EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES GLOBALES PARA LAS ECUACIONES P-NAVIER-STOKES

JUAN NICOLAS PEÑA MORENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2025

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES GLOBALES PARA LAS ECUACIONES P-NAVIER-STOKES

JUAN NICOLAS PEÑA MORENO

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director
Élder Jesús Villamizar Roa
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mi familia y amigos que me estuvieron apoyando en estos años y esta etapa importante de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia, en especial a mi madre Yerly Moreno y mi hermana Sara Peña por el apoyo a lo largo de estos años de estudio.

Le agradezco a mi director de tesis, el profesor Élder Villamizar, por su orientación y apoyo a lo largo del desarrollo de este trabajo.

Por último, pero no menos importante, a todo mis amigos quienes me estuvieron acompañando, sea apoyándome con mi estudio o simplemente acompañándome en los buenos y malos momentos.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES GLOBALES PARA LAS ECUACIONES P-NAVIER-STOKES [*]

AUTOR: JUAN NICOLAS PEÑA MORENO [**]

PALABRAS CLAVE: ECUACIONES DE NAVIER-STOKES, FLUIDOS NO NEWTONIANOS, SOLUCIÓN DÉBIL, BASE DE SCHAUDER, APROXIMACIÓN DE GALERKIN.

DESCRIPCIÓN: Las ecuaciones de Navier-Stokes corresponden a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describen la dinámica de fluidos viscosos incompresibles. En el contexto no Newtoniano existen varios modelos que son variantes del modelo clásico de Navier-Stokes. Uno de ellos son las llamadas ecuaciones p-Navier-Stokes, propuesto en Lei Li and Jian-Guo Liu, p-Euler equations and p-Navier–Stokes equations, Journal of Differential Equations, Volume 264, Issue 7, (2018), 4707-4748. Estas ecuaciones constituyen una generalización del sistema clásico, que incluye un término de difusión no lineal y un término de convección no cuadrático, las cuales son derivadas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción representada por la caracterización de Benamou-Brenier de las distancias de Wasserstein-p.

Este trabajo se centra en estudiar la existencia de soluciones débiles globales del sistema con $p > 2$. La existencia de soluciones débiles del sistema se prueba haciendo uso del método de Galerkin, construyendo una base de Schauder apropiada del espacio de soluciones, que es un subespacio de $W_0^{1.p}$. Esta base se construye haciendo uso del proyector de Leray. Una vez construido el sistema de las aproximaciones de Galerkin, se obtienen aproximaciones uniformes y se usan argumentos de compacidad, que permiten extraer una subsucesión convergente, cuyo límite corresponde a una solución débil del sistema. El contenido de este trabajo corresponde a una disertación del artículo: Feng, Yuanyuan, Li, Lei, Liu, Jian-Guo y Xu Xiaoqian. Existence of weak solutions to p-Navier-Stokes equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B Vol. 29, No. 4, April 2024, pp. 1868-1890.

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa. Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: EXISTENCE OF WEAK GLOBAL SOLUTIONS FOR P-NAVIER-STOKES EQUATIONS PROBLEM *

AUTHOR: JUAN NICOLAS PEÑA MORENO **

Keywords: NAVIER-STOKES EQUATIONS, NON-NEWTONIAN FLUIDS, WEAK SOLUTION, SCHAUDER BASIS, GALERKIN APPROXIMATION.

Description: The Navier-Stokes equations correspond to a system of partial differential equations that describe the dynamics of a viscous incompressible fluid. In the non-Newtonian regime, several models emerge as variations of the classical Navier-Stokes equations. One of them is the so-called p-Navier-Stokes system, proposed in Lei Li and Jian-Guo Liu, p-Euler equations and p-Navier–Stokes equations, Journal of Differential Equations, Volume 264, Issue 7, (2018), 4707-4748, which corresponds to a variant that includes a nonlinear diffusion and a nonquadratic convection term, and derived as the Euler-Lagrange equations for the action represented by the Benamou-Brenier characterization of Wasserstein-p distances.

This work focuses on studying the existence of global weak solutions for the p-Navier-Stokes equations with $p > 2$. The existence of weak solutions for the system is established via the Galerkin method by constructing an appropriate Schauder basis for the solution space, which constitutes a subspace of $W_0^{1,p}$. That basis is constructed using the Leray projector. Upon constructing the Galerkin approximations, some uniform approximations are obtained, and then, by using compactness arguments, we extract a convergent subsequence, whose limit corresponds to a weak solution of the system. The content of this work is based on the paper: Feng, Yuanyuan, Li, Lei, Liu, Jian-Guo y Xu Xiaoqian. Existence of weak solutions to p-Navier-Stokes equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B Vol. 29, No. 4, April 2024, pp. 1868-1890.

---

* DEGREE WORK

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Élder Jesús Villamizar Roa. Ph.D. en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Navier-Stokes están conformadas por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales describen la dinámica de un fluido viscoso incompresible. Se entiende por fluido a un agregado de partículas que se deforma en forma continua ante cualquier fuerza que actúe sobre él. La resistencia de un fluido a las deformaciones producidas por las tensiones corresponde a la viscosidad, y la incompresibilidad corresponde a la propiedad de algunos fluidos de preservar el volumen bajo efectos de presión.

Desde su formulación, en la primera mitad del siglo XIX, las ecuaciones de Navier-Stokes han atraído el interés de muchos investigadores de la comunidad científica mundial; ese interés se debe al hecho de que estas ecuaciones son usadas en el estudio de problemas físicos relacionados con la meteorología, la aeronáutica, la oceanografía, la ingeniería hidráulica, entre otros, y también desde el punto de vista matemático debido a la dificultad en el análisis cualitativo del modelo y a una variedad de problemas abiertos que existen en la actualidad. En efecto, es bien conocido que uno de los siete problemas del milenio, propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas [1], corresponde justamente con el problema de existencia de solución global clásica de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso tridimensional. En las referencias [2] y [3] se recopila gran parte de la teoría subyacente al modelo clásico de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Dentro del marco de la teoría de las ecuaciones diferenciales de la mecánica de fluidos,

---

[1] NAVIER-STOKES EQUATION - Clay Mathematics Institute. Clay Mathematics Institute. https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/ .

[2] TEMAM, Roger. Navier–Stokes Equations. AMS Chelsea Publishing, (2001).

[3] GALDI, Giovanni P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. New York, NY: Springer New York, (1994).

en particular dentro de la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes, se considera la siguiente variante del modelo clásico de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos no newtonianos

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_p + \nabla \pi - \nu \mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}) = 0, & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ \boldsymbol{v}_p = |\boldsymbol{v}|^{p-2}\boldsymbol{v},\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ \boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}_0(x), & x \in \Omega, \\ \boldsymbol{v} = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, un dominio acotado de frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular, y $(0,T), 0 < T \leq \infty,$ el intervalo de tiempo donde ocurre la dinámica. En (0.1) las incógnitas son $\boldsymbol{v}$ y $\pi,$ denotando respectivamente el campo de velocidades y la presión hidrostática del fluido. Por su parte, $\boldsymbol{v}_0(x)$ denota la velocidad inicial del fluido y $\nu > 0$ es un parámetro que representa la viscosidad del fluido. Por otro lado, $\mathcal{L}_p$ denota el operador p-laplaciano simétrico definido por

$$\mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (|\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v})),$$

siendo

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T),$$

la parte simétrica del gradiente de la velocidad $\nabla \boldsymbol{v}$. El sistema (0.1) corresponde a una generalización de las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas. En verdad, el sistema (0.1) fue derivado en [4], a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción repre-

---

[4] LI, Lei: *p-Euler equations and p-Navier–Stokes equations*. En: *Journal of Differential Equations* 264.7 (2018), págs. 4707-4748

sentada por la caracterización de Benamou-Brenier de las distancias de Wasserstein-p de dos medidas de probabilidad en un conjunto convexo y acotado. Aquí $\boldsymbol{v}$ es el campo de velocidad euleriano para las partículas a lo largo de las geodésicas, mientras que $\boldsymbol{v}_p$ denota la potencia con signo de la velocidad $\boldsymbol{v}$.

Otras variantes importantes del sistema de Navier-Stokes clásico aparecen cuando en el sistema (0.1) se reemplaza el término bilineal $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_p$ por $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ (ver por ejemplo [5] y referencias allí citadas). En cualquier caso, el análisis del sistema (0.1), así como los sistemas diferenciales analizados en [5] y [6] se contextualizan dentro de la Reología, rama de la física que estudia las propiedades de los fluidos como la viscosidad, la elasticidad y la densidad. Un aspecto de gran interés que estudia la Reología es la relación que existe entre la velocidad de esfuerzo de cizalla y la deformación del fluido. Si la relación es lineal, es decir, si la deformación del fluido es directamente proporcional a la velocidad de cizalla, con constante de proporcionalidad ν, se dice que el fluido es un fluido newtoniano ($p = 2$), con viscosidad ν, la cual representa la resistencia del fluido al movimiento. En caso contrario, esto es, si la deformación del fluido no es directamente proporcional a la velocidad de cizalla, entonces se dice que el fluido es un fluido no newtoniano ($p \neq 2$); en otras palabras, un fluido es no newtoniano si su viscosidad no es constante.

Los fluidos no newtonianos, se clasifican en fluidos dilatantes ($p < 2$) y pseudoplásticos ($p > 2$). Un fluido pseudoplástico es aquel en el cual disminuye la viscosidad al aumentar la tensión de corte aplicada; como es el caso de la arcilla, miel y algunas pinturas. Por otra parte, un fluido es dilatante si el incremento de la velocidad de cizalla genera un aumento de viscosidad; ejemplos de este tipo de fluidos son la mezcla de agua con almidón de

---

[5] BEIRÃO DA VEIGA, Hugo: *Navier–Stokes Equations with Shear Thinning Viscosity. Regularity up to the Boundary*. En: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 11 (2009), págs. 258-273

[6] GALDI, Giovanni y NEČAS, Jakub. Recent Developments in Theoretical Fluid Mechanics. En: Mechanics of non-Newtonians Fluids. Vol. 291, (1993), págs. 126-163.

maíz o maizena. En este trabajo se considera el caso $p > 2$.

Este trabajo es de carácter disertativo y su contenido se basa en el análisis de los resultados obtenidos en [7], y está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1, se introducen los conceptos y resultados fundamentales que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. En el Capítulo 2, se construye la formulación débil del sistema (0.1), se presenta la definición de solución débil de las ecuaciones p-Navier-Stokes y, a partir de la descomposición de Helmholtz-Weyl, se construye una base adecuada del espacio solución del problema. En el Capítulo 3, se aplica el método de aproximaciones de Galerkin para demostrar la existencia de soluciones débiles del sistema (0.1) haciendo uso de argumentos de compacidad. Finalmente, en el Capítulo 4, a partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 3, se calcula el límite de estas aproximaciones para demostrar la existencia de soluciones débiles del sistema (0.1).

[7] FENG, Yuanyuan, et al. Existence of weak solutions to p-Navier-Stokes equations. En: Discrete and Continuous Dynamical Systems - B- Series B Vol. 29, No. 4, (2024), págs. 1868-1890.

1. PRELIMINARES

En esta sección se presentan definiciones, notaciones y resultados preliminares importantes para la lectura del trabajo [8].

1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES

Definición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Se denota por $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$ compacto. También, dado $\ell \in \mathbb{N}$, se define el espacio $C^\ell(\Omega)$ como el conjunto de las funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ con ℓ derivadas continuas.*

Definición 1.2 (Espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^p d\mu < \infty \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_p$ dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

---

[8] EVANS, Lawrence: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010

Así mismo, el espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es medible y existe } C > 0 \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ en c.t.p de } \Omega \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup} |f| = \text{ínf}\{C \ : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p de } \Omega\}.$$

Definición 1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Se define el espacio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ como el conjunto de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que*

$$\int_K |f|\, dx < \infty \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

Definición 1.4. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y α un multiíndice. Se dice que v es la α-ésima derivada débil de u, denotada por $D^\alpha u = v$, si*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi\, dx,$$

para cada función test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definición 1.5 (Espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero no negativo. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d \ : \begin{array}{l} \text{para cada multiíndice } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k,\ D^\alpha f \text{ existe en el} \\ \text{sentido débil y pertenece a } L^p(\Omega) \end{array} \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ dada por

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup} |D^\alpha f|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $p = 2$ se denota el espacio $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha f(x) \cdot D^\alpha g(x)\, dx \qquad \forall f, g \in H^k(\Omega).$$

Definición 1.6. *Sean $[0, T] \subset \mathbb{R}$ y X un espacio de Banach con norma. Se define el espacio $L^p((0, T); X)$ con $1 \leq p \leq \infty$ por*

$$L^p((0,T);X) = \Big\{ f : [0,T] \to X \ : \|f\|_{L^p((0,T);X)} < \infty \Big\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p((0,T);X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, & \textit{si } 1 \leq p < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X, & \textit{si } p = \infty. \end{cases}$$

En adelante, se denota en negrita las funciones vectoriales, para diferenciarlas de las cantidades escalares.

1.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS ADICIONALES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

Definición 1.7 (**Producto interno de matrices**). *Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, el producto interno entre A y B se define como*

$$A : B = \mathrm{Tr}(AB^T) = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} B_{ij},$$

donde $\mathrm{Tr}(\cdot)$ denota la traza de la matriz.

Definición 1.8 (**Base de Schauder**). *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que es una base de Schauder si para cada $u \in X$ existe una única sucesión*

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$.

Definición 1.9 (**Base ortonormal**). *Sea* H *un espacio de Hilbert. Una sucesión* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que es una base de ortonormal si* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder de H, y además se tiene que:*

- $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ *si* $i \neq j$.
- $\|e_i\|_H = 1$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Definición 1.10 (**Conjunto precompacto**). *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subset X$. *Se dice que* A *es precompacto (o relativamente compacto) si* $\overline{A}$ *es compacto.*

Definición 1.11 (**Operador compacto**). *Sean* X *y* Y *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal acotado. Se dice que* T *es compacto si para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X, *la sucesión* $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admite una subsucesión convergente en* Y.

Definición 1.12 (**Operador autoadjunto**). *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio vectorial con producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *y* $T : X \to X$ *un operador lineal. Se dice que* T *es autoadjunto si para todo* $u, v \in X$ *se tiene que*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle.$$

Definición 1.13. *Sean* X *y* Y *espacios de Banach con normas* $\|\cdot\|_X$ *y* $\|\cdot\|_Y$, *respectivamente, tales que* $X \subset Y$. *Se dice que* X *está inmerso continuamente en* Y, *y se denota por* $X \hookrightarrow Y$, *si el operador* $i : X \to Y$ *dado por* $i(x) = x$ *es continuo, es decir, si existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema 1.14 (**Desigualdad de Poincaré**). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *abierto y acotado. Existe* $C > 0$

(que depende de $|\Omega| < \infty$) tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 1.15 (**Teorema de las inmersiones de Sobolev**). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $p \geq 1$ y $k \geq 0$ entero.*

- *Si $kp < d$ entonces*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo $r \in \left[p, \frac{dp}{d-kp}\right]$. En particular, existe una constante $C > 0$ que depende únicamente de k, p, r y d tal que para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y para todo $r \in \left[p, \frac{dp}{d-kp}\right]$,

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

- *Si $kp = d$*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo $r \in [p, \infty)$. En particular, existe una constante $C > 0$ que depende únicamente de k, p, r y d tal que para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y para todo $r \in [p, \infty)$,

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

- *Si $kp > d$, entonces cada $u \in W^{k,p}(\Omega)$ es igual en c.t.p. en Ω a una única función en $C^l\left(\overline{\Omega}\right)$, con $0 \leq l < k - \frac{d}{p}$ y existe una constante $C > 0$ tal que la siguiente desigualdad se tiene*

$$\|u\|_{C^l\left(\overline{\Omega}\right)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Lema 1.16 (**Desigualdad de Young**). *Sean $a, b \geq 0$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + C_\varepsilon \frac{b^q}{q}, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

donde C_ε es una constante que depende de ε, y $p, q \geq 1$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.17 (**Desigualdad de Hölder**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sean $\boldsymbol{f} \in L^p(\Omega)$ y $\boldsymbol{g} \in L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\boldsymbol{fg} \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |\boldsymbol{fg}| \, dx \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)} \|\boldsymbol{g}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 1.18 (**Desigualdad de Korn**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y conexo, con $d \geq 2$. Sea $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p \in (1, \infty)$, entonces existe $C \geq 0$ tal que*

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^p + |\nabla v|^p \, dx \leq C \int_\Omega |\boldsymbol{v}|^p + |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^p \, dx$$

Teorema 1.19 (**Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado, con frontera Lipschitz. Considere $1 \leq q, r \leq \infty$, $p \geq 1$, $j, m \in \mathbb{Z}_0^+$ con $0 \leq j < m$ y $\theta \in [0, 1]$ tales que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q},$$

donde $\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1$. Entonces

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} + C \|u\|_{L^\sigma(\Omega)},$$

para cada $u \in L^q(\Omega)$ tal que $D^m u \in L^r(\Omega)$ y σ arbitrario, con excepción de un caso: si $r > 1$ y $m - j - \frac{n}{r}$ es un entero no negativo, entonces se necesita asumir que $\frac{j}{m} \leq \theta < 1$.

En cualquiera de los casos, la constante $C > 0$ depende de los parámetros j, m, n, q, r, θ, en el dominio Ω, pero no de u.

Si $u \in L^q(\Omega) \cap W^{m,r}(\Omega)$, se puede tomar $\sigma = \min\{r, q\}$ de forma que

$$\begin{aligned}
\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} &\leq C\|D^m u\|^{\theta}_{L^r(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} + C\|u\|^{\theta}_{L^{\min\{r,q\}}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{\min\{r,q\}}(\Omega)} \\
&\leq C\|D^m u\|^{\theta}_{L^r(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Lema 1.20 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ un operador bilineal, continuo y coercivo, esto es, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$|a(u, v)| \leq \alpha\|u\|_H\|v\|_H, \text{ para todo } u, v \in H,$$

y

$$a(u, u) \geq \beta\|u\|^2_H, \text{ para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada $f \in H'$ (dual topológico de H) existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle, \text{ para todo } v \in H.$$

Teorema 1.21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y acotado con frontera $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Sea $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $\Delta\boldsymbol{u} \in H^k(\Omega)$, con $k \geq 1$. Si existe una función $\boldsymbol{\varphi} \in H^{k+2}(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varphi} \in H^1_0(\Omega)$, entonces $\boldsymbol{u} \in H^{k+2}(\Omega)$ y*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{H^k(\Omega)} + \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{k+2}(\Omega)}\right),$$

donde $C = C(d, k, \partial\Omega) > 0$.

El Teorema 1.21 es una variación del Teorema 8.13 de [9]

Teorema 1.22. [3] *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *abierto y acotado. Para todo* $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Delta \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 1.23. *Sea* H *un espacio de Hilbert separable y* $T : H \to H$ *un operador autoadjunto compacto. Entonces existe una base de Schauder compuesta por los autovectores de* T*.*

Teorema 1.24. *Sean* M *un subespacio denso de un espacio normado* X, Y *un espacio de Banach, y* $T_0 : M \to Y$ *un operador lineal y acotado. Entonces existe una única aplicación continua* $T : X \to Y$ *que extiende a* T_0*. Esta aplicación es un operador lineal y acotado, y* $\|T\| = \|T_0\|$.

Una prueba del Teorema 1.24 se encuentra en [10], Teorema 1.9.1.

Teorema 1.25 (**Identidad de Parseval**)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal en* H*. Para todo* $x \in H$*, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|_H^2.$$

Lema 1.26 (Principio de acotación uniforme)**.** *Sean* X *un espacio de Banach y* Y *un espacio normado. Si* $\mathcal{F}$ *es una familia de operadores lineales y acotados* $T : X \to Y$ *tal*

---

[9] GILBARG, David y TRUDINGER, Neil S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, (2001).

[10] MEGGINSON, Robert E. An Introduction to Banach Space Theory. New York, NY: Springer New York, (1998).

que para cada $x \in X$ se verifica que

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < C_x,$$

para alguna constante $C_x > 0,$ entonces existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < C.$$

Teorema 1.27 (**Teorema de Cauchy-Lipschitz**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $\boldsymbol{f} : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Se considera el siguiente problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si $\boldsymbol{f}$ es localmente Lipschitz con respecto a $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, entonces para algún $\delta > 0$ existe una única solución $\boldsymbol{x} : [0,\delta] \to \Omega$ del problema (1.1).

2. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA P-NAVIER-STOKES

El objetivo de este capítulo es construir la formulación débil de las ecuaciones p-Navier-Stokes (0.1).

2.1. FORMULACIÓN DÉBIL

En esta sección se establece la formulación débil del problema (0.1); para ello, se inicia recordando el concepto de derivada débil a nivel de la variable temporal.

Definición 2.1. *Una función $f \in L^1[0,T]$ se dice que tiene una derivada débil en tiempo $u \in (C_c^\infty([0,T))'$ con valor inicial $f_0,$ si*

$$\int_0^T \phi u\, dt = -\int_0^T \phi' f\, dt - \phi(0) f_0,\ \forall \phi \in C_c^\infty([0,T)).$$

Una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,T])$ se dice que tiene derivada débil $u \in (C_c^\infty(\Omega \times [0,T)))'$ y dato inicial $f_0(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si

$$\int_0^T \int_\Omega \phi u\, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \partial_t \phi f\, dxdt\ - \int_\Omega \phi(x,0) f_0(x)\, dx,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T)).$$

Para construir el concepto de solución débil, como es usual, se inicia multiplicando la ecuación diferencial $(0.1)_1$ por una función *test* $\boldsymbol{\varphi}$ en un espacio de funciones conveniente, con $\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$ y $\boldsymbol{\varphi} = 0$ sobre $\partial\Omega$; posteriormente, se hace un proceso de integración por partes sobre $\Omega \times [0,T],$ y se usan las condiciones de incompresibilidad y de frontera.

Explícitamente, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^T\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_0^T\int_\Omega (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,dt}_{I_2} &= \underbrace{-\int_0^T\int_\Omega \nabla\,\pi\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,dt}_{I_3}\\ &\quad+\underbrace{\int_0^T\int_\Omega \nu\mathcal{L}_p(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,dt}_{I_4}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Formalmente, se reescriben los términos I_1, I_2, I_3 y I_4 de la siguiente manera:

$$I_2 = -\int_0^T\int_\Omega \nabla\,\boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p)\,dx\,dt.$$

En efecto, el término $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_p$ se reescribe como

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_p = \left(\sum_{i=1}^d \boldsymbol{v}_i\partial_i\right)\boldsymbol{v}_p = \sum_{i=1}^d \boldsymbol{v}_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p),$$

por lo tanto, tomando el producto escalar con φ se tiene que

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{\varphi} = \left(\sum_{i=1}^d \boldsymbol{v}_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p)\right)\cdot\boldsymbol{\varphi} = \sum_{i,k=1}^d v_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p)_k\boldsymbol{\varphi}_k,$$

donde $(\boldsymbol{v}_p)_k$ denota la k-ésima componente de $\boldsymbol{v}_p$; así se obtiene que

$$I_2 = \int_0^T\int_\Omega\sum_{i,k=1}^d \boldsymbol{v}_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p)_k\boldsymbol{\varphi}_k\,dx\,dt = \int_0^T\sum_{i,k=1}^d\left(\int_\Omega \boldsymbol{v}_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p)_k\boldsymbol{\varphi}_k\,dx\right)dt.$$

Integrando por partes,

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_i\partial_i(\boldsymbol{v}_p)_k\boldsymbol{\varphi}_k\,dx = -\int_\Omega(\boldsymbol{v}_p)_k\partial_i(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\varphi}_k)\,dx + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{v}_p)_k\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\varphi}_k\vec{n}_k,$$

donde $\vec{n}$ es la k-ésima componente del vector normal unitario a $\partial\Omega$. Luego, usando la condición de frontera $\boldsymbol{v} = 0$ sobre $\partial\Omega$, es decir, $\boldsymbol{v}_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots d$, se deduce que

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_i \partial_i (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{\varphi}_k \, dx = -\int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \left(\partial_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i \partial_i \boldsymbol{\varphi}_k\right) \, dx = -\int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \partial_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx - \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{v}_i \partial_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx.$$

Por lo tanto,

$$I_2 = -\int_0^T \sum_{i,k=1}^d \left(\int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \partial_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx + \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{v}_i \partial_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx \right) \, dt.$$

Se observa que el término $\sum_{i,k=1}^d \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \partial_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx = 0$. En efecto,

$$\sum_{i,k=1}^d \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \partial_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\varphi}_k \, dx = \sum_{k=1}^d \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{\varphi}_k \sum_{i=1}^d \partial_i \boldsymbol{v}_i \, dx = \sum_{k=1}^d \int_\Omega (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{\varphi}_k \, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dx = 0,$$

con lo cual

$$I_2 = -\int_0^T \sum_{i,k=1}^d \int_\Omega \partial_i \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{v}_p)_k \boldsymbol{v}_i \, dx \, dt.$$

De las matrices $(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)_{ij} = \boldsymbol{v}_i (\boldsymbol{v}_p)_j = \boldsymbol{v}_i |\boldsymbol{v}|^{p-2} \boldsymbol{v}_j = |\boldsymbol{v}|^{p-2} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_p \otimes \boldsymbol{v}))_{ij}$ y $(\nabla \boldsymbol{\varphi})_{ij} = \partial_j \boldsymbol{\varphi}_i$, se tiene que

$$(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p))_{kk} = (\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_p \otimes \boldsymbol{v}))_{kk} = \sum_{i,k=1}^d \partial_i \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{v}_k (\boldsymbol{v}_p)_i;$$

por lo tanto,

$$I_2 = -\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^d (\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p))_{kk} \, dx \, dt = -\int_0^T \int_\Omega \operatorname{Tr}(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)) \, dx \, dt.$$

Dado que $(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)_{ij} = \boldsymbol{v}_i |\boldsymbol{v}|^{p-2} \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j |\boldsymbol{v}|^{p-2} \boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)_{ji}$, la matriz $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p$ es simétrica.

Esto implica que

$$I_2 = -\int_0^T \int_\Omega \mathrm{Tr}(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)^T)\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p)\, dx\, dt.$$

Por otro lado, al integrar por partes I_3 se obtiene

$$I_3 = -\int_0^T \left(-\int_\Omega \pi \,\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_{\partial\Omega} \pi \boldsymbol{\varphi} \cdot \vec{n} \right) dt.$$

Dado que $\nabla \cdot \varphi = 0$ y $\varphi = 0,$ sobre $\partial\Omega$ se concluye $I_3 = 0$.

Adicionalmente, para I_4 y denotando $\mathcal{D}_p(\boldsymbol{v}) = |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v})$, el término $\nabla \cdot \mathcal{D}_p(\boldsymbol{v}) \cdot \varphi$ se puede reescribir como

$$\nabla \cdot \mathcal{D}_p(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\varphi} = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j (\mathcal{D}_p(\boldsymbol{v}))_{ij} \boldsymbol{\varphi}_i.$$

De esta forma

$$I_4 = \nu \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \partial_j (\mathcal{D}_p(\boldsymbol{v}))_{ij} \boldsymbol{\varphi}_i \, dx \right) dt = -\nu \int_0^T \left(\int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \boldsymbol{\varphi}_i (\mathcal{D}(\boldsymbol{v}))_{ij}\, dx \right) dt.$$

Como $\mathcal{D}(\boldsymbol{v})$ es una matriz simétrica, el término $\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \boldsymbol{\varphi}_i (\mathcal{D}(\boldsymbol{v}))_{ij}$ es igual a $\nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v})$. En efecto,

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \boldsymbol{\varphi}_i (\mathcal{D}(\boldsymbol{v}))_{ij} = \sum_{i=1}^{d} (\nabla \boldsymbol{\varphi}_i \mathcal{D}(\boldsymbol{v}))_{ii} = \mathrm{Tr}(\nabla \boldsymbol{\varphi} \mathcal{D}(\boldsymbol{v})) = \mathrm{Tr}(\nabla \boldsymbol{\varphi} \mathcal{D}(\boldsymbol{v})^T) = \nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v});$$

por lo tanto,

$$I_4 = -\nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\, dx\, dt.$$

Por último, por la Definición 2.1

$$I_1 = -\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt - \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0|^{p-2} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(x,0) \, dx.$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la ecuación (2.1) se reduce a

$$\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p) \, dxdt - \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2} \, dxdt$$
$$+ \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0|^{p-2} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(x,0) \, dx = 0.$$

A partir de esta última expresión se puede establecer la definición de solución débil para el problema p-Navier-Stokes.

Definición 2.2. *Dado $\boldsymbol{v}_0 \in L^p(\Omega)$ con $\int_\Omega \nabla \psi \cdot \boldsymbol{v}_0 \, dx = 0$ para cada $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, se dice que $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T; L^p(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ es una solución débil del problema p-Navier-Stokes (0.1) con valor inicial $\boldsymbol{v}_0$, si*

$$\lim_{h \to 0^+} \int_0^{T-h} \|\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \, dt = 0, \tag{2.2}$$

y para cada $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T))$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$, $\psi \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T))$, se satisface

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p) \, dxdt - \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2} \, dxdt \\ &\quad + \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0|^{p-2} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(x,0) \, dx = 0, \\ &\int_0^T \int_\Omega \nabla \psi \cdot \boldsymbol{v} \, dxdt = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $\boldsymbol{v} \in L_{loc}^\infty(0,\infty; L^p(\Omega)) \cap L_{loc}^p(0,\infty; W_0^{1,p}(\Omega))$ y (2.3) se cumple con ∞ en lugar de $T < \infty$ para cada $\boldsymbol{\phi} \in C_c^\infty(\Omega \times [0,\infty))$ con $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$ y $\psi \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, se dice que $\boldsymbol{v}$ es una solución global.

2.2. DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ-WEYL

Para el desarrollo del análisis teórico del sistema p-Navier-Stokes, se requiere considerar algunos espacios de divergencia nula. Se considera inicialmente el conjunto $\mathcal{U} = \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \varphi = 0\}$. Seguidamente, se define el siguiente subespacio de $L^p(\Omega)$ de divergencia nula, que corresponde al completado de $\mathcal{U}$ en la norma $L^p(\Omega)$:

$$U_p(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{w} \in L^p(\Omega) \,:\, \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \nabla \varphi \, dx = 0, \, \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \right\}. \tag{2.4}$$

Obsérvese que $U_p(\Omega)$ corresponde a la forma débil del espacio $\{\boldsymbol{w} \in L^p(\Omega) \,:\, \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0$ en Ω, $\boldsymbol{w} \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\partial\Omega\}$. Sea $G_p(\Omega) = \{\boldsymbol{w} \in L^p(\Omega) \,:\, \exists \varphi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\, \boldsymbol{w} = \nabla \varphi\}$. Estos espacios, $U_p(\Omega)$ y $G_p(\Omega)$, permiten definir la descomposición de Helmholtz-Weyl del espacio $L^p(\Omega)$, como se muestra en el siguiente Lema (ver [11], Teorema III.1.2).

Lema 2.3 (**Descomposición de Helmholtz-Weyl**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio de clase C^2, con $d \geq 2$. Entonces se tiene la descomposición*

$$L^p(\Omega) = U_p(\Omega) \oplus G_p(\Omega), \tag{2.5}$$

donde $\oplus$ denota la suma directa. Esto permite definir el operador proyección de Leray $\mathcal{P} : L^p(\Omega) \to U_p(\Omega)$. Además, existe una constante $C(p, \Omega) > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{w} \in L^p(\Omega)$ se tiene que

$$\|\mathcal{P}\boldsymbol{w}\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega)\|\boldsymbol{w}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Observación 2.4. *Las condiciones de frontera son importantes. Por ejemplo, el campo $\boldsymbol{\phi} = (-y, x)$ es de divergencia nula en $\Omega = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 < 1\}$, pero $\boldsymbol{\phi} \cdot \vec{n} \neq 0$ sobre $\partial\Omega$. Entonces, $\mathcal{P}\boldsymbol{\phi} \neq \boldsymbol{\phi}$ dado que $\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \neq 0$ para algún φ, por ejemplo, $\varphi = xy$.*

---

[11] GALDI, Giovanni. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equa- tions. NY: Springer New York, 2011.

Las derivadas débiles en $W_0^{1,p}(\Omega)$ de primer orden están bien definidas, lo que permite considerar directamente el subespacio

$$W := \left\{ \boldsymbol{v} \in W_0^{1,p}(\Omega) \, : \, \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi \, dx = 0, \, \forall \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \right\}, \tag{2.7}$$

y, con ello, también se puede definir el espacio mixto

$$V := L^p(0, T; W), \tag{2.8}$$

el cual, dotado con la norma de $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, es un espacio de Banach.

Observación 2.5. *Del Lema 2.3, cada $\boldsymbol{\phi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se descompone como*

$$\boldsymbol{\phi} = \mathcal{P}\boldsymbol{\phi} + \nabla \varphi, \tag{2.9}$$

donde $\mathcal{P}\boldsymbol{\phi} \in U_p(\Omega)$, $\nabla \varphi \in G_p(\Omega)$ y $\varphi \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ es único salvo alguna constante. Además, se tiene que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, puesto que

$$\boldsymbol{\phi} \cdot \vec{n} = \mathcal{P}\boldsymbol{\phi} \cdot \vec{n} + \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \textit{sobre } \partial\Omega.$$

Aplicando el operador divergencia en (2.9), se puede determinar φ como la solución del siguiente problema de frontera

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \nabla \cdot \, \boldsymbol{\phi}, & \textit{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

2.3. CONSTRUCCIÓN DE UNA BASE DE SCHAUDER

Es conocida la existencia de una base de Schauder para el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sin embargo, por la naturaleza del sistema p-Navier-Stokes se requiere construir una base de Schauder para el espacio W, pero no se puede obtener simplemente proyectando una base de $W_0^{1,p}$ usando el proyector de Leray, dado que la traza de $\mathcal{P}\boldsymbol{\phi}$, con $\boldsymbol{\phi} \in W_0^{1,p}$, no es necesariamente cero. En esta sección se construye una base de Schauder para los espacios $U_p(\Omega)$ y W. Se inicia considerando el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{P}\Delta^m \boldsymbol{u} = f, & \text{en } \Omega, \\ \Delta^s \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \ \dfrac{\partial}{\partial \vec{n}} \Delta^\ell \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \ \forall s \in S, \ \forall \ell \in L, \end{cases} \tag{2.11}$$

donde $\boldsymbol{f} \in U_2(\Omega)$, y $m \in \mathbb{N}_0$. Además,

- Si $m = 2k$, entonces $S = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \leq s \leq k-1\}$ y $L = \{\ell \in \mathbb{Z} : 0 \leq \ell \leq k-1\}$.
- Si $m = 2k+1$, entonces $S = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \leq s \leq k\}$ y $L = \{\ell \in \mathbb{Z} : 0 \leq \ell \leq k-1\}$.

Se define el espacio de Hilbert $\tilde{H}^m$ por

$$\tilde{H}^m = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^m(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \ \Delta^s \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Delta^\ell \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ \forall s \in S, \ \forall \ell \in L \right\}.$$

Se considera la formulación débil del problema (2.11). Sea $B : \tilde{H}^m \times \tilde{H}^m \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$B[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta^k \boldsymbol{u} \Delta^k \boldsymbol{v} \, dx, & \text{si } m = 2k, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla \Delta^k \boldsymbol{u} \cdot \nabla \Delta^k \boldsymbol{v} \, dx, & \text{si } m = 2k+1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Una solución débil de (2.11) corresponde a una función $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{H}^m$ que satisface

$$B[\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}] = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx \quad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{H}^m.$$

La existencia y unicidad de la solución débil de (2.11) se deduce del Lema de Lax-Milgram dado que B es una aplicación bilineal, continua y coerciva, y $F : \tilde{H}^m \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{H}^m,$$

es un funcional lineal y continuo. En efecto, no es difícil verificar que F es lineal y continuo y que B es una aplicación bilineal. Por otro lado, la continuidad de B es consecuencia de la desigualdad de Hölder y la definición de la norma $\tilde{H}^m$, mientras que la coercividad de B es resultado de los Teoremas 1.21 y 1.22, teniendo en cuenta las condiciones de frontera establecidas en la definición del espacio $\tilde{H}^m$. Más explícitamente, se observa que si $m = 2k$, entonces

$$B[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}] = \|\Delta^k \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\|\Delta^{k-1}\boldsymbol{u}\|^2_{H^2(\Omega)} \geq C\|\Delta^{k-2}\boldsymbol{u}\|^2_{H^4(\Omega)} \geq \cdots \geq C\|\boldsymbol{u}\|^2_{H^{2k}(\Omega)},$$

y si $m = 2k+1$, entonces

$$B[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}] = \|\nabla\Delta^k \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\|\Delta^{k}\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Omega)} \geq C\|\Delta^{k-1}\boldsymbol{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \geq \cdots \geq C\|\boldsymbol{u}\|^2_{H^{2k+1}(\Omega)}.$$

Ahora, se considera el operador $\mathcal{A} := (-1)^m \mathcal{P}\Delta^m : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to U_2(\Omega)$ cuyo dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ corresponde a

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^{2m}(\Omega) \cap \tilde{H}^m.$$

Se define el operador $\mathcal{S} := ((-1)^m \mathcal{P}\Delta^m)^{-1} : U_2(\Omega) \to H^{2m}(\Omega) \cap \tilde{H}^m \subset U_2(\Omega)$, donde $\mathcal{S}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{u}$ si, y solamente si,

$$(-1)^m \mathcal{P}\Delta^m \boldsymbol{u} = f.$$

Se observa que $\mathcal{S}$ está bien definido, es autoadjunto y compacto. En efecto, por lo mencionado anteriormente, $\mathcal{S}(\boldsymbol{f}) \in \tilde{H}^m$. Además, por regularidad elíptica, $\mathcal{S}(\boldsymbol{f}) \in H^{2m}(\Omega)$. De hecho, si $m = 1$, la ecuación (2.11) se reduce a

$$\begin{cases} -\mathcal{P}\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \quad \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

que corresponde al problema de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{g}, \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde $\boldsymbol{f} = \mathcal{P}\boldsymbol{g}$. Es sabido que en (2.14) para todo $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $\boldsymbol{u} \in \tilde{H}^1 = \{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0\}$ satisfaciendo

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, dx \quad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{H}^1. \tag{2.15}$$

Por la regularidad de la solución débil del sistema de Stokes (ver Temam[2]), si $\boldsymbol{u}$ es solución de (2.15) entonces $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)$, es decir, $\boldsymbol{u}$ es solución fuerte de (2.14), esto es, para cada $\boldsymbol{f} \in U_2(\Omega)$ existe una única solución $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega) \cap \tilde{H}^1$; además, se cumple la estimación

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)},$$

para alguna constante $C > 0$ que no depende de $\boldsymbol{u}$. Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : U_2(\Omega) &\to \tilde{H}^1 \cap H^2(\Omega) \subset U_2(\Omega) \\ \boldsymbol{f} &\mapsto \boldsymbol{u}, \end{aligned}$$

está bien definida, es lineal y continua. Como Ω es acotado, $\tilde{H}^1 \subset H_0^1(\Omega)$, y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ de manera compacta, entonces $\mathcal{S}$ es compacto.

Si $m = 2$, la ecuación (2.11) se reduce a

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \quad \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Este sistema proviene de

$$\begin{cases} \Delta^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}, \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

donde $\boldsymbol{f} = \mathcal{P}\boldsymbol{g}$. La existencia de una única solución débil $\boldsymbol{u} \in \tilde{H}^2$ de (2.17), junto con los resultados de regularidad elíptica (ver por ejemplo [12] Teorema 7.3.2.1), garantizan que $\boldsymbol{u} \in H^4(\Omega) \cap \tilde{H}^2$, mostrando que $\mathcal{S}$ está bien definido. Por otro lado, teniendo en cuenta que $H^4(\Omega) \cap \tilde{H}^2 \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es una inmersión compacta, se concluye que $\mathcal{S}$, con $m = 2$,

[12] GRISVARD, Pierre. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston: Pitman Advanced Pub. Program, (1985).

es compacto. Este argumento se puede extender para cada $m \in \mathbb{N}$ concluyéndose que el operador $\mathcal{S}$ está bien definido y compacto (ver [7]).

Finalmente, $\mathcal{S}$ es autoadjunto dado que para cada $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H^{2m}(\Omega) \cap \tilde{H}^m$ se tiene que $\Delta^m \boldsymbol{u}, \Delta^m \boldsymbol{v} \in U_2(\Omega)$. En efecto, como $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H^{2m}(\Omega)$, se sigue $\Delta^m \boldsymbol{u}, \Delta^m \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)$. Por otro lado, recordando que el operador Δ es autoadjunto, para todo $\phi \in C^\infty(\Omega)$ se verifica que

$$\int_\Omega \Delta^m \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \Delta^m (\nabla \phi) \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla (\Delta^m \phi) \, dx = - \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u} (\Delta^m \phi) \, dx = 0.$$

De esta forma, $\Delta^m \boldsymbol{u} \in U_2(\Omega)$, es decir, $\mathcal{P} \Delta^m \boldsymbol{u} = \Delta^m \boldsymbol{u}$. Análogamente, $\mathcal{P} \Delta^m \boldsymbol{v} = \Delta^m \boldsymbol{v}$. Por lo tanto,

$$\langle \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, (-1)^m \mathcal{P} \Delta^m \mathcal{S} \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle (-1)^m \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, \Delta^m \mathcal{S} \boldsymbol{f}_2 \rangle,$$

como el operador Δ es autoadjunto, se tiene que

$$\langle \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle (-1)^m \Delta^m \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, \mathcal{S} \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle (-1)^m \Delta^m \mathcal{P} \mathcal{S} \boldsymbol{f}_1, \mathcal{S} \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{f}_1, \mathcal{S} \boldsymbol{f}_2 \rangle,$$

así $\mathcal{S}$ es autoadjunto.

Proposición 2.6. *Las autofunciones de $\mathcal{S}$ en $U_2(\Omega)$ forman una base de Schauder tanto para $U_p(\Omega)$ como W si m es suficientemente grande.*

Demostración. Como el operador $\mathcal{S}$ es autoadjunto y compacto, del Teorema 1.23, $\mathcal{S}$ tiene un conjunto completo de autofunciones en $U_2(\Omega)$. Se denota este conjunto de funciones por $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y sus correspondientes autovalores por $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Este conjunto es ortogonal. En efecto, dados $\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j$ autofunciones de $\mathcal{S}$ con $i \neq j$, se tiene que

$$\langle \lambda_i \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle = \langle \mathcal{S} \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle = \langle \boldsymbol{\psi}_i, \mathcal{S} \boldsymbol{\psi}_j \rangle = \langle \boldsymbol{\psi}_i, \lambda_j \boldsymbol{\psi}_j \rangle,$$

de ahí que

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle = 0,$$

y como $\lambda_i \neq \lambda_j$, se concluye que $\langle \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle = 0$; es decir, el conjunto $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal en $L^2(\Omega)$. Como $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto ortogonal completo de $U_2(\Omega)$, se tiene que $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $U_2(\Omega)$. En primer lugar, obsérvese que el conjunto $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una base de Schauder para $\tilde{H}^m$. Considérese el operador $(-1)^m\mathcal{P}\Delta^m$, y nótese que las autofunciones de $\mathcal{S}$ son también autofunciones de $(-1)^m\mathcal{P}\Delta^m$. En efecto, si $\boldsymbol{\psi}_k$ es una autofunción de $\mathcal{S} = ((-1)^m\mathcal{P}\Delta^m)^{-1}$, se tiene que

$$((-1)^m\mathcal{P}\Delta^m)\mathcal{S}\boldsymbol{\psi}_k = ((-1)^m\mathcal{P}\Delta^m)\lambda_k\boldsymbol{\psi}_k,$$

por lo tanto,

$$\lambda_k^{-1}\boldsymbol{\psi}_k = ((-1)^m\mathcal{P}\Delta^m)\boldsymbol{\psi}_k.$$

Tomando $\boldsymbol{u} \in \tilde{H}^m$ arbitrario, de la definición de B en (2.12) e integrando por partes

$$B[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi}_k] = \int_\Omega \boldsymbol{u}(-1)^m\Delta^m\boldsymbol{\psi}_k\,dx = \int_\Omega \boldsymbol{u}(-1)^m\mathcal{P}\Delta^m\boldsymbol{\psi}_k\,dx = \lambda_k^{-1}\int_\Omega \boldsymbol{u}\boldsymbol{\psi}_k\,dx.$$

Como $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de $U_2(\Omega)$ y $\boldsymbol{u} \in \tilde{H}^m \subset U_2(\Omega)$, en caso de que $B[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi}_k] = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se debe tener que $\boldsymbol{u} = 0$ en $U_2(\Omega)$ y en consecuencia en $\tilde{H}^m$. Luego, $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en $\tilde{H}^m$. Aún más, este también es un conjunto ortogonal en $\tilde{H}^m$; y por lo tanto, es una base de Schauder para $\tilde{H}^m$. Como $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base, el conjunto $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\boldsymbol{\phi}_n = \frac{\boldsymbol{\psi}_n}{\|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(\Omega)}}$, también es base. Se observa que la convergencia en $\tilde{H}^m$ implica la convergencia en $U_2(\Omega)$, de ahí que la expansión de coeficientes es la misma en ambos espacios.

Por otro lado, por el Teorema 1.15, para m suficientemente grande, se tiene que las inmersiones $\tilde{H}^m \subset W \subset U_2(\Omega)$ son continuas. Además, se observa que $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(U_2(\Omega)) \subset \tilde{H}^m \subset W$ son inmersiones continuas, y por lo tanto $\mathcal{S}(U_2(\Omega))$ es denso tanto en $U_p(\Omega)$ como W. En efecto, recordando que $U_p(\Omega)$ es el completado de $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0\}$ en norma $L^p(\Omega)$, es decir, $\overline{\mathcal{U}}^{L^p(\Omega)} = U_p(\Omega)$, es claro que $\mathcal{U}$ es denso en $U_p(\Omega)$. Por otro lado, se observa que para cada $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{U}$ se tiene que $\boldsymbol{\varphi} \in H^{2m}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ y $D^i\boldsymbol{\varphi} = 0$ en $\partial\Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, de ahí que $\boldsymbol{\varphi} \in \tilde{H}^m$. Sea $\boldsymbol{v} \in U_p(\Omega)$, como $\mathcal{U}$ es denso en $U_p(\Omega)$ existe una sucesión $(\boldsymbol{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{v}$. Se define $\boldsymbol{f}_n = (-1)^m \mathcal{P}\Delta^m \boldsymbol{\varphi_n}$, como $\boldsymbol{\varphi}_n \in H^{2m}(\Omega) \cap \tilde{H}^m$, $\boldsymbol{\varphi}_n = \mathcal{S}\boldsymbol{f}_n \in \mathcal{S}(U_2(\Omega))$, de ahí que exista la sucesión $(\mathcal{S}\boldsymbol{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(U_2(\Omega))$ tal que $\mathcal{S}\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{v}$, es decir, $\mathcal{S}(U_2)$ es denso en $U_p(\Omega)$, y en consecuencia en W.

Sea X igual a $U_p(\Omega)$ o a W, y $\|\cdot\|_X$ su respectiva norma. Para cada $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}(U_2(\Omega)) \subset X$, se tiene que

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{\phi}_k, \text{ en } X.$$

Se considera el operador proyección $P_{m,m'}$ sobre $\mathcal{S}(U_2(\Omega))$ definido por

$$P_{m,m'}\boldsymbol{u} := \sum_{k=m}^{m'} c_k \boldsymbol{\phi}_k.$$

Como las normas en espacios finitodimensionales son equivalentes, se tiene que

$$\|P_{m,m'}\boldsymbol{u}\|_X \leq C(m,m')\sqrt{\sum_{k=m}^{m'} c_k^2},$$

donde $\sqrt{\sum_{k=m}^{m'} c_k^2}$ es la norma usual de $\mathbb{R}^{m'-m}$ y $C(m,m') > 0$. Haciendo uso de la identidad de Parseval (Teorema 1.25) se deduce que

$$\|P_{m,m'}\boldsymbol{u}\|_X \leq C(m,m')\sqrt{\sum_{k=m}^{m'} c_k^2} \leq C(m,m')\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como X está inmerso continuamente en $U_2(\Omega)$; en particular, para cada $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}(U_2(\Omega)) \subset W$, se tiene que $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C'(\Omega,p)\|\boldsymbol{u}\|_X$, de esta forma

$$\|P_{m,m'}\boldsymbol{u}\|_X \leq \tilde{C}(m,m',\Omega,p)\|\boldsymbol{u}\|_X, \tag{2.18}$$

donde $\tilde{C}(m,m',\Omega,p) = C(m,m')C'(\Omega,p)$. Recordando que $\mathcal{S}(U_2(\Omega))$ es denso en X, del Teorema 1.24, $P_{m,m'}$ puede extenderse a todo X. Por otro lado, como la sucesión $(\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en X se tiene que

$$\|P_{m,m'}u\|_X \leq \left\|\sum_{k=1}^{m'} c_k\phi_k\right\|_X + \left\|\sum_{k=1}^{m-1} c_k\phi_k\right\|_X \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\right\|_X < \infty,$$

como este resultado se tiene para cada $m,m' \in \mathbb{N}$ con $m < m'$, por el Principio de acotación uniforme (Lema 1.26), se deduce que

$$\sup_{1\leq m\leq m'<\infty}\|P_{m,m'}\| < \infty.$$

Sea $\boldsymbol{u}_* \in X$, como $\mathcal{S}(U_2(\Omega))$ es denso en X, existe una sucesión $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(U_2(\Omega))$ tal que $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}_*$ en X. Cada elemento de la sucesión puede ser escrito como

$$\boldsymbol{u}_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\boldsymbol{\phi}_k \text{ en } X.$$

Como $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, teniendo en cuenta (2.18), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si

$n_2 > n_1 \geq n_0$,

$$\sup_{m,m'} \|P_{m,m'}(\boldsymbol{u}_{n_1} - \boldsymbol{u}_{n_2})\|_X \leq C\|\boldsymbol{u}_{n_1} - \boldsymbol{u}_{n_2}\|_X < \varepsilon,$$

lo que implica que $c_{nk} \to \overline{c}_k$ para algún $\overline{c}_k \in \mathbb{R}$. Aún más, $\|P_{m,m'}\boldsymbol{u}_{n_2}\|_X \leq \|P_{m,m'}\boldsymbol{u}_{n_1}\|_X + \varepsilon$. Si se fija n_1, al tomar m suficientemente grande y $n_2 \to \infty$, se tiene que $\| \sum_{k=m}^{m'} \overline{c}_k \boldsymbol{\phi}_k\|_X \leq 2\varepsilon$. Entonces $(\sum_{k=1}^{m} \overline{c}_k \boldsymbol{\phi}_k)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Por la completitud del espacio, existe $\overline{\boldsymbol{u}} \in X$ tal que

$$\overline{\boldsymbol{u}} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k \boldsymbol{\phi}_k.$$

Por la unicidad del límite, $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_*$, lo cual demuestra que $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X y que la expansión de coeficientes debe coincidir en $U_2(\Omega)$, dado que la inmersión de X en $U_2(\Omega)$ es continua. $\square$

3. APROXIMACIONES DE GALERKIN

En este capítulo se aplica el método de las aproximaciones de Galerkin para demostrar la existencia solución débil del sistema (0.1).

3.1. APROXIMACIONES DE GALERKIN

Sea $\boldsymbol{v}_0 \in U_p(\Omega)$. Se expresa $\boldsymbol{v}_0$ como $\boldsymbol{v}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0,n}\boldsymbol{\phi}_n$ en $U_p(\Omega)$. Aquí $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base de Schauder construida en la Sección 2.3. Se considera $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$, puesto que el caso $\boldsymbol{v}_0 = 0$ es trivial. Entonces existe algún $n_* \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $c_{0,n_*} \neq 0$. Para cada $N \geq n_*$, se define

$$W_N = \text{gen}\{\boldsymbol{\phi}_1, \ldots \boldsymbol{\phi}_N\}. \tag{3.1}$$

El objetivo es hallar una función $\boldsymbol{v}^N : [0,T] \to W_N \subset W$ de la forma

$$\boldsymbol{v}^N(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^N(t)\boldsymbol{\phi}_n,$$

donde los coeficientes $c_n^N(t) \in \mathbb{R}$, con $0 \leq t \leq T$ y $n = 1, \ldots, N$ satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Para cada $0 \leq n \leq N$,

$$c_n^N(0) = c_{0,n}. \tag{3.2}$$

(ii) Para cada $0 \leq t \leq T$, y cada $\boldsymbol{\varphi} \in W_N$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}_p^N\,dx + \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\cdot(\boldsymbol{v}^N\cdot\nabla\,\boldsymbol{v}_p^N)\,dx + \nu\int_\Omega \nabla\,\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|^{p-2}\,dx = 0, \tag{3.3}$$

donde, de forma similar a (0.1),

$$\boldsymbol{v}_p^N = |\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{v}^N. \tag{3.4}$$

Naturalmente, la condición (ii) se tiene si para cada $i = 1, \ldots, N$, se verifica que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}_p^N \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot (\boldsymbol{v}^N \cdot \nabla \boldsymbol{v}_p^N) \, dx + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\phi}_i : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|^{p-2} \, dx = 0. \tag{3.5}$$

El término $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}_p^N \, dx$ es igual a

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}c_j^N(t)\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i^T(I + (p-2)\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N)\boldsymbol{\phi}_j \, dx,$$

con $\hat{\boldsymbol{v}}^N = \frac{\boldsymbol{v}^N}{|\boldsymbol{v}^N|}$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}_p^N \, dx &= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}\left(c_j^N(t)\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_j \, dx\right) \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}c_j^N(t)\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i^T I \boldsymbol{\phi}_j \, dx + c_j^N(t)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_j\right) \, dx.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N c_k^N(t)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_k\right) \, dx &= \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\int_\Omega (p-2)\frac{|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}}{|\boldsymbol{v}^N|}\hat{\boldsymbol{v}}^N \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^N c_j^N(t)\boldsymbol{\phi}_j\right)\boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_k \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}c_j^N(t)\int_\Omega (p-2)|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\hat{\boldsymbol{v}}^N \cdot \boldsymbol{\phi}_j\boldsymbol{\phi}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k^N(t)\boldsymbol{\phi}_k}{|\boldsymbol{v}^N|}\right) dx \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}c_j^N(t)\int_\Omega (p-2)|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}(\boldsymbol{\phi}_i \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^N)(\hat{\boldsymbol{v}}^N \cdot \boldsymbol{\phi}_j) \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}c_j^N(t)\int_\Omega (p-2)|\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{\phi}_i^T(\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N)\boldsymbol{\phi}_j \, dx.
\end{aligned}$$

De esta forma, se deduce que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}_p^N \, dx = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} c_j(t) \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_i^T (I + (p-2)(\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N)) \boldsymbol{\phi}_j \, dx.$$

El siguiente término, $\int_\Omega \boldsymbol{\phi}_i \cdot (\boldsymbol{v}^N \cdot \nabla \boldsymbol{v}_p^N) \, dx$, es igual a

$$\sum_{j,k=1}^N \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_k^N \, dx + (p-2) \sum_{j,k,l=1}^N \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-4} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_l^N \boldsymbol{v}_l^N \boldsymbol{v}_k^N \, dx,$$

donde $\boldsymbol{\phi}_{i,k}$ denota el k-ésimo término de $\boldsymbol{\phi}_i$. En efecto, el integrando se reescribe como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_i \cdot (\boldsymbol{v}^N \cdot \nabla \boldsymbol{v}_p^N) &= \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}_{i,k} \left(\sum_{j=1}^N \boldsymbol{v}_j^N \partial_j (\boldsymbol{v}_p^N)_k \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^N \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \left(|\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \partial_j \boldsymbol{v}_k^N + \partial_j |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{v}_k^N \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^N |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_k^N + \sum_{j,k=1}^N \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \left((p-2) |\boldsymbol{v}^N|^{p-4} \boldsymbol{v}^N \cdot \partial_j \boldsymbol{v}^N \boldsymbol{v}_k^N \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^N |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_k^N + (p-2) \sum_{j,k,l=1}^N |\boldsymbol{v}^N|^{p-4} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \boldsymbol{v}_l^N \partial_j \boldsymbol{v}_l^N \boldsymbol{v}_k^N.
\end{aligned}$$

Denotando por

$$A_{ij}^N(t) := \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_i^T (I + (p-2) \hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N) \boldsymbol{\phi}_j \, dx, \tag{3.6}$$

y

$$\boldsymbol{x}^N(t) := \begin{pmatrix} c_1^N(t) \\ \vdots \\ c_N^N(t) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

el sistema (3.3) se reduce a:

$$\begin{cases} A^N(\boldsymbol{x}^N)'(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^N(t)), \\ \boldsymbol{x}^N(0) = \boldsymbol{x}_0^N. \end{cases} \tag{3.8}$$

Aquí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^N(t))$ es una función vectorial en $\mathbb{R}^N$, cuya i-ésima componente es dada por

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^N))_i = -\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\phi}_i : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|^{p-2}\, dx - \sum_{j,k=1}^{N} \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_k^N \, dx \\ - (p-2) \sum_{j,k,l=1}^{N} \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-4} \boldsymbol{\phi}_{i,k} \boldsymbol{v}_j^N \partial_j \boldsymbol{v}_l^N \boldsymbol{v}_l^N \boldsymbol{v}_k^N \, dx.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Lema 3.1. *Si $\boldsymbol{x}^N \neq 0$, $\boldsymbol{F}$ es localmente Lipschitz en $\boldsymbol{x}^N$ y A^N es definida positiva.*

Demostración. De (3.9), es posible ver que $\boldsymbol{F}$ es de clase C^1 en $\boldsymbol{x}^N$ siempre y cuando $\boldsymbol{x}^N \neq 0$. Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Se tiene que

$$\boldsymbol{a}^T A^N \boldsymbol{a} = \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\phi}_i^T (I + (p-2)\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N) \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{\phi}_j \, dx.$$

Denotando por $\boldsymbol{\alpha}$ la suma $\sum_{i=1}^N \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\phi}_i$, se obtiene

$$\boldsymbol{a}^T A^N \boldsymbol{a} = \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\alpha}^T (I + (p-2)\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{v}^N) \boldsymbol{\alpha} \, dx.$$

Se observa que los autovectores de $\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N$ son vectores paralelos a $\boldsymbol{v}^N$ o vectores perpendiculares a $\boldsymbol{v}^N$, de forma que los autovalores de $\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N$ son 1 y 0. Por lo tanto, los autovalores de $(I + (p-2)\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N)$ son $p-1$ y 1. De esta forma

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} \boldsymbol{\alpha}^T (I + (p-2)\hat{\boldsymbol{v}}^N \otimes \hat{\boldsymbol{v}}^N) \boldsymbol{\alpha} \, dx \geq \min\{p-1, 1\} \int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^{p-2} |\boldsymbol{\alpha}|^2 > 0,$$

siempre y cuando $\boldsymbol{v}^N \neq 0$, es decir, $\boldsymbol{x}^N \neq 0$. $\square$

Proposición 3.2. *Sea $\boldsymbol{x} \neq 0$. Para cada $N > 0$, existe $\delta_N > 0$, y un único $\boldsymbol{x}^N(t) \in C^1([0, \delta_N))$ tal que $|\boldsymbol{x}^N(t)| > 0$ satisface (3.8) con $\boldsymbol{x}^N(0) = \boldsymbol{x}$.*

Demostración. Del Lema 3.1, es posible reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.8) como $(\boldsymbol{x}^N)'(t) = (A^N)^{-1}F(\boldsymbol{x}^N)$. Por la regla de Crammer,

$$(A^N)^{-1} = \frac{1}{\det(A^N)} M^T,$$

donde M es la matriz de cofactores de A^N. Nótese que $\det(A^N)$ y M son ambas de clase C^1 en $\boldsymbol{x}^N$ mientras que $\boldsymbol{x}^N \neq 0$. En efecto, los términos de la matriz A, (3.6), son clase C^1 en $\boldsymbol{x}^N$ siempre y cuando $\boldsymbol{x}^N \neq 0$. Como $\det(A^N)$ y los términos de la matriz de cofactores M son sumas de productos de los términos de la matriz A, se sigue que ambos son clase C^1 en $\boldsymbol{x}^N$. Por lo tanto $(A^N)^{-1}F(\boldsymbol{x}^N)$ es de clase C^1.

Esto asegura que $(A^N)^{-1}F(\boldsymbol{x}^N)$ es localmente Lipschitz siempre que $\boldsymbol{x}^N \neq 0$. En consecuencia, por el Teorema 1.27 se concluye que existe $\delta_N > 0$ tal que el sistema (3.8) tiene una única solución definida sobre $[0, \delta_N]$, y en particular, sobre $[0, \delta_N)$. $\square$

Note que de la prueba de la Proposición 3.2, mientras que $0 < |\boldsymbol{x}^N(t)| < \infty$, la solución puede ser extendida. El t_* más grande antes de que $|\boldsymbol{x}^N|$ se anule es definido por

$$t_* = \sup\{t \geq 0 : \text{(3.8) tiene única solución } \boldsymbol{x}^N \in C^1([0,t)),\ |\boldsymbol{x}^N(s)| \neq 0,\ \forall s \in [0,t)\ \}. \tag{3.10}$$

Se observa que si $t_* < \infty$ entonces debe ocurrir alguna de las siguientes condiciones:

- $\limsup_{t \to t_*} |\boldsymbol{x}^N(t)| = +\infty$;
- $\liminf_{t \to t_*} |\boldsymbol{x}^N(t)| = 0$.

A continuación, se demuestra que $\boldsymbol{x}^N(t)$ no se anula en algún t ni explota. Una vez probado este resultado, se concluye que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.8) es global.

Proposición 3.3. *Supóngase $\boldsymbol{v}_0 \in U_p(\Omega)$. Para $T < t_*$, se tiene que*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^p \, dx = -\nu \int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|^p \, dx, \tag{3.11}$$

y de esta forma, existe una constante $C(p,\nu,\boldsymbol{v}_0) > 0$ independiente de N y T, tal que

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{v}^N\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \|\boldsymbol{v}_0^N\|_{L^p(\Omega)}, \\ &\|\boldsymbol{v}^N\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C(p,\nu,\boldsymbol{v}_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Más aún, existen constantes $C, C_N > 0$ tales que $\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^p \, dx \geq Ce^{-C_N t}$ para cada $t \leq T$. En consecuencia, la solución $\boldsymbol{v}^N$ existe globalmente; es decir, $t_* = \infty$.

Demostración. En primer lugar, considérese $\varphi = \boldsymbol{v}^N$ en (3.3). Como $\nabla\cdot \boldsymbol{v}^N = 0$ y se anula sobre la frontera, se tiene que

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}^N \cdot (\boldsymbol{v}^N \cdot \nabla \, \boldsymbol{v}_p^N) \, dx = 0.$$

Además,

$$\nabla \, \boldsymbol{v}^N : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N) = \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N).$$

Por lo tanto, (3.3) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^p \, dx = -\nu \int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)|^p \, dx.$$

Integrando sobre el intervalo $[0,t]$ con $0 \le t \le T$, se tiene que

$$\|\boldsymbol{v}^N(t)\|^p_{L^p(\Omega)} - \|\boldsymbol{v}_0^N\|^p_{L^p(\Omega)} = -\nu\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)\|^p_{L^p(0,t;L^p(\Omega))}; \tag{3.13}$$

lo que implica que $\|\boldsymbol{v}^N\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \le \|\boldsymbol{v}_0\|_{L^p(\Omega)}$, y así,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}^N\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \le C\|\nabla \boldsymbol{v}^N\|^p_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} &\le C\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)\|^p_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} \\
&= \frac{C}{\nu}\left(\|\boldsymbol{v}^N(0)\|^p_{L^p(\Omega)} - \|\boldsymbol{v}^N(T)\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\le \frac{C}{\nu}\|\boldsymbol{v}^N(0)\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Resta ver que $t_* = \infty$. Nótese que, por la desigualdad de Poincaré y la desigualdad de Korn (desigualdad 1.14 y 1.18, respectivamente), $\|\boldsymbol{v}^N\|_{L^p(\Omega)}$ y $\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_{L^p(\Omega)}$, son normas equivalentes; en particular existe $C_N > 0$ tal que

$$C_N\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_{L^p(\Omega)} \le \|\boldsymbol{v}^N\|_{L^p(\Omega)}.$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^p\,dx = -\nu\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)\|^p_{L^p(\Omega)} \ge -\frac{\nu}{(C_N)^p}\|\boldsymbol{v}^N\|^p_{L^p(\Omega)} = -\frac{\nu}{(C_N)^p}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N|^p\,dx.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{v}^N$ nunca se anula. Además, como $\|\boldsymbol{v}^N\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \le \|\boldsymbol{v}_0^N\|_{L^p(\Omega)}$, $\boldsymbol{v}^N$ nunca explota, de forma que $t_* = \infty$. $\square$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_p^N = |\boldsymbol{v}^N|^{p-2}\boldsymbol{v}^N$, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.4. *Se tiene que* $\boldsymbol{v}_p^N \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \cap L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$. *Más aún,*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{v}_p^N\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))} + \|\boldsymbol{v}_p^N\|_{L^\infty(0,T;W^{1,q}(\Omega))} < \infty.$$

3.2. COMPACIDAD

En esta sección, se probará la precompacidad de las sucesiones generadas por las aproximaciones de Galerkin (3.2) y (3.5). Se requerirá la regularidad del tiempo de la sucesión. Con este fin, se introduce el operador de variación temporal:

$$\tau_h \boldsymbol{v}^N(x,t) = \boldsymbol{v}^N(x,t+h) \qquad h>0. \tag{3.15}$$

El siguiente lema es útil para probar la convergencia del operador τ_h.

Lema 3.5. *Sea $p \geq 2$. Entonces, existe $C(p) > 0$ tal que para cada $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^d$, se tiene que*

$$(|\eta_1|^{p-2}\eta_1 - |\eta_2|^{p-2}\eta_2)\cdot(\eta_1-\eta_2) \geq C(p)(|\eta_1|+|\eta_2|)^{p-2}|\eta_1-\eta_2|^2.$$

Demostración. Dados $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^d$ se observa que

$$(|\eta_1|^{p-2}\eta_1 - |\eta_2|^{p-2}\eta_2)\cdot(\eta_1-\eta_2) = \frac{(|\eta_1|^{p-2}+|\eta_2|^{p-2})|\eta_1-\eta_2|^2}{2} + \frac{(|\eta_1|^{p-2}-|\eta_2|^{p-2})(|\eta_1|^2-|\eta_2|^2)}{2},$$

como $p \geq 2$ el segundo término de la desigualdad es no negativo, por lo tanto, se deduce que

$$(|\eta_1|^{p-2}\eta_1 - |\eta_2|^{p-2}\eta_2)\cdot(\eta_1-\eta_2) \geq \frac{|\eta_1|^{p-2}+|\eta_2|^{p-2}}{2}|\eta_1-\eta_2|^2, \tag{3.16}$$

además, nótese que

$$|\eta_1|^{p-2}+|\eta_2|^{p-2} \geq 2^{2-p}(|\eta_1|+|\eta_2|)^{p-2}.$$

Luego, tomando $C(p)=2^{2-p}$, se concluye que

$$(|\eta_1|^{p-2}\eta_1 - |\eta_2|^{p-2}\eta_2)\cdot(\eta_1-\eta_2) \geq C(p)(|\eta_1|+|\eta_2|)^{p-2}|\eta_1-\eta_2|^2.$$

$\square$

En el siguiente lema se estudia el comportamiento asintótico de la sucesión $\tau_h \boldsymbol{v}^N(x,t)$ cuando h tiende a 0^+.

Lema 3.6. *Sean $p \geq d \geq 2$ y Ω un dominio acotado. Entonces, $\|\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N\|_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \to 0$ uniformemente en N cuando $h \to 0^+$.*

Demostración. Sea $h > 0$. Para todo $t \leq T-h$ y $\boldsymbol{\varphi} \in W_N$, integrando (3.5) sobre el intervalo $[t, t-h]$ se tiene que

$$\int_\Omega (\tau_h \boldsymbol{v}_p^N(t) - \boldsymbol{v}_p^N(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega \int_t^{t+h} \boldsymbol{v}^N \cdot \nabla\, \boldsymbol{v}_p^N \cdot \boldsymbol{\varphi}\, ds\, dx = \int_\Omega \int_t^{t+h} \mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}^N) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, ds\, dx. \quad (3.17)$$

Tomando $\boldsymbol{\varphi} = \tau_h \boldsymbol{v}^N(t) - \boldsymbol{v}^N(t)$, se estima cada término de (3.17). Del Lema 3.5 y de la desigualdad triangular, el primer término es acotado inferiormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\tau_h \boldsymbol{v}_p^N(t) - \boldsymbol{v}_p^N(t)) \cdot (\tau_h \boldsymbol{v}^N(t) - \boldsymbol{v}^N(t))\, dx \\ &\qquad \geq C(p) \int_\Omega (|\tau_h \boldsymbol{v}^N(t)| + |\boldsymbol{v}^N(t)|)^{p-2} |\tau_h \boldsymbol{v}^N(t) - \boldsymbol{v}^N(t)|^2\, dx \\ &\qquad \geq C(p) \|(\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N)(t)\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para el término $\displaystyle\int_\Omega \int_t^{t+h} \tau_h \boldsymbol{v}^N(t) \cdot \mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}^N)(s)\, ds\, dx$, aplicando la desigualdad de Young, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_t^{t+h} \tau_h \boldsymbol{v}^N(t) \cdot \mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}^N)(s)\, ds\, dx &= -\int_t^{t+h} \int_\Omega \nabla(\tau_h \boldsymbol{v}^N)(t) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)|^{p-2}\, dx\, ds \\ &= -\int_t^{t+h} \int_\Omega \mathcal{D}(\tau_h \boldsymbol{v}^N)(t) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)|^{p-2}\, dx\, ds \\ &\leq \int_t^{t+h} \int_\Omega |\mathcal{D}(\tau_h \boldsymbol{v}^N)(t)| |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)|^{p-1}\, dx\, ds. \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder y de Young se tiene que

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h}\int_\Omega |\mathcal{D}(\tau_h\boldsymbol{v}^N)(t)||\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)|^{p-1}\,dx\,ds &\leq \int_t^{t+h}\|\mathcal{D}(\tau_h\boldsymbol{v}^N)(t)\|_{L^p(\Omega)}\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\,ds\\ &\leq \int_t^{t+h}\left(\frac{1}{p}\|\mathcal{D}(\tau_h\boldsymbol{v}^N)(t)\|_{L^p(\Omega)}^p+\frac{p-1}{p}\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)\|_{L^p}^p\right)ds\\ &= \frac{h}{p}\|\mathcal{D}(\tau_h\boldsymbol{v}^N)(t)\|_{L^p(\Omega)}^p+\frac{p-1}{p}\int_t^{t+h}\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)\|_{L^p(\Omega)}^p\,ds.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Similarmente,

$$\int_\Omega\int_t^{t+h}\boldsymbol{v}^N(t)\cdot\mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}^N)\,ds\,dx \leq \frac{h}{p}\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(t)\|_{L^p(\Omega)}^p+\frac{p-1}{p}\int_t^{t+h}\|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^N)(s)\|_{L^p(\Omega)}^p\,ds. \tag{3.20}$$

Para estimar el término $\int_\Omega\int_t^{t+h}\boldsymbol{v}^N\cdot\nabla\,\boldsymbol{v}_p^N\cdot\tau_h\boldsymbol{v}^N(t)\,ds\,dx$, es necesario usar la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (Lema 1.19). Como $p\geq d$, se tiene que $\frac{d}{2p}\leq 1$, y se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2p}=\frac{d}{2p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)+\frac{1-\frac{d}{2p}}{p}.$$

Entonces, para cualquier función $\boldsymbol{f}\in L^\infty(0,T;L^p(\Omega))\cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ existe $C>0$ tal que la siguiente desigualdad se verifica

$$\|\boldsymbol{f}\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p}\leq C\|\,\nabla\,\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}^d\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}^{2p-d}\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))}\right)\|\,\nabla\,\boldsymbol{f}\|_{L^p(\Omega)}^d.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_t^{t+h} \boldsymbol{v}^N \cdot \nabla\, \boldsymbol{v}_p^N \cdot \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\, ds\, dx \\
&\quad \leq \int_\Omega \int_t^{t+h} |\boldsymbol{v}^N \cdot \nabla\, ||\boldsymbol{v}_p^N \cdot \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)|\, ds\, dx \\
&\quad \leq \int_t^{t+h} \|\boldsymbol{v}^N\|_{L^{2p}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_p^N\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|\tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}\, ds \\
&\quad \leq \int_t^{t+h} \frac{1}{2p} \left(\|\tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} + \|\boldsymbol{v}^N(s)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \right) + \frac{1}{q} \|\boldsymbol{v}_p^N(s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q\, ds \\
&\quad \leq C \left(h \|\, \nabla\, \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^d + \int_t^{t+h} \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(s)\|_{L^p(\Omega)}^d + \|\boldsymbol{v}_p^N(s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q\, ds \right),
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De forma similar se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_t^{t+h} \boldsymbol{v}^N \cdot \nabla\, \boldsymbol{v}_p^N \cdot \boldsymbol{v}^N(t)\, ds\, dx \\
&\quad \leq C \left(h \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^d + \int_t^{t+h} \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(s)\|_{L^p(\Omega)}^d + \|\boldsymbol{v}_p^N(s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q\, ds \right).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

En resumen, se tiene la siguiente estimación:

$$
\begin{aligned}
&\|(\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N)(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\quad \leq Ch \left(\|\, \nabla\, \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\, \nabla\, \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^d + \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(t)\|_{L^p(\Omega)}^d \right) \\
&\qquad + C \int_t^{t+h} \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(s)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\, \nabla\, \boldsymbol{v}^N(s)\|_{L^p(\Omega)}^d + \|\boldsymbol{v}_p^N(s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q\, ds.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Integrando en tiempo (3.22), de 0 a $T-h$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\|(\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N)(t)\|^p_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \\
&\quad \leq C_1 h \int_0^{T-h} \|\nabla \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(t)\|^d_{L^p(\Omega)}\, dt \\
&\qquad + C_2 \int_0^{T-h}\int_t^{t+h} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^N_p(s)\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}\, ds\, dt.
\end{aligned}
$$

Haciendo un cambio de variable en la primera integral se obtiene lo siguiente

$$
\int_0^{T-h} \|\nabla \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \tau_h \boldsymbol{v}^N(t)\|^d_{L^p(\Omega)}\, dt = \int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(\ell)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(\ell)\|^d_{L^p(\Omega)}\, d\ell,
$$

por otro lado, cambiando el orden de integración de la segunda integral se tiene que

$$
\begin{aligned}
C_2 &\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^N_p(s)\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}\, ds\, dt \\
&= \int_0^{T}\int_{s-h}^{s} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^N_p(s)\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}\, dt\, ds \\
&= h \int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^N_p(s)\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}\, ds.
\end{aligned}
$$

De esta forma, la aproximación se reduce a

$$
\begin{aligned}
&\|(\tau_h \boldsymbol{v}^N(t) - \boldsymbol{v}^N)(t)\|^p_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \\
&\quad \leq \tilde{C} h \int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)}\, dt + C_2 h \int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad + \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^N_p(s)\|^q_{W^{1,q}(\Omega)}\, ds.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Teniendo en cuenta que $d \leq p$ y usando la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$
\int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^d_{L^p(\Omega)}\, ds \leq \left(\int_0^{T} \|\nabla \boldsymbol{v}^N(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\, ds\right)^{\frac{d}{p}} T^{\frac{p-d}{p}}.
$$

De la Proposición 3.3 y el Corolario 3.4, se concluye que

$$\|\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N\|^p_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \leq Ch, \tag{3.25}$$

uniformemente en N. Así, se completa la demostración del Lema. $\square$

A continuación se establecen algunas convergencias fuertes de las sucesiones $\boldsymbol{v}^N$ obtenidas, producto de resultados de compacidad en espacios mixtos. Para esto se usa una variante del Teorema de compacidad de Aubin-Lions, [13] Teorema 3.

Teorema 3.7 (**Aubin-Lions**). *Sean X, Y espacios de Banach, con $X \subset Y$ inmerso de forma compacta. Sea $F \subset L^p(0,T;Y)$ donde $1 \leq p \leq \infty$, y*

- *F es acotado en $L^1_{\text{loc}}(0,T;X)$,*
- *$\|\tau_h u - u\|_{L^p(0,T-h;Y)} \to 0$ mientras $h \to 0^+$, uniformemente para $u \in F$.*

Entonces, F es relativamente compacto en $L^p(0,T;Y)$.

Con esto, se tiene un candidato a solución débil a través del límite de una subsucesión de $(\boldsymbol{v}^N)_{N\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.8. *Sea $\boldsymbol{v}^N$ la solución de el sistema (3.8). Existe una subsucesión $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;U_p(\Omega)) \cap L^p(0,T;W)$ y una matriz simétrica $\chi \in L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$, donde*

---

[13] SIMON, Jacques. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. En: Annali di Matematica Pura ed Applicata. Vol. 146, No. 1, (1986), págs. 65-96.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, tales que si* $k \to \infty$*,*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}^{N_k} \to \boldsymbol{v}, \textit{ fuertemente en } L^p(0,T;L^p(\Omega)),\\
&\boldsymbol{v}_p^{N_k} \to |\boldsymbol{v}|^{p-2}\boldsymbol{v} =: \boldsymbol{v}_p, \textit{ fuertemente en } L^q(0,T;L^q(\Omega)),\\
&\nabla \boldsymbol{v}^{N_k} \rightharpoonup \nabla \boldsymbol{v}, \textit{ débilmente en } L^p(0,T;L^p(\Omega)),\\
&|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}) \rightharpoonup \chi, \textit{ débilmente en } L^q(0,T;L^q(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Demostración. Considérese el Teorema 3.7, tomando $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $Y = L^p(\Omega)$ y $F = (\boldsymbol{v}^N)_{N \geq n_*}$. La Proposición 3.3 junto con la inmersión compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ implica que la sucesión $(\boldsymbol{v}^N)_{N \geq n_*}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$, y por lo tanto, F es un conjunto acotado en $L^1(0,T;L^p(\Omega))$. Además, del Lema 3.6

$$\|\tau_h \boldsymbol{v}^N - \boldsymbol{v}^N\|_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \to 0,$$

cuando $h \to 0^+$ uniformemente en N. Por el Lema 3.7, F es relativamente compacto en $L^p(0,T;L^p(\Omega))$. Luego, existen una subsucesión $(\boldsymbol{v}^{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y un campo $\boldsymbol{v} \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ tales que

$$\boldsymbol{v}^{N_k} \to \boldsymbol{v}, \text{ fuertemente en } L^p(0,T;L^p(\Omega)). \tag{3.27}$$

De la desigualdad (3.14), $\boldsymbol{v}^N \in L^\infty(0,T;U_p(\Omega))$ es acotado uniformemente por $\|\boldsymbol{v}_0\|_{L^p(\Omega)}$, lo que implica que $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;U_p(\Omega))$ con la misma cota.

La convergencia fuerte de $\boldsymbol{v}^{N_k}$ en $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ implica la convergencia en casi todo punto, y así

$$\boldsymbol{v}_p^{N_k} = |\boldsymbol{v}^{N_k}|^{p-2}\boldsymbol{v}^{N_k} \to |\boldsymbol{v}|^{p-2}\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_p \text{ en c.t.p de } \Omega \times [0,T].$$

Teniendo en cuenta que

$$\|\boldsymbol{v}_p^{N_k}\|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))} = \|\boldsymbol{v}^{N_k}\|_{L^p(0,T;L^p(\Omega))}^{p/q} \to \|\boldsymbol{v}\|_{L^p(0,T;L^p(\Omega))}^{p/q} = \|\boldsymbol{v}_p\|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))},$$

se concluye que

$$\boldsymbol{v}_p^{N_k} \to \boldsymbol{v}_p, \text{ fuertemente en } L^q(0,T;L^q(\Omega)). \tag{3.28}$$

Por Proposición 3.3, la sucesión $(\nabla \boldsymbol{v}^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(0,T;L^p(\Omega))$, el cual es un espacio reflexivo. Entonces, existe $\zeta \in L^p(0,T;L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$ y una subsucesión de $(\nabla \boldsymbol{v}^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$, denotada de la misma forma, tales que $\nabla \boldsymbol{v}^{N_k} \rightharpoonup \zeta$. Al tomar $\phi \in C^\infty(\Omega \times [0,T);\mathbb{R}^{d\times d})$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \zeta : \phi\,dx\,dt &= \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}^{N_k} : \phi\,dx\,dt \\ &= -\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{v}^{N_k}\cdot(\nabla\cdot\phi)\,dx\,dt = -\int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\phi)\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Por la unicidad del límite, se deduce que $\nabla \boldsymbol{v} = \zeta$. Entonces, $\boldsymbol{v}^{N_k}$ converge débilmente a $\boldsymbol{v}$ en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ con $\boldsymbol{v}^{N_k} \in L^p(0,T;W)$. Así, $\boldsymbol{v} \in L^p(0,T;W)$. Se observa que

$$\||\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})\|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))}^q = \int_0^T\int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^p\,dx\,dt < C,$$

lo cual implica que $|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}) \rightharpoonup \chi$, para algún $\chi \in L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$. $\square$

4. PASO AL LÍMITE

4.1. EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES

Para establecer la existencia de soluciones débiles es necesario identificar χ con $|\mathcal{D}(v)|^{p-2}\mathcal{D}(v)$. Se define el operador $G : L^p(0,T;L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})) \to L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$ por

$$G(\theta) := |\theta|^{p-2}\theta. \tag{4.1}$$

Para cada $\theta_1, \theta_2 \in L^p(0,T;L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$, invocando el Lema 3.5, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \theta_1 - \theta_2, G(\theta_1) - G(\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} &= \int_0^T \int_\Omega (\theta_1 - \theta_2) : (G(\theta_1) - G(\theta_2))\, dx\, dt \\ &\geq C(p) \int_0^T \int_\Omega (|\theta_1| + |\theta_2|)^{p-2}|\theta_1 - \theta_2|^2\, dx\, dt \geq 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

lo que indica que G es un operador monótono. Además, se observa que la aplicación $\lambda \to \langle \theta_2, G(\theta_1 + \lambda\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}$ es continua. En efecto, dada $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ se obtiene que

$$\langle \theta_2, G(\theta_1 + \lambda_n\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega |\theta_1 + \lambda_n\theta_2|^{p-2}(\theta_2 : \theta_1 + \lambda_n\theta_2 : \theta_2)\, dx\, dt,$$

como $\lambda_n \to \lambda$, se tiene que $|\theta_1 + \lambda_n\theta_2| \to |\theta_1 + \lambda\theta_2|$, de ahí que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\theta_1 + \lambda_n\theta_2|^{p-2}(\theta_2 : \theta_1 + \lambda_n\theta_2 : \theta_2)\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega |\theta_1 + \lambda\theta_2|^{p-2}(\theta_2 : \theta_1 + \lambda\theta_2 : \theta_2)\, dx\, dt \\ = \langle \theta_2, G(\theta_1 + \lambda\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}, \end{aligned}$$

es decir, $\langle \theta_2, G(\theta_1 + \lambda_n\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} \to \langle \theta_2, G(\theta_1 + \lambda\theta_2)\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}$.

Para verificar que $\chi = G(\mathcal{D}(\boldsymbol{v}))$, se utiliza el siguiente resultado ([14] Teorema 10.49).

Lema 4.1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, y $G : X \to X'$ un operador no lineal monótono acotado que satisface para cada $v_1, v_2 \in X$ la continuidad de la aplicación $\lambda \to \langle v_2, G(v_1 + \lambda v_2)\rangle$. Si $w_n \rightharpoonup w$ en X, $G(w_n) \rightharpoonup \beta$ en X', y*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle w_n, G(w_n)\rangle \leq \langle w, \beta\rangle,$$

entonces $G(w) = \beta$.

Considérese $X = L^p(0,T; L^p(\Omega))$ y $X' = L^q(0,T; L^q(\Omega))$. Se busca utilizar el lema para concluir que $G(\mathcal{D}(v)) = \chi$; con este propósito, se estima la regularidad temporal de las soluciones.

4.2. REGULARIDAD DEL TIEMPO Y APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS

En el siguiente lema, se aborda la regularidad del tiempo. Se busca establecer la convergencia de la subsucesión $(\partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Para tales fines, se introduce el operador proyección Q_N tal que $Q_N : W \to W_N$, y para ello, se desea analizar la convergencia de $Q_N^* \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k}$, donde Q_N^* es el conjugado del operador Q_N.

Para cada $\boldsymbol{u} \in W$, en términos de la base de Schauder, se tiene que

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{\phi}_k.$$

[14] RENARDY, Michael y ROGERS, Robert C. An Introduction to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, (2004).

Se define $Q_N : W \to W_N$ como el operador proyección

$$Q_N \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{\phi}_k.$$

De manera similar a la prueba de la Proposición 2.6, el principio de acotación uniforme implica que $Q_N : W \to W_N \subset W$ es acotado uniformemente en N; es decir,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|Q_N\|_{W\to W} < \infty.$$

Para una función $\boldsymbol{v} \in V$, para casi todo t, $\boldsymbol{v}(t)$ pertenece a W. Luego Q_N también está bien definida de V en V, y es uniformemente acotado en V. Sea $Q_N^* : V' \to V'$ el adjunto del operador Q_N, es decir, para cada $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{w} \in V'$, se tiene que

$$\langle Q_N \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = \langle \boldsymbol{u}, Q_N^* \boldsymbol{w}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}.$$

Se mostrarán los resultados de regularidad temporal para la sucesión $(Q_N^* \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Lema 4.2. *Existe una subsucesión de la subsucesión $(\boldsymbol{v}^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dada en la Proposición 3.8, denotada de la misma forma, tal que*

$$Q_{N_k}^* \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k} \rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{v}_p, \qquad \textit{débilmente en } V'. \tag{4.3}$$

Más aún, para cada $\boldsymbol{w} \in V$, se tiene que

$$\langle \boldsymbol{w}, \partial_t \boldsymbol{v}_p\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} - \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w} : \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p \, ds\, dt + \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w} : \chi \, dx\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{\varphi} \in V$ fijo con $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(0,T;W^{1,p}_x(\Omega))} \leq 1$. Se observa que

$$\langle \boldsymbol{\varphi}, Q_{N_k}^* \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = \langle Q_{N_k} \boldsymbol{\varphi}, \partial_t v_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}.$$

Como $Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}(t) \in W_{N_k}$ para casi todo t, de (3.3) se deduce que

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varphi}, Q^*_{N_k}\partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} &= -\langle Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}^{N_k}\cdot\nabla\, \boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} + \nu\langle Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}, \mathcal{L}_p(\boldsymbol{v}^{N_k})\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} \\ &= \int_0^T\int_\Omega \nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v}^{N_k}\otimes \boldsymbol{v}_p^{N_k})\,dx\,dt \\ &\quad - \nu\int_0^T\int_\Omega \nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, se estima el lado derecho de la igualdad (4.5). Para el primer término, por la desigualdad de Young, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega \nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v}^{N_k}\otimes \boldsymbol{v}_p^{N_k})\,dx\,dt\right| &\leq \int_0^T\int_\Omega |\nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{v}^{N_k}||\boldsymbol{v}_p^{N_k}|\,dx\,dt \\ &\leq \int_0^T\int_\Omega \frac{|\nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}|^p}{p} + \frac{|\boldsymbol{v}^{N_k}|^{2p}}{2p} + \frac{2p-3}{2p}|\boldsymbol{v}_p^{N_k}|^{\frac{2p}{2p-3}}\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dado que Q_{N_k} es acotado en $L^p(0,T;W_0^{1,p})$, la integral $\int_0^T\int_\Omega |\nabla\, Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}|^p\,dx\,dt$ también está acotada uniformemente en N_k. Mediante la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, se tiene que

$$\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \leq C\|\nabla\, \boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{2p-d}_{L^p(\Omega)}, \tag{4.7}$$

y

$$\|\boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{2p}{2p-3}}_{L^{\frac{2p}{2p-3}}(\Omega)} \leq C\|\nabla\, \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\|\boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{2p-d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}, \tag{4.8}$$

donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. De (4.7) se obtiene que

$$\int_0^T \frac{|\boldsymbol{v}^{N_k}|^{2p}}{2p}\,dt \leq \frac{C}{2p}\int_0^T \|\nabla\, \boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{2p-d}_{L^p(\Omega)}\,dt;$$

además, de la Proposición 3.3, $\|v_0\|_{L^p(\Omega)}$ es cota superior de $\|\boldsymbol{v}^{N_k}(t)\|_{L^p(\Omega)}$ para cada $t \in$

$[0,T]$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{C}{2p}\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{2p-d}_{L^p(\Omega)}\,dt &\leq \frac{\tilde{C}}{2p}\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(\Omega)}\,dt\\ &\leq \frac{\tilde{C}}{2p}\left(\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}^{N_k}\|^p_{L^p(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{d}{p}} T^{\frac{p-d}{p}}\\ &= \frac{\tilde{C}}{2p}\|\nabla \boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} \leq \frac{\tilde{C}}{2p}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))}.\end{aligned}$$

Como $\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^d_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} < \infty$, de la desigualdad anterior se concluye que

$$\int_0^T \frac{|\boldsymbol{v}^{N_k}|^{2p}}{2p}\,dx\,dt < \infty.$$

Por otro lado, de (4.8) se tiene que

$$\int_0^T \frac{2p-3}{2p}|\boldsymbol{v}_p^{N_k}|^{\frac{2p}{2p-3}}\,dt \leq C\frac{2p-3}{2p}\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{\frac{2p-d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\,dt.$$

De manera análoga a lo realizado anteriormente y a partir del Corolario 3.4, se deduce que

$$\begin{aligned}C\frac{2p-3}{2p}\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^{N_k}\|^{\frac{2p-d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\,dt &\leq \tilde{C}\frac{2p-3}{2p}\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{2p-3}}_{L^q(\Omega)}\,dt\\ &\leq \tilde{C}\frac{2p-3}{2p}\left(\int_0^T \|\nabla \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^q_{L^q(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{d}{q(2p-3)}} T^{\frac{q(2p-3)-d}{q(2p-3)}}\\ &= \tilde{C}\frac{2p-3}{2p}\|\nabla \boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{(2p-3)}}_{L^q(0,T;L^q(\Omega))}\\ &\leq \tilde{C}\frac{2p-3}{2p}\|\boldsymbol{v}_p^{N_k}\|^{\frac{d}{(2p-3)}}_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))},\end{aligned}$$

con lo cual, dado que $\|\boldsymbol{v}_p^{N_k}\|_{L^q((0,T;W^{1,q}(\Omega))} < \infty$, se concluye que

$$\int_0^T \frac{2p-3}{2p}|\boldsymbol{v}_p^{N_k}|^{\frac{2p}{2p-3}}\,dx\,dt < \infty.$$

Por lo tanto, (4.6) es uniformemente acotado en N_k.

Ahora se estima el segundo término de (4.5). De la desigualdad de Young

$$\left|\int_0^T\int_\Omega \nabla Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\,dx\,dt\right| \leq \int_0^T\int_\Omega \frac{|\nabla Q_{N_k}\boldsymbol{\varphi}|^p}{p} + \frac{|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}_{N_k})|^p}{q}\,dx\,dt,$$

usando de nuevo las estimaciones de la Proposición 3.3, se concluye que el término izquierdo de (4.6) es acotado.

Por lo tanto, $(Q^*_{N_k}\partial_t\boldsymbol{v}_p^{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en V'. Como V es reflexivo, existe una subsucesión y un $\alpha \in V'$ tales que

$$Q^*_{N_k}\partial_t\boldsymbol{v}_p^{N_k} \rightharpoonup \alpha \qquad \text{débilmente en } V'. \tag{4.9}$$

Para cada $\boldsymbol{\psi} \in C_c^1(\Omega\times[0,T))$ con $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{\psi}, Q^*_{N_k}\partial_t\boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} &= \langle Q_{N_k}\boldsymbol{\psi}, \partial_t\boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))}\\
&= -\langle\partial_t Q_{N_k}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_p^{N_k}\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} - \int_\Omega Q_{N_k}\boldsymbol{\psi}(x,0)\boldsymbol{v}_p^{N_k}(x,0)\,dx\\
&\to -\langle\partial_t\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_p\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} - \int_\Omega \boldsymbol{\psi}(x,0)\boldsymbol{v}_p(x,0)\,dx,
\end{aligned}$$

cuando $k\to\infty$. Se observa que el completado de $C_c^1(\Omega\times[0,T))$ con divergencia nula en $W_0^{1,p}$ es V, luego, $\alpha = \partial_t\boldsymbol{v}_p$ en V'.

Sea $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^1(\Omega\times[0,T))$ con $\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} = 0$. Por la convergencia en la Proposición 3.8, se tiene que $\boldsymbol{v}^{N_k}\otimes\boldsymbol{v}_p^{N_k} \to \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p$ fuertemente en $L^1(0,T;L^1(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$; por lo tanto,

$$\langle\boldsymbol{\varphi}, \partial_t\boldsymbol{v}_p\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} - \int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p\,dx\,dt + \nu\int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : \chi\,dx\,dt = 0.$$

De forma similar a (4.6), se muestra que $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p \in L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$. Luego, por densidad se puede reemplazar φ por cualquier $\boldsymbol{w} \in V$. $\square$

Ahora, se necesita un resultado técnico para obtener la regla de la cadena de la derivada débil en tiempo de la integral L^p de $\boldsymbol{v}$. Con este fin, se define la función energía

$$H(t) := \frac{1}{q} \int_\Omega |\boldsymbol{v}(x,t)|^p \, dx = \frac{1}{q} \int_\Omega |\boldsymbol{v}_p(x,t)|^q \, dx. \tag{4.10}$$

Además, se consideran las diferencias finitas en tiempo

$$D_h^+ \boldsymbol{g}(t) := \frac{1}{h}(\tau_h \boldsymbol{g}(t) - \boldsymbol{g}(t)), \tag{4.11}$$

y

$$D_h^- \boldsymbol{g}(t) := \frac{1}{h}(\boldsymbol{g}(t) - \tau_{-h} \boldsymbol{g}(t)). \tag{4.12}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se enuncia el siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Las diferencias en tiempo $D_h^+ \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[0,T-h]}(t)$ y $D_h^- \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[h,T]}(t)$ son acotadas uniformemente en V', y ambas tienen subsucesiones débilmente convergentes a $\partial_t \boldsymbol{v}_p$ cuando $h \to 0$ en V'. Aún más, la aplicación $t \mapsto H(t)$ que es continua para casi todo $t \in [0,T]$, con $H(0) = \frac{1}{q} \|\boldsymbol{v}_0\|_{L^p(\Omega)}^p$ y satisface lo siguiente para cada $0 \le s \le t \le T$:*

$$\int_s^t \int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau) \partial_t \boldsymbol{v}_p(\tau) \, dx \, d\tau = H(t) - H(s). \tag{4.13}$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{\varphi} \in V$ con $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(0,T;W)} \le 1$, $T > h > 0$. Sea Q_N^* el conjugado del operador de Q_N que se definió anteriormente. Entonces, por (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot Q_{N_k}^* D_h^- v_p 1_{[0,T-h]}(t) \, dx \, dt = & \int_h^T \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_\Omega \nabla Q_{N_k} \boldsymbol{\varphi}(t) : \boldsymbol{v}^{N_k}(\tau) \otimes \boldsymbol{v}_p^{N_k}(\tau) \, dx \, d\tau \, dt \\ & - \nu \int_h^T \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_\Omega \nabla Q_{N_k} \boldsymbol{\varphi}(t) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}(\tau)) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}(\tau))|^{p-2} \, dx \, d\tau \, dt =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ahora, se estiman estos dos términos. De la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_h^T \int_\Omega \frac{|\nabla Q_{N_k} \boldsymbol{\varphi}(t)|^p}{p}\, dt + \int_h^T \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{v}^{N_k}(\tau) \otimes \boldsymbol{v}_p^{N_k}(\tau)|^q}{q}\, dx\, d\tau\, dt \\ &\leq \frac{C_p}{p} \|\boldsymbol{\varphi}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \int_0^T \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{v}^{N_k}(s) \otimes \boldsymbol{v}_p^{N_k}(s)|^q}{q}\, dx\, ds, \end{aligned} \tag{4.15}$$

que es acotado como en (4.6), (4.7) y (4.8). Similarmente, se tiene que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_h^T \int_\Omega \frac{|\nabla Q_{N_k} \boldsymbol{\varphi}(t)|^p}{p}\, dt + \int_h^T \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_\Omega \frac{\left(|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}(\tau))|^{p-1}\right)^q}{q}\, dx\, d\tau\, dt \\ &\leq \frac{C_p}{p} \|\boldsymbol{\varphi}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \int_0^T \int_\Omega \frac{|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}(s))|^p}{q}\, dx\, ds, \end{aligned} \tag{4.16}$$

que también es acotado dado que $\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})$ es acotado en $L^p(0,T;L^p(\Omega))$. Por lo tanto, $Q^*_{N_k} D_h^- \boldsymbol{v}_p^{N_k}(t) 1_{[h,T]}(t)$ es uniformemente acotado (en N_k y h) en la norma de V'. Tomando $k \to \infty$, por la convergencia fuerte de $\boldsymbol{v}_p^{N_k}$ a $\boldsymbol{v}_p$, se tiene que $D_h^- \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[h,T]}(t)$ es uniformemente (en h) acotado en V'. De manera similar se tiene que $D_h^+ \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[0,T-h]}(t)$ es uniformemente (en h) acotado en V'.

Ahora con una subsucesión, cuando $h \to 0^+$, $D_h^- \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[h,T]}(t)$ converge débilmente en V', y este límite será denotado por γ. Emparejando con una función suave $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, no es difícil identificar que γ es $\partial_t \boldsymbol{v}_p$. De forma similar, se tiene el mismo resultado para $D_h^+ \boldsymbol{v}_p(t) 1_{[h,T]}(t)$; es decir, también existe una subsucesión que converge a $\partial_t \boldsymbol{v}_p$.

Como $\boldsymbol{v} \in V$, dados $s, t \in (h, T)$ se tiene que

$$\int_s^t \int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau) D_h^- \boldsymbol{v}_p(\tau)\, dx\, d\tau = \frac{1}{h} \int_s^t \int_\Omega |\boldsymbol{v}(\tau)|^p - \boldsymbol{v}(\tau) \boldsymbol{v}_p(\tau - h)\, dx\, d\tau, \tag{4.17}$$

usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_s^t\int_\Omega |\boldsymbol{v}(\tau)|^p-\boldsymbol{v}(\tau)\boldsymbol{v}_p(\tau-h)\,dx\,d\tau &\geq \frac{1}{h}\int_s^t\int_\Omega |\boldsymbol{v}(\tau)|^p-\frac{|\boldsymbol{v}(\tau)|^p}{p}-\frac{|\boldsymbol{v}_p(\tau-h)|^q}{q}\,dx\,d\tau\\ &=\frac{1}{qh}\int_s^t\int_\Omega |\boldsymbol{v}(\tau)|^p\,dx\,d\tau-\frac{1}{qh}\int_s^t\int_\Omega|\boldsymbol{v}(\tau-h)|^p\,dx\,d\tau\\ &=\frac{1}{qh}\int_{t-h}^t\int_\Omega |\boldsymbol{v}(\tau)|^p\,dx\,d\tau-\frac{1}{qh}\int_{s-h}^s\int_\Omega|\boldsymbol{v}(\tau)|^p\,dx\,d\tau.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Entonces, cuando $h\to 0^+$, el lado izquierdo converge a $\displaystyle\int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau)\partial_t\boldsymbol{v}_p(\tau)\,dx\,d\tau$ como consecuencia de la convergencia débil de $D_h^-\boldsymbol{v}_p 1_{[h,T]}$ y así $D_h^-\boldsymbol{v}_p 1_{[s,t]}\in V'$. El lado derecho tiende a $\frac{1}{q}\|\boldsymbol{v}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}-\frac{1}{q}\|\boldsymbol{v}(s)\|^p_{L^p(\Omega)}$ cuando h tiende a cero, para casi todo $t,s\in(0,T)$. Por lo tanto, para casi todo $s<t$, $s,t\in(0,T)$, se tiene que

$$\int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau)\partial_t\boldsymbol{v}_p(\tau)\,dx\,d\tau\geq H(t)-H(s).$$

Aún más, para $D_h^+\boldsymbol{v}_p(t)$ se puede también concluir que para casi todo $s,t\in(0,T-h)$ que

$$\int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau)D_h^+\boldsymbol{v}_p(\tau)\,dx\,d\tau\leq\frac{1}{qh}\int_t^{t+h}\int_\Omega|\boldsymbol{v}(\tau)|^p\,dx\,d\tau-\frac{1}{qh}\int_s^{s+h}\int_\Omega|\boldsymbol{v}(\tau)|^p\,dx\,d\tau.$$

Por el mismo argumento, para casi todo $s,t\in(0,T)$, con $s<t$, se tiene que

$$\int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau)\partial_t\boldsymbol{v}_p(\tau)\,dx\,d\tau\leq H(t)-H(s).$$

De esta forma, se concluye que

$$H(t)-H(s)=\int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau)\partial_t\boldsymbol{v}_p(\tau)\,dx\,d\tau, \tag{4.19}$$

para casi todo $s,t\in(0,T)$, con $s<t$. Como el lado derecho es continuo en s,t, H puede ser vista como una función continua.

Aún más, para ver que $H(0^+) = \frac{1}{q}\|\boldsymbol{v}_0\|^p_{L^p(\Omega)}$ se observa que

$$\left|\frac{1}{q}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N(t)|^p\,dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N(0)|^p\,dx\right| \leq \left|\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{v}^N(\tau)\partial_t \boldsymbol{v}_p^N(\tau)\,dx\,d\tau\right| \leq Ct,$$

donde C es uniforme en N. Cuando $N \to \infty$, $\frac{1}{q}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N(0)|^p\,dx \to \frac{1}{q}\|\boldsymbol{v}_0\|^p_{L^p(\Omega)}$, y para casi cada t, $\frac{1}{q}\int_\Omega |\boldsymbol{v}^N(t)|^p\,dx$ converge a $H(t)$. Luego, $H(0^+)$ es dado como se mencionó. Esto también implica que en (4.19) se puede tomar $t = T$ y $s = 0$. □

4.3. EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES Y LA IGUALDAD DE DISIPACIÓN DE ENERGÍA

En esta subsección, primero se identifica χ con $|\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v})$ usando el Lema 4.1 y se prueba la existencia de soluciones débiles del sistema (0.1).

Lema 4.4. *En $L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$, se tiene que*

$$\chi = |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\mathcal{D}(\boldsymbol{v}). \tag{4.20}$$

En otras palabras, para cada $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)$,

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : \chi\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v})|\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2}\,dx\,dt. \tag{4.21}$$

Demostración. Tomando $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ en (4.4), se tiene que

$$\langle \boldsymbol{v}, \partial_t \boldsymbol{v}_p\rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} - \int_0^T \int_\Omega \nabla\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p\,ds\,dt = -\nu\int_0^T \int_\Omega \nabla\boldsymbol{v} : \chi\,dx\,dt,$$

además, como χ es simétrico

$$-\nu\int_0^T \int_\Omega \nabla\boldsymbol{v} : \chi\,dx\,dt = -\nu\int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) : \chi\,dx\,dt.$$

Obsérvese que

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p \, dx \, dt = 0.$$

En efecto, de la Proposición 3.8 se tiene que $\boldsymbol{v} \in L^p(0,T;W)$, donde $W = \{w \in W_0^{1,p} : \nabla \cdot w = 0\}$, además, en la prueba del Lema 4.2 se mostró que $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}_p \in L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}))$, de ahí que $\nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p$ sea integrable. Recordando que

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_p \, dx \, dt,$$

se observa que

$$\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_p \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^d \boldsymbol{v}_i \partial_i \left(|\boldsymbol{v}|^p \right) \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^d \partial_i \boldsymbol{v}_i |\boldsymbol{v}|^p \, dx \, dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle \boldsymbol{v}, \partial_t \boldsymbol{v}_p \rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = -\nu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) : \chi \, dx \, dt.$$

Por otro lado, con la misma notación del Lema 4.2 y la Proposición 4.3 se tiene que

$$\frac{\|\boldsymbol{v}^{N_k}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{q} - \frac{\|\boldsymbol{v}^{N_k}(s)\|^p_{L^p(\Omega)}}{q} \to \frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}}{q} - \frac{\|\boldsymbol{v}(s)\|^p_{L^p(\Omega)}}{q} = \int_s^t \int_\Omega \boldsymbol{v}(\tau) \partial_t \boldsymbol{v}_p(\tau) \, dx \, d\tau. \tag{4.22}$$

Por continuidad, como en la Proposición 4.3, se puede tomar $t = T$ y $s = 0$. También, de 3.11, el lado izquierdo de (4.22) es igual a

$$\langle \boldsymbol{v}^{N_k}, Q^*_{N_k} \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k} \rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = \langle \boldsymbol{v}^{N_k}, \partial_t \boldsymbol{v}_p^{N_k} \rangle_{L^2_t(0,T;L^2_x(\Omega))} = -\nu \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^p \, dx \, dt. \tag{4.23}$$

Luego, se tiene que,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})\colon G(\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k}))\,dx\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^p\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) : \chi\,dx\,dt.$$

Por la propiedad de monotonicidad de G y el Lema 4.1, se concluye que

$$\chi = G(\mathcal{D}(\boldsymbol{v})).$$

□

Con este resultado, se enuncia el resultado de existencia de solución débil para las ecuaciones p-Navier-Stokes.

Teorema 4.5. *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$ con frontera suficientemente regular y $p \geq d \geq 2$. Sea $\boldsymbol{v}_0 \in U_p(\Omega)$. Existe una solución débil global del problema p-Navier-Stokes (0.1) en el sentido de la Definición 2.2*

Demostración. Para cada $\boldsymbol{\phi} \in C^\infty(\Omega \times [0,T))$, se tiene que

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v}^{N_k}\,dx\,dt = 0.$$

Como $\boldsymbol{v}^{N_k}$ es de divergencia nula y se anula en la frontera. Usando la Proposición 3.8, cuando $k\to\infty$, se tiene que

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v}\,dx\,dt = 0.$$

Para cada $\boldsymbol{\varphi} \in C_C^\infty(\Omega \times [0,T))$, se observa que

$$\int_0^T\int_\Omega \boldsymbol{v}_p^{N_k}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v}^{N_k}\otimes\boldsymbol{v}_p^{N_k})\,dx\,dt$$
$$-\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|\mathcal{D}(\boldsymbol{v}^{N_k})|^{p-2}\,dx\,dt + \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0^{N_k}|^{p-2}\boldsymbol{v}_0^{N_k}\cdot\boldsymbol{\varphi}(x,0)\,dx = 0.$$

Otra vez, haciendo uso de la Proposición 3.8, cuando $k \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{v}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}_p) \, dx \, dt$$
$$- \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} : \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^{p-2} \, dx \, dt + \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0|^{p-2} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(x, 0) \, dx = 0.$$

Para la regularidad de tiempo, se observa que para algún C independiente de N_k,

$$\|\tau_h \boldsymbol{v}^{N_k} - \boldsymbol{v}^{N_k}\|^p_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \leq Ch,$$

por el Lema 3.6. Recordando que $\boldsymbol{v}^{N_k} \to \boldsymbol{v}$ fuertemente en $L^p(0, T; L^p(\Omega))$, se tiene que

$$\|\tau_h \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\|^p_{L^p(0,T-h;L^p(\Omega))} \leq Ch.$$

Por lo tanto, la regularidad de tiempo es probada. Por lo anterior, $\boldsymbol{v}$ es solución débil del problema p-Navier-Stokes para un T arbitrario.

Como T es arbitrario, es posible usar el argumento de la diagonal para extraer una subsucesión de $\boldsymbol{v}^{N_k}$ que converja en el sentido de la Proposición 3.8 para cada $[0, n]$. El límite de esta subsucesión es una solución débil en cualquier intervalo acotado, y por lo tanto, una solución débil global. Además, si $p \geq d \geq 2$, la solución débil obtenida en el Teorema 4.5 satisface la igualdad de disipación de energía

$$H(t) - H(s) = -\nu \int_s^t \int_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{v})|^p \, dx \, d\tau, \tag{4.24}$$

lo cual es consecuencia directa de la Proposición 4.3 y la prueba del Lema 4.4. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

BEIRÃO DA VEIGA, Hugo: *Navier–Stokes Equations with Shear Thinning Viscosity. Regularity up to the Boundary*. En: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 11 (2009), págs. 258-273.

DAMASCELLI, Lucio: *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*. En: *In Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linéare Analysis* 15.4 (1998), págs. 493-516.

EVANS, Lawrence: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.

FENG, Yuang et al. *Existence of weak solutions to p-Navier-Stokes equations*. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* 29.4 (2024), págs. 1868-1890.

GALDI, Giovanni: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*. NY: Springer New York, 2011.

GALDI, Giovanni y NEČAS, Jakub: *Mechanics of non-Newtonians Fluids*. En: *Recent Developments in Theoretical Fluid Mechanics* 291 (1993), págs. 126-162.

GILBARG, David y TRUDINGER, Neil: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

GRISVARD, Pierre: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

LI, Lei y LIU, Jian-Guo: *p-Euler equations and p-Navier–Stokes equations*. En: *Journal of Differential Equations* 264.7 (2018), págs. 4707-4748.

SIMON, Jacques: *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. En: *Annali di Matematica pura ed applicata* 146.4 (1986), págs. 65-96.

TEMAM, Roger: *Navier-Stokes Equations*. AMS Chelsea Publishing, 2001.