

**EL LENGUAJE Y LA TRIGONOMETRÍA:
UNA MIRADA DESDE EL PLANTEAMIENTO Y
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**MAGDA MARÍA DEL PILAR PERALTA ACEVEDO
GLADYS SORAYA RODRÍGUEZ GALVIS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008**

**EL LENGUAJE Y LA TRIGONOMETRÍA:
UNA MIRADA DESDE EL PLANTEAMIENTO Y
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**MAGDA MARÍA DEL PILAR PERALTA ACEVEDO
GLADYS SORAYA RODRÍGUEZ GALVIS**

Profesor Director
Cristian Cogollo Guevara
Especialista en Educación Matemática

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de
Licenciadas en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008**

A mis padres, por su amor y apoyo incondicional. A Erika y Pía por estar ahí.

Pilar Peralta Acevedo

A mi familia, por el inmenso amor que me han brindado y por creer en mí.

Soraya Rodríguez Galvis

AGRADECIMIENTOS

A nuestros queridos estudiantes Mayra, Mónica, Claudia y Sneyder protagonistas de esta experiencia, quienes con su entrega dieron sentido a esta investigación.

A la Escuela Normal Superior de Bucaramanga por iniciarnos en el camino de nuestra experiencia como docentes.

A la profesora Diana Jaramillo por su entrega y apoyo en nuestra formación docente.

A la profesora Sandra Evely Parada, por sus orientaciones y colaboración en el inicio de esta investigación.

A Claudia Barajas, compañera y amiga por fortalecernos en las largas jornadas de trabajo.

Al Grupo de Educación Matemática (EDUMAT-UIS) por contribuir en nuestra formación personal y profesional.

A Cristian Cogollo, profesor orientador de este trabajo.

RESUMEN

TITULO:

EL LENGUAJE Y LA TRIGONOMETRÍA: UNA MIRADA DESDE EL PLANTEAMIENTO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.*

AUTORES:

PERALTA ACEVEDO, Magda María del Pilar Peralta
RODRÍGUEZ GALVIS, Gladys Soraya **

PALABRAS CLAVES: Lenguaje cotidiano, planteamiento de problemas, resolución de problemas, trigonometría.

Este trabajo de investigación surgió de la práctica pedagógica en la Escuela Normal Superior de Bucaramanga, con estudiantes de décimo grado. Las actividades desarrolladas con los estudiantes permitieron observar cómo las deficiencias en la comprensión de lectura, el manejo inadecuado y significado dado a diferentes conceptos involucrados en el enunciado de una situación de tipo trigonométrico planteada, conllevaban a la resolución incorrecta de las mismas.

Por tal razón nos surgió la siguiente pregunta **¿Cómo influye el lenguaje cotidiano de los estudiantes en el planteamiento y resolución de problemas de trigonometría?** El objetivo de esta investigación fue **describir y analizar la influencia del lenguaje cotidiano en el planteamiento y la resolución de problemas de trigonometría**, que contribuyera en la reflexión y clarificación de la importancia que tiene para los estudiantes el conocer la naturaleza de los términos matemáticos y no matemáticos.

Esta investigación fue de tipo cualitativo, realizando para su análisis un estudio de caso con cuatro estudiantes; emergiendo tres categorías de análisis: “Comprendiendo y graficando”, “Enunciado vs. gráfico” y “Entrelazando ideas”. Estas fueron el resultado de la triangulación entre las voces de los estudiantes, de las autoras de esta experiencia y de los autores que validan el marco teórico del trabajo.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Licenciatura en Matemáticas – Director: COGOLLO GUEVARA, Cristian; especialista en Educación Matemática.

ABSTRACT

TITLE:

The language and trigonometry: A look from the approach and problem solving.*

AUTHORS:

PERALTA ACEVEDO, Magda María del Pilar Peralta

RODRÍGUEZ GALVIS, Gladys Soraya **

KEYWORDS: Everyday language, approach problems, problems solving, trigonometry.

This research grew out of teaching practice at the Escuela Normal Superior de Bucaramanga, with students from the tenth grade. The activity of the students showed how weaknesses in reading comprehension, poor handling and meaning given to various concepts involved in the formulation of a problem-type Trigonometric situation, involving the incorrect resolution of the same.

That is why we came the next question: How does the everyday language of the students influence in trigonometry approach and problem solving? The objective of this research was to describe and analyze the influence of everyday language in trigonometry approach and problem solving, which contribute to the discussion and clarification of how important it is for students to know the nature of mathematical and non mathematical terms.

This study followed a qualitative analysis conducted for a case study with four students, emerging three categories of analysis: "Understanding and Graphing," "Statement vs. Graph" and "Connecting Ideas." These were the result of triangulation between the voices of students, the authors of this experience and the authors who validate the theoretical framework of work.

* Graduation Work.

** Science Faculty - Mathematics School - Degree in Mathematics - Director: COGOLLO GUEVARA, Cristian; specialist in Mathematical Education.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
ABRIENDO CAMINO	15
PROYECTANDO NUESTRA EXPERIENCIA	21
PRESENTANDO LAS ACTIVIDADES	30
CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	
1. Comprendiendo y graficando	58
2. Enunciado vs. Gráfico	75
3. Entrelazando ideas	86
REFLEXIONANDO	99
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Taller 1 – Mayra 1	35
Figura 2. Taller 1 – Mónica 5	37
Figura 3. Taller 1 – Claudia 5	37
Figura 4. Taller 2 – Mónica 3	43
Figura 5. Taller 2 – Sneyder II	44
Figura 6. Taller 2 – Claudia II	44
Figura 7. Taller 2 – Sneyder	45
Figura 8. Taller 3 – Mónica 4	50
Figura 9. Taller 3 – Sneyder 4	50
Figura 10. Taller 4 – Sneyder 1	55
Figura 11. Taller 4 – Mónica 4	56
Figura 12. Taller 4 – Claudia 4	56
Figura 13. Taller 1 – Mayra 1	62
Figura 14. Taller 1 – Mónica 1	62
Figura 15. Taller 1 – Claudia 1	63
Figura 16. Taller 1 - Mónica 5	65
Figura 17. Taller 1 – Claudia 5	66
Figura 18. Taller 2 – Claudia 1	67
Figura 19. Taller 2 – Mónica 1	67
Figura 20. Taller 2 – Sneyder 1	67
Figura 21. Taller 1 – Mayra 4	69
Figura 22. Taller 1 – Claudia 4	70
Figura 23. Taller 3 – Mónica 4	71
Figura 24. Taller 3 – Claudia 4	72

Figura 25. Taller 2 – Ejercicio 2	75
Figura 26. Taller 1 – Ejercicio 6	76
Figura 27. Taller 1 – Claudia 3	79
Figura 28. Taller 1 - Sneyder 3	81
Figura 29. Taller 3 – Claudia 2	84
Figura 30. Taller 4 – Mayra 1	84
Figura 31. Taller 1 – Mónica 4	85
Figura 32. Taller 2 – Sneyder II.1	88
Figura 33. Taller 2 – Sneyder II.1`	89
Figura 34. Taller 2 – Sneyder II.2	90
Figura 35. Taller 2 – Sneyder II.2`	90
Figura 36. Taller 2 – Claudia III	93
Figura 37. Taller 3 – Ejercicio III.1	94
Figura 38. Taller 3 – Ejercicio III.2	95
Figura 39. Taller 4 – Mónica II.2	97

GLOSARIO

Acimut: ángulo que con el meridiano forma el círculo vertical que pasa por un punto de la esfera celeste o del globo terráqueo.

Altura: segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto.

Angulo Adyacente: se dice que dos ángulos son adyacentes si, y sólo si, tienen un lado común y los lados que quedan están en lados opuestos del común.

Elevación: la elevación es el ángulo sobre el plano horizontal.

Filológicos: Pertenciente o relativo a la filología. Ciencia que estudia una cultura tal como se manifiesta en su lengua y en su literatura, principalmente a través de los textos escritos.

Generatriz: dicho de una línea o de una figura: Que por su movimiento engendra, respectivamente, una figura o un sólido geométrico.

Gramática: Estudia el sistema de cada lengua. Las lenguas no son un listado anárquico de palabras; las palabras pueden agruparse según su forma, su función o su significado y, además, existen reglas para combinarlas y poder formar frases y oraciones coherentes. Esto es lo que estudia la gramática.

Léxico: conjunto de palabras utilizadas en una región específica, las palabras de un idioma, o incluso de un lenguaje de programación.

Lingüística: es la disciplina donde originalmente se introdujo el concepto de semántica. La semántica lingüística es el estudio del significado de las expresiones del lenguaje. La semántica lingüística contrasta con otros dos aspectos que intervienen en una expresión con significado: la sintaxis y la pragmática.

Ontológico: es una disciplina que se suele identificarse con la metafísica o bien indica una de las ramas de ésta, que estudia lo que es en tanto que es y existe. Por ello es llamada la teoría del ser, es decir, el estudio de todo lo que es: qué es, cómo es y cómo es posible.

La ontología se ocupa de la definición del ser y de establecer las categorías fundamentales o modos generales de ser de las cosas a partir del estudio de sus propiedades.

Pragmática: es el estudio del modo en que el contexto influye en la interpretación del significado. El contexto debe entenderse como situación, ya que puede incluir cualquier aspecto extralingüístico. La Pragmática toma en consideración los factores extralingüísticos que determinan el uso del lenguaje, esto es, todos aquellos factores a los que no se hace referencia en un estudio puramente gramatical.

Radio: es un segmento que va desde el centro a un punto de la circunferencia (y análogamente para las superficies esféricas).

Semejante: dicho de una figura: Que es distinta a otra sólo por el tamaño y cuyas partes guardan respectivamente la misma proporción.

Semiótica: Teoría general de los signos.

Sintáctica: parte de la gramática que enseña a coordinar y unir las palabras para formar las oraciones y expresar conceptos.

Sintagma: Conjunto de palabras estructuradas, relacionadas en torno a un núcleo. Generalmente, le corresponde un comportamiento sintáctico unitario.

Tangente: la tangente del ángulo dado está representada por el segmento de recta tangente a la circunferencia, trazada por el punto de intersección entre la circunferencia y el eje positivo de las abscisas (eje positivo de las x), comprendido entre el punto de contacto y la intersección con el lado final.

Trigonometría: la trigonometría es una rama de las matemáticas de antiguo origen, cuyo significado etimológico “es la medición de los triángulos”. La trigonometría en principio es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos. En términos generales, la trigonometría es el estudio de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión.

Estimado profesorado de matemáticas:

Hace tiempo que deseo dirigirles esta carta. He oído hablar mucho de ustedes y de lo que hacen. Tengo noticias respecto a los fascinantes y asombrosos avances de su querida matemática. He visto mil calculadoras liberadoras de los antiguos algoritmos manuales; he visto maravillosos programas de ordenador interactivos y visualizadores de sorprendentes relaciones; he visto magníficos libros de texto ilustrados a todo color; he visto como Fermat se ha quedado sin conjetura... ¡Qué saltos en el desarrollo de la disciplina! Todo esto es maravilloso y es una evidencia del progreso científico y técnico.

Pero, querido profesorado de matemáticas me pregunto si su progreso científico y organizativo ha ido acompañado con su progreso humano, educativo, emocional y actitudinal...

¿Aman más las matemáticas los chicos y chicas hoy en día? ¿Se divierten más? ¿Las aprueban más fácilmente? ¿Tienen una actitud más positiva? ¿Las usan con naturalidad fuera de clase? ¿Son más felices usándolas?... y el profesorado, ¿disfruta más haciendo clase? ¿Recibe el reconocimiento que merece su labor? ¿Selecciona críticamente lo que explica o lo que deja de explicar?... ¿y la sociedad? ¿Valora justamente la formación matemática? ¿Se hace eco de lo que avanza la matemática? ¿Usa las herramientas que la escuela le da? ¿Financia la calidad?

Nosotros sembramos a largo plazo. Los campesinos lo hacen para labrar con la llegada del buen tiempo siguiente. Nosotros sembramos para siempre y del patrimonio que ponemos al alcance de todos no reclamamos ni admiración ni veneración de ningún tipo. Queremos que nuestros discípulos hagan suyo el amor por las matemáticas y que aprovechen para su vida la formación recibida. Y queremos que lo hagan sin mirar atrás.

De la misma manera que con las letras y la gramática se dan instrumentos para hablar y escribir, para hacer poemas y cartas, querríamos con los números y la matemática dar instrumentos para calcular y representar, para pagar y cobrar, para votar y para leer, para entender y para arreglar... las matemáticas para la vida no son el recuerdo que guardarán de nosotros sino todo aquello que harán de ellas en su existencia como personas, como ciudadanos, como críticos, como demócratas, como padres, como peatones, como practicantes del bricolage, como ahorradores, como lectores, como pacientes,...

Querríamos que nuestros discípulos de hoy fuesen también unos padres y madres que supiesen transmitir a sus hijos e hijas el entusiasmo contagiado por nuestro magisterio. Con esta fe en nosotros mismos y en lo que hacemos, seguro que podremos mover montañas y transmitir lo que realmente queremos que no son teoremas viejos sino matemáticas vivas, que no son algoritmos sino formas de ver y entender el mundo... matemáticamente.

Y recordando Martín Luther King Jr., yo también quiero decir que: "¡Hoy, he tenido un sueño!"

He soñado que el alumnado de matemáticas de repente se entusiasmaba por ir a las clases y que cuando sonaba el timbre entonces decían contrariados: no ¿podríamos alargar un poco más la clase?... los he soñado haciendo geometría con las manos y estadísticas en la calle, leyendo un diario con pertinentes observaciones... los he soñado abrazados llorosos a sus maestros/as al acabar el curso y sacando provecho de todo lo aprendido para planificar un buen viaje... he soñado a los chicos y chicas divertidos, sorprendidos, curiosos, amorosos, satisfechos, inquisitivos, orgullosos, críticos, afables,...

"¡Hoy, he tenido un sueño!"

He soñado que el profesorado de matemáticas se volvía menos riguroso y más tierno, que relativizaba las programaciones oficiales, que evaluaba teniendo en cuenta todas las dimensiones educativas y enterraba las viejas rutinas de selección, que tenía ganas locas de ir al aula y afuera para vivir las matemáticas, que buscaba más ejemplos que contraejemplos, que el profesorado salía a la calle orgulloso y era saludado con cordial aprecio por todos... he soñado un profesorado innovador, animado, entusiasmado, crítico, libre, reconocido, estimado, creativo, gratificado,...

"¡Hoy, he tenido un sueño!"

He soñado que la sociedad prestaba más atención a la formación que al entretenimiento, que promovía más la educación viva que la cultura de museo, que daba las gracias a tantos profesores y profesoras que se lo merecen, que ayudaba y no delegaba la educación de los chicos y chicas,... y en esta sociedad he visto políticos más preocupados de la actuación en clase que de los decretos reguladores, políticos que inauguraban nuevas dotaciones de materiales y no edificios, que apoyaban iniciativas innovadoras y no derechos adquiridos, que luchaban contra el paro desde la formación y no el subsidio... he soñado una sociedad estimulante, comprensiva, agradecida, incentivadora, comprometida, justa, abierta, preparada,...

.Ya ven que he tenido muchos sueños. Si quieren pueden llamarlo también utopías. Nosotros hemos de "continuar trabajando apasionadamente y vigorosamente por hacer posible que los sueños sean realidades". Nuestros sueños de hoy son nuestros retos para mañana.

También nosotros, profesorado de matemáticas, tenemos derecho a hablar de ideales, y de amor y de vida, y de futuro y de colores, y de horizontes y de estrellas. Nosotros no somos únicamente los portavoces de axiomas indiscutibles y verdades racionales. Nosotros somos apasionados por las matemáticas y por compartir esta pasión con los demás. Nosotros creamos ilusión y estímulo, sorpresa y alegría desde la generosidad de nuestro decidido amor por el progreso y la formación de las personas. La matemática rigurosa se enseña con la mente, la matemática hermosa se enseña con el corazón.

¡Sean felices!" (Alsina, sin fecha).

ABRIENDO CAMINO

En el momento de enseñar matemáticas, para los involucrados en la educación matemática debe resultar de suma importancia aquel aspecto que se relaciona con la comunicación. El lenguaje utilizado en los discursos de clase debe tener presente las partes implicadas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, con el fin de que profesores y alumnos puedan establecer una verdadera y eficaz interacción verbal, que conlleve a pensar en la matemática como una disciplina importante en sus prácticas cotidianas.

El lenguaje, por la actividad mental que genera es una pieza fundamental para la enseñanza de las matemáticas creando la base para una posterior formalización del pensamiento matemático, por ende, podríamos decir que tanto el pensamiento y el lenguaje tienen una relación estrecha en lo que se refiere a su utilidad e importancia en la comprensión de la matemática.

El lenguaje es el objeto de estudio de la lingüística. El lenguaje es la capacidad humana de asociar significados a determinados conceptos, asociación de carácter convencional e intencional, que se dan en actos comunicativos reales en los que aspectos tanto sociales como culturales resultan centrales; en este sentido, conceptualizar el lenguaje como: “[...] la construcción de la significación a través de los múltiples códigos y formas de simbolizar; significación que se da en complejos procesos históricos, sociales y culturales en los cuales se constituyen los sujetos en, y desde el lenguaje” (MEN, 1998, p. 46), lo orientaría hacia el sentido dado a la de construcción del significado y hacia el acto comunicativo de los mismos.

El lenguaje es el reflejo de la interacción del individuo dentro de su cultura y por esta razón surge la necesidad de una negociación de significados en el aula de clase, que estén

dirigidos a clarificar los significados compartidos de las palabras usadas en la comunicación. Este es el motivo que “nos conduce a la cuestión del papel que desempeña el lenguaje en el aprendizaje y, en particular en el campo de la educación matemática, de cómo los estudiantes llegan a aprender lo que es un argumento convincente/válido en matemáticas mediante la negociación de significados” Godino y Llinares (sin fecha, p. 5).

El pensamiento es la actividad de la mente y creación de la misma. El pensamiento nace a través de las palabras, una palabra sin pensamiento es una cosa muerta y un pensamiento carente de palabras permanece en la sombra. El pensamiento es la expresión del ser racional del que procura descubrir hasta lo más mínimo para convertirlo en un conocimiento. Expresión que mediada por el lenguaje permite al ser humano formular conjeturas, generalizar y argumentar, procesos precisamente del pensamiento matemático.

Fue a partir de estas ideas, de observaciones y de reflexiones hechas durante nuestro Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I, acerca de las deficiencias de los estudiantes en la comprensión de lectura y el significado inadecuado dado a los términos matemáticos y no matemáticos involucrados en el enunciado de una situación de tipo trigonométrico planteada, que nos surgió la pregunta: **¿Cómo influye el lenguaje cotidiano de los estudiantes en el planteamiento y resolución de problemas de trigonometría?** Interrogante que nos llevó a enfocar la investigación en el lenguaje utilizado en el aula de clase, en especial en las clases de trigonometría, y las dificultades que este puede representar para los estudiantes al no conocer el significado de los diversos términos matemáticos y no matemáticos usados por el profesor. Investigación que delimitamos planteando el siguiente objetivo general: **describir y analizar la influencia del lenguaje cotidiano en el planteamiento y resolución de problemas de trigonometría;** y los siguientes objetivos específicos: identificar vocablos que conducen a ambigüedades en el momento de resolver un problema, desarrollar habilidades lecto-escritoras dentro de la clase de matemáticas, reconocer la aplicación de la trigonometría en la vida cotidiana y realizar un aporte al mejoramiento de la enseñanza de la trigonometría.

En este sentido, nuestra experiencia de aula se convirtió en la mejor aliada para describir y analizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la trigonometría, junto con los problemas de comunicación que surgen de la misma práctica en el salón de clase. Para ello, enmarcamos la investigación dentro de la metodología cualitativa, que tiene como objetivo la descripción de un fenómeno y comprensión del mismo.

Ante esto, Lüdke y André (1985) citado por Cogollo (2006), mencionan:

El caso puede ser similar a otros, pero en distinto tiempo, pues tiene un interés propio singular, [...] El interés, por tanto, incide en aquello que es único, particular, por lo que posteriormente vienen a quedar diferentes semejanzas con otros casos o situaciones. Cuando queremos estudiar algo singular, que tenga un valor en sí mismo, debemos escoger el estudio de caso.

La investigación la desarrollamos con los estudiantes de décimo dos de la Escuela Normal Superior de Bucaramanga Sede C, una institución de carácter público de Bucaramanga. Sin embargo, para el análisis de la información recolectada por medio de talleres, voces de los estudiantes durante los mismos y una entrevista semi-estructurada, solo presentaremos el trabajo de cuatro estudiantes¹: Mayra Alejandra Ayala, Mónica Andrea Toloza, Claudia Patricia Larrota y Sneyder Orlando Noriega, quienes fueron seleccionados como una muestra de la diversidad estudiantil que se presenta en el aula de clase.

Buscamos tomar los trabajos de un reducido grupo de estudiantes en el que se encontraran desempeños académicos sobresalientes, regulares y deficientes, con el fin de no excluir la representación de algunos de los alumnos que pueden ser encontrados en el aula de clase. Los estudiantes escogidos durante el trabajo en sus clases de trigonometría, mostraron habilidades y dificultades en el desarrollo de las actividades de aprendizaje, por ejemplo,

¹ Los nombres de los estudiantes utilizados en el presente trabajo son reales, teniendo plena autorización de los mismos.

falencias en la apropiación de conceptos de algunos términos matemáticos, así como la agilidad y destreza en el momento de resolver problemas.

Consideramos que al analizar los talleres de estos cuatro estudiantes, estaríamos teniendo en cuenta las diferencias individuales que se pueden observar dentro de un salón de clase.

A continuación haremos una pequeña presentación de los estudiantes que hacen parte de esta investigación:

Mayra es una joven de 16 años. Siempre esta en los puestos de atrás del salón realizando tareas de otras asignaturas, sin embargo, es quien la mayoría de las veces responde acertadamente a las preguntas que el profesor hace durante una explicación. Aunque no manifiesta tener gusto por las matemáticas, su desempeño académico es muy bueno.

Mónica tiene 15 años. Ella es bastante inquieta en clase, refiriéndonos a inquieta en el sentido que siempre quiere saber más de lo que el profesor enseña en el salón, ella no se conforma con las explicaciones dadas, constantemente indaga sobre el por qué de conclusiones, procedimientos y algoritmos aplicados. Además, pide al profesor que le asigne más problemas para trabajar en casa; sus mismos compañeros afirman que debería estudiar matemáticas porque es muy buena para ello.

Claudia es bastante callada, tiene 16 años. No suele participar mucho en clase, sin embargo, se esfuerza por realizar cada uno de los ejercicios planteados; considera que las matemáticas son trabajables siempre y cuando se tenga el cuaderno abierto.

Sneyder tiene 16 años. Manifiesta no comprender las matemáticas y por esta razón siempre pierde las evaluaciones. La concepción que tiene de las matemáticas obstaculiza su proceso de aprendizaje al considerar difíciles las actividades a desarrollar.

En la planeación de las actividades tuvimos en cuenta que para aprender matemáticas es necesario plantear y resolver problemas, estrategia didáctica que incorpora elementos de la

práctica cotidiana haciendo más significativo el aprendizaje de la trigonometría (siendo este el caso) para el estudiante. Es decir, consideramos que el diseñar actividades basadas en el planteamiento y resolución de problemas contribuiría para nuestra investigación, desde el punto de vista que es en estas actividades donde los estudiantes requieren aplicar conceptos matemáticos, además de comprender y conocer el significado de cada uno de los términos matemáticos y no matemáticos allí enunciados como requisitos fundamentales para el diseño de estrategias correctas de solución. Actividades que se esbozaron con el fin de responder la pregunta que surgió y alcanzar el objetivo planteado.

Nuestro trabajo está conformado por cuatro capítulos, de los cuales haremos referencia a continuación:

En el primer capítulo, **“Proyectando nuestra experiencia”**, exponemos el camino seguido para la elaboración de este trabajo. Narramos lo que nos motivó a plantear esta experiencia de aula, el objetivo propuesto, la importancia del tema a desarrollar, entre otros aspectos. También describimos cómo fue la ejecución de los talleres y cómo realizamos el análisis posterior de los mismos. Se enfatiza más acerca de la validez del estudio de caso.

En el segundo capítulo, **“Presentando las actividades”**, mostramos las diferentes actividades desarrolladas con los estudiantes, pero sin hacer ningún tipo de análisis sobre estas, con el fin que el lector en este capítulo conozca algunas de las respuestas planteadas por los estudiantes durante el desarrollo de las mismas.

En el tercer capítulo, **“Categorías de análisis”**, abordamos tres categorías emergentes de análisis que recogen toda la experiencia de aula, en las que realizaremos una triangulación entre las voces de los estudiantes, las voces de los autores que validan nuestro trabajo y nuestras voces como reflexión de esta experiencia. El análisis de estas categorías fue el resultado de la recolección de datos que los estudiantes tuvieron en la solución de los talleres planteados. Las categorías analizadas fueron: “Comprendiendo y graficando”; “Enunciado vs. Gráfico” y “Entrelazando ideas”.

Para finalizar, presentamos el capítulo cuarto, **“Reflexionando”**, donde damos las conclusiones a las que pudimos llegar al terminar esta experiencia que nos sirvieron para fortalecer nuestro quehacer pedagógico, así como algunas recomendaciones generales.

PROYECTANDO NUESTRA EXPERIENCIA

El lenguaje y las matemáticas tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad educativa. Las matemáticas dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales y los posibilitan para explorar y actuar en la realidad. El lenguaje permite a los escolares dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, potenciar el pensamiento y desarrollar hábitos de razonamiento.

Aprender matemáticas implica plantear y resolver problemas, experimentar, desglosar y abstraer para encontrar sentido a cada una de las ideas matemáticas. Estos, entre otros aspectos son precisamente los objetivos de la resolución de problemas.

“La propuesta de aprender matemáticas que identifica a la resolución de problemas como importante, reconoce a las matemáticas como un cuerpo de conocimientos no terminado [...]. El estudiante, en el aprendizaje de esta materia, discute ideas, emplea ejemplos y contraejemplos, critica y valoriza los resultados, y comparte que la búsqueda de argumentos sólidos es esencial en la resolución de problemas”.
Santos (1997, p. 12.)

Sin embargo, para que el estudiante discuta y proponga nuevas ideas en un problema se hace fundamental que conozca y maneje el lenguaje adecuado en determinados contextos, especialmente el matemático, para que vea las matemáticas como una disciplina con sentido que se refleja en su práctica cotidiana.

Desde la década de los años 60 se ha venido dando la importancia requerida al discurso utilizado en clase y el lenguaje usado en los libros de texto. Por medio de trabajos de investigación, en los que algunos autores empezaron a considerar y estudiar el lenguaje

natural como un factor determinante en la comprensión de la matemática, pues el entender el significado de lo que se lee, ubicarlo en un contexto determinado e interpretar la representación simbólica de los conceptos matemáticos, conllevan a la búsqueda de estrategias y por ende a soluciones correctas de las situaciones problema planteadas en el aula de clase.

De esta forma se es coherente con Pimm (1999, p. 115) quien nos muestra que:

“A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes, se producen innumerables confusiones cuando, por ejemplo, el profesor emplea términos del llamado “dialecto” matemático y los alumnos los interpretan de acuerdo con el inglés corriente, tratando de emplear significados no matemáticos en contexto matemático”

Muchos de los objetos matemáticos son el resultado de preconceptos espontáneos que se encuentran en el medio social y cultural del estudiante, que a través de la comunicación y socialización de los mismos mediados por el lenguaje cotidiano, se constituyen en una verdadera conceptualización de la matemática. Luego, se puede estar de acuerdo con Pimm al querer brindar importancia a la expresión: “las matemáticas son un lenguaje”.

La pregunta que dio lugar a esta experiencia, **¿Cómo influye el lenguaje cotidiano de los estudiantes en el planteamiento y resolución de problemas de trigonometría?**, tiene en cuenta tanto el lenguaje natural como el aprendizaje significativo de las matemáticas, ya que a partir de ella se pudo ver cómo la comprensión de cada uno de los términos matemáticos y no matemáticos involucrados en el enunciado de un problema, toma importancia para el estudiante al permitirle diseñar estrategias de solución y plantear situaciones nuevas, que de una u otra manera los lleva a aprender, razonar, comunicarse matemáticamente a través de signos, gráficos, escritos, usando un lenguaje matemático que les deja ver la importancia de la trigonometría (siendo este el caso) en diversos problemas presentes en el mundo real.

Esta pregunta surgió durante nuestra experiencia de aula como parte de nuestra formación docente. Las dificultades presentadas por los estudiantes en el momento de enfrentarse a una situación problema en la que debían involucrar conceptos matemáticos ya aprendidos para ubicarlos en un contexto determinado, mostraron cómo la ausencia de un lenguaje matemático y la influencia del cotidiano los llevaban a dar significados erróneos de los términos involucrados en el enunciado de un problema, conduciéndolos por ende a la resolución incorrecta del mismo. Además, la misma incompreensión del lenguaje creaba en los estudiantes una apatía por el aprendizaje de la trigonometría al no encontrar significativo, en su mundo real, el objeto de estudio de ésta.

Una de las situaciones que llevó a plantearnos la pregunta de investigación fue el momento en el cual se le planteó una situación problema de tipo trigonométrico cuyo contexto era ajeno al contexto próximo de los estudiantes de tal forma que fue difícil para ellos interpretarla o siquiera dotarla de sentido.

Dicha situación describía la situación de un puente levadizo con secciones giratorias que se encontraba sobre el nivel del mar. Los estudiantes se mostraron confundidos al no comprender lo que cubría el término nivel del agua ni entender bien el movimiento realizado por las secciones del puente, características que proporcionaban herramientas para la creación de las estrategias a seguir haciendo uso de las funciones trigonométricas. Sin embargo, a pesar de que el enunciado estaba acompañado de un dibujo, que se supone les aclararía el problema, este resultó ser de poca ayuda al momento de resolverlo.

Lo anterior nos llevó a describir y analizar la influencia del lenguaje cotidiano desde el planteamiento y resolución de problemas de tipo trigonométrico, en especial problemas que involucraban las funciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno, temáticas que abordan el objeto de estudio de la trigonometría: la resolución de triángulos.

Es importante tener presente que otras personas también se han interesado y han explorado sobre algunos aspectos que se relacionan con nuestro tema de investigación. Aunque no son muchos los autores que han abordado esta temática, mencionaremos algunos de los trabajos que revisamos, con el fin de convertirlos en una referencia para nuestra investigación.

Precisamente, LUZ MANUEL SANTOS TRIGO y su libro *“Principios y métodos de la resolución de problemas”* (1997), nos presenta la resolución de problemas como una forma de pensamiento en el que el estudiante se torna activo en la búsqueda permanentemente de recursos, en el desarrollo de habilidades y estrategias de lectura, en la discusión de ideas, en el uso de representaciones simbólicas y gráficas, en la adquisición de nuevos vocablos, entre otras destrezas; que lo conduzca a la resolución correcta de problemas y lo lleve por el camino evolutivo de su proceso educativo.

Otro autor que hemos tenido en cuenta es JUAN GODINO, en su tesis *“Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática”* (2003), quien presenta una colección de trabajos dedicados al significado y comprensión de los objetos matemáticos. Trabajos que buscan clarificar la naturaleza e importancia de los mismos como un requisito primordial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Además, propone un modelo ontológico y epistemológico para describir y explicar la cognición matemática junto con su desarrollo en el contexto educativo.

JUAN GODINO, VICENT FONT Y MIGUEL WILHELMI realizaron un *“Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta”* (2006), en el que tomaron un libro de quinto grado con el fin de identificar algunos criterios utilizados en la enseñanza de la suma y la resta teniendo en cuenta que tan adecuados eran para la modificación de las estructuras cognitivas.

Los autores para este análisis, tiene en cuenta que las lecciones propuestas en los libros son las que condicionan el proceso de enseñanza de un tema, y por ello invitan a los profesores a evaluar las actividades propuestas con el fin de seleccionar las más adecuadas para el nivel educativo de los estudiantes.

Godino, Font y Wilhelmi, toman cinco criterios para valorar la idoneidad de los textos:

- Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales (pretendidos), respecto a un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva: grado de proximidad de los significados institucionales a los significados de los estudiantes.
- Idoneidad semiótica: se refiere al conflicto generado por la atribución de significados de parte de dos sujetos, en este caso la institución y el estudiante que participan en una interacción comunicativa.
- Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad de recursos didácticos para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad emocional: grado de interés y motivación del estudiante durante el desarrollo de las lecciones de clase.

También hemos leído trabajos de PIEDAD LONDOÑO MUÑOZ quien en su investigación *“De los discursos literarios a los conocimientos matemáticos: Una aproximación cultural a la construcción de conceptos”* (2004), intenta explorar mecanismos que intervienen en la formación de nociones matemáticas. Además, constituye al sujeto como parte de un grupo que le proporciona instrumentos para desarrollarse en una cultura, por ende considera el lenguaje como una herramienta importante para el intercambio de ideas dentro de esta. Plantea en su investigación cómo, dentro del proceso de desarrollo del conocimiento matemático, se crea un espacio de negociación de este tipo de significados en la lectura de cuentos infantiles. Dicho de otra manera, considera que los cuentos infantiles generan información lingüística relativa a nociones matemáticas que proporcionan elementos para su mejor comprensión. Londoño estudió el recorrido de los significados manipulados en el lenguaje cotidiano hasta los procesos verdaderamente matemáticos.

Otros autores de referencia son: ROSALBA DUITAMA y DANIEL TÉLLEZ con su trabajo de especialización “*Estrategias que el estudiante usa para resolver problemas trigonométricos con triángulos rectángulos*” (2006), ellos en su experiencia de aula partieron de un análisis cualitativo realizado a las diferentes estrategias que el estudiante de décimo grado utiliza en el momento de abordar una situación problema. Describen cómo las deficiencias de pasar de un lenguaje natural a un lenguaje matemático obstaculizan la comprensión de los conceptos matemáticos, su relación y uso en la resolución de problemas.

En su análisis tuvieron en cuenta tres categorías: “Realizando un dibujo”, “Aprender a aprender” y “Otras estrategias que utilizan los estudiantes al resolver problemas sobre triángulos rectángulos”. En estas exponen lo fundamental que es para los estudiantes que las situaciones vengan acompañadas por un dibujo que les muestre más claramente el problema descrito, para tener una mejor orientación en sus estructuras mentales. Sin embargo, esto no garantiza la eficacia de las estrategias usadas ya que el mismo dibujo puede resultar confuso para los estudiantes dando una interpretación errónea de la situación.

Concluyen cómo el proporcionárseles un problema con un lenguaje matemático que se conecte apropiadamente con los datos dados y la pregunta, permite al estudiante resolverlo a pesar de la interpretación que hubiese hecho de la situación. Durante los talleres realizados los estudiantes dejaron ver como las dificultades en la interpretación del lenguaje escrito y gráfico, se manifestaban a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas sobre triángulos rectángulos.

En su trabajo de grado “*Matemáticas Vs. Lenguaje*” (1991), KUEYLA SORAYA AVELLANEDA, describió la relación entre el “vocabulario” y el proceso de aprendizaje en el área de matemáticas. Según ella, en algunos casos los fracasos en esta área se deben a “deficiencias en la aptitud verbal” más que en la poca preparación o capacidad de un

estudiante. Además, consideró que el no dar la importancia requerida al lenguaje común se puede generar rupturas en el aprendizaje de las matemáticas.

Antes de continuar queremos definir algunos términos que nombraremos en varias ocasiones durante el desarrollo de esta investigación. Referente, significado y significante hacen parte de los términos que definiremos a continuación:

El referente, según la definición dada en el diccionario de la Real Academia, es un objeto de la realidad extralingüística (se dice de todo elemento externo a la lengua que ayuda a la desambiguación de palabras y frases) a los que remite el signo (unidad mínima de la oración, constituida por un significante y un significado).

El significante, como es definido por Ferdinand de Saussure², es el elemento constituido del signo, que aporta la imagen acústica. Esta “no es el sonido material, cosa puramente física, sino un huella psíquica, la representación que de él nos da el testimonio de nuestros sentidos”. De la misma manera, el significado se convierte en el tecnicismo especializado para designar el concepto o idea, como elemento constitutivo del signo.

Referente a la metodología que implantamos ya habíamos hecho algunas notas generales sobre la misma, sin embargo, queremos comentar con más detalle la estrategia utilizada durante esta experiencia. La investigación que se abordó fue el estudio de caso, el cual estudia un individuo o grupo entorno a una situación lo más preciso posible. Diversas

² (Ginebra, 1857-1913) Lingüista suizo. Estudió sánscrito en Leipzig, bajo el influjo de la escuela de neogramáticos, que pretendía renovar los métodos del estudio de la gramática comparada. En 1880, fue nombrado profesor de gramática comparada en la École des Hautes Études de París, y participó activamente en los trabajos de la Sociedad lingüística. En 1891 regresó a Ginebra, donde fue profesor de sánscrito y, entre 1907 y 1910, de gramática comparada y de lingüística general. Fueron sus discípulos C. Bally y A. Séchehay quienes publicaron su *Curso de lingüística general* (1916), una síntesis de sus tres últimos años como profesor extraída a partir de los apuntes de clase. A pesar de que la repercusión de dicha obra no fue inmediata, sí resultó decisiva para el desarrollo de la lingüística en el siglo XX. A sus lecciones se deben una serie de distinciones fundamentales, tales como la de lengua (sistema ideal y social) y habla (realización concreta, individual), pero sobre todo su definición de signo como entidad psíquica formada por un significante y un significado, los cuales serían inseparables.

definiciones indican que el estudio de caso implica un proceso de indagación caracterizado por ser detallado, comprensivo y sistemático del objeto de interés.

Los estudiantes que escogimos para hacer el análisis cualitativo los habíamos venido observando desde nuestro Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I, permitiéndonos tener mayor información sobre sus ritmos de aprendizaje, su desempeño y relación con las matemáticas.

Las actividades planeadas para trabajar con los estudiantes fueron tomadas de libros de texto usados convencionalmente en las aulas de clase. Se llevaron a cabo por medio de talleres divididos en cuatro sesiones de tres horas, en los que tanto el trabajo individual como grupal hicieron parte de estos, teniendo en cuenta que durante su desarrollo los aportes y comentarios hechos por sus propios compañeros provocaron ecos en el desempeño de sus actividades. Concerniente a la entrevista hecha, esta tenía como propósito que los estudiantes manifestaran aspectos cognitivos (dominio sobre algunos términos matemáticos involucrados en los talleres), sus argumentos sobre el planteamiento y resolución de problemas y su actitud frente a la trigonometría.

Realizadas las actividades con los estudiantes iniciamos el análisis cualitativo dentro del cual tuvimos que revisar varias veces las actividades desarrolladas: talleres, entrevista, conversaciones con sus compañeros y registros escritos en los talleres; proceso nada fácil en el que debimos detallar e ir más allá de los datos recolectados que nos proporcionaran información relevante para nuestra investigación. A partir del mismo establecimos tres categorías de análisis que recogieron la mayor parte de la información de los estudiantes durante la experiencia de aula. En estas categorías incluimos las voces de los estudiantes, los autores que sustentan nuestro trabajo y nuestros puntos de vista y conclusiones sobre la experiencia vivida. Estas fueron:

- ❖ Comprendiendo y graficando: en esta categoría de análisis se incluyen las soluciones dadas por los estudiantes que estuvieron enfocadas en la comprensión de

situaciones problema y en la interpretación de un lenguaje matemático escrito, como requisito para la construcción de gráficas que los condujeran a diseñar estrategias correctas de solución. En esta categoría se dan las observaciones y voces de los estudiantes al presentar destrezas y dificultades en la transcripción de un lenguaje escrito a un lenguaje gráfico.

- ❖ Enunciado vs. Gráfico: en esta categoría de análisis se recoge la información de los estudiantes relacionada con la comprensión de una situación problema, relatada tanto en un lenguaje escrito como en lenguaje gráfico, mostrando las dificultades presentadas por los estudiantes en el momento de dar un significado matemático que relacione los lenguajes utilizados, con el fin de entrelazar la información y plantear estrategias de solución.
- ❖ Entrelazando ideas: en esta categoría de análisis se muestra como los estudiantes plantean problemas a partir de palabras, textos o gráficos dados, observando específicamente el lenguaje que cada uno de ellos maneja y la habilidad o dificultad que tienen para expresar ideas de forma escrita. Se puede contemplar como los estudiantes presentan enunciados con situaciones lo más cercanos a su realidad, la manera en que se han apropiado de algunos conceptos matemáticos y lo complejo que puede ser el identificar los elementos necesarios para plantear problemas y dar solución a los mismos.

PRESENTANDO LAS ACTIVIDADES

Ya mencionados algunos de los aspectos que hacen parte de esta investigación, consideramos que es momento de enfocarnos en las actividades realizadas ya que fueron éstas las que dieron forma a este trabajo. Además, nos permitieron evidenciar actitudes, estrategias, éxitos, fracasos y la evolución de cada uno de los estudiantes.

Cada una de las actividades se diseñó para ser resueltas de manera individual. Aunque pareciera que fueran pocas cada una tenía un objetivo específico, en la que los estudiantes debieron confrontar los conocimientos ya adquiridos, para facilitar el planteamiento o la resolución de determinadas situaciones problema de tipo trigonométrico. Se pretendía que los talleres planteados tuvieran problemas con enunciados que utilizaran diferentes tipos de léxico, para así poder observar las soluciones que ellos podían dar según la influencia de su lenguaje natural en los vocablos matemáticos y no matemáticos empleados en el enunciado.

De esta manera buscábamos, además de fortalecer conceptos matemáticos, favorecer procesos tanto matemáticos como lingüísticos, los cuales llevarían a una mejor interpretación y comprensión de lectura en los problemas presentados, en las que fuera el alumno quien resultara favorecido.

A continuación presentaremos las actividades realizadas, sin dar un análisis profundo de las mismas. Serán mostradas en el mismo orden en que fueron propuestas a los estudiantes mencionando la intencionalidad con que fueron planteadas, además, se mostrarán algunas soluciones dadas por los estudiantes. Las actividades fueron: 1. EXPLORANDO MIS CONOCIMIENTOS. 2. REEMPLAZANDO Y PLANTEANDO. 3. LEYENDO Y GRAFICANDO. 4. EXAMINANDO Y PLANTEANDO.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO II
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA



Nombre: _____ Fecha: _____

Grado: _____

EXPLORANDO MIS CONOCIMIENTOS



¡Hola! Como usted sabe somos estudiantes de la Universidad Industrial de Santander y estamos llevando a cabo el proyecto de investigación "**Cómo influye el lenguaje cotidiano del estudiante en el planteamiento y resolución de problemas**". Por ser un proceso en el que necesitamos recolectar datos, pedimos el favor resuelva esta guía aportando lo que usted considera importante. Recuerde que esto no es una evaluación ni su desempeño en ella va a influir sobre su proceso académico. Lo único que le solicitamos es que sea muy sincero con sus fortalezas y debilidades, pues nos permitirá avanzar en el desarrollo de nuestro trabajo como

investigadoras.

1. Los lados de un paralelogramo miden 2.5 cm y 5.8 cm. El ángulo adyacente a esos dos lados mide 65° . Halla la medida de la diagonal más larga del paralelogramo.

Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

2. Al moverse un péndulo de 100 centímetros de longitud forma un ángulo de 36° con la vertical. ¿Qué distancia sube el extremo inferior del péndulo respecto a la horizontal?

Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

3. Un observatorio espacial gira alrededor de la tierra a una altura de 380 millas. Cuando un astronauta mira al horizonte de la tierra, el ángulo θ que se muestra es de 65.8° . Usa esta información par calcular el radio R de la tierra.



Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

4. Una estatua de 8.9 m de altura se sitúa sobre un pedestal. Si desde un sitio a 48 m del pie del pedestal se observa el extremo superior de la estatua con un ángulo de elevación de 26° , ¿Cuál es la altura del pedestal?

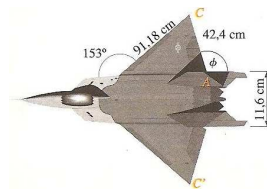
Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

5. Si en un túnel que desciende con un ángulo de 15° respecto al nivel del suelo una persona avanza una distancia de 75 metros, ¿a qué profundidad se encuentra dicha persona de la superficie?

Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

6. En la figura se observa el plano superior de un avión caza a reacción.

- Determina el ángulo ϕ
- Si el fuselaje tiene 11,6 cm de ancho, calcula la envergadura CC' .



Si resolvió el ejercicio, cuéntenos qué aspectos tuvo en cuenta para hacerlo; de lo contrario explique que causó su dificultad.

*María del Pilar Peralta.
Gladys Soraya Rodríguez.
Estudiantes Lic. Matemáticas.*

En primera instancia, se aplicó una prueba diagnóstica con la que buscábamos confrontar y determinar aquellos conceptos matemáticos que presentaban dificultad para los estudiantes. Además, se pretendía observar cuales de los vocablos claves usados en el enunciado de un problema presentaban serias dificultades para el estudiante en el momento de plantear una estrategia de solución. Se les planteó diversas situaciones problema que debían ser argumentadas por el estudiante, es decir, se les pedía especificar qué aspectos habían tenido en cuenta para seguir una estrategia de solución y manifestar la causa de su dificultad en el caso de que no pudieran resolverlo.

Encontramos que cuando los estudiantes fueron a resolver el primer problema de esta actividad, **“Los lados de un paralelogramo miden 2,5 cm y 5,8 cm. El ángulo adyacente a esos dos lados mide 65°. Halla la medida de la diagonal más larga del paralelogramo”**, no tuvieron en cuenta la frase que les hablaba sobre el ángulo adyacente³, pues cuando se hace referencia a éste es respecto a otro ángulo y no a uno de los lados.

Sin embargo, algunos estudiantes tienen el pensamiento: “si existe un problema, debe existir su solución”, luego en el intento de dar una solución al problema dejaron ver las dificultades que tienen con algunos conceptos matemáticos básicos, de los que consideramos no deberían existir aún vacíos conceptuales. Por ejemplo, Mayra ubicó el ángulo de 65° en uno de los ángulos obtusos del paralelogramo, como lo muestra la figura:

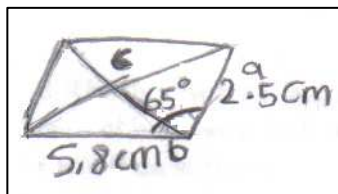


Figura1. Taller 1 – Mayra 1

Al responder el segundo problema, **“Al moverse un péndulo de 100 centímetros de longitud forma un ángulo de 36° con la vertical. ¿Qué distancia sube el extremo inferior del péndulo respecto a la horizontal?”**, nosotras habíamos considerado que la

³ Véase p. 103

representación gráfica de la situación sería una ayuda para los estudiantes en el momento de comprender el enunciado y diseñar una estrategia de solución. La línea punteada mostraba el desplazamiento del péndulo y les permitía evidenciar que “la altura del poste” (como ellos lo llamaban) tenía la misma medida del péndulo, sin embargo resultó ser un motivo de confusión para ellos. Así nos lo hizo saber Mayra:

“Me confunde el croquis de esa figura circular de cuando el péndulo sube”

Al responder el tercer ejercicio, **“Un observatorio espacial gira alrededor de la tierra a una altura de 380 millas. Cuando un astronauta mira al horizonte de la tierra, el ángulo θ que se muestra es de 65.8° . Usa esta información para calcular el radio R de la tierra”**, este problema nos permitió observar la gran dificultad que se les presentó a los estudiantes en el momento de relacionar conceptos e imágenes en términos matemáticos. Ellos les asignaron significados que no concordaban precisamente con la situación, como lo fue el término altura.

Al solucionar la cuarta situación, **“Una estatua de 8.9 cm de altura se sitúa sobre un pedestal. Si desde un sitio a 48 m del pie del pedestal se observa el extremo superior de la estatua con un ángulo de elevación de 26° , ¿Cuál es la altura del pedestal?”**, los estudiantes no presentaron mayores dificultades, pues para ellos los términos resultaron ser bastante claros.

El quinto problema, **“Si en un túnel que desciende con un ángulo de 15° respecto al nivel del suelo una persona avanza una distancia de 75 metros, ¿a qué profundidad se encuentra dicha persona de la superficie?”**, resultó sencillo para Mayra, pues ella se centro en la frase que mencionaba un túnel que descendía, llevándola a pintar primero el suelo para después ubicar el “tubo” (como ella lo llamó) que descendía. A pesar de esto, ella expresó tener dificultad con el problema al ubicar el ángulo dado, lo que mostró que dejó a un lado el enunciado del problema donde le daba una pauta (... un ángulo de 15°

respecto al nivel del suelo...) para su representación en el gráfico. Pese a esto, Mayra resolvió de manera acertada el ejercicio.

Aunque Mónica intentó hacer un bosquejo de lo que se planteó tuvo problemas en el momento de ubicar el ángulo, pues pasó por alto la definición de ángulo agudo, ubicando los 15° como un ángulo obtuso en su dibujo. Además, parece que no le dio importancia al concepto de profundidad.

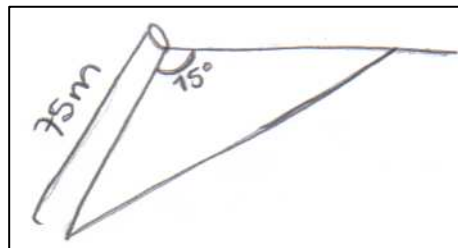


Figura 2. Taller 1 – Mónica 5

Claudia hizo una representación gráfica errónea de la situación planteada, pareciera que no dio importancia a las palabras descende y profundidad. Aunque proporcionó una solución (equivocada) de la situación, no se percató que para haber descendido 75 metros encontrarse a 1 metro de profundidad sería algo un poco dudoso para el ángulo de 15° dado en el enunciado.

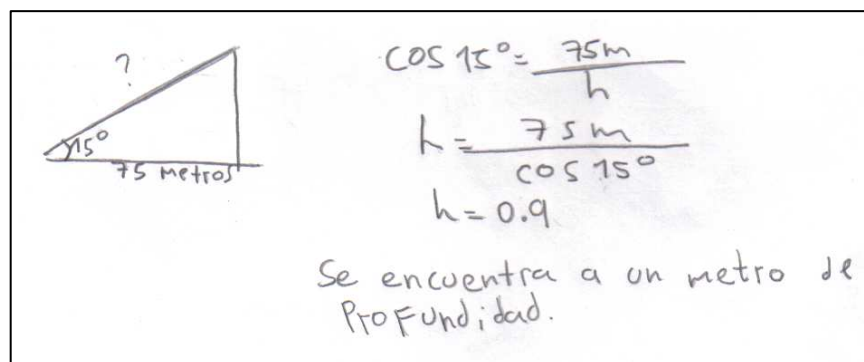


Figura 3. Taller 1 – Claudia 5

En la última situación, **“En la figura se observa el plano superior de un avión caza a reacción. a) Determina el ángulo Φ . b) Si el fuselaje tiene 11,6 cm de ancho, calcula la envergadura CC”**, los estudiantes argumentaron la no resolución del problema expresando por desconocer el fuselaje y la envergadura de un avión. Consideramos que aunque el lenguaje se mostrara como un limitante, no era un impedimento para resolver el ejercicio, ya que para hallar el ángulo Φ era solo cuestión de aplicar la ley del seno y algunos teoremas de los ángulos de un triángulo. De la misma manera, aunque el fuselaje era una parte del avión desconocida para ellos, en el dibujo les indicaba a qué parte se refería y cuál era el ancho de este, igualmente sucedió con la palabra envergadura.

Como una segunda sesión se elaboró un taller que contenía una cantidad determinada de situaciones problema, que fueron tomadas literalmente de libros de texto que se trabajan normalmente en estos grados, para que fueran resueltos por los estudiantes. Así, se pretendía precisar cómo algunas de las expresiones utilizadas en los enunciados no eran comprendidos totalmente por los estudiantes.

Además, se les pedía que señalaran cuáles términos se les dificultaban o desconocían para que los trataran de relacionar con su vida cotidiana, buscando otra opción para estos que a juicio propio fueran más fáciles de comprender por el mismo. Buscando que con los enunciados reestructurados se les facilitara el diseño de solución de las situaciones problema planteadas.

En este segundo encuentro se les entregó un conjunto de palabras y pequeños textos que cumplían ciertos parámetros, para que los estudiantes plantearan sus propias situaciones problema con el fin de observar el dominio o no de conceptos matemáticos en un lenguaje formal en el momento de escribir y relacionar su diario vivir. Buscábamos conocer las habilidades de discernimiento del estudiante ante el uso de términos matemáticos y no matemáticos, junto con el significado apropiado dado en los contextos que se les indicaban.



Nombre: _____ Fecha: _____

Grado: _____

REEMPLAZANDO Y PLANTEANDO

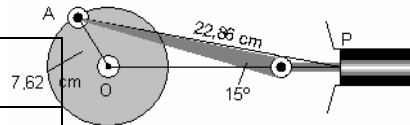
I. Querido estudiante: lea detenidamente las siguientes situaciones problema y señale cuáles términos se le **dificultan** o **desconoce**. Trate de relacionarlos con su vida cotidiana, reescriba los problemas con las palabras que escogió y por último resuélvalos.



1- Desde la cima de un acantilado los ángulos de depresión de dos hitos sucesivos de una carretera horizontal que se dirige directamente hacia el norte, miden 74° y 25° , respectivamente. Calcula la elevación del acantilado sobre el nivel de la carretera.

TÉRMINO DESCONOCIDO	TÉRMINO SUPLENTE

2- En un automóvil, la manivela del cigüeñal tiene 7.62 cm de longitud y la biela tiene 22.86 cm. Cuando el ángulo OPA es de 15° , ¿Qué tan lejos está el pistón P del centro del cigüeñal?



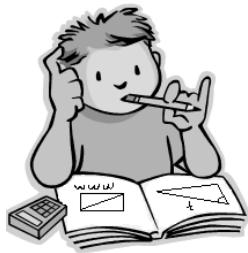
TÉRMINO DESCONOCIDO	TÉRMINO SUPLENTE

3- Dos topógrafos que se encuentran separados 560 m ven un mojón C sobre el otro lado del cañón con ángulos de 27° y 38° . Sus mediciones serán usadas para diseñar un puente que atravesará el cañón. ¿Cuál deberá ser la longitud del puente?

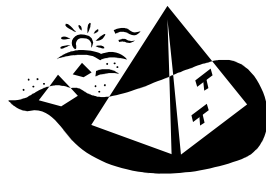
TÉRMINO DESCONOCIDO	TÉRMINO SUPLENTE

II. Con algunas de las siguientes palabras plantee y resuelva dos situaciones problema, que involucre en su solución conceptos trigonométricos.

Acimut - Visual - Asta - Plano vertical - Ángulo de elevación - Rumbo - Radio - Altura - Proyección - Vía férrea - Subtender - Diagonal mayor de un trapecio - Misil - longitud -



III. Lea el siguiente párrafo, intente plantear y resolver una situación que se relacione con lo descrito.



Viajemos al pasado, más específicamente a la Antigua Grecia alrededor del año 630 a.C. En este año (aproximadamente) nació Tales de Mileto, matemático y astrónomo considerado por su inteligencia uno de los Siete Sabios de Grecia.

Este matemático se hizo famoso al definir varios teoremas. Uno de ellos, cuenta que comparando la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides, en especial la de la pirámide de Keops, Tales midió por semejanza y de manera indirecta, sus alturas respectivas. La proporcionalidad entre los segmentos de las rectas paralelas que determinan otras rectas, dio lugar a lo que hoy se conoce como **Teorema de Tales**. Puesto que los rayos del sol inciden paralelamente sobre la tierra, los triángulos rectángulos determinados por la altura de la pirámide y su sombra, y el determinado por la altura del bastón y la suya, son semejantes. Luego, con solo medir la longitud de un bastón, la sombra de éste y la sombra de la pirámide, planteó la proporción que le permitió calcular la altura inaccesible.



*María del Pilar Peralta
Gladys Soraya Rodríguez
Estudiantes Lic. Matemáticas*

En el primer ejercicio de esta actividad, **“Desde la cima de un acantilado los ángulos de depresión de dos hitos sucesivos de una carretera horizontal que se dirige directamente hacia el norte, miden 74° y 25° , respectivamente. Calcula la elevación del acantilado sobre el nivel de la carretera”**, los estudiantes se mostraron confusos al diseñar estrategias de solución debido a que desconocían el significado de algunos vocablos usados en el enunciado.

Sin embargo, no intentaron dar solución al problema reemplazando aquellos términos que se mostraron desconocidos para ellos por alguno que conocieran y fuera apropiado para la situación. Por ejemplo, considerar en lugar de un acantilado una casa, una

estatua, etc. En este problema, Mayra además de las dificultades ya enunciadas expresó no poder resolverlo porque no sabía hacía donde debía ubicar el norte.

En la segunda situación, **“En un automóvil, la manivela del cigüeñal tiene 7.62 cm de longitud y la biela tiene 22.86 cm. Cuando el ángulo OPA es de 15° , ¿Qué tan lejos está el pistón P del centro del cigüeñal?”**, las tres estudiantes presentaron inconvenientes ya que el problema describía un contexto en el que ellas no se desenvolvían, manifestaron desconocimiento absoluto de los términos usados en el enunciado. Aunque el enunciado estaba acompañado de una gráfica, el vocabulario usado restringió de inmediato la lectura de este tipo de representación.

Durante el desarrollo del mismo, Mónica manifestó no saber que era el ángulo OPA, lo que nos llevó a pensar que además de influir el lenguaje cotidiano para la no resolución de este problema, la poca preparación en el campo geométrico intervino en la comprensión del texto.

En cambio, para Sneyder el vocabulario utilizado no fue inconveniente alguno, sin embargo, sus falencias se evidenciaron en la aplicación de algoritmos, es decir reemplazó erróneamente los datos dados en la ecuación de la ley del seno conduciéndolo a una solución incorrecta.

En la resolución del tercer problema, **“Dos topógrafos que se encuentran separados 560 m ven un mojón C sobre el otro lado del cañón con ángulos de 27° y 38° . Sus mediciones serán usadas para diseñar un puente que atravesará el cañón. ¿Cuál deberá ser la longitud del puente?”**, Mónica no dio la importancia requerida a la amplitud de los ángulos dados en el enunciado. Estableció su propio esquema, donde se trazó un segmento que unía a los topógrafos y en el cual ubicó la misma distancia del punto medio a cada uno de los extremos. Esto muestra de nuevo inconvenientes no sólo con el lenguaje utilizado, sino también dificultades de tipo geométrico.

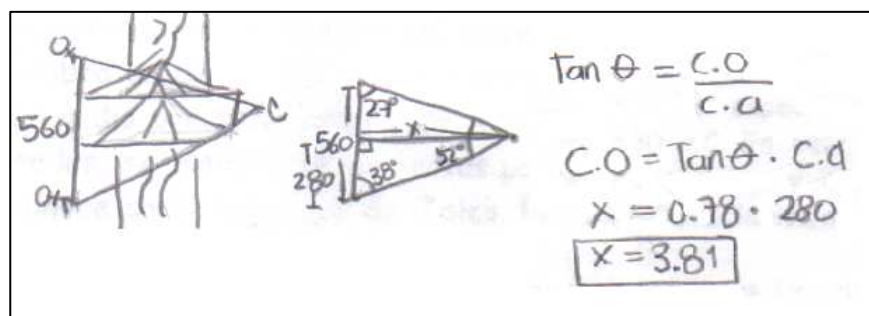


Figura 4. Taller 2 – Mónica 3

En la segunda parte del taller, “**Con algunas de las siguientes palabras plantee y resuelva dos situaciones problema, que involucre en su solución conceptos trigonométricos. Acimut – Visual – Asta – Plano vertical – Ángulo de elevación – Rumbo – Radio – Altura – Proyección – Vía férrea – Subtender – Diagonal mayor de un trapecio – Misil – Longitud**”, los estudiantes manifestaron tener inconvenientes al plantear situaciones problema.

Así, el expresarse en un lenguaje escrito les resultó difícil al describir una situación de manera “bonita”, como ellos lo mencionaron, mostrando que sus falencias sintácticas no les permitieron llevar una coherencia lineal en su producción textual. Dejaron ver, la poca experiencia que tenían sobre los elementos que se deben dar en el enunciado de un problema, además de los datos necesarios para realizar una representación gráfica.

Por ejemplo, Mayra planteó un problema añadiendo más datos de los necesarios para poder resolverlo, además de no hacer uso de signos de puntuación en su texto.

“En la Escuela Normal hay una izada de bandera, la bandera está atada a un asta de 5 m de alto si un estudiante se para a 8 m del pie del asta y mira hacia arriba con un ángulo de elevación de 45° a qué distancia se encuentra de la punta del asta”.

Sneyder, planteó problemas basado en una representación gráfica, pues fue en esta donde ubicó los datos necesarios para resolverla.

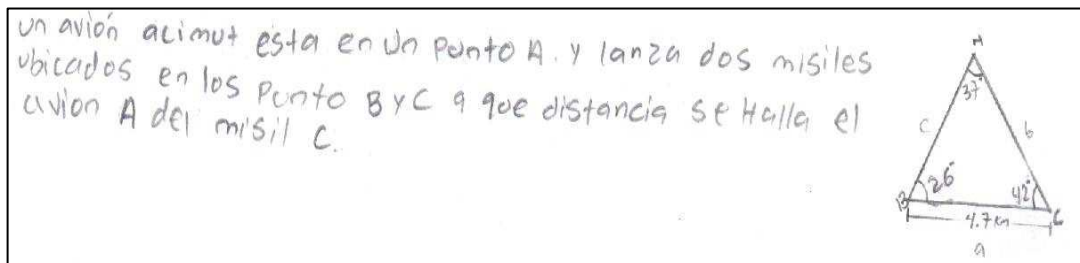


Figura 5. Taller 2 – Sneyder II

El problema de Claudia resultó muy interesante. Su equivocado concepto de radio dejó ver el error en el que pueden estar algunos estudiantes al no recordar ni conocer las líneas de una circunferencia.

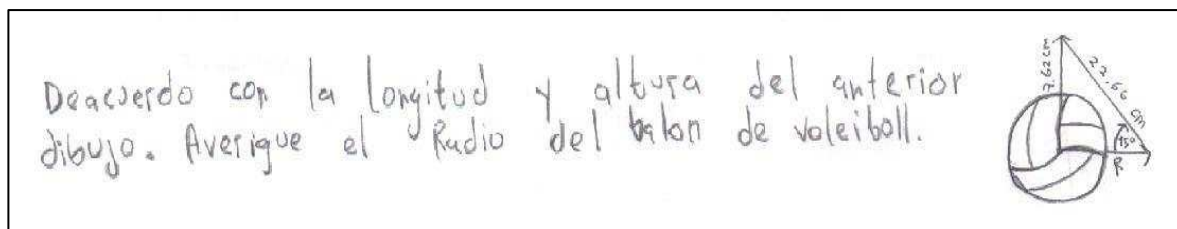


Figura 6. Taller 2 – Claudia II

La tercera parte del taller, **“Lee el siguiente párrafo, intente plantear y resolver una situación que se relacione con lo descrito”**, nos permitió evaluar las habilidades lecto-escritoras de nuestros estudiantes. Además, nos confirmó que el no comprender todos los términos matemáticos utilizados, incluso aquellos que no son netamente matemáticos, obstaculizan el dar sentido a las situaciones descritas. Mónica expresó:

“No entiendo, o sea según la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides es semejante, pero y que es la altura inaccesible, y qué tienen que ver los rayos del sol”.

Sneyder logró escribir una situación, sin embargo manifestó el poco bagaje en el campo del planteamiento de problemas. Lo decimos porque se contempló lo mecánico que fue al preguntar el valor de una variable que tenía en su representación gráfica, en lugar de ser más específico al pedir que se estimara la altura de la pirámide.

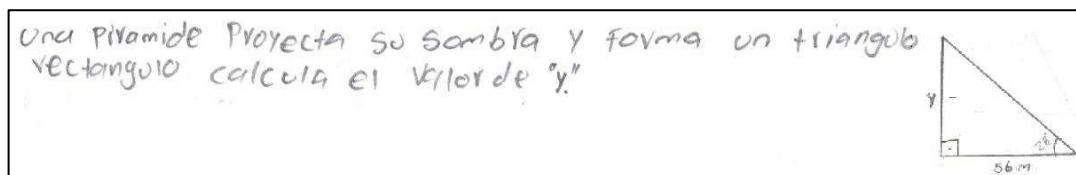


Figura 7. Taller 2 - Sneyder

En la tercera sesión, “**Leyendo y graficando**”, igual que en la anterior se elaboró una actividad que contenía diversas situaciones problema tomadas literalmente de libros de texto. La diferencia fue que para esta actividad, el eje principal fue la representación gráfica ya que el taller tenía por objetivo conocer las destrezas y falencias de los estudiantes en el momento de expresar un lenguaje escrito en un lenguaje gráfico. Muestra de la comprensión de los vocablos usados en el enunciado del problema planteado.

También se les entregó algunos dibujos buscando que a partir de estos, los estudiantes tradujeran al lenguaje escrito lo que hasta el momento sólo existía en el lenguaje gráfico; esto con la intención que los estudiantes crearan situaciones problema que dejaran ver hasta donde comprendían dichos diseños.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO II
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA



Nombre: _____ Fecha: _____

Grado: _____

LEYENDO Y GRAFICANDO



I. Querido estudiante: Es claro que el pensar en una figura nos ayuda a identificar los elementos que el problema nos da, y nos sugiere una estrategia de solución a seguir. Teniendo presente lo anterior, lea las siguientes situaciones problema, realice una representación gráfica de la misma y resuélvalos.

1- Las bases de un trapecio isósceles miden 28 cm y 46 cm, y los lados iguales 26 cm. Calcular los ángulos del trapecio y su área.

2- Desde la torre de un fuerte costero, cuya altura es de 580 metros sobre el nivel del mar, se divide un barco con un ángulo de depresión de 24° . ¿A qué distancia de la torre está el barco?

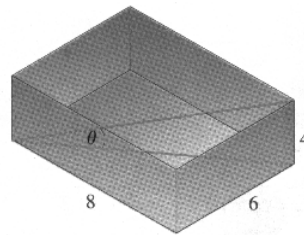
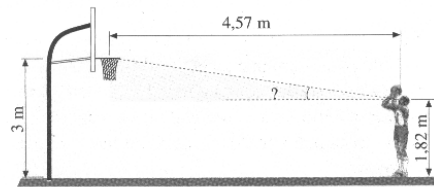
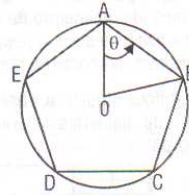
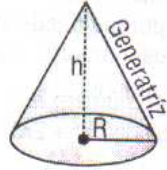
3- Un avión vuela a una velocidad de 360 mi/h desde un punto A en dirección (acimut) 137° durante 30 minutos; después vira y viaja en dirección 227° durante 45 minutos. Calcula con aproximación de una milla la distancia del avión a A.

4- Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 metros del pie del edificio se observa la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y; la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24° . Calcula la altura de la antena.

5- Desde una carretera con pendiente $m= 0.268$, se observa el extremo superior de un poste, con un ángulo de elevación de 35° . 200 m más adelante el ángulo de elevación es 53° . ¿Cuál es la altura del poste? ¿A qué distancia se encuentra el poste desde el segundo punto de observación?



Con los siguientes elementos plantee una situación problema que involucre en su solución conceptos trigonométricos.



María del Pilar Peralta
 Gladys Soraya Rodríguez
 Estudiantes Lic. Matemáticas

Al resolver el primer problema, **“Las bases de un trapecio isósceles miden 28 cm y 46 cm, y los lados iguales 26 cm. Calcular los ángulos del trapecio y su área”**, encontramos que los estudiantes no tenían una clara representación de un trapecio isósceles. Todos manifestaron no poder resolver el problema debido a que no recordaban la fórmula del área del trapecio.

En la segunda situación, **“Desde la torre de un fuerte costero, cuya altura es de 580 metros sobre el nivel del mar, se divisa un barco con un ángulo de depresión de 24° . ¿A qué distancia de la torre está el barco?”**, se evidenció nuevamente que la definición de ángulo de depresión no es clara para los estudiantes que están aprendiendo trigonometría.

Tan sólo una de las estudiantes, Claudia, ubicó de manera correcta dicho ángulo; los demás ubicaron el ángulo dado en el ángulo complementario a éste. La deficiente representación del concepto llevó a los estudiantes a resolver el problema de una manera equivocada, aunque para la representación gráfica que ellos hicieron los algoritmos fueron usados correctamente.

Para desarrollar el tercer problema, **“Un avión vuela a una velocidad de 360 mi/h desde un punto A en dirección (acimut) 137° durante 30 minutos; después vira y viaja en dirección 227° durante 45 minutos. Calcula con aproximación de una milla la distancia del avión a A”**, los estudiantes hubiesen podido ignorar el término acimut⁴ trazando un gráfico tan sólo con los ángulos dados. Sin embargo, el hecho que los estudiantes encontraran esa palabra en el enunciado, no les permitió avanzar en la resolución del problema, pues para ellos resultó importante identificar y conocer el significado de cada una de los vocablos que contenía el mismo.

Para la resolución del cuarto ejercicio, **“Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 metros del pie del edificio se observa la parte superior**

⁴ Véase p. 103

del edificio con un ángulo de elevación de 20° y la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24° . Calcula la altura de la antena”, Mayra cometió un error que permitió darnos cuenta del uso inadecuado que le dio a los signos de puntuación, ella leyó de la siguiente manera: “Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio a 254 metros del pie del edificio, se observa la parte (...)”. Esto le impidió resolver el problema de manera acertada, aunque para el gráfico que ella diseñó el procedimiento fue el adecuado.

Mónica no resolvió muy bien la situación que se le planteó. Esto se pudo observar en la manera como trazó el gráfico, donde tuvo en cuenta los triángulos rectángulos que se formaban y debían tomarse como referencia, pero desafortunadamente ubicó mal los ángulos, dando como resultado una solución no acertada al problema.

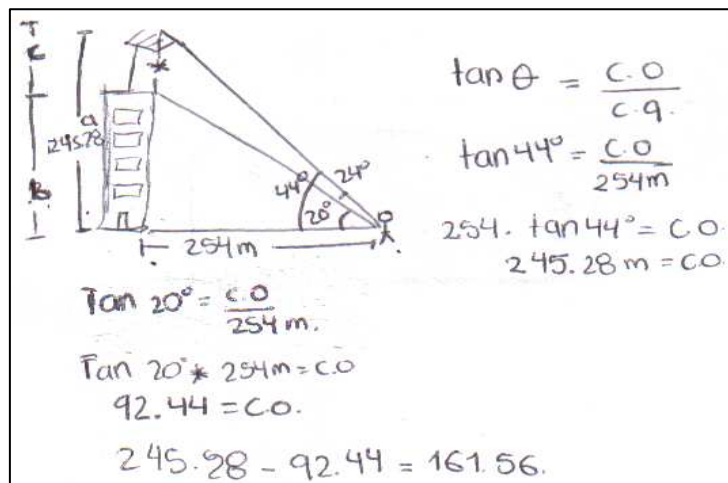


Figura 8. Taller 3 – Mónica 4

Sneyder no logró ubicar la distancia ni los ángulos dados, además, su dibujo no dejó ver claramente los triángulos rectángulos que modelaban la situación. La siguiente representación fue lo que él consiguió hacer.

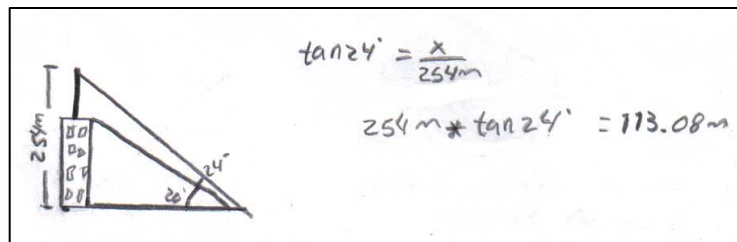


Figura 9. Taller 3 – Sneyder 4

La quinta situación, “Desde una carretera con pendiente $m = 0,268$, se observa el extremo superior de un poste, con un ángulo de elevación de 35° . 200 m más adelante el ángulo de elevación es de 53° . ¿Cuál es la altura del poste? ¿A qué distancia se encuentra el poste desde el segundo punto de observación?”, permitió darnos cuenta que los estudiantes no recordaban el concepto de pendiente ni la relación que este tenía con los ángulos. Pero, pese a que Mónica expresó no recordar muy bien el tema de pendiente, intentó hacer una representación gráfica de la situación que dejó ver las deficiencias en su pensamiento espacial.

En el sexto y último punto de este taller, “Con los siguientes elementos plantee una situación problema, que involucre en su solución conceptos trigonométricos”, pudimos observar la escasez del lenguaje matemático de los estudiantes en el planteamiento de problemas, junto con las deficiencias en la decodificación de textos. Aunque en el enunciado se les pedía plantear situaciones que involucraran conceptos trigonométricos, algunos de ellos se limitaron a plantear ejercicios netamente geométricos. Por ejemplo, Sneyder escribió: *Halle el área del triángulo, si su base mide 6 m y su altura 7.5 m*”

La última actividad, “Explorando y planteando”, tenía como propósito conocer el avance y progreso en la conceptualización, comprensión e interpretación de los estudiantes, sobre los términos matemáticos nombrados en las sesiones anteriores, dando significados correctos a cada uno de los vocablos usados en los enunciados. Igualmente, se hizo una socialización con los estudiantes con el fin de hacer más enriquecedora la actividad al encontrar significativo el trabajo realizado.



Nombre: _____ Fecha: _____
Grado: _____

EXAMINANDO Y PLANTEANDO

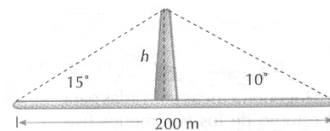


I. Querido estudiante: Durante el desarrollo de las actividades se dejó ver cómo la influencia del lenguaje cotidiano predomina en el momento de plantear y abordar una situación problema. Hoy después de cuatro sesiones se podrá dar cuenta que conocer el significado de los términos allí involucrados, interpretar dibujos y hacer representaciones gráficas le permitió encontrar con mayor facilidad una estrategia de solución, contribuyendo positivamente en su pensamiento respecto a la enseñanza de

la trigonometría y su utilidad en su diario vivir. Teniendo presente lo anterior, lea y resuelva las siguientes situaciones problema.

1- Una persona sube por un camino que tiene 20° de pendiente respecto del plano horizontal. Al cabo de caminar 500 metros, ¿a qué altura sobre el nivel inicial se encuentra la persona?

2- Una torre se observa desde dos puntos opuestos, separados 200 metros, con ángulos de elevación 15° y 10° , como muestra la figura. ¿Cuál es la altura de la torre y a qué distancia está de cada punto de observación?



3- Un barco navega 400 Km entre las ciudades A y B, con rumbo $N65^\circ O$. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo $N30^\circ E$, distante 250 km, como muestra la figura. Calcule la distancia entre las ciudades A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades.

4- Al hacer mediciones para la construcción de una nueva carretera, un ingeniero colocó dos postes, A y B, en lados opuestos de un río para marcar las posiciones de los lindes de un puente. Entonces desde un punto O, a 100 metros de B y tal que OB es perpendicular a AB midió el ángulo $AOB = 73^\circ$, ¿Cuál es la distancia a través del río desde A hasta B?

II. Con ayuda de su imaginación escriba dos situaciones problema donde se apliquen las *funciones trigonométricas*, la *ley del seno* o la *ley del coseno*. No olvide dar solución a los mismos.

En un párrafo, escriba lo que significa para usted la trigonometría y la utilidad en su vida diaria.

María del Pilar Peralta
Gladys Soraya Rodríguez
Estudiantes Lic. Matemáticas

Respecto a la primera situación planteada, **“Una persona sube por un camino que tiene 20° de pendiente respecto del plano horizontal, al cabo de caminar 500 metros, ¿a qué altura sobre el nivel inicial se encuentra la persona?”**, los estudiantes no tuvieron mayores complicaciones, manifestaron conocer todos los términos nombrados. De este problema queremos mostrar la curiosa representación gráfica que Sneyder hizo de la situación.

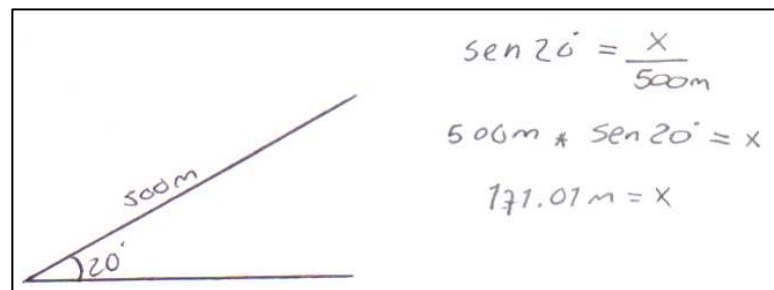


Figura 10. Taller 4 – Sneyder 1

Aunque él sabía que las funciones trigonométricas sólo se aplican a triángulos rectángulos, no necesitó modelar un esquema que tuviera un triángulo rectángulo como referencia para dar una solución correcta al problema.

En la segunda situación, **“Una torre se observa desde dos puntos opuestos, separados 200 metros, con ángulos de elevación 15° y 10°, como muestra la figura. ¿Cuál es la altura de la torre y a qué distancia está de cada punto de observación?”**, esperábamos que los estudiantes contemplaran que cada punto de observación se encontraba a una distancia diferente de la torre, incluso esto se reflejaba en una de las preguntas a resolver. Sin embargo, ellos pasaron por alto que desde cada uno de los puntos se observaba la torre con un ángulo de elevación diferente, aspecto que los llevó a plantear soluciones erróneas.

Para la resolución del cuarto problema, **“Un barco navega 400 Km. entre las ciudades A y B, con rumbo N65°O. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo**

N30°E, distante 250 Km., como muestra la figura. Calcule la distancia entre las ciudades A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades”, los estudiantes presentaron dificultades de interpretación y comprensión que impidieron dar la respuesta correcta, y en un caso extremo intentar realizar alguna operación. Por ejemplo, Mayra expresó:

“No sé como resolverlo porque no entiendo lo de las direcciones, me confunden, no sé donde poner las distancias”

Mónica y Claudia tomaron el ángulo de 65° dado como si se encontrara por completo en el interior del triángulo de referencia, pareciera que omitieron la representación gráfica dada sólo con la intención de dar una respuesta al problema.

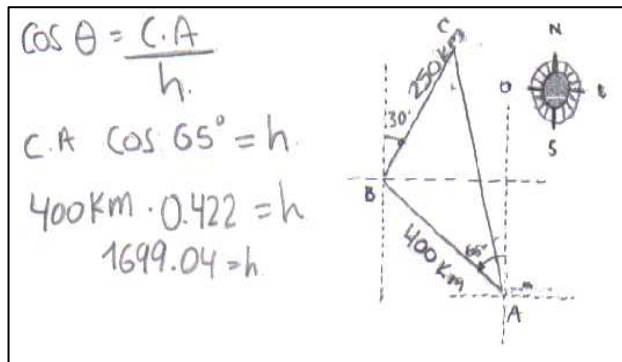


Figura 11. Taller 4 – Mónica 4

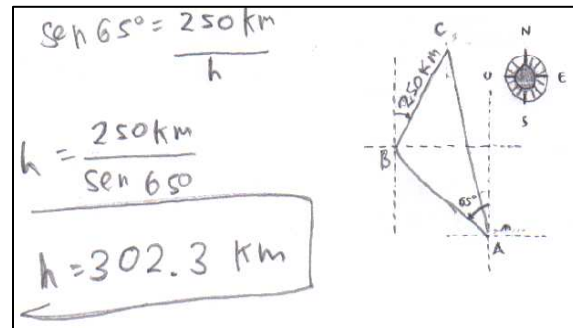


Figura 12. Taller 4 – Claudia 4

La cuarta situación, **“Al hacer mediciones para la construcción de una nueva carretera, un ingeniero colocó dos postes, A y B, en lados opuestos de un río para marcar las posiciones de los lindes de un puente. Entonces desde un punto O, a 100 metros de B y tal que $OB \perp AB$ midió el ángulo $\angle AOB = 73^\circ$, ¿Cuál es la distancia a través del río desde A hasta B?”**, permitió darnos cuenta que los estudiantes en algunas ocasiones no tiene en cuenta los términos que pueden ser desconocidos para ellos, sin importar que trascendencia puedan tener estos a la hora de resolver el problema. Esto lo observamos en las soluciones dadas por los cuatro estudiantes, para quienes la condición perpendicular no tomó importancia en el momento de entender el gráfico dado.

En la segunda parte de este taller, **“Con ayuda de su imaginación escriba dos situaciones problema donde se apliquen las funciones trigonométricas, la ley del seno o la ley del coseno. No olvide dar solución al mismo”**, pudimos contemplar nuevamente que el hecho de plantear situaciones problema es una estrategia de evaluación eficaz, pues es una forma de verificar qué tanto han afianzado los estudiantes los conceptos matemáticos. Además, según nuestro objetivo de investigación, esta actividad permitió visualizar la manera en que el contexto social influye a la hora de plantear situaciones problema, por ejemplo: Mayra únicamente plantea situaciones donde sus protagonistas son niños, Mónica lo hace con carros y personas, Sneyder usa animales y en los problemas planteados por Claudia intervienen diversas profesiones, un celador y un arquitecto.

Queremos comentar que los problemas planteados no se hicieron con el propósito de que los estudiantes erraran al dar solución a los mismos, pero desafortunadamente las dificultades de los estudiantes fueron mayores comparadas con las respuestas acertadas a pesar de haber visto todos los contenidos propuestos para el grado décimo.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

1. Comprendiendo y Graficando

*“El lenguaje carente de significado es un sin sentido”
Jakobson*

Aunque pueda ser sorprendente para algunos, la comunicación se ha identificado en diversos estudios como un proceso importante para aprender matemáticas y resolver problemas, muestra de ello son los estudios realizados por David Pimm en su libro “El lenguaje matemático en el aula”, en el que describe las relaciones entre lenguaje, lógica, significado, conceptos y comprensión con el aprendizaje. Sin embargo, no se le ha dado la suficiente atención a este tema como un argumento necesario en el discurso matemático utilizado en las aulas de clase.

No resulta absurda la frase con la que iniciamos esta categoría *“El lenguaje carente de significado es un sin sentido”*, indicada por el lingüista Jakobson. Esto se convierte en una realidad de nuestras aulas de clase, ya que en pocas ocasiones les hemos enseñado a nuestros estudiantes el significado de los términos y registros matemáticos utilizados y que sin lugar a duda hacen parte del discurso de apropiación de un concepto, llevando a que la enseñanza de la matemática carezca de sentido para ellos.

“Los discursos practicados por el profesor, cuando enseña matemáticas, transcurren entre su conocimiento y modo de ver la matemática, y de cómo los entreevee y escucha el alumno. Hay por lo tanto, aspectos [...] que merecen su atención [...]” uno de ellos, es *“la manifestación de diferentes formas de*

comunicación y los muchos significados de los que se reviste las nociones matemáticas en el aula”. Macedo (2005, p. 118)⁵

Cuando los estudiantes se enfrentaron a la resolución de problemas que involucraban distintos contextos, las dificultades en algunos de ellos respecto a la interpretación y comprensión del enunciado, uso inadecuado de significados de términos matemáticos y no matemáticos, la traducción del lenguaje matemático a un lenguaje cotidiano, se manifestaron en el momento de seguir una estrategia correcta de solución para la situación planteada.

Comprender el enunciado e interpretar los vocablos usados se convirtió en un obstáculo que prevaleció en los estudiantes. Por ejemplo, Claudia expresó:

“uno no entiende el problema, si los pusieran con palabras más comprensibles sería más fácil. Pero uno no sabe qué hacer, se confunde todo con lo que está escrito”. (Tercera actividad, noviembre 22 de 2007)

Sneyder, habló acerca de su mayor obstáculo en la resolución de problemas diciendo:

“Interpretar bien los términos, entender el problema para así poder resolverlo” (Entrevista, noviembre 22 de 2007) procedimiento

Las frases anteriores están mostrando la importancia que tiene para los estudiantes comprender lo que se lee en el momento de resolver un problema. Además de interpretar y conocer cada una de las palabras usadas en el enunciado de una situación problema, que les de una mejor interpretación de la situación facilitándoles el diseño de estrategias correctas de solución. Evidencia de ello fue lo que Mayra expresó, como su mejor forma para resolver problemas.

“Yo lo leo varias veces, luego lo dibujo y saco los datos, y empiezo a analizar, lo realizo y lo rectifico” (Entrevista, noviembre 22 de 2007)

⁵ La traducción la realizaron las investigadoras del presente Trabajo, por lo tanto no tiene revisión técnica.

Sneyder por su parte manifestó:

“Leer bien el problema, luego hacer el dibujo para ubicarme y por último observar qué operación debo hacer y resolverlo”. (Entrevista, noviembre 22 de 2007)

Los procedimientos expresados por los estudiantes evidencian la claridad que ellos pueden tener en el momento de diseñar soluciones. Establecen sus propias estrategias para abordar las situaciones planteadas en el aula de clase y posiblemente fuera de ella. Referente a esto Polya citado por Santos (1997, p. 16) identificó algunas etapas fundamentales en la resolución de problemas. De manera general, Santos describe estas fases:

- 1- Entendimiento del problema: en esta etapa se identifican los procedimientos que permiten deducir la información relevante que se da en un problema. Por ejemplo, ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cómo puedo relacionarlos?
- 2- Diseño de un plan: en esta etapa se sugiere relacionar la situación con problemas semejantes que indiquen el camino más apropiado para la resolución del mismo.
- 3- Ejecución del plan: en esta fase se debe probar cada uno de los pasos realizados en el proceso de solución. También es importante intentar resolver el problema de una forma diferente verificando nuevamente el procedimiento que se llevó a cabo.

No obstante, identificar los pasos para la resolución de un problema no es suficiente para diseñar estrategias de solución, si no damos importancia a los diversos términos que se usan para describir una situación, dejando a un lado el contexto social y el

entorno que rodea a nuestros estudiantes, el cual es sin lugar a duda un aspecto determinante para la comprensión de un problema.

“[...] las matemáticas se les identifica como un cuerpo de conocimientos donde existe un lenguaje codificado y un conjunto de significados que el estudiante debe aprender, [...] El estudiante debe manipular objetos formales, como lo hace el matemático en su quehacer diario. En este proceso, el estudiante desarrolla intuiciones acerca de las matemáticas y la forma de aprender esta disciplina. Estas intuiciones, conocimiento informal, se relacionan con las ideas que los estudiantes tiene acerca del uso de conceptos en el mundo real. Por ejemplo, la forma en que se usa la idea de límite en el contexto diario se ha encontrado que influye en la forma en que los estudiantes interpretan este concepto desde el punto de vista matemático. Es importante mencionar que muchas veces este conocimiento informal de los estudiantes les impide entender el concepto matemático.” Santos (1997, p. 33).

Así, no resultan ilógicos los comentarios de los estudiantes al comunicar su inconformidad sobre los problemas dados. Mayra expresó:

“¿Por qué ponen cosas tan raras?” (Actividad 2, noviembre 8 de 2007)

Claudia, por ejemplo, escribió en uno de las actividades realizadas:

“Por favor al darnos problemas no hacerlos con palabras desconocidas” (Actividad 2, noviembre 8 de 2007)

Estas voces son muy comunes en nuestras aulas de clase porque es natural que al no conocer el significado de algunos vocablos y tampoco ser aclarados por el profesor antes de abordar el problema, no permite a los estudiantes hacer una adecuada decodificación de las frases que conforman el enunciado de la situación a resolver, al no realizar una conexión desde y con otras áreas.

Lo anterior se vio reflejado en las diferentes situaciones problema planteadas en las actividades en el momento en que los estudiantes abordaron la resolución de las mismas.

Resolución que generó diversas interpretaciones y representaciones gráficas, debido a las diferentes concepciones que los estudiantes tenían sobre cada uno de los términos matemáticos y no matemáticos involucrados en el enunciado.

Por ejemplo, el problema de la primera actividad, “*Los lados de un paralelogramo miden 2.5 cm y 5.8 cm. El ángulo adyacente a esos dos lados mide 65° . Halla la medida de la diagonal más larga del paralelogramo*”, nos dejó ver que aunque los estudiantes conocen y comprenden el concepto de ángulo, refiriéndonos a que saben que este se ubica en medio de dos semirrectas con un origen común, aunque es probable que en algunas ocasiones no hubieran escuchado la expresión “ángulo adyacente”, esperábamos que trataran de desglosar cada uno de estos términos para poder tener una idea más clara de lo que el problema les pedía.

Sin embargo, los estudiantes no mencionaron tener duda alguna respecto al significado del término, mostraron que el dejar a un lado los vocablos desconocidos y ayudarse con las demás herramientas que el enunciado les podía proporcionar, era una de sus estrategias de solución.

En la solución dada por Mayra, pudimos ver que además de no dar importancia a la frase “el ángulo adyacente”, también omitió el concepto de ángulo agudo y ángulo obtuso, consideración que la llevó hacer la siguiente representación de la situación.

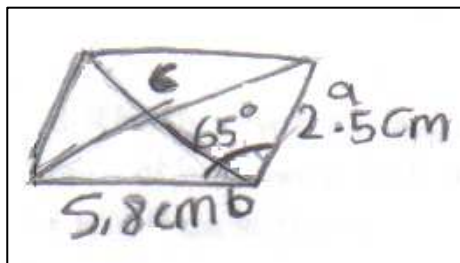


Figura 13. Taller 1 – Mayra 1

Mónica por su parte ubicó el ángulo entre los lados mencionados, sin embargo, en el momento de tomar un triángulo de referencia para la solución, cambió la ubicación de dicho ángulo planteando una solución errónea.

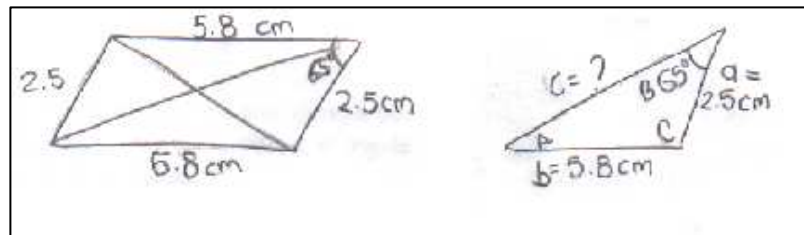


Figura 14. Taller 1 – Mónica 1

Por consiguiente, “[...] las estrategias o procedimientos de resolución que un individuo va a poner en marcha para resolver un problema van a depender directamente de la representación que ese individuo se ha hecho de la situación. De la misma manera, el cambio de representación va a ser el resultado de los conocimientos que el individuo va a movilizar durante el proceso de búsqueda de la solución, de las acciones que va a llevar a cabo, es decir, de los sucesivos razonamientos” Chamorro (2003, p. 276).

Claudia a pesar de tener presente la definición de ángulo obtuso, ubicó el ángulo de 65° entre la diagonal más larga del paralelogramo y uno de sus lados, tal vez porque el pensar en las funciones trigonométricas la llevó a buscar un triángulo como referencia, para buscar la solución. Consideramos que ella, al tener ya clara una representación gráfica de la situación, buscó como estrategia (incorrecta en este caso) fijarse en las partes que la componían, sin dar importancia al todo como aspecto importante del problema.

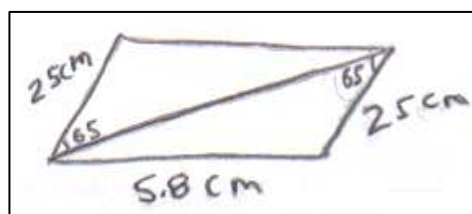


Figura 15. Taller 1 – Claudia 1

Lo anterior, nos llevó a indagarnos sobre cuál era el causante que los estudiantes omitieran el término adyacente. Después de discernir en varios aspectos, creemos que para los estudiantes se torna complicado relacionar un término matemático con un término común en su medio natural.

Creemos que nuestros estudiantes no dudarían en responder preguntas como: ¿quién está sentado a su lado en el aula de clase? o ¿en medio de quienes está usted sentado? Sin embargo, si vamos más allá de las expresiones enunciadas en el problema, podríamos decir que estas y las preguntas que se acaban de mencionar tienen algo en común y se refieren a una situación similar; simplemente que la situación emplea términos matemáticos y las preguntas vocablos naturales, o es común decir ¿quién es su compañero adyacente en el aula de clase? Por esta razón es que tal vez los alumnos no pudieron resolver el problema.

El transversalizar la información es un campo poco explorado para ellos, y pasar del lenguaje matemático a un lenguaje común se convierte en un camino complicado para el estudiante.

Además, como profesores olvidamos en muchas ocasiones que nuestro lenguaje y nivel de abstracción está en un nivel más desarrollado que el de nuestros estudiantes, negando actividades que desarrollen estas destrezas matemáticas. Así, lo manifiesta Chamorro (2003, p. 285) quien argumenta que “uno de los objetivos de la resolución de problemas es, justamente, que el alumno sepa pasar de un tipo de representación a otro, y que sepa utilizar las diferentes organizaciones del problema”.

En el caso particular que los estudiantes hubiesen comprendido la frase “ángulo adyacente”, muy seguramente la respuesta hubiese sido: el problema no tiene solución. Pero, al no tener conceptos claros sobre el tema pasaron por alto la forma en la que estaba escrito el problema, y que probablemente les hubiera dado pautas para haber

percibido que nombraba a un ángulo adyacente a un lado, y no a un ángulo como es definido⁶.

Aunque las dificultades presentadas en la situación anteriormente descrita se debieron a la incorrecta asignación de significados a términos estrictamente matemáticos, este mismo caso se presentó en el momento que los estudiantes abordaron problemas que no utilizaban términos meramente matemáticos.

A esto, nos referimos al plantear el quinto problema en la actividad diagnóstica; “*Si en un túnel que desciende con un ángulo de 15° respecto al nivel del suelo una persona avanza una distancia de 75 metros, ¿a qué profundidad se encuentra dicha persona de la superficie?*”. En el diario vivir se hace usual para los estudiantes escuchar: descender de un piso a otro; en una competencia, del primer puesto al segundo; de la categoría A del fútbol colombiano a la B, pero no es común escuchar, observar un túnel que desciende con un determinado ángulo respecto al nivel del suelo, es más, en ocasiones ni siquiera un túnel resulta habitual en sus comunidades. Entonces, nos podemos preguntar si son los estudiantes quienes no manejan un vocabulario técnico, ó, la escuela no le ha brindado este tipo de lenguaje.

Es normal expresar y/o escuchar que tenemos heridas profundas, sentimientos profundos, miradas profundas, incluso piscinas profundas (aunque en la mayoría de los casos es utilizada la palabra honda), pero no se suele decir “descendí la colina y ahora me encuentro a ciertos metros de profundidad con respecto al plano horizontal de referencia”, simplemente se dice “bajé los 55 metros que tiene esa colina”.

Luego, aunque para nosotros (docentes) la interpretación al anterior enunciado sea obvia, para algunos de nuestros estudiantes se convierte en una ardua labor. Mónica durante el desarrollo de la actividad expresó:

⁶ Véase p. 103

“No entiendo el problema porque si el hombre solo ha descendido 75 metros pues se encuentra a una profundidad de 75 metros, o no sé.”

(Primera Actividad noviembre 1 de 2007)

La frase anterior, nos permitió evidenciar que aunque la interpretación y comprensión de los términos usados en el enunciado pueden resultarnos obvios, para algunos de nuestros estudiantes dar el significado apropiado se convierte en una difícil tarea.

Así, el discernir de los significados dados en su medio social y los asignados en el contexto matemático, confirman que en las clases de matemáticas se produce una mezcla de registros del lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático. Mezcla que a falta de una discriminación de ambos, genera incongruencias y rupturas de comunicación entre profesores y alumnos al estar refiriéndose a un mismo significante, pero asignándole un significado diferente. Pimm (1999, p. 133)

El significado que Mónica trató de asignar a los vocablos, no le permitió realizar una correcta representación gráfica de la situación.

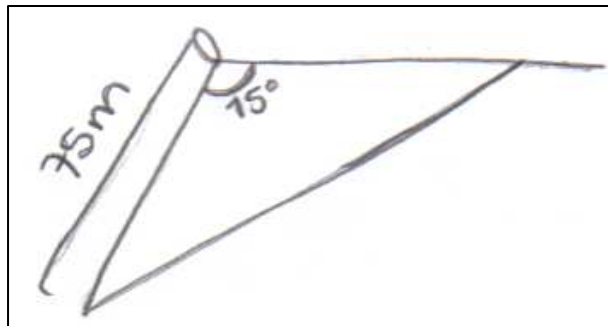


Figura 16. Taller 1 - Mónica 5

Claudia por su parte expuso una solución en la que se ve una aplicación correcta de los algoritmos algebraicos, sin embargo, al dar el significado equivocado a los vocablos profundidad y descender la condujo a diseñar una representación gráfica equívoca, en la que las relaciones lógicas que dedujo no contribuyeron en la solución del problema.

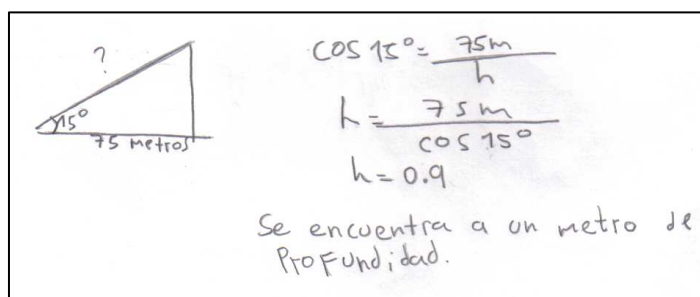


Figura 17. Taller 1 – Claudia 5

Además, Claudia expresó: “... *saqué la hipotenusa o sea la profundidad en la que se encuentra la persona*”. Entonces, ¿qué entendió ella por profundidad? Aunque no lo pudimos saber, consideramos que el conocimiento informal y el predominio del lenguaje natural de la estudiante, determinaron la situación a las ideas que tenía acerca de estos conceptos en el mundo real. Luego resulta importante tener presente que muchas veces este conocimiento informal les impide entender el significado matemático. Santos (1997, p. 33).

Siguiendo con algunas ideas generales sobre el lenguaje cotidiano y su dominio en el momento de interpretar y solucionar una situación problema, queremos resaltar también la importancia de resolver problemas determinados por contextos cercanos al estudiante, que permita dotar de sentido y aplicabilidad a las matemáticas, generando así un aprendizaje verdaderamente significativo.

“Desde la cima de un acantilado los ángulos de depresión de dos hitos sucesivos de una carretera horizontal que se dirige directamente hacia el norte, miden 74° y 25° , respectivamente. Calcula la elevación del acantilado sobre el nivel de la carretera”. (Segunda actividad)

El término acantilado es usado normalmente en la región Caribe, luego es posible mostrar desconocimiento sobre este para quienes habitamos una región diferente. Al iniciar la actividad los estudiantes manifestaron duda sobre el significado de la palabra, dudas que fueron resueltas con la intervención de las voces de sus compañeros.

- **Mónica:** *No sé que es un acantilado, ¿cómo hago?*
- **Angélica:** *Me suena a agua...*
- **Marley:** *¿No saben qué es un acantilado?, Eso es como un conducto de aire*

Aunque los significados y representaciones hechas por los estudiantes no era el correspondiente al citado en el problema, Claudia al no poder discutir sobre los mismos, diseñó su propio esquema teniendo en cuenta las opiniones de sus compañeros.

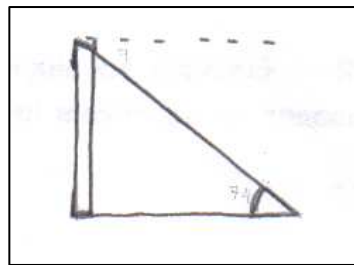


Figura 18. Taller 2 – Claudia 1

Lo mismo sucedió con el significado de la palabra hito el cual ellos no conocían, situación que es comprensible pues se acostumbra a usar en zonas fronterizas o despobladas; pese a esto tampoco reemplazaron el término por algún otro, lo que llevó a la creación de unos dibujos bastante paradójicos, como lo hicieron Mónica y Sneyder.

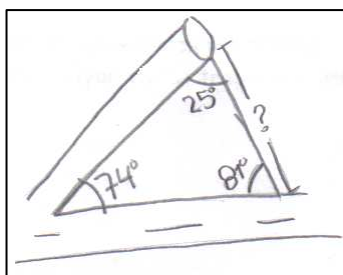


Figura 19. Taller 2 – Mónica 1

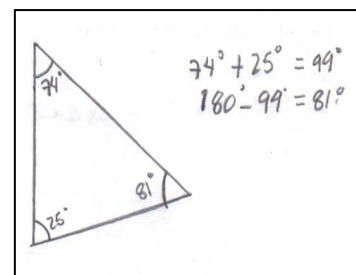


Figura 20. Taller 2 – Sneyder 1

En este problema pudimos darnos cuenta de la ambigüedad que pueden presentar algunos términos presentados a los estudiantes. El problema pedía calcular la elevación del acantilado sobre el nivel de la carretera, pero la palabra elevación condujo a

significados distintos en los estudiantes. Para algunos la palabra hacía referencia a una altura, mientras que para los demás el término se refería a un ángulo. Sus comentarios argumentan lo descrito.

- **Mayra:** *Cuando uno dice elevación puedo decir elevación de 20 cm*
- **Sneyder:** *No, eso se da en grados*

A la palabra en discusión, se le podían atribuir los dos significados expuestos anteriormente, sin embargo, el interpretar y comprender el enunciado les hubiera permitido descartar alguno de los significados dados al término elevación.

Pese a los comentarios de sus compañeros, para algunos estudiantes la elevación siguió siendo una medida de longitud, sin tener presente el problema que se les indicaba únicamente un ángulo. Luego, en ocasiones enseñar matemáticas “no tiene en cuenta lo polisémico del lenguaje común (multiplicidad de acepciones de una palabra) desconociendo la ruptura entre la lógica y el lenguaje común” Avellaneda (1991, p. 10). Muchos términos matemáticos sufren modificaciones semánticas que pueden conducir a un aprendizaje deficiente de los mismos.

Así se evidencia que los estudiantes están acostumbrados al mismo estilo de preguntas: ¿Cuál es la distancia entre...? ¿A qué altura se encuentra de...? ¿Calcula el ángulo de...? Pero cuando se usan palabras diferentes, pueden ser términos formales, que indican lo mismo a lo que ellos están habituados, se pueden presentar confusiones y la pérdida del sentido de los que les plantea en la situación. Por lo tanto, consideramos que el mantener el mismo estilo de preguntas nos lleva a olvidar la necesidad de presentar a los estudiantes un lenguaje formal para involucrarlos en el contexto matemático. Sin embargo, las palabras utilizadas deben encontrarse en un nivel apropiado al pensamiento del estudiante.

En efecto, plantear problemas de tipo trigonométrico más cercanos a la vida cotidiana de los estudiantes, puede facilitar (en cierta manera) el comprender la situación que se

describe al plantear representaciones gráficas claras, que permitan al estudiante abordar estrategias de solución con mayor destreza. Un ejemplo de ello, se muestra con el problema cuatro de la primera actividad: “Una estatua de 8.9 m de altura se sitúa sobre un pedestal. Si desde un sitio a 48 m del pie del pedestal se observa el extremo superior de la estatua con un ángulo de elevación de 26°, ¿Cuál es la altura del pedestal?”

Es posible que los estudiantes hubiesen escuchado la palabra estatua y observado este objeto al caminar por un parque, por una calle y lo detallaran de arriba abajo; aunque sus observaciones no las hubiesen hecho desde un punto de vista trigonométrico, esta experiencia les facilitó la resolución de la situación.

Muestra de ello fue el dibujo que diseñó Mayra, quien en su representación describió correctamente lo que se enunciaba. Manifestó su éxito al conocer todos los términos dados:

“Lo entendí porque los términos eran claros...”

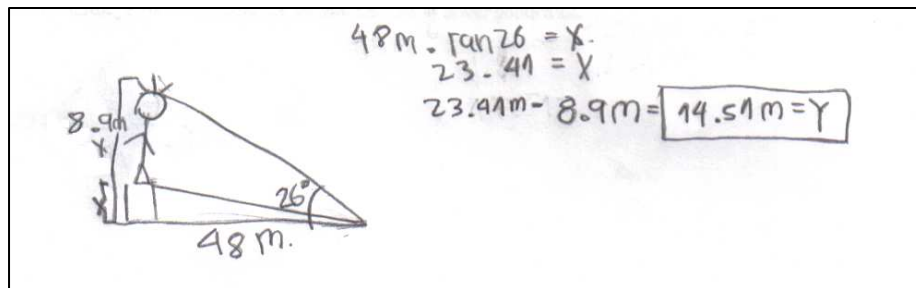


Figura 21. Taller 1 – Mayra 4

Así mismo, Mónica mostró que tener claras las palabras usadas y conocer cada uno de los significados que debía atribuírsele a éstas, le permitió hacer una representación gráfica y seguir una estrategia correcta de solución. Ella expresó:

“Entendí que al hallar la altura del cateto opuesto debía restarle la altura de la estatua y así hallar la altura del pedestal”

Claudia no entendió muy bien a lo que el texto hacía referencia cuando mencionaba la palabra pedestal, así lo mostró su representación gráfica. Pese a esto ella resolvió el problema correctamente. Creemos que Claudia asoció la representación gráfica de la situación con algo que ella había visto en algún momento de su vida.

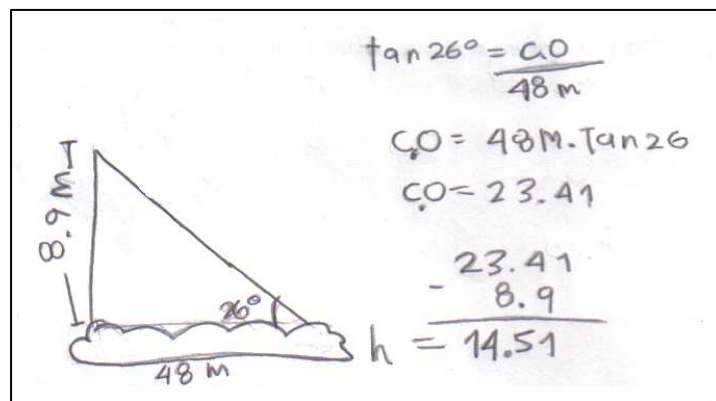


Figura 22. Taller 1 – Claudia 4

El plantear problemas accequibles o cercanos al entorno que rodea a los estudiantes, nos deja ver cómo a pesar de que ellos comparten a diario las representaciones mentales o referentes de determinados términos (no matemáticos) tienen un significado diferente de acuerdo a lo que cada uno ha experimentado. Esto nos mostró lo fundamental que resulta el contexto para el estudiante a la hora de expresar un lenguaje escrito en un lenguaje gráfico, el cual le aporte en la resolución de problemas.

Evidentemente, hay diferentes tipos de contexto que debemos considerar. Un tipo es el contexto lingüístico, también conocido como co-texto. El co-texto de una palabra es el conjunto de palabras que se utilizan, además de esta, en la misma oración o sintagma. Este co-texto que rodea una palabra tiene un gran efecto sobre cómo entendemos lo que las palabras significa. (Yule, 1998, p.148)

En la solución del cuarto problema de la tercera actividad, “Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 metros del pie del edificio se observa la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y; la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24° . Calcula la altura de la antena”. Los estudiantes plantearon soluciones de acuerdo al referente sobre la palabra *antena*, representación que intervino en la resolución correcta o incorrecta de la situación.

La situación problema giraba alrededor del término antena. Un objeto común en nuestro medio y del cual existen distintos tipos, las más antiguas en forma de “V”, o, las llamadas antenas de pescado, hasta las más modernas que tienen forma paraboloide elíptico y son utilizadas en la aviación y en las telecomunicaciones de hoy día. Luego, es lógico pensar que la representación gráfica influiría en el momento de trasladar los datos escritos al dibujo, y consecuentemente intervendría en la resolución del problema ya que cada uno manifestaría esquemas distintos de acuerdo a su relación con el objeto.

Para Mónica la representación mental de la palabra antena se ciñó a su cotidianidad, lo cual la llevó a crear un bosquejo que le permitió definir los triángulos de referencia en la situación que se planteaba.

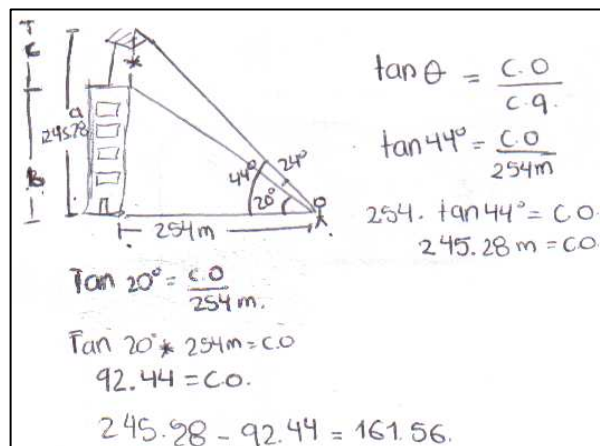


Figura 23. Taller 3 – Mónica 4

Lo contrario ocurrió con Claudia, a quien su referente de la palabra antena, la condujo a pasar el lenguaje escrito a un confuso lenguaje gráfico. Indiscutiblemente para ella una antena es en forma de “V”, lo que influyó en el diseño de una estrategia de solución sin tener presente que tal vez no era la más apropiada, debido a que este tipo de antenas se encuentran en la parte superior de los televisores y no en las terrazas de los edificios. Al respecto, Yule (1998, p. 148) expresa:

“En general, sabemos lo que significan las palabras a partir de otro tipo de contexto, del contexto físico. Si vemos la palabra BANCO en la pared de un edificio en cualquier ciudad, la situación física influirá en nuestra interpretación. En muchas ocasiones, pare comprender lo que leemos y oímos recurrimos al contexto físico, especialmente cuando se trata de expresiones referidas a la situación temporal y especial”

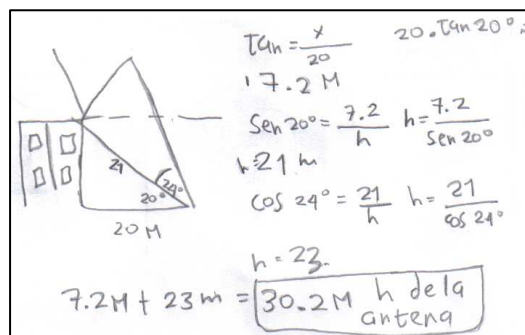


Figura 24. Taller 3 – Claudia 4

Para finalizar, queremos resaltar cómo los símbolos se convierten en el objeto de atención habitual en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en muchas de las ocasiones se da un mal uso de estos. Las siguientes expresiones, muestran cómo los estudiantes centran su atención específicamente en el símbolo, dejando de lado lo que verdaderamente este representa. Al preguntarles a los estudiantes sobre la definición de tangente, sus respuestas se basaron explícitamente en el referente del término. Sneyder argumentó:

“tangente es igual a la fórmula, cateto adyacente sobre cateto opuesto”
(Entrevista, noviembre 22 de 2007)

Mayra expresó:

“Es el cateto opuesto sobre el cateto adyacente” (Entrevista, noviembre 22 de 2007)

Luego, como lo expresa Pimm (1999, p. 47) los estudiantes comenten errores que ocurren precisamente porque se enfocan en la manipulación de símbolos sin prestar atención a los posibles significados que este tiene, dejando de lado la importancia de integrar significados que lo lleven a interpretar o comprobar los resultados obtenidos. Lo anterior se puede ver reflejado en las clases de matemáticas cuando los estudiantes, hacen uso inconsciente del número pi como la notación de la letra griega π y valor numérico $\pi = 3.14159265\dots$

Aunque esto no es errado, desconocen el verdadero significado del mismo como un número irracional, cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro. Para el caso de la trigonometría, la manipulación de símbolos sin conocer su significado se vio reflejada en la definición errada de tangente dada por Sneyder.

En uno de los problemas que se les planteó, *“Desde una carretera con pendiente $m = 0.268$, se observa el extremo superior de un poste, con un ángulo de elevación de 35° . 200 m más adelante el ángulo de elevación es 53° . ¿Cuál es la altura del poste? ¿A qué distancia se encuentra el poste desde el segundo punto de observación?”*, algunos estudiantes manifestaron no poder resolver el problema ya que no recordaban el concepto de pendiente. Mayra expresó:

“La verdad no me acuerdo de los términos de la pendiente y cómo se gráfica, entonces no sé cómo trazar el triángulo”

Mónica, argumentó:

“No recuerdo nada de pendiente, aparte nunca vi problemas con pendiente y no entiendo bien el problema...”

Las expresiones anteriores, son muestra de que los símbolos constituyen su centro de atención, de tal manera que para ellos este se convierte en la base de las matemáticas, dejando de lado el significado que representan. Por ello, cuando se nombró de nuevo la palabra pendiente en una situación problema, esta no fue inconveniente alguno, ya que venía representado por el símbolo “°”, que significa grados.

De acuerdo con lo descrito anteriormente, podemos decir que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas y principalmente en la resolución de problemas, resulta ser el sentido y significado dado por el estudiante a cada una de los términos matemáticos y no matemáticos utilizados en el enunciado de una situación problema. El significado que el estudiante atribuye a cada uno de los vocablos está ligado a sus prácticas cotidianas, creando así dificultades para la interpretación de términos que pueden presentarse tanto en el ámbito matemático, como en la cultura en la cual se desenvuelve.

Según Blumer (1982) citado en Godino y Llinares (sin fecha, p.3) “el ser humano orienta sus actos hacia las “cosas” en función de lo que estas significan para él” y que “el significado de esas cosas se deriva de, o surge como consecuencia de la interacción social que cada cual mantiene con su prójimo (fuente del significado)”.

La necesidad de traducir el lenguaje escrito en una representación gráfica se convierte en una estrategia de solución para el estudiante. Sin lugar a duda, “el pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos importantes del problema sino que también puede sugerir alguna estrategia para resolverlo” Santos (1997, p. 54). Sin embargo, esta representación es de ayuda en la solución siempre y cuando los significados dados a las palabras usadas en el problema, sean los más convenientes a los que el emisor quiere transmitir.

Podemos decir que el lenguaje cotidiano del estudiante prepara el camino para la adquisición de conceptos matemáticos, por lo tanto, debemos apoyarnos en éste para poder llegar a una posterior formalización, teniendo en cuenta que se debe explicar las diferencias que existen entre un registro y otro, para que de esta manera no se presenten ambigüedades a la hora de interpretar diversos términos. Por esta razón, es importante que los profesores conozcan el sentido que los estudiantes dan a los términos matemáticos y no matemáticos, para deliberar con ellos acerca del significado que se le deben atribuir a estos según el contexto que se esté abordando.

2- Enunciado vs. Gráfico

*“Si a uno le dan el dibujo es más fácil”
Claudia*

Esta expresión nos permitió comprender lo importante que es para los estudiantes que la situación problema este acompañada de un gráfico, encontrando en éste herramientas útiles para plantear una solución. Dependiendo de la decodificación que el estudiante pueda hacer de la representación gráfica, ésta será de gran ayuda para orientar la resolución de la situación planteada.

Sin embargo, que el problema estuviera acompañado de un lenguaje gráfico, no pareció ser de total ayuda para los estudiantes en el momento de plantear soluciones correctas, contradiciendo sus propios juicios, por ejemplo, Claudia expresó: *“Si a uno le dan el dibujo es más fácil”*, frase que dio paso a esta categoría. La necesidad de tener un conocimiento sobre los significantes que conformaban el enunciado, primó sobre las representaciones escritas y gráficas que lo acompañaban.

Muestra de ello, se evidenció en el momento que se les planteó la siguiente situación problema, en la que los estudiantes debían mencionar cuáles términos se le dificultaban o desconocían, tratando de relacionarlos con su vida diaria para reescribir el problema y dar una solución al mismo.

En un automóvil, la manivela del cigüeñal tiene 7.62 cm de longitud y la biela tiene 22.86 cm. Cuando el ángulo OPA es de 15° , ¿Qué tan lejos está el pistón P del centro del cigüeñal?

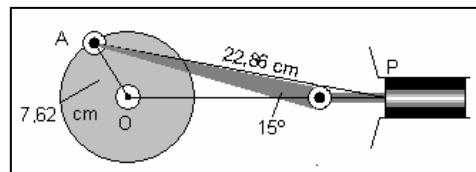


Figura 25. Taller 2 – Ejercicio 2

A pesar que el enunciado proporcionaba un dibujo que representaba la situación, este no fue suficiente para que los estudiantes encontraran el significado adecuado a cada una de las palabras que se usaban para diseñar una estrategia de solución. Es posible que el problema haya sido ajeno a su diario vivir y el no poder encontrar una representación similar en sus estructuras mentales, les impidió esbozar una solución. Por ejemplo, Mónica señaló:

“No tengo ni idea de que será cigüeñal, biela... por lo tanto no entiendo el problema”

En contraste, para Sneyder no presentó ningún inconveniente la situación. El manifestó conocer todos los términos argumentando: ***“mi papá tiene un carro”***, sin embargo, su solución manifestó otro tipo de dificultades. Entonces, creemos que los conocimientos que se tengan del mundo se convierten en un factor determinante para los estudiantes, interponiéndose en las interpretaciones gráficas que les sean brindadas. Ante esto, Chamorro (2003, p. 284) dice que “Cuando se desconoce el funcionamiento de la bolsa, es prácticamente imposible resolver un problema que trate sobre ella, por mucho que sólo comporte una sencilla sustracción; faltan conocimientos sobre ese mundo”.

Este mismo caso se presentó en el problema seis de la primera actividad, la cual planteaba la siguiente situación:

En la figura se observa el plano superior de un avión caza a reacción.

- a) *Determina el ángulo Φ*
- b) *Si el fuselaje tiene 11,6 cm de ancho, calcula la envergadura CC' .*

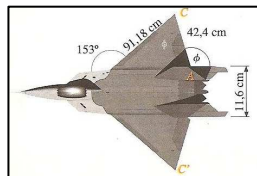


Figura 26. Taller 1 – Ejercicio 6

Para los estudiantes era un contexto nuevo y para ellos era importante tener claro que función cumplía cada una de las partes del avión nombradas en el enunciado, con el fin de asociar el significante, el significado y el referente del vocablo. Lo anterior, se observó mientras los estudiantes discutían y socializaban sus propias conjeturas, por ejemplo las voces de sus compañeros al expresar:

“un avión caza a reacción es un avión caza, sí un avión”,

Y la intervención de Mónica al manifestar:

“no se qué es fuselaje, me imagino que es donde guardan el fusil”

Estas voces fueron evidencia que aunque haya un lenguaje gráfico, este puede no ser entendido por los resolutores ni tampoco mostrarse significativo para ellos. Cuando la interpretación y decodificación del mismo no es la más apropiada, les impide al estudiante abordar una estrategia de solución.

“Un dibujo puede ser claro para los autores del problema y sin embargo resulta confuso para el estudiante, porque él lo puede analizar de manera diferente llevándolo a un posible error al no encontrar una representación familiar y el conjunto de procedimientos de solución asociados a ella no le muestran un camino para resolver el problema”. Mateos (2001, citado por Duitama y Téllez).

Consideramos que aunque se tengan claros los conceptos sobre las funciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno (en la mayoría de las veces) no son suficientes para enfrentarse a una situación que se ubica en un contexto ajeno a la cotidianidad, y en la que el dominio de un vocabulario adecuado se encuentra restringido.

Para finalizar lo correspondiente a la comprensión e interpretación de los enunciados de una situación problema, insistimos en que se debe reducir la gran distancia que existe entre el lenguaje cotidiano de los estudiantes y el lenguaje utilizado en las situaciones problema que se plantean en los libros de texto, y que son usados por el profesor en el aula de clase.

El vocabulario deficiente y significado atribuido al mismo dificulta la comprensión de la información, seccionando y basando las soluciones en lo estrictamente captado. Por lo tanto, la tarea de comprender un problema se ve facilitada cuando los términos que se utilizan para describir una situación son familiares para los estudiantes desde un punto de vista léxico⁷, sintáctico⁸ y gramático⁹, que permiten ver las frases no como un agregado de palabras sino como un todo.

Es importante que la resolución y planteamiento de problemas se refleje en la práctica cotidiana. Para ello, se hace necesario que las situaciones planteadas describan situaciones lo más parecidas a la realidad, que muestren a los estudiantes el sentido y el significado del estudio de la trigonometría, obteniendo así resultados satisfactorios en la enseñanza y aprendizaje de esta rama de las matemáticas.

Sin embargo, hasta el momento sólo hemos teniendo en cuenta el contexto social o el entorno que rodea al estudiante, describiendo y analizando las dificultades que se les presenta a los alumnos en el momento de enfrentarse a problemas que describen situaciones que se ubicaban en contextos ajenos al propio. No obstante, surgen otras dificultades que en ocasiones influyen en los estudiantes en la resolución de un problema, conflictos que se producen debido a vacíos conceptuales o conceptos que no recuerdan, que los llevan a errar en sus soluciones.

⁷ Véase p. 104

⁸ Véase p. 104

⁹ Véase p. 103

Adquirir un vocabulario específico de las matemáticas no resulta fácil. Apropiarse de un concepto matemático incluye saber expresarlo tanto escrito como oralmente y es precisamente lo que resulta difícil para el estudiante. El sustituir el lenguaje cotidiano por un lenguaje más apropiado para conceptos y elementos básicos matemáticos, se convierte en un obstáculo en las soluciones de situaciones problema de tipo trigonométrico.

En el desarrollo de algunas actividades, en las que los problemas involucraban términos como: altura, radio, ángulos (depresión, elevación), acimut, longitud, los estudiantes mostraron dificultad al separar un registro natural de uno matemático. Dejaron ver que no tienen conciencia en el momento de discernir de los significados y usos de tales términos; manifestaron no tener conocimiento sobre cuándo debían referirse a uno u otro en el aula de clase.

El tercer problema de la primera actividad, “*Un observatorio espacial gira alrededor de la tierra a una altura de 380 millas. Cuando un astronauta mira al horizonte de la tierra, el ángulo θ que se muestra es de 65.8° . Usa esta información par calcular el radio R de la tierra*”, corrobora la ausencia de un correcto discernimiento de los estudiantes en el momento de dar el significado apropiado a determinados términos matemáticos en los problemas, es decir, una reinterpretación de su lenguaje cotidiano.

Por ejemplo, Claudia percibió la altura¹⁰ como una medida vertical, pues es el significado que le atribuye en su medio natural. Sin embargo, pasó por alto que la altura de un triángulo puede llegar a ser una medida horizontal, además, dejó a un lado el concepto de radio como una de las líneas de la circunferencia, pensamientos que al parecer dieron evidencia de la importancia que ella le atribuye a la representación gráfica de la situación, dejando en un segundo plano el lenguaje escrito de la misma.

¹⁰ Véase p. 103

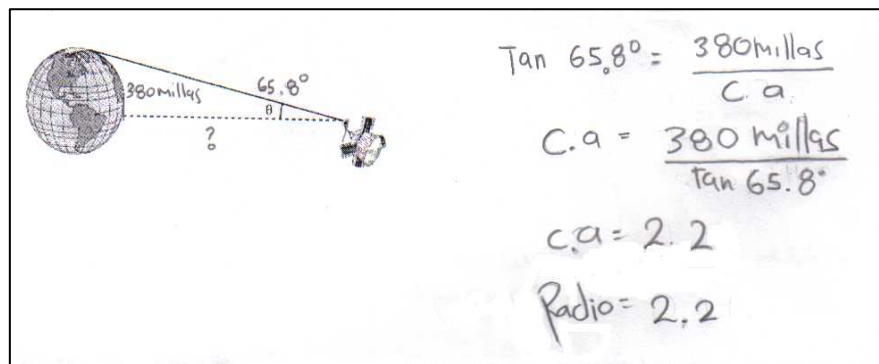


Figura 27. Taller 1 – Claudia 3

Mayra también manifestó desconcierto ante el problema planteado.

“No sé cuál es la altura ahí, no se dónde tomarla”

Aunque ella percibió la altura como una medida estrictamente vertical, al igual que Claudia, no logró resolver el ejercicio ya que el lugar donde ubicó la altura, era exactamente la parte donde debía poner el radio de la tierra. Esto evidenció que ella no tuvo en cuenta que la altura que intentaba situar, era respecto al observatorio espacial y no a uno de los polos de la tierra, como ella lo entendió.

Estas expresiones mostraron la poca claridad de las estudiantes sobre el concepto geométrico de altura, a quienes el gráfico produjo un desequilibrio en el significado y representación mental que tenían sobre este término, imagen que daba un significado poco apropiado para el contexto matemático de acuerdo con su experiencia cotidiana. Para las estudiantes, altura es una medida vertical de un objeto determinado a otro, y en el momento de ubicarse en el contexto matemático de la situación, no supieron a cuál de los registros debían referirse y les convenía utilizar, razón que se vio reflejada en el momento de solucionar el problema dado.

Claudia ubicó la altura según su referente en el lenguaje cotidiano. No observó ni tuvo presente las condiciones que acompañan dicho vocablo y que de alguna manera,

modificaba su significado sobre el término, llevándola a indagarse sobre cuál era el registro más apropiado para ser usado, y que por ende la conduciría por una estrategia más acertada.

Sneyder, aunque errando también en su solución, tuvo presente las demás condiciones dadas en el problema y que modificaran su perspectiva respecto al término altura. Cuando leyó el enunciado, ubicó la altura dada sobre la tierra, es decir su altura era igual al radio de la misma. Sin embargo, al terminar de leer y darse cuenta de la pregunta a resolver, rediseñó su dibujo tomando la hoja horizontalmente, buscando que su representación mental se asemejara a la dispuesta en el gráfico, con el fin de hacer más familiar el enunciado y lo orientara a la hora de dar un significado a la situación planteada.

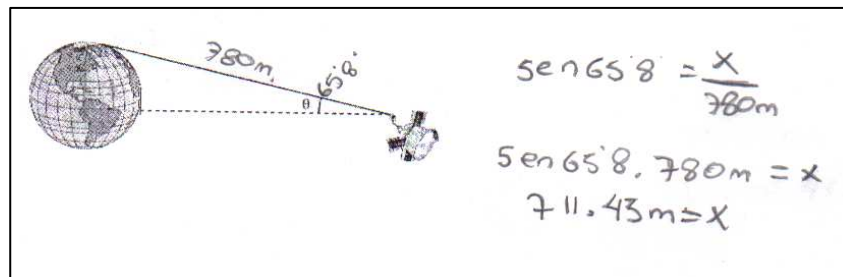


Figura 28. Taller 1 - Sneyder 3

Basadas en las soluciones propuestas, estamos seguras de que la interpretación que hicieron Claudia y Sneyder difirieron del concepto de altura que el contexto del enunciado quiso dar a entender. Al pasar de un lenguaje natural a un lenguaje matemático, el término sufrió una modificación que se manifestó en el referente del término altura de los estudiantes, y en el que el sentido matemático, estuvo ausente en las representaciones gráficas de los alumnos. Luego, aunque en el aula de clase se use frecuentemente determinados términos y los alumnos los acepten con facilidad, esto no es muestra de que tanto profesores y alumnos estén haciendo referencia a lo mismo, consolidando grandes vacíos conceptuales manejos errados de determinados conceptos matemáticos.

Respecto a esto, Pimm (1999) afirma que “es claro que el discurso matemático incluye términos especializados y significados distintos de los habituales en el habla cotidiana”, y por ello el lenguaje utilizado en las matemáticas, “que es claro para los docentes, no siempre lo es para los estudiantes”.

Por tal razón, creemos que en algunas ocasiones el estudiante al no lograr comprender los términos del enunciado, recurre a una repetición o proceso superficial de conceptos que más adelante, se muestran como un conjunto de palabras sin sentido y sin significado. Una muestra de ello, se observó cuando los estudiantes se enfrentaron a la situación problema enunciada anteriormente.

En esta situación, como ya lo habíamos descrito, los estudiantes debían conocer el concepto de *altura*, pero además debían recordar y tener presente el concepto del término *radio*¹¹. Sin embargo, el concepto geométrico de radio no estaba muy claro en los estudiantes, lo que se convirtió en un obstáculo que les impidió dar un uso correcto a los términos utilizados en el enunciado. A esto nos referimos, cuando los estudiantes ubicaron la altura a la que se encontraba el observatorio espacial en el lugar donde debía ubicarse el radio de la Tierra en el problema planteado.

Lo mismo ocurrió con el problema: *Al moverse un péndulo de 100 centímetros de longitud forma un ángulo de 36° con la vertical. ¿Qué distancia sube el extremo inferior del péndulo respecto a la horizontal?* Aunque no es muy usual ver péndulos en el contexto en que se desenvuelve nuestra vida, la mayoría podemos hacer una representación gráfica del mismo, de acuerdo al contacto que hayamos tenido con el objeto.

A pesar de que el problema proporcionaba un dibujo que describía claramente la situación, este no fue de gran ayuda para los estudiantes. Aunque que todos los términos usados en esta situación eran lo suficientemente claros, nuevamente tuvimos evidencia

¹¹ Véase p. 104

que lo que tiene sentido para la mayoría no significa que sea para todos. Esto lo decimos porque es indiscutible que si preguntamos ¿qué se pone en la parte inferior del árbol de navidad?, los estudiantes responderían con seguridad, los regalos de navidad. Pero si decimos: “el extremo inferior de un péndulo”, es posible que no entiendan la expresión, al no lograr reinterpretar las palabras del lenguaje matemático, pues fue así como se refirió Mónica al problema.

“No sé, no lo entiendo. Supongo que la parte final es el extremo inferior...”

Lo anterior nos lleva a pensar y reflexionar nuevamente sobre lo importante que es para los estudiantes comprender el enunciado, y que a pesar de que la situación problema esté acompañada de un esquema, el conocer el significado de los vocablos y expresiones se convierte en una estrategia viable de las situaciones problema de tipo trigonométrico.

Luego, la comprensión del pensamiento matemático debe preocuparse por el uso de signos e instrumentos de la cultura que alteran la apropiación de conceptos matemáticos. Deben considerarlos como patrones que fijan la actividad humana, y que contribuyen en el dominio de términos a través de las prácticas dentro del aula de clase, mediadas por el profesor. Entonces,

“los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” y que el “significado” de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática”. D’Amore (2006, p.5)

Por lo tanto, en el momento de tomar la resolución de problemas en el aula de clase como estrategia eficaz de aprendizaje, conviene dar importancia a la naturaleza del lenguaje del estudiante y a la naturaleza del registro matemático, para que tanto profesor

como estudiante, sean conscientes de la expansión de la terminología mediadora en la comunicación, evitando así rupturas y modificaciones de los contenidos matemáticos, que generen en los estudiantes desinterés por una ciencia “complicada”, “difícil” y principalmente “confusa” y sin sentido, que conlleva a los fracasos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Finalizamos esta categoría comentando que en la mayoría de los casos, las personas atienden como primera instancia a la representación gráfica que poseen los textos, ya sean relacionados con matemáticas, biología, sociales o cualquier otra área, mostrando de esta manera que un lector pretende, como primera medida, encontrar información en un esquema antes que en un escrito.

Por tal razón es necesario que los profesores en el aula de clase, además de enseñar a leer símbolos matemáticos y darles a conocer la estructura de un lenguaje matemático al estudiante, incluyan en el proceso de enseñanza la explicación de esquemas para que el estudiante alcance un nivel de comprensión del lenguaje gráfico de las matemáticas, que le permita al estudiante “hablar matemáticas” sin temor a no hacerlo de la forma correcta, logrando un intercambio de ideas, presaberes y significados que busquen encontrar una coherencia y sentido a las expresiones hechas en el contexto matemático. A esto, Pimm (1999, p. 144) señala que “Los gráficos son artefactos simbólicos, y los alumnos tiene que aprender a leerlas e interpretarlas como tantos otros símbolos matemáticos”.

Para terminar, aunque en algunas de las situaciones planteadas los estudiantes presentaron dificultades que los condujeron a soluciones erróneas, otras resultaron ser “fáciles” para los estudiantes, solucionando los problemas de tipo trigonométrico correctamente.

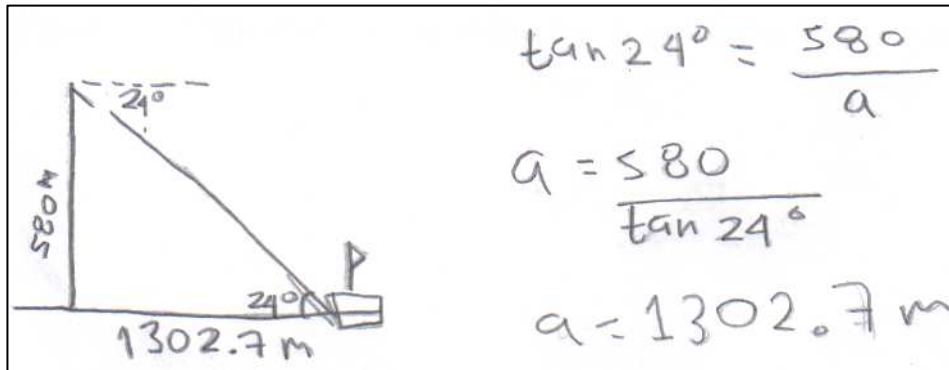


Figura 29. Taller 3 – Claudia 2

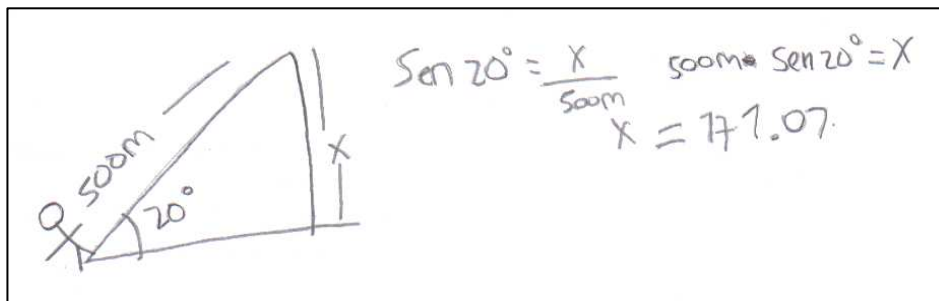


Figura 30. Taller 4 – Mayra 1

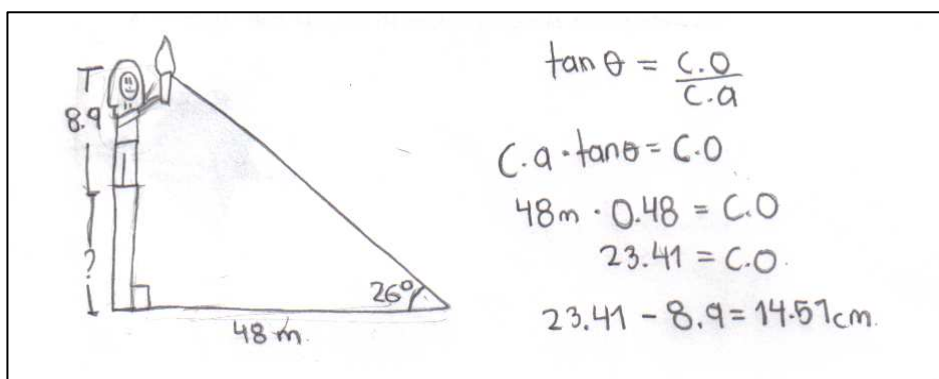


Figura 31. Taller 1 – Mónica 4

3- Entrelazando ideas.

“La verdad nos soy muy buena para plantear problemas”

Mónica

El planteamiento de problemas se ha convertido en un complemento de la resolución de problemas, sin embargo cada uno de estos tiene sus propios objetivos desde un punto de vista cognitivo. Plantear problemas se convierte en un proceso más eficaz que la resolución de los mismos, ya que al diseñar nuevas situaciones el estudiante problematiza su realidad permitiéndole dar mejores respuestas a los problemas que ocupan su diario vivir. Esto no quiere decir que el planteamiento de problemas reemplace totalmente la resolución de problemas en el aula de clase.

Al proponer a los estudiantes plantear problemas nuevos, podemos observar en ellos aspectos como la apropiación de conceptos matemáticos, el reconocimiento de los elementos necesarios para dar solución a los problemas, y lo más importante el desarrollo de habilidades de transcripción de un lenguaje común a un lenguaje matemático. En otras palabras, el planteamiento de problemas les exige la búsqueda de datos, relaciones, condiciones, es decir, componentes del problema y las relaciones entre estos, junto con la construcción de significados que supone relacionar lo que se está aprendiendo y lo que ya se sabe, hasta la expresión del lenguaje común en un lenguaje matemático, aspecto que contribuye en el desarrollo del pensamiento.

Según Brousseau citado por Chamorro (2003, p. 36), saber matemáticas no es solamente saber definiciones para saber cuándo se deben aplicar, sino es ocuparse de problemas, que en un sentido más amplio incluye encontrar preguntas como respuestas, una actividad en la que el alumno formule enunciados y los pruebe, reconociendo cuáles hacen parte de la cultura matemática.

A partir de la segunda sesión, el planteamiento de problemas se convirtió en una actividad que contribuyó en nuestra investigación, al destacar los factores matemáticos y no matemáticos que influyen en la traducción de la información al problema, es decir, el diferenciar el significado de una expresión en el lenguaje cotidiano en un lenguaje matemático, darle orden y forma descartar a las expresiones con el fin de dar sentido al problema y apartar los datos irrelevantes, que obstaculizan la comprensión de la situación.

Cuando se les pidió a los estudiantes plantear situaciones problema tomando algunas de las palabras listadas (acimut, visual, radio, longitud), resultó bastante enriquecedor observar la evolución de los estudiantes en determinados temas, al poder identificar que tanto han afianzado los conceptos que les fueron y se les pretende enseñar en la escuela. Por ejemplo, Mónica planteó un problema utilizando la siguiente expresión:

“El asta de una bandera que tiene 10 m de altura, proyecta una sombra con un ángulo de 35° , ¿cuánto mide la sombra?”

Lo anterior nos dejó ver las impresiones que tiene al expresarse en un lenguaje matemático, ya que con esta frase, ella supuso que sólo con escribirla un posible resolutor la interpretaría de la misma manera como ella lo imaginó. Creemos que Mónica consideró la frase, “la bandera proyecta una sombra con un ángulo de 35° ”, como suficiente para esbozar una figura tal cual ella la pintó, pero no tuvo en cuenta que al hablar de ángulos, estos debían darse en referencia de un plano horizontal, vertical o simplemente determinarlos entre dos objetos, cuyas aristas podían ser tomadas como semirrectas de referencia para dicho ángulo.

Los alumnos en clases de trigonometría están permanentemente resolviendo problemas, luego se esperaría que el mencionar y usar ángulos en los enunciados como un componente elemental en estos, los estudiantes debieran dar cuenta de la manera en la que se referencian los ángulos. Sin embargo, el planteamiento de Mónica dio muestra de

vacíos conceptuales, dejó ver que nuestros alumnos no interiorizan procesos que van de la buena comprensión de lectura al uso adecuado de algoritmos, pareciera que ellos reemplazan esto por “encontrar palabras claves” que les permita diseñar un bosquejo con suficientes datos, con el fin de aplicar algoritmos adecuados. En concreto, “es frecuente que los alumnos no tengan muy clara la idea de por qué escriben y, sin tener idea del objetivo que se persigue, es difícil descubrir que, por ejemplo, lo escrito es ambiguo o de algún modo insuficiente” Pimm (1999, p.194), esto pudimos corroborarlo con el comentario que Mónica hizo:

“Ay la verdad es que no soy buena para resolver problemas, se me dificulta mucho relacionar las palabras, sobre todo para después resolver el problema”

Resulta difícil pensar que si alguien plantea un problema se le dificulte solucionarlo, pero no es tan ilógico cuando reconocemos que plantear un problema no es tarea fácil.

De la misma manera, Sneyder planteó situaciones problema es las que no definió con exactitud, para el lector, los puntos en los que se iban a fijar los vértices de los triángulos de referencia,

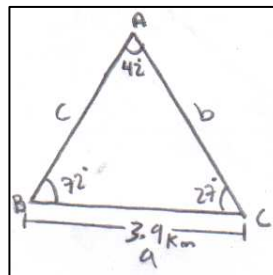


Figura 32. Taller 2 – Sneyder II.1

“Un tren que va por la vía férrea A es observado por dos estaciones ubicadas en los puntos B y C y a que distancia se halla el tren de B”

Él no consideró que la representación mental del lector sobre la palabra vía férrea, iba a ser diferente a la que él hizo en el gráfico, no pensó en que otra persona dibujaría una vía férrea como un segmento y no como un punto, su representación. Nuevamente, se evidenció las dificultades que los estudiantes tienen al plasmar de manera escrita algo que aparentemente, esta claro en sus mentes. Consideramos que estas son consecuencias debidas a la poca lectura que ellos realizan y/o al poco análisis que pueden hacer de esta.

Además, Sneyder cometió un error en su representación gráfica, pues parece haber olvidado el teorema de los triángulos: “La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° ”, lo que nos hizo creer que el pasó por alto conocimientos matemáticos debido a la necesidad de dar los datos suficientes para la resolución de la situación en un dibujo.

Entonces, el proponer a los estudiantes actividades en la que tengan que escribir y expresar sus ideas y los conocimientos acerca de un tema, se convierte en una buena herramienta para los docentes, ya que puede indicar la concepción divergente del alumno sobre algunas de sus nociones.

“El trabajo escrito [...] permite acceder de algún modo a la forma de pensar de los alumnos. Los errores de los alumnos pueden proporcionar información, mostrando algunas malas interpretaciones, patrones de pensamiento y convicciones” Pimm (1999, p. 1666)

En cuanto a la solución que hizo de su problema, se puede observar que aunque él mismo es quien propone hallar la distancia de donde se encuentra el tren a la estación B, halló otra distancia. Creemos que su confusión se debió a las variables que él utilizó para nombrar los vértices del triángulo y las usadas en el enunciado, evidenciando los conflictos a los que se enfrentan los estudiantes al no tener destrezas para transversalizar algunos tópicos del lenguaje y de las matemáticas.

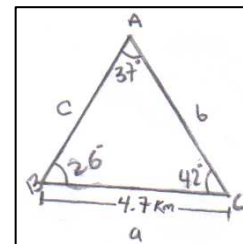
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \quad \frac{3.9 \text{ Km} \cdot \text{sen}42^\circ}{\text{sen}72^\circ} = B$$

$$\frac{3.9}{\text{sen}42^\circ} = \frac{b}{\text{sen}72^\circ} \quad 2.74 \text{ Km} = B.$$

Figura 33. Taller 2 – Sneyder II.1`

En la vida diaria, al querer ubicar una persona u objeto pedimos la dirección del mismo, esperando como posible respuesta “camine hasta la esquina, voltee y allí lo encontrará”, sin embargo en problemas de trigonometría que indican trayectorias, la palabra acimut es la más utilizada, su significado sigue siendo un misterio para los estudiantes. Un ejemplo de esto, se evidenció en la situación problema que planteó Sneyder, en el que le asigna a la palabra acimut el significado de “clasificación o característica de un avión”.

“Un avión acimut esta en un punto A y lanza dos misiles ubicados en los puntos B y C a qué distancia se halla el avión A del misil C”



**Figura 34.
Taller 2 – Sneyder II.2**

Nuevamente, el lenguaje gráfico se convirtió en la mejor forma para expresarse, pues así resultaba más fácil proporcionar elementos esenciales para la resolución del problema, ya que el escribir ideas en un lenguaje matemático se convertía en un obstáculo cuando no se tenían claros los significados que debían ser atribuidos en ese contexto, en el que para desenvolvernos adecuadamente, implicaba tener un manejo adecuado del vocabulario utilizado. Sin embargo, cuando el contexto era el matemático, manejar un glosario se convirtió en un “imposible” para los estudiantes, ya que para ellos resultaban ser términos muy “complicados” a la hora de entender y nombrar.

En cuanto a la solución de Sneyder, se evidencian errores concernientes a la simbología, al no fijarse bien en los nombres dados a sus variables y nuevamente hallar una distancia no pedida.

$$\frac{4,7 \text{ Km}}{\text{sen } 37^\circ} \cdot \frac{C}{\text{sen } 42^\circ}$$

$$\frac{4,7 \cdot \text{sen } 37^\circ}{\text{sen } 42^\circ} = C$$

$$37,7 \text{ Km} = C.$$

Figura 35. Taller 2 – Sneyder II.2`

Cabe resaltar que en esta actividad los vocablos dados a los estudiantes para plantear los problemas eran palabras utilizadas usualmente en diferentes libros de texto, pese a ello los estudiantes solo escogieron términos no matemáticos para sus situaciones, mostrando los vacíos conceptuales de los mismos, a excepción de Claudia quien hizo uso (erróneo) de la palabra radio, confirmando la poca conceptualización de los estudiantes en las clases de matemáticas.

Como lo mencionamos al iniciar esta categoría, el plantear problemas hizo parte de la mayoría de las actividades propuestas, los problemas que nombramos anteriormente fueron los que plantearon los estudiantes al dárseles un conjunto de palabras, sin embargo consideramos que sería interesante conocer los procesos lecto-escritores en nuestros estudiantes, al dárseles un texto que describiera un situación matemática y pedirseles que plantearan un problema a partir de lo comprendido, que nos permitiera ver el manejo del lenguaje matemático usado en el texto y utilizado a la hora de escribir. Además queríamos que los estudiantes se involucraran con la historia de la matemática, al conocer los problemas más relevantes de esta.

“Viajemos al pasado, más específicamente a la Antigua Grecia alrededor del año 630 a.C. En este año (aproximadamente) nació Tales de Mileto matemático y astrónomo considerado por su inteligencia uno de los Siete sabios de Grecia.

*Este matemático se hizo famoso al definir varios teoremas. Uno de ellos, cuenta que comparando la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides, en especial la de la pirámide de Keops, Tales midió por semejanza y de manera indirecta, sus alturas respectivas. La proporcionalidad entre los segmentos de las rectas paralelas que determinan otras rectas, dio lugar a lo que hoy se conoce como **Teorema de Tales**. Puesto que los rayos del sol inciden paralelamente sobre la tierra, los triángulos rectángulos determinados por la altura de la pirámide y su sombra, y el determinado por la altura del bastón y la suya, son semejantes. Luego, con solo medir la longitud de un bastón, la sombra de éste y la sombra de la pirámide, planteó la proporción que le permitió calcular la altura inaccesible”.*

Los estudiantes no están acostumbrados a plantear problemas y mucho menos leer textos matemáticos, su desconcierto ante la actividad nos lo hizo saber Mónica al expresar:

“No entiendo, o sea según la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides es semejante, pero y qué es altura inaccesible, y qué tienen que ver los rayos del sol”

Según lo anterior, podemos ver que ella aún no manejaba el término semejante¹², en cuanto a la definición geométrica se refiere, tal vez su confusión se originó por lo que ella pudo haber entendido como semejante en su contexto, luego resultaba bastante ilógico pensar que la altura de un bastón fuese “parecida” a la de una pirámide, que la sombra del bastón tuviese alguna “relación familiar” con la sombra de la pirámide, o que “semejante” altura de una pirámide se pudiese comparar con la de un bastón, entonces es ahí, donde comprendemos que nuestros alumnos no interiorizan determinados conceptos relacionados con las matemáticas, debido a la gran influencia que tiene el entorno en ellos.

Además, se puede observar que ella ignoró términos que no eran netamente matemáticos como “inaccesible”, o probablemente sí comprendió la definición de dicho vocablo,

¹² Véase p. 104

pero le fue imposible interpretarlo de manera adecuada en el texto, ya que ella estaba contemplando que la altura de una pirámide era “parecida” a la de un bastón, y si esto era así entonces la altura si era accesible.

“[...] un experto en el área, en general, percibe la estructura profunda de la situación y sus intentos de solución están guiados por esta percepción. Por otro lado, los estudiantes enfocan frecuentemente su atención hacia aspectos superficiales del enunciado, periféricos de la esencia del problema y que, como consecuencia, los llevan por caminos erróneos” (Santos, 1997).

Por otra parte, Claudia planteó una situación problema en la que se pudo apreciar la dificultad que tuvo para crear un texto fluido, aunque pareciera que la comprensión del texto fue buena por su representación gráfica, en el momento de hacer una producción textual su enunciado se muestra superficial. La ausencia de términos matemáticos en el mismo, deja ver los conflictos de los alumnos al enfrentarse con el significado de las expresiones matemáticas.

“Encontrar la distancia A con la ayuda de la distancia B y C por el método de función trigonométrica”.

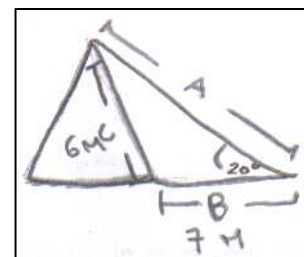


Figura 36.
Taller 2 – Claudia III

Además de esto, se puede observar como ella hizo hincapié en resolver el problema por el “método de función trigonométrica”, siendo incorrecta su condición, ya que en la representación gráfica aparece un triángulo obtusángulo. Consideramos que esto se debe a que los estudiantes en clase se limitan a escuchar conceptos, teoremas, pero sin apropiarse de los mismos, dando a entender lo poco significativo que resulta el aprendizaje de la trigonometría para ellos. El planteamiento de problemas puede

funcionar como una estrategia para evaluar el afianzamiento de conceptos en nuestros estudiantes.

Es usual que una situación problema de tipo trigonométrico esté acompañada de una representación gráfica, sin embargo es aún más común que esta se desprenda de los datos dados en un enunciado, pero ¿qué puede suceder si invertimos este proceso? Nosotras al querer dar respuesta a la pregunta que nos surgió, en la tercera actividad “*Leyendo y graficando*”, presentamos a los estudiantes cuatro dibujos con el objetivo que, con base a ellos crearan diversas situaciones problema que involucraran conceptos trigonométricos en su solución, con el fin de ser consecuentes con la temática estudiada en clase.

Al desarrollar estas actividades, dimos importancia al registro gráfico en las matemáticas, concordando con Pimm (1999, p. 144) quien expresa que “Las gráficas son artefactos simbólicos, y los alumnos tiene que aprender a leerlas e interpretarlas como tantos otros símbolos matemáticos”.

Respecto al primer dibujo presentado:

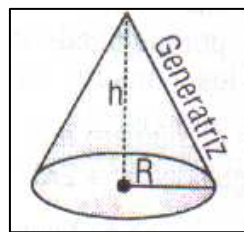


Figura 37.
Taller 3 – Ejercicio III.1

Pudimos darnos cuenta que los estudiantes no reconocen el término generatriz¹³, Mayra se atrevió a usarlo en el planteamiento del problema, pero no tenemos la certeza que lo hubiese comprendido y mucho menos de conocer su significado matemático.

¹³ Véase p. 103

“Si la generatriz de un cono mide 8m y se observa desde un ángulo de elevación de 35°, Cuanto mide el radio?”

Su situación problema no resultó clara para el lector (la frase en la que indicaba el ángulo de elevación) mostró la dificultad que tuvo para dar a entender dónde se ubicaba este, escribiendo una elevación sin especificar un plano de referencia. Consideramos que aunque los estudiantes en problemas propuestos ubican un ángulo observado desde un determinado punto, no resulta sencillo exponer en una situación problema planteada por ellos, respecto a qué se forma el ángulo dado, pues no es usual nombrar ángulos en la vida diaria. Aparte, es claro que Mayra presentó dificultades de tipo geométrico y se pudo observar cuando ella pidió la medida del “radio del cono”, como lo expresa al inicio del problema.

Los demás decidieron pasar por alto el término generatriz, al no tener ningún referente ni significado del mismo. Por ejemplo, Mónica con lo que escribió en el taller dio muestra de haberlo escuchado en sus clases, pero no logró interpretar el gráfico para recordar la definición del término.

“No me acuerdo de que es generatriz”

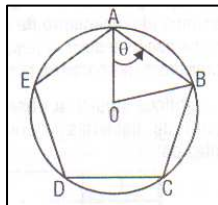
Ahora, la situación que Claudia planteó:

“Un niño encuentra un cono en su salón de clase. El cono tiene como radio 9 cm con un ángulo de depresión 21° halle la altura del cono”

La manera como ella empieza el enunciado de su problema, “un niño encuentra un cono en su salón de clase”, muestra que las situaciones enunciadas por los estudiantes están ligadas a las acciones que se practican en su diario vivir, constituyéndose por elementos que pueden argumentar y hacer representaciones mentales. Debe ser claro que no era necesario que el cono se encontrara en un salón de clase y ni siquiera era necesario hallarlo, pero indiscutiblemente esto la hizo sentirse más familiarizada con el problema.

Desentrañando un poco más el problema planteado, se puede vislumbrar que Claudia hizo un uso inadecuado del concepto de ángulo de depresión, lo que nos muestra que si bien leyó, ubicó y resolvió una y otra vez problemas de tipo trigonométrico, en los que este mismo término intervino, para ella resultó difícil hablar sobre la ubicación de un ángulo en una nueva situación, y aún más siendo la autora del mismo.

El segundo esquema que se les presentó, fue menos entendible para ellos. Sneyder intentó plantear una situación problema, sin tener presente las condiciones dadas en el taller, escribiendo un problema en el que los conceptos trigonométricos no estuvieron presentes.



“en un pentágono caben 5 triángulos encuentra el área total del hexágono si un triángulo tiene base 13 cm y altura 15. Cual será el área del pentágono”. Sneyder.

Figura 38.

Taller 3 – Ejercicio III.2

Igualmente se perciben las falencias sobre la escritura y significado de las mismas, pues pasó de “pentágono” a un “hexágono”, regresando de nuevo al “pentágono” nombrado. Además de las dos incógnitas que surgen de este enunciado, “encuentra el área total del “hexágono” y después, “cual será el área del pentágono”.

En las actividades anteriores los planteamientos de las situaciones problema que realizaron los estudiantes estuvieron condicionados tanto a palabras y expresiones como a dibujos, pero en la última actividad dejamos que ellos tuvieran vía libre para proponer enunciados con el lenguaje escrito y gráfico que desearan. Los estudiantes mostraron como una estrategia de diseño, el asociar una situación ya descrita a sus nuevos enunciados, es decir, redactaron problemas de forma similar a las situaciones que ellos ya habían resuelto. Una muestra de ello, fue el siguiente problema que Sneyder planteó:

“un burro sube por un camino que tiene 37° de pendiente respecto a la horizontal. Al cabo de caminar 650 metros ¿a qué altura sobre el plano inicial se encuentra la persona?

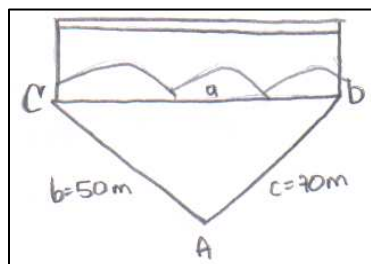
La pregunta dejó ver la influencia de situaciones conocidas, pues aunque el protagonista de su problema parecía ser un animal, el recordar la situación planteada en uno de los talleres y seguir el mismo esquema, lo condujo a un contradecir de sus protagonistas (burro, persona)

Por otra parte, Mayra planteó: ***“Un niño de 15 m de altura camina 90 m que distancia hay entre la cabeza del niño y el punto hasta el que llegó. Si tiene un ángulo de elevación de 40° ”.***

Un problema que al expresar una acción usual, propuso símbolos numéricos irreales para la situación descrita, además de formular una pregunta que no tenía sentido, ya que no se necesitaba aplicar ningún algoritmo matemático para encontrar la respuesta, es lógico que al estar de pie, la distancia desde nuestra cabeza hasta el sitio donde nos encontramos ubicados será siempre nuestra misma altura.

Además, se puede contemplar que ignoró por completo el contexto en el que ella se desenvuelve, pues un niño de 15 metros de altura es un imposible. Querer transcribir una situación usando vocablos de su cotidianidad, la llevó a pensar más en el problema guía que en la coherencia de lo escrito. No obstante, se debe resaltar algunos problemas planteados por los estudiantes, que evidencian un avance en el dominio tanto de conceptos y lenguaje matemático, como en aspectos netamente gramaticales. Por ejemplo, Mónica planteó:

“Desde un punto A dos personas observan los extremos de un puente, cada uno en diferente dirección formando un ángulo de 45° . Uno está a 50 m del extremo y otro a 70 m del otro



extremo. Cuanto mide el puente”

Figura 39.
Taller 4 – Mónica II.2

Para finalizar, debemos resaltar que en las situaciones problema planteadas por los estudiantes, los términos utilizados estuvieron relacionados con niños, arquitectos, celadores, personas en general, además de un burro, un carro, un puente y una torre que nos muestran elementos del contexto en el que ellos se desenvuelven. Elementos que nos muestran la necesidad de buscar la utilidad de la trigonometría en su diario vivir, buscando sentido y significado a la misma. Además es conveniente mencionar que las medidas de longitud usadas por los estudiantes fueron estrictamente dadas en centímetros y metros, lo cual no es tan usual en los problemas presentados en los libros de texto, que utilizan medidas como pies, pulgadas y millas. Esto nuevamente es evidencia de la influencia del medio en el que los estudiantes se desenvuelven.

Por lo tanto, a través del planteamiento de problemas los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea, pues contribuyen en el desarrollo de la lengua materna y el vocabulario técnico del alumno, al tener que recopilar información y utilizarla adecuadamente en la construcción de los problemas, dejando ver la eficacia del planteamiento de problemas en el aula de clase como estrategia didáctica, además de permitir al estudiante desarrollar y construir ideas matemáticas.

Sin embargo, hay que tener claro que el proponer el planteamiento de problemas como estrategia metodológica, no siempre permite que el estudiante demuestre apropiación de conceptos matemáticos, o destrezas al transcribir un lenguaje natural a un lenguaje matemático y viceversa, puede que simplemente reproduzcan o imiten alguna situación semejante a la que ellos desean expresar, esto resulta porque el lenguaje matemático no se alcanza de un momento a otro y para lograrlo el estudiante debe desarrollar habilidades como analizar y sintetizar para alcanzar un verdadero discurso matemático.

REFLEXIONANDO

Las matemáticas disponen de un lenguaje especializado que presenta elementos semánticos y sintácticos que le son propios y lo diferencian de manera significativa del lenguaje natural. Entonces, resulta importante que los estudiantes estén en condiciones de separar los significados y usos de los términos, saber cuándo deben referirse a uno u otro según el contexto que describa la situación, teniendo presente las variaciones semánticas que existen entre el contexto matemático y su contexto social.

Es de suma importancia que dentro y fuera del aula de clase se tenga presente las diferentes formas de comunicación de quienes hacen parte del proceso de formación, es decir, de los profesores y estudiantes que hacen parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje, ya que el sentido de las palabras expresadas por un emisor puede ser modificado por el receptor, dando pie a incongruencias y rupturas en la comunicación.

A través de la experiencia vivida con los estudiantes durante esta investigación, podemos decir que existen algunos inconvenientes entre el uso común y técnico de las palabras que hacen parte tanto del léxico cotidiano, como del matemático. Consideramos que algunas de las dificultades que surgen durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje resultan ser de la deficiente interpretación del contexto semántico de las situaciones expuestas a los estudiantes, interpretación que se torna necesaria para la comprensión de situaciones problema dentro del contexto matemático.

La investigación mostró como la apropiación de conceptos matemáticos no es suficiente para la comprensión de un enunciado, pues se requiere la selección y organización de los términos usados en el texto, además de la traducción y/o diferenciación de esta

organización de términos cotidianos. Por esta razón como docentes debemos ser conscientes del acompañamiento que debemos hacer a los estudiantes, para que ellos aprendan a interpretar adecuadamente los vocablos que se presentan en el contexto matemático y que pueden presentar ambigüedades.

En las actividades realizadas con los estudiantes, ellos mostraron el poco dominio que tienen sobre la terminología matemática, al no poder realizar un discernimiento entre su lenguaje natural y el matemático. Muestra de esto, se evidenció en el momento en que los estudiantes debían resolver problemas, y no diseñaron alguna estrategia de solución como consecuencia de las falencias en la comprensión de lectura y principalmente por el manejo del lenguaje matemático.

En esta investigación también notamos que la mayoría de los estudiantes buscan dar significado a los vocablos usados en un enunciado desde su lenguaje cotidiano, significado que en ocasiones no resulta ser apropiado para el contexto descrito llevándolos a interpretaciones erradas de los problemas, como producir representaciones gráficas que en algunos casos resultan ser incorrectas a causa del desconocimiento de significados de algunas palabras en un contexto matemático. Entonces, el estudiante dirigirá la resolución de problemas hacia lo que las cosas signifiquen para él.; consecuencia del continuo intercambio de significados en su medio social.

Por esta razón, es importante que los docentes no se limiten simplemente a dar determinados ejercicios que son tomados literalmente de los libros de texto, pues pueden que estos generen conflictos semánticos y sintácticos en los estudiantes, debido al menor nivel de abstracción que ellos tienen al estar en proceso de formación. Lo cual puede llevar al estudiante a una errónea aplicación de los algoritmos, aunque domine los conceptos básicos del tema.

Es importante recalcar que la interpretación de un problema tanto en un lenguaje escrito como en un lenguaje gráfico es de vital importancia para dar solución al mismo, ya que

ambos se complementan, pues aunque en ocasiones el lenguaje escrito no resulta claro para el estudiante, el esquema se convierte en un pilar para diseñar una estrategia de solución y viceversa. Cabe aclarar, que en algunas ocasiones el apoyo gráfico no resulta suficiente para mediar el modo en que el contexto influye en la interpretación de los significados atribuidos a los vocablos propuestos en el enunciado.

Respecto al planteamiento de problemas podemos decir que es la estrategia más clara que tiene el docente para evidenciar la influencia del lenguaje natural en la matemática, debido a que en ella el estudiante utiliza su propio léxico para diseñar situaciones problema que le muestren el sentido y la aplicabilidad que tienen las matemáticas en su medio natural. Además, que es una forma de evidenciar la manera en que se han apropiado de algunos conceptos matemáticos y lo complejo que puede ser el identificar los elementos necesarios para plantear problemas y dar solución a los mismos.

Esta experiencia de aula puede constituirse en una razón para que todos los docentes del área reflexionemos de la gran importancia que cumple el lenguaje en el desarrollo de nuestra clase. Debemos tener en cuenta que nuestro desarrollo lingüístico está en un nivel superior comparado con el de nuestros estudiantes (en algunas ocasiones), motivo suficiente para prestar atención a los vocablos usados en los discursos matemáticos. También resaltamos la estrategia didáctica del planteamiento y resolución de problemas como un apoyo para reconocer qué tanto se han apropiado los estudiantes de los diferentes conceptos matemáticos.

Por último, queremos señalar que esta investigación es solamente un punto de partida para otros trabajos que quieran continuar indagando sobre la influencia que tiene el lenguaje cotidiano en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (Sin fecha). *La matemática hermosa se enseña con el corazón*. Recuperado el 5 de Junio de 2007 de http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/documents/matematica_hermosa.pdf.

Ardila, V. (1999). *Olimpiadas matemáticas 10*. Bogotá: Voluntad.

Avellaneda, K. (1991). *Matemática vs. Lenguaje*. Tesis de grado de Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

Centeno, G. Centeno, H. Jiménez, N. (sin fecha). *Matemática constructiva 10*. Bogotá: Libros & Libres S.A.

Cogollo, C. (2006). *La variable: “cosa”, “letra acompañante”, o “número escondido”*. Tesis de especialización. Bucaramanga: UIS.

Cortés, M. (2004). *Propuesta metodológica para el estudio de las relaciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno en el triángulo*. Bucaramanga: UIS

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para la primaria*. Madrid: Pearson Educación S.A.

Chávez, H. & Castiblanco, S. (2000). *Matemáticas 10*. Bogotá: Editorial Santillana siglo XXI.

D'Amore, B. (2006). *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido*. Recuperado el 3 de octubre de 2007 de <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33509909.pdf>

Duitama, R. & Téllez, D. (2006). *Estrategias que el estudiante usa para resolver problemas trigonométricos con triángulos rectángulos*. Tesis de grado de Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. [Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada]. Recuperado el 29 de Septiembre de 2007 de <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>

Godino, J., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. Recuperado el 29 de Septiembre de 2007 de <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33509907.pdf>

Godino, J. & Llinares, S. (sin fecha). *El interaccionismo simbólico en la educación matemática*. Recuperado el 10 de enero de 2008 de [http://www.ugr.es/jgodino/fundamentos-teóricos/Godino Llinares Interaccionismo. PDF](http://www.ugr.es/jgodino/fundamentos-teóricos/Godino%20Llinares%20Interaccionismo.PDF).

Gordon, B. (2000). *Matemáticas Aplicaciones y conexiones 10*. Bogotá: McGraw-Hill interamericana, S.A.

Keedy, M. & Nelson, C. (1965). *Geometría. Una moderna introducción*. (Tonda, E. Trad.). Estados Unidos: Addison – Wesley Publishing CO., INC.

Lázaro, F. (1974). *Diccionario de términos filológicos*. Madrid: Editorial Gredos.

Londoño, P. (2004). *De los discursos literarios a los conocimientos matemáticos: Una aproximación cultural a la construcción de conceptos*. [Trabajo de Doctorado en psicología de la Comunicación: Interacciones educativas de la Universidad Autónoma de Barcelona]. Recuperado el 1 de octubre de 2007 http://www.tesisexarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0209105-170854//plm1de1.pdf

MEN, Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares Lengua Castellana*. Bogotá.

Mendes, A. & Espasandin, C. (2005). *Escritas e leituras na educação matemática*. São Paulo: Autêntica Editora.

Munguía, I. , Munguía M. & Rocha, G. (1998). *Gramática dela Lengua Española Reglas y ejercicios*. México: Ediciones Larousse, S.A.

Moise, E. & Downs F. (1964). *Geometría moderna*. (García M. Trad.). Estados Unidos: Fondo educativo interamericano S.A. (1970).

Moreno, V. & Restrepo, M. (2001). *Nuevo Alfa 10*. Bogotá: Grupo editorial norma.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. 2° ed. Ministerio de educación y cultura. Madrid: Morata, S.L.

Santos, M. (1999). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo editorial Iberoamericana.

Villegas, M. Ramírez, R. & Benavides J. (1992). *Matemática 2000*. Bogotá: Voluntad.

Yule, G. (1985). *El lenguaje*. (Bel N. Trad.). España: Cambridge University Press (1998).