= \alpha m_y.
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

Los factores w_{ij} , que contienen los parámetros intrínsecos del proyector, junto con el parámetro α se definen a continuación:

$$w_{11} = \frac{f_P r_{C_{11}}}{D_{x_p}} + m_0 r_{C_{31}}, \tag{1.117}$$

$$w_{12} = \frac{f_P r_{C_{12}}}{D_{x_p}} + m_0 r_{C_{32}}, \tag{1.118}$$

$$w_{13} = \frac{f_P r_{C_{13}}}{D_{x_p}} + m_0 r_{C_{33}}, \tag{1.119}$$

$$w_{14} = \frac{f_P t_{C_1}}{D_{x_p}} + m_0 t_{C_3}, \tag{1.120}$$

$$w_{21} = \frac{f_P r_{C_{21}}}{D_{y_P}} + n_0 r_{C_{31}}, \quad (1.121)$$

$$w_{22} = \frac{f_P r_{C_{22}}}{D_{y_P}} + n_0 r_{C_{32}}, \quad (1.122)$$

$$w_{23} = \frac{f_P r_{C_{23}}}{D_{y_P}} + n_0 r_{C_{33}}, \quad (1.123)$$

$$w_{24} = \frac{f_P t_{C_2}}{D_{y_P}} + n_0 t_{C_3}, \quad (1.124)$$

$$w_{31} = r_{C_{31}}, \quad (1.125)$$

$$w_{32} = r_{C_{32}}, \quad (1.126)$$

$$w_{33} = r_{C_{33}}, \quad (1.127)$$

$$w_{34} = t_{C_3}, \quad (1.128)$$

$$\alpha = w_{31} X_C + w_{32} Y_C + w_{33} Z_C + w_{34}. \quad (1.129)$$

En coordenadas homogéneas, las ecuaciones (1.115), (1.116) y (1.129) se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} \alpha m_x \\ \alpha n_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.130)$$

Los valores w_{ij} se podrían encontrar a partir de un conjunto de i correspondencias entre puntos con coordenadas $(X_{c_i}, Y_{c_i}, Z_{c_i})$ y sus respectivas coordenadas (m_{x_i}, n_{y_i}) .

2.11. Coordenadas (m_x, n_y)

Del apartado **Calibración de la cámara** se puede concluir, que ubicando el patrón de calibración en el campo de observación de la cámara y conociendo las coordenadas en píxeles de un punto de control que pertenece a dicho patrón, se pueden calcular las coordenadas de éste en unidades métricas respecto al sistema coordenado de la cámara, siempre que esta última esté calibrada, es decir que se conozcan sus parámetros intrínsecos y los parámetros extrínsecos para la posición del patrón de calibración. Por otra parte, la ecuación (1.130) define una relación lineal entre las coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) , de cualquier punto sobre los planos horizontal y vertical, y las coordenadas (m_x, n_y) de cualquier punto en la LCD del proyector por donde pasen dichos planos; las constantes que caracterizan esta relación lineal son los valores w_{ij} .

El modelo de calibración propuesto consiste en calcular los coeficientes w_{ij} empleando las relaciones lineales que se han descrito, ecuaciones (1.117)-(1.129). Con el propósito de calcular dichos coeficientes se ubica el plano de calibración en posiciones aleatorias al interior del campo de observación de la cámara, luego se proyecta sobre el plano de calibración un patrón de puntos de control con coordenadas (m_x, n_y) conocidas. Para cada posición aleatoria del plano, la cámara adquiere una imagen; luego, por medio de un procesamiento digital de imágenes y análisis de Fourier se calculan las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control en píxeles sobre el sistema coordenado del plano imagen. Por último, con los

parámetros intrínsecos de la cámara, previamente calibrada, y los respectivos parámetros extrínsecos es posible calcular las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de cada punto de control. De esta manera, si los valores (m_{x_i}, n_{y_i}) y (X_C, Y_C, Z_C) correspondientes a cada punto de control se reemplazan en las ecuaciones (1.115) y (1.116) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con los coeficientes w_{ij} como incógnitas. Si para cada posición del plano se utilizan n puntos de control y se adquieren M imágenes en total, se obtienen $2nM$ ecuaciones lineales.

El patrón de puntos de control a proyectar se genera a partir de un código pseudoaleatorio de puntos blancos, que matemáticamente se pueden expresar como un patrón ortogonal de franjas horizontales y verticales, ver Figura 23. Para cada punto de control, que pertenece al patrón, se conocen sus coordenadas (m_{x_i}, n_{y_i}) ; la estrategia que se propone en este trabajo con el propósito de calcular las coordenadas $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, consiste en determinar sobre el plano imagen de la cámara, la fase espacial asociada al patrón de puntos de control proyectado.

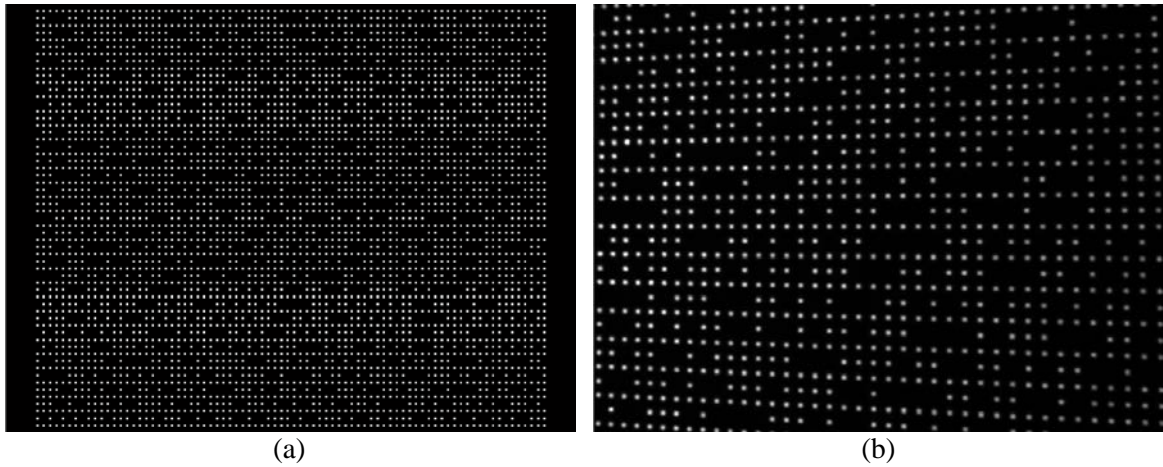


Figura 23. Patrón de puntos pseudoaleatorio. (a) Proyectado por el proyector. (b). Adquirido por la cámara.

En otros trabajos [65-67] se ha usado un patrón de puntos pseudoaleatorio para determinar las coordenadas 3D de un punto en el espacio. Calculando la transformada de Fourier de un

patrón de puntos pseudoaleatorio se obtiene un grupo de lóbulos ortogonales que corresponden a dos patrones periódicos ortogonales con sus respectivas distribuciones de fase. La posición central de cada punto se puede calcular con precisión sub-píxel, interpolando la distribución de fase [52].

La imagen del patrón de puntos tiene una distribución espacial de puntos blancos y puntos ausentes (espacios vacíos), los puntos ausentes hacen que el patrón sea pseudoaleatorio y que su distribución espacial codifique la posición 2D (m_x, n_y) de cada uno de los puntos. Dicha codificación se obtiene usando una secuencia binaria pseudoaleatoria (SBPA) generada por un registro lineal con retroalimentación (RLR). Un RLR de N registros, con un exclusive-or (XOR) como función lineal, produce una secuencia periódica máxima de $2^N - 1$ dígitos de longitud N [52]. La Figura 24 muestra un RLR con $N = 3$, la compuerta XOR provee la retroalimentación del registro que desplaza los bits de izquierda a derecha. La secuencia máxima consta de todas las palabras posibles excepto “000”. La secuencia máxima para este caso está formada por 7 palabras, en binario y decimal, iniciando desde “111”; la SBPA final está formada por 7 bits: “1110100”.

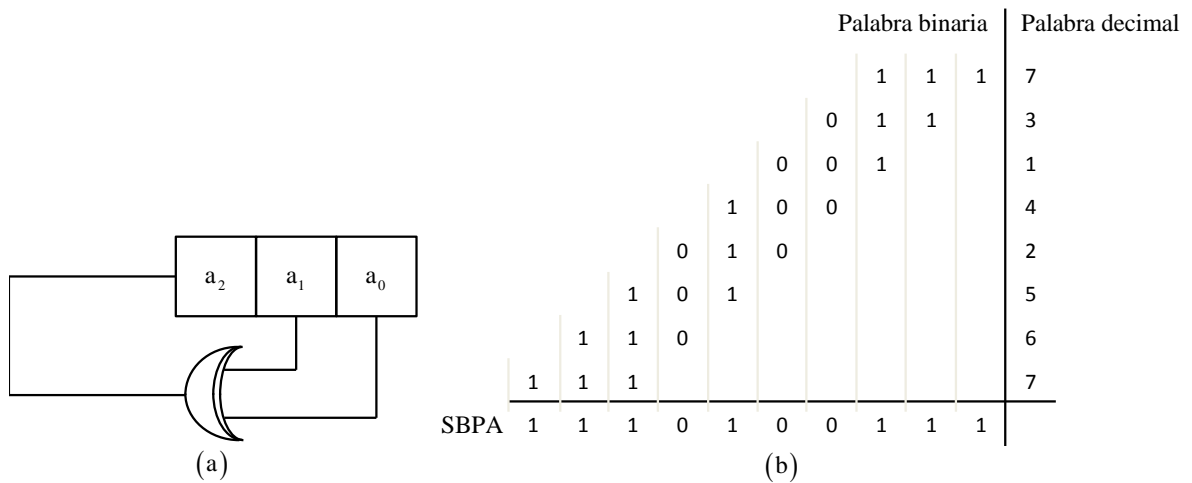


Figura 24. (a) Retroalimentación de desplazamiento lineal. (b) Secuencia binaria pseudoaleatoria.

Debido al registro de desplazamiento lineal, las palabras sucesivas en la SBPA comparten necesariamente $N - 1$ bits consecutivos con sus vecinos inmediatos. Cada palabra posee

una posición única dentro de la secuencia completa, de esta forma, es posible recuperar el valor de la palabra agrupando los N bits consecutivos en la SBPA.

Para esta estrategia, un punto blanco representa un bit de valor “1” y un “0” es representado por un espacio negro o punto ausente. Un punto blanco posee N vecinos horizontales hacia la derecha, al agruparlos se define una palabra. La posición de la palabra en la SBPA determina la coordenada horizontal m_x del punto. La coordenada vertical de un punto se obtiene introduciendo desplazamientos horizontales conocidos a la secuencia de puntos de la línea horizontal anterior. De esta manera, identificando el corrimiento introducido a una línea se determina su coordenada vertical n_y . La influencia de puntos ausentes en la distribución de fase se puede reducir ubicando L líneas horizontales sin puntos ausentes entre dos secuencias de código consecutivas. La Figura 23a muestra un patrón de 80×59 puntos con $L = 30$, $N = 15$ y 29 líneas horizontales con secuencia de código. La secuencia máxima en la SBPA resultante tiene $2^{15} - 1 = 32767$ bits. Con un algoritmo de optimización se recuperó la secuencia de 80 bits con el menor número de puntos ausentes “0”, dando como resultado la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} &11000110111110011111000110010110011111000010010110011111101\dots \quad (1.131) \\ &\dots000111100110001010011. \end{aligned}$$

El patrón de puntos se construyó de la siguiente forma: en la primera fila se insertó una línea L sin código, con todas sus posiciones ocupadas por puntos blancos o “1”. En la segunda fila, se insertaron 80 bits de la SBPA con la menor cantidad de puntos ausentes o “0”. La tercera fila, al igual que la primera, es una línea de puntos blancos sin código. La cuarta fila se obtiene al desplazar horizontalmente a la derecha, 1 bit la secuencia codificada de la segunda fila. La quinta fila es una línea de puntos sin código. La sexta fila se obtiene al desplazar horizontalmente a la derecha, 2 bits la cuarta fila. En la séptima fila se vuelve a ubicar una línea sin código. Para la octava fila, se desplaza horizontalmente a la derecha 3 bits la línea de código que se ha insertado en la sexta fila. De esta manera las filas pares poseen corrimientos sucesivos respecto a la fila par anterior; es decir la línea de códi-

go insertada en la cuarta fila está corrida una posición horizontal hacia a la derecha respecto a la línea de código que conforma la segunda fila, la sexta está corrida dos posiciones respecto a la cuarta, la octava está corrida tres respecto a la sexta, etc.

En la Figura 25 se muestran las 9 primeras filas del patrón de puntos mostrado en la Figura 23a. El rectángulo de color rojo señala el corrimiento horizontal de la línea de código inicial.

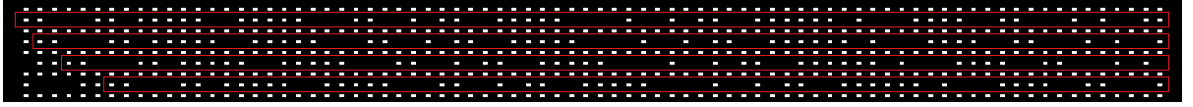


Figura 25. Primeras 9 filas del patrón de puntos mostrado en la Figura 23a.

El patrón de puntos adquirido por la cámara se puede representar matemáticamente como una distribución regular ortogonal, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi n[u_x x + \phi(x, y)]} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i2\pi m[v_y y + \phi(x, y)]} \\
 &= a_0 b_0 + a_0 b_1 e^{i2\pi[v_y y + \phi(x, y)]} + a_1 b_0 e^{i2\pi[u_x x + \phi(x, y)]} \\
 &\quad + a_0 b_1 e^{-i2\pi[v_y y + \phi(x, y)]} + a_{-1} b_0 e^{-i2\pi[u_x x + \phi(x, y)]} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.132}$$

donde $\varphi(x, y)$ representa la fase que se introduce debido a las distorsiones geométricas de la lente de la cámara y al carácter no tele-céntrico en la proyección y en la observación; si tales distorsiones no estuviesen presentes $\varphi(x, y)$ sería igual a cero. Ahora, si se define

$$c(x, y) = e^{i2\pi\varphi(x, y)}, \tag{1.133}$$

entonces (1.132) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & a_0 b_0 + a_0 b_1 c(x, y) e^{i2\pi v_y y} + a_1 b_0 c(x, y) e^{i2\pi u_x x} \\
 & + a_0 b_1 c^*(x, y) e^{-i2\pi v_y y} + a_{-1} b_0 c^*(x, y) e^{-i2\pi u_x x} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.134}$$

donde * denota complejo conjugado. Entonces, la transformada de Fourier $G(u, v) = \mathcal{F}\{g(x, y)\}$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 G(u, v) = & a_0 b_0 \delta(x, y) + a_0 b_1 C(u, v - v_y) + a_1 b_0 C(u - u_x, v) \\
 & + a_0 b_{-1} C^*(u, -v - v_y) + a_{-1} b_0 C^*(-u - u_x, v) + \dots.
 \end{aligned} \tag{1.135}$$

Aislando el segundo y el tercer término de (1.135) por medio de un filtro centrado en $(0, v_y)$ y $(v_x, 0)$ respectivamente, ver Figura 26, se obtiene

$$G_y(u, v) = a_0 b_1 C(u, v - v_y), \tag{1.136}$$

$$G_x(u, v) = a_1 b_0 C(u - u_x, v). \tag{1.137}$$

Tomando las transformadas de Fourier inversas de (1.136) y (1.137) se obtienen las señales complejas

$$g_y(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(u, v)\} = a_0 b_1 e^{i2\pi[v_y y + \phi(x, y)]}, \tag{1.138}$$

$$g_x(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(u, v)\} = a_1 b_0 e^{i2\pi[u_x x + \phi(x, y)]}. \tag{1.139}$$

Las ecuaciones (1.138) y (1.139) se pueden reescribir como

$$g_y(x, y) = a_0 b_1 \cos[2\pi v_y y + 2\pi\phi(x, y)] + i a_0 b_1 \sin[2\pi v_y y + 2\pi\phi(x, y)], \tag{1.140}$$

$$g_x(x, y) = a_1 b_0 \cos[2\pi u_x x + 2\pi\phi(x, y)] + ia_1 b_0 \sin[2\pi u_x x + 2\pi\phi(x, y)]. \quad (1.141)$$

Ahora, definiendo

$$\Phi_y(x, y) = 2\pi[v_y y + \phi(x, y)], \quad (1.142)$$

$$\Phi_x(x, y) = 2\pi[u_x x + \phi(x, y)], \quad (1.143)$$

se puede concluir que

$$\Phi_y(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[g_y(x, y)]}{\text{Re}[g_y(x, y)]} \right\}, \quad (1.144)$$

$$\Phi_x(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[g_x(x, y)]}{\text{Re}[g_x(x, y)]} \right\}. \quad (1.145)$$

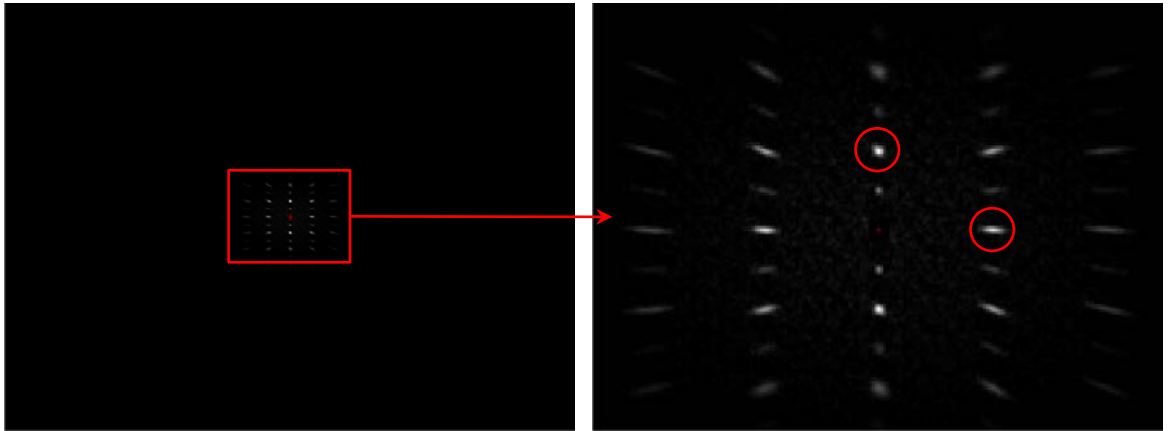


Figura 26. Transformada de Fourier del patrón de puntos mostrado en la Figura 23b.

El uso de la función $\arctan2$ genera discontinuidades de $\pm\pi$ en las fases calculadas, las cuales son eliminadas adicionando de manera apropiada $2\pi n$, siendo n un número entero.

En la Figura 27 se puede observar un corte de la distribución de fase discontinua $\Phi_x(x, y)$, las discontinuidades $\pm\pi$ están ubicados en mínimos de intensidad y los valores nulos de la fase discontinua en máximos de intensidad o en el centro de los puntos blancos.

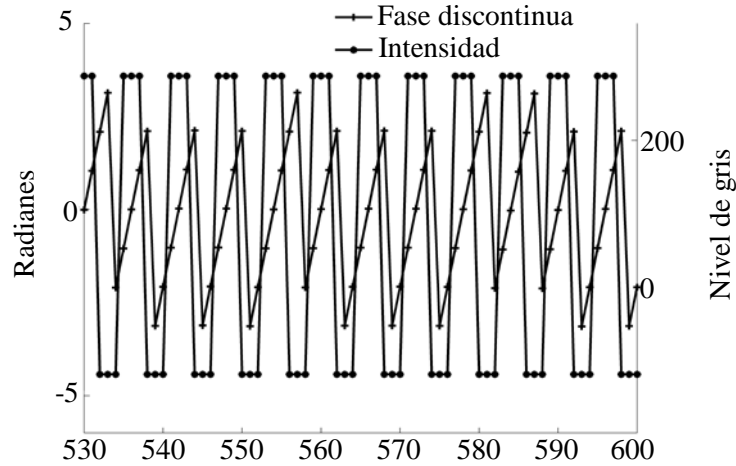


Figura 27. Fase discontinua e intensidad asociadas al patrón de puntos.

Los valores nulos de la fase discontinua corresponden a valores enteros de 2π en la fase continua. Así, los puntos de intersección de las curvas de nivel de las fases continuas determinan las coordenadas m_x y n_y de cada punto de control en el patrón de puntos, definido por los valores enteros N_1 en dirección horizontal y N_2 en dirección vertical.

En la Figura 28 se muestra la imagen aumentada del patrón de puntos de la Figura 23b con sus respectivas curvas de nivel. Los trazos de color naranja describen las curvas de nivel en la dirección horizontal mientras que las de color azul describen las curvas de nivel en la dirección vertical.

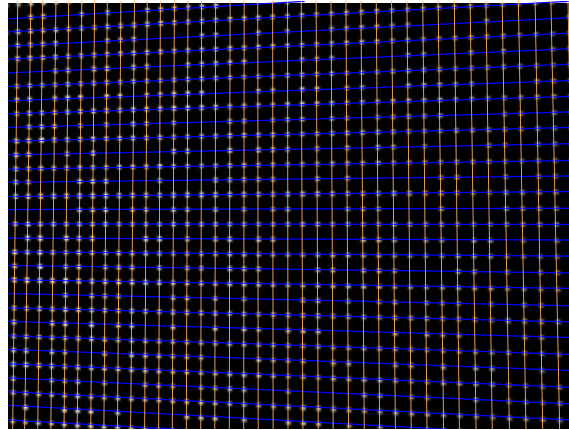


Figura 28. Imagen aumentada del patrón de puntos de la Figura 23b con sus respectivas curvas de nivel.

2.12. Calibración experimental de un sistema de proyección-adquisición

Con base en la teoría descrita anteriormente, se calibró un sistema de proyección adquisición formado por una cámara CCD de la marca Edmund Optics, referencia EO-0813M, monocromática y resolución 1024 píxeles \times 768 píxeles con lente de 16 mm de la marca computar referencia M1614-MP2 2/3" y un proyector DELL referencia M110, con brillo de 300 lúmenes y resolución WXGA (1280 \times 800), ver Figura 29. Para controlar el sistema de proyección-adquisición, así como para procesar las imágenes adquiridas, se utilizó un computador portátil SONY VAIO VPCEG30EL con procesador intel CORE i3 y 4 GB de memoria RAM.



Figura 29. Sistema de reconstrucción 3D implementado.

Como ya se ha mencionado, la estrategia de calibración consiste en determinar los coeficientes w_{ij} de la ecuación (1.130), que implícitamente comprende una transformación proyectiva entre el sistema coordenado del proyector y el sistema coordenado de la CCD. Para determinar tales coeficientes, es necesario conocer con precisión las coordenadas (m, n) en la LCD del proyector y sus respectivas coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de por lo menos cuatro puntos proyectados y adquiridos por la cámara CCD, ver Figura 22.

En el apartado anterior se describió la forma como se crea el patrón de puntos, y la forma como son codificadas sus coordenadas (m, n) . El patrón de puntos se proyecta sobre el plano de calibración, de dicha proyección se captura una imagen y mediante el procesamiento descrito también en el apartado anterior, se recuperan las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de cada uno de los puntos sobre el plano imagen.

El siguiente paso, consiste en hallar las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de los puntos del patrón vistos por la cámara CCD, a partir de la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (1.146)$$

Para esto, se requiere conocer las coordenadas (X_W, Y_W, Z_W) de cada uno de los puntos; para hallar estas coordenadas resulta útil tener en cuenta que los puntos P , p_c y O_c son colineales, Figura 30.

De acuerdo con la ecuación (1.146), para establecer la relación entre los sistemas coordenados del mundo y de la cámara, se deben conocer la matriz de rotación \mathbf{R} y el vector de traslación \mathbf{t} (parámetros extrínsecos), para la posición específica en la que está el plano de referencia cuando se adquiere la imagen del patrón de puntos. Para llevar a cabo este procedimiento, la proyección de los puntos se realiza sobre el mismo patrón de calibración utilizado para calibrar la cámara (tablero ajedrezado, Figura 8); y se capturan dos imágenes

para una misma posición del plano. Con la imagen del tablero ajedrezado se calibra la cámara (cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos) y con la imagen de puntos se calibra el sistema de proyección-adquisición.

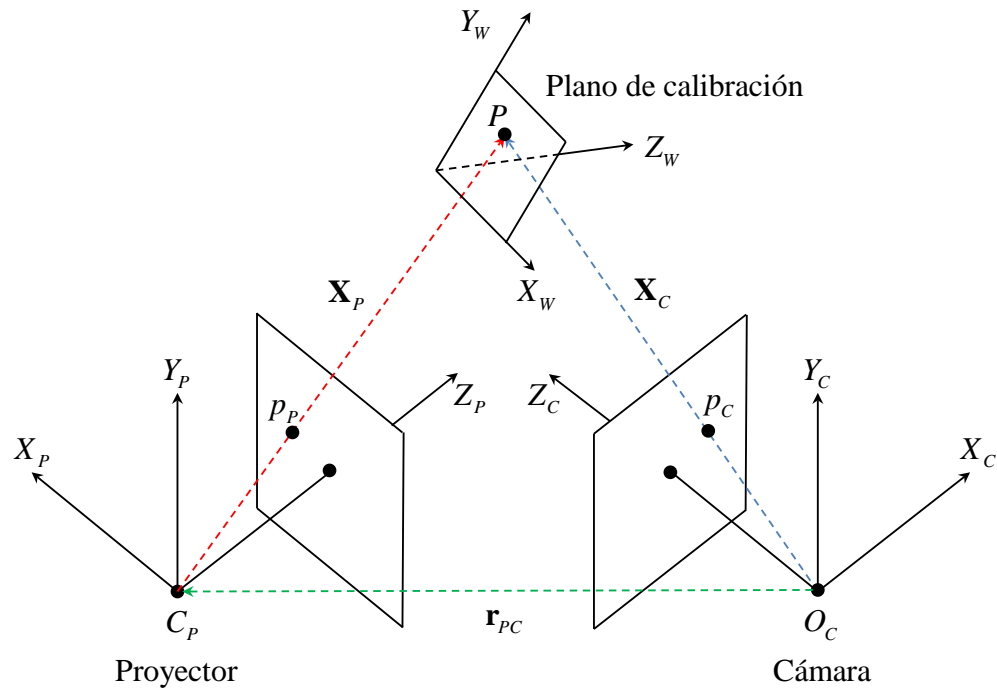


Figura 30. Plano de referencia intersecado por la línea recta que pasa por los puntos O_C y p_C .

Usualmente, los cuadros del patrón de calibración son de color blanco y negro, con el propósito de obtener imágenes bien contrastadas y facilitar la búsqueda de las esquinas. En nuestro caso, la imagen del patrón de puntos blancos se genera con un fondo negro, lo que ocasiona problemas en la imagen al capturarla con una cámara monocromática, si la proyección se realiza sobre un plano con los mismos colores. Como se muestra en la Figura 31, los cuadros negros absorben gran parte de la luz que genera los puntos, mientras que en los cuadros blancos los puntos brillan en exceso.

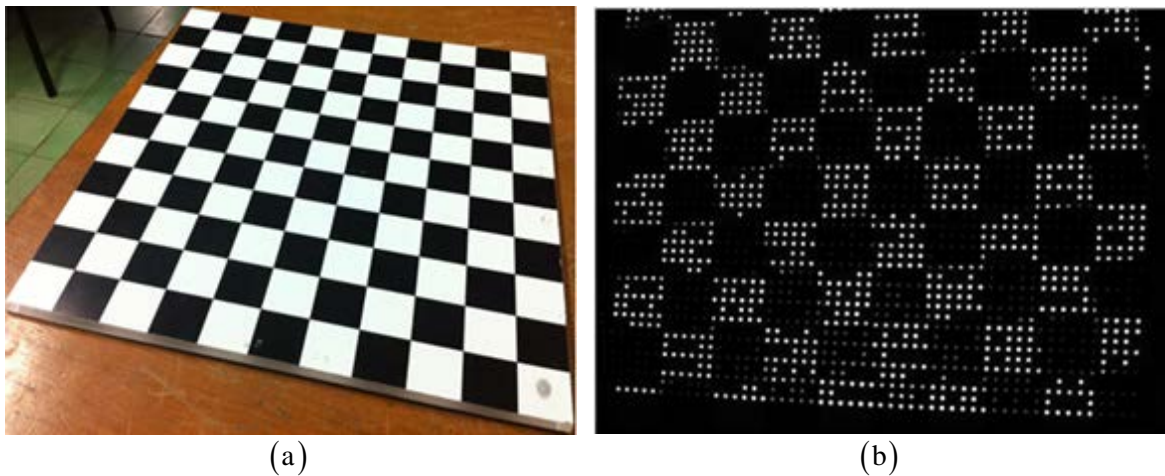


Figura 31. (a) Patrón de calibración. (b) Proyección del patrón de puntos sobre el plano de calibración.

Este problema ocasiona que sea muy difícil procesar las imágenes adquiridas porque se pierde la secuencia binaria insertada en las filas. Por tal motivo se hace necesario el uso de un tablero ajedrezado con cuadros cuyos colores sean diferentes al blanco y al negro. Para elegir los colores apropiados, se capturó una imagen de una plantilla con varias tonalidades de los colores primarios, y se seleccionaron aquellos con altos y bajos niveles de gris asociados, sin llegar a extremos, porque presentan el mismo problema que el blanco y el negro, Figura 32.

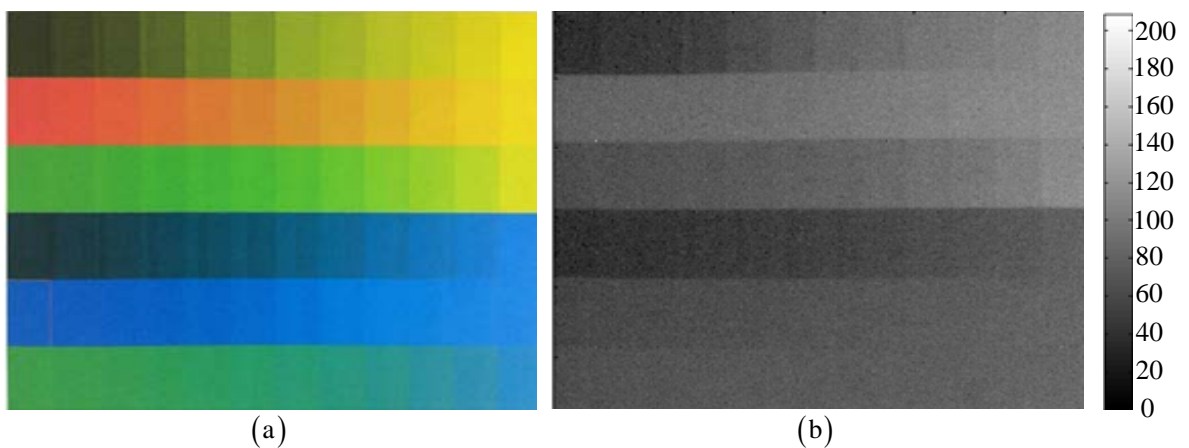


Figura 32. (a) Plantilla de colores. (b) Imagen monocromática de la plantilla de colores.

Los colores seleccionados fueron: un tono de los verdes (R: 165, G: 255, B: 0) para el nivel bajo de gris, y uno de los rojos (R: 255, G: 150, B: 0) para el nivel alto de gris, Figura 33.



Figura 33. Colores seleccionados para el patrón de calibración. (a) R: 165, G: 255, B: 0. (b) R: 255, G: 150, B: 0.

2.13. Descripción del procedimiento experimental

El mismo plano usado para la calibración experimental de la CCD, se adaptó como patrón de calibración a color, Figura 8.

Para adquirir las imágenes de calibración, se proyecta primero (sobre el plano de calibración) el patrón de puntos y enseguida un patrón de color que mejora el contraste entre los cuadros, puesto que los cuadros rojos son vistos por la cámara CCD con un nivel de gris alto (simulando blanco) y los cuadros verdes con un nivel gris bajo (simulando negro). En la Figura 34 se muestran los dos patrones que se proyectan.

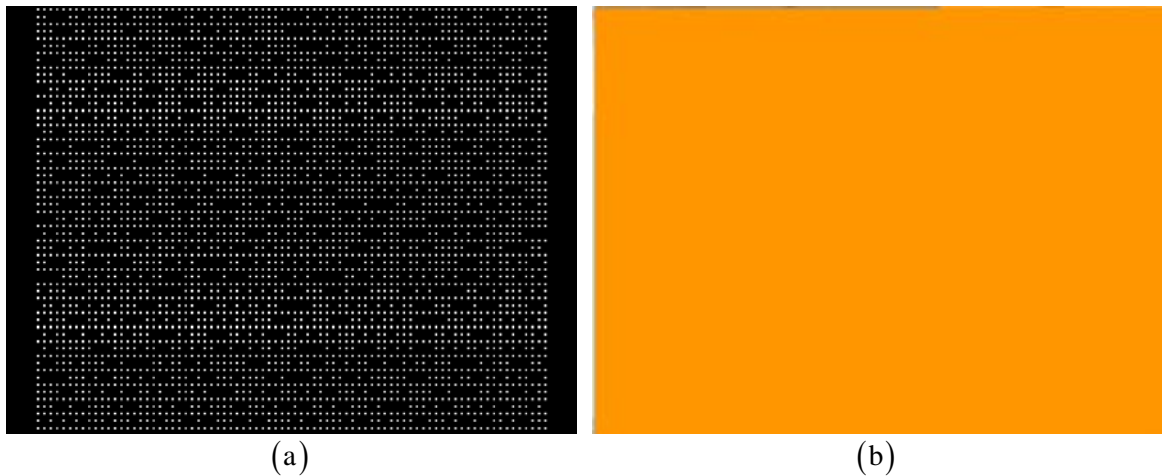


Figura 34. Patrones proyectados. (a) Patrón de puntos. (b) Patrón de color R: 255, G: 150, B: 0.

Las imágenes que se utilizaron para el procedimiento experimental son las mismas del apartado **Calibración experimental de una cámara digital**. En la Figura 35 se muestran las dos imágenes adquiridas para la primera posición del plano de calibración.

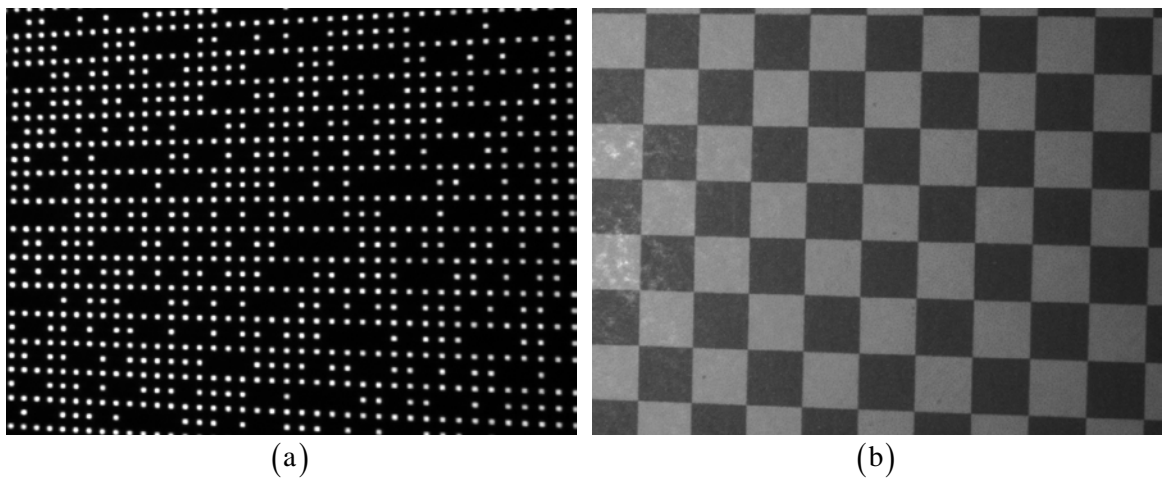


Figura 35. Imágenes de calibración. (a) Patrón de puntos. (b) Tablero ajedrezado.

Ya con las imágenes adquiridas, y calculados los parámetros intrínsecos y extrínsecos, se procesan las imágenes del patrón de puntos, iniciando con el cálculo de la transformada de Fourier. En la Figura 26 se muestra la transformada de Fourier del primer patrón de puntos adquirido. La cruz roja de la Figura 26 representa el centro de la imagen y los lóbulos blan-

cos representan los armónicos que resultan al aplicar la transformada de Fourier, los cuales se propagan de manera ortogonal en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Con el filtro apropiado se aíslan los primeros lóbulos de cada dirección, ver Figura 26, los cuales corresponden a los primeros armónicos y contienen información de la fase de su respectiva dirección.

De acuerdo con las ecuaciones (1.144) y (1.145), las fases que se recuperan son discontinuas debido a que la función arctan genera puntos con discontinuidades entre $-\pi$ y π . En la Figura 36 se muestran las imágenes superpuestas de la fase discontinua y el patrón de puntos, si el lóbulo se filtra de manera apropiada y las fase correspondiente a un armónico específico es correcta, los puntos blancos deben estar en medio de las transiciones de la fase discontinua, como se describe en la Figura 27 y se muestra en la Figura 36.

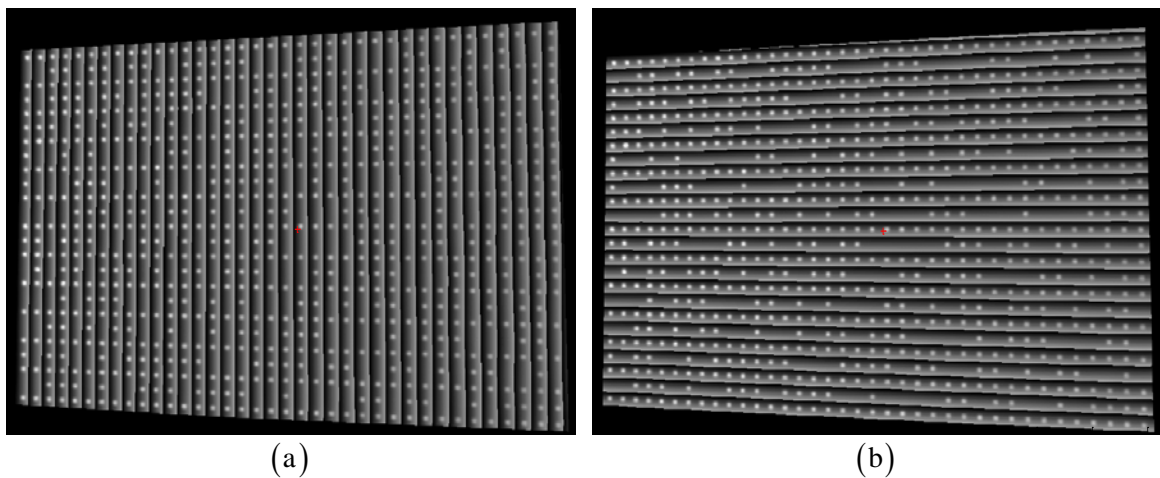


Figura 36. Patrón de puntos y fase discontinua. (a) Distribución de fase en la dirección horizontal. (b) Distribución de fase en la dirección vertical.

Las fases continuas se pueden obtener a partir del algoritmo ‘*unwrapping*’ [46], dichas fases se muestran en la Figura 37.

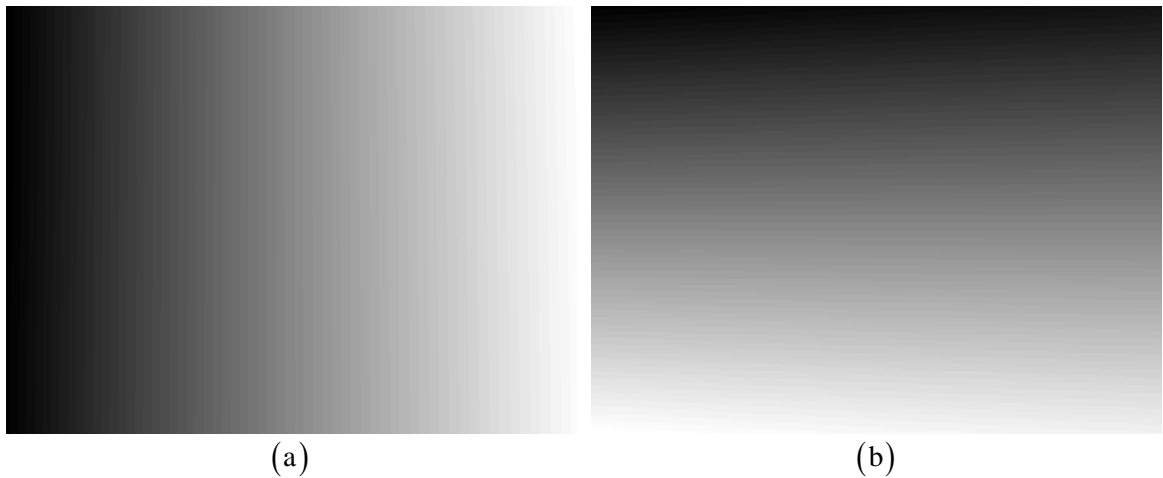


Figura 37. Distribución de fase continua. (a) Dirección horizontal. (b) Dirección vertical.

Como ya se ha mencionado, los puntos de intersección entre las fases continuas determinan las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de cada punto de control sobre el sistema coordinado de la imagen; los niveles de gris en la imagen y la SBPA permiten verificar si efectivamente, a dichas coordenadas, corresponde un punto de control “1” o un punto ausente “0”. En la Figura 38, se muestran señaladas con cruces de color rojo las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) que se hallaron correctamente para la primera imagen adquirida, las cruces azules indican las coordenadas que no coinciden con la posición del centro del punto de control.

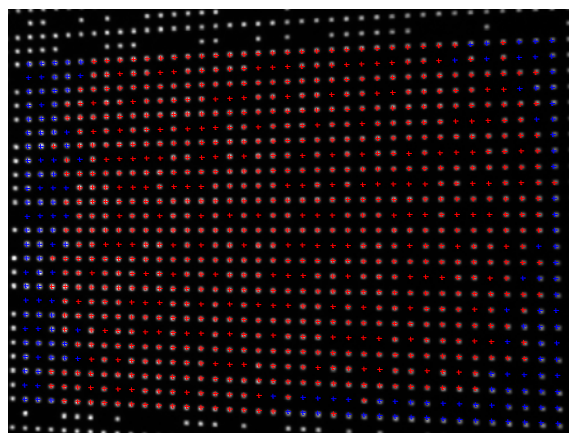


Figura 38. Coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control correspondientes a la primera imagen adquirida.

Con esta información es posible saber qué región del patrón de puntos fue adquirida por la cámara, y de cuáles puntos con coordenadas (m,n) conocidas, se conocen sus respectivas coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) , Figura 39.

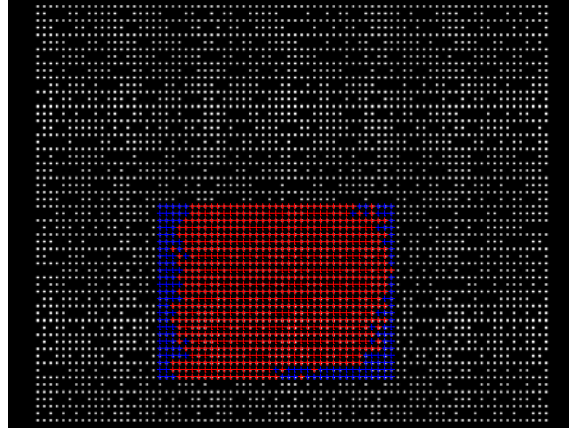


Figura 39. Patrón de puntos en la LCD. Las cruces de color rojo muestran los puntos para los cuales se conocen tanto sus coordenadas (m,n) como sus coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) .

En este caso (procesamiento de la primera imagen), el algoritmo que ejecuta este procedimiento recupera las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de 725 puntos, incluyendo puntos con valor de “1” y puntos con valor de “0”, ver Figura 40.

A modo de ejemplo, las coordenadas corregidas (en píxeles) del primer punto que se encuentra en dirección positiva del eje x , y que se muestra encerrado con un círculo azul en la Figura 40, son $(79.33, 448.8)$.

Haciendo uso de la ecuación (1.18) se pueden calcular las coordenadas de cada punto de control, respecto al sistema coordenado de la cámara y en unidades métricas, a partir de sus coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) . Por ejemplo, para el punto mencionado anteriormente se tiene que,

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (1.147)$$

donde \mathbf{K} está dada por la ecuación (1.83). Teniendo en cuenta esto, las coordenadas (x_C, y_C, z_C) del punto estarán dadas por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & -0.1542 \\ 0 & 0.0002 & -0.1125 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 79.33 \\ 448.8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.1316 \\ 0.0173 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.148}$$

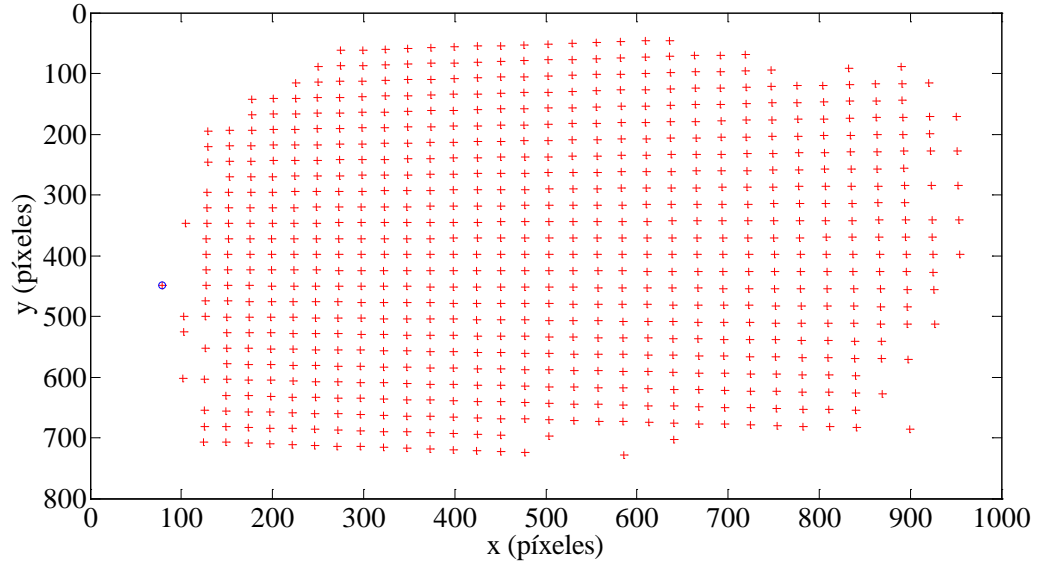


Figura 40. Coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control vistos por la cámara CCD.

Si se traza una línea recta desde el centro de la cámara hasta el punto con las coordenadas que se hallaron en la ecuación (1.148), y se proyecta hacia el espacio 3D, dicha línea debe intersectar al punto p_C en el plano imagen de la cámara y al punto P en el plano de calibración, ver Figura 41. Esto se hace con el propósito de determinar las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) del punto P respecto al sistema coordenado de la cámara. El procedimiento se describe a continuación, para ilustrarlo, las coordenadas dadas por (1.148) representan al

vector \mathbf{x}_c , el cual mediante la ecuación (1.22) se puede transformar en el vector \mathbf{X}_w con coordenadas (X_w, Y_w, Z_w) respecto al sistema coordenado del mundo, el cual a su vez está ubicado sobre el plano de calibración. Operando sobre la ecuación (1.22) se tiene que

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}_c - \mathbf{t}), \quad (1.149)$$

donde \mathbf{R} y \mathbf{t} están dados por la ecuación (1.84) y $\mathbf{t} = -\mathbf{RC}$. Teniendo en cuenta la ecuación (1.149) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_w &= \begin{bmatrix} -0.0222 & 0.9997 & 0.0095 \\ 0.9902 & 0.0233 & -0.1376 \\ -0.1378 & 0.0063 & -0.9904 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -0.1316 \\ 0.0173 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -34.4562 \\ -27.8875 \\ 345.2269 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 23.8806 \\ 82.0145 \\ 336.3813 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.150)$$

En la Figura 41 se muestra la representación gráfica de los vectores \mathbf{X}_c y \mathbf{X}_w que contienen las coordenadas del punto de control en el sistema coordenado de la cámara y el sistema coordenado del mundo respectivamente. El vector \mathbf{C} es el vector que relaciona la posición del origen del sistema coordenado del mundo respecto al sistema coordenado de la cámara. Ahora bien, teniendo en cuenta que $\mathbf{t} = -\mathbf{RC}$, el vector \mathbf{C} se puede determinar como

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}. \quad (1.151)$$

Operando sobre (1.151) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= - \begin{bmatrix} -0.0222 & 0.9997 & 0.0095 \\ 0.9902 & 0.0233 & -0.1376 \\ -0.1378 & 0.0063 & -0.9904 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -34.4562 \\ -27.8875 \\ 345.2269 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23.8509 \\ 82.2820 \\ 337.3535 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Ahora bien, el vector \mathbf{r}_c se puede determinar a partir de

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{X}_w - \mathbf{C}, \quad (1.153)$$

Operando sobre (1.153) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \begin{pmatrix} 23.8806 \\ 82.0145 \\ 336.3813 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23.8509 \\ 82.2820 \\ 337.3535 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0297 \\ -0.2675 \\ -0.9722 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

La proyección del vector \mathbf{r}_c interseca al patrón de calibración justo en el punto de control con coordenadas $(X_w, Y_w, 0)$, como se representa en la Figura 41 por medio de la línea punteada de color azul. Por lo tanto, las coordenadas del punto de control en el sistema coordenado del mundo se pueden calcular a partir del vector \mathbf{X}_c que es colineal a \mathbf{r}_c . Para que se cumpla la condición de colinealidad, el producto cruz, entre el vector \mathbf{X}_c y el vector unitario que apunta en la misma dirección, debe ser nulo, es decir

$$\mathbf{X}_c \times \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_c} = \mathbf{0}. \quad (1.155)$$

Donde el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_{r_c}$ está definido por

$$\hat{\mathbf{u}}_{r_c} = \frac{\mathbf{r}_c}{\|\mathbf{r}_c\|}. \quad (1.156)$$

Operando sobre (1.156) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{r_c} &= \frac{[0.0297 \quad -0.2675 \quad -0.9722]}{\sqrt{(0.0297)^2 + (-0.2675)^2 + (-0.9722)^2}} \\ &= [0.0294 \quad -0.2652 \quad -0.9638]. \end{aligned} \quad (1.157)$$

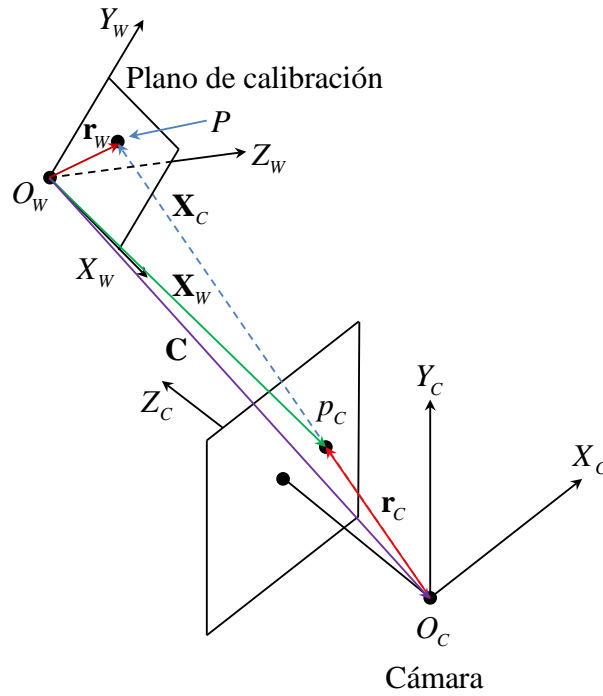


Figura 41. Representación gráfica de los vectores \mathbf{r}_w , \mathbf{C} , \mathbf{r}_c , \mathbf{X}_c y \mathbf{X}_w .

Por otra parte, de acuerdo a la Figura 41, el vector \mathbf{X}_c se puede representar como

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{r}_w - \mathbf{C}. \quad (1.158)$$

Reemplazando (1.158) en (1.155) se tiene

$$(\mathbf{r}_W - \mathbf{C}) \times \hat{\mathbf{u}}_{r_c} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_{W_x} - C_x & r_{W_y} - C_y & r_{W_z} - C_z \\ (u_{r_c})_x & (u_{r_c})_y & (u_{r_c})_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (r_{W_y} - C_y)(u_{r_c})_z - (r_{W_z} - C_z)(u_{r_c})_y = 0, \quad (1.159)$$

$$\Rightarrow (r_{W_x} - C_x)(u_{r_c})_z - (r_{W_z} - C_z)(u_{r_c})_x = 0. \quad (1.160)$$

A partir de las ecuaciones (1.159) y (1.160) se tiene

$$r_{W_x} = \frac{(u_{r_c})_x (r_{W_z} - C_z)}{(u_{r_c})_z} + C_x \quad (1.161)$$

$$= 34.1425,$$

$$r_{W_y} = \frac{(u_{r_c})_y (r_{W_z} - C_z)}{(u_{r_c})_z} + C_y \quad (1.162)$$

$$= -10.5389.$$

Conociendo las coordenadas del punto de control respecto al sistema coordenado del mundo, es posible usar la ecuación (1.146) y hallar las coordenadas, en unidades métricas, del punto respecto al sistema coordenado de la cámara. Dichas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.0222 & 0.9902 & -0.1378 \\ 0.9997 & 0.0233 & 0.0063 \\ 0.0095 & -0.1376 & -0.9904 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 34.1425 \\ -10.5389 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34.4562 \\ -27.8875 \\ 345.2269 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -45.6491 \\ 5.9999 \\ 347.0002 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.163)$$

La Figura 42 muestra la representación gráfica, respecto al sistema coordenado de la cámara, del punto de la Figura 40 que está marcado con un círculo azul.

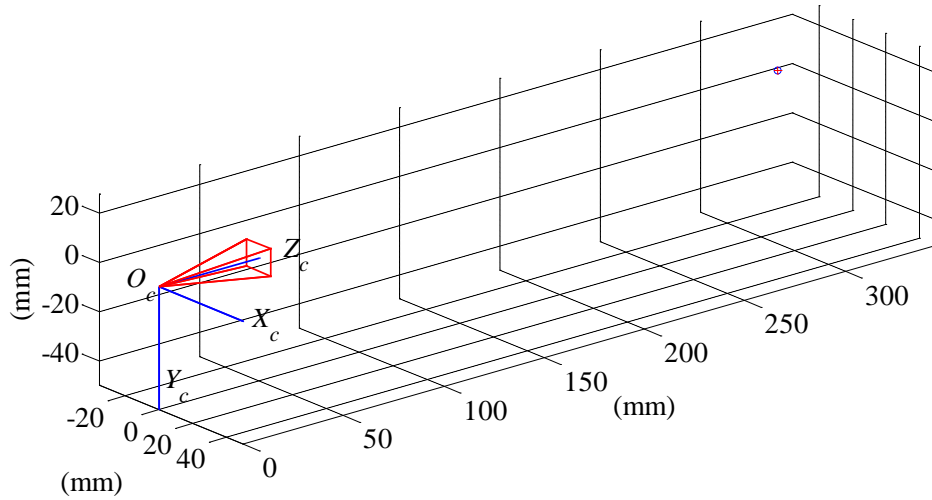


Figura 42. Coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) del punto de control de la Figura 40.

Con el procedimiento descrito se calculan las coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) de los demás puntos de control, la representación gráfica de todos estos se muestra en la Figura 43.

Después de procesar la primera imagen, se procesan las seis restantes de forma idéntica. De este modo se recupera la información necesaria, coordenadas (m, n) y coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) necesarias para calcular los coeficientes w_{ij} . La Tabla 2 contiene la cantidad de puntos de control que se pudieron recuperar de las 7 imágenes de calibración, con el procesamiento que se ha descrito.

Imagen	Puntos
1	725
2	670
3	721
4	732
5	727
6	675
7	765
Total de puntos: 5015	

Tabla 2. Puntos de control recuperados de las 7 imágenes adquiridas.

La ecuación (1.130) se puede resolver por el método de transformación lineal directa [59], ya que se tienen dos ecuaciones para cada correspondencia. Al ensamblar todas las ecuaciones obtenidas para cada correspondencia se tiene una matriz \mathbf{A} de $2n \times 12$ elementos, que para el caso particular de esta calibración son $2(5015) \times 12$ elementos. La matriz \mathbf{A} , que permite determinar los coeficientes w_{ij} que pertenecen a la matriz \mathbf{W} , se construye como se describe a continuación.

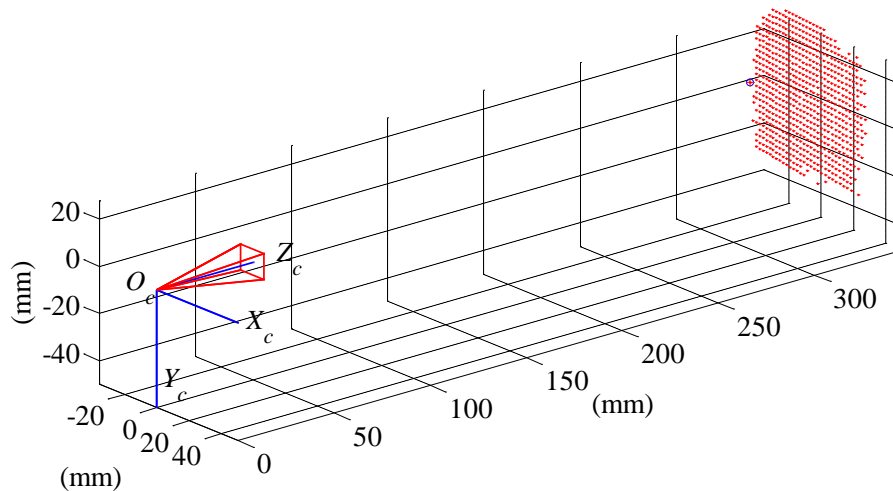


Figura 43. Coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) de todos los puntos de control.

Se asume que se conocen n correspondencias $\mathbf{X}_{C_i} \leftrightarrow \mathbf{x}_{P_i}$. Donde $\mathbf{X}_{C_i} = (X_{C_i}, Y_{C_i}, Z_{C_i}, 1)^T$ es el vector que representa al punto i -ésimo en el sistema coordenado de la cámara y en coordenadas homogéneas, y $\mathbf{x}_{P_i} = (m_i, n_i, 1)^T$ es el vector que representa al mismo punto en el sistema coordenado del proyector y en coordenadas homogéneas también. Si \mathbf{W} es la matriz que describe el mapeo entre \mathbf{X}_{C_i} y \mathbf{x}_{P_i} , se tiene que

$$\mathbf{x}_{P_i} = \mathbf{W}\mathbf{X}_{C_i}. \quad (1.164)$$

La anterior ecuación involucra vectores homogéneos; por lo tanto, de manera generalizada, los vectores \mathbf{x}_{P_i} y $\mathbf{W}\mathbf{X}_{C_i}$ podrían no ser iguales, estos podrían tener la misma dirección pero podrían tener magnitudes diferentes debido a un factor de escala diferente de cero; sin embargo estarán ubicados en el mismo plano, por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{P_i} \times \mathbf{W}\mathbf{X}_{C_i} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (m_i, n_i, 1)^T \times \left\{ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \\ Z_{C_i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} m_i \\ n_i \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_{11}X_{C_i} + w_{12}Y_{C_i} + w_{13}Z_{C_i} + w_{14} \\ w_{21}X_{C_i} + w_{22}Y_{C_i} + w_{23}Z_{C_i} + w_{24} \\ w_{31}X_{C_i} + w_{32}Y_{C_i} + w_{33}Z_{C_i} + w_{34} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} m_i \\ n_i \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{1T} \mathbf{X}_{C_i} \\ \mathbf{W}^{2T} \mathbf{X}_{C_i} \\ \mathbf{W}^{3T} \mathbf{X}_{C_i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m_i & n_i & 1 \\ \mathbf{W}^{1T} \mathbf{X}_{C_i} & \mathbf{W}^{2T} \mathbf{X}_{C_i} & \mathbf{W}^{3T} \mathbf{X}_{C_i} \end{vmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} n_i \mathbf{W}^{3T} \mathbf{X}_{C_i} - \mathbf{W}^{2T} \mathbf{X}_{C_i} \\ \mathbf{W}^{1T} \mathbf{X}_{C_i} - m_i \mathbf{W}^{3T} \mathbf{X}_{C_i} \\ m_i \mathbf{W}^{2T} \mathbf{X}_{C_i} - n_i \mathbf{W}^{1T} \mathbf{X}_{C_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.165)$$

Donde \mathbf{W}^{iT} representa la i -ésima fila de la matriz \mathbf{W} .

A partir de la ecuación (1.165) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$n_i w_{31} X_{C_i} + n_i w_{32} Y_{C_i} + n_i w_{33} Z_{C_i} + n_i w_{34} - w_{21} X_{C_i} - w_{22} Y_{C_i} - w_{23} Z_{C_i} - w_{24} = 0, \quad (1.166)$$

$$w_{11} X_{C_i} + w_{12} Y_{C_i} + w_{13} Z_{C_i} + w_{14} - m_i w_{31} X_{C_i} - m_i w_{32} Y_{C_i} - m_i w_{33} Z_{C_i} - m_i w_{34} = 0, \quad (1.167)$$

$$m_i w_{21} X_{C_i} + m_i w_{22} Y_{C_i} + m_i w_{23} Z_{C_i} + m_i w_{24} - n_i w_{11} X_{C_i} - n_i w_{12} Y_{C_i} - n_i w_{13} Z_{C_i} - n_i w_{14} = 0. \quad (1.168)$$

Las ecuaciones (1.166), (1.167) y (1.168) se pueden expresar como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{X}_{C_i}^T & n_i \mathbf{X}_{C_i}^T \\ \mathbf{X}_{C_i}^T & \mathbf{0}^T & -m_i \mathbf{X}_{C_i}^T \\ -n_i \mathbf{X}_{C_i}^T & m_i \mathbf{X}_{C_i}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^1 \\ \mathbf{W}^2 \\ \mathbf{W}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.169)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\mathbf{W}^{iT} \mathbf{X}_{C_i} = \mathbf{X}_{C_i}^T \mathbf{W}^i. \quad (1.170)$$

La tercera fila de la matriz en la ecuación (1.169) se puede expresar como una combinación lineal de las dos primeras filas de la siguiente manera

$$-m_i \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{X}_{C_i}^T & n_i \mathbf{X}_{C_i}^T \end{pmatrix} - n_i \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{C_i}^T & \mathbf{0}^T & -m_i \mathbf{X}_{C_i}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_i \mathbf{X}_{C_i}^T & m_i \mathbf{X}_{C_i}^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix}, \quad (1.171)$$

por lo tanto de la ecuación (1.169) se puede pasar a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{X}_{C_i}^T & n_i \mathbf{X}_{C_i}^T \\ \mathbf{X}_{C_i}^T & \mathbf{0}^T & -m_i \mathbf{X}_{C_i}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^1 \\ \mathbf{W}^2 \\ \mathbf{W}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.172)$$

A partir del conjunto de n correspondencias se obtiene la matriz \mathbf{A} de $2n \times 12$ elementos. La matriz \mathbf{W} se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (1.173)$$

donde \mathbf{w} es el vector que contiene los elementos de la matriz \mathbf{W} y está dado por

$$\mathbf{w} = (w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34})^T. \quad (1.174)$$

Los valores de vector \mathbf{w} se pueden determinar realizando la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{A} , tal descomposición está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \quad (1.175)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices ortogonales y \mathbf{D} es una matriz diagonal con entradas positivas. La última columna de la matriz \mathbf{V} contendrá los elementos del vector \mathbf{w} . En nuestro caso la matriz \mathbf{W} , calculada siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, es

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0002 & -0.0016 & 0.9750 \\ 0.0006 & 0.0043 & 0.0007 & 0.2220 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 \end{bmatrix}. \quad (1.176)$$

Una vez calculados los elementos de la matriz \mathbf{W} queda calibrado el sistema de proyección-adquisición y se puede proceder con el proceso de reconstrucción 3D, tema que se abordará en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Corrección del error de fase para un sistema no tele-céntrico

En el presente trabajo se implementa la técnica de proyección de franjas para obtener la reconstrucción 3D de diversos objetos de estudio. Para la estrategia, que se presenta en este capítulo, se considera que una franja proyectada forma un plano de luz que se propaga en el espacio 3D pasando por la LCD del proyector e incidiendo sobre la superficie del objeto a digitalizar. Con una cámara digital se adquieren las imágenes de las franjas proyectadas sobre el objeto, las cuales a su vez son deformadas debido a las variaciones topográficas de la superficie del mismo. Mediante el algoritmo de corrimiento de fase se recupera la fase de cada uno de los puntos de la imagen, dicha fase se puede asociar a una coordenada m en la LCD del proyector. De esta manera se conoce la ecuación del plano vertical que pasa por la coordenada m ; utilizando los parámetros intrínsecos de la cámara se puede deducir la ecuación de la línea recta que se origina en el centro de la cámara, pasa por el punto p_C ubicado en el plano imagen, e interseca al plano de luz justo en el punto P ubicado en el espacio 3D. Con este procedimiento, para todos los puntos del sistema de franjas registrado en la cámara, se pueden calcular las coordenadas 3D de la superficie del objeto vista por la cámara.

Por otra parte, para los sistemas de reconstrucción 3D que se basan en la técnica de proyección de franjas y en el algoritmo de corrimiento de fase, la distorsión gamma del proyector y los armónicos de alta frecuencia del perfil de las franjas son las principales fuentes del error de fase [70]. La distorsión gamma del proyector produce que el perfil de las franjas

proyectadas no sea sinusoidal, lo que genera errores en la medición o en la digitalización. Para eliminar el error generado por la distorsión gamma del proyector se han propuesto varios métodos. Huang et al. [68] corrigen directamente el error gamma del proyector y muestran que el error de fase se reduce significativamente, sin embargo, los errores residuales no son eliminados. Guo et al. [69] propusieron un método que modeliza la distorsión gamma del proyector por medio de una función que depende sólo de un parámetro, esta función se obtiene a partir de un análisis estadístico de las imágenes de las franjas. Este método reduce notablemente el error de fase debido a la distorsión gamma; pero, modelizar tal distorsión por medio de una función que depende sólo de un parámetro en muchos casos no es una buena opción, debido a que la distorsión gamma podría tener un comportamiento más complejo. Por lo tanto, este método no puede remover completamente el error producido por la distorsión gamma del proyector. Zhang et al. [69] propusieron un método que se basa en la calibración de la distorsión gamma del proyector, en este primero se calcula el error de fase el cual es almacenado en una estructura de datos con el propósito de ser compensado al calcular la fase de cualquier objeto de estudio. Este método se usa para reducir notoriamente el error de fase de un sistema de reconstrucción 3D basado en el algoritmo de corrimiento de fase a tres imágenes. Zhang y Yau propusieron un método que no requiere de la calibración de la distorsión gamma del proyector. En vez de esto, se usa un plano de calibración para obtener la estructura de datos que modeliza el error introducido por la distorsión gamma del proyector [70]. Para tal propósito se usa una superficie plana, sobre esta se proyecta un patrón de franjas que permite calcular la fase discontinua asociada a dicha superficie, la cual en teoría debe ser lineal en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Teniendo en cuenta esta información se calcula el error introducido por la distorsión gamma del proyector, restando a la fase real, que se obtienen a partir del algoritmo de corrimiento de fase, la fase ideal que como se dijo anteriormente debe ser lineal. Por último, el error de fase se almacena en una estructura de datos. Los resultados que se obtienen utilizando este método son muy buenos, sin embargo se asume que el sistema de observación es tele-céntrico y que no posee aberraciones geométricas. En el presente capítulo se muestra una técnica para corregir el error de fase introducido por la distorsión gamma del proyector, basado en el método propuesto por Zhang et al. [70], pero con un sistema de observación no tele-céntrico y que posee aberra-

ciones geométricas, por lo tanto la fase ideal se obtiene a partir de un ajuste polinómico. Los resultados experimentales muestran que el método propuesto corrige notablemente el error introducido por la distorsión gamma del proyector, y que se puede aplicar a cualquier dispositivo de reconstrucción 3D que se basa en la técnica de proyección de franjas y en el algoritmo de corrimiento de fase, independientemente de que su sistema de observación no sea tele-céntrico y que posea aberraciones geométricas.

3.1. Relación entre la fase y la coordenada m

Si en la pantalla LCD se proyecta un patrón de franjas verticales con intensidad definida por

$$I = A + B \cos \phi, \quad (1.177)$$

donde ϕ es la fase de las franjas a proyectar y está dada por

$$\phi = \frac{2\pi m}{T}, \quad (1.178)$$

donde T es el periodo de las franjas. La ecuación (1.177) muestra que las franjas contienen información de la componente horizontal m del sistema coordenado de la LCD.

Si se proyecta una franja vertical x_p^l , Figura 44, se puede deducir a partir de la ecuación (1.178) que su coordenada m en píxeles, está dada por

$$m = \frac{\phi}{k}, \quad (1.179)$$

donde k está definido por

$$k = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.180)$$

A partir del valor de m y la ecuación (1.115) se obtiene una ecuación lineal en función de (X_C, Y_C, Z_C) que corresponde a la ecuación del plano de luz que pasa por m .

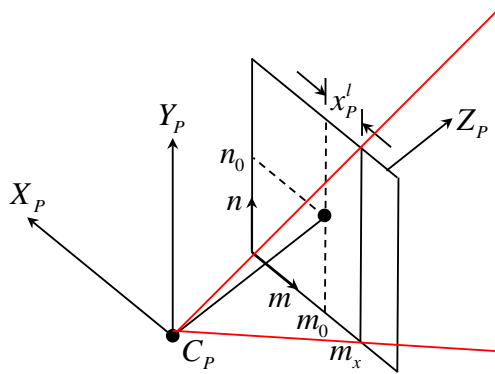


Figura 44. Proyección de la franja vektorial x_p^l sobre la LCD del proyector.

3.2. Reconstrucción 3D

Con el sistema de reconstrucción 3D calibrado es posible digitalizar la región del objeto de estudio que es iluminada por las franjas y es vista por la cámara digital.

Para el procedimiento experimental se utilizó el sistema calibrado y descrito en la sección **Calibración de una unidad de proyección-adquisición**, y como objeto a reconstruir la sección de una tubería usada para el transporte de hidrocarburos, ver Figura 45. La sección de la tubería se ubicó frente al sistema de reconstrucción y sobre la misma se proyectaron consecutivamente cuatro imágenes de un sistema de franjas con $T = 8$ y diferencia de fase de $\pi/2$. Por cada patrón de franjas que es proyectado se adquiere una imagen utilizando la cámara CCD, como se muestra en la Figura 46.

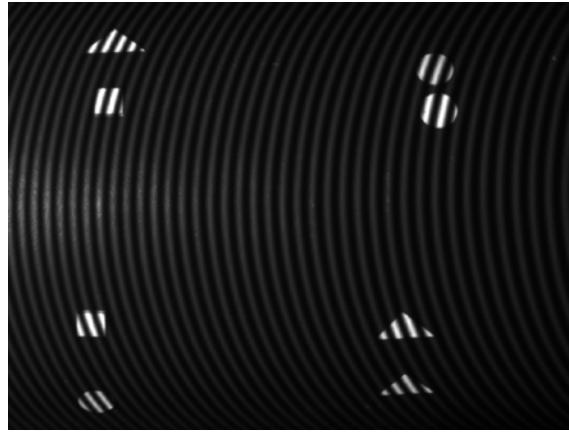


Figura 45. Sección de la tubería.

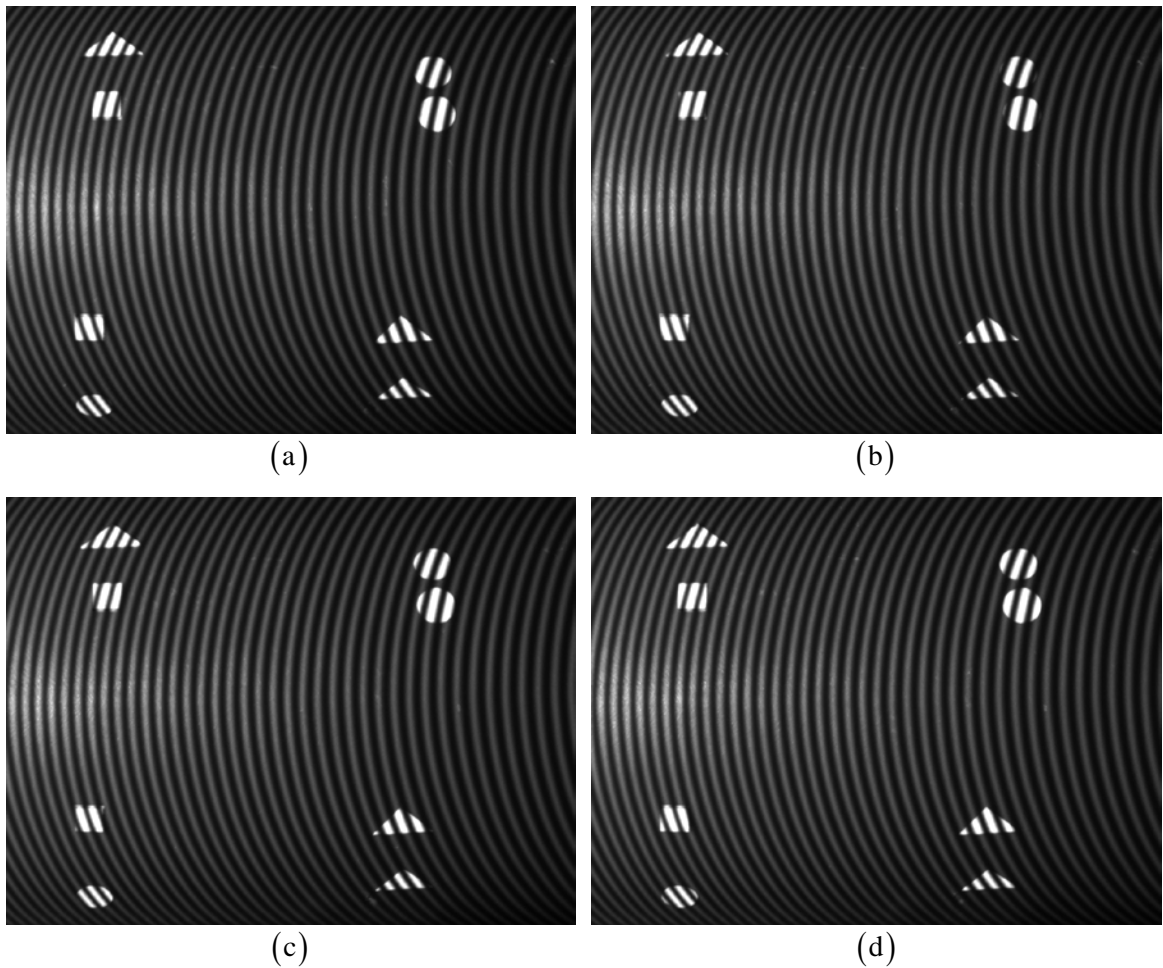


Figura 46. Imágenes del patrón de franjas adquiridas por la cámara CCD. (a) I_1 ; $\delta_1 = 0^\circ$. (b) I_2 ; $\delta_2 = 90^\circ$. (c) I_3 ; $\delta_3 = 180^\circ$. (d) I_4 ; $\delta_4 = 270^\circ$.

Usando la ecuación (1.6) se obtiene la fase discontinua del sistema de franjas proyectado, ver Figura 47.

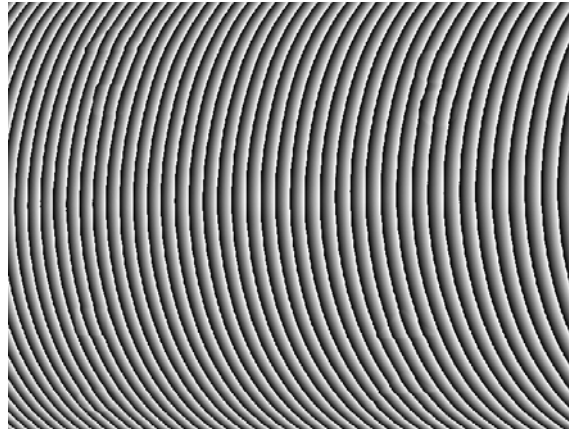


Figura 47. Fase discontinua del sistema de franjas proyectado.

La Figura 48 muestra un corte en intensidad en dirección del eje x justo en la mitad de la imagen mostrada en la Figura 47.

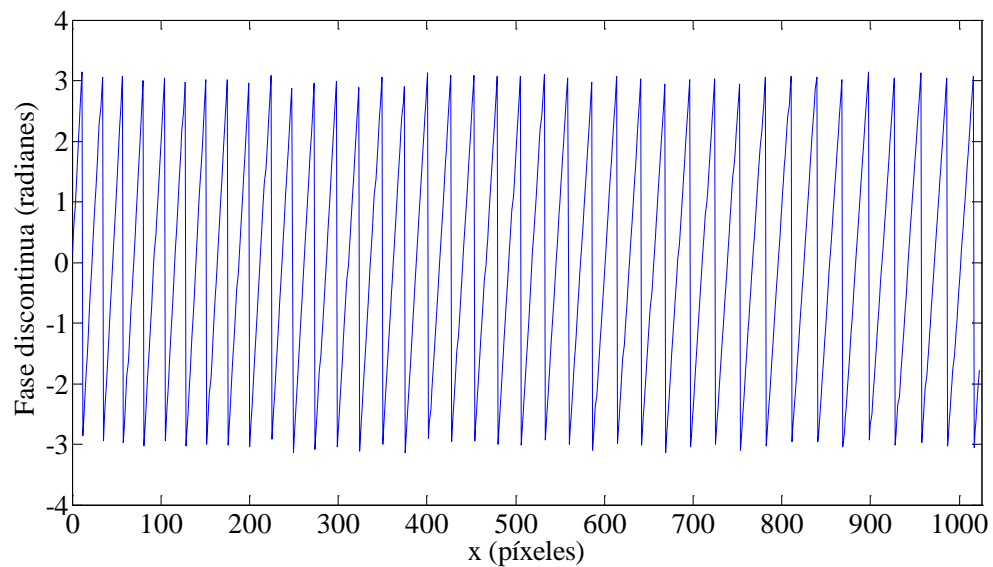


Figura 48. Corte en intensidad en dirección del eje x realizado a la imagen de la Figura 47.

Luego, mediante el algoritmo *unwrapping* se determina la fase continua a partir de la fase discontinua, como se muestra en la Figura 49.



Figura 49. Fase continua del sistema de franjas proyectado.

La Figura 50 muestra un corte en intensidad en dirección del eje x justo en la mitad de la imagen mostrada en la Figura 49.

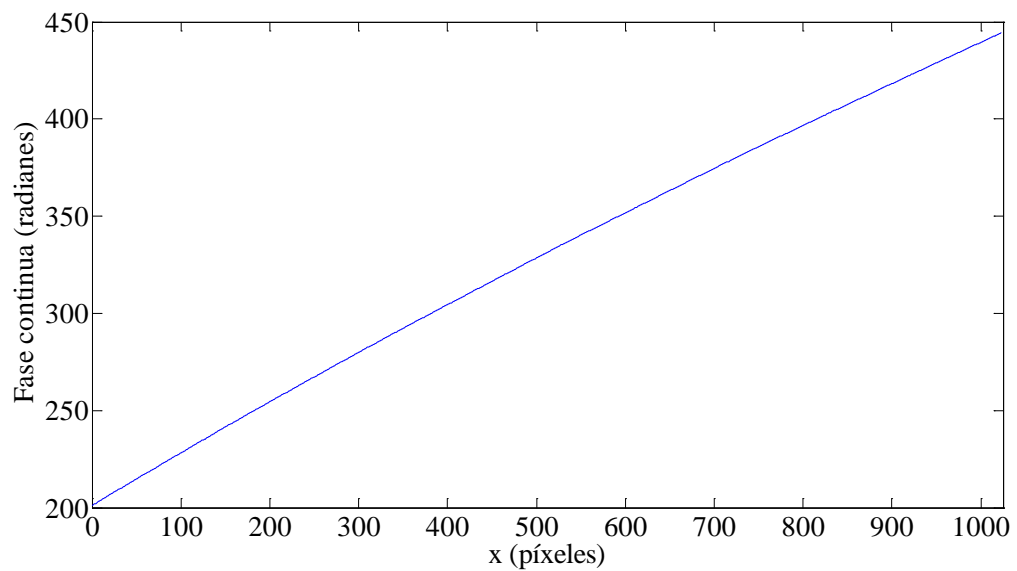


Figura 50. Corte en intensidad en dirección del eje x realizado a la imagen de la Figura 49.

Como ya se mencionó, la fase ϕ tiene una relación lineal con la posición horizontal m del sistema de franjas en la LCD del proyector. De este modo, al conocer la fase de la imagen es posible determinar las coordenadas m necesarias para calcular las ecuaciones de cada uno de los planos que se forman con la proyección del sistema de franjas sobre el objeto de estudio. Conociendo las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos en la imagen, y los parámetros intrínsecos de la cámara, se calculan las ecuaciones de las líneas rectas que se originan en el centro de la cámara, pasan por el plano imagen, e intersecan los planos de luz en el espacio 3D, como se muestra en la Figura 51. Al calcular el punto de intersección de la línea recta con el plano de luz, se determinan las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de cada uno de los puntos P respecto al sistema coordenado de la cámara.

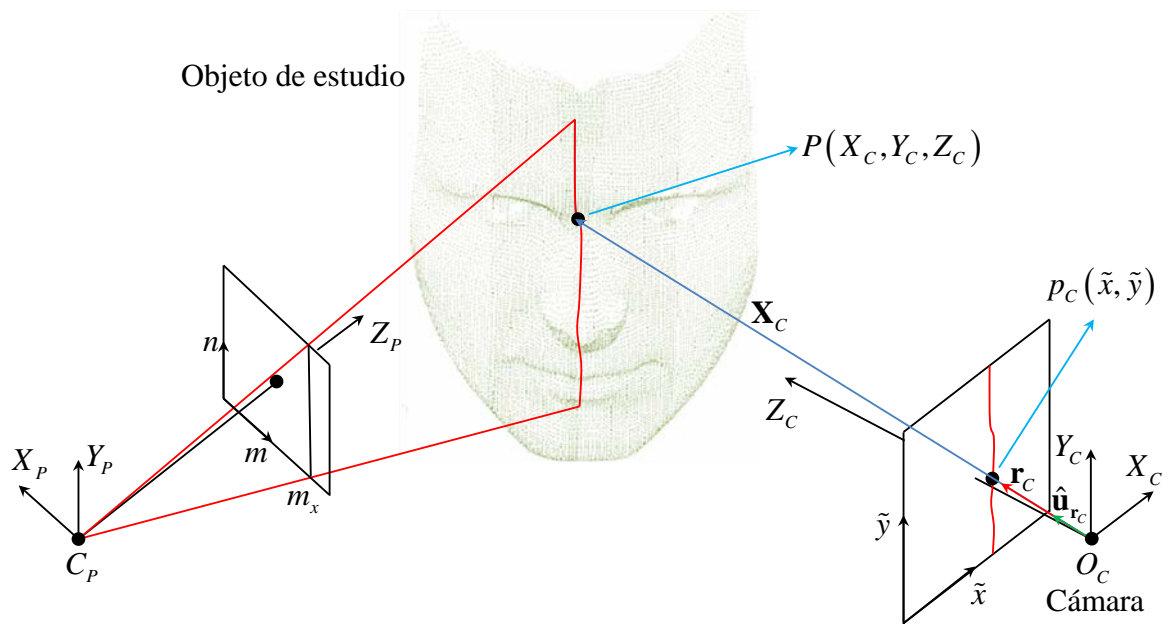


Figura 51. Procedimiento de reconstrucción 3D.

A modo de ejemplo, el punto p_C con coordenadas (1024,768) tiene un valor de $\phi = 405.2$ rad, por lo tanto su coordenada m en píxeles en la LCD del proyector, calculada a partir de la ecuación (1.179) es $m = 515.9167$,

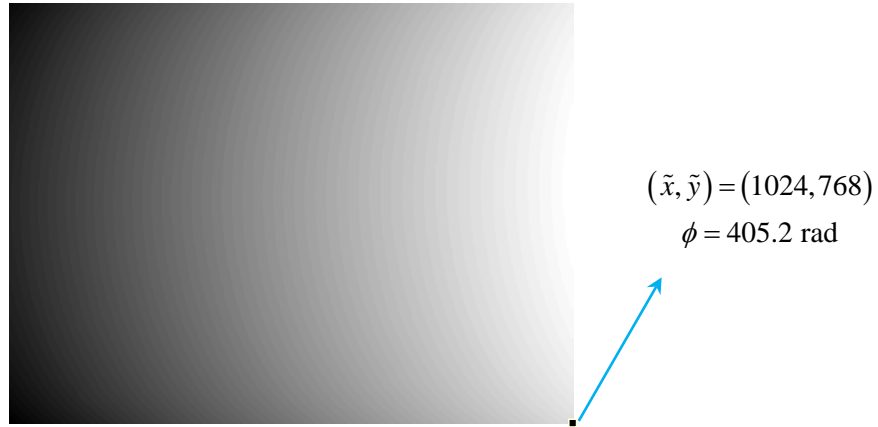


Figura 52. Punto p_C con coordenadas (1024,768).

Haciendo uso de la ecuación (1.147) se calculan las coordenadas (x_C, y_C, z_C) en unidades métricas. Tales coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & -0.1542 \\ 0 & 0.0002 & -0.1125 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1024 \\ 768 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.1390 \\ 0.1096 \\ 1.0000 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Las coordenadas definidas en la ecuación (1.181) corresponden a las componentes del vector \mathbf{r}_C dibujado con color rojo en la Figura 51. El vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_{r_C}$ que apunta en la misma dirección que \mathbf{r}_C y que está dibujado con color verde en la Figura 51, está dado por

$$\mathbf{u}_{r_C} = \frac{\mathbf{r}_C}{\|\mathbf{r}_C\|}. \quad (1.182)$$

Operando sobre la ecuación (1.181), se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{r_c} &= \frac{(0.1390, 0.1096, 1.0000)^T}{\sqrt{(0.1390)^2 + (0.1096)^2 + (1.0000)^2}} \\ &= (0.1368, 0.1080, 0.9847)^T.\end{aligned}\quad (1.183)$$

El vector \mathbf{X}_C dibujado con color azul en la Figura 51 es colineal con el vector \mathbf{u}_{r_c} y posee coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) . Si los vectores \mathbf{X}_C y \mathbf{u}_{r_c} son colineales se debe cumplir que

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_C \times \mathbf{u}_{r_c} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X_C & Y_C & Z_C \\ (u_{r_c})_x & (u_{r_c})_y & (u_{r_c})_z \end{vmatrix} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow Y_C (u_{r_c})_z - Z_C (u_{r_c})_y &= 0,\end{aligned}\quad (1.184)$$

$$\Rightarrow X_C (u_{r_c})_z - Z_C (u_{r_c})_x = 0.\quad (1.185)$$

Por otra parte, la ecuación del plano vertical, ecuación (1.115), se puede expresar como

$$AX_C + BY_C + CZ_C + D = 0,\quad (1.186)$$

donde los coeficientes A , B , C , y D están dados por

$$A = w_{11} - w_{31}m,\quad (1.187)$$

$$B = w_{12} - w_{32}m,\quad (1.188)$$

$$C = w_{13} - w_{33}m, \quad (1.189)$$

$$D = w_{34}m - w_{14}. \quad (1.190)$$

Al reemplazar (1.184) y (1.185) en la ecuación (1.186) y despejando de esta última el valor de Z_C se tiene

$$Z_C = \frac{D}{\left[A \frac{(u_{r_c})_x}{(u_{r_c})_z} + B \frac{(u_{r_c})_y}{(u_{r_c})_z} + C \right]}. \quad (1.191)$$

Operando sobre la ecuación (1.191) se tiene

$$Z_C = 354.2267 \text{ mm}. \quad (1.192)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.184) y (1.185) y de los valores dados por (1.183) y (1.192) se pueden calcular los valores de Y_C y X_C , los cuales están dados respectivamente por

$$Y_C = 38.8377 \text{ mm}, \quad (1.193)$$

$$X_C = 49.2241 \text{ mm}. \quad (1.194)$$

Conociendo las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) del punto P , se puede ubicar este en el espacio 3D y respecto al sistema coordenado de la cámara. La Figura 53 muestra la representación gráfica del punto P respecto al sistema coordenado de la cámara.

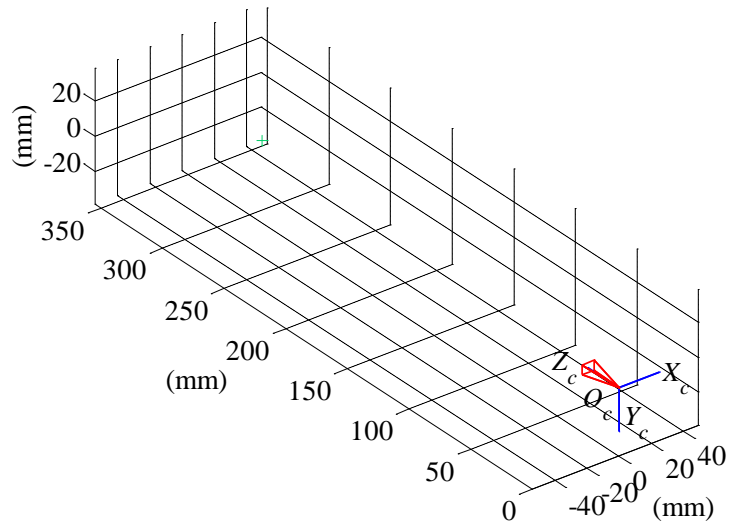


Figura 53. Punto P en el sistema coordenado de la cámara.

Repitiendo para los 786432 puntos, recuperados a partir de la fase continua, el procedimiento descrito anteriormente (ver Figura 49) se obtiene la digitalización del objeto, el cual es representado por medio de una nube de puntos, Figura 54.

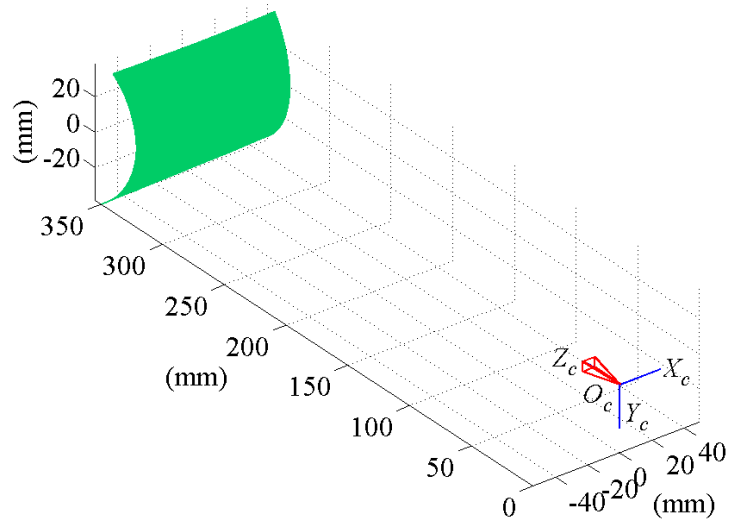


Figura 54. Nube conformada por 786432 puntos que pertenecen a la superficie de la tubería.

La Figura 55 muestra una ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 54. Cabe destacar que en este caso la digitalización del objeto de estudio se obtuvo ajustando T , periodo de las franjas proyectadas, a 8 píxeles con el propósito de reducir al máximo el error de fase introducido por la distorsión gamma del proyector. El análisis que permitió deducir que dicho paso resulta apropiado para eliminar el error de fase, se describe a continuación.

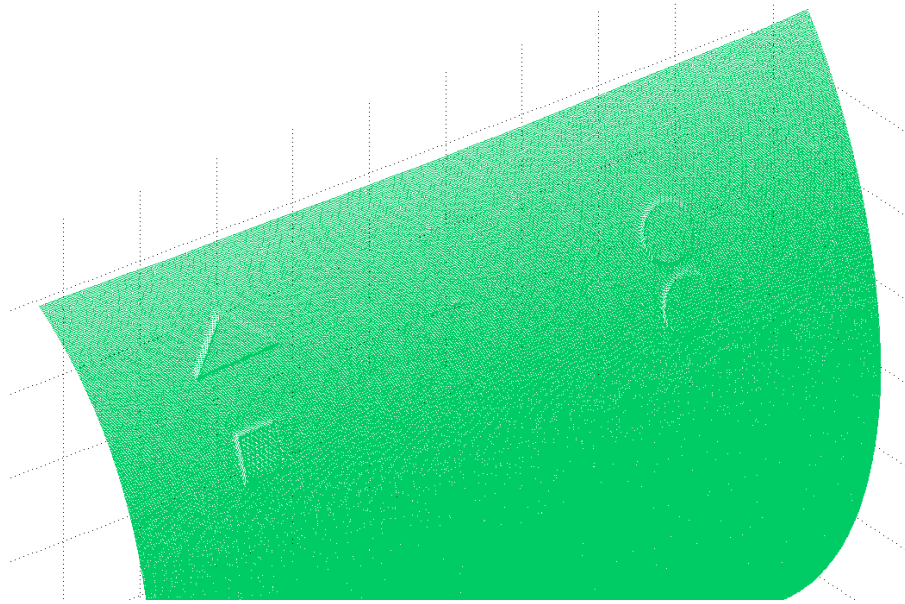


Figura 55. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 54.

3.3. Corrección del error de fase

Con el propósito de modelizar el error de fase que se introduce debido a la distorsión gamma del proyector, primero se asume que las imágenes son formadas por la cámara digital siguiendo el proceso ilustrado en la Figura 56. Por otra parte, se puede indicar que el patrón de franjas sinusoidales generado por el computador tiene una intensidad dada por

$$I_i^s(x, y) = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi(x, y) - \delta_i], \quad (1.195)$$

con $\delta_i = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Después de que las franjas son proyectadas, la intensidad de las mismas estará dada por

$$I_i^P(x, y) = f_i(I_i^S), \quad (1.196)$$

donde $f_i(I_i^S)$ es una función de I_i^S , que representa la respuesta del proyector a la función de intensidad de la i -ésima imagen de entrada.

Ahora bien, si se asume que el proyector hace incidir luz sobre una superficie con reflectancia $r(x, y)$, y que la luz ambiental que ilumina dicha superficie es $a_1(x, y)$, la intensidad luminosa reflejada por el objeto a digitalizar será

$$I_i^O(x, y) = r(x, y)[I_i^P(x, y) + a_1(x, y)]. \quad (1.197)$$

La imagen reflejada luego es capturada por la cámara digital, la cual posee una sensibilidad α que es constante si se asume que la cámara tiene una respuesta lineal a la intensidad de luz que entra en ella. Teniendo en cuenta esto, la intensidad de la imagen adquirida por la cámara será

$$\begin{aligned} I_i^C &= \alpha [I_i^O(x, y) + a_2(x, y)] \\ &= c_1 I_i^P(x, y) + c_2, \end{aligned} \quad (1.198)$$

donde $a_2(x, y)$ representa la luz ambiental que ingresa a la cámara y tanto c_1 como c_2 están dados respectivamente por

$$c_1 = \alpha r(x, y), \quad (1.199)$$

$$c_2 = \alpha r(x, y)a_1(x, y) + \alpha a_2(x, y). \quad (1.200)$$

Teniendo en cuenta el algoritmo de corrimiento de fase a cuatro imágenes, la fase asociada al sistema de franjas adquirido por la cámara, se puede calcular como

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) &= \tan^{-1} \left(\frac{I_2^C - I_4^C}{I_1^C - I_3^C} \right) \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{c_1 I_2^P + c_2 - c_1 I_4^P - c_2}{c_1 I_1^P + c_2 - c_1 I_3^P - c_2} \right) \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{I_2^P - I_4^P}{I_1^P - I_3^P} \right) \\
 &= \tan^{-1} \left[\frac{f_2(I_2^S(\phi)) - f_4(I_4^S(\phi))}{f_1(I_1^S(\phi)) - f_3(I_3^S(\phi))} \right] \\
 &= F(\phi). \\
 \Rightarrow \Phi(x, y) &= F(\phi). \tag{1.201}
 \end{aligned}$$

La ecuación (1.201) indica que la fase $\Phi(x, y)$ es independiente de la respuesta de la cámara, de las propiedades reflectantes de la superficie del objeto de estudio, y de la intensidad de la luz ambiental. Esto implica que el error de fase es ocasionado principalmente por la distorsión gamma del proyector. Por lo tanto, si se calcula el error de fase producido por la distorsión gamma del proyector, se puede construir una estructura de datos que lo modelice para que sea compensado o eliminado cuando se desee digitalizar la superficie del objeto de estudio. El error de fase se determina a partir del cálculo de la fase ideal asociada al patrón de franjas sinusoidales proyectado, la cual depende de las características del sistema formador de imágenes del dispositivo de reconstrucción 3D. Como en nuestro caso tal sistema no es tele-céntrico y no está libre de aberraciones geométricas, dicha fase se obtiene a partir de un ajuste polinómico.

Ahora bien, la diferencia entre la fase ideal y la fase real se define como

$$\Delta\Phi(x, y) = \Phi(x, y) - g(x, y). \tag{1.202}$$

Donde $g(x, y)$ es la fase ideal. Por lo tanto la estructura de datos que modeliza el error se puede construir como un mapeo $(\Phi, \Delta\Phi)$.

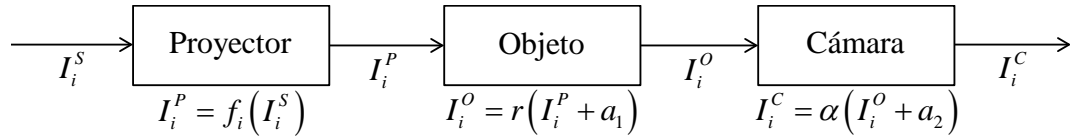


Figura 56. Procedimiento de generación de la imagen en la cámara.

3.4. Generación de la estructura de datos que modeliza el error de fase

Para estudiar las características del error de fase, se proyectaron cuatro patrones de franjas con diferencias de fase de $\delta_1 = 0^\circ$, $\delta_2 = 90^\circ$, $\delta_3 = 180^\circ$, y $\delta_4 = 270^\circ$, sobre un objeto plano; se adquirieron las imágenes por medio de la cámara y se calculó el error de fase usando la ecuación (1.202), teniendo en cuenta que en nuestro caso la fase ideal está representada matemáticamente por un polinomio de orden cinco como se muestra en la Figura 57. En la Tabla 3 se muestra la norma del error residual obtenida para diferentes interpolaciones efectuadas sobre la fase ideal. Para realizar los ajustes se utilizaron 222 parejas de puntos.

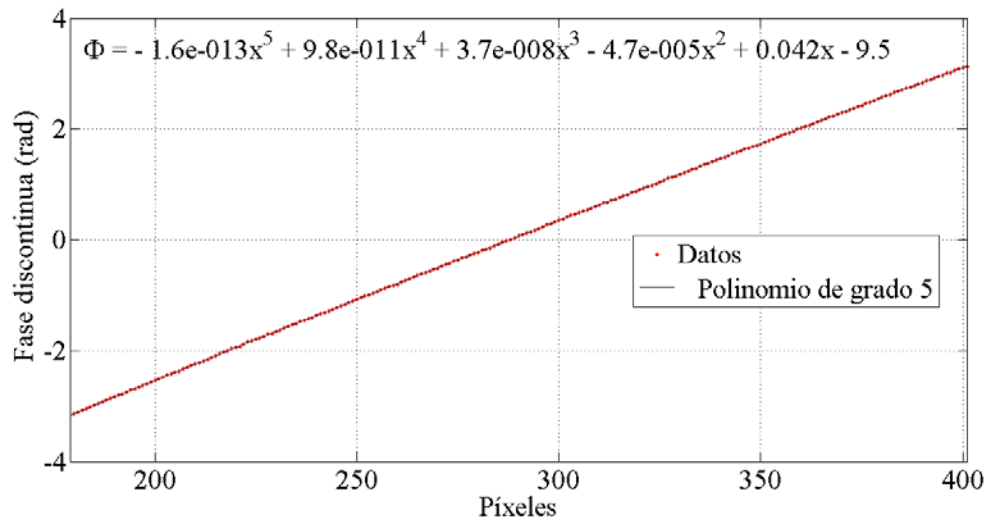


Figura 57. Polinomio que modeliza la fase ideal.

Interpolación	Norma del error residual
Lineal	0.34766
Cuadrática	0.09619
Cúbica	0.08944
Polinomio de orden 4	0.08618
Polinomio de orden 5	0.08616

Tabla 3. Norma del error residual obtenida para diferentes interpolaciones efectuadas sobre la fase ideal.

En la Figura 58 se muestran las fases, ideal y real, obtenidas usando un patrón de franjas con periodo de 128 píxeles; a partir de estas se calculó el error de fase que se muestra en la Figura 59. Con el objetivo de obtener la estructura de datos que modeliza el error de fase se realiza una interpolación *spline* en la cual los datos a ajustar están dados por los promedios de la curva de error. La curva punteada y de color rojo de la Figura 60 corresponde al error promedio, mientras que la curva sólida de color azul corresponde a la interpolación *spline*. La estructura de datos $g(\Phi)$, que está dada por la interpolación y que permite evaluar el error de fase para un valor específico de la fase real Φ , se almacena como una estructura de datos en la memoria del computador.

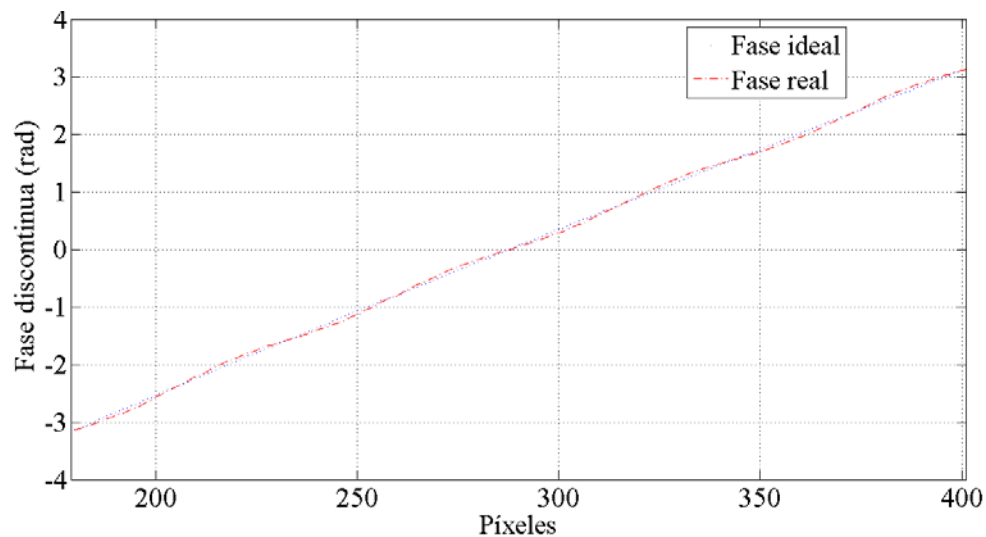


Figura 58. Fase ideal y fase real.

De esta manera, el error asociado a la fase que pertenece al patrón de franjas, proyectado sobre la superficie de cualquier objeto de estudio, se puede compensar usando la estructura de datos $g(\Phi)$. Por lo tanto si Φ es la fase real, la fase compensada, es decir la fase que se obtiene después de eliminar el error, es

$$\Phi' = \Phi - g(\Phi). \quad (1.203)$$

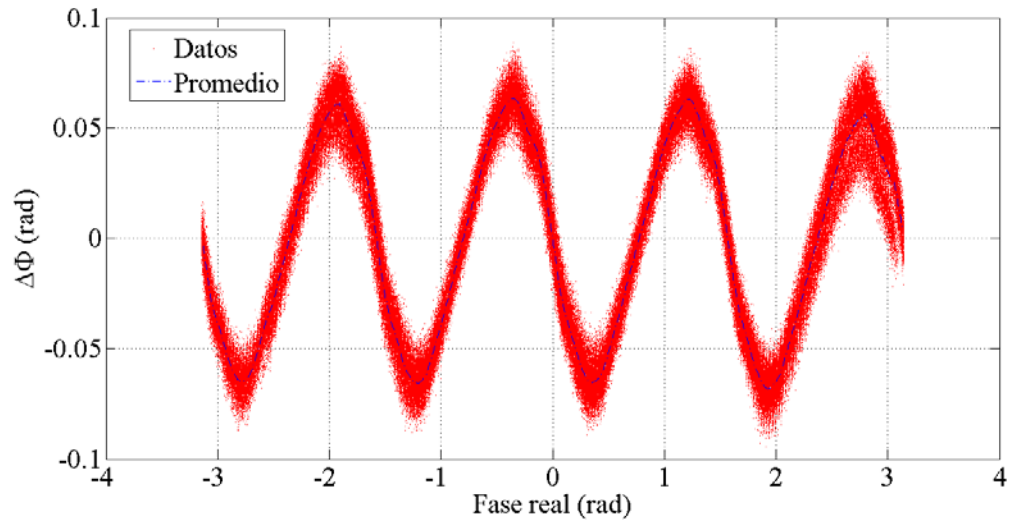


Figura 59. Error de fase.

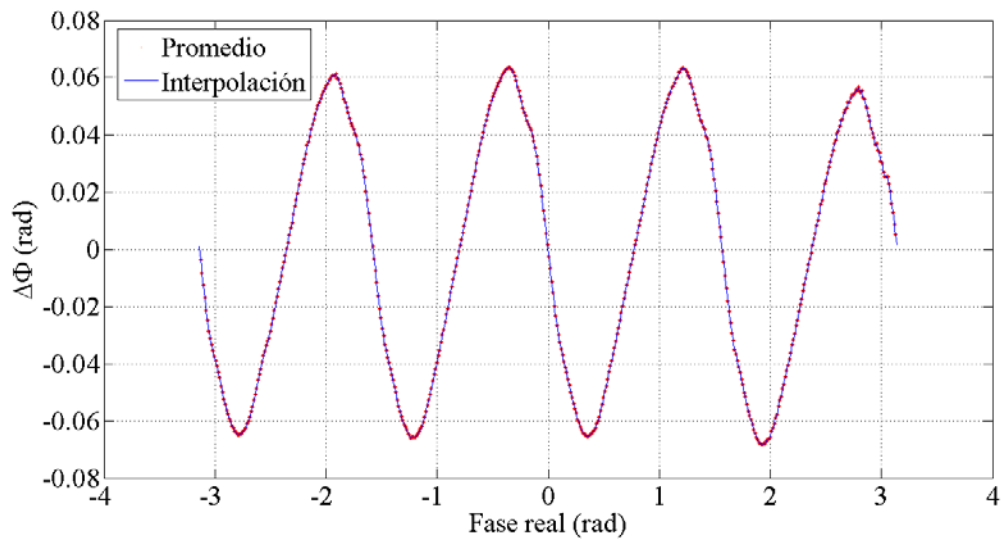


Figura 60. Error promedio e interpolación.

Posteriormente se analizó el error de fase usando patrones de franjas con periodos de 8, 16, 32 y 64 píxeles. En la Figura 61 se muestra la función que modeliza el error de fase para cada uno de estos casos, además del resultado que se obtuvo con un periodo de 128 píxeles, en esta se puede apreciar que el error de fase es prácticamente independiente del periodo de las franjas para periodos de 64 píxeles y 128 píxeles, sin embargo, para valores inferiores a 64 píxeles el error sí depende del periodo de las franjas y tanto más pequeño es este, menor es el error de fase asociado. Aunque esto en realidad no es un inconveniente, ya que si se quiere reconstruir la superficie de un objeto de estudio utilizando un periodo específico, el error asociado al mismo se puede modelizar y compensar satisfactoriamente como se mostrará en los resultados experimentales.

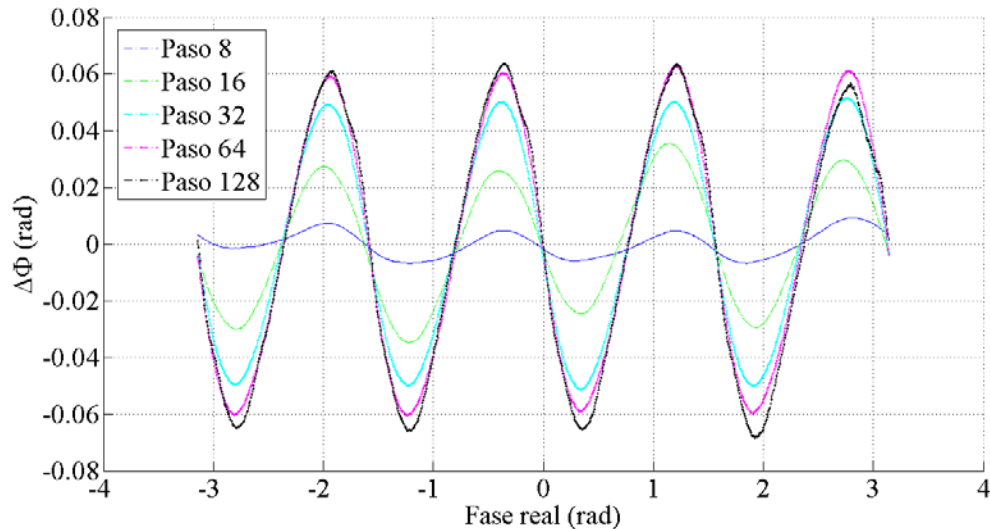


Figura 61. Error de fase asociado a diferentes periodos del patrón de franjas proyectado.

3.5. Resultados experimentales

El dispositivo de reconstrucción 3D que se implementó para evaluar el desempeño de la metodología propuesta que corrige el error de fase está formado por un proyector Aigo Discovery Box PT 6216 2 GB de 100 lúmenes y resolución de 600 píxeles \times 800 píxeles, una cámara CCD Ueye UI-2310-M, USB 2.0, monocromática y resolución 640 píxeles \times 480 píxeles, con lente computar de 12 milímetros. Para el procesamiento digital de las imágenes se usó el software MATLAB[®] R2010a instalado en un computador portátil SONY VAIO

VPCEG30EL con procesador intel Core i3 y 4 GB de RAM. Se proyectaron cuatro patrones de franjas cuyas intensidades están dadas por (1.2)-(1.5) y cuyo periodo es de 128 píxeles, y por medio de la cámara CCD se adquirió cada patrón de franjas reflejado por la superficie del objeto. La Figura 62 muestra las cuatro imágenes reflejadas por el objeto de estudio, que como ya se mencionó es un objeto plano.

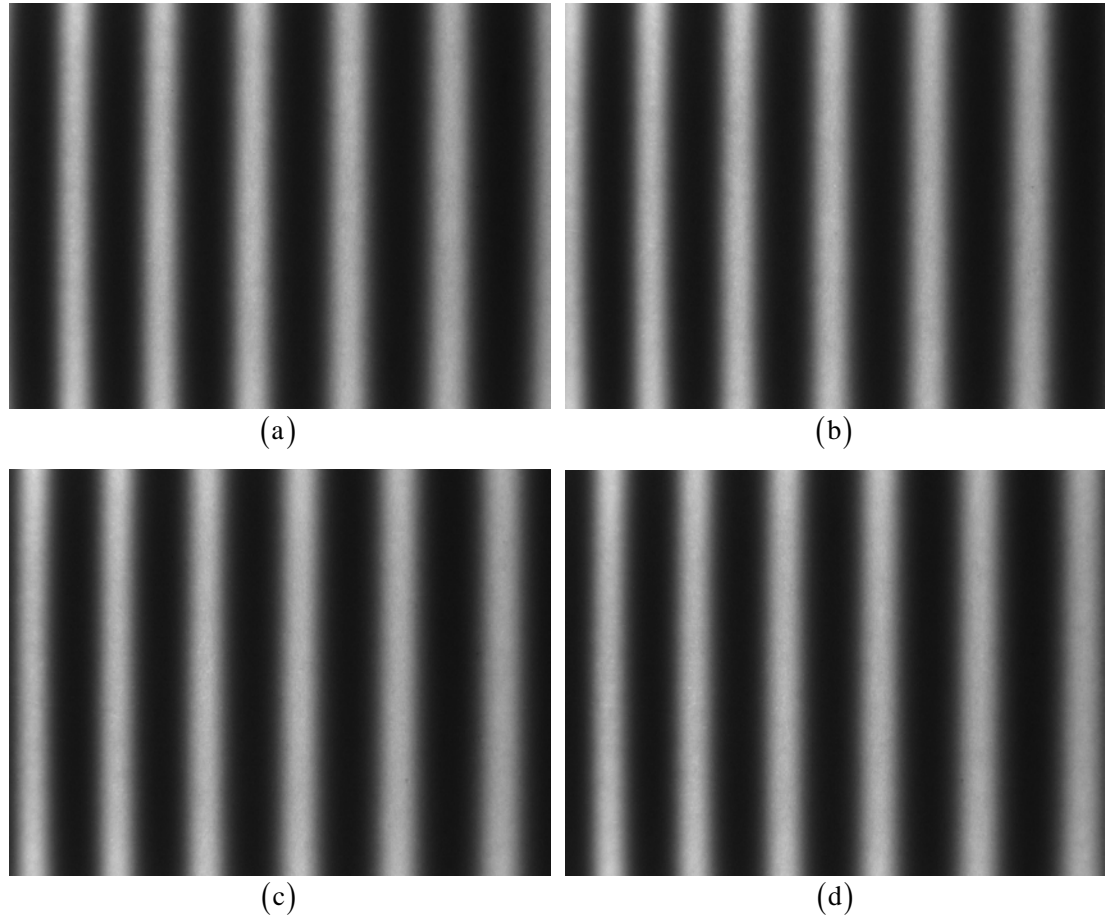


Figura 62. Imágenes del patrón de franjas reflejadas por el objeto plano y adquiridas por la cámara CCD. (a) I_1 ; $\delta_1 = 0^\circ$. (b) I_2 ; $\delta_2 = 90^\circ$. (c) I_3 ; $\delta_3 = 180^\circ$. (d) I_4 ; $\delta_4 = 270^\circ$.

La Figura 63a muestra la reconstrucción 3D del objeto plano antes de la corrección del error de fase mientras que la Figura 63b muestra la reconstrucción después de la corrección. En la Figura 63b se puede apreciar que el error de fase, el cual se hace evidente en la Figura 63a debido a las ondulaciones que aparecen en la reconstrucción, se elimina notablemente.

En la Figura 64 se muestra el error de fase antes de la corrección, su valor eficaz es 0.0597 rad, mientras que en la Figura 65 se muestra el error después de la corrección, su valor eficaz es 0.0132 rad. El error es aproximadamente 4.52 veces más pequeño después de la corrección. Además, se realizó un estudio del comportamiento del error de fase para diferentes valores del periodo del patrón de franjas; dicho estudio se llevó a cabo reconstruyendo el mismo objeto plano. En la Tabla 4 se muestran los errores eficaces antes y después de la corrección del error de fase para diferentes periodos del patrón de franjas.

Paso	Error eficaz antes (rad)	Error eficaz después (rad)	Relación
8	0.0411	0.0393	1.05
16	0.0392	0.0273	1.44
32	0.0489	0.0183	2.67
64	0.0507	0.0149	3.40
128	0.0597	0.0132	4.52

Tabla 4. Error eficaz, antes y después de la corrección, para diferentes periodos de las franjas proyectadas.

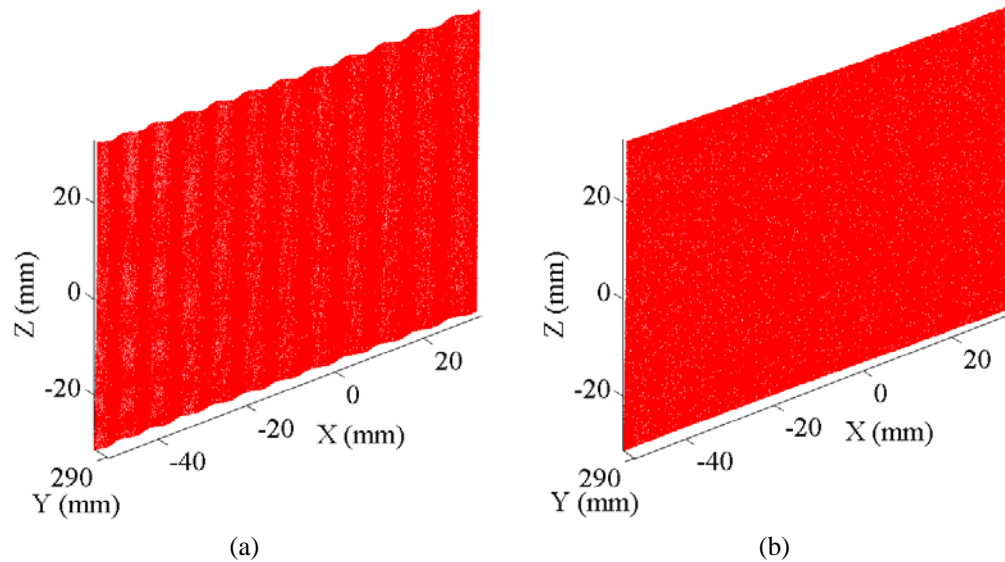


Figura 63. Reconstrucción 3D del objeto plano. (a) Reconstrucción 3D sin corregir el error de fase. (b) Reconstrucción 3D corrigiendo el error de fase.

Los resultados obtenidos muestran que tanto más grande es el periodo de las franjas mayor es el error eficaz antes de la corrección y mayor es la reducción del error. Además, se aprecia que para el periodo de 8 píxeles, periodo más pequeño con el que se trabajó, la diferencia entre los errores eficaces, antes y después, es prácticamente despreciable, lo que indica que para pasos menores o iguales a 8 píxeles no es necesario aplicar el procedimiento de eliminación del error.

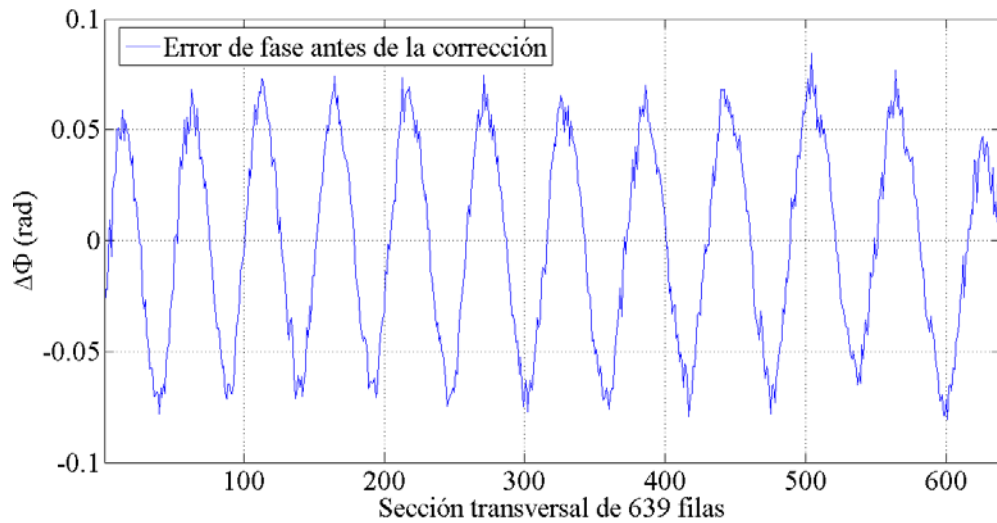


Figura 64. Error de fase (correspondiente a un periodo de 128 píxeles) antes de la corrección.

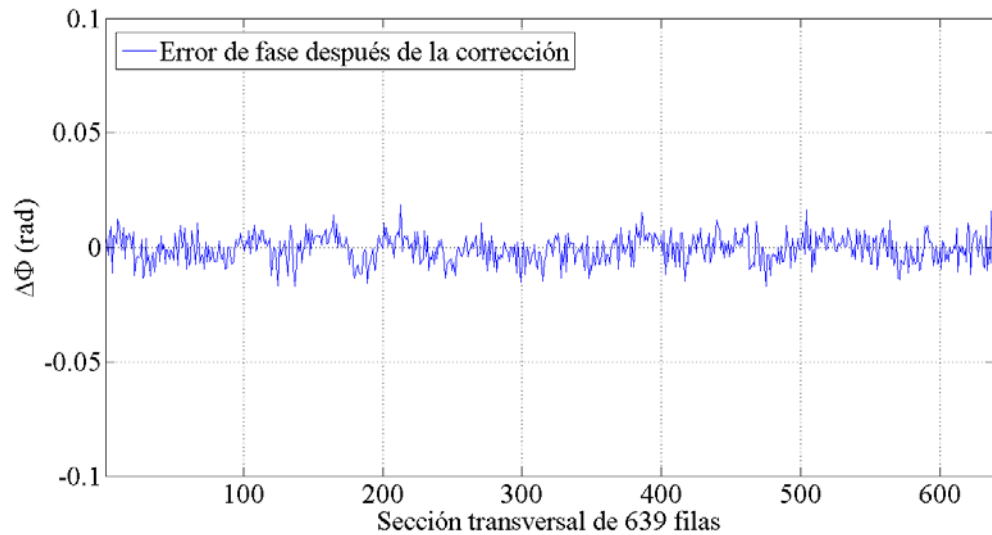


Figura 65. Error de fase (correspondiente a un periodo de 128 píxeles) después de la corrección.

La Figura 66, muestra el error de fase correspondiente a un periodo de 8 píxeles, antes de la corrección; mientras que la Figura 67, muestra el error de fase correspondiente al mismo periodo de 8 píxeles, después de la corrección.

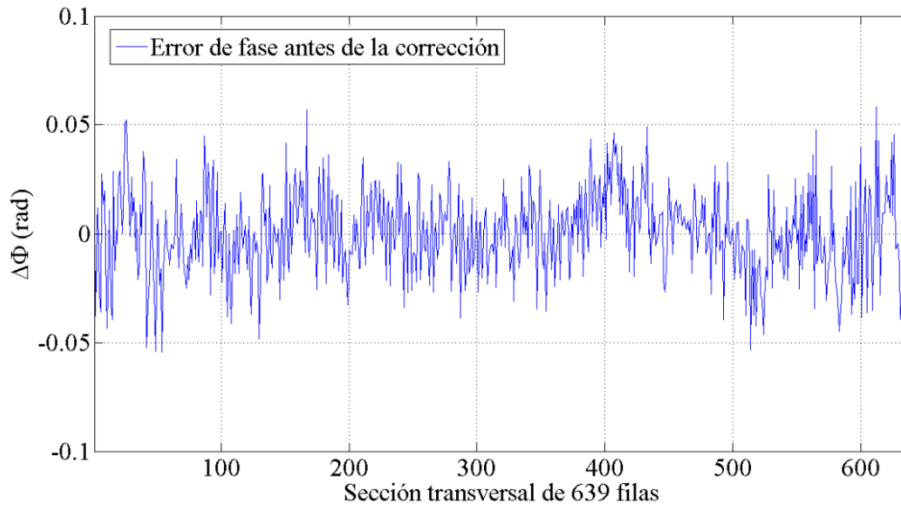


Figura 66. Error de fase (correspondiente a un periodo de 8 píxeles) antes de la corrección.

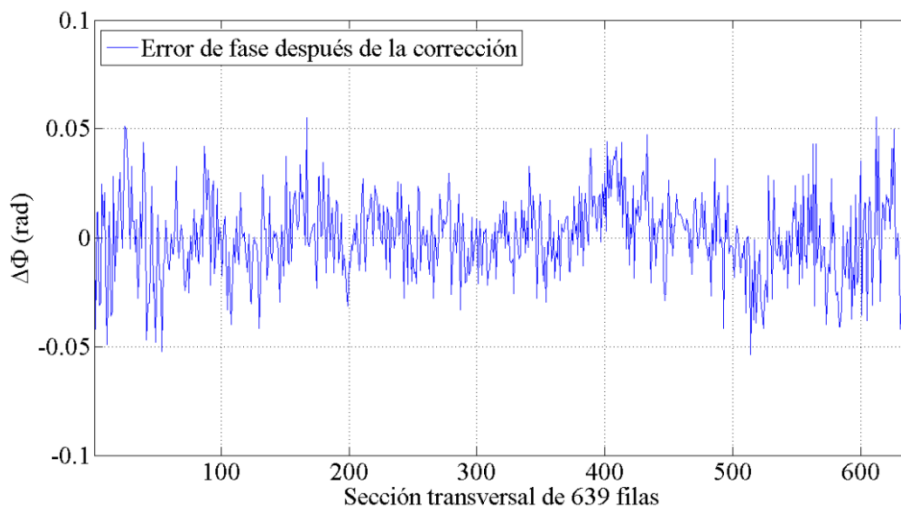


Figura 67. Error de fase (correspondiente a un periodo de 8 píxeles) después de la corrección.

Capítulo 4

Reconstrucción 3D a 360° de observación usando un sistema de proyección-adquisición, aplicaciones en la industria del petróleo

La industria del petróleo en Colombia está en constante cambio con el propósito de mejorar la seguridad ambiental y el desempeño de los sistemas de transporte de hidrocarburos. Las nuevas tecnologías implementadas para el recobro secundario de petróleo provocan una aceleración en los mecanismos de fallas de las tuberías metálicas convencionales utilizadas para el transporte de hidrocarburos, lo que ocasiona un incremento en los daños que generan pérdidas económicas, afectaciones ambientales y costosas inversiones en recuperación de zonas afectadas.

Una nueva tecnología en tuberías elaboradas con materiales no metálicos se está convirtiendo en una alternativa para la industria, pues brinda características como fácil instalación, buena resistencia mecánica, resistencia a la corrosión interna y externa, y menores pérdidas de presión. En los últimos setenta años el plástico ha sido el material más utilizado en la fabricación de diversas tuberías, esta tecnología ha sido introducida hace poco más de cinco años por la industria petrolera en Colombia, dando una pronta solución a las exigentes normativas ambientales a las que dicha industria se enfrenta y facilitando una significativa reducción de costos de mantenimiento. A pesar de los buenos resultados obtenidos con este tipo de tubería, se han encontrado fallas tempranas en algunas de estas cuando se encuentran en servicio, ocasionando fugas no controladas del producto transportado; las distintas fallas pueden ser producidas por errores de diseño, producción, instalación, almace-

naje, transporte, condiciones de servicio y factores del ambiente incluyendo cargas mecánicas, efectos térmicos, agentes químicos y características de vida útil.

Mientras que existen diversas técnicas que permiten identificar fallas tempranas en tuberías metálicas, las cuales están consolidadas en la literatura [71]; en el caso de las tuberías no metálicas tales técnicas aún no están consolidadas o se encuentran en proceso de desarrollo y en manos de las empresas fabricantes debido al carácter novedoso de esta tecnología. Esta coyuntura da inicio a la investigación y desarrollo de técnicas que ayuden a evaluar el daño estructural durante los años de servicio en los diferentes tipos de ambientes a los que se someten las tuberías no metálicas.

El objetivo principal del presente capítulo es mostrar el potencial de aplicar la técnica de proyección de franjas para obtener la reconstrucción, 3D y a 360° de observación, de secciones de tuberías con refuerzo no metálico que son utilizadas para el transporte de hidrocarburos. La técnica de proyección de franjas ya ha sido implementada para reconstruir la superficie de tuberías metálicas [71] lo que permitió establecer la viabilidad de la misma para reconstruir la superficie de tuberías no metálicas; sin embargo en este caso los retos están relacionados con el cómo procesar las imágenes de las franjas adquiridas, debido a la reflectancia propia de la superficie de estudio, y también con el cómo obtener la digitalización de la misma a 360° de observación. El análisis detallado de las reconstrucciones tridimensionales obtenidas permitirá identificar las fallas que pueden afectar la integridad estructural de la tubería. El trabajo desarrollado ha dado lugar a un trabajo de maestría [72] y a una publicación referenciada [73].

4.1. Tuberías flexibles

El desempeño de las tuberías flexibles está fuertemente influenciado por los materiales poliméricos que las conforman. Los sistemas de tuberías flexibles han demostrado ser muy fiables para el transporte de hidrocarburos. Las tuberías flexibles son ligeras, fáciles de conectar y resistentes a la corrosión; sin embargo, los materiales que las conforman poseen ciertas propiedades mecánicas que se deben tener en cuenta al momento de evaluar su tiempo de vida útil.

4.2. Tubería no metálica compuesta

La tubería no metálica compuesta está conformada por tres capas, ver Figura 68. El revestimiento interior, compuesto de material polimérico, es usado para contener el fluido transportado, la capa estructural o intermedia envuelve a la capa interior o de contención y proporciona resistencia mecánica al conjunto con el propósito de soportar las cargas mecánicas, aplicadas en el proceso de instalación y durante la operación, y por último el revestimiento exterior es usado para dar protección a las capas internas.

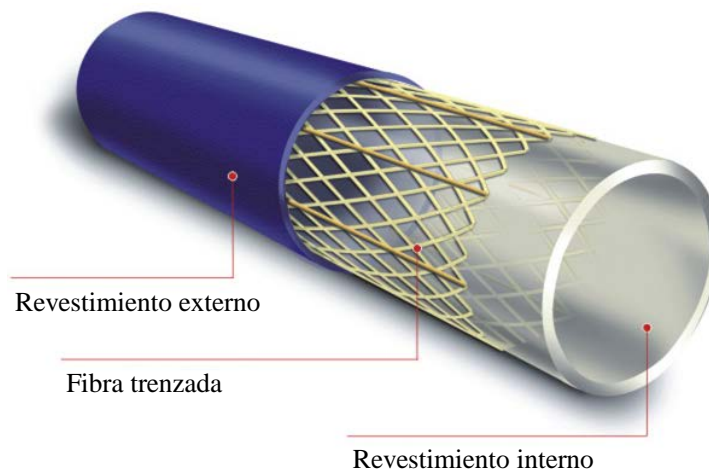


Figura 68. Estructura de la tubería flexible con refuerzo no metálico.

4.3. Fallas en tuberías flexibles con refuerzo no metálico

Cuando se encuentra en servicio, la tubería puede estar sometida a cargas mecánicas, efectos térmicos, radiación solar o efectos químicos. Estas condiciones pueden causar, individual o colectivamente, fallas en la tubería [74]. Las principales fallas que se pueden presentar se describen a continuación.

4.3.1. Grietas. Se pueden presentar en la parte externa, local o globalmente y de forma regular o irregular.

4.3.2. Poros y ampollas. Aparecen en la superficie, afectando las propiedades mecánicas de la tubería. Se pueden presentar en forma de poros, astillas, abolladuras, depresiones y agujeros.

4.3.3. Deformaciones excesivas. Se presentan en el contorno de la tubería afectando su forma original. Se pueden presentar en forma de alabeo, cambio de dimensiones longitudinales o transversales, torsión y flexión.

Con el propósito de evaluar las fallas que se pueden presentar en la superficie de la tubería no metálica se desarrolló un sistema de reconstrucción 3D basado en la técnica de proyección de franjas y el algoritmo de corrimiento de fase a cuatro imágenes. A continuación se muestran los resultados experimentales obtenidos por medio de tal sistema.

4.4. Resultados experimentales

El sistema de reconstrucción 3D que se implementó es el descrito en el **Capítulo 2**, y se calibró como se describe en ese mismo capítulo. En este caso se quiere reconstruir la sección de la tubería mostrada en la Figura 69.



Figura 69. Sección de la tubería a reconstruir.

Se proyectaron cuatro patrones de franjas cuyas intensidades están dadas por (1.2)-(1.5) y cuyo periodo fue 8 píxeles. Por medio de la cámara CCD se adquirió cada patrón de franjas reflejado por la superficie de la tubería. La Figura 70 muestra las cuatro imágenes adquiridas por la cámara CCD.

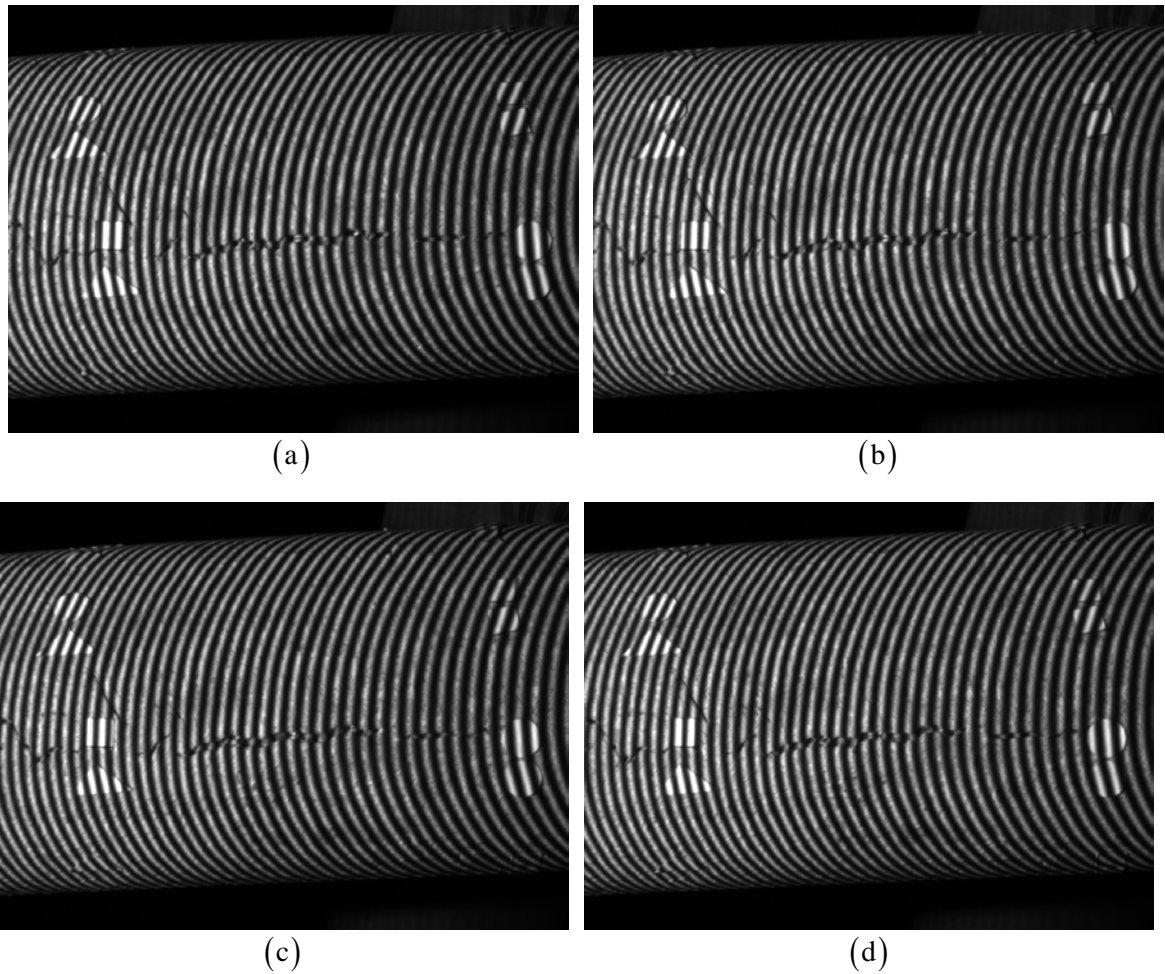


Figura 70. Imágenes del patrón de franjas reflejadas por la tubería y adquiridas por la cámara CCD. (a) I_1 ; $\delta_1 = 0^\circ$. (b) I_2 ; $\delta_2 = 90^\circ$. (c) I_3 ; $\delta_3 = 180^\circ$. (d) I_4 ; $\delta_4 = 270^\circ$.

Usando la ecuación (1.6) se obtiene la fase discontinua del sistema de franjas proyectado; a partir de esta y del algoritmo *unwrapping* se obtiene la fase continua. Ahora bien, la nube de puntos que representa la superficie de la tubería se obtiene a partir de la fase continua, como se describió en el **Capítulo 3**. Tal nube de puntos se muestra en la Figura 71.

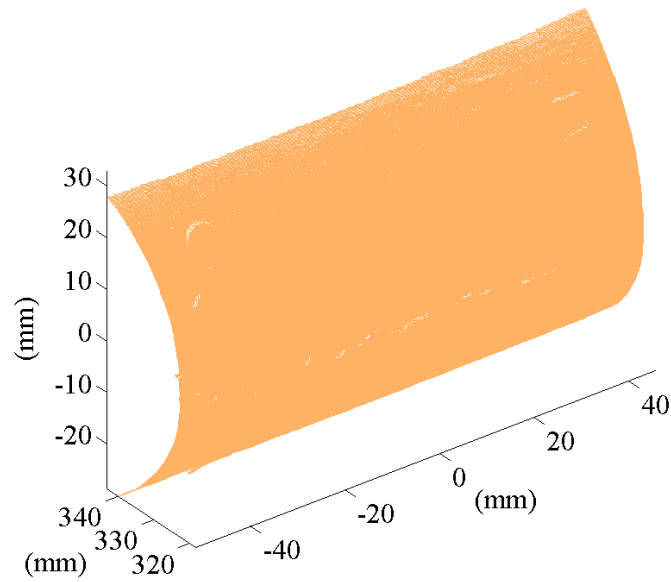


Figura 71. Nube de datos que representa la superficie de la tubería.

En la Figura 72 se muestra una ampliación de la nube de puntos mostrada en la Figura 71. En esta se puede apreciar una grieta, la cual es una falla que aparece sobre el revestimiento externo de la tubería debido a la presión que ejerce desde el interior el fluido transportado.

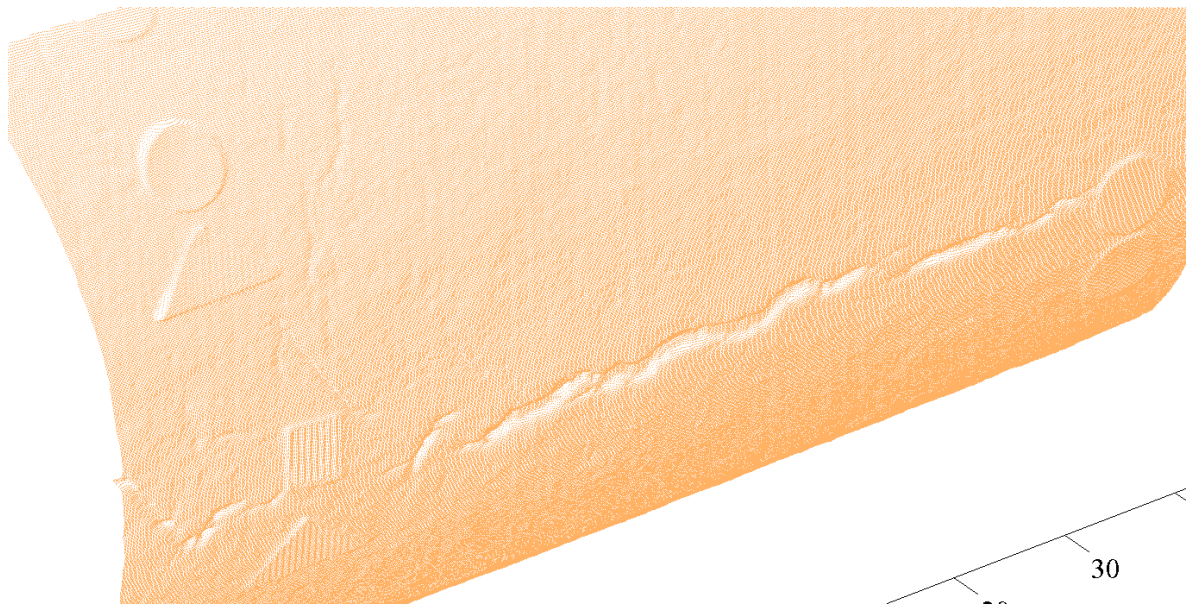


Figura 72. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 71.

Por otra parte, con el propósito de extraer información topográfica de las fallas presentes en la superficie de la tubería se realizó un procesamiento que permitió en primera instancia eliminar la curvatura promedio de la sección reconstruida, el resultado de tal procesamiento se muestra en la Figura 73. La Figura 74 muestra una ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 73.

Con el objetivo de cuantificar la longitud de una región de la grieta, su profundidad máxima, su profundidad mínima y su profundidad promedio, se realiza un procesamiento que permite generar el mapa de profundidades. Se habla de una región de la grieta ya que por lo general ésta no es continua a lo largo de la sección reconstruida, tal como se puede apreciar en la Figura 71. El mapa de profundidades correspondiente a la nube de puntos o sección reconstruida mostrada en la Figura 73, se muestra en la Figura 75, en ésta las zonas de color naranja corresponden a las de mayor profundidad en tanto que las de color azul corresponden a las de menor profundidad; las unidades de la barra lateral son milímetros.

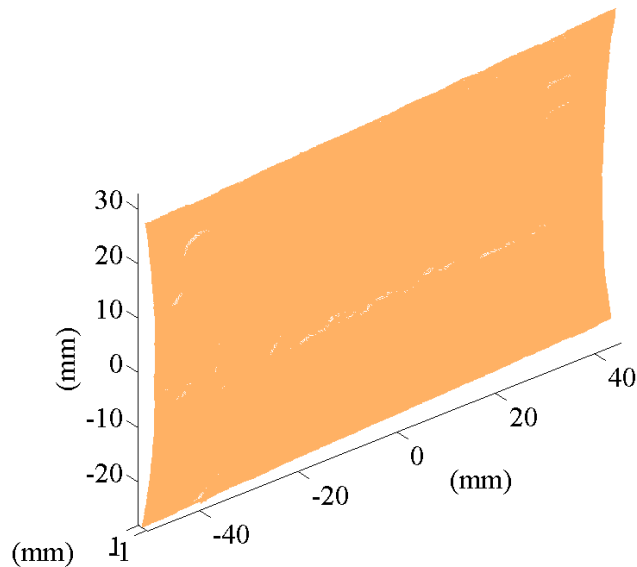


Figura 73. Nube de puntos después de eliminar la curvatura promedio.

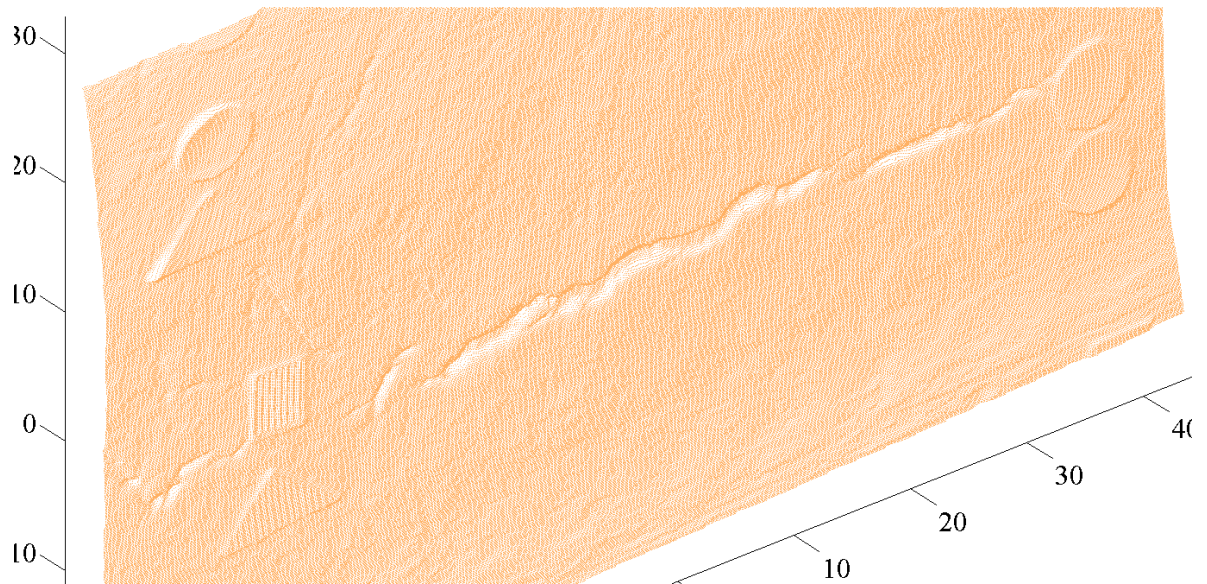


Figura 74. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 73.

A partir del mapa de profundidades es posible seleccionar una región a caracterizar o realizar un corte con el propósito de extraer el perfil de profundidad a lo largo de una región específica del mismo. Por ejemplo, en la Figura 76 se muestra el mallado correspondiente a la región del mapa marcada con el rectángulo de color negro, en esta figura se muestran, en milímetros, algunas características de la sección de la grieta seleccionada. La línea de color verde pasa por el punto de mayor profundidad.

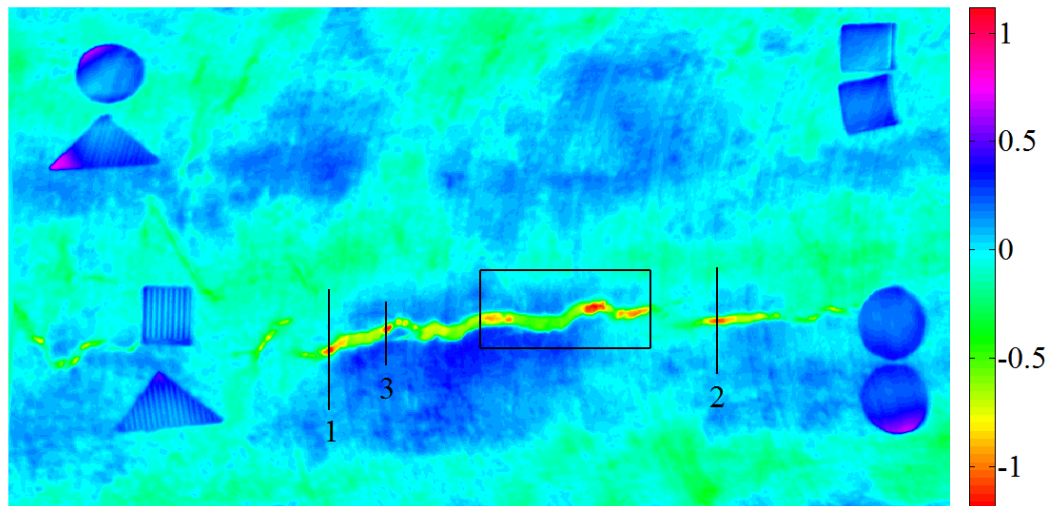


Figura 75. Mapa de profundidades correspondiente a la nube de puntos mostrada en la Figura 74.

Longitud = 16200.0 ± 4.7 micras
Profundidad máxima = 1301.0 ± 4.7 micras
Profundidad promedio = 943.0 ± 4.7 micras

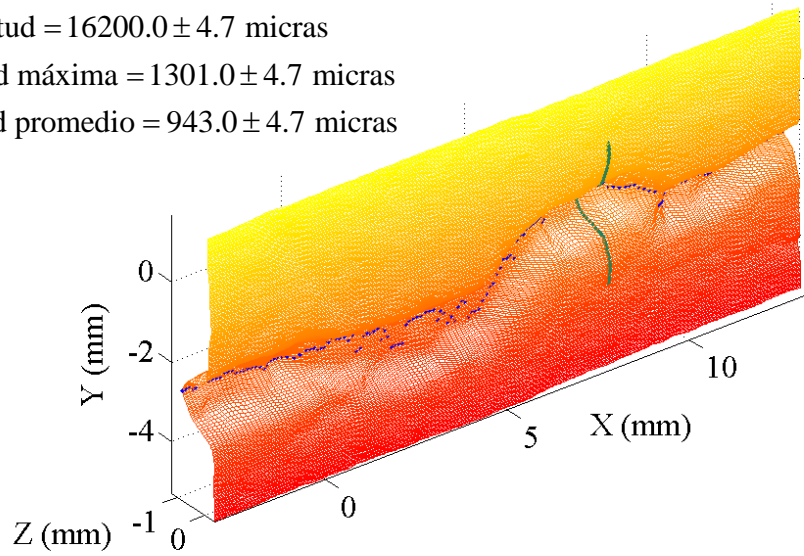


Figura 76. Mallado correspondiente a la región seleccionada del mapa de profundidades.

En las Figuras 77, 78 y 79 se muestran tres diferentes cortes realizados al mapa de profundidades, estos están determinados por las líneas de color negro 1 2 y 3 respectivamente, las cuales se muestran en la Figura 75.

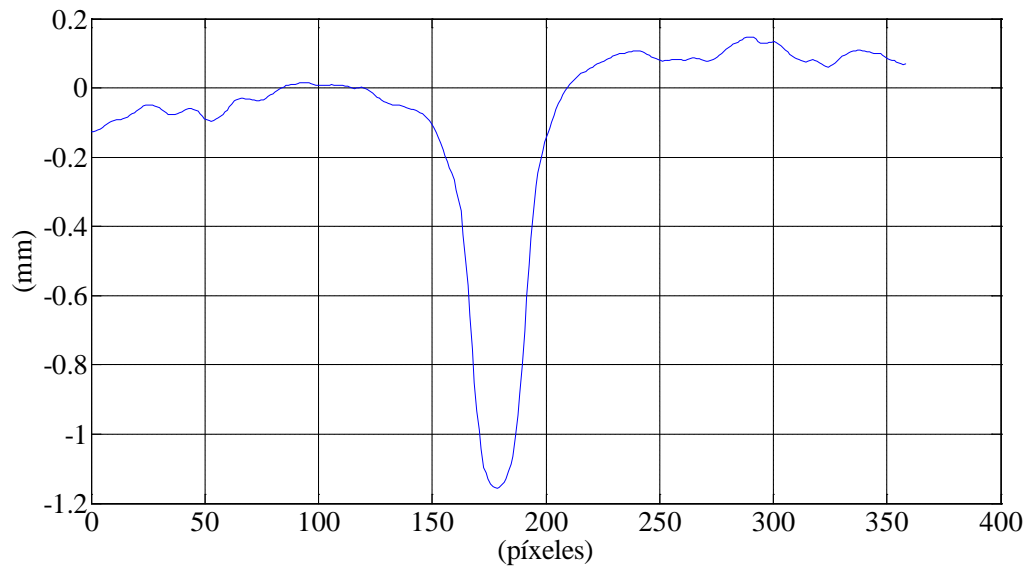


Figura 77. Corte realizado sobre el mapa de profundidades mostrado en la Figura 75. La línea número 1 de color negro muestra la región donde se realizó el corte.

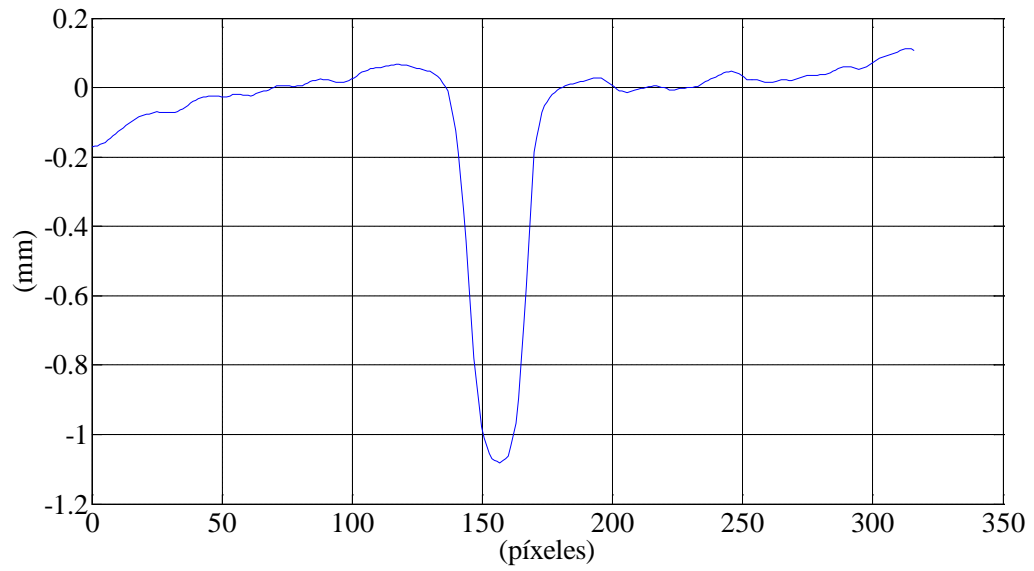


Figura 78. Corte realizado sobre el mapa de profundidad mostrado en la Figura 75. La línea número 2 de color negro muestra la región donde se realizó el corte.

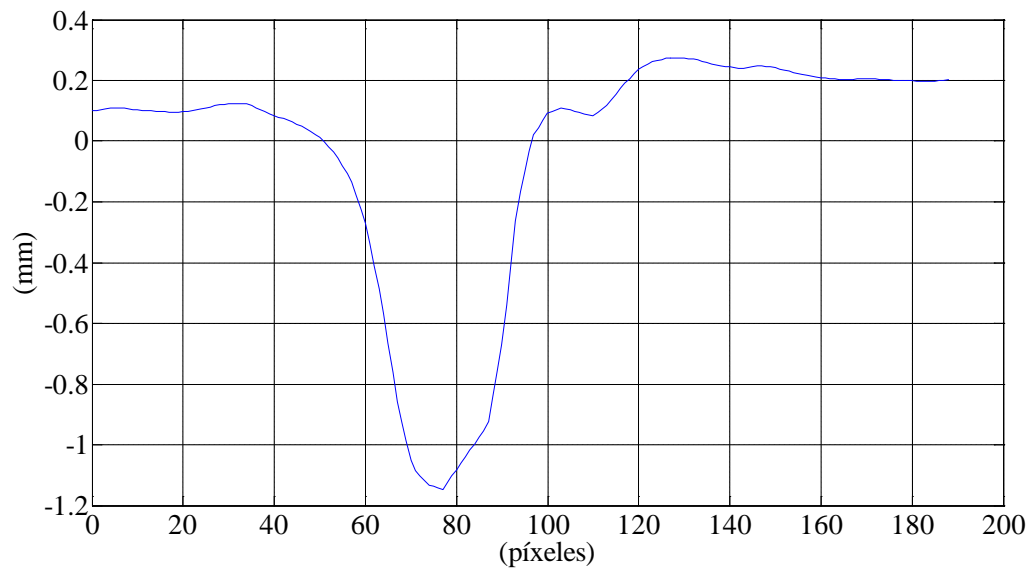


Figura 79. Corte realizado sobre el mapa de profundidad mostrado en la Figura 75. La línea número 3 de color negro muestra la región donde se realizó el corte.

4.5. Reconstrucción 3D de la tubería a 360° de observación

En esta sección se muestra cómo se puede extraer información 3D de la tubería a 360° de observación usando sólo el sistema de proyección-adquisición descrito anteriormente. Tal sistema permite reconstruir la región de la tubería que es iluminada por las franjas y adquirida por la cámara, por lo tanto, si se quiere obtener la reconstrucción de la misma a 360° de observación se debe efectuar un movimiento relativo entre el sistema de proyección-adquisición y el objeto a reconstruir, en este caso la tubería, con el propósito de obtener reconstrucciones 3D de diferentes secciones del mismo. Por cada reconstrucción se obtiene una nube de puntos con coordenadas, en unidades métricas, conocidas respecto al sistema coordenado de la cámara, el cual es independiente para cada adquisición. Con el fin de unificar nubes de datos correspondientes a adquisiciones consecutivas, se debe aplicar una transformación rígida, determinada por una matriz de rotación y un vector de traslación. Si \mathbf{X}' representa a un punto que pertenece a la primera nube de datos adquirida, con coordenadas (X'_C, Y'_C, Z'_C) conocidas respecto al primer sistema coordenado, y \mathbf{X} representa al mismo punto pero en la segunda nube de datos adquirida, con coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) conocidas respecto al segundo sistema coordenado, la transformación que permite ubicar el punto \mathbf{X} respecto al primer sistema coordenado, está dada por

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}_{21}\mathbf{X} + \mathbf{t}_{21}. \quad (1.204)$$

Al aplicar la transformación (1.204) a todos los puntos pertenecientes a la segunda nube de datos, es posible expresar la misma respecto al primer sistema coordenado.

El problema consiste en calcular la matriz de rotación \mathbf{R}_{21} y el vector de traslación \mathbf{t}_{21} . Estos se pueden determinar a partir del método de mínimos cuadrados [75,76] como se describe a continuación. Sean $\{\mathbf{X}'_i\}$ y $\{\mathbf{X}_i\}$ dos conjuntos de puntos correspondientes entre sí y pertenecientes a nubes de datos diferentes. A partir de (1.204) se tiene que

$$\mathbf{X}'_i = \mathbf{R}_{21}\mathbf{X}_i + \mathbf{t}_{21}. \quad (1.205)$$

Se desea determinar \mathbf{R}_{21} y \mathbf{t}_{21} que minimicen

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{X}'_i - (\mathbf{R}_{21} \mathbf{X}_i + \mathbf{t}_{21}) \right\|^2. \quad (1.206)$$

Se ha demostrado en [77] que si la solución a (1.205) está dada por $\hat{\mathbf{R}}_{21}$ y $\hat{\mathbf{t}}_{21}$, entonces $\{\mathbf{X}'_i\}$ y $\{\mathbf{X}''_i = \hat{\mathbf{R}}_{21} \mathbf{X}_i + \hat{\mathbf{t}}_{21}\}$ tienen el mismo baricentro, es decir

$$\mathbf{X}'_b = \mathbf{X}''_b, \quad (1.207)$$

donde

$$\mathbf{X}'_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}'_i, \quad (1.208)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}''_b &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}''_i \\ &= \hat{\mathbf{R}}_{21} \mathbf{X}_b + \hat{\mathbf{t}}_{21}, \end{aligned} \quad (1.209)$$

con

$$\mathbf{X}_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i. \quad (1.210)$$

Sean

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_b, \quad (1.211)$$

$$\mathbf{Y}'_i = \mathbf{X}'_i - \mathbf{X}'_b. \quad (1.212)$$

A partir de (1.206), (1.211) y (1.212) se tiene que

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{Y}'_i - \mathbf{R}_{21} \mathbf{Y}_i\|^2. \quad (1.213)$$

Por lo tanto el problema original se reduce a dos partes

- (i) Encontrar $\hat{\mathbf{R}}_{21}$ para minimizar Σ^2 en (1.213).
- (ii) Luego, el vector de traslación se puede encontrar a partir de

$$\hat{\mathbf{t}}_{21} = \mathbf{X}'_b - \hat{\mathbf{R}}_{21} \mathbf{X}_b. \quad (1.214)$$

Ahora bien, la matriz $\hat{\mathbf{R}}_{21}$ se puede determinar a partir del siguiente algoritmo [76].

Paso 1: A partir de $\{\mathbf{X}'_i\}$ y $\{\mathbf{X}_i\}$ calcule \mathbf{X}'_b y \mathbf{X}_b , luego calcule $\{\mathbf{Y}'_i\}$ y $\{\mathbf{Y}_i\}$.

Paso 2: Calcule la matriz de 3×3

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i (\mathbf{Y}'_i)^T. \quad (1.215)$$

Paso 3: Determine la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T. \quad (1.216)$$

Paso 4: Calcule

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T = \hat{\mathbf{R}}. \quad (1.217)$$

El procedimiento descrito anteriormente indica que es posible determinar la transformación, que permite empalmar nubes de datos consecutivas, a partir de un conjunto de puntos correspondientes. En nuestro caso, debido a la uniformidad de la superficie de la tubería se hace tedioso establecer puntos correspondientes a partir del análisis de sus curvaturas. Por tal motivo se adhieren figuras geométricas a la superficie de la misma, a partir de un procesamiento digital de imágenes se pueden determinar las coordenadas 3D de los baricentros de tales figuras. Estos baricentros permiten construir las correspondencias mencionadas.

El objetivo consiste en obtener la reconstrucción 3D de la superficie de la tubería con las figuras geométricas adheridas. De esta manera, la nube de datos se puede segmentar en puntos que pertenecen al objeto y puntos que pertenecen a la figura geométrica. De igual manera las figuras son fácilmente identificables, lo que implica que se pueden calcular los baricentros de cada una de estas. El desplazamiento relativo entre el sistema de proyección-adquisición y la superficie de la tubería se efectúa de tal manera que al menos tres figuras geométricas sean comunes a dos nubes de datos consecutivas. En nuestro caso se garantiza que siempre hay cuatro figuras comunes a secciones consecutivas.

Con el propósito de segmentar los puntos que pertenecen a las figuras geométricas y así calcular sus respectivos baricentros, se usa la ecuación (1.7) para calcular el contraste de las franjas proyectadas sobre la superficie de la tubería, este tendrá valores específicos y fáciles de identificar sobre los puntos de las figuras adheridas debido a la reflectancia de las mismas, que es diferente a la de la superficie de la tubería. En la Figura 80 se muestra la primera nube de datos adquirida, los asteriscos de colores muestran las posiciones de los baricentros de las figuras geométricas que son comunes a la segunda nube de datos adquirida. La Figura 81 muestra una ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 80.

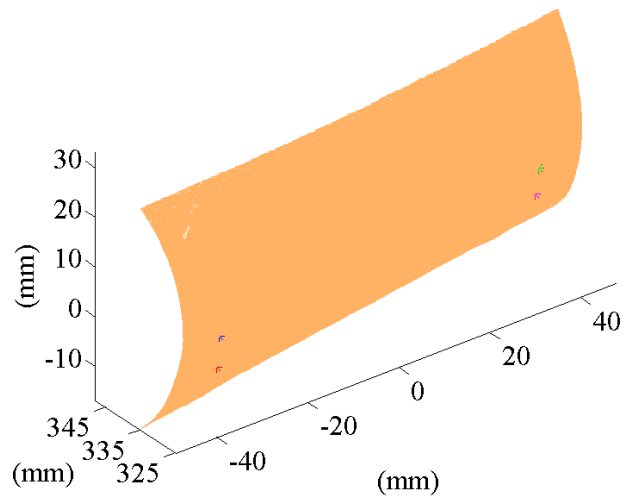


Figura 80. Primera nube de datos adquirida.

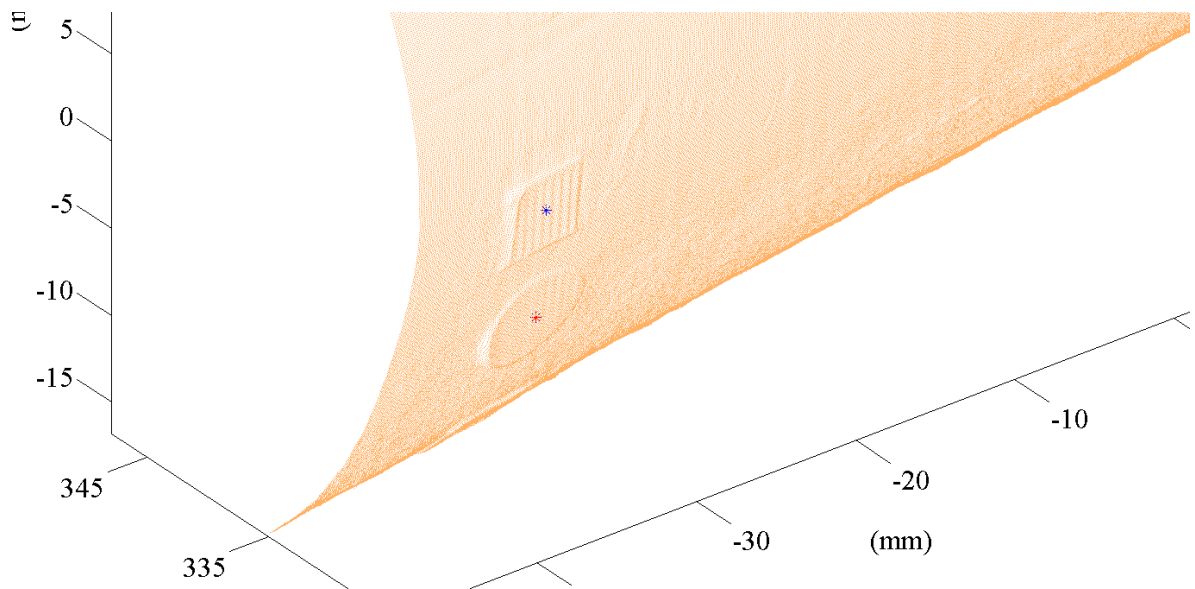


Figura 81. Ampliación de la nube de datos de la Figura 80.

En la Figura 82 se muestra la segunda nube de datos adquirida, otra vez, los asteriscos muestran las posiciones de los baricentros de las figuras geométricas que son comunes a la primera nube de datos adquirida. En la Figura 83 se muestra una ampliación a la nube de datos de la Figura 82.

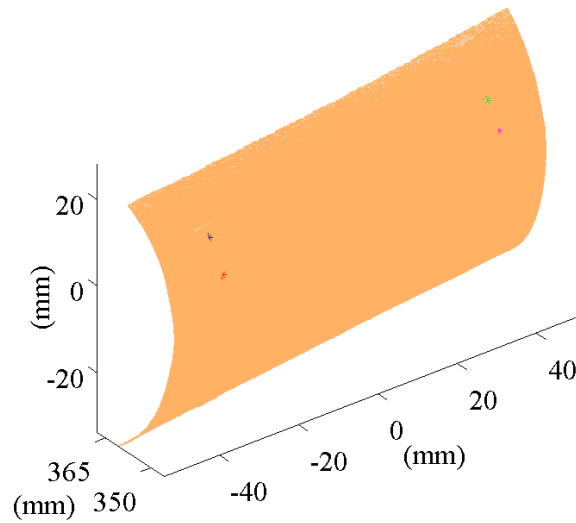


Figura 82. Segunda nube de datos adquirida.

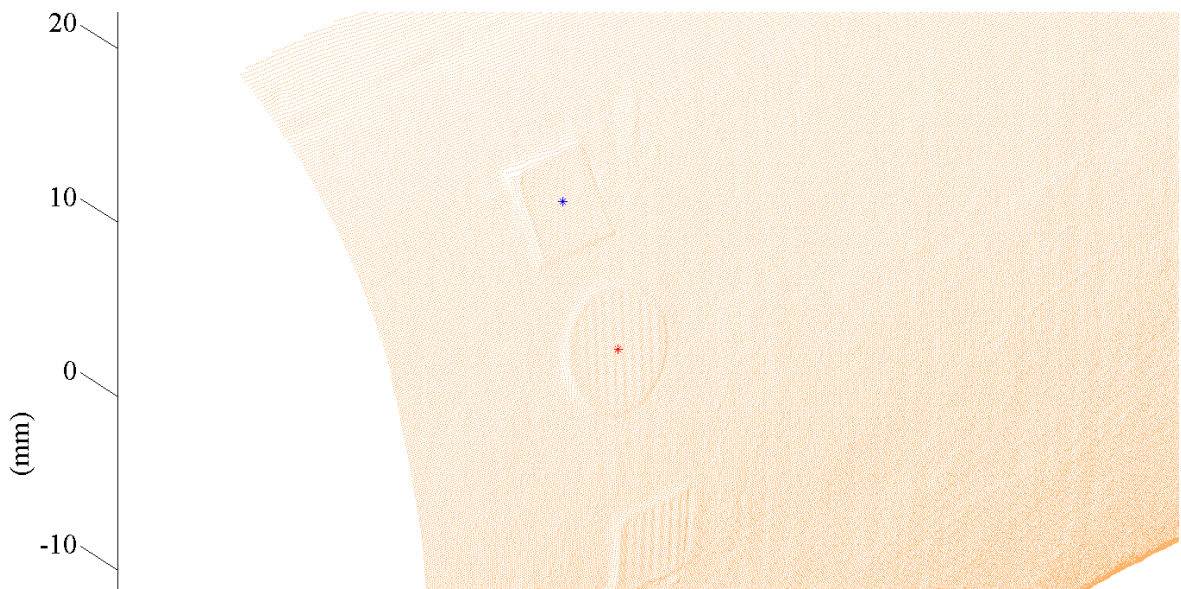


Figura 83. Ampliación a la nube de datos de la Figura 82.

A partir de las cuatro correspondencias, establecidas por los baricentros de las cuatro figuras geométricas comunes a las dos nubes de puntos, y por medio del procedimiento descrito anteriormente, se calcularon la matriz de rotación \mathbf{R}_{21} y el vector de traslación \mathbf{t}_{21} que permiten empalmar las dos nubes de puntos. Estos están dados por

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} 0.9990 & -0.0256 & -0.0355 \\ -0.0028 & 0.7717 & -0.6360 \\ 0.0437 & 0.6355 & 0.7709 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{21} = \begin{pmatrix} 12.2986 \\ 231.0248 \\ 65.7527 \end{pmatrix}. \quad (1.218)$$

La Figura 84 muestra el empalme de las dos primeras nubes de datos adquiridas. La Figura 85 muestra una ampliación de las nubes de datos mostradas en la Figura 84. En la Figura 85 se puede apreciar la superposición de dos de las cuatro figuras comunes a las dos nubes de puntos, además se muestran con cruces de color azul los baricentros de las dos figuras que pertenecen a la primera nube de puntos, mientras que los asteriscos de color negro muestran las posiciones de los baricentros de las dos figuras de la segunda nube de puntos, después de aplicar la transformación dada por (1.218). Con el propósito de cuantificar el error que se introduce al aplicar la transformación, se calcularon las distancias entre los baricentros, las cuales en teoría deben ser iguales a cero.

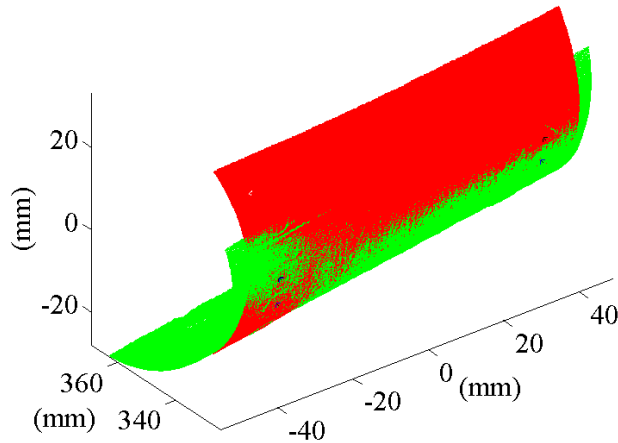


Figura 84. Superposición de las dos primeras nubes de datos adquiridas.

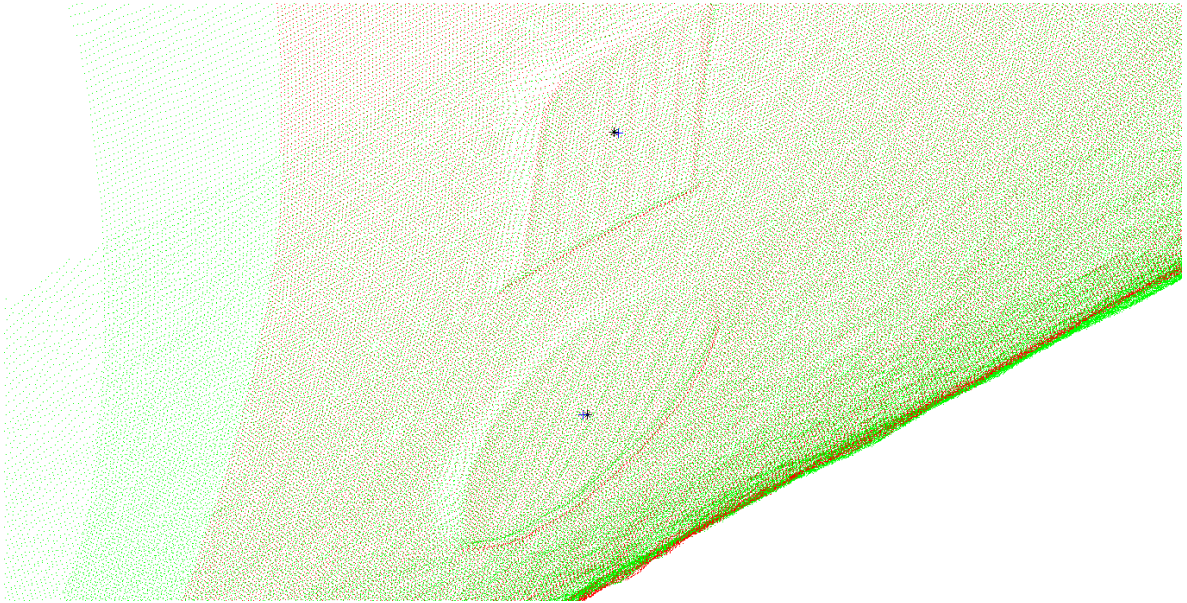


Figura 85. Ampliación de las nubes de datos mostradas en la Figura 84.

Los resultados que permiten cuantificar el error se muestran a continuación:

$$d_1 = 0.0900 \text{ mm}, \quad (1.219)$$

$$d_2 = 0.0970 \text{ mm}, \quad (1.220)$$

$$d_3 = 0.0837 \text{ mm}, \quad (1.221)$$

$$d_4 = 0.0893 \text{ mm}, \quad (1.222)$$

$$\Sigma^2 = 0.1296 \text{ mm}^2. \quad (1.223)$$

Con el propósito de obtener la reconstrucción 3D a 360° de observación se adquirieron en total ocho nubes de puntos. La Figura 86 muestra la superposición de las ocho nubes de puntos. Las matrices de rotación y los vectores de traslación que definen cada una de las

transformaciones se muestran en (1.224)-(1.229). En la Tabla 5 se muestran las distancias entre baricentros para cada una de las transformaciones.

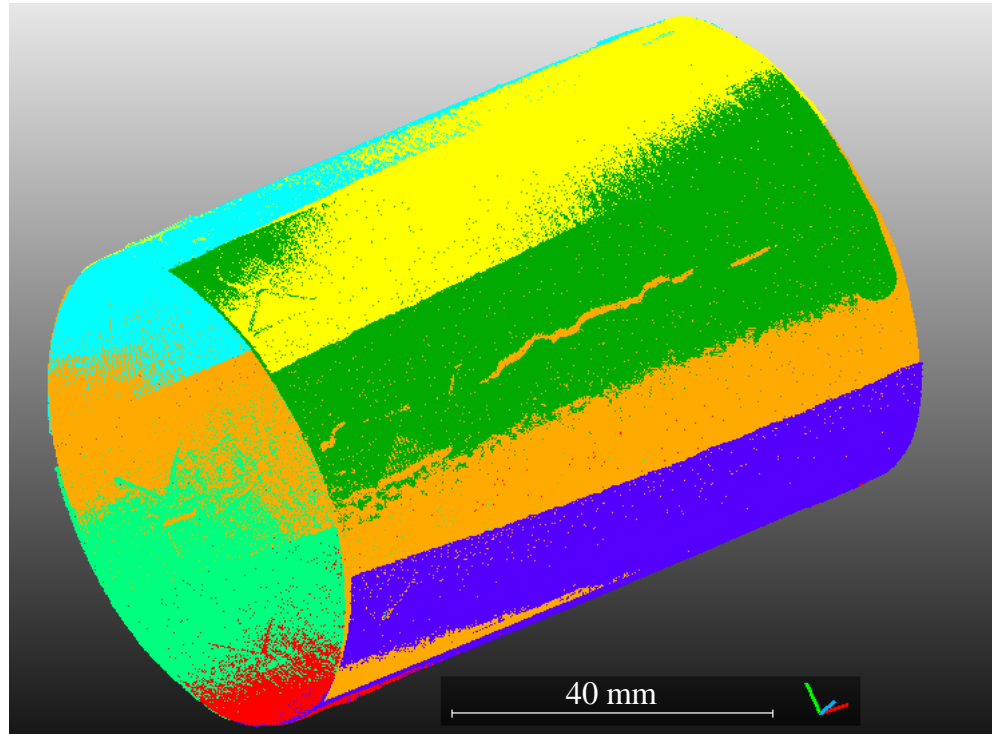


Figura 86. Reconstrucción 3D de la tubería a 360° de observación.

$$\mathbf{R}_{32} = \begin{bmatrix} 0.9999 & -0.0131 & 0.0054 \\ 0.0132 & 0.7250 & -0.6887 \\ 0.0051 & 0.6887 & 0.7251 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{32} = \begin{pmatrix} -4.2885 \\ 243.8850 \\ 101.2922 \end{pmatrix}, \quad (1.224)$$

$$\mathbf{R}_{43} = \begin{bmatrix} 0.9985 & 0.0166 & 0.0515 \\ 0.0253 & 0.6976 & -0.7161 \\ -0.0478 & 0.7163 & 0.6961 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{43} = \begin{pmatrix} -11.9931 \\ 270.4825 \\ 117.9443 \end{pmatrix}, \quad (1.225)$$

$$\mathbf{R}_{54} = \begin{bmatrix} 0.9991 & -0.0434 & 0.0009 \\ 0.0346 & 0.7838 & -0.6200 \\ 0.0262 & 0.6194 & 0.7846 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{54} = \begin{pmatrix} -3.0265 \\ 210.2850 \\ 84.0579 \end{pmatrix}, \quad (1.226)$$

$$\mathbf{R}_{65} = \begin{bmatrix} 0.9990 & -0.0434 & 0.0141 \\ 0.0387 & 0.6496 & -0.7593 \\ 0.0236 & 0.7590 & 0.6506 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{65} = \begin{pmatrix} -7.1753 \\ 253.6755 \\ 132.6500 \end{pmatrix}, \quad (1.227)$$

$$\mathbf{R}_{76} = \begin{bmatrix} 0.9983 & -0.0559 & -0.0180 \\ 0.0197 & 0.6075 & -0.7941 \\ 0.0553 & 0.7924 & 0.6075 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{76} = \begin{pmatrix} 5.2525 \\ 278.0042 \\ 113.6989 \end{pmatrix}, \quad (1.228)$$

$$\mathbf{R}_{87} = \begin{bmatrix} 0.9998 & -0.0045 & 0.0184 \\ 0.0152 & 0.7685 & -0.6397 \\ -0.0112 & 0.6398 & 0.7684 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{87} = \begin{pmatrix} -3.5579 \\ 238.7682 \\ 74.9898 \end{pmatrix}. \quad (1.229)$$

Transformación	d_1 (mm)	d_2 (mm)	d_3 (mm)	d_4 (mm)	Σ^2 (mm ²)
1	0.090	0.097	0.083	0.089	0.129
2	0.147	0.070	0.070	0.094	0.146
3	0.184	0.098	0.078	0.142	0.254
4	0.267	0.241	0.430	0.298	1.533
5	0.142	0.263	0.133	0.335	0.763
6	0.086	0.114	0.207	0.199	0.369
7	0.074	0.178	0.176	0.080	0.261

Tabla 5. Distancias entre baricentros para cada una de las transformaciones.

4.6. Evaluación metrológica del sistema de reconstrucción

Con el propósito de evaluar la resolución y la precisión del sistema de proyección-adquisición utilizado para digitalizar la superficie de la tubería, se reconstruyó un objeto plano, el cual se ubicó sobre un sistema de traslación con resolución de 10 micras y que permitió situar el mismo en diferentes posiciones a lo largo del eje Z_C de la cámara. En total se realizaron 21 reconstrucciones del plano desplazándolo 100 micras entre cada reconstrucción. La idea consiste en verificar si el sistema de reconstrucción es capaz de resolver tales desplazamientos. Para esto, se determinan las ecuaciones de los planos asociados a cada una de las nubes de datos obtenidas, a partir de tales ecuaciones es posible calcu-

lar la distancia más cercana entre puntos de una nube específica y el plano asociado a la primer nube de datos adquirida.

La ecuación del plano que se ajusta a una nube de puntos específica está dada por

$$aX_c + bY_c + cZ_c + d = 0. \quad (1.230)$$

Sea $\{\mathbf{X}_i\}$ el conjunto de puntos que pertenecen a la nube, los parámetros (a, b, c, d) se pueden determinar resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}. \quad (1.231)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ X_k & Y_k & Z_k & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = (a, b, c, d)^T. \quad (1.232)$$

Los elementos del vector \mathbf{X} se pueden determinar a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{A} , tal descomposición está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^T. \quad (1.233)$$

La última columna de la matriz \mathbf{V} de la ecuación (1.233) contiene los elementos del vector \mathbf{X} . En la Figura 87 se muestra la nube de datos correspondiente al primer plano reconstruido. En la Figura 88 se muestra un conjunto de puntos correspondiente al primer plano interpolado, cuyo ecuación está dada por

$$4.7765 \times 10^{-4} X_c + 1.1043 \times 10^{-4} Y_c - 0.0029 Z_c + 1 = 0. \quad (1.234)$$

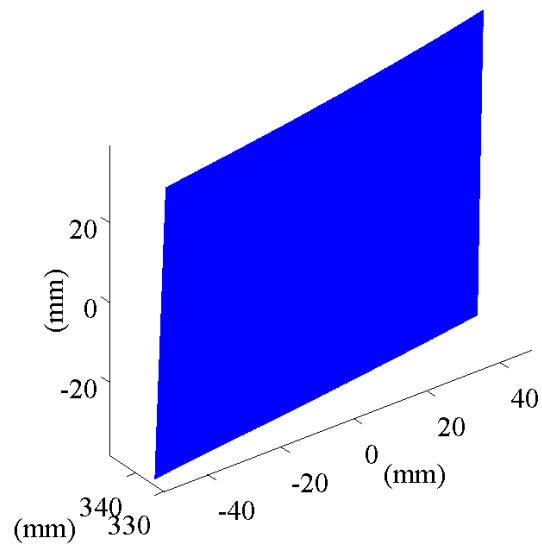


Figura 87. Nube de puntos correspondiente al primer plano reconstruido.

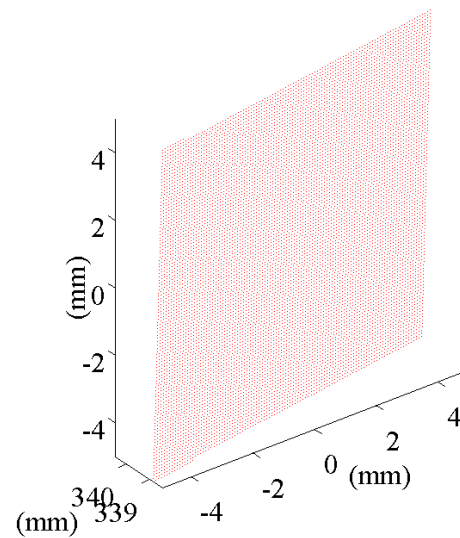


Figura 88. Conjunto de puntos correspondiente al primer plano interpolado.

En la Figura 89 se muestra un conjunto de puntos correspondiente al segundo plano interpolado, el cual en teoría se ha desplazado 100 micras respecto al primer plano. La ecuación del segundo plano interpolado está dada por

$$4.7787 \times 10^{-4} X_C + 1.1158 \times 10^{-4} Y_C - 0.0029 Z_C + 1 = 0. \quad (1.235)$$

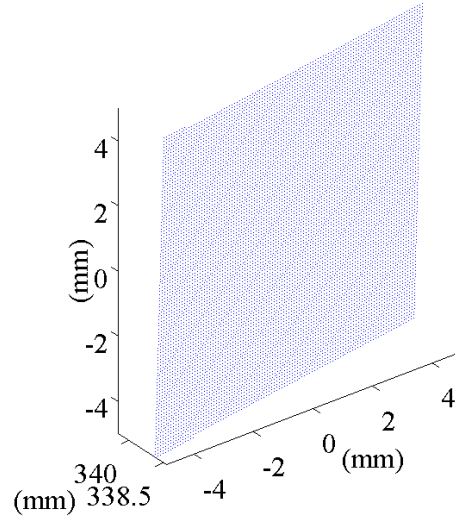


Figura 89. Conjunto de puntos correspondiente al segundo plano interpolado.

Teniendo en cuenta que la distancia más cercana de un punto a un plano está dada por

$$d(\mathbf{X}, \pi) = \frac{|aX_0 + bY_0 + cZ_0 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (1.236)$$

donde $\mathbf{X} = (X_0, Y_0, Z_0)$ es el punto y π es el plano, se calculó la distancia más cercana entre cada punto del segundo plano interpolado y el primer plano interpolado. El valor promedio de tales distancias está dado por

$$\bar{d}(\{\mathbf{X}_2\}, \pi_1) = 109.6 \text{ micras}, \quad (1.237)$$

donde $\{\mathbf{X}_2\}$ representa el conjunto de puntos pertenecientes al segundo plano interpolado y π_1 el primer plano interpolado.

La Figura 90 muestra todos los planos interpolados, los puntos de color rojo pertenecen al primer plano interpolado.

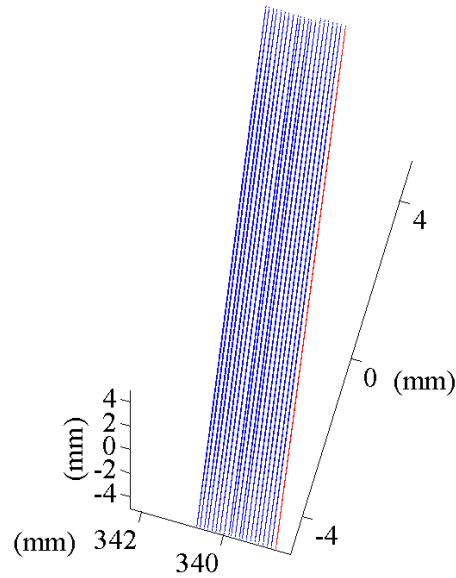


Figura 90. Planos interpolados.

La Figura 91 muestra los desplazamientos experimentales, medidos por el sistema de reconstrucción, contra los desplazamientos teóricos, introducidos por el sistema de traslación. En la Tabla 6 se muestran las mediciones obtenidas con el sistema de reconstrucción junto con sus respectivas desviaciones estándar.

Por último, con el objetivo de verificar si los planos reconstruidos son paralelos entre sí se calculó el ángulo entre vectores normales a los mismos, el cual en teoría debe ser igual a cero. Tal ángulo se calculó de la siguiente manera. Si la ecuación del plano que se ajusta a la primera nube datos está dada por (1.230) donde

$$\mathbf{N}_1 = (a, b, c)^T, \quad (1.238)$$

es un vector normal al mismo y la ecuación del plano i -ésimo reconstruido π_i está dada por

$$e_i X_C + f_i Y_C + g_i Z_C + h_i = 0, \quad (1.239)$$

donde

$$\mathbf{N}_i = (e_i, f_i, g_i)^T, \quad (1.240)$$

es un vector normal al plano i -ésimo π_i , el ángulo entre los vectores normales estará dado por

$$\theta(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_i) = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_i}{\|\mathbf{N}_1\| \|\mathbf{N}_i\|} \right). \quad (1.241)$$

Los ángulos entre los planos reconstruidos también se muestran en la Tabla 6 e indican que efectivamente los planos reconstruidos son paralelos entre sí.

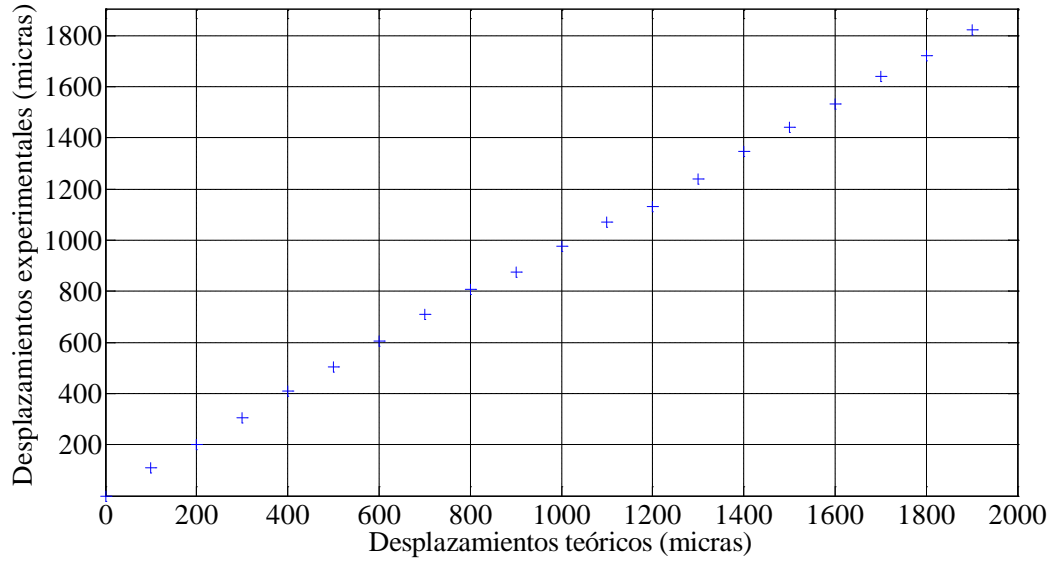


Figura 91. Desplazamientos experimentales contra desplazamientos teóricos.

$\Delta_{teó} \pm \delta_{teó} (\mu m)$	$\Delta_{exp} \pm \delta_{exp} (\mu m)$	Error($\Delta_{exp}, \Delta_{teó}$)	$\theta(N_1, N_i) (^\circ)$
100±10	109.6±1.8	9.63%	0.034
200±10	202.3±1.5	1.15%	0.028
300±10	306.5±1.9	2.18%	0.039
400±10	409.6±1.9	2.41%	0.038
500±10	504.3±1.9	0.87%	0.038
600±10	605.5±2.3	0.92%	0.047
700±10	709.5±2.5	1.36%	0.050
800±10	809.4±2.2	1.18%	0.045
900±10	874.8±2.8	2.79%	0.056
1000±10	976.8±3.1	2.31%	0.060
1100±10	1072.3±2.8	2.51%	0.056
1200±10	1132.4±2.6	5.62%	0.052
1300±10	1240.9±2.9	4.53%	0.057
1400±10	1346.4±3.3	3.82%	0.064
1500±10	1443.1±3.5	3.76%	0.070
1600±10	1534.6±3.9	4.08%	0.077
1700±10	1641.6±4.2	3.43%	0.083
1800±10	1720.8±4.5	4.39%	0.089
1900±10	1824.7±4.7	3.95%	0.092
2000±10	1902.4±4.6	4.87%	0.091

Tabla 6. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales de los planos reconstruidos.

Los resultados mostrados en la Tabla 6 indican que el sistema utilizado para reconstruir la superficie de la tubería puede medir variaciones topográficas del orden de 100 micras con un error máximo de ± 4.7 micras.

Capítulo 5

Reconstrucción 3D a 360° de observación usando múltiples sistemas de proyección-adquisición

A finales del siglo XX aparecieron en el mercado los primeros escáneres 3D de cuerpo entero [78]. Estos sistemas eran generalmente bastante voluminosos, costosos (varios cientos de miles de dólares) y tenían resoluciones milimétricas. La tecnología ha mejorado en la última década lo que ha permitido el desarrollo de sistemas con mayores resoluciones, más compactos y económicos. González [51] hace una revisión de cómo han evolucionado los sistemas de reconstrucción 3D que son utilizados con fines antropométricos. En la actualidad existen diferentes escáneres 3D que utilizan diversas técnicas con el propósito de digitalizar regiones del cuerpo humano. Las principales técnicas implementadas incluyen triangulación láser lineal, módulos de luz estructurada, sistemas formados por dos o más cámaras y ondas milimétricas, principalmente [79]. Aunque un sistema que se basa en la técnica de triangulación láser lineal, es en esencia un módulo de luz estructurada, en este caso se asume que no lo es debido a que no es tan rápido como aquellos que proyectan un patrón de luz que cubre toda la superficie del objeto a reconstruir.

Como se mencionó en el **Capítulo 1** un módulo de luz estructurada proyecta un patrón de luz sobre el objeto a digitalizar, a partir de la deformación del patrón es posible obtener las coordenadas 3D de los puntos de la superficie del objeto. Este patrón puede estar formado por puntos, franjas, o cualquier otro patrón de luz. La ventaja de los módulos de luz estructurada es su rapidez, motivo por el cual los sistemas formados por estos son usados como dispositivos manuales de reconstrucción 3D. Con el propósito de evitar la interferencia entre los patrones proyectados, los sistemas formados por más de un módulo de luz estructu-

rada no operan en paralelo sino que operan en serie. Sin embargo tales sistemas son tan rápidos que pueden ser utilizados para realizar escaneos en tiempo real a 200 Hz.

Un escáner de luz estructurada por lo general está formado por un proyector, usado para proyectar el patrón, una cámara digital, la cual es utilizada para adquirir el patrón deformado, y una cámara RGB adicional para registrar el color real de la escena o del objeto a digitalizar. El patrón de luz proyectado puede estar formado por múltiples colores, sin embargo aquellos que se proyectan en niveles de gris, o cerca al infrarrojo son los más utilizados.

Daanen et al. [79] hacen una revisión de los principales sistemas de reconstrucción 3D que se encuentran en el mercado; sus resoluciones y costos son variados. Entre estos se destacan los desarrollados por la compañía Artec con sede en China (www.artec3d.com), que ofrece sistemas que se pueden combinar con el propósito de obtener la digitalización a 360° de observación del torso humano; y la compañía 4D-Dynamics (www.4ddynamics.com) con sede en Bélgica, la cual ofrece sistemas que se pueden combinar con el objetivo de obtener la reconstrucción 3D y a 360° de observación del cuerpo humano en su totalidad. Las principales aplicaciones de tales sistemas se encuentran en la medicina y en la industria del entretenimiento.

La introducción del Kinect hace un par de años dio un nuevo impulso a los escáneres 3D. Kinect es un módulo de luz estructurada que usa un patrón de luz cercano al infrarrojo, el cual es invisible para el ojo humano pero no para su sensor. Éste, adicionalmente posee una cámara RGB que registra el color real del objeto a reconstruir, el cual puede ser adicionado a la digitalización 3D final. El Kinect es un sistema bastante robusto para su precio, su primera versión se puede adquirir por un costo que no supera los 110 US\$; con este se pueden obtener reconstrucciones 3D en tiempo real, sin embargo su desventaja radica en que su resolución no es muy alta. Diversas publicaciones han mostrado que el Kinect puede ser usado como un escáner 3D del cuerpo humano [80,81]. La resolución que se obtiene es cercana a 5 mm usando cuatro sistemas Kinect [81].

Por otra parte, en el campo de la medicina estética se han desarrollado una serie de procedimientos terapéuticos no invasivos para moldear el cuerpo humano, tales como la Mesoterapia, la Terapia de Vacío y la Hidrolipoclasia, entre otras [51], las cuales usan dispositivos moldeadores de alta tecnología que permiten obtener resultados estéticos que son demos-

trados cualitativamente. Muchos autores concluyen que aunque los resultados son demostrados cualitativamente, no existen metodologías apropiadas que verifiquen cuantitativamente y localmente, las variaciones del volumen a partir de mediciones precisas. Como consecuencia de esta problemática, las compañías que manufacturan este tipo de sistemas, restringen su participación en el mercado y reducen la competitividad de sus productos.

En el presente capítulo se muestra el desarrollo de un sistema que permite digitalizar el torso humano a 360° de observación, con el objetivo de evaluar la efectividad de los procedimientos terapéuticos mencionados anteriormente. Aunque el sistema se ha desarrollado con el propósito de solucionar la problemática planteada anteriormente, cabe resaltar que esta no sería su única posible aplicación.

El sistema está formado por cuatro sistemas de proyección-observación y al igual que el sistema mostrado en el **Capítulo 3** se basa en la técnica de proyección de franjas y en el algoritmo de corrimiento de fase a cuatro imágenes. El sistema mostrado aquí es similar al desarrollado en [51], pero usa cuatro sistemas de proyección-adquisición en vez de cinco. El procedimiento de calibración, que se implementa para determinar las transformaciones que permiten ubicar todas las nubes de puntos adquiridas respecto a un único sistema coordenado, usa el mismo objeto de control pero difiere de la metodología propuesta en [51].

5.1. Resultados experimentales

El sistema de reconstrucción 3D que se implementó está formado por cuatro módulos de proyección-adquisición, los cuales fueron calibrados siguiendo el procedimiento descrito en el **Capítulo 2**. Cada sistema está formado por una cámara CMOS de la marca Edmund Optics, referencia EO-2013C, a color y resolución 1600 píxeles \times 1200 píxeles con lente de 8.5 mm de la marca Edmund Optics y referencia 58000, y un proyector DELL referencia M210X, con brillo de 2000 lúmenes y resolución XGA (1024 \times 768). Para controlar cada sistema de proyección-adquisición, así como para procesar las imágenes adquiridas, se utilizó un computador portátil SONY VAIO VPCEG30EL con procesador intel CORE i3 y 4 GB de memoria RAM. Los cuatro sistemas se ubicaron de tal manera que circunscriben un cuadrado de aproximadamente 2 m de lado, ver Figura 92.

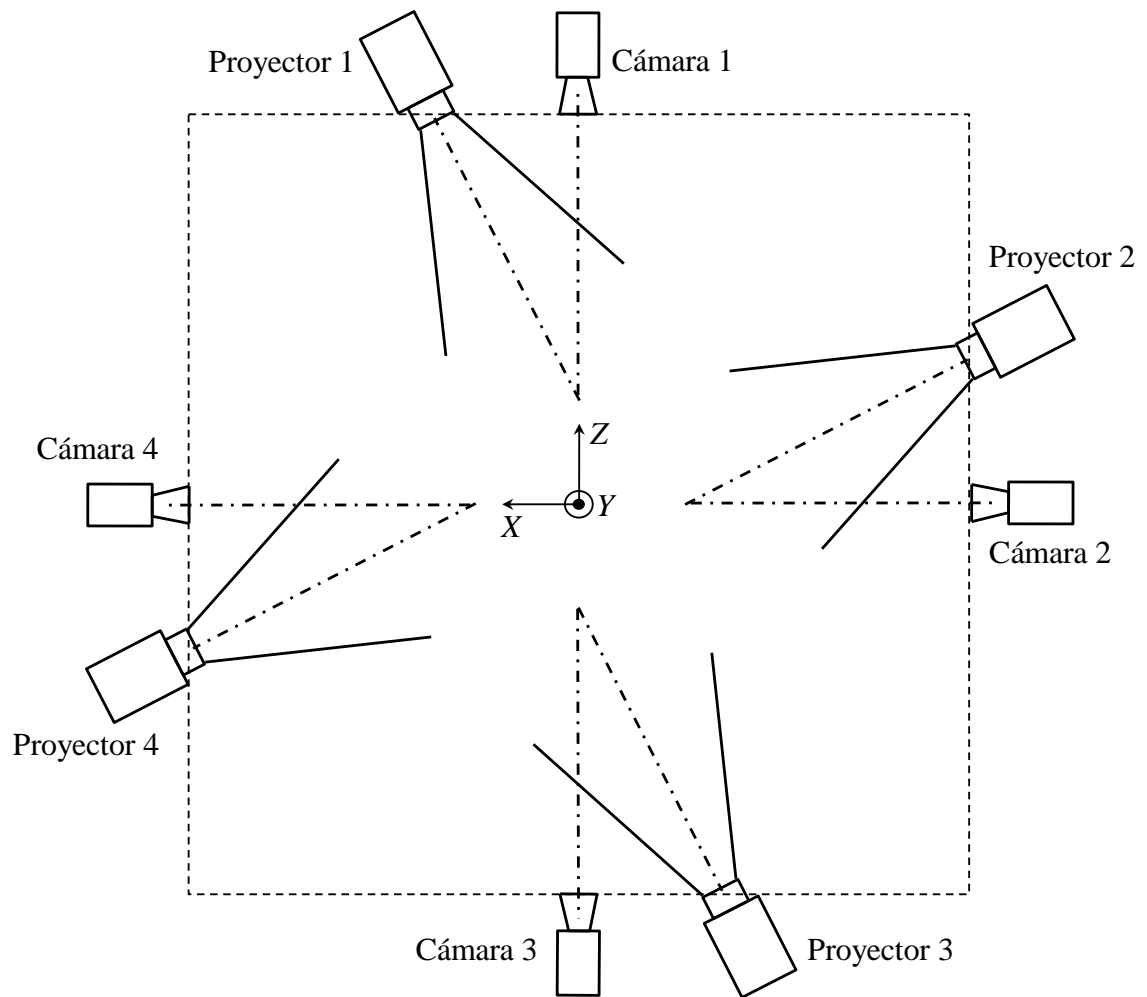


Figura 92. Vista superior del montaje experimental implementado.

5.2. Estrategia propuesta para unificar las nubes de puntos adquiridas por cada sistema de reconstrucción

En esta sección se muestra cómo se pueden unificar las cuatro nubes de puntos adquiridas por cada uno de los sistemas de reconstrucción. La técnica implementada es muy similar a la que se mostró en el capítulo anterior, sin embargo, en este caso se utiliza un paralelepípedo, con figuras geométricas adheridas a cada una de sus caras, como objeto de control, ver Figura 93.

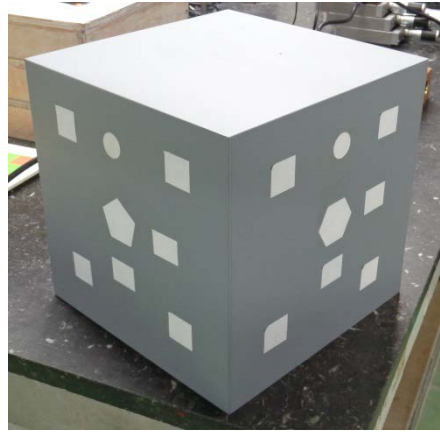


Figura 93. Objeto de control.

La reconstrucción 3D del objeto de control permite determinar las transformaciones que se implementan para unificar las cuatro nubes de datos en un sólo sistema coordinado, que en este caso corresponde al sistema coordinado de la cámara del primer sistema. La idea consiste en ubicar el objeto de control, en el espacio de trabajo, de tal manera que cada sistema reconstruya dos caras del mismo, garantizando que cada cara sea común a dos sistemas de observación. Cada cara contiene al menos cuatro figuras geométricas, lo que implica que al menos cuatro figuras geométricas son comunes a dos de los sistemas. Cada sistema reconstruye la región del paralelepípedo que es iluminada por las franjas que este proyecta y que es observada por su respectiva cámara. Mediante un procesamiento digital de imágenes es posible calcular las coordenadas 3D de los baricentros de las figuras geométricas comunes a dos sistemas consecutivos. Si se conocen las coordenadas 3D de estos baricentros respecto a los sistemas coordinados de cámaras consecutivas, es posible determinar la matriz de rotación y el vector de traslación que unifican nubes de datos pertenecientes a los mismos, de una manera similar a la descrita en el capítulo anterior. Después de realizar el mismo procedimiento con los cuatro sistemas, se obtienen las tres transformaciones que unifican todas las nubes de puntos. Ahora bien, debido a que en este caso los cuatro sistemas permanecen fijos, una vez determinadas las tres transformaciones es posible obtener la reconstrucción 3D a 360° de observación de cualquier objeto que se ubique en el espacio de trabajo del sistema.

La Figura 94 muestra la nube de puntos correspondiente a las dos caras reconstruidas por el primer sistema, los asteriscos de color rojo corresponden a los baricentros de las figuras adheridas usadas como referencia. Los asteriscos de la cara de la izquierda muestran los baricentros de las figuras que son comunes al cuarto sistema, mientras que los asteriscos de la cara de la derecha muestran los baricentros de las figuras que son comunes al segundo sistema. La Figura 95 muestra una ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 94. En la Figura 96 se muestra la nube de datos adquirida por el segundo sistema, otra vez, los asteriscos de color rojo muestran las posiciones de los baricentros de las figuras adheridas como referencia. Los asteriscos de la cara de la izquierda muestran los baricentros de las figuras que son comunes al primer sistema, mientras que los asteriscos de la cara de la derecha muestran los baricentros de las figuras que son comunes al tercer sistema. La Figura 97 muestra una ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 96.

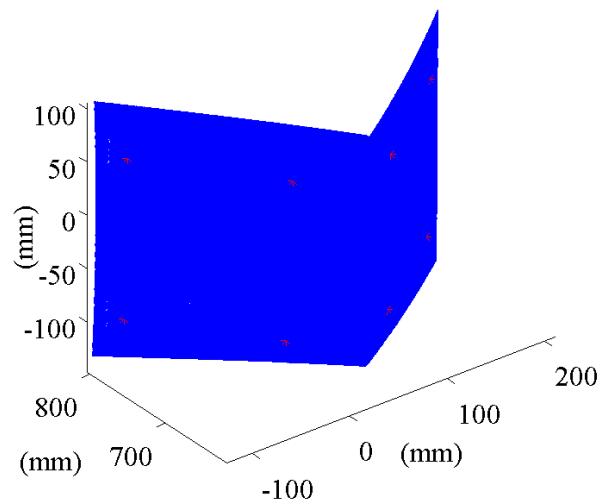


Figura 94. Nube de datos correspondiente al primer sistema.



Figura 95. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 94.

A partir de las correspondencias, establecidas por los baricentros de las cuatro figuras geométricas comunes a las dos nubes de puntos, y por medio del procedimiento descrito en el capítulo anterior, se calcularon la matriz de rotación y el vector de traslación que permiten empalmar las dos nubes de puntos. Estos están dados por

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} 0.0439 & -0.0089 & -0.9990 \\ 0.0254 & 0.9996 & -0.0078 \\ 0.9987 & -0.0250 & 0.0441 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{21} = \begin{pmatrix} 889.7698 \\ 37.6280 \\ 767.8645 \end{pmatrix}. \quad (1.242)$$

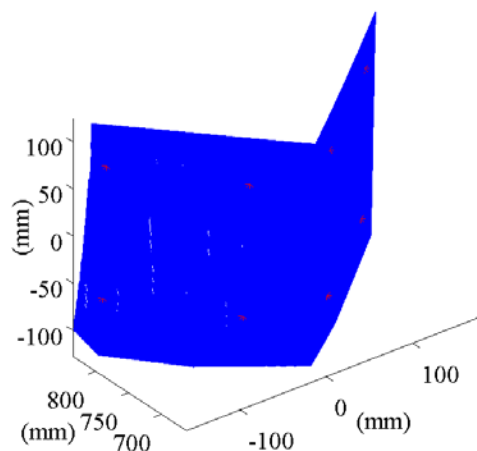


Figura 96. Nube de datos correspondiente al segundo sistema.

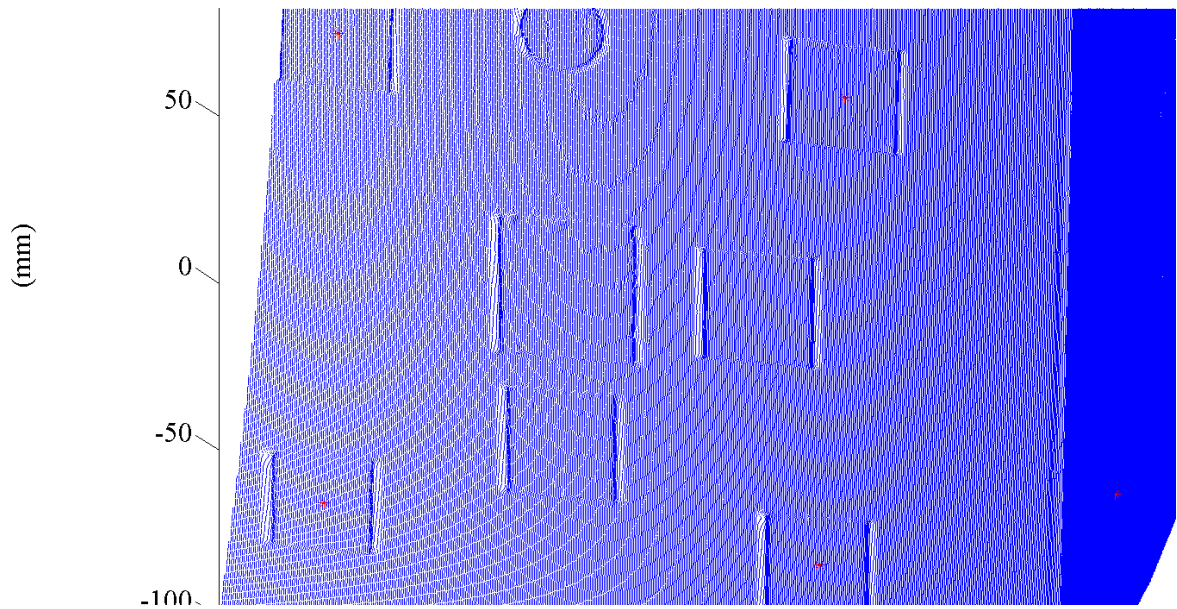


Figura 97. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 96.

La Figura 98 muestra el empalme de las dos primeras nubes de datos. La Figura 99 muestra una ampliación a la nube de datos de la Figura 98.

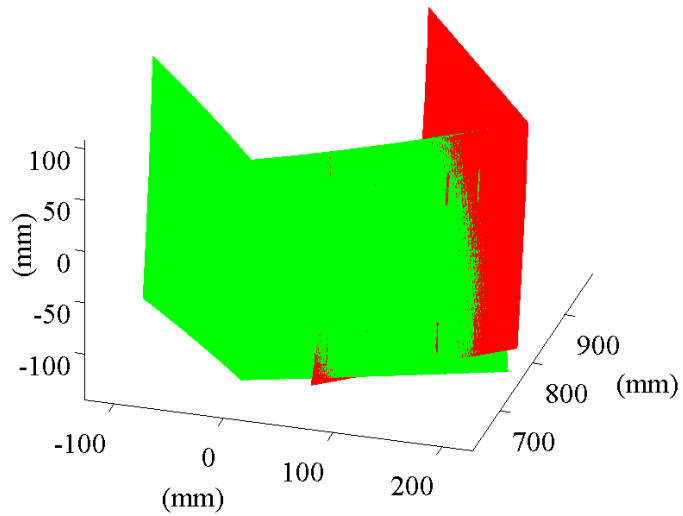


Figura 98. Empalme de las dos primeras nubes de datos adquiridas.

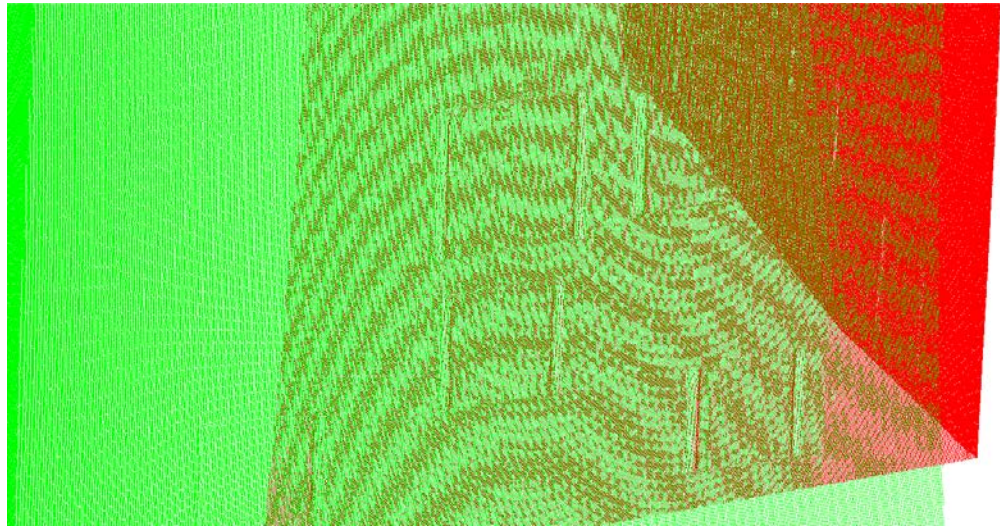


Figura 99. Ampliación de las nubes de datos mostradas en la Figura 98.

La Figura 100 muestra la representación, de las cuatro nubes de datos adquiridas, respecto al sistema coordenado de la cámara del primer sistema. Las matrices de rotación y los vectores de traslación que definen cada una de las transformaciones se muestran en (1.243)-(1.244).

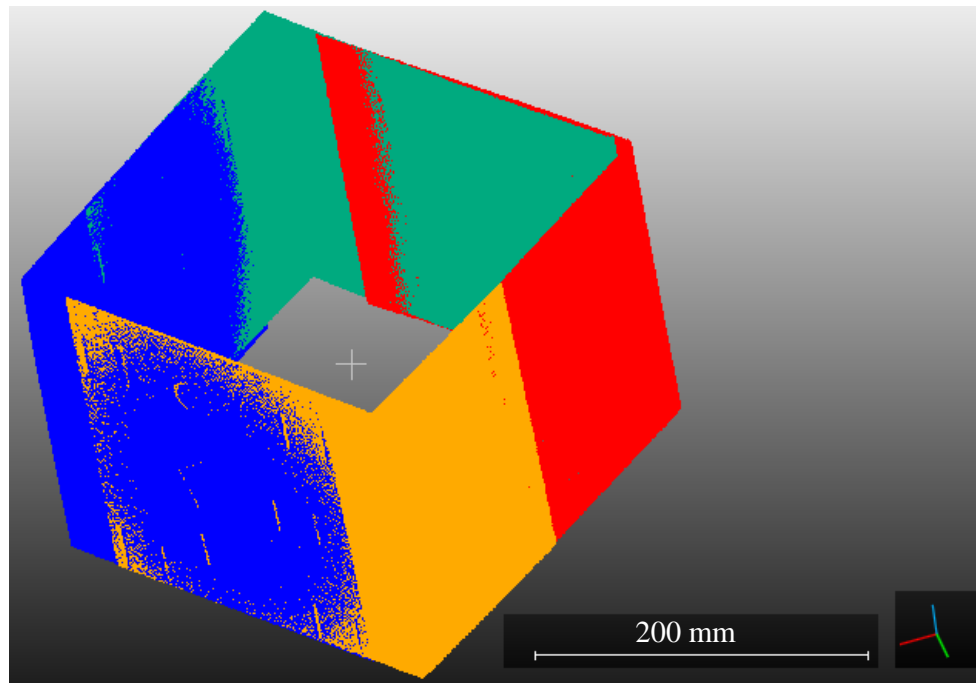


Figura 100. Reconstrucción 3D del objeto de control.

$$\mathbf{R}_{32} = \begin{bmatrix} 0.0740 & -0.0214 & -0.9970 \\ -0.0575 & 0.9980 & -0.0257 \\ 0.9956 & 0.0593 & 0.0726 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{32} = \begin{pmatrix} 849.1987 \\ -14.7763 \\ 773.4209 \end{pmatrix}, \quad (1.243)$$

$$\mathbf{R}_{41} = \begin{bmatrix} -0.0183 & 0.0125 & 0.9998 \\ -0.0371 & 0.9992 & -0.0131 \\ -0.9991 & -0.0373 & -0.0178 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{41} = \begin{pmatrix} -819.0999 \\ -9.0370 \\ 784.8016 \end{pmatrix}. \quad (1.244)$$

Por otra parte, con el propósito de evaluar el potencial del sistema para reconstruir a 360° de observación el torso humano, se reconstruyó un modelo del mismo, ver Figura 101. Las Figuras 102, 103 y 104 muestran diferentes vistas de la reconstrucción obtenida. Cada uno de los sistemas obtuvo una nube de datos. Las cuatro nubes de datos se ubicaron respecto al sistema coordinado de la cámara usando las transformaciones definidas por (1.242), (1.243) y (1.244).



Figura 101. Modelo del torso humano.

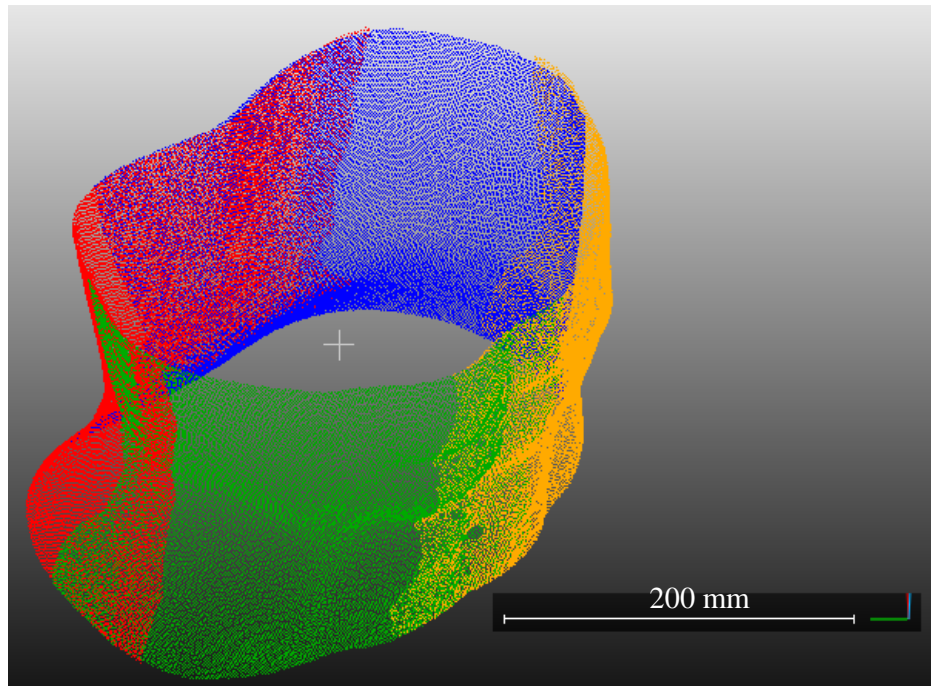


Figura 102. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 1.

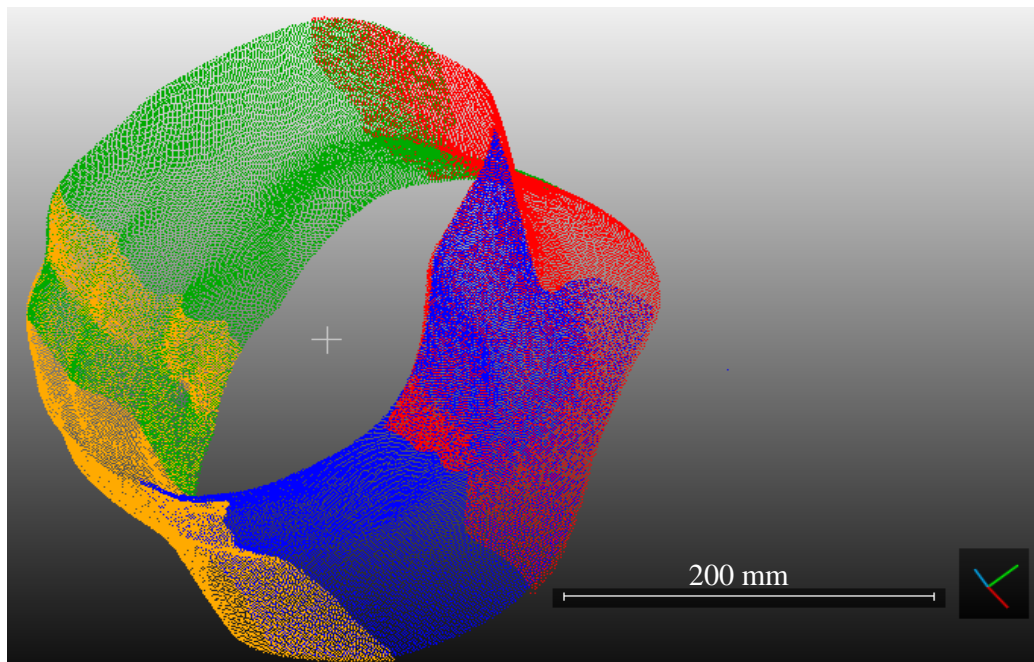


Figura 103. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 2.

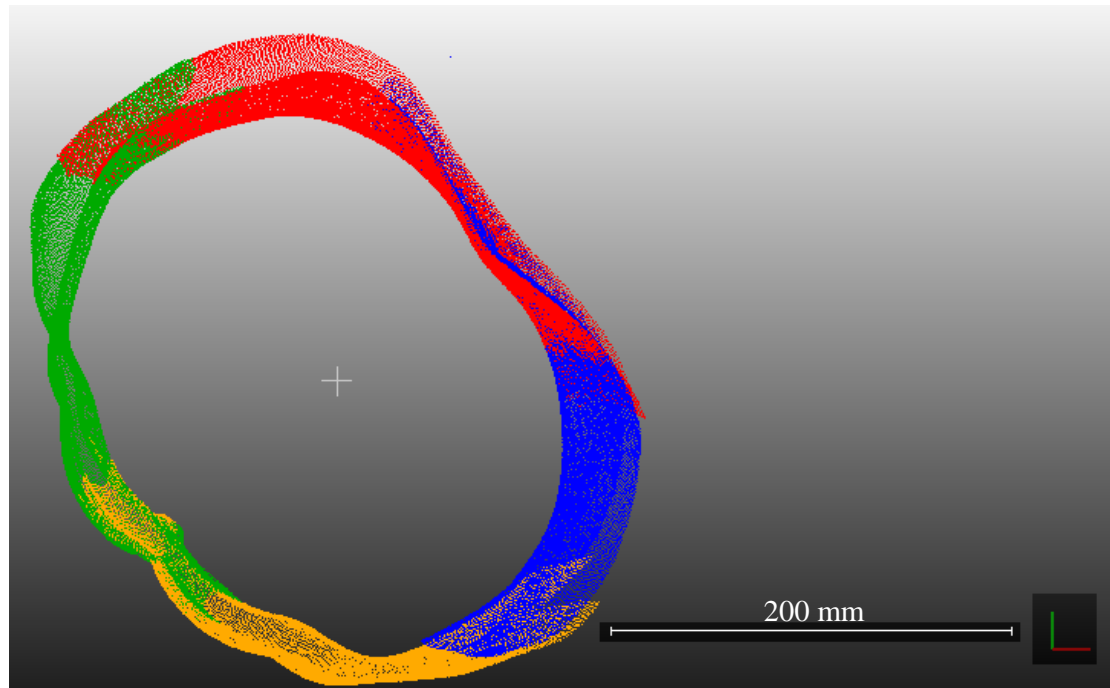


Figura 104. Reconstrucción 3D del modelo de torso humano. Vista 3.

5.3. Evaluación metrológica de uno de los sistemas de proyección-adquisición

Con el propósito de evaluar la resolución y la precisión de uno de los sistemas de proyección-adquisición utilizados para la digitalización del modelo de torso humano, se siguió un procedimiento similar al mostrado en el capítulo anterior. Los resultados mostrados en esta sección fueron obtenidos en [51]. Inicialmente el objeto plano, que se ubicó sobre el sistema de traslación que ya se ha mencionado, se reconstruyó en 11 posiciones diferentes. El desplazamiento, introducido a lo largo del eje Z_c , entre cada una de las posiciones fue de 1000 micras. Con el propósito de medir la separación entre planos consecutivos reconstruidos y los ángulos entre sus normales, se implementó el procedimiento mostrado en el capítulo anterior, la Tabla 7 muestra los resultados obtenidos.

$\Delta_{teó} \pm \delta_{teó} (\mu m)$	$\Delta_{exp} \pm \delta_{exp} (\mu m)$	Error($\Delta_{exp}, \Delta_{teó}$)	$\theta(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_{i-1}) (^\circ)$
1000±10	985±7	1.5%	0.006

1000±10	1003±8	0.3%	0.001
1000±10	1004±6	0.4%	0.001
1000±10	994±6	0.6%	0.004
1000±10	987±6	1.3%	0.001
1000±10	1005±11	0.5%	0.008
1000±10	1007±6	0.7%	0.003
1000±10	1003±8	0.3%	0.005
1000±10	1012±6	1.2%	0.003
1000±10	997±7	0.3%	0.004

Tabla 7. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales de planos consecutivos reconstruidos.

Posteriormente se reconstruyó un objeto de superficie irregular. En este caso el objeto de estudio también se reconstruyó en 11 posiciones diferentes, sin embargo el desplazamiento introducido entre cada una de las posiciones fue de 100 micras. En la Figura 105 se muestra el objeto de estudio junto a una de las reconstrucciones obtenidas.

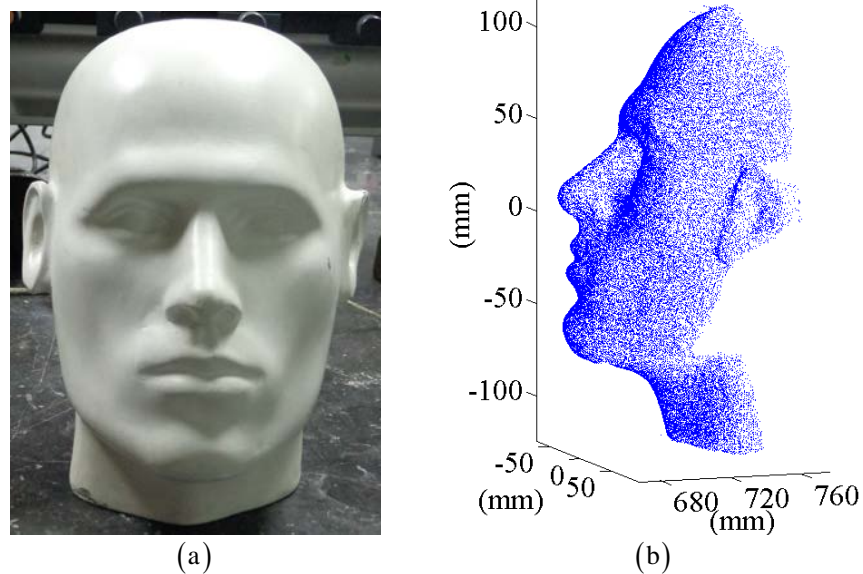


Figura 105. Reconstrucción 3D del objeto de estudio.

Una vez obtenidas las reconstrucciones 3D del objeto para cada una de las posiciones, se ajusta la superficie correspondiente a cada nube de puntos, interpolando la componente Z_{C_i} de la nube respecto a las coordenadas $(X_{C_{i-1}}, Y_{C_{i-1}})$ de la nube anterior. De este modo se garantiza que al medir la separación entre las reconstrucciones 3D, esta se hace entre puntos colineales y paralelos al eje Z_C , ver Figura 106.

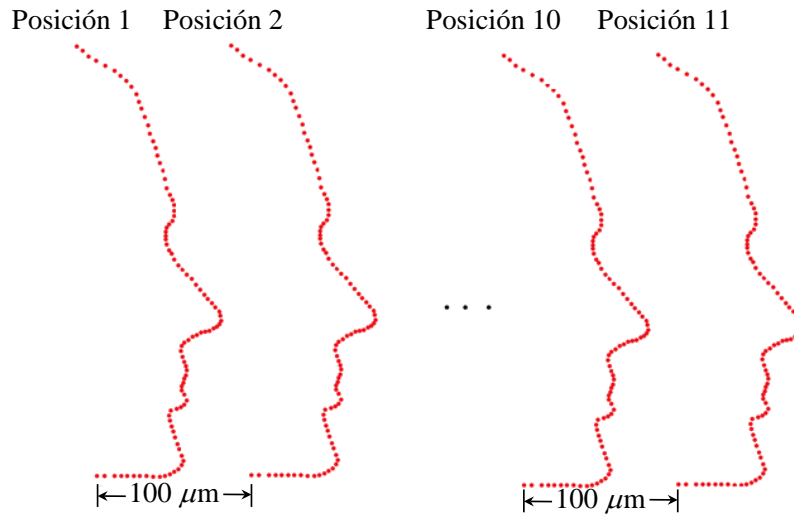


Figura 106. Separación teórica entre puntos de nubes de datos consecutivas.

Los resultados obtenidos en esta oportunidad, se muestran en la Tabla 8.

$\Delta_{\text{teó}} \pm \delta_{\text{teó}} (\mu\text{m})$	$\Delta_{\text{exp}} \pm \delta_{\text{exp}} (\mu\text{m})$	Error($\Delta_{\text{exp}}, \Delta_{\text{teó}}$)
100±10	96±41	4%
100±10	101±42	1%
100±10	92±41	8%
100±10	92±43	8%
100±10	83±42	17%
100±10	97±41	3%
100±10	80±41	20%
100±10	85±41	15%

100±10	100±42	0%
100±10	93±42	7%

Tabla 8. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales.

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 8 se puede concluir que al medir variaciones en la forma del orden de 100 micras se comete un error máximo de 43 micras.

Capítulo 6

Reconstrucción 3D usando un proyector y dos cámaras digitales

Los sistemas de reconstrucción 3D que se basan en la técnica de proyección de franjas son implementados en aplicaciones médicas, inspección, manufactura e ingeniería inversa, entre otras debido a la precisión de los mismos y a que el uso de estos no requiere del contacto con la superficie del objeto a digitalizar. Sin embargo, un sistema de este tipo, formado solamente por una cámara y un proyector, posee un campo de visión limitado. Uno de los principales problemas que se presentan en este tipo de sistemas es el de las zonas ocultas. Por lo general hay ciertas regiones del objeto a digitalizar, que aunque son iluminadas por las franjas proyectadas, no son vistas por la cámara debido a las exigencias propias del montaje experimental: la cámara y el proyector deben estar ubicados a una distancia específica y sus ejes ópticos deben formar un ángulo determinado, con el propósito de realizar mediciones precisas. Este problema se puede resolver desplazando el sistema alrededor del objeto, lo que resulta apropiado cuando el objeto de estudio es inerte, así como se mostró en el **Capítulo 4**. Sin embargo, para ciertas aplicaciones, y particularmente para aquellas en las que el objeto de estudio no es inerte, esta solución no es apropiada. Otra alternativa, que es adoptada en el presente trabajo, consiste en adicionar otra cámara al sistema de reconstrucción con el propósito de acceder a las zonas ocultas de la primera cámara. El desarrollo de tal sistema, el cual ha dado lugar a un trabajo de pregrado [82], surge con el propósito de resolver problemas de tipo metrológico presentes en la medicina estética, específicamente cuando se desea evaluar cuantitativamente la efectividad de procedimientos o productos que garantizan la reducción de líneas de expresión o arrugas presentes en el rostro humano.

Tradicionalmente un sistema de reconstrucción 3D formado por una cámara y un proyector permiten extraer información topográfica del rostro humano con una resolución aproximada de 600 micras, tal sistema por lo general se ve afectado por el problema de zonas ocultas, generadas por formas salientes como la nariz. La alternativa propuesta evita el problema de las zonas ocultas y mejora la resolución del sistema, ya que se usan dos cámaras cuyos ejes ópticos forman grandes ángulos respecto al eje óptico del proyector. Cada una de las cámaras permite obtener una nube de puntos correspondiente a una región del rostro, cada una de las cuales está expresada respecto al sistema coordenado de su cámara. La unificación de las nubes se realiza siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo anterior, en este caso se usa una lámina de vidrio, con figuras geométricas adheridas en su superficie, como objeto de control, para determinar la transformación que permite unificar las nubes independientes. De esta manera, es posible obtener información 3D completa del rostro con la resolución apropiada para extraer información de detalles superficiales como arrugas o líneas de expresión.

Los resultados experimentales obtenidos muestran el potencial que posee el sistema para evaluar cuantitativamente la efectividad de procedimientos, terapéuticos o quirúrgicos, o de productos farmacéuticos que garantizan la reducción de los detalles mencionados anteriormente.

6.1. Resultados experimentales

El sistema de reconstrucción 3D que se desarrolló está formado por un proyector DELL referencia M110, con brillo de 300 lúmenes y resolución WXGA (1280 × 800) y dos cámaras CCDs de la marca uEye, referencia UI-2310M, monocromáticas y resolución 640 píxeles × 480 píxeles, cada una con un lente de 6 mm de la marca Edmund Optics y referencia 67709. Para controlar el sistema de proyección-adquisición, así como para procesar las imágenes adquiridas, se utilizó un computador portátil SONY VAIO VPCEG30EL con procesador intel CORE i3 y 4 GB de memoria RAM. El sistema implementado se muestra en la Figura 107.

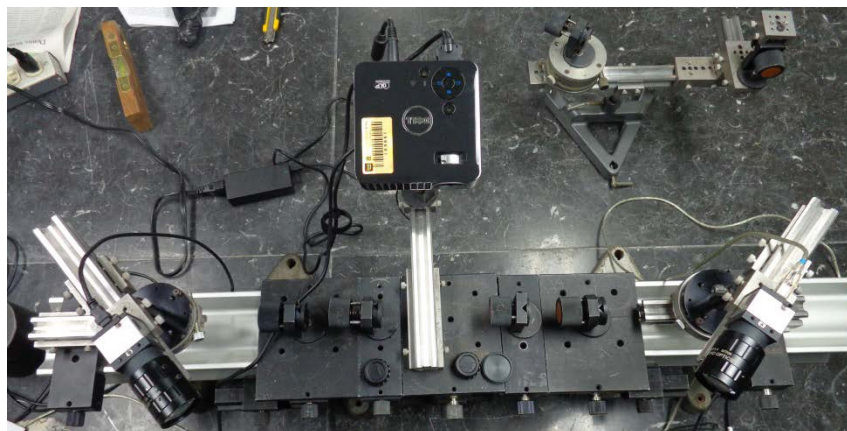


Figura 107. Sistema de reconstrucción 3D implementado.

6.2. Estrategia propuesta para unificar las nubes de puntos adquiridas por cada sistema de reconstrucción

En esta sección se muestra cómo se pueden unificar las nubes de puntos que son obtenidas a partir de cada uno de los sistemas de observación. La técnica implementada es similar a la mostrada en el capítulo anterior, sin embargo en este caso se usa una lámina de vidrio como objeto de control, ver Figura 108.

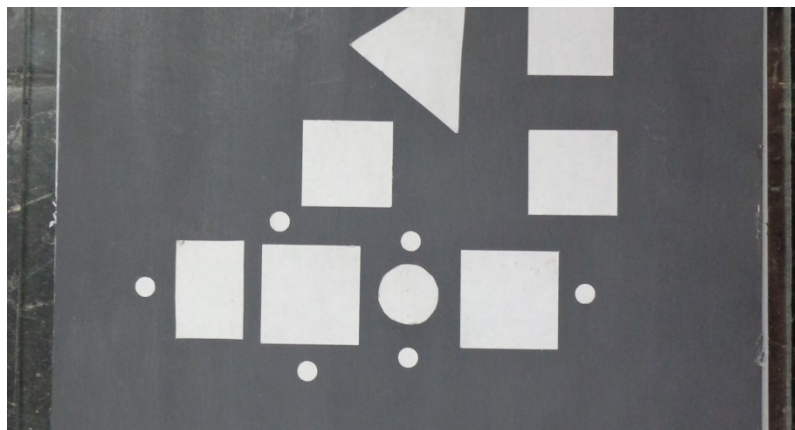


Figura 108. Objeto de control.

La reconstrucción 3D del objeto de control permite determinar la transformación que es usada para unificar las nubes de datos, obtenidas por sistemas independientes, en un solo sistema coordinado. En este caso el objeto de control se ubica en el espacio de trabajo de

tal manera que al menos cuatro figuras geométricas sean comunes a los dos sistemas de observación. Cada sistema reconstruye la región del objeto de control que es iluminada por las franjas proyectadas y que es observada por su respectiva cámara. Mediante un procesamiento digital de imágenes se calculan las coordenadas 3D de los baricentros de las figuras geométricas que son comunes a los sistemas de observación, a partir de dichas coordenadas se calculan la matriz de rotación y el vector de traslación que permiten unificar las nubes de datos independientes. Por otra parte, debido a que los sistemas de observación permanecen fijos, una vez determinada tal transformación, es posible unificar nubes de datos independientes y que pertenecen a cualquier objeto que se ubique en el espacio de trabajo del sistema de reconstrucción.

En la Figura 109 muestra la nube de puntos correspondiente al objeto de control reconstruido por el sistema de la izquierda, ver Figura 107, el cual está formado por la cámara de la izquierda y el proyector.

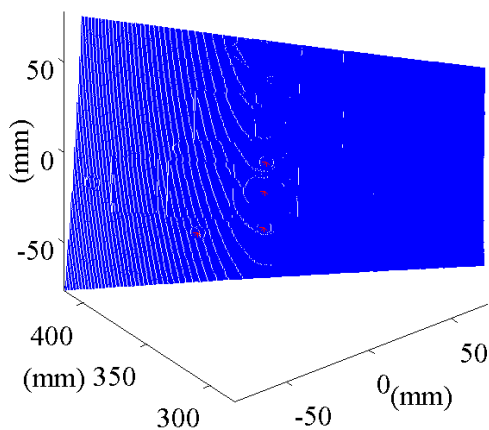


Figura 109. Nube de datos correspondiente al sistema de la izquierda.

Los asteriscos de color rojo corresponden a los baricentros de las figuras adheridas como referencia. La Figura 110 muestra una ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 109.

En la Figura 111 se muestra la nube de datos correspondiente al objeto de control reconstruido por el sistema de la derecha, el cual está formado por la cámara de la derecha y el proyector. Los asteriscos de color azul corresponden a los baricentros de las figuras adhi-

das como referencia. La Figura 112 muestra una ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 111.

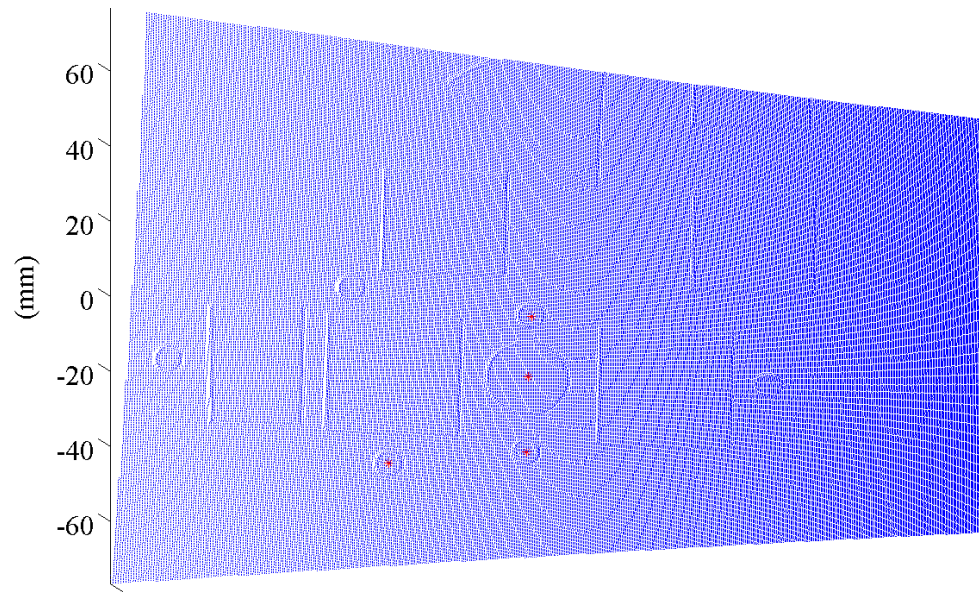


Figura 110. Ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 109.

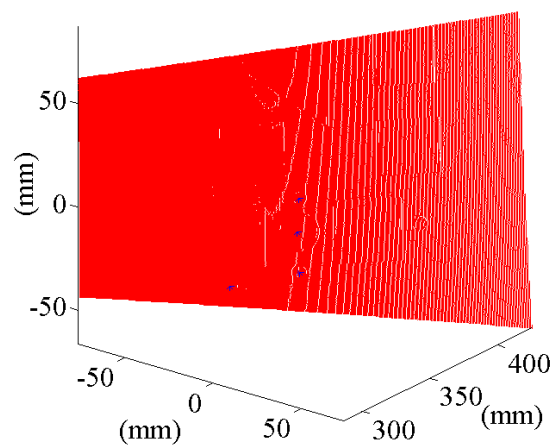


Figura 111. Nube de datos correspondiente al sistema de la derecha.

En la Figura 113 se muestran las dos nubes de puntos antes de la transformación.

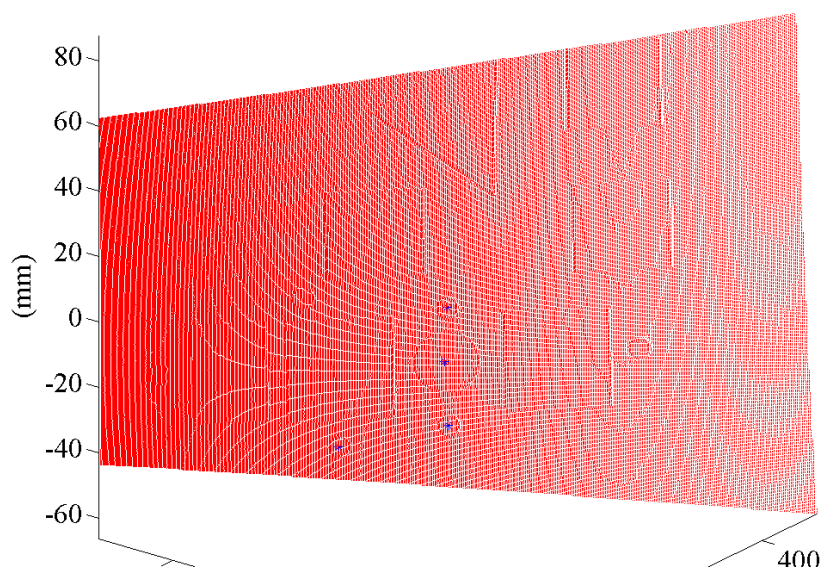


Figura 112. Ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 111.

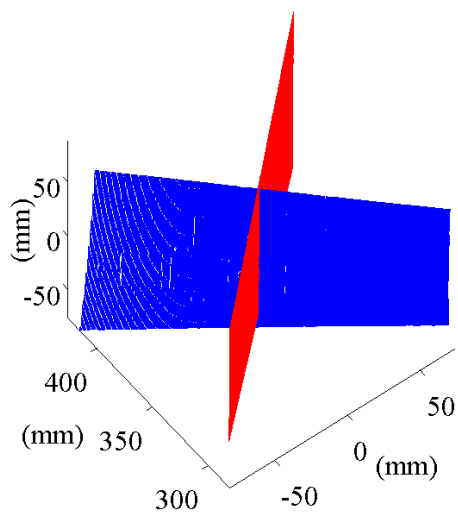


Figura 113. Nubes de datos obtenidas por cada uno de los dos sistemas, antes de la transformación.

A partir de las cuatro correspondencias establecidas y por medio del procedimiento descrito en el **Capítulo 4**, se calcularon la matriz de rotación y el vector de traslación que permiten empalmar las dos nubes de puntos. Estos están dados por

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} 0.1175 & -0.0246 & 0.9928 \\ 0.0459 & 0.9988 & 0.0193 \\ -0.9920 & 0.0433 & 0.1185 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}_{21} = \begin{pmatrix} -359.1688 \\ -4.5703 \\ 304.8940 \end{pmatrix}. \quad (1.245)$$

La Figura 114 muestra el empalme de las dos nubes de datos. En la Figura 115 se muestra una ampliación de la nube de datos mostrada en la Figura 114.

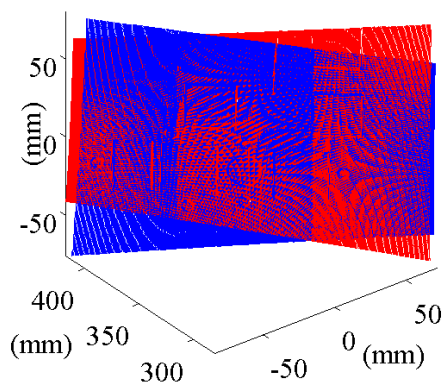


Figura 114. Empalme de las nubes de puntos.

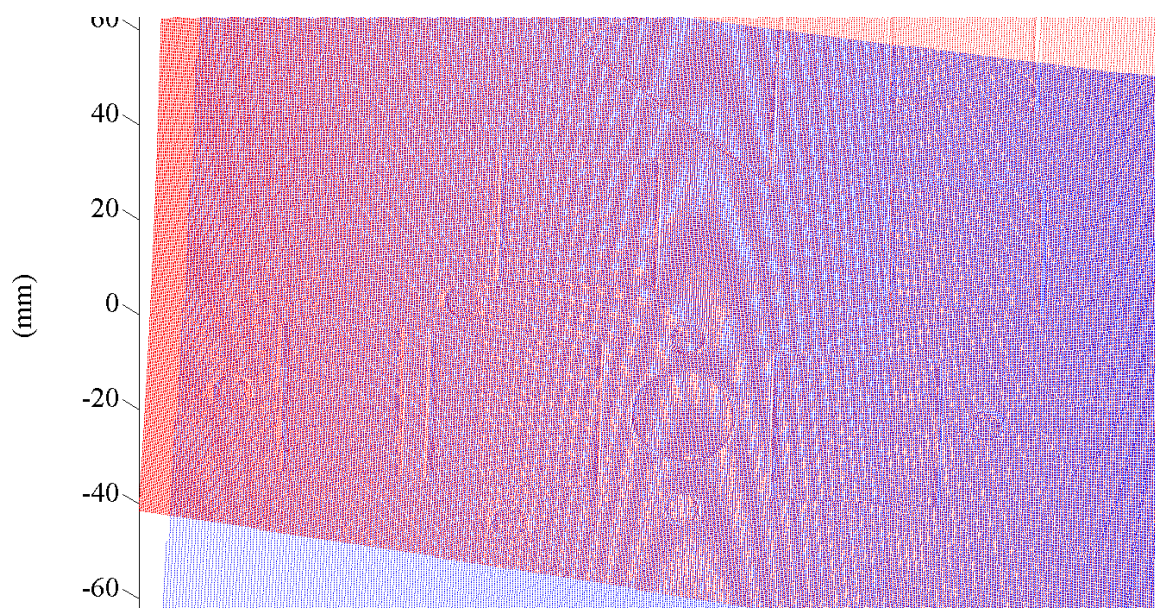


Figura 115. Ampliación a la nube de puntos mostrada en la Figura 114.

La Tabla 9 muestra la distancia entre baricentros después de aplicar la transformación.

d_1 (mm)	d_2 (mm)	d_3 (mm)	d_4 (mm)	Σ^2 (mm ²)
0.345	0.523	0.630	0.346	3.406

Tabla 9. Distancias entre baricentros después de aplicar la transformación.

Por otra parte con el propósito de evaluar el potencial del sistema para reconstruir el rostro humano, se reconstruyó un modelo del mismo, ver Figura 105. La Figura 116 muestra el empalme de las dos nubes de datos obtenidas por cada uno de los sistemas. La Figura 117 muestra una ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 116.

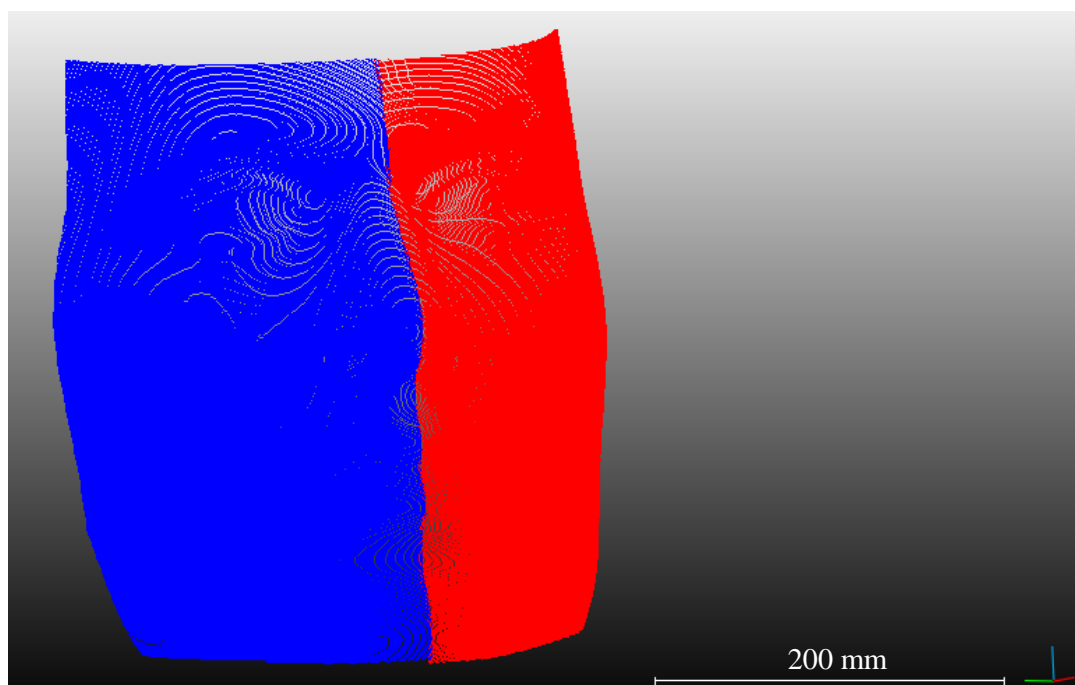


Figura 116. Reconstrucción 3D del modelo de rostro humano mostrado en la Figura 105.

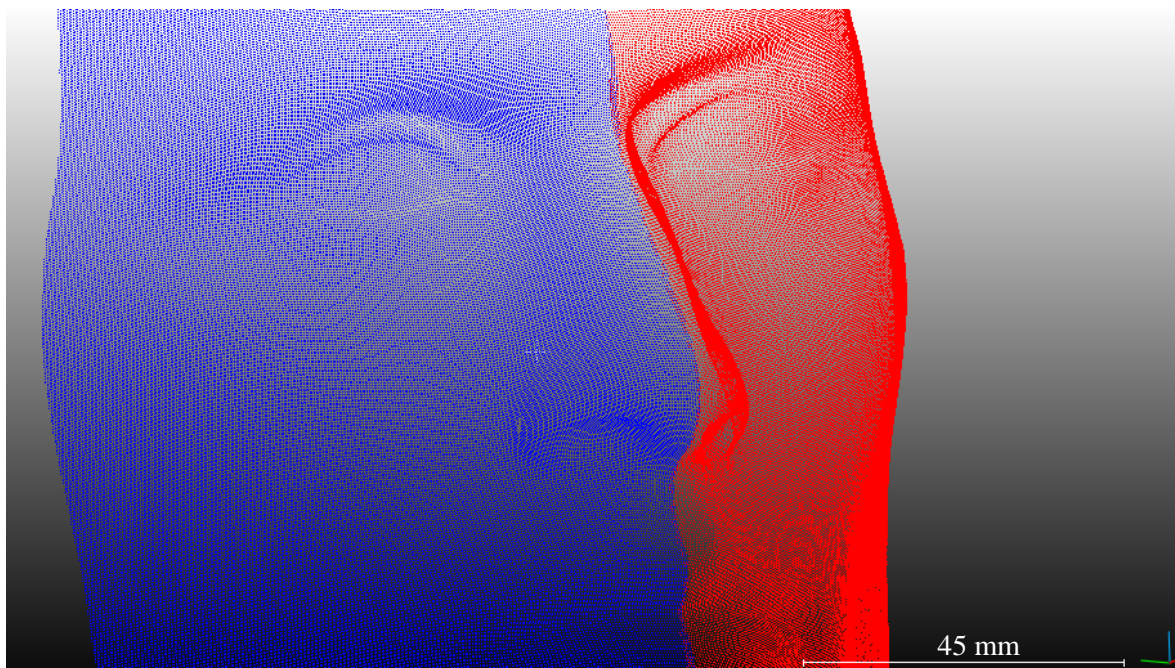


Figura 117. Ampliación a la nube de datos mostrada en la Figura 116.

6.3. Evaluación metrológica del sistema de reconstrucción

Con el propósito de evaluar metrológicamente uno de los sistemas de proyección-adquisición, se siguió un procedimiento similar al mostrado en el **Capítulo 4**, al igual que en aquel caso, se desplazó un objeto plano a lo largo del eje Z_c de la cámara, sin embargo en este caso los desplazamientos introducidos fueron iguales a 50 micras. La Figura 118 muestra los desplazamientos experimentales, medidos por el sistema de reconstrucción, contra los desplazamientos teóricos, introducidos por el sistema de traslación. En la Tabla 10 se muestran las mediciones obtenidas con el sistema de reconstrucción junto a sus desviaciones estándar, los errores entre los valores que se asumen como teóricos y los valores experimentales y los ángulos entre el i -ésimo plano reconstruido y el primer plano reconstruido.

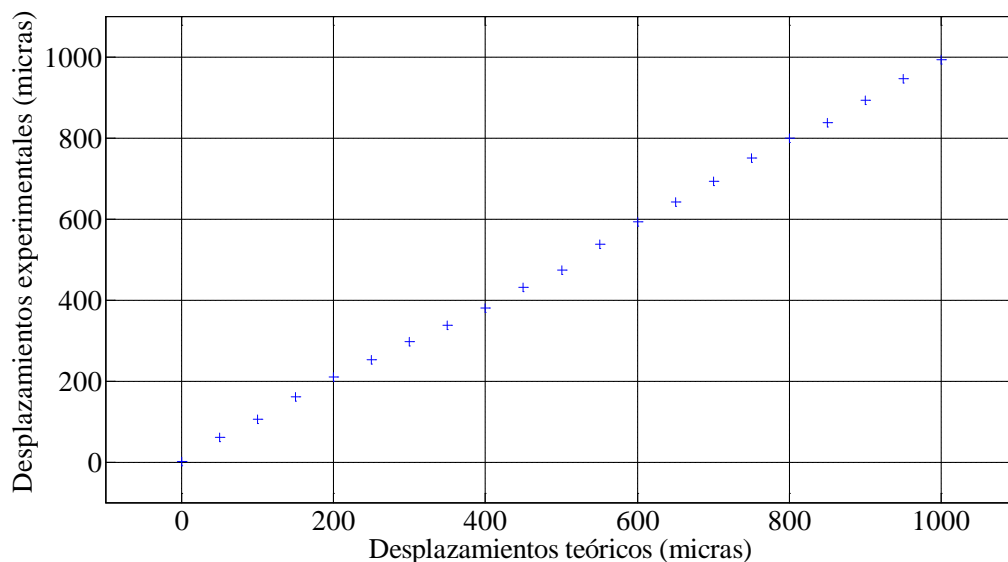


Figura 118. Desplazamientos experimentales contra desplazamientos teóricos.

$\Delta_{teó} \pm \delta_{teó} (\mu m)$	$\Delta_{exp} \pm \delta_{exp} (\mu m)$	Error($\Delta_{exp}, \Delta_{teó}$)	$\theta(N_1, N_i) (^\circ)$
50±10	61.4±0.2	22.70%	0.003
100±10	105.5±0.6	5.49%	0.011
150±10	161.1±0.9	7.37%	0.019
200±10	208.8±1.1	4.41%	0.021
250±10	253.1±0.6	1.23%	0.012
300±10	296.7±0.5	1.09%	0.009
350±10	336.9±1.2	3.75%	0.024
400±10	380.5±0.9	4.86%	0.016
450±10	430.3±1.7	4.38%	0.033
500±10	473.3±1.1	5.34%	0.022
550±10	536.6±0.7	2.43%	0.013
600±10	593.1±1.9	1.16%	0.037
650±10	641.9±2.1	1.24%	0.041
700±10	693.5±2.0	0.93%	0.039
750±10	749.1±2.3	0.12%	0.045
800±10	798.6±1.9	0.17%	0.036

850±10	836.4±2.3	1.59%	0.044
900±10	891.7±2.5	0.92%	0.049
950±10	944.9±2.6	0.52%	0.050
1000±10	993.3±2.3	0.66%	0.045

Tabla 10. Desplazamientos teóricos, desplazamientos experimentales, errores en los desplazamientos experimentales y ángulos entre las normales del primer plano y el n-ésimo plano reconstruido.

Los resultados mostrados en la Tabla 10 indican que el sistema desarrollado puede medir variaciones topográficas del orden de 50 micras con una incertidumbre máxima de ± 2.6 micras.

Conclusiones

En el presente trabajo, el cual estuvo apoyado por el desarrollo de diversos trabajos de pregrado y dos trabajos de maestría, se propuso un método novedoso, versátil y flexible que permite calibrar cualquier sistema de reconstrucción 3D que se basa en la técnica de proyección de franjas. En éste, se usa un plano de calibración ajedrezado, el cual se ubica en posiciones arbitrarias dentro del campo de trabajo del sistema de reconstrucción, y la proyección de un patrón codificado de puntos de control. Una de las principales ventajas del método propuesto radica en que no es necesario utilizar unidades de traslación precisas para llevar a cabo el procedimiento de calibración, lo que reduce significativamente el tiempo que por lo general se emplea para llevar a cabo esta tarea. Los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara son calculados a partir de la técnica propuesta por Zhang, mientras que los del proyector son calculados a partir de los parámetros de la cámara y de la fase asociada al patrón de puntos que se proyecta sobre el plano de calibración, esta última se calcula usando análisis de Fourier. Los resultados experimentales obtenidos por cada uno de los sistemas de reconstrucción desarrollados demuestran la eficiencia del método de calibración propuesto.

Se desarrolló un procedimiento que compensa el error de fase que se introduce debido a la distorsión gamma del proyector; la compensación del error de fase es importante ya que la misma reduce los errores de medición del sistema de reconstrucción 3D. La estructura de datos que modeliza el error de fase se obtiene utilizando un objeto plano y teniendo en cuenta que la fase ideal está dada por un polinomio de orden superior, en nuestro caso de orden cinco debido al carácter no tele-céntrico del sistema de adquisición y a las aberraciones geométricas del mismo. Los resultados experimentales obtenidos muestran que el error de fase aumenta con el periodo de las franjas proyectadas, sin embargo para un paso igual o

superior a 64 píxeles el error no depende de este; además se puede inferir que para un paso igual o inferior a 8 píxeles el error de fase es prácticamente despreciable.

Se diseñó y construyó un sistema de digitalización 3D formado por un proyector portable, una cámara digital y un computador portátil. El sistema permite obtener información topográfica a 360° de observación y permite reconstruir variaciones topográficas del orden de 100 micras, de las fallas presentes en la superficie del objeto de estudio, que en este caso es una sección de una tubería con refuerzo no metálico utilizada para el transporte de hidrocarburos. El análisis cuantitativo de las fallas es importante porque permite establecer si estas pueden afectar la integridad estructural de la tubería. La reconstrucción 3D a 360° de observación se obtiene a partir de diferentes nubes de datos que son adquiridas desplazando el sistema de reconstrucción alrededor de la tubería. Con el objetivo de empalmar todas estas en un mismo sistema coordenado, se propuso una técnica que se basa en el método de mínimos cuadrados y en la cual se hace necesario ubicar figuras geométricas sobre la superficie del objeto a reconstruir debido a que la geometría del mismo no permite identificar puntos correspondientes, entre nubes de datos consecutivas, a partir de la teoría de curvaturas.

Se diseñó y construyó un sistema de digitalización 3D que permite obtener información topográfica a 360° de observación, y con resolución cercana a las 100 micras, del torso humano con el propósito de evaluar cuantitativamente la eficacia de procedimientos terapéuticos que son utilizados para el desplazamiento de tejido adiposo. La reconstrucción 3D a 360° de observación se obtiene a partir de cuatro sistemas de proyección-adquisición, los cuales están ubicados de manera que circunscriben un cuadrado de 2 m de lado aproximadamente. Las transformaciones que permite ubicar las nubes de datos, adquiridas por cada uno de los sistemas, en un solo sistema coordenado, son determinadas a partir del método de mínimos cuadrados y utilizando un paralelepípedo como objeto de control, este último permite establecer correspondencias entre puntos comunes a dos nubes de datos consecutivas.

Se presentó un dispositivo con el que se podría extraer información métrica del rostro humano, la cual puede ser utilizada para evaluar alteraciones en su forma. El montaje experimental del sistema difiere a uno tradicional del mismo tipo, ya que se incluye un segundo sistema de adquisición con el objetivo de adquirir información en las zonas que estarían ocultas para el sistema de reconstrucción si este implementara un sistema de adquisición en vez de dos. Las características del montaje experimental permiten reconstruir variaciones topográficas del orden de 50 micras. La estrategia implementada para unificar las dos nubes de datos, obtenidas a partir de cada uno de los sistemas de reconstrucción, es la misma que se mencionó en el párrafo anterior, sin embargo, aquí se usó un plano como objeto de control. En este caso no se reconstruyeron rostros reales, el objetivo principal estaba enfocado en mejorar la resolución alcanzada en [82], en donde se realizó la digitalización 3D de un rostro humano y se mostró que el sistema es capaz de reconstruir arrugas y líneas de expresión presentes en el mismo.

Perspectivas

En la presente investigación se desarrollaron tres sistemas de reconstrucción tridimensional que permiten realizar aplicaciones específicas. Sin embargo, cada uno de estos podría ser mejorado de la siguiente manera.

Con el primer sistema de reconstrucción desarrollado es posible digitalizar a 360° de observación secciones de tuberías con refuerzo no metálico, las cuales son implementadas para el transporte de hidrocarburos. En este caso la reconstrucción se obtiene dejando fijo el sistema de reconstrucción y rotando la tubería alrededor de su eje longitudinal, además que la misma se lleva a cabo en condiciones de laboratorio; por lo tanto se plantea la posibilidad de desarrollar un sistema portable que se pueda desplazar manualmente alrededor de la tubería y que permita obtener reconstrucciones en condiciones reales.

Con el segundo sistema desarrollado es posible obtener la reconstrucción 3D y a 360° de observación de los objetos de estudio, se ha demostrado el potencial que éste posee para evaluar cuantitativamente la eficacia de procedimientos terapéuticos que son implementados para desplazar tejido adiposo en la región del torso humano; sin embargo se plantea la posibilidad de modificar el sistema de control del mismo de tal manera que se puedan sincronizar los cuatro sistemas de proyección-adquisición.

El tercer sistema desarrollado permitiría evaluar cuantitativamente la eficacia de procedimientos quirúrgicos o terapéuticos que son implementados para eliminar arrugas y líneas de expresión del rostro; sin embargo se plantea la posibilidad de modificar el mismo con el propósito de obtener información también la zona del cuello, lo que implicaría adicionar al menos otra cámara digital.

Se plantea la posibilidad de evaluar metrológicamente el procedimiento que ha sido desarrollado para empalmar nubes de datos que son adquiridas a partir de diferentes vistas y que contienen regiones comunes. Se debe realizar un análisis detallado del error que se introduce al implementar el procedimiento y se debe estudiar que tan sensible al ruido es el mismo. Además se plantea la posibilidad de implementar el algoritmo *Iterative Closest Point* (ICP) para afinar el registro de información y acercar de manera fina las nubes de datos obtenidas.

Bibliografía

- [1] Böhler, W., and Marbs, A. (2002, September). 3D scanning instruments. In *Proceedings of the CIPA WG 6 International Workshop on Scanning for Cultural Heritage Recording, Ziti, Thessaloniki* (pp. 9-18).
- [2] Böhler, W., Heinz, G., Marbs, A., and Siebold, M. (2002, September). 3D scanning software: an introduction. In *CIPA Heritage Documentation, International Workshop on Scanning for Cultural Heritage Recording, Ziti, Thessaloniki* (pp. 47-51).
- [3] Malamas, E. N., Petrakis, E. G., Zervakis, M., Petit, L., and Legat, J. D. (2003). A survey on industrial vision systems, applications and tools. *Image and vision computing*, 21(2), 171-188.
- [4] Turk, G., and Levoy, M. (1994, July). Zippered polygon meshes from range images. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 311-318). ACM.
- [5] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J., and Stuetzle, W. (1992). *Surface reconstruction for unorganized points* (Vol. 26, No. 2, pp. 71-78). ACM.
- [6] Garland, M., and Heckbert, P. S. (1997, August). Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 209-216). ACM. Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [7] Cremers, D., Sochen, N., and Schnörr, C. (2003 January). Towards recognition-based variational segmentation using shape priors and dynamic labeling. In *Scale Space Methods in Computer Vision* (pp. 388-400). Springer Berlin Heidelberg.
- [8] Varaday, T., Martin, R. R., and Cox, J. (1997). Reverse engineering of geometric models – an introduction. *Computer – Aided Design*, 29(4), 255-268.

- [9] Isgro, F., Odone, F., and Verri, A. (2005 July). An open system for 3D data acquisition from multiple sensor. In *Computer Architecture for Machine Perception, 2005. CAMP 2005. Proceedings. Seventh International Workshop on* (pp. 52-57). IEEE.
- [10] Xiong, Y. L. (1990). Computer aided measurement of profile error of complex surfaces and curves: theory and algorithm. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 30(3), 339-357.
- [11] Sahoo, K. C., and Menq, C. H. (1991). Localization of 3D objects having complex sculptures surfaces using tactile sensing and surface description. *Journal of engineering for industry*, 113(1), 85-92.
- [12] Butler, C. (1991). An investigation into the performance of probes on coordinates measurements machines. *Industrial Metrology*, 2(1), 59-70.
- [13] Vargas Balbuena, J. (2009). *Nuevos métodos de medida 3D mediante triangulación activa* (Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones).
- [14] Prados, E., and Faugeras, O. (2006). Shape from shading. In *Handbook of mathematical models in computer vision* (pp. 375-388). Springer US.
- [15] Marques, M., and Costeira, J. (2008 September). 3D face recognition from multiple images: A shape-from motion approach. In *Automatic Face & Gesture Recognition, 2008. FG'08. 8th IEEE International Conference on* (pp. 1-6). IEEE.
- [16] Beardsley, P., Torr, P., and Zisserman A. (1996). 3D model acquisition from extended image sequences. In *Computer Vision – ECCV'96* (pp. 683-695). Springer Berlin Heidelberg.
- [17] Meneses, J. E., and Contreras, C. R. (2011 January). Digital approximation to extended depth of field in no telecentric imaging systems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 274, No. 1, p. 012040). IOP Publishing.
- [18] Cheng, X. X., Su, X. Y., and Guo, L. R. (1991). Automated measurement method for 360 profilometry of 3-D diffuse objects. *Applied Optics*, 30(10), 1274-1278.
- [19] Contreras, R., and Meneses J. (2009). Dispositivo Óptico De Medida 3D Con Simetría Cilíndrica: Aplicaciones en Balística. *Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas*, 7(2), 42-52.

- [20] Barrea, M., Torres, G., Contreras, C., and Meneses, J. (2013). Análisis preliminar de un sistema de reconstrucción tridimensional multicaptor. *INGE CUC*, 9(1), 129-142.
- [21] González, A., Meneses, J., and León, J. (2012). Proyección de franjas en metrología óptica facial. *INGE CUC*, 8(1), 191-206.
- [22] González-Jorge, H., Riveiro, B., Vásquez-Fernández, E., Martínez-Sánchez, J., and Aria, P. (2013). Metrological evaluation of Microsoft Kinect and Asus Xtion sensors. *Measurement*, 46(6), 1800-1806.
- [23] Moosmann, F., Pink, O., and Stiller, C. (2009, June). Segmentation of 3D LIDAR data in non-flat urban environments using a local convexity criterion. In *Intelligent Vehicles Symposium, 2009 IEEE* (pp. 215-220). IEEE.
- [24] Bi, Z. M., and Wang, L. (2010). Advances in 3D data acquisition and processing for industrial applications. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 26(5), 403-413.
- [25] Chaparro, L. X., Contreras C. R., and Meneses, J. E. (2013, November). Operating principle of a high resolution ultrasonic ranging system based in a phase processing. In *8th Ibero American Optics Meeting/11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications* (pp. 87853D-87853D). International Society for Optics and Photonics.
- [26] González Toledo, E. C. (1985). Resonancia magnética nuclear. *Prensa méd. argent*, 72(7), 213-21.
- [27] Meneses, J. (1998). *Système optique pour la mesure des déformations de la voute plantaire sous charge statique* (Doctoral dissertation, Université de Franche-Comté).
- [28] Chen, F., Brown, G. M., and Song, M. (2000). Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods. *Optical Engineering*, 39(1), 10-22.
- [29] Karpinsky, N., Hoke, M., Chen, V., and Zhang, S. (2014). High-resolution, real-time three dimensional shape measurement on graphics processing unit. *Optical engineering*, 53(2), 024105-024105.
- [30] Quan, C., Tay, C. J., Shang, H. M., and Bryanston-Cross, P. J. (1995). Contour measurement by fibre optic fringe projection and Fourier analysis. *Optics communications*, 118(5), 479-483.

- [31] Takeda, M., Ina, H., and Kobayashi, S. (1982). Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *JosA*, 72(1), 156-160.
- [32] Chen, L. C., Ho, H. W., and Nguyen, X. L. (2010). Fourier transform profilometry (FTP) using an innovative band-pass filter for accurate 3-D surface reconstruction. *Optics and Lasers in Engineering*, 48(2), 182-190.
- [33] Huang, P. S., Zhang, C., and Chiang, F. P. (2003). High-speed 3-D shape measurement based on digital fringe projection. *Optical Engineering*, 42(1), 163-168.
- [34] Quan, C., He, X. Y., Wang, C. F., Tay, C. J., and Shang, H. M. (2001). Shape measurement of small objects using LCD fringe projection with phase shifting. *Optics Communications*, 189(1), 21-29.
- [35] Chen, L., Quan, C., Jui Tay, C., and Huang, Y. (2005). Fringe contrast based 3D profilometry using fringe projection. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 116(3), 123-128.
- [36] Quan, C., Tay, C. J., Kang, X., He, X. Y., and Shang, H. M. (2003). Shape measurement by use of liquid-crystal display fringe projection with two-step phase shifting. *Applied Optics*, 42(13), 2329-2335.
- [37] Yang, F., and He, X. (2007). Two-step phase shifting fringe projection profilometry: intensity derivative approach. *Applied Optics*, 46(29), 7172-7178.
- [38] Pan, J., Huang, P. S., and Chiang, F. P. (2006). Color phase-shifting technique for three-dimensional phase measurement. *Optical Engineering*, 45(1), 013602-013602.
- [39] Chen, L. C., and Nguyen, X. L. (2010). Dynamic 3D surface profilometry using a novel color pattern encoded with a multiple triangular model. *Measurement Science and Technology*, 21(5), 054009.
- [40] Wakayama, T., and Yoshizawa, T. (2014). High-speed three-dimensional shape measurements using multiwavelength spatiotemporal phase shifting. *Optical Engineering*, 53(11), 112207-112207.
- [41] Takeda, M., and Mutoh, K. (1983). Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Applied Optics*, 22(24), 3977-3982.

- [42] Chen, X., Xi, J., Jin, Y., and Sun, J. (2009). Accurate calibration for a camera-projector measurement system based on structured light projection. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(3), 310-319.
- [43] Zhang, S., and Huang, P. S. (2006). Novel method for structured light system calibration. *Optical Engineering*, 45(8), 083601-083601.
- [44] Da, F., and Gai, S. (2008). Flexible three-dimensional measurement technique based on a digital light processing projector. *Applied Optics*, 47(3), 377-385.
- [45] Zappa, E., Busca, G., and Sala, P. (2011). Innovative calibration technique for fringe projection based 3D scanner. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(3), 331-340.
- [46] Ghiglia, D. C., and Pritt, M. D. (1998). *Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software* (pp. 2-6). New York: Wiley.
- [47] Saldner, H. O., and Huntley, J. M. (1997). Temporal phase unwrapping: application to surface profiling of discontinuous objects. *Applied Optics*, 36(13), 2770-2775.
- [48] Pérez Guzmán, Z. M. (2006). *Aproximación espacio-temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas* (Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander).
- [49] Zhang, Z. (1999). Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In *Computer Vision, 1999. The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on* (Vol. 1, pp. 666-673). IEEE.
- [50] Ballesteros Díaz, A. (2014). *Evaluación teórico-experimental de una estrategia para la calibración manual de un dispositivo de proyección de franjas* (Trabajo de Grado, Universidad Industrial de Santander).
- [51] González Gómez, A. L. (2014). *Reconstrucción 3D del torso humano a 360° de observación mediante la técnica de proyección de franjas* (Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga).
- [52] González Gómez A. L., Ballesteros Díaz, A., Meneses Fonseca, J. E., León Téllez, J. (2013). Método para la extracción de puntos de control en la calibración de una cámara basado en la estimación de la fase de un patrón de puntos codificado. *Iteckne*, 10(1).

- [53] González, A. L., Contreras, C. R., and Meneses, J. E. (2014, June). Accurate and flexible calibration technique for fringe projection profilometry by using encoded points and Fourier analysis. In *SPIE Sensing Technology + Applications* (pp. 91100X-91100X). International Society for Optics and Photonics.
- [54] Huang, J., and Wu, Q. (2014). A new reconstruction method based on fringe projection of three-dimensional measuring system. *Optics and Lasers in Engineering*, 52, 115-122.
- [55] Jia, P., Kofman, J., and English, C. (2007). Comparison of linear and nonlinear calibrations methods for phase-measuring profilometry. *Optical Engineering*, 46(4), 043601-043601.
- [56] Du, H., and Wang, Z. (2007). Three-dimensional shape measurement with an arbitrary arranged fringe projection profilometry system. *Optics Letters*, 32(16), 2438-2440.
- [57] Vargas, J., Terrón-López, M. J., and Quiroga, J. A., (2007). Flexible calibration procedure for fringe projection profilometry. *Optical Engineering*, 46(2), 023601-023601.
- [58] Liu, H., Su, W., Reichard, K., and Yin, S. (2003). Calibration-based phase-shifting projected fringe profilometry for accurate absolute 3D surface profile measurement. *Optics Communications*, 216(1), 65-80.
- [59] Hartley, R., and Zisserman, A. (2003). *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press.
- [60] Devernay, F., and Faugeras, O. D. (1995, September). Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments. In *SPIE's 1995 International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation* (pp. 62-72). International Society for Optics and Photonics.
- [61] Tsai, R. Y. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 3(4), 323-344.

- [62] Heikkila, J., and Silvén, O. (1997, June). A four step camera calibration procedure with implicit image correction. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. Proceedings. 1997 IEEE Computer Society Conference on* (pp. 1106-1112). IEEE.
- [63] Muñoz, A. F. (2009). *Diseño e implementación de un dispositivo de exploración tri-dimensional del pie humano* (Tesis de Grado, Universidad del Cauca).
- [64] Bouguet, J. Y. (2004). Camera Calibration Toolbox for MATLAB. Online available at: http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc
- [65] Arias H, N. A., Sandoz, P., Meneses, J. E., Suárez, M. A., and Gharbi, T. (2010). 3D localization of a labeled target by means of a stereo vision configuration with sub-voxel resolution. *Optics Express*, 18(23), 24152-24162.
- [66] Arias, N., Meneses, N., Meneses, J., and Gharbi, T. (2011, January). A hand-held 3D laser scanning with global positioning system of subvoxel precision. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 274, No. 1, p. 012068). IOP Publishing.
- [67] Galeano Z, J. A., Sandoz, P., Gaiffe, E., Launay, S., Robert, L., Jacquot, M., and Mougin, C. (2011). Position-referenced microscopy for live cell culture monitoring. *Biomedical Optics Express*, 2(5), 1307-1318.
- [68] Huang, P. S., Zhang, C., and Chiang, F. P. (2003). High-speed 3-D shape measurement based on digital fringe projection. *Optical Engineering*, 42(1), 163-168.
- [69] Zhang, S., and Huang, P. S. (2007). Phase error compensation for a 3-D shape measurement system based on the phase-shifting method. *Optical Engineering*, 46(6), 063601-063601.
- [70] Zhang, S., and Yau, S. T. (2007). Generic nonsinusoidal phase error correction for three-dimensional shape measurement using a digital video projector. *Applied Optics*, 46(1), 36-43.
- [71] Mendoza González, E. Y. (2011). *Diseño de una metodología no destructiva para la captura digital y el dimensionamiento en 3D de discontinuidades externas en tuberías de transporte de hidrocarburos*. (Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander).
- [72] Arciniegas Villamizar, J. R. (2014). *Exploración superficial de grietas y deformaciones en tubería flexible con refuerzo no metálico para el transporte de hidrocarburos*

- a partir de la metodología de proyección de franjas. (Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander).
- [73] Arciniegas, J. R., González, A. L., Quintero, L. A., Contreras, C. R., and Meneses, J. E. (2014, May). Three-dimensional shape measurement system applied to superficial inspection of non-metallic pipes for the hydrocarbons transport. In *SPIE Sensing Technology + Applications* (pp. 91100U-91100U). International Society for Optics and Photonics.
- [74] Quintero, L. A., Arciniegas Villamizar, J., and Meneses Fonseca, J. (2014). Análisis de técnicas de inspección no destructiva en tubería flexible con refuerzo no metálico para el transporte de hidrocarburos. *Revista Colombiana de Materiales*, (5), 78-85.
- [75] Arun, K. S., Huang, T. S., and Blostein, S. D. (1987). Least-squares fitting of two 3-D points sets. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (5), 698-700.
- [76] Taguchi, Y., Jian, Y. D., Ramalingam, S., and Feng, C. (2013, May). Point-plane SLAM for hand-held 3D sensors. In *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on* (pp. 5182-5189). IEEE.
- [77] Huang, T. S., Blostein, S. D., and Margerum, E. A. (1986, June). Least-squares estimation of motion parameters from 3-D point correspondences. In *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition* (Vol. 10, pp. 112-115).
- [78] Daanen, H. M., and van de Water, G. J. (1998). Whole body scanners. *Displays*, 19(3), 111-120.
- [79] Daanen, H. M., and Ter Haar, F. B. (2013). Whole body scanners revisited. *Displays*, 34(4), 270-275.
- [80] Tong, J., Zhou, J., Liu, L., Pan, Z., and Yan, H. (2012). Scanning 3d full human bodies using kinects. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 18(4), 643-650.
- [81] Wang, R., Choi, J., and Medioni, G. (2012, October). Accurate full body scanning from a single fixed 3d camera. In *3D Imaging, Modeling, Processing, Visualization and Transmission (3DIMPVT), 2012 Second International Conference on* (pp. 432-439). IEEE.

- [82] Carreño Rodríguez, J. E., and Salazar Meza, G. (2014). *Modelo funcional óptico para la extracción de información topográfica del rostro* (Trabajo de Grado, Universidad Industrial de Santander).
- [83] Fu, Y., Wang, W., and Xiao, H. (2013). Three-dimensional profile measurement based on modified temporal phase unwrapping algorithm. *Optical International Journal for Light and Electron Optics*, 124(6), 557-560.
- [84] Ettl, S., Arold, O., Yang, Z., and Häusler, G. (2012). Flying triangulation – an optical 3D sensor for the motion-robust acquisition of complex objects. *Applied Optics*, 51(2), 281-289.
- [85] Bharathi, S., Ratnam, M. M., and Choong, K. K. (2013). Measurement of surface form of *Johannesteijsmania altifrons* leaf using phase-shift fringe projection. *Measurement*, 46(2), 855-865.
- [86] Zhang, S., and Yau, S. T. (2008). Three-dimensional shape measurement using a structured light system with dual cameras. *Optical Engineering*, 47(1), 013604-013604.