# CAMPOS DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

ANTONIO CALIXTO GUTIÉRREZ PIÑERES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN FÍSICA
BUCARAMANGA
2004

# CAMPOS DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

**ANTONIO CALIXTO GUTIÉRREZ PIÑERES**

**Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Física**

**Director**
**GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS.**
**Físico, Ph,D**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**ESCUELA DE FÍSICA**
**MAESTRÍA EN FÍSICA**
**BUCARAMANGA**
**2004**

A *Yorvit,*

*cuya inocencia no es tocada por esta cerril iniciativa a la investigación.*

## AGRADECIMIENTOS

A muchos árboles, por permitir a la geometría intuitiva y al serrucho de mi papá, variar la efigie dellos.

Al vigor y alegría conque mi mamá ha vivido trabajando.

A las palabras del maestro Eduardo Pastrana R.,por poner en mi cosigna el ideario "Pensar para Servir", y las premisas Quechuas "Ama-Kella", "Ama-Lulla" y "Ama-Sua".

A la disposición y entrega conque Laura me acompañó y transcribió este texto, sin predecir su ausencia hoy.

A los tintos, humo y explicaciones, que viniendo de Guillermo González, avivaron las jornadas.

A la casa de Gonzalo García, por tolerarar discusiones y preguntas allí desarrolladas.

A la convicción y apoyo, venidos de Iño, Tito, Rafa y Zandra en un glacial calor.

A la literatura, por paliar los desequilibrios.

A la amistad venida de Christopher, Quiceno, Goyo Morón y Dixon. Amistad que fortalece mi ánimo.

*Juancho Polo Valencia* un día miró a la mujer, no aceptó la amistad de Dios, se fue de Flores de María y burrumbeando cantó:

...Lucero espiritual...
eres más alto que el hombre,
yo no se donde te escondes
en este mundo historial.
. . . Yo pensando en esa estrella
tiene figura de un globo...

# Índice general

# TÍTULO: CAMPOS DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS[1]

**Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres**[2]

**Palabras Claves**

1. Relatividad General. 2. Ecuaciones Diferenciales Parciales. 3. Soluciones Exactas.

4. Campos de Einstein-Maxwell. 5. Formalismo de Papapetrou. 6. Formalismo de Ernst.

**Resumen**

Se estudia la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones que describen el exterior de campos gravitacionales debidos a una fuente axialmente simétrica en rotación. Las ecuaciones son obtenidas llevando el conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell (E-M) de su forma general al caso de campos estacionarios axialmente simétricos, utilizándose una métrica con tales características bajo el sistema de coordenadas de Weyl.

El sustento central de los metodos utilizados para la obtención de soluciones, aquí estudiados, se basa en trabajos anteriormente desarrollados por F. Ernst y A. Papapetrou. Se hace referencia a estos metodos con los nombres de Formalismo de Ernst y Formalismo de Papapetrou, respectivamente. Ambos métodos se fundamentan en un algoritmo matemático que permite obtener soluciones exactas de las ecuaciones de electrovacío a partir de soluciones de vacío.

Con el fin de dar claridad a la comprensión de los formalismos, se presentan algunos ejemplos de aplicación. En cuanto al formalismo de Papapetrou, se utilizan tres soluciones particulares de la ecuación de Laplace, asociadas a distribuciones simples de materia, para obtener soluciones de vacío que conlleven a soluciones de electrovacío descritas en coordenadas esferoidales prolatas y

[1]Trabajo de investigación.

[2]Facultad de Ciencias. Maestría en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

oblatas. Para el formalismo de Ernst, se presentan seis casos de soluciones de vací y elctrovacío, a partir de soluciones convenientes de la ecuación compleja de Ernst en el vacío. Los formalismos utilizados son de gran utilidad si se escogen adecuadamente parámetros y soluciones de la ecución de Laplace y de la ecuación compleja de Ernst en el vacío.

# Title: STATIONARY AXIALLY SYMMETRIC EINSTEIN-MAXWELL FIELDS[3]

**Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres**[4]

**Key words**

1. General Relativity. 2. Partial Differential Equations. 3. Exact Solutions.

4. Einstein-Maxwell Fields. 5. Papapetrou Formalism. 6. Ernst Formalism.

**Abstract**

The obtention of exact solutions to the equations describing exterior gravitational fields of rotating axially symmetric charged sources is investigated. The equations are obtained by particularizing the set of Einstein-Maxwell (E-M) equations to the case of axially symmetric stationary fields, using a metric with such caracteristics under the Weyl coordinate system.

The main sustent of the methods here studied for the obtention of solutions is an idea based in the works developed by F. Ernst and A. Papapetrou. These methods are named in the context as the Ernst and Papapetrou formalism, respectively. Both of them are founded in a mathematical algorithm that allows the obtention of electrovacuum exact solutions from vacuum solutions.

In order to clarify the formalism comprehension, some aplication examples are shown. For the Papapetrou formalism, three particular solutions of Laplace equaiton are used, corresponding to simple distributions of matter, in order to obtain vacuum solutions that leads to electrovacuum solutions written in oblate and prolate spheroidal coordinates. For the Ernst formalism, six cases

[3]Research Work

[4]Facultad de Ciencias. Maestría en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

of vacuum and electrovacuum solutions are presented, obtained from appropiated solutions of the complex Ernst equation in the vacuum. If the parameters and solutions of Laplace and complex Ernst equations are conveniently choosed, the methods here presented are of great usefulness.

# INTRODUCCIÓN

Un problema trascendental de la física teórica en general, lo constituye el estudio de campos gravitacionales y electromagnéticos en el exterior a una fuente aislada [1]. Entre las teorías modernas de la física, la más aceptada a la hora de proporcionar información sobre estos tópicos es la relatividad general (la médula de la teoría es una simbiosis entre geometría y física). La teoría ofrece un tratamiento altamente elegante de la gravitación y el electromagnetismo, en términos de un sistema acoplado de ecuaciones conocido como de Einstein-Maxwell(E-M)[2]. Este sistema de ecuaciones, en su forma más general, es un conjunto no lineal en derivadas parciales de segundo orden por tanto, la obtención de soluciones exactas es extremadamente difícil.

Por solución exacta entenderemos una asociada a una métrica cuyas componentes sean dadas, en coordenadas apropiadas, en términos de funciones analíticas conocidas(polinomiales, trigonométricas, etc). Sólo para algunos pocos casos de gran simetría y simplicidad ha sido posible, mediante diversas técnicas matemáticas, obtener soluciones de este tipo. Como ejemplo podemos citar las bien conocidas soluciones de simetría esférica de Schwarzschild, Reissner y Nordström, Tolman y Friedmann[2].

La búsqueda de soluciones exactas ha llegado, a través de las últimas décadas, a constituirse en una rama de la teoría de la relatividad general, y su importancia radica en varios factores. Uno de ellos es la gran cantidad de posibles sistemas astrofísicos que pueden modelarse con apreciable exactitud, apelando a modelos de espacio-tiempo altamente simétricos y simples. Otro factor que define su importancia, es el papel que determinan las soluciones exactas dentro de la estructura general de la teoría. Ellas pueden desempeñar un rol similar al del “Hamiltoniano no perturbado” de la teoría de perturbaciones, si queremos abordar el problema de campos gravitacionales más complejos de difícil solución analítica. Consideramos entonces el campo general como una “suma” de dos contribuciones: una solución exacta y la “perturbación”.

Desde el interes aplicativo, los espacio-tiempo gravitacionales y electromagnéticos estacionarios axialmente simétricos, dominan sobre otras familias de espacio-tiempo no planos. Un espacio-tiempo con tales características puede definirse como aquel en el cual su geometría es inalterable bajo las transformaciones $t \longrightarrow -t$, $\phi \longrightarrow -\phi$, y los coeficientes métricos son todos independientes de $t$ y $\phi$ (coordenadas temporal y axial).

El objetivo central del presente trabajo es obtener soluciones exactas para campos de Einstein-Maxwell estacionarios axialmente simétricos. En el capítulo 1 se obtiene las ecuaciones de Einstein-Maxwell, asociadas a un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico, utilizando coordenadas de Weyl. En el capítulo 2 presentamos un formalismo, basado en un trabajo de Papapetrou, según el cual se puede obtener soluciones electrostáticas, magnetostáticas y electromagnetostáticas a partir de soluciones estáticas en el vacío. En el capítulo 3 presentamos el formalismo de Ernst. Éste, como un método fuerte de encontrar soluciones a las ecuaciones de E-M, supone la existencia de un par de funciones complejas en términos de las cuales se puede escribir cualquier solución de las ecuaciones[3]. Por último, En el capítulo 4, se presentan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

# ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL

## 1.1. Introducción

Como ya se ha dicho, la naturaleza de la estructura geométrica y física exterior a una fuente de campos gravitacionales y electromagnéticos aislada, se describe, desde la teoría general de relatividad, mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales conocidas como de Einstein-Maxwell:

$$[(-g)^{1/2}F^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0,$$

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}.$$

Se pueden pensar las ecuaciones como una "combinación"de descripciones según la cual el tensor de Einstein y los de campo electromagnético y Energía-Momentum que las originan dan, el primero, información sobre la geometría del espacio-tiempo y, los segundos, sobre la distribución de materia y energía de la fuente, así como también de los campos originados por ésta. Cabe anotar que las imposiciones sobre la métrica asociada al sistema de ecuaciones, naturalmente, restringen el sistema según un modelo de espacio-tiempo especificado a conveniencia. Centraremos nuestra atención en las ecuaciones de E-M para campos estacionarios axialmente simétricos.

En este capítulo obtenemos la forma que toma el conjunto de ecuaciones de E-M bajo esta particularización. Utilizamos un sistema de coordenadas de Weyl, por ser éste el más acorde a la simetría axial, lo que, como se puede ver más adelante, simplifica los cálculos.

## 1.2. Obtención de las ecuaciones de Einstein-Maxwell

Consideramos un espacio-tiempo estacionario, axialmente simétrico en coordenadas de Weyl, $x^\alpha = (t, \phi, r, z)$, con métrica,

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(dz^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2], \tag{1.1}$$

donde $f, \omega$ y $\gamma$ son funciones de $r$ y $z$ e independientes de $t$ y $\phi$ [1, 3].

Evidentemente el tensor métrico, en forma covariante, correspondiente a este elemento de linea será:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -f & -f\omega & 0 & 0 \\ -f\omega & f^{-1}r^2 - f\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1}e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f^{-1}e^{2\gamma} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell son:

$$[(-g)^{1/2} F^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0, \tag{1.3}$$

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{1.4}$$

donde $G_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ y $F^{\alpha\beta}$ son respectivamente, el tensor de Einstein, el tensor de energia-momentum y el tensor del campo electromagnético, y $g$ es el determinante del tensor métrico. El tensor de campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$, está dado en términos del cuadripotencial electromagnético $A^{\alpha}$=$(A^t, A^{\phi}, A^r, A^z)$ mediante la relación

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}. \tag{1.5}$$

Dado que los campos considerados son estacionarios axialmente simétricos, las componentes del cuadripotencial electromagnético sólo dependen de las coordenadas $r$ y $z$:

$$A^{\alpha} = A^{\alpha}(r, z). \tag{1.6}$$

De (1.3) obtenemos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
[(-g)^{1/2} g^{00} g^{22} F_{02}]_{,2} &+ [(-g)^{1/2} g^{10} g^{22} F_{12}]_{,2} \\
&+ [(-g)^{1/2} g^{00} g^{33} F_{03}]_{,3} + [(-g)^{1/2} g^{10} g^{33} F_{13}]_{,3} = 0,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
[(-g)^{1/2} g^{01} g^{22} F_{02}]_{,2} &+ [(-g)^{1/2} g^{11} g^{22} F_{12}]_{,2} \\
&+ [(-g)^{1/2} g^{01} g^{33} F_{03}]_{,3} + [(-g)^{1/2} g^{11} g^{33} F_{13}]_{,3} = 0,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$[(-g)^{1/2} g^{22} g^{33} F_{23}]_{,2} = 0, \tag{1.9}$$

$$[(-g)^{1/2} g^{22} g^{33} F_{23}]_{,3} = 0. \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10) es claro que

$$[(-g)^{1/2} g^{22} g^{33} F_{23}] = [r f e^{-2\gamma} F_{23}] = k, \tag{1.11}$$

esto es,

$$F_{23} = k r^{-1} f^{-1} e^{2\gamma}. \tag{1.12}$$

De la relación $F_{23}$=$A_{3,2} - A_{2,3}$, vemos que $F_{23}$=$B_{\phi}$ es la componente azimutal del campo magnético. Entonces, usando la condición de regularidad en $r$=0:

$$\lim_{r \to 0} [F_{23}] = 0, \tag{1.13}$$

concluimos que $k$ debe ser igual a cero, de acuerdo con lo cual

$$A_{3,r} - A_{2,z} = 0. \tag{1.14}$$

Sin pérdida de generalidad podemos escoger una función arbitraria $P$=$P(r,z)$, tal que

$$P_{,3} = A_3,$$

$$P_{,2} = A_2. \tag{1.15}$$

Con lo que

$$A_{3,2} - A_{2,3} = P_{,32} - P_{,23} = 0. \tag{1.16}$$

En particular, podemos escoger $P(r,z)$ una constante, con lo que así $A_3$=$A_2$=0. Entonces nuestro interés será dirigido sólo a campos electomagnéticos estacionarios axialmente simétricos en los que las componentes $A_r$=$A_z$=0. En adelante, con el fin de adoptar la terminología de [5] llamamos convenientemente $A_3$=$A_\phi$, $A_t$=$A_4$, obtenemos, de (1.7) y (1.8)

$$\nabla \cdot [r^{-2} f(\nabla A_3 - \omega \nabla A_4)] = 0, \tag{1.17}$$

$$\nabla \cdot [f^{-1} \nabla A_4 + r^{-2} f \omega (\nabla A_3 - \omega \nabla A_4)] = 0, \tag{1.18}$$

donde $\nabla$ es el operador nabla usual. Por otra parte tenemos las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{1.19}$$

donde

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - 1/2 g_{\alpha\beta} R, \tag{1.20}$$

siendo $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci y $R$ el escalar de curvatura.

Estamos considerando un espacio-tiempo exterior a una fuente en rotación. En tales regiones, el tensor energía-momentum $T_{\alpha\beta}$ es puramente electromagnético; por tanto, se tiene:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{F_{\alpha}^{\ \gamma}F_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\epsilon\delta}F_{\epsilon\delta}\right\}, \tag{1.21}$$

y consecuentemente

$$R = 0.$$

Por tal razón, obtenemos de (1.20), que

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}. \tag{1.22}$$

Con lo que de (1.19) y (1.22) recibimos

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \tag{1.23}$$

Reemplazando (1.21) en esta última ecuación obtenemos

$$R_{\alpha\beta} = 2\left\{F_{\alpha}^{\ \gamma}F_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\epsilon\delta}F_{\epsilon\delta}.\right\}. \tag{1.24}$$

Si calculamos las componentes del tensor de Ricci, $R_{\alpha\beta}$, según la definición

$$R_{\alpha\beta} = R^{\ \gamma}_{\ \alpha\gamma\beta}, \tag{1.25}$$

donde $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Riemman y le reemplazamos, junto con las componentes no nulas del tensor de campo electromagnético en (1.24) y (1.3), recibimos las ecuaciones :

$$\nabla\cdot[r^{-2}f^2\nabla\omega - 4r^{-2}fA_4(\nabla A_3 - \omega\nabla A_4)] = 0, \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} f\nabla^2 f &= \nabla f\cdot\nabla f - r^{-2}f^4\nabla\omega\cdot\nabla\omega + 2f\nabla A_4\cdot\nabla A_4 \\ &\quad +2r^{-2}f^3(\nabla A_3 - \omega A_4)\cdot(\nabla A_3 - \omega\nabla A_4), \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{,r} &= \frac{1}{4}\, r f^{-2}(f_{,r}^2 - f_{,z}^2) - \frac{1}{4}\, r^{-1} f^2(\omega_{,r}^2 - \omega_{,z}^2) \\
&\quad - r^{-1}(r^2 f^{-1} - \omega^2 f)(A_{4,r}^2 - A_{4,z}^2) \\
&\quad + r^{-1} f (A_{3,z}^2 - A_{3,z}^2) - 2r^{-1}\omega f (A_{3,r}A_{4,r} - A_{3,z}A_{4,z}),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{,z} &= 1/2\; r f^{-2} f_{,r} f_{,z} - 1/2 r^{-1} f^2 \omega_{,r}\omega_{,z} \\
&\quad - 2r^{-1}(r^2 f^{-1} - \omega^2 f) A_{4,r}A_{4,z} + 2r^{-1} f A_{3,r}A_{3,z} \\
&\quad - 2r^{-1} f\omega (A_{3,r}A_{4,z} + A_{3,z}A_{4,r}).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

El conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden (1.17), (1.18), (1.26)-(1.29) recibe el nombre de sistema de ecuaciones de E-M estacionario (o estático si $\omega$ es cero) axialmente simétrico, dado que resulta de restringir los campos de E-M a un caso con tales características. Las soluciones obtenidas describen campos gravitacional y electromagnético estacionarios (o estáticos) axialmente simétricos en el exterior de una fuente aislada. En lo sucesivo buscaremos soluciones exactas del sistema de ecuaciones (1.17), (1.18), (1.26)-(1.29), basándonos para ello en dos formalismos, a los que nos referiremos como formalismos de Papapetrou y de Ernst.

# Capítulo 2

# SOLUCIONES ESTÁTICAS TIPO PAPAPETROU

## 2.1. Introducción

Bajo diferentes tipos de simetrías, obtener soluciones exactas del sistema de ecuaciones de E-M para el caso estático es aun más complicado que obtenerlas para el sistema de ecuaciones de Einstein para el mismo caso. Por otra parte, existe en la literatura actual un alto número de soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein. Resulta tentativo preguntar, acorde con estas dos situaciones, si es posible obtener soluciones estáticas de las ecuaciones de E-M a partir de soluciones estáticas de Einstein.

En esta sección presentamos un formalismo, basado en un trabajo de Papapetrou [5], mediante el cual se pueden generar soluciones estáticas axialmente simétricas de las ecuaciones de E-M, correspondientes a una métrica estacionaria axialmente simétrica, a partir de soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

## 2.2. Formalismo de Papapetrou

### 2.2.1. Caso electrostático

Como se ha dicho, este es un caso particular que sucede cuando en el conjunto de ecuaciones de E-M correspondientes a una métrica estacionaria axialmente simétrica(1.17), (1.18), (1.26)-(1.29), hacemos $\omega = A_3 = 0$, mientras que el potencial eléctrico es alguna función $A_4{=}A_4(r,z)$ que, convenientemente, llamaremos $A_4(r,z){=}-\Phi(r,z)$. Bajo esta consideración, el correspondiente sistema de ecuaciones electrostáticas será

$$\nabla \cdot \left[f^{-1}\nabla\Phi\right] = 0, \tag{2.1}$$

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f + 2f\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi, \tag{2.2}$$

$$\gamma_{,r} = \frac{1}{4} r f^{-2}\left[f_{,r}^2 - f_{,z}^2\right] - r f^{-1}\left[\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2\right], \tag{2.3}$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2} r f^{-2} f_{,r} f_{,z} - 2 r f^{-1}\Phi_{,r}\Phi_{,z}. \tag{2.4}$$

El procedimiento a seguir está fundamentado en solucionar este sistema de ecuaciones en el cual, por simplicidad, supondremos que

$$f = f(\Phi).$$

De acuerdo con este supuesto, usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\nabla f = f^{'}\nabla\Phi, \tag{2.5}$$

$$\nabla^2 f = f^{''}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + f^{'}\nabla^2\Phi, \tag{2.6}$$

donde

$$f^{'} = \frac{df}{d\Phi}.$$

Al reemplazar (2.5) y (2.6) en (2.2) obtenemos

$$ff^{''}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + ff^{'}\nabla^2\Phi = (f^{'})^2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + 2f\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi. \tag{2.7}$$

Como $f{=}f(\Phi)$, se ve claramente de (2.1) que

$$\nabla^2\Phi = f^{-1}f^{'}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi. \tag{2.8}$$

Reemplazando (2.8) en (2.7), dado que $\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi$ es diferente de cero, entonces obtenemos

$$f^{''} = 2. \tag{2.9}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se deduce que $f$, como función de $\Phi$, es de la forma

$$f = \Phi^2 + b\Phi + c, \tag{2.10}$$

donde $b$ y $c$ son constantes arbitrarias.

Introduciendo ahora una función $U{=}U(\Phi)$ que se satisfaga

$$\nabla^2 U = 0,$$

y con (2.10), encontramos una relación entre $f$ y $U$ dada mediante

$$\frac{f^{'}}{f} = -\frac{U''}{U'}, \tag{2.11}$$

obteniéndose así el valor de $\Phi$ y $f$ en términos de una solución conveniente de la ecuación de Laplace, según

$$\Phi = \frac{(4c-b^2)^{1/2}}{2}\tan\left[\frac{(4c-b^2)^{1/2}}{2}U\right] - \frac{b}{2}, \tag{2.12}$$

$$f = \left[\frac{4c-b^2}{4}\right]\sec^2\left[\frac{(4c-b^2)^{1/2}}{2}U\right]. \tag{2.13}$$

Por otra parte, de manera muy sencilla, si utilizamos este resultado en (2.3) y (2.4) podemos escribir relaciones entre $\gamma$ y $U$ mediante

$$\gamma_{,r} = -\left[\frac{4c-b^2}{4}\right] r\left[U_{,r}^2 - U_{,z}^2\right], \tag{2.14}$$

$$\gamma_{,z} = -\left[\frac{4c-b^2}{2}\right] r\left[U_{,r}U_{,z}\right]. \tag{2.15}$$

Las cuatro últimas expresiones son muy importantes. Con ellas podemos obtener soluciones electrostáticas en términos de convenientes soluciones de las ecuación de Laplace y,comparando este tipo de solución de las ecuaciones de E-M con las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío [**?**], podemos establecer el siguiente teorema:

**Teorema 1** *Dada una solución estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío:*

$$f_0 = e^{-2U},$$

$$\nabla^2 U = 0,$$

$$\gamma_{0,r} = r\left[U_{,r}^2 - U_{,z}^2\right],$$

$$\gamma_{0,z} = 2rU_{,r}U_{,z},$$

*existe una solución electrostática* $\{f_e, \gamma_e, \Phi_e\}$ *de las ecuaciones de E-M, definida mediante*

$$\nabla^2 U = 0,$$

$$f_e = \zeta^2 \sec^2\left[\zeta U\right],$$

$$\gamma_e = -2\zeta^2\gamma_0,$$

$$\Phi_e = \zeta \tan[\zeta U] - \frac{b}{2},$$

*siendo $\zeta$ y $b$ consantes.*

### 2.2.2. Caso magnetostático

De manera análoga al caso electrostático, el magnetostático es un caso particular que sucede cuando en el conjunto de ecuaciones de E-M correspondientes a una métrica estacionaria axialmente simétrica, (1.17), (1.18), (1.26)-(1.29), hacemos $\omega = A_4 = 0$, mientras que el potencial magnético es alguna función $A_3$=$A(r,z)$. Por tanto, el correspondiente sistema de ecuaciones magnetostáticas será:

$$\nabla \cdot \left[r^{-2} f \nabla A\right] = 0, \tag{2.16}$$

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f + 2r^{-2} f^3 \nabla A \cdot \nabla A, \tag{2.17}$$

$$\gamma_{,r} = \frac{1}{4} r^{-2}(f_{,r}^2 - f_{,z}^2) + r^{-1} f (A_{,r}^2 - A_{,z}^2), \tag{2.18}$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2} r^{-2} f_{,r} f_{,z} + 2r^{-1} f A_{,r} A_{,z}. \tag{2.19}$$

Enunciamos el siguiente teorema cuya demostración, por ser evidente, no detallaremos.

**Teorema 2** *Para toda función $M$=$M(r,z)$, que satisface la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, existe al menos una función $\psi(r,z)$ que satisface*

$$\nabla \psi = -r \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla M,$$

*donde $\widehat{\mathbf{e}}_\phi$ es un vector unitario en dirección azimutal.*

A la luz de este teorema garantizamos la existencia de una función auxiliar $\psi$, tal que podemos escribir, para el potencial magnético $A$

$$\nabla A = r f^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \psi. \tag{2.20}$$

Así, no es difícil darse cuenta que las ecuaciones (2.16) y (2.17) se pueden escribir equivalentemente como

$$\nabla \cdot \left[ f^{-1} \nabla \psi \right] = 0, \tag{2.21}$$

$$f \nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f + 2 f \nabla \psi \cdot \nabla \psi. \tag{2.22}$$

Si nuevamente, por simplicidad, suponemos que

$$f = f(\psi),$$

$$\psi = \psi(U),$$

$$\nabla^2 U = 0,$$

entonces con un cálculo análogo al realizado en el caso electrostático podemos llegar a:

$$\psi = \left[ \frac{(4c - b^2)^{1/2}}{4} \right] \tan \left[ \frac{(4c - b^2)^{1/2}}{2} U \right] - \frac{b}{2}, \tag{2.23}$$

$$f = \left[ \frac{4c - b^2}{4} \right] \sec^2 \left[ \frac{(4c - b^2)^{1/2}}{2} U \right], \tag{2.24}$$

$$A_{,z} = -r U_{,r}, \tag{2.25}$$

$$A_{,r} = r U_{,z}, \tag{2.26}$$

$$\gamma_{,r} = -\left[ \frac{4c - b^2}{4} \right] r \left[ U_{,r}^2 - U_{,z}^2 \right], \tag{2.27}$$

$$\gamma_{,z} = -\left[ \frac{4c - b^2}{2} \right] r U_{,r} U_{,z}. \tag{2.28}$$

Las cuatro últimas expresiones son muy importantes. Con ellas podemos obtener soluciones magnetostáticas en términos de convenientes soluciones de las ecuacion de Laplace y, así como para el caso electrostático, si comparamos este tipo de solución de las ecuaciones de E-M, con las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío [**?**], podemos establecer el siguiente teorema:

**Teorema 3** *Dada una solución estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío:*

$$f_0 = e^{-2U},$$

$$\nabla^2 U = 0,$$

$$\gamma_{0,r} = r\left[U_{,r}^2 - U_{,z}^2\right],$$

$$\gamma_{0,z} = 2r[U_{,r}U_{,z}],$$

*existe una solución magnetostática* $\{f_m, \gamma_m, A_m\}$ *de las ecuaciones de E-M, definida mediante:*

$$\nabla^2 U = 0,$$

$$f_m = \zeta^2 \sec^2\left[\zeta U\right],$$

$$\gamma_m = -2\zeta^2 \gamma_0,$$

$$A_{m,r} = rU_{,z},$$

$$A_{m,z} = -rU_{,r},$$

*siendo* $\zeta$ *una constante.*

### 2.2.3. Caso electro-magnetostático

En este caso, en el conjunto de ecuaciones de E-M correspondientes a una métrica estacionaria axialmente simétrica, (1.17), (1.18), (1.26)-(1.29), hacemos $\omega = 0$, mientras que el potencial eléctrico $A_4$, es alguna función $A_4(r,z) = -\Phi(r,z)$ y el potencial magnético alguna función $A_3(r,z) = A(r,z)$. Bajo ésta restricción, el correspondiente sistema de ecuaciones electro-magnetostáticas será:

$$\nabla \cdot \left[r^{-2} f \nabla A\right] = 0, \tag{2.29}$$

$$\nabla \cdot \left[f^{-1} \nabla \Phi\right] = 0, \tag{2.30}$$

$$\nabla \cdot \left[r^{-2} f \Phi \nabla A\right] = 0, \tag{2.31}$$

$$f \nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f + 2f \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + 2r^{-2} f^3 \nabla A \cdot \nabla A, \tag{2.32}$$

$$\gamma_{,r} = \frac{1}{4} r f^{-2} (f_{,r}^2 - f_{,z}^2) + r^{-1} f (A_{,r}^2 - A_{,z}^2) - r f^{-1} (\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2), \tag{2.33}$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2} r f^{-2} f_{,r} f_{,z} + 2r^{-1} f A_{,r} A_{,z} - 2r f^{-1} \Phi_{,r} \Phi_{,z}. \tag{2.34}$$

Es acertado anotar que, en los dos casos anteriores, luego de las restricciones sobre el conjunto de ecuaciones, (1.17), (1.18), (1.26)-(1.29), obtuvimos un conjunto de cuatro ecuaciones, mientras que ahora obtenemos un conjunto de 6. No debe sorprendernos tal situación, pues ahora están "involucrados" los dos casos anteriores en este caso. Sin embargo, es fácil ver que a partir de (2.29) y (2.31) obtenemos una condición de "ligadura":

$$\nabla A \cdot \nabla \Phi = 0,$$

entonces nuestro sistema no posee 6 sino 5 ecuaciones. De otra parte, si de nuevo nos valemos del Teorema 2, tenemos garantizado la existencia de una función $\psi$, tal que podemos escribir:

$$\nabla A = r f^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \psi, \tag{2.35}$$

lo que nos permite transformar equivalentemente las ecuaciones (2.29) y (2.30) en

$$\nabla \cdot \left[ f^{-1} \nabla \psi \right] = 0, \tag{2.36}$$

$$\nabla^2 \Phi = f^{-1} \nabla f \cdot \nabla \Phi, \tag{2.37}$$

obteniéndose así una relación que nos permite expresar $\Phi = \Phi(\psi)$ y $A = A(\psi)$.

Los casos electrostático y magnetostático nos habilitaron para intuir que es conveniente, por facilidad, escoger aquí $f$ como una función de $\psi$: $f$=$f(\psi)$. Si hacemos esto, como consecuencia logramos

$$f^{''} = 2\Phi^{'2} + 2, \tag{2.38}$$

$$\Phi^{''} = 0. \tag{2.39}$$

Entonces, con un desarrollo análogo al de los dos casos anteriores, obtenemos:

$$f = \frac{4ac - b^2}{4a} \sec^2 \left[ \frac{(4ac - b^2)^{1/2}}{2} U \right], \tag{2.40}$$

$$\Phi = \frac{(a-1)^{1/2}(4ac - b^2)^{1/2}}{2a} \tan \left[ \frac{(4ac - b^2)^{1/2}}{2} U \right] - \frac{(a-1)^{1/2} b}{2a}, \tag{2.41}$$

$$\gamma_{,r} = - \left[ \frac{4ac - b^2}{4} \right] r \left[ U_{,r}^2 - U_{,z}^2) \right], \tag{2.42}$$

$$\gamma_{,z} = - \left[ \frac{4ac - b^2}{2} \right] r U_{,r} U_{,z}, \tag{2.43}$$

$$A_{,z} = -rU_{,r}, \tag{2.44}$$

$$A_{,r} = rU_{,z}. \tag{2.45}$$

A partir de estas últimas cinco expresiones a las que hemos llegado, podemos establecer finalmente, en analogía con los casos anteriores, el siguiente teorema:

**Teorema 4** *Dada una solución estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío:*

$$f_0 = e^{-2U},$$

$$\nabla^2 U = 0,$$

$$\gamma_{0,r} = r\left[U_{,r}^2 - U_{,z}^2\right],$$

$$\gamma_{0,z} = 2rU_{,r}U_{,z},$$

*existe una solución electro-magnetostática* $\{f_{em}, \gamma_{em}, A_{em}, \Phi_{em}\}$ *de las ecuaciones de E-M, definida mediante:*

$$\nabla^2 U = 0, \tag{2.46}$$

$$f_{em} = \frac{\kappa^2}{a} Sec^2\left[\kappa U\right], \tag{2.47}$$

$$\gamma_{em} = -2\kappa^2 \gamma_0, \tag{2.48}$$

$$\Phi_{em} = \frac{(a-1)^{1/2}}{a} \kappa \tan\left[\kappa U\right] - \frac{b(a-1)^{1/2}}{2a}, \tag{2.49}$$

$$A_{em,z} = -rU_{,r}, \tag{2.50}$$

$$A_{em,r} = rU_{,z}, \tag{2.51}$$

*siendo* $\kappa$, $a$ *y* $b$ *constantes.*

## 2.3. Algunas soluciones simples

A continuación presentamos tres ejemplos de aplicación de los casos expuestos anteriormente. Esto con el fin de dar claridad a la comprensión del formalismo de Papapetrou. Naturalmente, presentamos tres soluciones simples de la ecuación de Laplace que, permiten encontrar la forma de las funciones $\gamma$ y $f$ que satisfacen las ecuaciones estáticas de Einstein en el vacío; a partir de lo cual obtenemos la forma que adoptan $\gamma$, $f$ y los potenciales eléctrico y magnetíco, para los casos electrostático, magnetostático y electromagnetostático. En esto consiste fundamentalmente el formalismo.

Concretamente, usamos expresiones para el potencial gravitacional newtoniano correspondiente a distribuciones simples de materia, para obtener tres soluciones de Einstein en el vacío y, a partir de éstas, mediante el procedimiento de Papapetrou, generar tres soluciones para espacio-tiempos estáticos axialmente simétricos.

### 2.3.1. Solución Tipo Chazy-Curzon

Consideremos como primer ejemplo el potencial newtoniano debido a una masa puntual $M$ localizada en el origen. Para este caso podemos escribir

$$U = -\frac{M}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{2.52}$$

Así que la correspondiente solución para $\gamma_0$ será

$$\gamma_0 = -\frac{M^2 r^2}{2(r^2 + z^2)^2}. \tag{2.53}$$

De manera que las correspondientes funciones $\gamma$, $f$ y los potenciales eléctrico y magnético, correspondientes a los casos electrostático, magnetostático y electro-magnetostático serán, acorde con los teoremas 1, 3 y 4 :

**Caso electrostático**

$$f_e = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.54}$$

$$\gamma_e = -2\zeta^2\gamma_0 = \frac{\zeta^2 M^2 r^2}{(r^2+z^2)^2}, \tag{2.55}$$

$$\Phi_e = \zeta \tan[\zeta U] - b/2. \tag{2.56}$$

**Caso magnetostático**

$$f_m = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.57}$$

$$\gamma_m = -2\zeta^2\gamma_0 = \frac{\zeta^2 M^2 r^2}{(r^2+z^2)^2}, \tag{2.58}$$

$$A_m = -M\left[1 + \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.59}$$

**Caso electro-magnetostático**

$$f_{em} = \frac{1}{a}\kappa^2 \sec^2[\kappa U], \tag{2.60}$$

$$\gamma_{em} = -2\kappa^2\gamma_0 = \frac{\kappa^2 M^2 r^2}{(r^2+z^2)^2}, \tag{2.61}$$

$$\Phi_{em} = \frac{(a-1)^{1/2}}{a}\kappa \tan[\kappa U] - \frac{b(a-1)^{1/2}}{2a}, \tag{2.62}$$

$$A_m = -M\left[1 + \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.63}$$

### 2.3.2. Solución Tipo Zipoy-Voorhees

Como segundo ejemplo consideramos el potencial gravitacional de una barra delgada de longitud $2k$ situada en el eje $z$ con extremos en $z{=}k$ y $z{=}-k$. El correspondiente potencial puede escribirse como:

$$U = \frac{\mu}{2} ln \left[ \frac{x-1}{x+1} \right]. \tag{2.64}$$

Así que la correspondiente solución para $\gamma_0$ será

$$\gamma_0 = \frac{\mu^2}{2} ln \left[ \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right], \tag{2.65}$$

donde $\mu$ es una constante positiva y $(x, y)$ son las coordenadas esferoidales prolatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante la relación

$$r^2 = k^2(x^2-1)(1-y^2) \;\; ; \;\; z = kxy,$$

con

$$x \geq 1; -1 \leq y \leq 1$$

De manera que las correspondientes funciones $\gamma$, $f$, y los potenciales eléctrico y magnético, correspondientes a los casos electrostático, magnetostático y electro-magnetostático serán, acorde con los teoremas 1, 3 y 4:

**Caso electrostático**

$$f_e = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.66}$$

$$\gamma_e = -2\zeta^2\gamma_0 = -\zeta^2\mu^2 \ln \left[ \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right], \tag{2.67}$$

$$\Phi_e = \zeta \tan[\zeta U] - b/2. \tag{2.68}$$

**Caso magnetostático**

$$f_m = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.69}$$

$$\gamma_m = -2\zeta^2\gamma_0 = -\zeta^2\mu^2 \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{2.70}$$

$$A_m = k\mu y. \tag{2.71}$$

**Caso electro-magnetostático**

$$f_{em} = \frac{1}{a}\kappa^2 \sec^2[\kappa U], \tag{2.72}$$

$$\gamma_{em} = -2\kappa^2\gamma_0 = -\kappa^2\mu^2 \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{2.73}$$

$$\Phi_{em} = \frac{(a-1)^{1/2}}{a}\kappa \tan[\kappa U] - \frac{b(a-1)^{1/2}}{2a}, \tag{2.74}$$

$$A_{em} = k\mu y. \tag{2.75}$$

### 2.3.3. Solución Tipo Bonnor-Sackfield

Como tercer ejemplo presentamos la solución estática a las ecuaciones de Einstein en el vacío obtenido a partir del potencial gravitacional debida a un disco de radio $a$ ubicado en el plano $z$=0. Este potencial puede escribirse como

$$U = -\frac{i\mu}{2} \ln\left[\frac{\overline{x}-i}{\overline{x}+i}\right]. \tag{2.76}$$

Así que la correspondiente solución para $\gamma_0$ será

$$\gamma_0 = -\frac{\mu^2}{2} \ln\left[\frac{\overline{x}^2-1}{\overline{x}^2-y^2}\right], \tag{2.77}$$

donde $\mu$ es una constante positiva y $(x, y)$ son las coordenadas esferoidales oblatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante

$$r^2 = k^2(\overline{x}^2-1)(1-y^2) \;\; ; \;\; z = k\overline{x}y,$$

con

$$\overline{x} \geq 0; -1 \leq y \leq 1.$$

De manera que las correspondientes funciones $\gamma$, $f$, y los potenciales eléctrico y magnético, correspondientes a los casos electrostático, magnetostático y electro-magnetostático serán, acorde con los teoremas 1, 3 y 4 :

**Caso electrostático**

$$f_e = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.78}$$

$$\gamma_e = -2\zeta^2\gamma_0 = -\zeta^2\mu^2 \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{2.79}$$

$$\Phi_e = \zeta \tan[\zeta U] - b/2. \tag{2.80}$$

**Caso magnetostático**

$$f_m = \zeta^2 \sec^2[\zeta U], \tag{2.81}$$

$$\gamma_m = -2\zeta^2\gamma_0 = -\zeta^2\mu^2 \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{2.82}$$

$$A_m = -k\mu y. \tag{2.83}$$

**Caso electro-magnetostático**

$$f_{em} = \frac{1}{a}\kappa^2 \sec^2[\kappa U], \tag{2.84}$$

$$\gamma_{em} = -2\kappa^2\gamma_0 = -\kappa^2\mu^2 \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{2.85}$$

$$\Phi_{em} = \frac{(a-1)^{1/2}}{a}\kappa\tan[\kappa U] - \frac{b(a-1)^{1/2}}{2a}, \tag{2.86}$$

$$A_{em} = -k\mu y. \tag{2.87}$$

Los tres ejemplos de aplicación del formlismo, aquí presentados, permiten ver que el proceso de obtener soluciones estáticas de las ecuaciones de E-M axisimétricas, se reduce a un algoritmo sencillo cuando se tiene convenientes soluciones de las ecuaciones estáticas de Einstein en el vacío y de Laplace. Es éste entonces un procedimiento muy útil y práctico dado el gran número de soluciones de la ecuación de Laplace y de Einstein estáticas en el vacío, citadas en la literaura actual[2].

# Capítulo 3

# FORMALISMO DE ERNST

## 3.1. Introducción

Durante el desarrollo del capítulo 1, obtuvimos el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwel. A continuación presentamos un formalismo, conocido como Formalismo de Ernst, según el cual se demuestra que cualquier potencial, axialmente simétrico, solución del sistema de ecuaciones de E-M se puede expresar en términos de funciones complejas $\mathcal{E}$ y $\Phi$ independientes de la coordenada azimutal. Estas funciones satisfacen el sistema de ecuaciones

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi * \nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E},$$

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\nabla^2\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi * \nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi,$$

el cual se transforma, si asumimos que $\mathcal{E}$ es una función analítica de $\Phi$, en la ecuación

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}\Phi^2}\ \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = 0,$$

cuyas soluciones pueden ser obtenidas a partir de las soluciones de ecuaciones de campos de Einstein estacionarios, axialmente simétricos en el vacio.

## 3.2. Formalismo de Ernst

### 3.2.1. De las ecuaciones de E-M a un sistema de ecuaciones equivalentes

En coordenadas de Weyl, $x^{\alpha} = (t, \phi, r, z)$, con métrica

$$ds^2 = f^{-1}[e^{2\gamma}(dz^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2] - f(dt + \omega d\phi)^2,$$

donde $f, \omega$, y $\gamma$ son funciones de $r$ y $z$ e independientes de $t$ y $\phi$, las ecuaciones de E-M correspondientes a esta métrica son:

$$\nabla \cdot [r^{-2} f(\nabla A_3 - \omega \nabla A_4)] = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot [f^{-1} \nabla A_4 + r^{-2} f \omega (\nabla A_3 - \omega \nabla A_4)] = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot [r^{-2} f^2 \nabla \omega - 4 r^{-2} f A_4 (\nabla A_3 - \omega \nabla A_4)] = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} f \nabla^2 f &= \nabla f \cdot \nabla f - r^{-2} f^4 \nabla \omega \cdot \nabla \omega + 2 f \nabla A_4 \cdot \nabla A_4 \\ &\quad + 2 r^{-2} f^3 (\nabla A_3 - \omega A_4) \cdot (\nabla A_3 - \omega \nabla A_4), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,r} &= \frac{1}{4}\, r f^{-2} (f_{,r}^2 - f_{,z}^2) - \frac{1}{4}\, r^{-1} f^2 (\omega_{,r}^2 - \omega_{,z}^2) \\ &\quad - r^{-1} (r^2 f^{-1} - \omega^2 f)(A_{4,r}^2 - A_{4,z}^2) \\ &\quad + r^{-1} f (A_{3,z}^2 - A_{3,z}^2) - 2 r^{-1} \omega f (A_{3,r} A_{4,r} - A_{3,z} A_{4,z}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,z} &= \frac{1}{2}\, r f^{-2} f_{,r} f_{,z} - \frac{1}{2} r^{-1} f^2 \omega_{,r} \omega_{,z} \\ &\quad - 2 r^{-1} (r^2 f^{-1} - \omega^2 f) A_{4,r} A_{4,z} + 2 r^{-1} f A_{3,r} A_{3,z} \\ &\quad - 2 r^{-1} f \omega (A_{3,r} A_{4,z} + A_{3,z} A_{4,r}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $A_3$ y $A_4$ son funciones de $r$ y $z$ e independientes de $t$ y $\phi$.

En virtud del Teorema 2, podemos encontrar entonces una nueva función $A'_3(r,z)$, que denominaremos potencial escalar magnético, por estar asociada con la función potencial $A_3$, tal que se cumpla

$$(\nabla A_3 - \omega \nabla A_4) = f^{-1} r \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A'_3, \tag{3.7}$$

con lo que las ecuaciones (3.1) y (3.2) generan respectivamente

$$\nabla \cdot [r^{-1} \omega \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A_4 - f^{-1} \nabla A'_3] = 0, \tag{3.8}$$

$$\nabla \cdot [f^{-1} \nabla A_4 + r^{-1} \omega \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A'_3] = 0. \tag{3.9}$$

Ahora, definimos un nuevo potencial complejo como

$$\Phi = A_4 + i A'_3. \tag{3.10}$$

Si le reemplazamos en (3.9) y hacemos un poco de álgebra, obtenemos,

$$\nabla \cdot [f^{-1} \nabla \Phi - i r^{-1} \omega \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \Phi] = 0. \tag{3.11}$$

No resulta difícil notar que, dado que $r^{-1} f (\nabla A_3 - \omega \nabla A_4) = \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A'_3$, con la ecuación (3.3), escribamos

$$\nabla \cdot [r^{-2} f^2 \nabla \omega - 2 r^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \mathrm{Im}(\Phi^* \nabla \Phi)] = 0, \tag{3.12}$$

donde $\Phi^*$ es el complejo conjugado de $\Phi$.

Si nuevamente definimos un potencial auxiliar $\varphi$ que cumpla

$$r^{-1} f^2 \nabla \omega - 2 \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \mathrm{Im}(\Phi^* \nabla \Phi) = \widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \varphi, \tag{3.13}$$

entonces obtenemos de la ecuación (3.3)

$$\nabla \cdot [f^{-2} (\nabla \varphi - 2 \mathrm{Im}(\Phi^* \nabla \Phi))] = 0, \tag{3.14}$$

mientras de la ecuación (3.4) se conseguirá respectivamente que

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - [\nabla\varphi + 2\mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi)] \cdot [\nabla\varphi + 2\mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi)] + 2\mathrm{f}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi^*. \tag{3.15}$$

Entonces hemos obtenido, definiendo los potenciales auxiliares $A_3'$, $\varphi$ y $\Phi$, un sistema de ecuaciones equivalente al sistema de ecuaciones (3.1)-(3.4):

$$\nabla \cdot [r^{-1}\omega\widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A_4 - f^{-1}\nabla A_3'] = 0, \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot [f^{-1}\nabla A_4 + r^{-1}\omega\widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla A_3'] = 0, \tag{3.17}$$

$$\nabla \cdot [f^{-1}\nabla\Phi - ir^{-1}\omega\widehat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla\Phi] = 0, \tag{3.18}$$

$$\nabla \cdot [r^{-2}f^2\nabla\omega - 2r^{-1}\widehat{\mathbf{e}}_\varphi \times \mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi)] = 0, \tag{3.19}$$

$$\nabla \cdot [f^{-2}(\nabla\varphi - 2\mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi))] = 0, \tag{3.20}$$

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - [\nabla\varphi + 2\mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi)] \cdot [\nabla\varphi + 2\mathrm{Im}(\Phi^*\nabla\Phi)] + 2\mathrm{f}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi^*. \tag{3.21}$$

### 3.2.2. Introducción de un nuevo potencial complejo en el conjunto de ecuaciones equivalente a las de E-M

Introduciendo un nuevo potencial auxiliar, esta vez definido según

$$\mathcal{E} = (f- \mid \Phi \mid^2) + i\varphi, \tag{3.22}$$

obtenemos,a partir del sistema (3.16) - (3.21), las ecuaciones

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi * \nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E}, \tag{3.23}$$

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\nabla^2\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi * \nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi. \tag{3.24}$$

Por otra parte, suponiendo que $\mathcal{E}$ es una función analítica de $\Phi$, obtenemos de (3.23) y (3.24) la ecuación

$$(\mathrm{Re}\mathcal{E}+ \mid \Phi \mid^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}\Phi^2}\ \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = 0. \tag{3.25}$$

Si usamos la condición $\mathcal{E} \longrightarrow 1; \Phi \longrightarrow 0$ en el infinito, podemos escribir

$$\mathcal{E} = 1 - 2q^{-1}\Phi, \tag{3.26}$$

siendo $q$ una constante compleja.

Si introducimos $\xi$ de tal manera que:

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \tag{3.27}$$

obtendremos

$$\Phi = \frac{q}{\xi + 1}, \tag{3.28}$$

con loque de (3.24) encontramos la ecuación

$$(\xi\xi^* - 1 + qq)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi \cdot \nabla\xi, \tag{3.29}$$

en la que poniendo

$$\xi = (1 - qq^*)^{1/2}\xi_0, \tag{3.30}$$

se encuentra directamente la ecuación

$$(\xi_0\xi_0^* - 1)\nabla^2\xi_0 = 2\xi_0^*\nabla\xi_0 \cdot \nabla\xi_0. \tag{3.31}$$

Dado que esta última ecuación proporciona soluciones de las ecuaciones de campos de Einstein, estacionarias, axialmente simétricas en el vacio, podemos concluir que:

**Teorema 5** *Dada una solución* $\xi_0$*, de la ecuación de Ernst en el vacío (3.31), a partir de la cual se genera una solución que satisface las ecuaciones de Einstein, siempre es posible encontrar, mediante la transformación:*

$$\xi = (1 - qq^*)^{\frac{1}{2}}\xi_0,$$

*una solución $\xi$, de la ecuación Ernst en el electrovacío (3.29), que genera una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell.*

La obtención de este teorema, que constituye el Formalismo de Ernst, es un paso importante en nuestro trabajo. Con ello garantizamos soluciones de las ecuaciones de E-M correspondientes a una métrica estacionaria axialmente simétrica, a partir de soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Aunque no presenta las ventajas que los teoremas constituyentes del formalismo de Papapetrou, de algún modo, lo podemos pensar como su paralelo. Pues, en ambos casos, se parte de soluciones de vacío y obtiene soluciones de electrovacío. En la literatura actual se cuenta con un gran número de soluciones de la ecuaciones de Einstein en el vacío para el caso axialmente simétrico (ver por ejemplo la referencia [6]). En la próxima sección tomaremos algunas soluciones de la ecuación de Ernst en el vacío que las originan, con el fin de visualizar, mediante algunos ejemplos, la utilidad del formalismo de Ernst.

## 3.3. Soluciones particulares

En este aparte presentamos algunas soluciones, logradas mediante el formalismo de Ernst. Para este fin, resulta práctico evocar ahora a un resumen de los resultados más notables, como consecuencia del desarrollo del capítulo anterior. Escribiremos de manera genérica la forma que adoptan las funciones métricas y los potenciales en términos de la solución de la ecuación de Ernst, $\xi$:

a) las funciones métricas $f$, $\omega$ y $\gamma$ las escribimos en términos de $\xi$ como:

$$f = \frac{\xi\xi^* + qq^* - 1}{(\xi + 1)(\xi^* + 1)}, \tag{3.32}$$

$$\omega_{,r} = \frac{2r}{((\xi\xi^* - 1) + qq^*)^2}\mathrm{Im}\left[((\xi^* + 1)^2 - (\xi^* + 1) \mid \mathrm{q} \mid^2)\xi_{,\mathrm{z}}\right], \tag{3.33}$$

$$\omega_{,z} = \frac{-2r}{((\xi\xi^* - 1) + qq^*)^2} \mathrm{Im} \left[ ((\xi^* + 1)^2 - (\xi^* + 1) \mid \mathrm{q} \mid^2) \xi_{,\mathrm{r}} \right], \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,r} &= \frac{r(\xi_{,r}\xi^*_{,r} - \xi^*_{,z}\xi_{,z})}{(\xi^*\xi + q^*q - 1)^2(\xi + 1)(\xi^* + 1)} \\ &\quad \times \left[ (\xi - qq^* + 1)(\xi^* - qq^* + 1) - qq^*(\xi\xi^* + qq^* - 1) \right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,z} &= \frac{2r\mathrm{Re}(\xi_{,\mathrm{z}}\xi^*_{,\mathrm{r}})}{(\xi^*\xi + q^*q - 1)^2(\xi + 1)(\xi^* + 1)} \\ &\quad \times \left[ (\xi - qq^* + 1)(\xi^* - qq^* + 1) - qq^*(\xi\xi^* + qq^* - 1) \right], \end{aligned} \tag{3.36}$$

b)los potenciales $A_3$ y $A_4$ pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} A_{3,r} &= -\frac{\omega}{2} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,r} + \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,r} \right] \\ &\quad - \frac{rf^{-1}}{2i} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,z} - \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,z} \right], \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} A_{3,z} &= -\frac{\omega}{2} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,z} + \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,z} \right] \\ &\quad + \frac{rf^{-1}}{2i} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,r} - \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,r} \right], \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$A_{4,r} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,r} + \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,r} \right], \tag{3.39}$$

$$A_{4,z} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{q}{(\xi + 1)^2} \xi_{,z} + \frac{q^*}{(\xi^* + 1)^2} \xi^*_{,z} \right], \tag{3.40}$$

donde, como ya sabemos

$$\xi = (1 - qq^*)^{1/2} \xi_0. \tag{3.41}$$

Las coordenadas naturales para la descripción de los campos de Einstein-Maxwell estacionarios axialmente simétricos son, dada las simetrías impuestas, las de Weyl. Sin embargo, es conveniente escribir las funciones métricas y los potenciales en coordenadas esferoidales prolatas. Éstas se definen según:

$$r = k(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2},$$

$$z = kxy,$$

siendo $k$ una constante arbitraria. Entonces podemos escribir, equivalentemente, los dos apartes anteriores, utilizando tales coordenadas así:

a) las funciones métricas $f$, $\omega$ y $\gamma$ en términos de $\xi$ como

$$f = \frac{\xi\xi^* + qq^* - 1}{(\xi+1)(\xi^*+1)}, \tag{3.42}$$

$$\omega_{,x} = \frac{-2k(1-y^2)}{(\xi\xi^* + qq^* - 1)^2}\mathrm{Im}\left[(\xi^*+1)^2 - (\xi^*+1)\mathrm{qq}^*\xi_{,\mathrm{y}}\right], \tag{3.43}$$

$$\omega_{,y} = \frac{2k(x^2-1)}{(\xi\xi^* + qq^* - 1)^2}\mathrm{Im}\left[(\xi^*+1)^2 - (\xi^*+1)\mathrm{qq}^*\xi_{,\mathrm{x}}\right], \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{,x} = {} & \frac{(1-y^2)(1-qq^*)}{(x^2-y^2)(\xi\xi^* + qq^* - 1)^2} \\ & \times \left[\xi^*_{,x}\xi_{,x}x(x^2-1) - \xi^*_{,y}\xi_{,y}x(1-y^2) - (\xi^*_{,x}\xi_{,y} + \xi_{,x}\xi^*_{,y})y(x^2-1)\right],\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{,y} = {} & \frac{(1-y^2)(1-qq^*)}{(x^2-y^2)(\xi\xi^* + qq^* - 1)^2} \\ & \times \left[\xi_{,x}\xi^*_{,x}y(x^2-1) - \xi_{,y}\xi^*_{,y}y(1-y^2) + (\xi_{,x}\xi^*_{,y} + \xi^*_{,x}\xi_{,y})x(1-y^2)\right],\end{aligned} \tag{3.46}$$

b) y los potenciales $A_3$ y $A_4$ como:

$$A_{3,x} = \frac{k}{(\xi+1)^2(\xi^*+1)^2}\left[f^{-1}(1-y^2)\mathrm{Im}\left[\mathrm{q}(\xi^*+1)^2\xi_{,\mathrm{y}}\right] - \frac{\omega}{\mathrm{k}}\mathrm{Re}\left[\mathrm{q}(\xi^*+1)^2\xi_{,\mathrm{x}}\right]\right], \tag{3.47}$$

$$A_{3,y} = \frac{-k}{(\xi+1)^2(\xi^*+1)^2}\left[f^{-1}(x^2-1)\mathrm{Im}\left[\mathrm{q}(\xi^*+1)^2\xi_{,\mathrm{x}}\right] + \frac{\omega}{\mathrm{k}}\mathrm{Re}\left[\mathrm{q}(\xi^*+1)^2\xi_{,\mathrm{y}}\right]\right], \tag{3.48}$$

$$A_4 = \frac{q(\xi^* + 1) + q^*(\xi + 1)}{(\xi + 1)(\xi^* + 1)}. \tag{3.49}$$

A continuación presentamos algunas soluciones de las ecuaciones de E-M correspondientes a la métrica (1.1), para diferentes soluciones $\xi_0$ de la ecuación de Ernst en el vacío y posibles valores que toma $q$ para la escogida solución $\xi$ de la ecuación de Ernst en el electrovacío.

### 3.3.1. Caso 1

El caso $\xi_0 = x$ constituye la solución más simple de la ecuación de Ernst en el vacío. En términos de $\xi_0 = x$, la solución de la ecuación de Ernst en el electrovacío es $\xi = (1 - qq^*)^{\frac{1}{2}} x$. En el caso particular en que $q = 0$, $\xi$ coincide con $\xi_0$. Bajo esta restricción se obteniene para $\gamma$, de (3.45) y (3.46), respectivamente,

$$\gamma_{,x} = \frac{x(1 - y^2)}{(x^2 - 1)(x^2 - y^2)}, \tag{3.50}$$

$$\gamma_{,y} = \frac{y}{x^2 - y^2}. \tag{3.51}$$

Integrando (3.51) obtenemos

$$\gamma(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - y^2) + h(x), \tag{3.52}$$

siendo $h(x)$ una función desconocida. Derivando (3.52) respecto a $x$, obtenemos,

$$\gamma_{,x} = -\frac{x}{(x^2 - y^2)} + h^{'}(x). \tag{3.53}$$

Igualamos (3.53) y (3.50), llegandose así a,

$$h^{'}(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \tag{3.54}$$

de lo que se deduce entonces, luego de integrar, que

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1). \tag{3.55}$$

Con este valor de $h$ en (3.52) se obtiene para $\gamma$:

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}\right]. \tag{3.56}$$

Se ve directamente de (3.42), que para este caso

$$f = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}. \tag{3.57}$$

Asimismo, de (3.43),(3.44), (3.47), (3.48) y (3.49) se ve directamente que,

$$\omega = A_3 = A_4 = 0. \tag{3.58}$$

Como se puede observar, este caso corresponded a una solución estática de vacío. Se le conoce comúnmente como solución de Schwarzschild.

Ahora,bajo la misma solución de Ernst en el vacío, $\xi_0 = x$, supondremos que $q$ es un real cualquiera diferente de cero. A este tipo de solución se le conoce como solución tipo Reissner-Norsdtröm, representa una solución electrostática. Dado que $q$ es real, se tiene que $q$=$q^*$. Entonces $\xi = (1 - q^2)^{\frac{1}{2}}x$. Así, de (3.45) y (3.46), obtenemos respectivamente para $\gamma$,

$$\gamma_{,x} = \frac{x(1 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 - 1)}, \tag{3.59}$$

$$\gamma_{,y} = \frac{y}{(x^2 - y^2)}. \tag{3.60}$$

Integrando (3.60)

$$\gamma = -\frac{1}{2}\ln\left[x^2 - y^2\right] + h(x), \tag{3.61}$$

lo que dará, luego de derivarse respecto de $x$,

$$\gamma_{,x} = \frac{x}{(x^2 - y^2)} + h^{'}(x). \tag{3.62}$$

Luego, comparando (3.59) con (3.62) obtenemos para $h$

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln \left[ x^2 - 1 \right], \tag{3.63}$$

que al remplazarse en (3.61) da para $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right]. \tag{3.64}$$

Por otra parte, de (3.42),

$$f = \frac{(1 - q^2)(x^2 - 1)}{((1 - q^2)^{\frac{1}{2}} x + 1)^2}. \tag{3.65}$$

Es obvio que de (3.49),

$$A_4 = \mathrm{Re}\Phi = \frac{\mathrm{q}}{(1 - \mathrm{q}^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{x} + 1}, \tag{3.66}$$

mientras que por inspección inmediata de (3.47), (3.48), (3.43) y (3.44)

$$A_3 = \omega = 0.. \tag{3.67}$$

Dado que $A_3 = \omega = 0$ y que el potencial elćtrico, $A_3$, es diferente 0 , se puede afirmar entonces que ésta es una solución electrostática.

Cuando $q$ es un imaginario puro, $q{=}{-}q^*$, de (3.45) y (3.46), se tiene para $\gamma$ respectivamente

$$\gamma_{,x} = \frac{x(1 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 - 1)}, \tag{3.68}$$

$$\gamma_{,y} = \frac{y}{(x^2 - y^2)}. \tag{3.69}$$

Integrando (3.69) obtenemos,

$$\gamma = -\frac{1}{2}\ln\left[x^2 - y^2\right] + h(x). \tag{3.70}$$

Derivando respecto de $x$ y comparando con (3.68) tenemos que

$$h^{'}(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)} \tag{3.71}$$

lo que integrando, da

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left[x^2 - 1\right]. \tag{3.72}$$

Sustituyendo este valor de $h(x)$ en (3.70)

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}\right]. \tag{3.73}$$

De otro lado, (3.42),

$$f = \frac{(q^2 + 1)(x^2 - 1)}{((q^2 + 1)^{\frac{1}{2}} x + 1)^2}, \tag{3.74}$$

mientras que de (3.43), (3.44) y (3.49), naturalmente, podemos decir que

$$A_4 = \omega = 0. \tag{3.75}$$

De las expresiones (3.47) y (3.48),

$$A_{3,x} = 0, \tag{3.76}$$

$$A_{3,y} = \frac{-kq}{i(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.77}$$

entonces integrando,

$$A_3 = \frac{-qky}{i(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}} + N(x). \tag{3.78}$$

Pero $A_{3,x} = 0$, luego $N^{'}(x) = 0$. Por cosiguiente escribimos $N(x) = 0$. Así que

$$A_3 = \frac{-qky}{i(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.79}$$

Como se puede notar, a diferencia del caso en que $q$ es real, en este caso $A$ es igual a cero, mientras que $A_3$ es diferente de cero. Por tal razón, hemos apartado para este tipo de solución el nombre solución tipo Reissner-Norsdtröm-magnetizado.

Cuando tomomamos $q$ complejo, se obtiene, de (3.45) y (3.46),

$$\gamma_{,x} = \frac{x(1-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-1)}, \tag{3.80}$$

$$\gamma_{,y} = \frac{y}{x^2-y^2}. \tag{3.81}$$

Integrando (3.81), da respectivamente para $\gamma$,

$$\gamma = -\frac{1}{2}\ln\left[x^2-y^2\right] + h(x). \tag{3.82}$$

Derivando ésta última expresión respecto de $x$, tendremos

$$\gamma_{,x} = -\frac{x}{x^2-y^2} + h^{'}(x). \tag{3.83}$$

De esta manera, a partir de (3.80), se tiene para $h(x)$,

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left[x^2-1\right], \tag{3.84}$$

con lo que, al sustituir este valor en (3.82) se obtiene para $\gamma$,

$$\gamma = -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right]. \tag{3.85}$$

Mientras que para $f$,

$$f = \frac{(1-qq^*)(x^2-1)}{((1-qq^*)^{\frac{1}{2}}x+1)^2}. \tag{3.86}$$

De otra parte, de (3.43) (3.44) se recibe $\omega = 0$, mientras que de (3.47) y (3.48),

$$A_{3,x} = 0, \tag{3.87}$$

$$A_{3,y} = \frac{-k(q-q^*)}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.88}$$

con lo que

$$A_3 = \frac{-k(q-q^*)y}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}} + h(x). \tag{3.89}$$

Dado que

$$A_{3,x} = 0$$

entonces

$$h(x) = 0,$$

luego

$$A_3 = \frac{-k(q-q^*)y}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.90}$$

Además, de (3.49), tenemos, obviamente, para $A_4$

$$A_4 = \frac{q+q^*}{2((1-qq^*)^{\frac{1}{2}}x+1)}. \tag{3.91}$$

Podemos ver en consecuencia que, a diferencia de los dos últimos subcasos, ninguno de los potenciales es cero. Entonces podemos conjeturar que este subcaso, en que $q$ toma un valor complejo, corresponde a una solución Electro-Magnetostática, a la cual llamaremos solución Tipo Reissner-Norsdtrom electro-magnetizada.

A continuación presentamos otras soluciones al sistema de ecuaciones de E-M estacionarias axialmente simétricas. No detallaremos el cálculo, solo presntamos el resultado.

### 3.3.2. Caso 2

Como segundo caso consideremos la solución de vacío de la ecuación de Ernst $\xi_0 = y$. La solución de electrovacío correspondiente es así $\xi = (1 - qq^*)^{\frac{1}{2}} y$. De nuevo, en los casos particulares en que $q$ sea cero, un real arbitrario, o un imaginario puro se obtiene:

para $q = 0$,

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{y^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{3.92}$$

$$f = \frac{y^2 - 1}{(y+1)^2}, \tag{3.93}$$

$$\omega = A_3 = A_4 = 0, \tag{3.94}$$

para $q$ un real arbitrario

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{y^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{3.95}$$

$$f = \frac{(y^2 - 1)(1 - q^2)}{((1 - q^2)^{\frac{1}{2}} y + 1)^2}, \tag{3.96}$$

$$A_4 = \frac{q}{(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} y + 1}, \tag{3.97}$$

$$\omega = A_3 = 0, \tag{3.98}$$

para $q$ un imaginario puro

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{y^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{3.99}$$

$$f = \frac{(y^2 - 1)(1 + q^2)}{((1 + q^2)^{\frac{1}{2}} y + 1)^2}, \tag{3.100}$$

$$A_3 = \frac{-qkx}{i(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.101}$$

$$\omega = A_4 = 0, \tag{3.102}$$

mientras que si $q$ es un complejo

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{y^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.103}$$

$$f = \frac{(y^2-1)(1-qq^*)}{((1-qq^*)^{\frac{1}{2}}y+1)^2}, \tag{3.104}$$

$$A_4 = \frac{q+q^*}{2((1-qq^*)^{\frac{1}{2}}y+1)}, \tag{3.105}$$

$$A_3 = \frac{-k(q-q^*)x}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.106}$$

$$\omega = 0. \tag{3.107}$$

A partir de los resultados obtenidos cuando $\xi_0 = y$, podemos observar que que este caso reproduce al anterior cuando se hace la transformación $y \longrightarrow x$ en los numeradores. En general, dada una solución $\xi$, el intercambio $y \longrightarrow x$ en la solución, genera una solución.

### 3.3.3. Caso 3

Como tercer caso consideremos la solución de vacío $\xi_0 = e^{i\alpha}x$, donde $\alpha$ es una constante real arbitraria. Correspondientemente $\xi = (1-qq^*)\frac{1}{2}e^{i\alpha}x$.

Si $q = 0$ se obtiene

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.108}$$

$$f = \frac{(x^2-1)}{x^2+2x\cos(\alpha)+1}, \tag{3.109}$$

$$\omega = -2ky\,\mathrm{sen}(\alpha), \tag{3.110}$$

$$A_3 = A_4 = 0. \tag{3.111}$$

Esta solución se conoce en la literatura como solución tipo Taub-NUT. Como podemos apreciar, es una solución e vacío estacionaria. Haciendo $\alpha$ igual a cero en $f$ y $\omega$ obtenemos una solución de Schwarzschild.

Cuando tomamos el mismo caso $\xi_0 = e^{i\alpha}x$, pero con $q$ real diferente de cero, obtenemos

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right] \tag{3.112}$$

$$f = \frac{(x^2-1)(1-q^2)}{(1-q^2)x^2 + 2x\cos(\alpha)(1-q^2)^{\frac{1}{2}} + 1} \tag{3.113}$$

$$\omega = \frac{-2ky\,\mathrm{sen}(\alpha)}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.114}$$

$$A_3 = \frac{kq\,\mathrm{sen}\,\alpha y}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{(1-q^2)x^2-1}{(1-q^2)x^2+2(1-q^2)^{\frac{1}{2}}x\cos\alpha+1}\right], \tag{3.115}$$

$$A_4 = q\left[\frac{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}x\cos\alpha+1}{(1-q^2)x^2+2x\cos\alpha(1-q^2)^{\frac{1}{2}}+1}\right]. \tag{3.116}$$

Esta solución estacionaria se conoce como solución tipo Taub-NUT cargada. Es Como se puede ver,los potenciales eléctrico y magnético son diferentes de cero. Si ponemos $\alpha$ igual a cero en 3.112-3.116, obtenemos una solución tipo Reissner-Norsdtröm.

Pra el caso en que $q$ es un imaginario puro obtenemos

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.117}$$

$$\omega = \frac{-2k\,\mathrm{sen}(\alpha)y}{(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.118}$$

$$f=\frac{(x^2-1)(1+q^2)}{(1+q^2)x^2+2x\cos(\alpha)(1+q^2)^{\frac{1}{2}}+1}, \tag{3.119}$$

$$A_3=\frac{-qky\left[(1+q^2)^2x^2\cos\alpha+2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}x+\cos\alpha\right]}{i(1+q^2)^{\frac{1}{2}}((1+q^2)x^2+2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+1)}, \tag{3.120}$$

$$A_4=iq\,\mathrm{sen}\,\alpha\left[\frac{x(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+q^2)x^2+2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha x+1}\right], \tag{3.121}$$

mientras que cuando $q$ es complejo

$$\gamma=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.122}$$

$$\omega=-\frac{2ky\,\mathrm{sen}(\alpha)}{(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.123}$$

$$f=\frac{(x^2-1)(1-qq^*)}{(1-qq^*)x^2+2x\cos(\alpha)(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1}, \tag{3.124}$$

$$A_4=\frac{1}{2}\left[\frac{x(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(qe^{-i\alpha}+q^*e^{i\alpha})+q+q^*}{(1-qq^*)x^2+(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+1}\right], \tag{3.125}$$

$$A_3=\frac{-ky\left[(1-qq^*)(qe^{-i\alpha}-q^*e^{i\alpha})x^2+2(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(q-q^*)x+q^*e^{-i\alpha}-qe^{i\alpha}\right]}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}\left[(1-qq^*)x^2+(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})x+1\right]}. \tag{3.126}$$

No resulta dificil concluir entonces que si $(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}x$ es solución, también lo será $(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}e^{i\alpha}x$.

### 3.3.4. Caso 4

Por cuarta solución de vacío tomamos el caso en que $\xi_0 = e^{i\alpha} y$. Con lo que $\xi_0 = (1 - qq^*)^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha} y$.

asumiendo que $q$ es cero obtenemos

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{y^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{3.127}$$

$$f = \frac{(y^2 - 1)}{y^2 + 2y\cos(\alpha) + 1}, \tag{3.128}$$

$$\omega = -2kx \operatorname{sen} \alpha, \tag{3.129}$$

$$A_3 = A_4 = 0, \tag{3.130}$$

que representa una solución de vacío estacionaria.

Para el caso en que $q$ es un real arbitrario diferente de cero,

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{y^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{3.131}$$

$$f = \frac{(y^2 - 1)(1 - q^2)}{(1 - q^2)y^2 + 2y\cos(\alpha)(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + 1}, \tag{3.132}$$

$$A_4 = q \left[ \frac{y\cos\alpha(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{(1 - q^2)y^2 + 2y\cos\alpha(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + 1} \right], \tag{3.133}$$

$$\omega = \frac{-2kx \operatorname{sen}(\alpha)}{(1 - q^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.134}$$

$$A_3 = \frac{qk \operatorname{sen}\alpha x((1-q^2)y^2-1)}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1-q^2)y^2+2\cos\alpha y(1-q^2)^{\frac{1}{2}}+1\right]}. \tag{3.135}$$

Si $q$ es un imaginario puro

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{y^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.136}$$

$$\omega = -\frac{2kx \operatorname{sen}\alpha}{1+q^2}, \tag{3.137}$$

$$f = \frac{(y^2-1)(1+q^2)}{(1+q^2)y^2+2y\cos(\alpha)(1+q^2)^{\frac{1}{2}}+1}, \tag{3.138}$$

$$A_3 = -\frac{qkx\left[\cos\alpha y^2(1+q^2)+2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}y+\cos\alpha\right]}{i(1+q^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1+q^2)y^2+2y\cos\alpha(1+q^2)^{\frac{1}{2}}+1\right]}, \tag{3.139}$$

$$A_4 = \frac{-q\operatorname{sen}\alpha y(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}{i\left[(1+q^2)y^2+2y\cos\alpha(1+q^2)^{\frac{1}{2}}+1\right]}. \tag{3.140}$$

Por otro lado, cuando $q$ es un complejo arbitrario

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{y^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{3.141}$$

$$f = \frac{(y^2-1)(1-qq^*)}{(1-qq^*)y^2+2y\cos(\alpha)(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1}, \tag{3.142}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}y(qe^{-i\alpha}+q^*e^{i\alpha})+q+q^*}{(1-qq^*)y^2+y(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+1}\right], \tag{3.143}$$

$$\omega = -2kx\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.144}$$

$$A_3 = \frac{-kx\left[(1-qq^*)(qe^{-i\alpha}+qe^{i\alpha})y^2+2(q-q^*)(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}y+qe^{i\alpha}-q^*e^{-i\alpha}\right]}{2i(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}\left[(1-qq^*)y^2+(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})y+1\right]}. \qquad (3.145)$$

Al igual que en el caso 3, podemos apreciar que si $(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}y$, $(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}e^{i\alpha}y$. En general, si $\xi$ es solución, $e^{i\alpha}\xi$ también lo es.

### 3.3.5. Caso 5

En este aparte consideramos la soluci'on de vacío $\xi_0 = \alpha x + i\beta y$, con $\alpha$ y $\beta$ reales que cumplen $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Así, la correspondiente solución de electrovacío es $(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(\alpha x+i\beta y)$. Considerando $qcomplejo$ obtenemos

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{(x^2-y^2)}\right], \qquad (3.146)$$

$$f = \frac{(1-qq^*)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-1)\left[\alpha x(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}-i\beta y(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(\alpha x+i\beta y)+1}, \qquad (3.147)$$

$$A_3 = \frac{-k\beta(1-y^2)}{2\alpha}\left[\frac{q[(\alpha x-i\beta y)(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1]+q^*[(\alpha x-i\beta y)(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1]}{(1-qq^*)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+2\alpha x(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+1}\right], \quad (3.148)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{q[(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(\alpha x-i\beta y)+1]+q^*[(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}(\alpha x-i\beta y)+1]}{(1-qq^*)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}2\alpha x+1}\right], \qquad (3.149)$$

$$\omega = \frac{k\beta(1-y^2)\left[2\alpha x(1-qq^*)^{\frac{1}{2}}+(2-qq^*)\right]}{\alpha(1-qq^*)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-1)}. \qquad (3.150)$$

Esta es una solución estacionaria de electrovacío. Nótese que se reduce a la solución de Kerr cuando $q$ es igual a cero, y a la solución de Kerr-Newman cuando $q$ es real.

### 3.3.6. Caso 6

Como último caso consideremos

$$\xi_0 = \frac{\alpha^2 x^4 + \beta^2 y^2 - 2i\alpha\beta xy(x^2 - y^2) - 1}{2\alpha x(x^2 - 1) - 2i\beta y(1 - y^2)},$$

donde, al igual que en el caso anterior, se cumple ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$). La solución de electrovacío correspondiente

$$\xi = (1 - qq^*)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha^2 x^4 + \beta^2 y^2 - 2i\alpha\beta xy(x^2 - y^2) - 1}{2\alpha x(x^2 - 1) - 2i\beta y(1 - y^2)},$$

genera, tomando $q$ complejo arbitrario,

$$\gamma = -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(1 - qq^*)(x^2 - y^2)^4}{N(x, y)} \right], \tag{3.151}$$

$$\omega = -\frac{2bkL(x, y)}{N(x, y)}, \tag{3.152}$$

$$f = \frac{N(x, y)}{C(x, y) + G(x, y) - 4P(x, y) - T(x, y)}, \tag{3.153}$$

$$A_4 = -\frac{(P + R)(q^* + q) - (1 - qq^*)^{1/2} J(q^* - q)iby}{C(x, y) + G(x, y) - 4P(x, y) - T(x, y)}, \tag{3.154}$$

donde:

$$\begin{aligned}
L(x, y) \quad &= \quad 2(1 - qq^*)^{1/2}\{x(y^2 - 1)((2x^4 + x^2y^2 - x^2 + y^4 - 3y^2)(x^2 - y^2)b^2 \\
&\quad -(2x^4 - x^2y^2 + x^2 - 3y^2 + 1)(x^2 - 1)\} \\
&\quad -(1 - b^2)^{1/2}\{(x^4 - 3x^2y^2 + x^2 - y^2 + 2)(x^2 - 1) \\
&\quad -(x^3 - y^3)b^2\}(qq^* - 2)(x^2 - y^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(x, y) \quad &= \quad (qq^* - 1)\left[2(2y^4 - 3y^2 + 2 - y^2x^2 + x^4)(x^2 - 1)(x^2 - y^2)b^2, \right] \\
&\quad -(qq^* - 1)\left[(x^2 - y^2)^4 b^4 (x^2 - 1)^4\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= 2\{x^6 - x^4y^2 + 2x^4 + 2x^2y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 + 2y^4 - 5y^2 + 2 \\
&\quad -(x^6 - x^4y^2 + 2x^2y^4 - x^2 - y^2)qq^*\}(x^2 - y^2)b^2, \\
C(x,y) &= (x^4 + 6x^2 + 1 - (x^2+1)^2qq^*)(x^2-1)^2, \\
G(x,y) &= (1-qq^*)(x^2-y^2)^4b^4, \\
P(x,y) &= x(1-qq^*)^{1/2}(1-b^2)^{1/2} \\
&\quad \times \left[(2y^4 - 3y^2 + y^2x^2 - x^2 + x^4)(x^2-y^2)b^2 - (x^2+1)(x^2-1)^2\right], \\
R(x,y) &= 2((x^6 - 2x^4 + x^2 - y^6 - 2y^4 - y^2)b^2 - (x^2-1)^2x^2), \\
J(x,y) &= (2x^6 - x^4y^2 - 3x^4 + 2x^2y^2 - y^6 + y^4)b^2 - (2x^2 - y^2 + 1)(x^2-1)^2).
\end{aligned}
$$

A esta solución de vacío estacionaria nos referimos como solución Tomimatsu-Sato clase 2 cargada. Nótese que se reduce a la solución Tomimatsu-Sato clase 2 de vacío, cuando $q$ es cero.

Los ejemplos de aplicación del formalismo, aquí presentados, permiten ver que el proceso de obtener soluciones estacionarias de las ecuaciones de E-M axisimétricas, se reduce a un algoritmo sencillo cuando se tiene convenientes soluciones $\xi$ de la ecuaciones de Ernst en el electrovacío. Es éste entonces un procedimiento muy útil y práctico dado el gran número de soluciones $\xi_0$ de la ecuaciones de Ernst en el vacío, mediante las que se puede generar soluciones $\xi$ y, por tanto, soluciones de las ecuaciones de E-M estacionarias axialmente simétricas.

# Capítulo 4

# CONCLUSIONES

Se presentaron dos formalismos a través de los cuales es posible generar soluciones estáticas y estacionarias del sistema de ecuaciones axialmente simétricas de E-M en el exterior a una fuente. El primero, basado en un trabajo de Papapetrou [5]. Mediante éste, es posible emplear soluciones estáticas del sistema de ecuaciones de Einstein en el exterior a una fuente, para obtener soluciones electrostáticas, magnetostáticas, y electromagnetostáticas. Con el fin de ilustrar el procedimiento, se presentaron 3 ejemplos específicos. El segundo formalismo, originado por Ernst (ver referencias [3]-[4]). Según éste, se logra soluciones estacionarias a partir de soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, mediante dos funciones complejas. También, se presentaron algunos ejemplos de aplicación con el fin de visualizar mejor el formalismo.

Como se puede notar, la ventaja de estos métodos radica principalmente en la amplia gama de soluciones de las ecuaciones de Einstein, presentes en la literatura actual, que puede ser utilizadas para el fin práctico. Resulta esperanzador pensar que los dos formalismos puedan ser utilizados en situaciones no estacionarias.

En términos de las interpretaciones físicas de los resultados aquí obtenidos, es conveniente remitirse a las referencias [8]-[14], en donde se aprecia que es posible dar interpretaciones a las soluciones si se les analiza en el contexto de los modelos relativista de discos. Resulta interesante consultar, para este mismo fin, la referencia [1], la cual plantea un introducción clara de aplicaciones a la teoría de agujeros negros.

# Bibliografía


[1] S. Chandrasekhar. *The mathematical Theory of Black Holes*. (Clarendon Press Oxford,1992).

[2] D. Kramer, H. Stephaní, E. Herlt and M. McCallum. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. (Cambridge University Press, 1980).

[3] F. Ernst. Physical Review.167,1415 (1968).

[4] F. Ernst. Physical Review.168,1175 (1968).

[5] A. Papapetrou. Ann. Physik. 12,309 (1953).

[6] J. Bičák. in "Einstein's Field Equations and Their Physical Implications", ed. B. G. Schmidt, Lecture Notes in Physics, Vol. 540, (Springer Verlag, 2000).

[7] J. Bičák, D. Lynden-Bell and J. Kantz.Phys. Rev. D47, 4334 (1993).

[8] J. Bičák, D. Lynden-Bell and C. Pichon.Mont. R. Astron. Soc.265, 126 (1993).

[9] T. Ledvinka, M. Zofka and J. Bičák. Proceedings of the 8th Marcel Grossman Meeting in General Relativity, edited by T. Piran (world) Scientific, Singapore, 1999), pp339-341.

[10] P. Letelier.Phys.Rev. D60, 104042(1999).

[11] J. Bičák, and T. Ledvinka. Phys. Rev.Lett 71, 1669 (1993).

[12] J. Katz, J. Bičák, and D. Lynden-Bell, Class. Quantum Grav. 16, 4023 (1999).

[13] C. Pichon and D. Lynden-Bell, Mont. Not. R Astron. Soc. 280, 1007 (1996).

[14] G. González and P. Letelier. Phys. Rev. D62, 064025 (2000).

[15] A. Gutiérrez P., G. García and G. González. *Kerr-Nut-Like Einstein-Maxwell Field*. Preprint.