

DESARROLLO DE UN BANCO DE PRUEBAS DE VIBRACIONES MECÁNICAS  
TORSIONALES QUE PERMITA VALIDAR LOS CÁLCULOS OBTENIDOS POR EL  
MÉTODO HOLZER, COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL LABORATORIO DE  
SISTEMAS DINÁMICOS

JUAN CAMILO GUEVARA SERRANO  
CAMILO ANDRES RAMIREZ ACEVEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE MECÁNICA  
INGENIERIA MECÁNICA  
BUCARAMANGA

2024

DESARROLLO DE UN BANCO DE PRUEBAS DE VIBRACIONES MECÁNICAS  
TORSIONALES QUE PERMITA VALIDAR LOS CÁLCULOS OBTENIDOS POR EL  
MÉTODO HOLZER, COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL LABORATORIO DE  
SISTEMAS DINÁMICOS.

JUAN CAMILO GUEVARA SERRANO  
CAMILO ANDRES RAMIREZ ACEVEDO

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniería mecánica

Director

CARLOS BORRAS PINILLA

Ph.D. en Ingeniería Mecánica

Codirector

HELIO SNEYDER ESTEBAN VILLEGAS

Ph.D.(c) en Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE FISICOMECÁNICAS

ESCUELA DE MECÁNICA

INGENIERIA MECÁNICA

BUCARAMANGA

2024

## DEDICATORIA

*Al señor Dios por esta bendición, por darme el don de la sabiduría y el entendimiento habrá de ser dedicado este logro más en mi vida, infinita gratitud por haber cumplido mi promesa personal por fin hecha realidad.*

*A mi familia, principalmente a mis padres Edilson Guevara y Martha Serrano, por ser la luz de mis ojos y el motor de mi vida. A mis hermanos, sobrinas, cuñados y cuñadas. A Jhon, Cristian, Karina quienes estuvieron para mí en los momentos de incertidumbre, alegría y por su apoyo moral y su alegría incondicional.*

*A mi novia Carol Steffanny Rayo G, por su infinito amor, su alegría y apoyo incondicional en toda mi carrera.*

*Al Ingeniero Camilo Ramírez, por su comprensión, respaldo y confianza y por seguir adelante a batallar juntos cuando las cosas se ponían cuesta arriba.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores expresan su agradecimiento a todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron, enormemente a la Universidad Industrial de Santander, a mis profesores, el ingeniero Carlos Borrás Pinilla director, al ingeniero Fabian Díaz Palencia, al Ingeniero Helio Sneyder Esteban Villegas codirector, a la profesora María Rene y a la escuela por creer en mí, por darme la oportunidad de orientarnos, por su colaboración en el desarrollo del proyecto la cual fue muy esencial para cumplir con este.

## DEDICATORIA

*A Dios, por darme la fuerza y la sabiduría necesarias para seguir adelante  
en este camino de aprendizaje.*

*A mi madre, Luz Andrea Acevedo Quitián, quien con su amor incondicional,  
sacrificio y entrega me ha enseñado el verdadero valor de la vida y del  
esfuerzo. Sin su guía y apoyo, este logro no sería posible.*

*A mis abuelos, Luz Ena Quitián y Manuel José Acevedo, por su incomparable  
apoyo, siempre presentes con su cariño y sabiduría, siendo pilares  
fundamentales en mi vida.*

*A mis hermanos, para que nunca dejen de luchar por sus sueños y  
encuentren en el esfuerzo la recompensa de sus anhelos.*

*Y finalmente, a la Universidad Industrial de Santander, por abrirme sus  
puertas, brindándome la oportunidad de crecer académicamente y  
profesionalmente, y por permitirme formar parte de esta gran comunidad.*

## **AGRADECIMIENTOS**

A todos los profesores que me formaron a lo largo de la carrera, gracias por compartir sus conocimientos y contribuir a mi desarrollo profesional. En especial, al profesor Leónidas Vásquez (QEPD), cuya sabiduría dejó una huella imborrable en mi formación académica. A mi padre y a mi tío por enseñarme el arte de la orfebrería, que me sirvió para mi sustentación personal en la fase final de la carrera. Al profesor Helio Sneyder Villegas, por su invaluable asesoría y guía durante este proceso. Al ingeniero Juan Camilo Guevara, por sus lecciones de vida, que me enseñaron más allá del aula y me ayudaron a madurar como persona. Y a mi pareja, Ana Victoria Cristancho, por su compañía constante y su apoyo incondicional en los momentos más difíciles. A todos ellos, mi gratitud eterna.

## CONTENIDO

	pág.
1. EL PROBLEMA DE LA VIBRACION TORSIONAL EN MAQUINAS.....	20
1.1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.....	20
1.2. JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA.....	21
1.3. OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO.....	22
1.3.1. OBJETIVO GENERAL.....	22
1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	22
2. GENERALIDADES DE LA VIBRACIÓN TORSIONAL.....	23
2.1. EQUIPOS EN EL MERCADO.....	23
2.2. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA BÁSICA DE VIBRACIONES DE TORSIÓN....	24
2.2.1. Desarrollo del modelo mecánico.....	24
2.2.2. Vibraciones libres de sistemas discretos lineales de torsión.....	26
2.3. CAUSAS DE LA VIBRACION TORSIONAL.....	27
2.3.1. Giro no uniforme de rotores.....	27
2.3.2. Excitaciones torsionales en motores eléctricos.....	33
2.3.3. Control automático de velocidad.....	35
2.3.4. Vibración torsional por desbalanceo en ejes rotativos horizontales.....	36
2.3.5. Vibración torsional en transmisiones por engranajes.....	38
2.3.6. Vibración torsional en rotores con aspas o cucharas.....	38

2.4.	EFFECTOS NOCIVOS DE LA VIBRACIÓN TORSIONAL.....	39
2.4.1.	Introducción .....	39
2.4.2.	Morfología.....	40
2.5.	ANALISIS DE LA VIBRACION TORSIONAL.....	43
2.5.1.	Importancia de los modelos matemáticos.....	44
2.6.	SISTEMAS DE MEDICION DE LA VIBRACION TORSIONAL .....	45
2.6.1.	Galgas de deformación.....	46
2.6.2.	Sistema que emplea transductores de señal portadora .....	47
2.6.3.	Estructuras de modulación de frecuencia.....	49
2.6.4.	Estructura de modulación de amplitud.....	49
2.6.5.	Conjunto de intervalos laterales y evaluación de frecuencia .....	50
2.6.6.	Evaluación mediante Duraciones Temporales e tiene al inverso, su ángulo al multiplicarlo de forma correspondiente de cada franja, permite determinar la velocidad de giro de cada segmento. ....	54
2.7.	ESTUDIO ANALITICO DE LA VIBRACION TORSIONAL EN MAQUINAS .....	56
2.7.1.	Introducción .....	56
2.7.2.	Métodos generales de cálculo de sistemas de torsión .....	57
2.8.	METODO DE HOLZER.....	62
2.9.	METODO DE LAS MATRICES DE TRANSERENCIA.....	65
3.	MATRIZ DE CALIDAD PARA EL BANCO TORSIONAL (QFD).....	69
3.1.	DESPLIEGUE DE LA FUNCIÓN CALIDAD (QFD).....	69
3.1.1.	Requerimientos de diseño para el motor .....	69

3.1.2.	Requerimientos de diseño para la sujeción de discos .....	71
3.1.3.	Requerimientos de diseño para la sujeción del rotor .....	72
3.2.	ALTERNATIVA GANADORA .....	76
4.	DISEÑO CAD DEL BANCO .....	77
5.	DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL BANCO .....	79
5.1.	DESCRIPCIÓN GENERAL .....	79
5.2.	DISEÑO DEL SISTEMA DE ALIMENTACIÓN Y EXCITACIÓN TORSIONAL....	81
5.2.1.	Fuente de alimentación del banco de vibración torsional .....	82
5.2.2.	Controlador de la fuente de excitación del banco tres componentes sin la necesidad de fuentes de alimentación adicionales.....	83
5.3.	DISEÑO DEL SISTEMA DE MEDICIÓN Y ADQUISICIÓN DE DATOS DEL BANCO DE VIBRACIÓN TORSIONAL .....	86
5.4.	DISEÑO DEL SISTEMA MECÁNICO .....	92
5.4.1.	Descripción .....	92
5.4.2.	Cálculo del diámetro de eje primario y secundario .....	94
5.4.3.	Análisis de velocidades críticas .....	113
5.5.	CALCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LOS MODELOS .....	117
5.5.1.	Cálculo de los parámetros dinámicos de los modelos mecánicos .....	117
5.5.2.	Cálculo de las frecuencias naturales a la torsión de los modelos.....	118
5.5.3.	Cálculo de las frecuencias naturales de los modelos mediante .....	120

6.	SELECCIÓN DE ELEMENTOS .....	122
6.1.	SELECCIÓN ACOPLE .....	122
6.2.	SELECCIÓN DE CHUMACERA .....	122
6.3.	SELECCIÓN DEL MANDRIL.....	123
7.	ANALISIS DE COSTOS DEL BANCO .....	125
8.	EXPERIMENTACIÓN .....	126
8.1.	RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DEL PRIMER ROTOR.....	126
8.1.1.	Funcionamiento cerca de resonancia .....	126
8.1.2.	Funcionamiento en resonancia .....	127
8.1.3.	Funcionamiento fuera de resonancia.....	128
8.2.	RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DEL SEGUNDO MODELO MECÁNICO.....	129
8.2.1.	Funcionamiento cerca de resonancia .....	129
8.2.2.	Funcionamiento en resonancia.....	130
8.2.3.	Funcionamiento fuera de resonancia.....	131
9.	MANUAL DE OPERACIÓN DEL BANCO .....	133
9.1.	OPERACIÓN DEL BANCO DE EXPERIMENTACION .....	133
9.1.1.	Kit de herramientas.....	133
9.1.2.	Conexión del sistema de accionamiento .....	133
9.1.3.	Equipo utilizado .....	134

9.2.	SECUENCIA DE ENCENDIDO Y APAGADO.....	135
9.3.	PROCEDIMIENTO PARA EL CAMBIO DE ROTOR.....	136
9.4.	RECOMENDACIONES PARA LA EXPERIMENTACION.....	137
10.	CONCLUSIONES.....	138
11.	RECOMENDACIONES .....	139
	BIBLIOGRAFIA .....	140
	ANEXOS .....	14041

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. MEVTC.....	22
Figura 2. SD3. ....	22
Figura 3. TM 140. ....	23
Figura 4. Mecanismo real .....	24
Figura 5. Modelo mecánico equivalente de parámetros concentrados .....	25
Figura 6. Sistema torsional empotrado de dos grados de libertad .....	25
Figura 7. Sistema de torsión de dos grados de libertad con extremos libres .....	26
Figura 8. Representación del mecanismo de accionamiento de una máquina .....	27
Figura 9. Diagrama indicado para un compresor alternativo .....	28
Figura 10. Cambio de la presión en el embolo al aumentar el régimen de giro .....	29
Figura 11. Descomposición de la fuerza total sobre el embolo .....	31
Figura 12. Torque efectivo de un motor diesel con distintos combustibles .....	31
Figura 13. Esquema de turbocompresor accionado por un motor síncrono .....	33
Figura 14. Características Par-velocidad de un motor de inducción de arranque por capacitor .....	34
Figura 15. Control de lazo cerrado para una turbina .....	35
Figura 16. Sección transversal de un eje horizontal .....	36
Figura 17. Variación del punto de contacto entre dientes de dos engranajes. ....	37
Figura 18. Pulsos de presión producidos por un ventilador radial .....	38

Figura 19. Esquema S-N (resistencia a la fatiga Vs. Número de ciclos de esfuerzos. ...	39
Figura 20. Morfología de la falla por torsión .....	40
Figura 21. Forma típica de falla para ejes con entalla, sometidos a torsión .....	41
Figura 22. Forma típica de fractura por torsión .....	41
Figura 23. Orientación de una galga extensiométrica en un eje .....	45
Figura 24. Detección de luz en sistemas torsionales .....	47
Figura 25. Identificación de envoltura .....	49
Figura 26. Bandas lateras producidas por vibración torsional .....	52
Figura 27. Elementos que conforman el sistema de medición .....	54
Figura 28. Grafico temporal del sistema de medición .....	54
Figura 29. Sistema torsional empotrado de dos grados de libertad .....	57
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre para J1 .....	58
Figura 31. Diagrama de cuerpo libre para J2 .....	60
Figura 32. Modos de vibración del ejemplo anterior .....	61
Figura 33. Sistema torsional lineal general con extremos libres .....	63
Figura 34. Sistema torsional lineal general con extremo empotrado .....	63
Figura 35. (a) Sistema torsional con parámetros concentrados y (b) Diagrama de cuerpo libre para elemento n-ésimo .....	65
Figura 36. Sistema con tres grados de libertad .....	66
Figura 37. Banco de pruebas .....	77
Figura 38. Descripción de los componente del banco .....	79
Figura 39. Circuito de excitación de vibración torsional .....	80
Figura 40. Motor Aprint asignado por el laboratorio de sistemas dinámicos DIC-BOT ..	82
Figura 41. Esquema básico del BTS7960 .....	83

Figura 42. Esquema de conexión con Arduino .....	84
Figura 43. Sensor óptico de herradura .....	85
Figura 44. Diseño de rueda encoder .....	87
Figura 45. Diseño de la base del sensor.....	88
Figura 46. Circuito integrado 74LS14 .....	89
Figura 47. Vista inferior de la tarjeta electrónica impresa .....	89
Figura 48. Plano intermedio de la tarjeta electrónica impresa .....	89
Figura 49. Vista superior de la tarjeta electrónica impresa .....	90
Figura 50. Circuito de la tarjeta electrónica diseñada .....	90
Figura 51. Diseño final del sistema de adquisición de datos .....	91
Figura 52. Diseño del espécimen torsional .....	92
Figura 53. Plano eje primario .....	94
Figura 54. DCL eje primario .....	97
Figura 55. Cargas en el eje primario .....	100
Figura 56. Diagrama cortante y Momento flector para el eje primario – Plano XY .....	101
Figura 57. DCL eje secundario .....	102
Figura 58. Cargas en eje secundario .....	104
Figura 59. Diagrama cortante y Momento flector para el eje secundario – Plano XY ..	105
Figura 60. Modelo final .....	109
Figura 61. Tolerancias eje-acople .....	110
Figura 62. Modelo eje secundario .....	112
Figura 63. Deformaciones método Rayleigh .....	114
Figura 64. Deformaciones método Dunkerley .....	116

Figura 65. Sistema equivalente de parámetros concentrados .....	118
Figura 66. Primera frecuencia natural del modelo mecanico uno mediante Solidworks .....	120
Figura 67. Primera frecuencia natural del modelo mecanico dos mediante Solidworks .....	120
Figura 68. Acople tipo araña .....	121
Figura 69. Chumacera seleccionada .....	122
Figura 70. Mandril seleccionado.....	123
Figura 71. Banco construido .....	123
Figura 72. Costo del banco de vibraciones torsionales .....	124
Figura 73. Modelo mecánico uno excitado fuera de su primera frecuencia natural .....	125
Figura 74. Modelo mecánico uno excitado en su primera frecuencia natural .....	126
Figura 75. Modelo mecánico uno excitado fuera de su primera frecuencia natural .....	127
Figura 76. Modelo mecánico dos excitado fuera de su primera frecuencia natura.....	128
Figura 77. Modelo mecánico dos excitado en su primera frecuencia natural.....	129
Figura 78. Modelo mecánico dos excitado fuera de su primera frecuencia natura .....	130
Figura 79. Montaje del sistema de adquisición .....	132
Figura 80. Banco de vibraciones.....	133

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Descripción de algunos bancos torsionales existentes.....	22
Tabla 2. Matriz QFD. ....	69
Tabla 3. Matriz QFD. ....	71
Tabla 4. Matriz QFD . ....	72
Tabla 5. Matriz QFD. ....	74
Tabla 6. Descripción de los componentes del banco .....	78
Tabla 7. Características del eje, disco y mandril .....	95
Tabla 8. Torque necesario para mover el sistema .....	96
Tabla 9. Datos del eje primario .....	97
Tabla 10. Datos físicos etapa secundaria .....	102
Tabla 11. Valores de momentos flectores máximos .....	106
Tabla 12. Valores de inercia para cada elemento .....	118
Tabla 13. Frecuencia natural para el modelo mecánico uno .....	119
Tabla 14. Frecuencia natural para el modelo mecánico dos .....	119

**LISTA DE ANEXOS**

pág.

Anexo A. Código Arduino ..... 141

Anexo B. Planos del banco . ..... 144

## RESUMEN

**TITULO:** DESARROLLO DE UN BANCO DE PRUEBAS DE VIBRACIONES MECÁNICAS TORSIONALES QUE PERMITA VALIDAR LOS CÁLCULOS OBTENIDOS POR EL MÉTODO HOLZER, COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL LABORATORIO DE SISTEMAS DINÁMICOS\*

**AUTORES:** CAMILO ANDRES RAMÍREZ ACEVEDO Y JUAN CAMILO GUEVARA SERRANO\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Vibración, torsional, banco de pruebas y resonancia.

### DESCRIPCIÓN:

En la actualidad, la evaluación del comportamiento dinámico de estructuras sometidas a cargas torsionales es crucial en sectores como la automotriz, construcción y metalurgia. Estas industrias enfrentan problemas relacionados con el desgaste y las vibraciones en equipos expuestos a tales cargas. Los ejes y barras en mecanismos giratorios experimentan vibraciones torsionales durante arranques, paradas y operaciones a velocidades variables. Por lo tanto, es esencial realizar análisis detallados para mitigar los riesgos asociados a las vibraciones torsionales. Las estrategias de diseño y mantenimiento deben enfocarse en prevenir resonancias indeseadas y garantizar la integridad estructural de los componentes, para evitar fallas catastróficas que podrían resultar en costos significativos y riesgos operativos. Esto incluye el uso de bancos de pruebas, materiales adecuados, el diseño de amortiguadores y la implementación de sistemas de monitoreo que detecten vibraciones anormales, asegurando así un funcionamiento seguro y eficiente de los mecanismos giratorios.

---

\* Trabajo de grado.

\*\* Facultad de Ingeniería Físicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Carlos Borrás. Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica.

## ABSTRACT

**TITLE:** DEVELOPMENT OF A TORSIONAL MECHANICAL VIBRATION TEST BENCH THAT ALLOWS THE VALIDATION OF THE CALCULATIONS OBTAINED BY THE HOLZER METHOD, AS A DIDACTIC TOOL FOR THE DYNAMIC SYSTEMS LABORATORY\*

**AUTHORS:** CAMILO ANDRES RAMÍREZ ACEVEDO Y JUAN CAMILO GUEVARA SERRANO\*\*

**KEYWORDS:** Vibration, torsional, test bench y resonance.

### DESCRIPTION:

Currently, evaluating the dynamic behavior of structures subjected to torsional loads is crucial in sectors such as automotive, construction, and metallurgy. These industries face challenges related to wear and vibrations in equipment exposed to such loads. Shafts and bars in rotating mechanisms experience torsional vibrations during starts, stops, and operations at varying speeds. Therefore, it is essential to conduct detailed analyses to mitigate the risks associated with torsional vibrations. Design and maintenance strategies should focus on preventing unwanted resonances and ensuring the structural integrity of components to avoid catastrophic failures that could result in significant costs and operational risks. This includes using test benches, appropriate materials, designing dampers, and implementing monitoring systems to detect abnormal vibrations, thus ensuring the safe and efficient operation of rotating mechanisms.

---

\* Degree work.

\*\* Faculty of Physicomechanical Engineering. School of Mechanical Engineering. Director: Carlos Borrás. Doctor of Science in Mechanical Engineering.

# 1. EL PROBLEMA DE LA VIBRACION TORSIONAL EN MAQUINAS

## 1.1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad, diversas aplicaciones en los sectores mecánico y civil requieren una evaluación detallada del comportamiento dinámico de estructuras sometidas a cargas torsionales. Industrias como la automotriz, construcción y metalurgia enfrentan desafíos asociados al desgaste y vibraciones en equipos y herramientas que están expuestos diariamente a dichas cargas.

Los ejes y barras en mecanismos giratorios experimentan vibraciones torsionales en situaciones como arranques, paradas y operaciones a velocidades variables. Cuando estas vibraciones alcanzan niveles críticos y se acercan a las frecuencias naturales torsionales de una máquina, las amplitudes pueden volverse peligrosas, pudiendo provocar con el tiempo fallas por fatiga en los componentes, especialmente en ejes dentro de cubiertas o acoplamientos.

Una fractura en el eje es causada debido a las vibraciones que el componente experimenta y las cargas a los cuales el mismo fue sometido. Cuando existe una fractura en el eje, este puede romperse completamente con el tiempo y afectar gravemente el mecanismo en general. Estos casos de fallas por fractura se ven usualmente reflejados en torques constantes aplicados a máquinas por un motor eléctrico. Estos cambios en el torque se producen ya sea por resonancia torsional, cargas reversas o características propias del mecanismo. Cuando se da por resonancia torsional se le atribuye a que la frecuencia del torque presente alcanza la misma magnitud que la frecuencia polar natural del sistema. El resultado es un contragiro del eje sobre su coordenada central.

## 1.2. JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA

En aras de incentivar el conocimiento de las vibraciones mecánicas torsionales y al mismo tiempo cumplir con la misión de la Universidad Industrial de Santander de formar profesionales altamente capacitados en el campo de la tecnología y la innovación, capaces de contribuir al desarrollo económico, social y ambiental del país mediante la investigación y el desarrollo de soluciones tecnológicas innovadoras y sostenibles, se pretende familiarizar al estudiante acerca del modelado y estudio de vibraciones torsionales en ejes y facilitar la caracterización de las propiedades dinámicas involucradas en estos estudios.

En la Universidad Industrial de Santander se han realizado algunos trabajos de investigación en el área de las vibraciones mecánicas, en los cuales se ha recopilado información sobre algunas de las causas de excitación de vibración torsional, los métodos de eliminación y amortiguación de la misma y se han construido bancos didácticos donde se puede excitar la vibración torsional en un rotor y visualizar la existencia del fenómeno mediante una señal de voltaje en forma de tren de pulsos generada desde un disco con muescas o ranuras, cuya frecuencia permanece constante cuando la velocidad de rotación del rotor es constante y es oscilante cuando se excita la vibración torsional, presentándose así una modulación por frecuencia de la señal vibratoria. Con este proyecto de grado se quiere diseñar y construir un banco de ensayos de vibraciones mecánicas torsionales con fines educativos y así proporcionar una herramienta para el laboratorio de sistemas dinámicos de la Universidad Industrial de Santander, para que los estudiantes tengan la oportunidad de explorar y profundizar en el campo de las vibraciones mecánicas, fomentando su interés y comprensión de este fenómeno. Y así contribuir con el objetivo de desarrollo sostenible número cuatro, de contribuir a una educación de calidad y promover oportunidades de aprendizaje para todas y todos.

### **1.3. OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO**

#### **1.3.1. OBJETIVO GENERAL**

Desarrollar un banco de pruebas de vibraciones mecánicas torsionales que permita validar los cálculos obtenidos por el método Holzer, como herramienta didáctica para el laboratorio de sistemas dinámicos.

#### **1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Diseñar un banco de vibraciones torsionales de doble disco con eje central intercambiable para su estudio, que permita variar las condiciones iniciales de operación, componentes del sistema y adquirir datos en tiempo real.
- Construir un banco de vibraciones torsionales utilizando los componentes e instrumentación necesaria para inducir la vibración y medirla mediante un sistema de adquisición de datos.
- Validar experimentalmente los parámetros del banco diseñado y construido mediante análisis modal de frecuencia natural por medio de barrido sinusoidal de frecuencia y comparación con el respectivo análisis del modelo analítico por el método Holzer.
- Generar un manual de operación que explique el procedimiento, funcionamiento y la interpretación de datos del banco de pruebas para determinar la frecuencia natural de vibración torsional del sistema.



## 2. GENERALIDADES DE LA VIBRACIÓN TORSIONAL

### 2.1. EQUIPOS EN EL MERCADO

Recientemente diversos estudios buscan establecer los efectos y las causas de las vibraciones torsionales en diferentes aplicaciones mecánicas que las afecta. Utilizando herramientas para buscar información en bases de datos como Scopus, Web of Science y Google Scholar se pudo constatar la existencia de un creciente interés por investigar aplicaciones útiles en la industria donde se pueden estudiar las vibraciones torsionales.

En la actualidad se pueden adquirir distintos tipos de bancos de vibraciones torsionales libres y amortiguadas en el mercado, con fines didácticos y de enseñanza del fenómeno

Tabla 1. Descripción de algunos bancos de vibraciones torsionales existentes.

Bancos de Vibraciones		
Marca	Imagen	Descripción
EDIBON	 Figura 1. MEVTC.	Está diseñado para el estudio de la torsión, rigidez torsional y el comportamiento con uno, dos o tres discos de inercia.
Armfield	 Figura 2. SD3.	Esta unidad montada en sobremesa se utiliza para estudiar la torsión y la vibración torsional.

GUNT	 <p data-bbox="581 472 831 506">Figura 3. TM 140.</p>	<p data-bbox="1036 247 1458 556">Generar vibraciones torsionales libres y forzadas y analizar los efectos de la rigidez a la torsión, la masa y la amortiguación sobre la frecuencia y la amplitud</p>
------	--	--

Fuente. Los autores

## 2.2. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA BÁSICA DE VIBRACIONES DE TORSIÓN

Históricamente las vibraciones de torsión fueron el primer campo de investigación dinámica en máquinas, pues las primeras fueron reciprocantes, cuyo problema básico es debido a la no uniformidad de la transmisión del movimiento del émbolo al giro del cigüeñal, y a la no uniformidad de la presión del medio de trabajo sobre el émbolo. El estudio dinámico de las vibraciones tuvo que ser teórico, porque no existía ningún método práctico de medición. Se desarrolló una gran cantidad de métodos matemáticos para la determinación analítica y numérica de las frecuencias naturales (o frecuencias de resonancia), que demostraron ser muy efectivos, pero limitados a la calidad del modelo utilizado. El modelo, es en buena parte resultado de un estudio empírico, es decir, basado en observaciones y suposiciones simples. Estas simplificaciones eran válidas siempre y cuando no se emplearan valores cercanos a los valores críticos de la resistencia del material del eje.

**2.2.1. Desarrollo del modelo mecánico** Cualquier sistema dinámico, por complejo que sea es necesario y posible reducirlo a un modelo mecánico más simple, es decir, con un mínimo de parámetros calculables y medibles, que permita estudiar su comportamiento

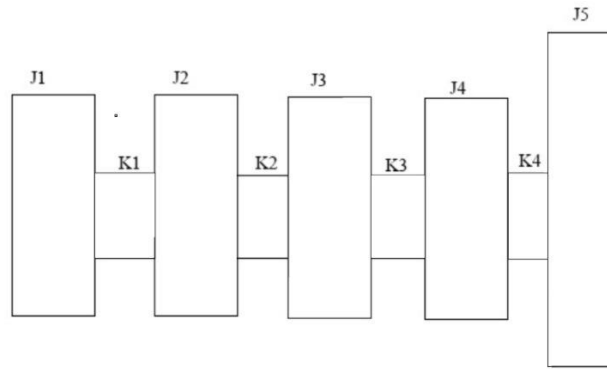
más fácilmente. Para ello se supone un modelo lineal con parámetros constantes, el cual debe ser discreto. Esto lleva a un análisis matemático relativamente sencillo de sistemas simultáneos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y reológicas, para las cuales ya existen métodos de solución muy eficientes. Si se supone un sistema que consta de masas discretas, con momento de inercia  $J$ , y resortes de torsión una rigidez  $K$ , se pueden definir unos modelos estándares a los cuales se dejan reducir todos los sistemas de torsión. En las figuras 4 y 5 se puede observar cualitativamente esta reducción para un motor de combustión interna.

Figura 4. Mecanismo real.



[Consultado el 1, octubre, 2024]. Disponible en Internet:  
<https://www.club.autodoc.es/magazin/biela-del-motor-funciones-y-problemas>

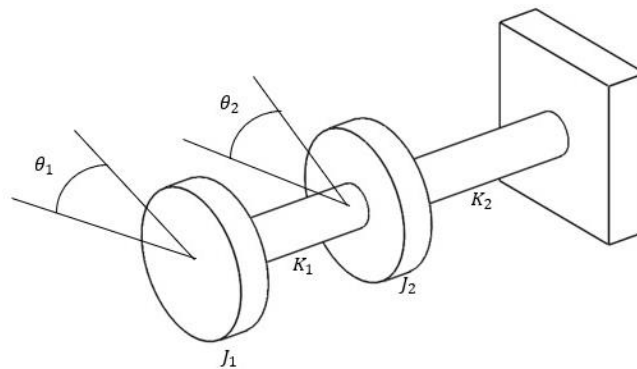
Figura 5. Modelo mecánico equivalente de parámetros concentrados.



Fuente. Los autores.

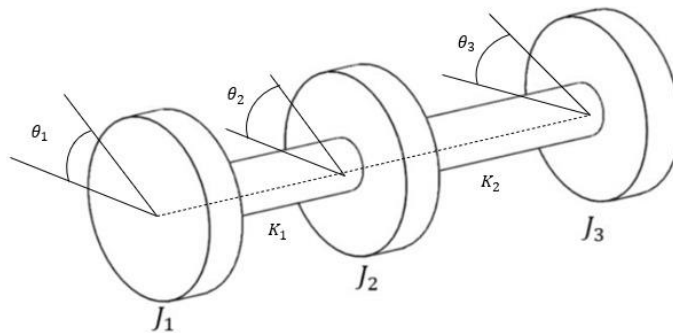
**2.2.2. Vibraciones libres de sistemas discretos lineales de torsión** Las máquinas, generalmente tienen una amortiguación baja, es decir, las frecuencias naturales se pueden calcular despreciando la amortiguación y teniendo en cuenta solamente las rigideces y momentos de inercia del sistema mecánico. De tal cálculo se obtienen también los modos naturales de vibración, lo cual permite sacar conclusiones importantes sobre la interacción entre las frecuencias naturales. Para caracterizar el comportamiento de modelos mecánicos de  $n$  grados de libertad, es muchas veces suficiente estudiar las vibraciones de torsión del “modelo mínimo” de dos grados de libertad. En sistemas de transmisión se distinguen modelos empotrados y modelos libres. En las figuras 6 y 7 se pueden apreciar. Donde  $\theta$  es el ángulo de torsión.

Figura 6. Sistema torsional empotrado de dos grados de libertad.



Fuente. Los autores.

Figura 7. Sistema de torsión de dos grados de libertad con extremos libres.



Fuente. Los autores

## 2.3. CAUSAS DE LA VIBRACION TORSIONAL

**2.3.1. Giro no uniforme de rotores** Una causa de las vibraciones de torsión en máquinas reciprocantes se debe al giro no uniforme del cigüeñal provocado por dos efectos:

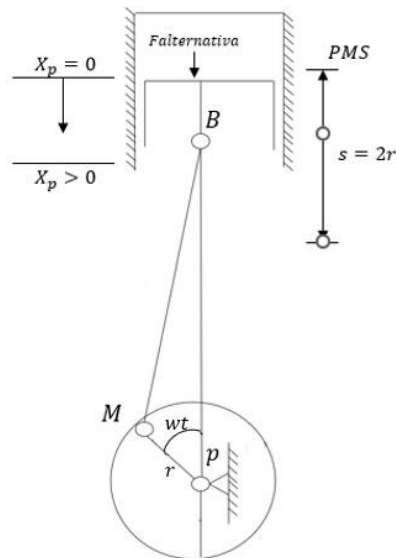
- La cinética del mecanismo: La transformación del movimiento recíprocante del pistón al movimiento rotativo del cigüeñal genera un par inercial oscilatorio sobre este último causando aceleraciones angulares en su giro. En la figura 8,  $r$  corresponde a la longitud de la manivela,  $L$  a la longitud de la biela,  $X_p$  al desplazamiento del émbolo,  $m_{osc}$  a la masa oscilatoria del mecanismo y  $\omega$  a la velocidad angular. Mediante el análisis cinemático correspondiente al mecanismo anterior, se obtiene la expresión para el torque que viene dado por:

$$T = \frac{1}{2} m_{osc} * w^2 r^2 \left[ \frac{r}{2l} \text{Sen}(wt) - \text{Sen}(2wt) - \frac{3r}{2l} \text{Sen}(3wt) \right] \quad (1)$$

$$T(t) = T \left( t + \frac{2\pi}{n} \right) = (T + t) \quad (2)$$

En donde  $T$  es el período y  $n$  la velocidad del cigüeñal.

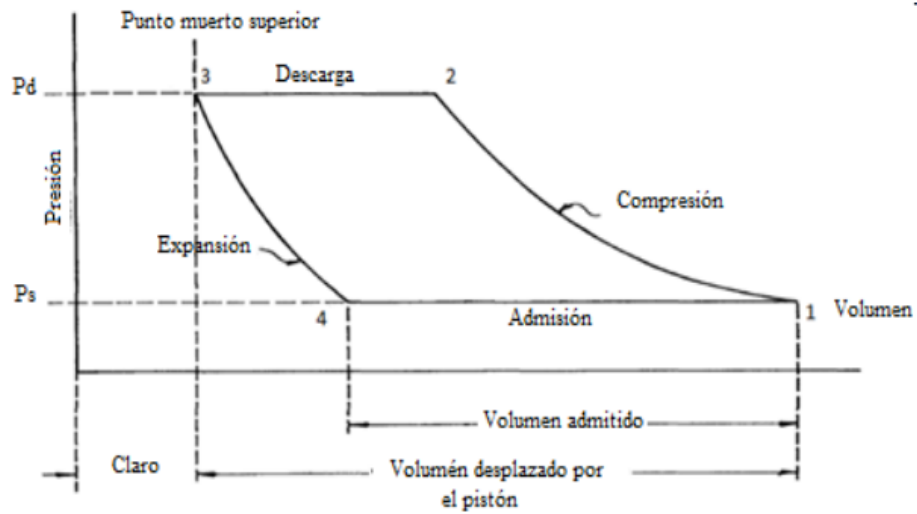
Figura 8. Representación del mecanismo de accionamiento de una máquina.



Fuente. Los autores.

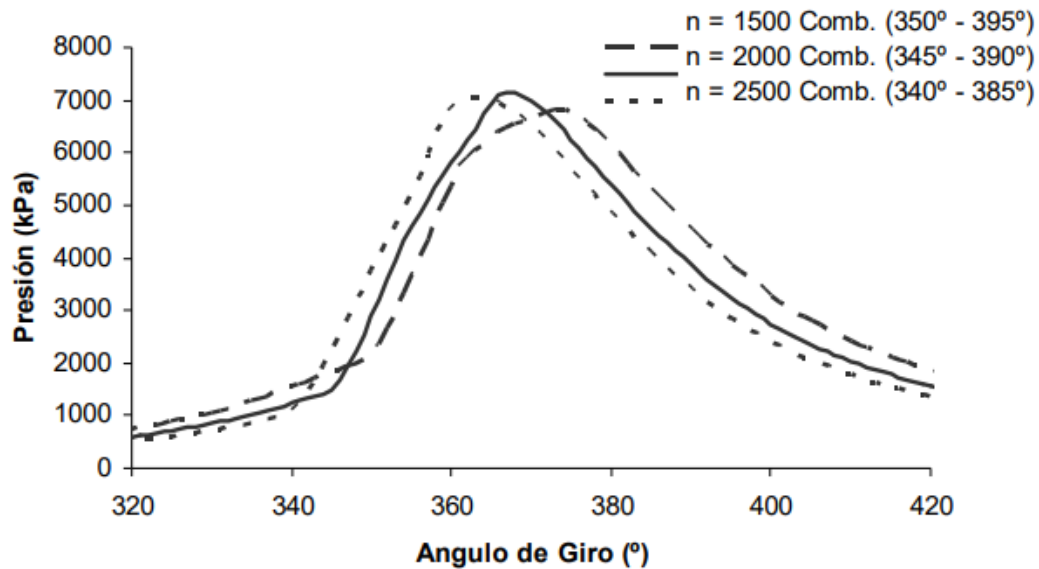
- Fuerzas variables del medio de trabajo que actúan sobre el émbolo: En general en las máquinas reciprocantes la presión  $P$  que actúa sobre el émbolo varía con la posición angular de la manivela durante el ciclo de trabajo. En la figura 9 se muestra la variación de la presión para un compresor una función del volumen y la figura 10 muestra la variación de la presión para un motor en función del régimen de giro.

Figura 9. Diagrama indicado para un compresor alternativo



Fuente. CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM. (18: 2012, Septiembre, 19-21, septiembre: Guanajuato, México). *Diseño de un compresor recíprocante para una macropera autosustentable*. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2012, 193 p.

Figura 10. Cambio de la presión en el embolo al aumentar el régimen de giro.



Fuente. CONGRESO IBEROAMERICANO DE INGENIERIA MECANICA. (8: 2007, Octubre, 23-25, octubre: Cusco, Perú). *Modelo termodinámico del ciclo de trabajo de los motores de encendido por compresión*. Mérida: Universidad de los Andes, 2001, 472 p.

La presión viene dada como:

$$P(\phi) = P(\omega t) = P\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \quad (3)$$

Para máquinas de dos carreras

$$P(\phi) = P(\omega t) = P\left(t + \frac{4\pi}{n}\right) \quad (4)$$

Para máquina de cuatro carreras

La fuerza producida por el medio de trabajo es:

$$F_{medio} = [P(\phi) - P_o] * A_p \quad (5)$$

$$F_{medio} = F_{medio}(\phi + k\pi) \quad (6)$$

$k = 2$  para dos carreras,  $k = 4$  para cuatro carreras.

$A_p$  : Área transversal del pistón.

$P_o$  : Contrapresión debajo del émbolo.

La sumatoria de estas dos fuerzas; la fuerza oscilatoria de inercia y la fuerza del medio de trabajo da como resultado la fuerza total sobre el émbolo  $F_T$ .

$$F_T = F_{med}(\phi + k\pi) + F_{alt}(\phi + 2\pi) = Fk(\phi) = Fk(\phi + k\pi) \quad (7)$$

La fuerza  $F_T$  se descompone, como se muestra en a Figura 11, en la fuerza  $F_n$  normal a la pared del cilindro, y la fuerza  $F_b$  en dirección de la biela. Al llegar  $F_b$  al muñón, se descompone en  $F_u$  y  $F_r$ , siendo  $F_u$  la encargada de producir el torque sobre el cigüeñal.

$$F_b = \frac{F_T}{\cos\beta} = Fb(\phi + k\pi) \quad (8)$$

$$F_u = F_b * \cos(\phi + \beta) \quad (9)$$

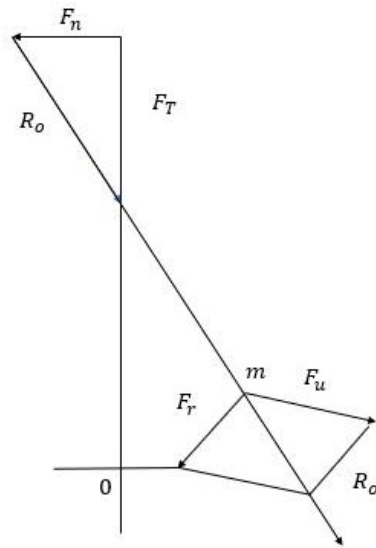
$$\beta = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{r}{L}\text{Sen}\phi\right) = \beta(\phi) \quad (10)$$

$$F_u = fu(\phi) \quad (11)$$

El torque sobre el cigüeñal es:

$$TT = F_u * r = T(\phi) = T(\phi + k\pi) \quad (12)$$

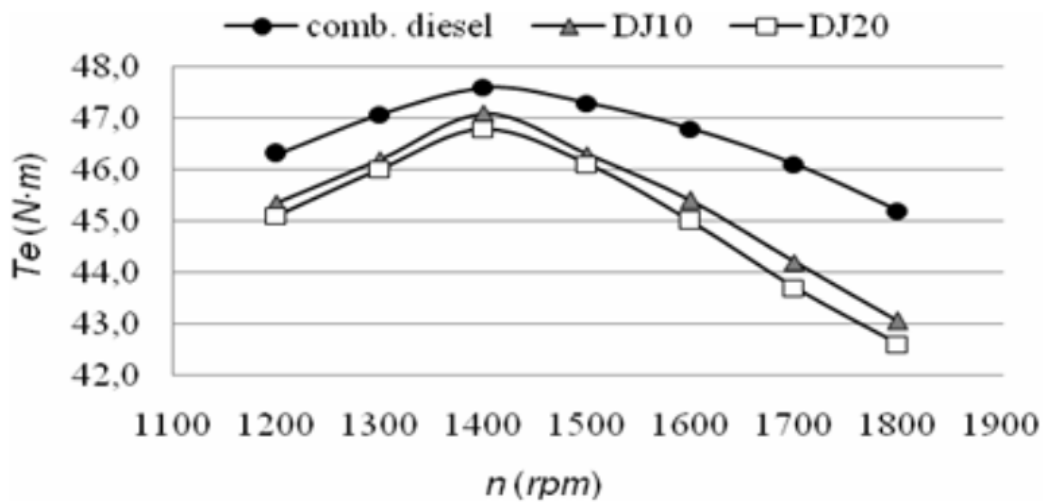
Figura 11. Descomposición de la fuerza total sobre el émbolo



Fuente. Los autores

En resumen, el torque sobre el cigüeñal es periódico con componentes armónicas y puede excitar vibraciones torsionales en el sistema del cual hace parte. El comportamiento cualitativo del torque se representa en la Figura 12.

Figura 12. Torque efectivo de un motor diésel con distintos combustibles.



Fuente. Ingeniería Energética [en Línea]. La Habana: Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae. 2013-. [Fecha de consulta: 1 octubre 2024]. Disponible en: [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1815-59012013000300003](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59012013000300003)

**2.3.2. Excitaciones torsionales en motores eléctricos** Los motores síncronos de polos salientes utilizados para altas potencias debido a su alta eficiencia, generan un torque oscilante durante el arranque cuya frecuencia es igual a dos veces la frecuencia de deslizamiento varía desde la frecuencia de la línea (a velocidad cero) hasta cero (a la velocidad de sincronismo), fuertes excitaciones torsionales (se ha llegado a medir pulsaciones de cinco veces el torque promedio de trabajo) pueden afectar el sistema mecánico durante este período a frecuencias que van desde 120 Hz (si la frecuencia de la línea de alimentación es de 60 Hz) hasta cero Hz; de este modo cualquier frecuencia natural a la torsión que se encuentre dentro de este rango será excitada durante el arranque. La frecuencia de excitación durante el arranque, en términos de la velocidad del motor es:

$$f_e = 2f \left( \frac{N_s - N}{N_s} \right) \quad (13)$$

En donde:

$f$  : Frecuencia de excitación.

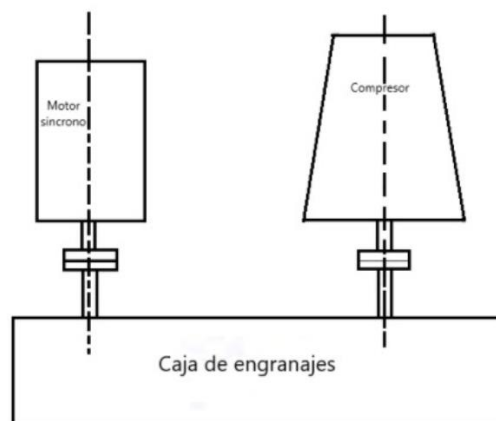
$f'$  : Frecuencia de la línea de voltaje (60 Hz en Colombia).

$N_s$  : Velocidad de sincronismo de motor (Normalmente 1200 o 1800 rpm).

$N$  : Velocidad del motor en un determinado instante del arranque

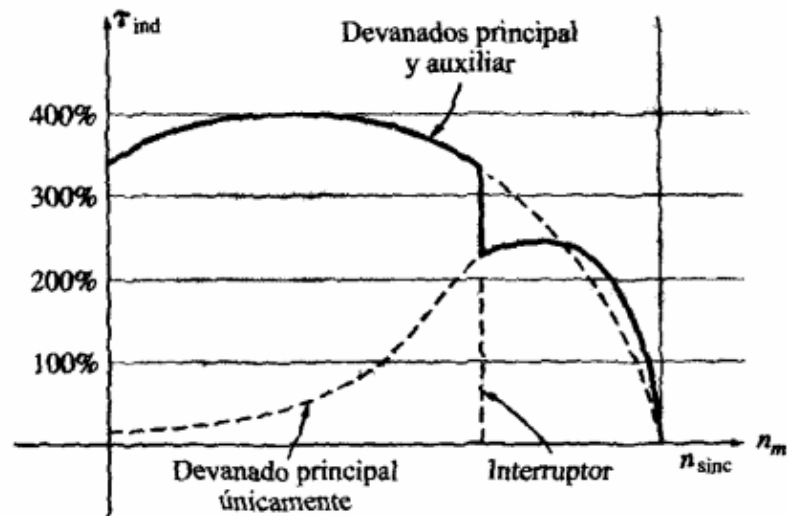
Este tipo de excitación actúa en sistemas mecánicos los cuales tienen una o más frecuencias naturales dentro del rango de excitación; tal es el caso de turbomaquinaria como compresores centrífugos o axiales y ventiladores de grandes potencias (5000 HP o más) accionados mediante motores síncronos donde la conexión se realiza a través de un tren de engranajes helicoidales de ejes paralelos. En la Figura 13 se ilustra una construcción típica de estos sistemas y en la Figura 14 el comportamiento cualitativo de la velocidad de arranque. Cada componente del sistema (motor, tren de conducción, turbomáquina) participa en la vibración torsional como una sola inercia rígida que oscila en contra de las demás inercias del sistema. Otra máquina eléctrica que presenta excitaciones torsionales es el motor monofásico de corriente alterna. El par de torsión originado por este tipo de motor es una función armónica con el doble de frecuencia de la línea de alimentación. No se profundizó sobre ellos, ya que son motores que manejan baja potencia y su aplicación industrial es limitada.

Figura 13. Esquema de turbocompresor accionado por un motor síncrono.



Fuente. Los autores.

Figura 14. Características par-velocidad de un motor de inducción de arranque por capacitor.

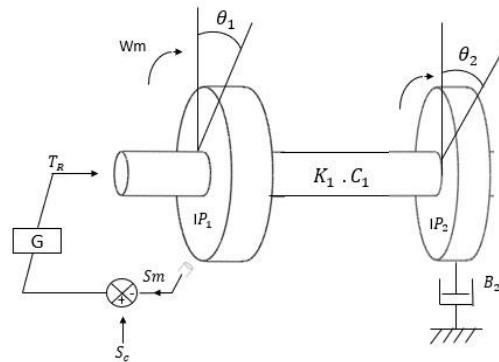


SALVATORI ARTEZAN, Marco. Diseño de un control de velocidad para motores de inducción por relación voltaje/frecuencia [en línea]. Tesis de grado. Universidad de las Américas Puebla, 2003. [Consultado 1 octubre 2024]. Disponible en [https://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lep/salvatori\\_a\\_m/capitulo3.pdf](https://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lep/salvatori_a_m/capitulo3.pdf)

**2.3.3. Control automático de velocidad** Los sistemas mecánicos con control automático de velocidad de lazo cerrado, como el utilizado en helicópteros o sistemas de generación eléctrica de frecuencia constante, pueden presentar inestabilidad torsional (oscilaciones en la velocidad del sistema mecánico inducidas por el sistema de control) por la naturaleza misma de este tipo de control. La Figura 15 muestra un esquema de control de velocidad de lazo cerrado para un sistema de generación de potencia de turbina, en el cual el sensor de velocidad C genera continuamente una señal  $S_m$  proporcional a la velocidad del sistema mecánico  $\omega_m$ . Esta señal se compara con una señal de comando  $S_c$  preestablecida, y de la comparación se produce una señal de error  $S_e$ , utilizada para controlar el suministro de energía al sistema mecánico desde el gobernador G. Cuando en la máquina se presenta una variación de la velocidad (debido a una variación en el torque de carga o en la señal de comando) se inducen oscilaciones en todo el sistema. Si la velocidad del sistema mecánico disminuye, la señal de error

aumentará positivamente y el sistema de control entregará más energía al sistema mecánico, por ejemplo aumentando el flujo de combustible a la máquina motriz, que se manifiesta en un aumento de velocidad; este aumento de velocidad tenderá a sobre pasar el valor preestablecido por lo que el error se hará negativo, disminuyendo ahora el flujo de combustible y por tanto la velocidad tenderá entonces a disminuir; presentándose de esta forma una oscilación en el torque motriz y en la velocidad hasta cuando el sistema se estabilice nuevamente. Esta oscilación en el torque de la máquina motriz puede llegar a tener una frecuencia igual o cercana a algunas de las frecuencias naturales de la torsión del sistema y excitar de este modo la resonancia torsional.

Figura 15. Control de lazo cerrado para una turbina



Fuente. Los autores.

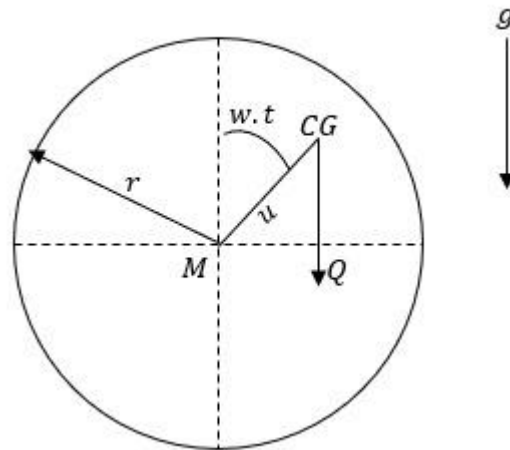
**2.3.4. Vibración torsional por desbalanceo en ejes rotativos horizontales** Debido al desbalanceo se adiciona un par torsional variable  $Td$  al momento suministrado por la máquina motriz  $Ts$ .

$$Td = Q * U * Sen(wt) \quad (13)$$

El par resultante es:

$$T_{res} = T_s + T_d \quad (14)$$

Figura 16. Sección transversal de un eje horizontal.



Fuente. Los autores.

Donde

$u$  : es la excentricidad

$Q$  : es el peso

$M$  : es el centro de giro

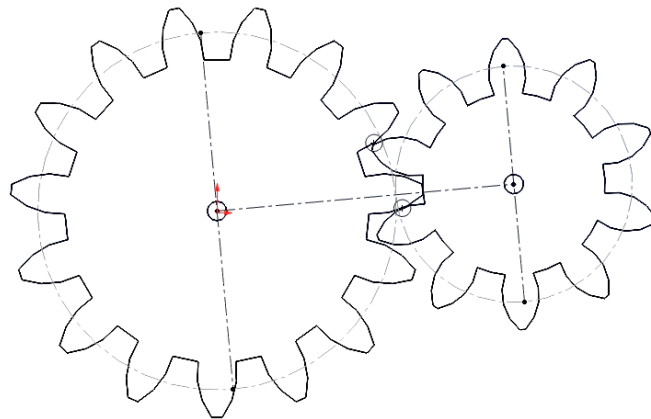
$g$  : es la gravedad

$r$  : es el radio del rotor

El par torsional  $T_d$  acelera o frena el movimiento rotacional dependiendo de la posición del centro de gravedad CG. La frecuencia de esta excitación es igual a la frecuencia de giro del rotor.

**2.3.5. Vibración torsional en transmisiones por engranajes** Las excitaciones torsionales en engranajes son debidas principalmente a la variación del radio de aplicación de la carga y al cambio de rigidez del diente (viga empotrada de sección variable), ya que la aplicación de la carga (línea de contacto) varia a medida que se realiza el movimiento relativo entre cada par de dientes engranados a lo largo de la línea de presión. Ver Figura 17. En engranajes rectos se presenta esta excitación torsional debido a la discontinuidad de la aplicación de la carga y su frecuencia es igual al número de dientes que entran en contacto por segundo.

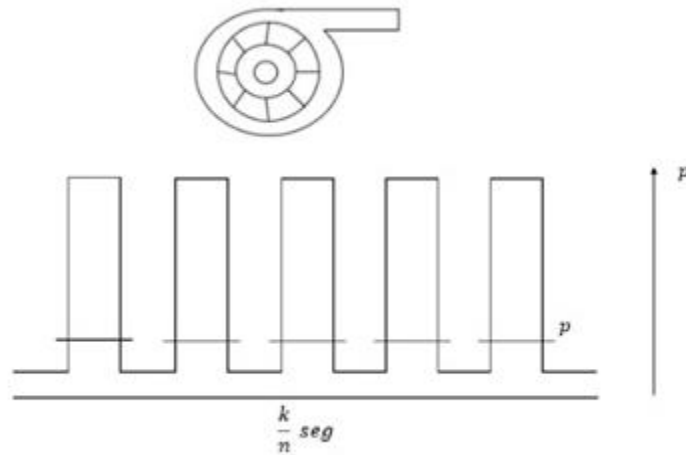
Figura 17. Variación del punto de contacto entre dientes de dos engranajes.



Fuente. Los autores.

**2.3.6. Vibración torsional en rotores con aspas o cucharas** Los rotores que en su accionamiento o en su carga reciben fuerzas variables ya sea debido a presiones pulsantes (ventiladores radiales) o impulsos (turbina Pelton), se encuentran sometidos a excitaciones torsionales de frecuencia fundamental igual al número de aspas que pasa en un segundo. La Figura 18 presenta el comportamiento de la presión en un ventilador.

Figura 18. Pulsos de presión producidos por un ventilador radial.

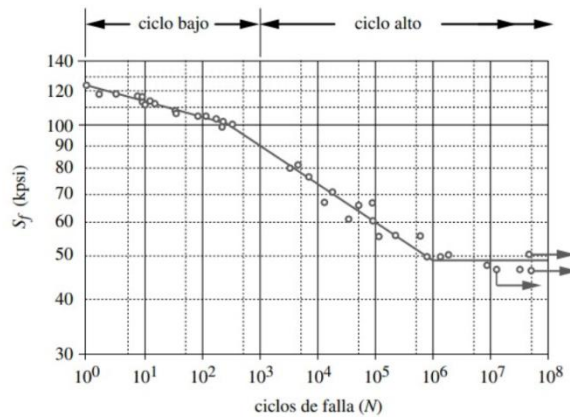


Fuente. Los autores.

## 2.4. EFECTOS NOCIVOS DE LA VIBRACIÓN TORSIONAL

**2.4.1. Introducción** En el caso de las vibraciones torsionales de una gran amplitud, la posible falla debida a la fatiga que sufre el material, es decir, por los intensos esfuerzos variables que soporta la pieza cuando está en o muy cerca de la resonancia, en donde los esfuerzos y las deformaciones son muy grandes. La Figura 19, muestra la gráfica S-N (resistencia a la fatiga Vs. número de ciclos de esfuerzos), el cual es específico para cada tipo de material.

Figura 19. Esquemática S-N (resistencia a la fatiga Vs. número de ciclos de esfuerzos).



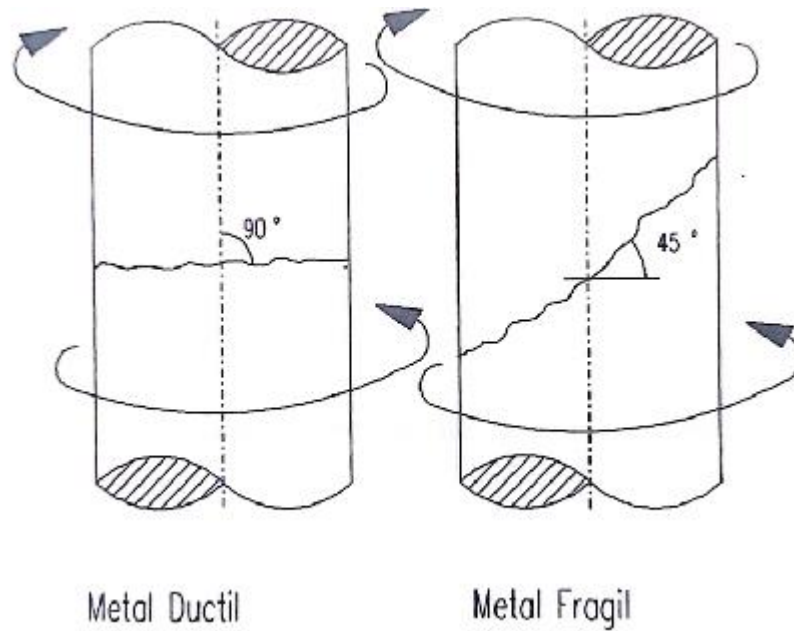
Fuente. Diseño de elementos de máquinas de Robert Norton, 2011.

Los materiales pueden ceder a un esfuerzo unitario inclusive menor que el esfuerzo elástico límite cuando la carga se repite un número suficiente de veces.

Con base en la Figura 19, se concluye que una pieza puede fallar, aún en presencia de vibraciones torsionales, si el esfuerzo está por debajo del límite de la fatiga. Sin embargo, si el eje entra en resonancia, las grandes deformaciones torsionales incrementan los esfuerzos, haciendo que se presenten fallas por fatiga. Esto implica que no se debe estar cerca de ninguna resonancia.

**2.4.2. Morfología de la falla por torsión** Las roturas por esfuerzos de torsión alternos tienen una configuración que depende de varios parámetros: tipo de material, entalladuras, etc. Si el metal es dúctil -acero dulce, por ejemplo- la falla ocurre en la sección perpendicular al eje sobre el cual actúa la torsión. Si el metal es frágil, como el acero templado, fundición, la fractura tiene una forma helicoidal aproximadamente a 45° en dirección al eje sobre el cual actúa la torsión. Esto en ejes de sección circular. Ver Figura 20.

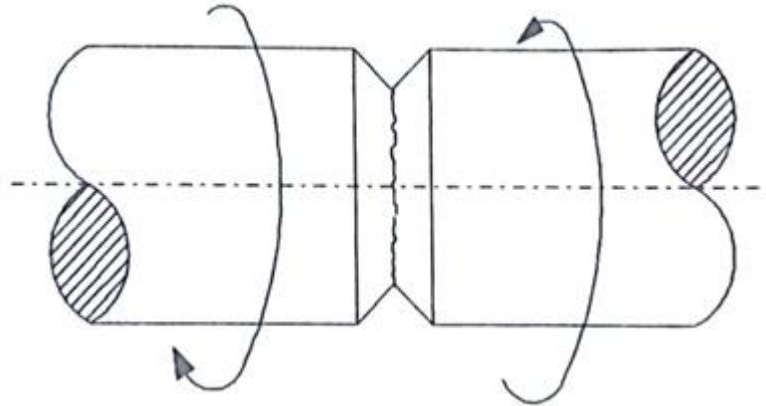
Figura 20. Morfología de la falla por torsión.



Fuente. Análisis de vibración torsional en máquinas de Alfonso Castro y Carlos Borrás, 1995.

Como en la torsión el esfuerzo máximo se da en la fibra más alejada del centro (en piezas de sección circular), por lo general el inicio de la falla se da en la superficie del eje o pieza. Como puede observarse en la Figura 21, cuando el eje tiene un cuello o entalladura, la falla ocurre en la entalla.

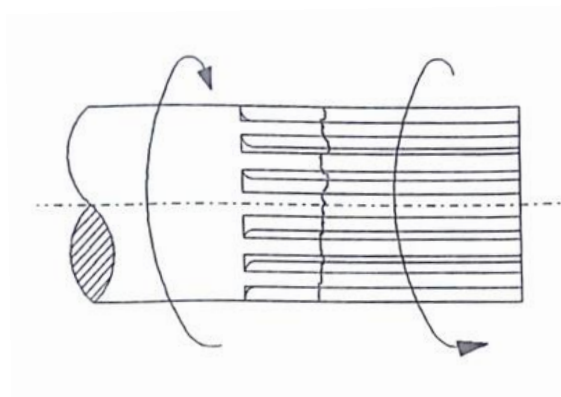
Figura 21. Forma típica de falla para ejes con entalla, sometidos a torsión.



Fuente. Fuente. Análisis de vibración torsional en máquinas de Alfonso Castro y Carlos Borrás, 1995.

Si el eje tiene entallas longitudinales -por ejemplo ejes estriados- la falla de torsión es radial y con un aspecto de fresa o dentado frontal. Ver Figura 22.

Figura 22. Forma típica de fractura por torsión.



Fuente. Análisis de vibración torsional en máquinas de Alfonso Castro y Carlos Borrás, 1995.

Puede presentar características tan diferentes que es difícil y a veces imposible identificar el origen de la falla solo con base en su observación, aún para una persona con experiencia. Un camino seguro para saber si una pieza ha fallado por torsión es un control dinámico. El control dinámico se hace con base en un cálculo teórico relativamente sencillo: se determinan para un modelo mecánico simplificado las frecuencias naturales y éstas se comparan con las frecuencias de excitación existentes en el sistema torsional – las cuales deben estar suficiente lejos de las frecuencias naturales, o brevemente.

$$jW \neq w_k \quad \therefore \quad j = 1,2,3, \dots \quad k = 0,1,2, \dots$$

## 2.5. ANALISIS DE LA VIBRACION TORSIONAL

La vibración torsional puede ser un problema en trenes de transmisión donde se conectan varias máquinas rotativas mediante ejes de transmisión y acoples. Los problemas aparecen cuando las frecuencias naturales a la torsión del sistema son excitadas por torques oscilantes con componentes de frecuencia cercana a estas frecuencias naturales, o cuando se produce inestabilidad torsional en sistemas con control automático de velocidad. Para el análisis de vibración torsional de un sistema se requiere determinar las frecuencias naturales a la torsión de dicho sistema y la frecuencia de todas las fuentes de excitación que se presenten en el sistema real. El análisis continuo con la comparación de la frecuencia de las fuentes de excitación torsional que actúan sobre el sistema con cada una de las frecuencias naturales a la torsión previamente calculadas, observando el grado de proximidad entre éstas. Lo anterior permite determinar el grado de resonancia a la torsión existente en el sistema para así actuar sobre el problema. Para

la determinación de las frecuencias naturales es necesario reducir el sistema real a un modelo mecánico y mediante análisis matemáticas relativamente sencillos de sistemas simultáneos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se calcula dichas frecuencias. Después de realizarse el anterior estudio y si se ha concluido que el sistema real puede presentar oscilaciones torsionales la solución puede darse mediante alguno o varios de los siguientes métodos:

- Variación de las frecuencias naturales de torsión del sistema: Esto se logra cambiando la rigidez torsional de los ejes (variando diámetros o longitudes) o variando las inercias del sistema, o realizando ambas cosas.
- Variación de la frecuencia de excitación: Esto es posible mediante la variación rango de velocidad angular de operación o cambiando la maquina motriz según sea la causa. El trabajo que se puede hacer para tratar de disminuir las amplitudes de excitación pequeñas puede excitar amplitudes de vibraciones inaceptables.

Al dificultarse la aplicación de las anteriores alternativas se deben utilizar los métodos de eliminación y amortiguación de los cuales no se hablará en este proyecto.

**2.5.1. Importancia de los modelos matemáticos** Todo sistema mecánico real por complejo que sea puede reducirse a un modelo mecánico más simple y con un mínimo de parámetros calculables y medirles que permitan estudiar con su comportamiento más fácilmente para él se supone un modelo matemático lineal con parámetros constantes el cual debe ser discreto (sistema parámetros concentrados). Como se mencionó antes, en el análisis de un problema de vibración torsional se necesita determinar las frecuencias naturales del sistema afectado para compararlas con las frecuencias de excitación. Actualmente existen métodos computacionales eficientes para el cálculo de estas frecuencias; el más conocido y ampliamente utilizado es el método de Holzer, que permite obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración, de gran importancia para el conocimiento del comportamiento torsional del sistema, y que se puede aplicar para

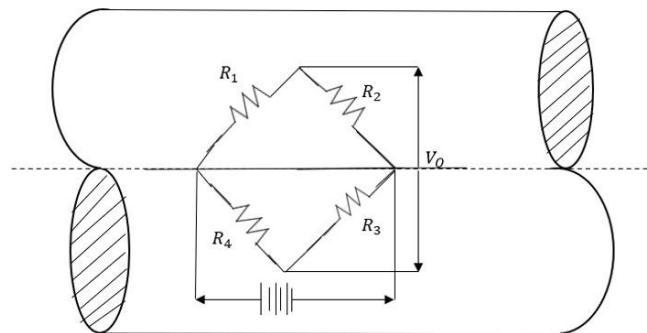
sistemas de múltiples grados de libertad. Este método, y otros se explicaran más adelante.

## **2.6. SISTEMAS DE MEDICION DE LA VIBRACION TORSIONAL**

La medición de la vibración torsional no es una práctica habitual en el diagnóstico de turbo maquinaria ni en programas de mantenimiento general. Esto se debe, en parte, a que resulta complicada de realizar; no obstante, este fenómeno es posiblemente una de las principales causas de la rotura de dientes en engranajes, además de estar vinculado a la fatiga de álabes en turbinas de vapor. A diferencia de la gran variedad de sistemas de instrumentación disponibles hoy en día para la medición de vibración lateral sistemas rotatorios, para algunos pocos son activos en la industria comercial con el fin de medir las vibras. Hay métodos en el mercado los cuales necesitan arreglar los artefactos, en donde se puede no es viable, costos y fiabilidad; además, muestran ciertas líneas finales en su rendimiento. A continuación, se analizan varios sistemas actuales para la medición de la vibración torsional. La medición de un sistema de movimiento torsor vibratorio no es una práctica normalmente utilizada en el análisis a turbo maquinaria ni la implementación con programas de revisión completos. Se plantea que hay ciertas razones en donde su cálculo resulta complicado; no obstante, este fenómeno es probablemente la causa principal de la fractura de dientes en engranajes y se ha señalado como uno de los factores que contribuyen a la fatiga de los álabes en turbinas de vapor. A diferencia de la gran cantidad de sistemas de instrumentación que existen hoy en día para medir la vibración lateral como sistemas rotatorios, pocos hay en disponibilidad para medir sistemas de torsión. La mayoría de las máquinas de rotación en el mercado necesitan arreglos importantes a los sistemas de uso, puede no estar de forma aceptable, hay motivos de límites, costos y confiabilidad; además, muestran ciertos puntos finales en su aplicación o rendimiento.

**2.6.1. Galgas de deformación** El procedimiento que existe para medir el sistema torsor emplea unas galgas extensiométricas de deformación adheridas a los ejes, alineadas en las direcciones donde se registra la mayor deformación. El principio fundamental de una galga de deformación radica en el cambio de resistencia eléctrica que experimentan ciertos materiales debido a la alteración de su estructura física bajo deformación. Este cambio se comporta de manera lineal, conforme a la ley de Hooke, siempre cuando se respeten sus términos mecánicos también térmicos a la galga. Para medir la vibración torsional, se adhiere un puente completo de Wheatstone a la superficie del eje, con el fin de detectar la deformación cíclica. Las galgas se orientan en la dirección de las principales deformaciones (sin esfuerzo cortante), las cuales están inclinadas a  $45^\circ$  respecto al eje axial. Ver Figura 23.

Figura 23. Orientación de una galga extensiométrica en un eje.



Fuente. Los autores.

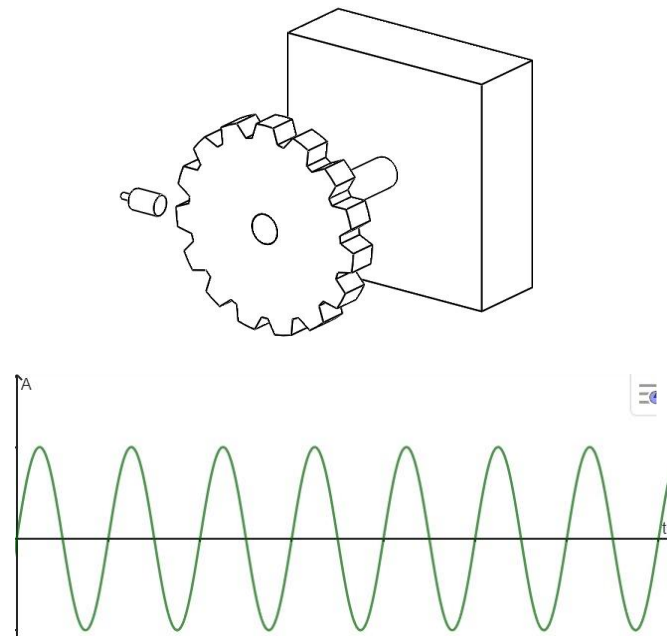
Este tipo de disposición elimina los efectos de las deformaciones causadas por el doblamiento y la diferencia entre su calor en donde está ubicada su galga. La técnica resulta muy exacta siempre que se haya instalado y calibrado correctamente. En el mercado, existen secciones de ejes prefabricados y calibrados previamente, que incluyen

galgas de deformación instaladas junto con anillos deslizantes o antenas de radiotelemedría montadas sobre el eje. Estos dispositivos están diseñados para sustituir una sección existente del eje en la máquina. No obstante, la instalación de tales componentes a menudo genera preocupaciones sobre la seguridad y confiabilidad de la máquina, y en muchos casos, no hay suficiente espacio disponible para acomodar el eje equipado con sus acoples, anillos o antenas. Este método presenta las siguientes desventajas prácticas:

- La señal debe ser transmitida desde un eje en rotación a un punto externo de la máquina, ya sea a través de anillos deslizantes o por medio de radiotelemedría. Dado que en las plantas suelen existir interferencias radiales y ambientes contaminados (los anillos se ensucian), generalmente se generan altos niveles en interferencia, esto afecta los sistemas.
- Para su soporte de la galga (una sección del eje) puede deteriorarse debido a estados transitorios y productos agresivos.
- Un ensamble defectuoso para la galga extensiométrica puede provocar derivados de deformaciones causadas.

**2.6.2. Sistema que emplea transductores de señal portadora** En sistemas donde hay engranajes, estos actúan como onda de transporte de pulso, facilitando así medición del sistema torsor. La señal portadora puede ser generada mediante un transductor magnético o un sensor de proximidad instalado cerca de los dientes de un engranaje específico, ver Figura 24, desde donde se origina la señal. La frecuencia principal de la señal portadora se corresponde con la frecuencia de paso de los dientes del engranaje.

Figura 24. Detección de la luz en sistemas torsionales.



Fuente. Los autores.

Al demodular la frecuencia o amplitud de la señal, existe la probabilidad de extraer sus particularidades de vibración torsionales, proporcionando frecuencias relevantes, que son considerablemente menores a la señal portadora. El funcionamiento del sensor trabaja de la siguiente manera, detecta la presencia de un objeto sin contacto físico. Funciona mediante la emisión de un campo eléctrico, magnético o de luz, y mide los cambios en este campo cuando un objeto se aproxima. Dependiendo del tipo de sensor, como los ópticos o inductivos, puede responder a diferentes materiales o condiciones. Cuando un objeto entra en su rango de detección, el sensor activa una señal que puede ser utilizada para accionar dispositivos o alertar a un sistema. Un transductor magnético es un dispositivo que convierte una magnitud física, como el movimiento o la posición, en una señal eléctrica utilizando principios magnéticos. Estos transductores suelen emplear elementos como sensores de efecto Hall, que detectan cambios en un campo magnético. Al variar la posición de un imán o un objeto ferromagnético, el transductor genera una señal eléctrica proporcional al cambio detectado. Son utilizados en aplicaciones como la

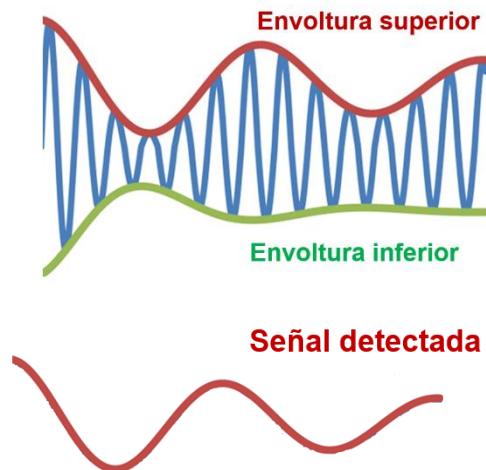
medición de velocidad, la posición en motores eléctricos y en sistemas de control automatizados. Los transductores magnéticos ofrecen alta precisión y durabilidad al detectar magnitudes físicas sin contacto, lo que los hace ideales para aplicaciones en entornos ruidosos y con bajo consumo energético. Además, para sistema de amplitud en modulación también a través del codificador y la célula fotoeléctrica. Este tipo de señal constituye el soporte de sistemático de medidas en un delta en la hora que se aborda al final de este capítulo.

**2.6.3. Estructuras de modulación de frecuencia** Como el sistema torsor presenta oscilación periódica en su rapidez angular, genera cambios tasa onda emisora. Un método de medición emplea la variación en la tasa de esta onda con el fin de generar un dato analógica de magnitud de corriente continua (D.C.) es igual en su rapidez angular. Con corriente alterna (A.C.) esta señal refleja rapidez del sistema torsional, que se incorpora con el fin de calcular el movimiento asociado. Una unidad de electrónica se refiere a un componente o dispositivo básico que se utiliza en circuitos electrónicos. Estos pueden incluir resistencias, capacitores, transistores, diodos, microcontroladores, y circuitos integrados, entre otros. Cada unidad cumple funciones específicas, como controlar la corriente, almacenar energía, o procesar señales, y son fundamentales para el diseño y funcionamiento de dispositivos electrónicos. Cuando hay un sistema torsor una señal esta se determinará mediante el rango a estudiar, la tasa transmisora fluctúa la frecuencia portadora oscila alrededor, lo que provoca que la salida D.C. también oscile.

**2.6.4. Estructura de modulación de amplitud** Se ha indicado que al instalar el sensor electromagnético detecte la distancia entre los elementos del mecanismo, crea el inicio con intensidad también con tasa de modulación, según su rapidez del mecanismo. El procedimiento eléctrico que se reconoce envolvente se podría utilizar con el fin de hacer un analógico que represente la rapidez del sistema torsor. La Figura 25 ilustra este proceso. En el circuito que procesa la señal portadora, se emplea semiconductor junto

con un potenciador para rectificar señales. Finalmente, la salida se somete a otro filtro de paso bajo para reducir la componente de velocidad inducida por la inevitable desviación de los dientes del engranaje. Este método presenta errores derivados del efecto de vibración lateral, lo que resulta en señales significativas a 1XRPM y sus armónicos, las cuales pueden enmascarar la señal de vibración torsional. Se han observado errores que alcanzan hasta el 18%, lo que lo hace poco recomendable para su uso.

Figura 25. Identificación de envoltura.



Fuente. Los autores.

**2.6.5. Conjunto de intervalos laterales y evaluación de frecuencia** Este sistema se fundamenta en el uso de un transductor que genera una señal portadora de frecuencia modulada (como un transductor magnético o un proximitor), junto con un analizador de espectro que permite la ampliación en torno a cualquier frecuencia central. Asumiendo que cualquier sistema de instrumentación debe incluir un analizador de espectro con capacidad de ampliación, este sistema se presenta como el más simple y rentable, ya

que solo requiere el transductor y los engranajes para generar la señal portadora de frecuencia modulada. El inicio de acción es el siguiente:

La forma más sencilla de describir una señal portadora de frecuencia modulada es:

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi f_c t + \rho \sin 2\pi f_m t) \quad (15)$$

Donde

$f_c$  : Frecuencia de la señal portadora básica

$f_m$  : Frecuencia de modulación (frecuencia de la vibración torsional)

$\rho$  : Índice de modulación

Si la señal portadora se genera a partir de un engranaje que posee  $NT$  dientes y el eje opera a una velocidad de  $N$  revoluciones por minuto, el ángulo de desplazamiento asociado a la vibración torsional  $G$  es:

$$G(t) = G_0 \cos \omega t \quad (16)$$

$$f_c = NT * \frac{N}{60} \quad (17)$$

$$f_m = \frac{\omega}{2\pi} \quad (18)$$

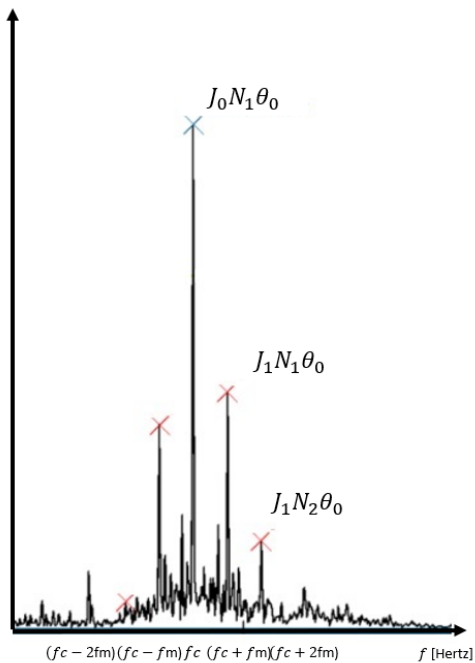
$$\rho = NT * G_0 \quad (19)$$

La ecuación (15) se puede representar mediante series matemáticas denominadas funciones de Bessel de este modo:

$$V(t) = V_o [J_0(NTGo)\cos 2\pi f_c t + J_1(NTGo)\cos 2\pi(f_c + f_m)t - J_1(NTGo)\cos 2\pi(f_c - f_m)t + J_2(NTGo)\cos 2\pi(f_c + 2f_m)t + J_2(NTGo)\cos 2\pi(f_c - f_m)t + \dots] \quad (20)$$

La cantidad  $\rho = NTGo$  se identifica como el índice de modulación de las funciones de Bessel  $J_i(NTGo)$  de orden  $i$ , donde  $i$  puede ser cualquier número entero positivo (1, 2, 3,...). Los valores asociados a estas funciones están documentados en numerosos manuales de referencia, lo que elimina la necesidad de realizar cálculos complicados. Con esta información, se puede emplear el analizador de espectro para determinar la frecuencia y magnitud de la vibración torsional sin necesidad de utilizar equipo adicional. Al conectar la señal del transductor directamente al analizador y ajustar el zoom en la frecuencia central (la señal portadora), se visualizará un pico en el centro de la pantalla, flanqueado por un patrón simétrico de picos que disminuyen en magnitud (ver Figura 26). Las componentes laterales se conocen como bandas laterales, y resultan de la transformación en series de Fourier de la señal modulada en frecuencia. Un análisis de la ecuación (20) permitirá aclarar este concepto, mostrando la presencia de componentes en las frecuencias correspondientes.  $(f_c + f_m)$ ,  $(f_c - f_m)$ ,  $(f_c + 2f_m)$ , ...

Figura 26. Bandas laterales producidas por vibración torsional.



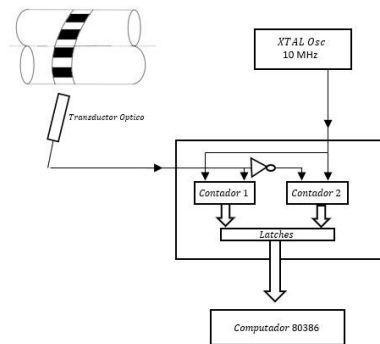
Fuente. Los autores.

La frecuencia de vibración se define como la diferencia entre la frecuencia portadora (el pico central) y la frecuencia de cualquiera de las bandas laterales de primer orden, que son equidistantes de la frecuencia portadora. En el contexto de las funciones de Bessel, la magnitud de todos estos picos, incluyendo el central que representa la frecuencia portadora, está interrelacionada, ya que todos corresponden a funciones de Bessel del mismo índice de modulación,  $NTG_0$ . Para calcular la amplitud  $G_0$  de la vibración torsional, solo es necesario obtener la relación entre la amplitud de las bandas laterales de primer orden y el pico central, o de orden cero. Esta relación se expresa como el cociente  $J_1(J_1(\beta))/J_0(\beta)$ . Dado que  $\beta$  es igual a  $NT\theta_0$ , y el número de dientes  $NT$  del engranaje es conocido, se puede calcular la amplitud máxima de la vibración torsional en radianes. Cabe resaltar que la amplitud modulada presente para las señales de frecuencia modulada generadas por un transductor magnético puede introducir un leve error en el cálculo anterior. Además, es fundamental mencionar que algunas mediciones realizadas en maquinaria con problemas de vibración torsional deben efectuarse en condiciones

transitorias (como durante el arranque de una máquina), donde la velocidad está en incremento. Para el montaje de zonas contiguas negativamente resulta adecuado para datos temporales con los equipos eléctricos disponibles en actualidad, ya que en la principal señal original fluctúa velozmente cuando en el momento de fuerza y normalmente es no dependiente a el fenómeno.

**2.6.6. Evaluación mediante Duraciones Temporales** Se debe tener en cuenta que cuando no hay círculos para enviar una indicación portadora mediante transductores o llamados sensores de proximidad para que, se puede optar por una cinta reflectante con franjas alternadas en blanco y negro, que se coloca en el eje de la máquina en cualquier posición deseada. Un transductor óptico se encarga de producir una señal cuadrada. El núcleo del sistema de medición por duraciones temporales se basa en la evaluación del tiempo que dura el momento de la señal. Aquí el novedoso enfoque para medir la vibración torsional resulta especialmente útil para capturar fenómenos sucesos de forma transitoria que se transforman velozmente, el arranque de un dispositivo. Nos vamos a la Figura 27 que presenta el contexto para su método. El transductor visual genera una señal de forma rectangular, activa el conteo en varios contadores. Una vez activados, estos contadores registran la cantidad de pulsadas, a un oscilador de alta periodicidad que actúa como referencia. En este caso, se contabilizan las pulsaciones en el tiempo conocido dentro de la señal cuadrada emitida por el transductor visual (ver Figura 28). Al concluir el conteo los valores medidos, se acumulan estos registros de dos elementos. Se ajusta el código para medir la duración del estado bajo de cada pulso, utilizando un proceso similar al mencionado anteriormente. Luego, los datos almacenados se transfieren a un PC o dispositivo portátil, donde los dígitos escritos representan el segundo que cada friso, tarda en pasar por el decodificador. Cuando se tiene al inverso, su ángulo al multiplicarlo de forma correspondiente de cada franja, permite determinar la velocidad de giro de cada segmento.

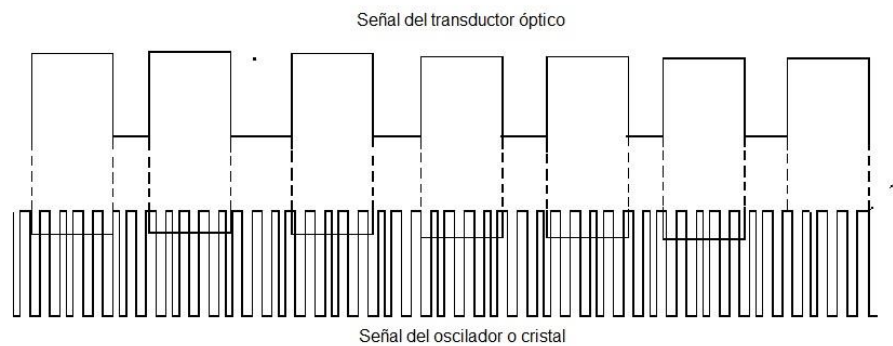
Figura 27. Elementos que conforman el sistema de medición temporal.



Fuente. Los autores.

La figura 28 ilustra de manera gráfica cómo se establece la duración de cada señal.

Figura 28. Gráfico Temporal del Sistema de Medición



Fuente. Los autores.

Los datos extraídos por el ordenador se analizan para determinar la velocidad de la máquina, lo que permite elaborar un gráfico que ilustra la variación de la velocidad en

función del tiempo, proporcionando así una herramienta valiosa para evaluar su desempeño.

## **2.7. ESTUDIO ANALITICO DE LA VIBRACION TORSIONAL EN MAQUINAS**

**2.7.1. Introducción** La vibración torsional puede ser un problema en trenes de transmisión donde se conectan varias máquinas rotativas mediante ejes de transmisión y acoples. Los problemas aparecen cuando las frecuencias naturales a la torsión del sistema son excitadas por torques oscilantes con componentes de frecuencia cercana a estas frecuencias naturales, o cuando se produce inestabilidad torsional en sistemas con control automático de velocidad. Para el análisis de vibración torsional de un sistema se requiere determinar las frecuencias naturales a la torsión de dicho sistema y la frecuencia de todas las fuentes de excitación que se presenten en el sistema real. El procedimiento continúa con la comparación de la frecuencia de las fuentes de excitación torsional que actúan sobre el sistema con cada una de las frecuencias naturales a la torsión previamente calculadas, observando el grado de proximidad entre éstas. Lo anterior permite determinar el grado de resonancia a la torsión existente en el sistema para así actuar sobre el problema. Para la determinación de las frecuencias naturales es necesario reducir el sistema real a un módulo mecánico y mediante análisis matemáticos relativamente sencillos de sistemas simultáneos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se calculan dichas frecuencias. Después de realizarse el anterior estudio y si se ha concluido que el sistema real puede presentar oscilaciones torsionales, la solución puede darse mediante alguno o varios de los siguientes métodos:

- Variación de las frecuencias naturales de torsión del sistema: Esto se logra cambiando la rigidez torsional de los ejes (variando diámetros o longitudes) o variando las inercias del sistema, o realizando ambas cosas.

- Variación de la frecuencia de excitación: Esto es posible mediante la variación del rango de velocidad angular de operación o cambiando la maquina motriz según sea la causa. El trabajo que se puede hacer para tratar de disminuir las amplitudes de excitación muchas veces no da resultados adecuados porque si el sistema mecánico está en resonancia torsional, amplitudes de excitación pequeñas pueden excitar amplitudes de vibración inaceptables.

Al dificultarse la aplicación de las anteriores alternativas se deben utilizar los métodos de eliminación y amortiguación.

**2.7.2. Métodos generales de cálculo de sistemas de torsión** Para sistemas de dos o tres grados de libertad, existen fórmulas deducidas en función de los parámetros característicos de un sistema, inercias y rigideces, mediante las cuales es posible calcular sus frecuencias naturales y modos de vibración. Sin embargo, para sistemas con más de tres grados de libertad, es imposible deducir fórmulas analíticas y por esta razón, se recurre a otros métodos de resolución iterativos o numéricos. Los más usados son: Método de Holzer y Método de las Matrices de transferencia.

**2.6.2.1. Modelo de un sistema de dos grados de libertad con extremo empotrado**

En la Figura 29 se muestra un modelo de dos grados de libertad, y en las Figuras 30 y 31 se analizarán los diagramas de cuerpo libre.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -K_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \quad (21)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = K_2(\theta_1 - \theta_2) \quad (22)$$

Las ecuaciones diferenciales del sistema son entonces:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \theta_1(K_1 + K_2) - K_2 \theta_2 = 0 \quad (23)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - K_2 \theta_2 + K_2 \theta_2 = 0 \quad (24)$$

En un modo normal de oscilación libre, cada masa experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia, por tanto, se puede escribir:

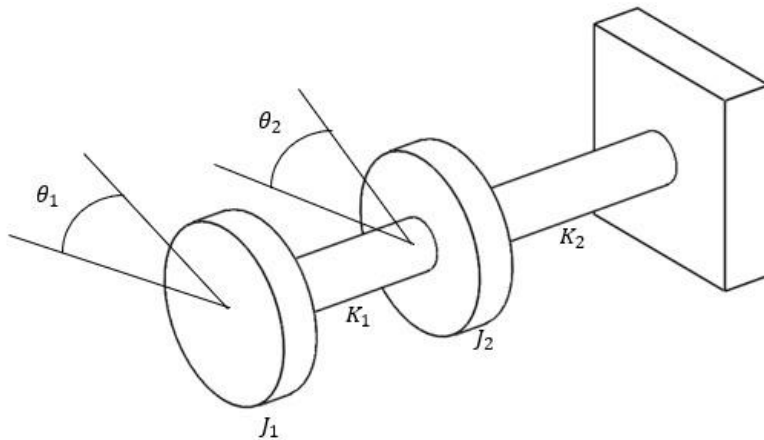
$$\theta_1 = (\widehat{\theta}_1 e^{j\omega t}) \quad (25)$$

$$\theta_2 = (\widehat{\theta}_2 e^{j\omega t}) \quad (26)$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales se tiene:

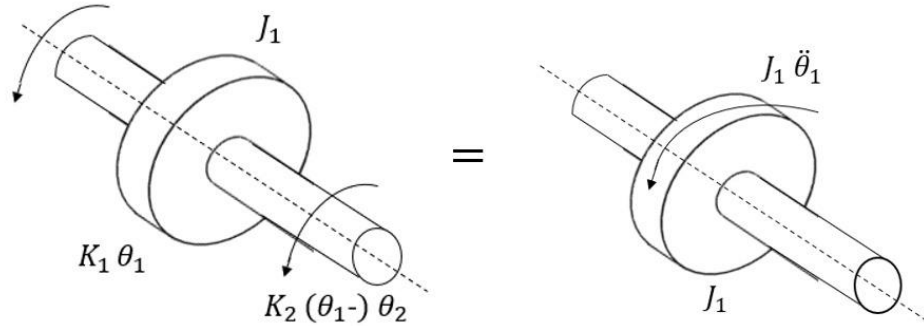
$$(K_1 + K_2 - \omega^2 J_1) \widehat{\theta}_1 - K_2 \widehat{\theta}_2 = 0 \quad (27)$$

Figura 29. Sistema torsional empotrado de dos grados de libertad.



Fuente. Los autores.

Figura 30. Diagrama de cuerpo libre para  $J_1$ .



Fuente. Los autores.

$$-K_2 \widehat{\theta}_1 + (K_2 - \omega^2 J_2) \widehat{\theta}_2 = 0 \quad (28)$$

Cuya solución general es:

$$\begin{bmatrix} (K_1 + K_2 - J_1 \omega^2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_2 - J_2 \omega^2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Haciendo  $\omega^2 = \epsilon$

$$(K_1 + K_2 - J_1 \epsilon)(K_2 - J_2 \epsilon) - K_2^2 = 0 \quad (30)$$

$$\epsilon - \left[ \frac{(K_1 + K_2)J_2 + K_2 J_1}{2J_1 J_2} \right] \epsilon + \frac{K_1 K_2}{J_1 J_2} = 0 \quad (31)$$

Despejando  $\epsilon$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{(K_2 J_1) + (K_1 + K_2) J_2}{2J_1 J_2} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{K_2 J_1 + (K_1 + K_2) J_2}{(J_1 J_2)^2} - \frac{4K_1 K_2}{J_1 J_2} \right]^{1/2} \quad (32)$$

Se obtiene:

$$\omega_1 = \pm(\epsilon_1)^{1/2} \quad (33)$$

$$\omega_2 = \pm(\epsilon_2)^{1/2} \quad (34)$$

Con el objeto de mostrar los modos de vibración, es más fácil dimensionar proporcionalmente el sistema, por ejemplo:

$$K_1 = K_2 = K \quad (35)$$

$$J_1 = J_2 = 2J \quad (36)$$

Sustituyendo se tiene:

$$\epsilon_{1,2} = \left( \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2(4.25)^2} \right) \left( \frac{K}{J} \right) = (1.25 \pm 1.03) \left( \frac{K}{J} \right) \quad (37)$$

$$\epsilon_1 = 0.22 \left( \frac{K}{J} \right) ; \epsilon_2 = 2.28 \left( \frac{K}{J} \right) \quad (38)$$

Se tiene entonces los dos valores de las frecuencias naturales:

$$\omega_1 = \pm \sqrt{0.22 \left( \frac{K}{J} \right)} \quad (39)$$

$$\omega_2 = \pm \sqrt{2.28 \left( \frac{K}{J} \right)} \quad (40)$$

De las ecuaciones diferenciales para la proporción tomada, se tiene:

$$\left( \frac{\widehat{\theta}_1}{\widehat{\theta}_2} \right) = \left( \frac{K}{2K - J\omega^2} \right) \quad (41)$$

Para el primer modo de vibración la relación definida de amplitudes es:

$$\left[ \frac{\widehat{\theta}_1}{\widehat{\theta}_2} \right]_{\omega=\omega_1}^{(1)} = \left( \frac{K}{2K - J \cdot \frac{0.22K}{J}} \right) = \frac{1}{1.78} \quad (42)$$

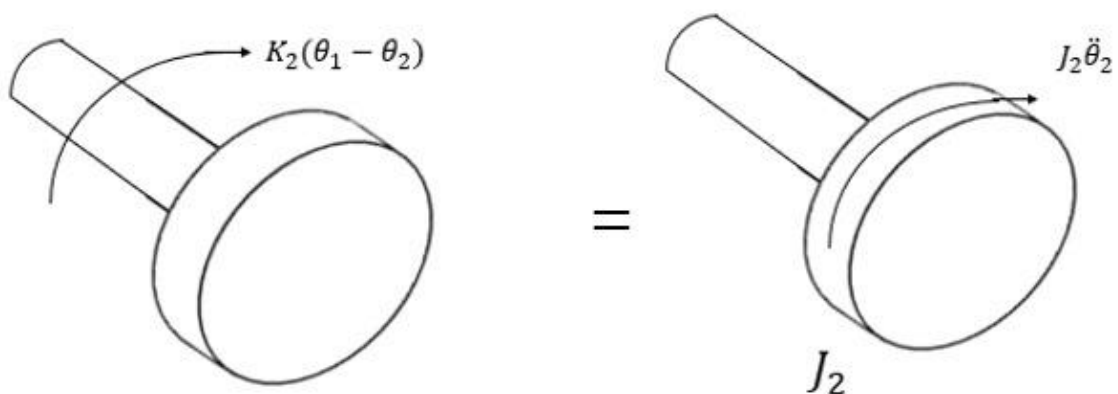
Análogamente para el segundo modo de vibración:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 \\ \widehat{\theta}_2 \end{bmatrix}_{\omega=\omega_2}^{(2)} = \left( \frac{K}{2K - J \cdot \frac{2.28K}{J}} \right) = \frac{1}{-0.28} \quad (43)$$

La representación gráfica de los modos de vibración se muestra en la Figura 32.

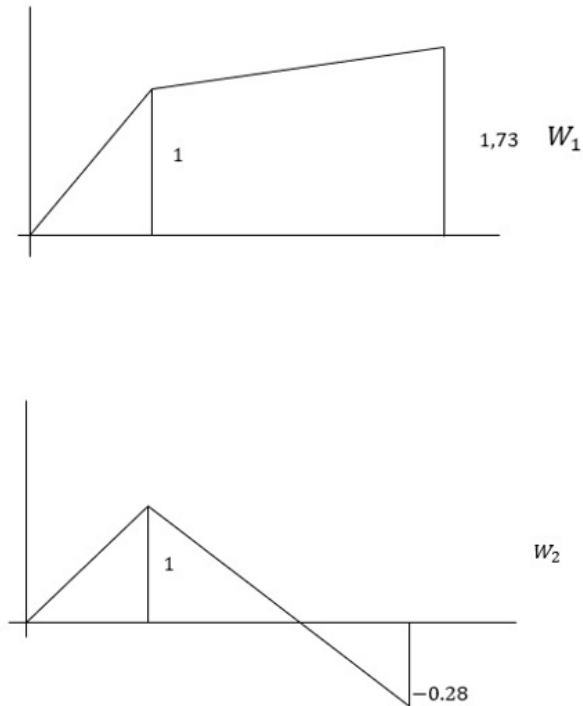
Los modos de vibración indican la amplitud relativa del desplazamiento de cada elemento cuando está en resonancia todo el sistema. Para el ejemplo anterior, si el sistema se encuentra en la primera frecuencia natural, la amplitud del ángulo de torsión del disco uno es “1” (una unidad), y en fase con este, la del ángulo de torsión del disco dos es “1.78” unidades. Sin embargo si el sistema se encuentra en la segunda frecuencia natural, la amplitud del ángulo de torsión del disco uno es “1”, y en contraste con este, a del ángulo de torsión del disco dos es “-0.28”; esto significa que entre el disco uno y el dos se presenta un nodo, en donde el ángulo de torsión vale cero.

Figura 31. Diagrama de cuerpo libre para J2.



Fuente. Los autores.

Figura 32. Modos de vibración del ejemplo anterior.



Fuente. Los autores

En el primer caso, solamente en el empotramiento se presenta un ángulo de torsión de cero. En el segundo caso, cuando los extremos están libres, se presenta uno en el empotramiento y uno entre los discos. Saber la localización de los nodos es importante, pues en ellos se presenta el máximo momento de torsión, es decir el máximo esfuerzo de torsión. En estos lugares se presenta un calentamiento excesivo y existe un alto riesgo de falla del eje debido a fatiga.

## 2.8. METODO DE HOLZER.

Se basa en el principio de que cualquier sistema torsional no amortiguado vibrará indefinidamente con una combinación de sus modos naturales de vibración sin requerir la aplicación permanente de fuerzas o torques extremos. En realidad, toda vibración libre es transitoria, pues cualquier sistema real posee amortiguación. De esta manera, Holzer inicia suponiendo una frecuencia natural arbitraria y una amplitud igual a la unidad en un extremo del sistema torsional. Con estos datos se calcula progresivamente el torque y el desplazamiento angular en disco hasta llegar al otro extremo. Las frecuencias naturales, con las cuales se calcula los valores de torque o desplazamiento angular que cumplan con las condiciones de frontera del modelo físico (torque cero si el extremo es libre y desplazamiento cero si el extremo está empotrado), serán las frecuencias naturales del sistema. Así mismo, por medio de los desplazamientos intermedios obtenidos con este valor de frecuencia angular, se obtienen los respectivos modos de vibración del modelo. Este método no es exclusivo para torsión, pues puede ser aplicado a cualquier sistema vibrante de parámetros concentrados. En torsión, no obstante, es dispendioso aplicarlo cuando se tiene un sistema ramificado, pues primero hay que reducirlos a un sistema equivalente en línea. Aplicando este método a un sistema torsional lineal, primero se supone una frecuencia angular,  $\omega$ , cualquiera (para lograr una buena aproximación generalmente se toma el valor obtenido reduciendo el sistema a uno solo de los dos discos unidos por un resorte) y se asume un desplazamiento angular inicial igual a la unidad, en uno de los extremos del modelo. Ver figura 33 y figura 34.

El torque de inercia del disco 1 es (para un movimiento armónico):

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = J_1 \omega^2 \theta_1 \quad (44)$$

Este torque causa una deformación angular en el eje 1 igual a:

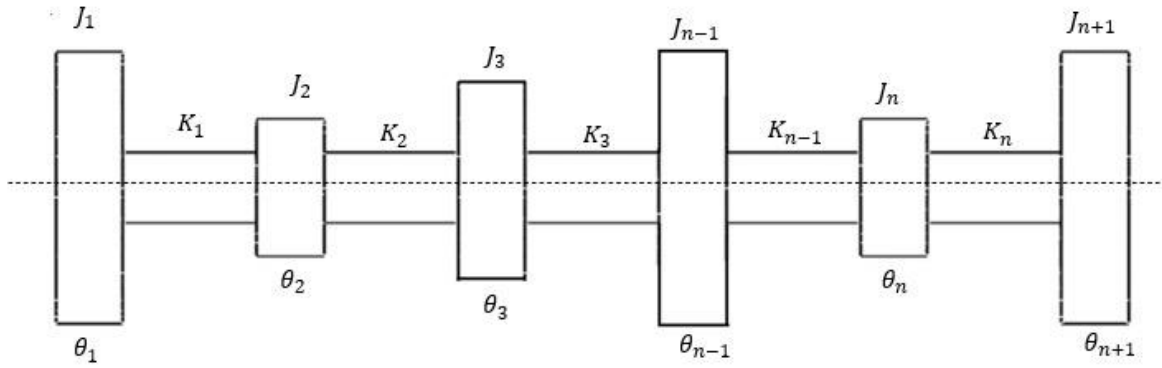
$$\theta_1 - \theta_2 = J_1 \omega^2 / K_1 \quad (45)$$

Por tanto, el desplazamiento angular del disco dos (2) es:

$$\theta_2 = \theta_1 - J_1 \omega^2 / K_1 \quad (46)$$

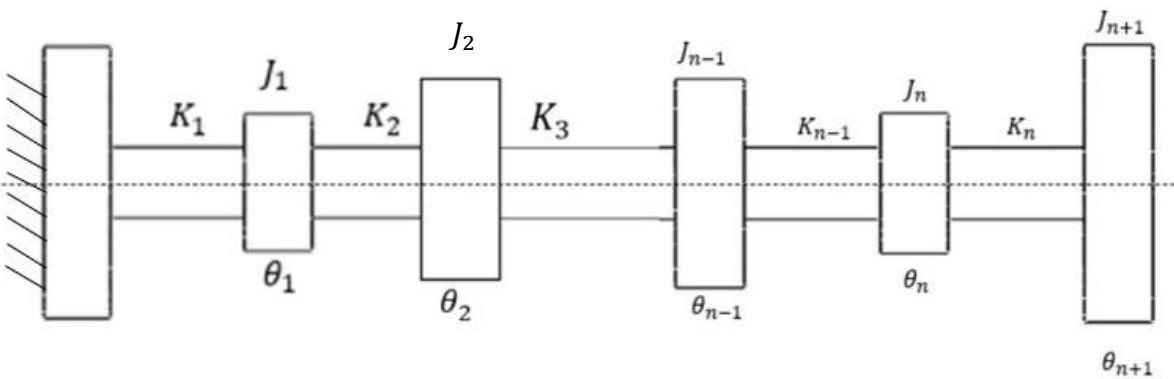
$$\theta_2 = 1 - J_1\omega^2/K_1 \quad (47)$$

Figura 33. Sistema torsional lineal general con extremos libres.



Fuente. Los autores.

Figura 34. Sistema torsional lineal general con extremo empotrado.



Fuente. Los autores.

Así mismo, con este valor es posible determinar el torque de inercia en el segundo disco:

$$J_2\theta_2 = J_2\omega^2\theta_2 = J_2\omega^2[1 - J_1\omega^2/K_1] \quad (48)$$

Como el primer y segundo torque actúan sobre el disco tres (3), causan un desplazamiento angular:

$$\theta_2 - \theta_3 = \frac{(J_1\omega^2\theta_1 + J_2\omega^2\theta_2)}{K_1} \quad (49)$$

Como se observa, todos los parámetros para determinar los desplazamientos angulares y torques, son conocidos. El proceso a seguir es calcular estos valores a través de todo el sistema. En el último disco actuará entonces, la sumatoria de torques del sistema.

$$T_{Extremo} = \sum_{i=1}^n J_i i \omega^2 \theta_i \quad (50)$$

En forma iterativa, se encontrará una frecuencia natural cuando el valor del torque extremo sea (0) cero o muy próximo a cero.

## 2.9. METODO DE LAS MATRICES DE TRANSERENCIA.

Este método es otra alternativa de solución para sistema con parámetros concentrados. Su ventaja radica en que se puede aplicar a sistemas complicados ramificados y se hace fácil la identificación de las condiciones de fronteras. En el fondo no es más que una sistematización con tratamiento matricial del método de Holzer. Sea un sistema torsional de parámetros concentrados, como se ve en la figura 35. Para cada elemento disco o eje se designarán las cantidades (desplazamientos y torques) por los índices  $R$  o  $L$  según actúen a la derecha o la izquierda del elemento, respectivamente. Generando el diagrama de cuerpo libre del disco  $n$ , en la figura 36, se tiene que:

$$\theta_n^L = \theta_n^R \quad (51)$$

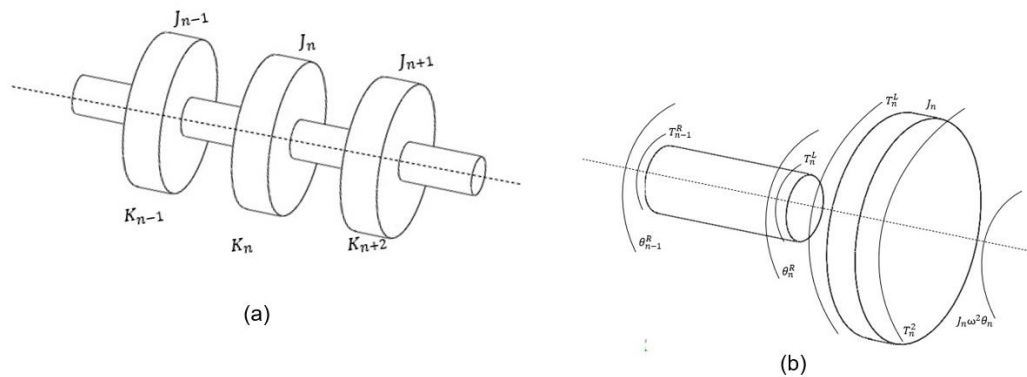
$$T_n^L = T_n^R + J_n \omega^2 \theta_n \quad (52)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J_n \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^L \quad (53)$$

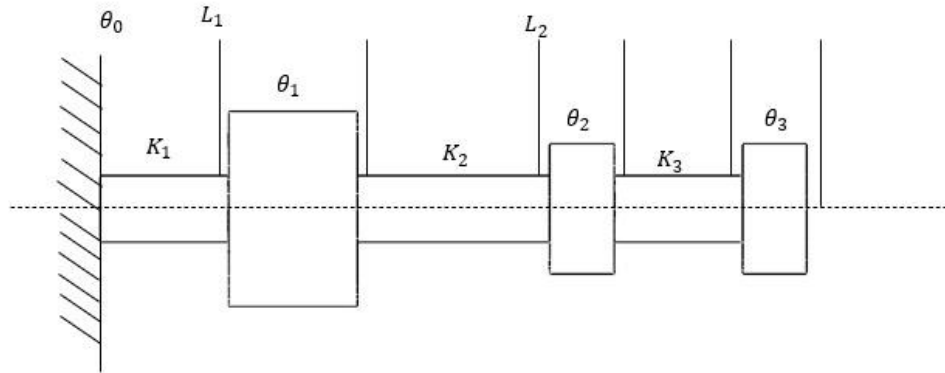
En esta expresión, los vectores se llaman de estado, y la matriz de punto.

Figura 35. (a) Sistema torsional con parámetros concentrados y (b) Diagrama de cuerpo libre para elemento n-esimo.



Fuente. Los autores.

Figura 36. Sistema con tres grados de libertad



Fuente. Los autores.

Haciendo el mismo análisis para el eje flexible, se tiene que:

$$T^R_{n-1} = T^L_n \quad (54)$$

$$\theta^L_n = \theta^R_{n-1} + T^L_{n-1}/K_n \quad (55)$$

De manera similar, estas dos ecuaciones se escriben matricialmente, formando dos nuevos vectores de estado y una matriz de campo:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}^L_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}^R_{n-1} \quad (56)$$

Reemplazando (56) en (53):

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J_n \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 1/K \\ -\omega^2 J_n & 1 - \frac{\omega^2 J_n}{K_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (58)$$

La matriz obtenida en la ecuación (58) se conoce con el nombre de matriz de transferencia e involucra los efectos elásticos y dinámicos del sistema; por medio de esta, se puede ir de estación en estación calculando torques y desplazamientos angulares de un extremo a otro, para que, con las condiciones de fronteras determinadas, sea posible obtener la frecuencia natural del sistema. El orden de numeración es importante para aplicar la matriz de transferencia. En este caso la matriz se aplica de izquierda a derecha. También es correcto afirmar, que el método de la matriz de transferencia es un poco complejo, cuando el sistema es lineal de varios grados de libertad, siendo más ventajoso utilizar el método de Holzer explicado anteriormente. Sin embargo, cuando el sistema es ramificado es menester utilizar este método. Una técnica para simplificarlo, es plantear todas las matrices de transferencia, suponer una frecuencia natural; multiplicar todas las matrices para obtener la matriz global y de acuerdo con las condiciones de borde o frontera, verificar si la frecuencia supuesta es o no una frecuencia natural. Lo cual es apto para desarrollar mediante un programa de computador.

### **3. MATRIZ DE CALIDAD PARA EL BANCO TORSIONAL (QFD)**

La finalidad de este proyecto está dirigida al diseño y construcción de un banco de ensayos de vibraciones torsionales con el cual se busca obtener un dispositivo versátil que garantice una disminución en los costos de producción y proporcione una herramienta para el estudio de este fenómeno por parte de los estudiantes. Deberá integrar tanto el proceso de adquisición de dato en tiempo real y la posibilidad de variar los parámetros de operación del sistema.

Teniendo en cuenta las necesidades anteriores mencionadas se realizó un estudio de selección de las posibles alternativas por medio del despliegue de la función calidad (QFD). Este estudio se presenta a continuación:

#### **3.1. DESPLIEGUE DE LA FUNCIÓN CALIDAD (QFD)**

##### **3.1.1. Requerimientos de diseño para el motor**

A continuación, se establece una lista de los requerimientos básicos del diseño en el desarrollo del banco con respecto al motor:

- Procesamiento.
- Precio.
- Consumo de energía.
- Facilidad de instalación.
- Durabilidad.
- Mantenibilidad.
- Compatibilidad con otros componentes.

**3.1.1.1. Alternativas de motor** Se plantean las siguientes opciones a la hora de escoger el tipo de motor que mejor se adapta al propósito del banco.

- **Motor trifásico:** Difícil de manejar, por lo que requiere equipo especializado. Además tiene un alto costo pero presenta una alta eficiencia energética.
- **Motor monofásico:** Es relativamente fácil de manejar pero tiene un costo medio en comparación con los demás y presenta un consumo de energía moderado.
- **Motor DC:** Es el más fácil de controlar de los tres. Tiene un bajo costo y una alta precisión de control.

**3.1.1.2. Elaboración de matriz QFD** Mediante esta herramienta grafica se conectan los requisitos de diseño con las características técnicas de los componentes.

Tabla 2. Matriz QFD

<b>Criterios de Selección</b>	<b>Peso relativo</b>	<b>Motor Trifásico</b>	<b>Motor Monofásico</b>	<b>Motor DC</b>
<b>Procesamiento</b>	20%	9	6	8
<b>Precio</b>	15%	4	7	9
<b>Consumo de Energía</b>	20%	9	7	6
<b>Facilidad de instalación</b>	10%	3	8	9
<b>Durabilidad</b>	15%	8	6	7
<b>Mantenibilidad</b>	10%	6	7	8
<b>Compatibilidad</b>	10%	7	8	9

<b>Total Ponderado</b>	100%	6.95	7.05	<b>7.55</b>
------------------------	------	------	------	-------------

Fuente. Los autores.

**3.1.2. Requerimientos de diseño para la sujeción de discos** A continuación, se establece una lista de los requerimientos básicos del diseño en el desarrollo del banco con respecto a la sujeción de los discos:

- Facilidad de intercambio.
- Seguridad de sujeción.
- Costo.
- Tiempo de instalación.
- Durabilidad.
- Compatibilidad con otros componentes.

**3.1.2.1. Alternativas para la sujeción de discos** Se plantean las siguientes opciones a la hora de escoger el tipo de sujeción de los discos que mejor se adapta al propósito del banco.

- **Manguitos de sujeción:** Tiene una sólida seguridad de sujeción y un costo medio, aunque requiere más tiempo de instalación. También presenta una alta durabilidad y buena compatibilidad con discos de diferentes tamaños.
- **Tornillos Prisioneros:** Excelente para intercambiar discos rápidamente, tiene un costo bajo, aunque requiere mecanización de la pieza. Es fácil y rápido de instalar, tiene una durabilidad moderada y buena compatibilidad con otros componentes.
- **Acoples rápidos:** Alta seguridad de sujeción, aunque tiene un costo alto. Presenta un tiempo moderado de instalación, alta durabilidad y

**3.1.2.2. Elaboración de matriz QFD** Mediante esta herramienta grafica se conectan los requisitos de diseño con las características técnicas de los componentes.

Tabla 3. Matriz QFD

<b>Criterios de Selección</b>	<b>Peso relativo</b>	<b>Manguitos de sujeción</b>	<b>Tornillos prisioneros</b>	<b>Acoples rápidos</b>
<b>Facilidad de intercambio</b>	25%	5	9	7
<b>Seguridad de la sujeción</b>	25%	9	7	9
<b>Costo</b>	15%	7	9	4
<b>Tiempo de instalación</b>	15%	6	9	7
<b>Durabilidad</b>	10%	8	6	9
<b>Compatibilidad</b>	10%	8	8	6
<b>Total Ponderado</b>	100%	6.95	<b>8.0</b>	7.55

Fuente. Los autores.

**3.1.3. Requerimientos de diseño para la sujeción del rotor** A continuación, se establece una lista de los requerimientos básicos del diseño en el desarrollo del banco con respecto al método de sujeción del rotor o eje de ensayo.

- Facilidad de desarme.
- Precisión de la sujeción.
- Costo.
- Tiempo de instalación.
- Durabilidad.

- Compatibilidad con otros componentes.

**3.1.3.1. Alternativas para la sujeción del rotor** Se plantean las siguientes opciones a la hora de escoger el tipo de sujeción del eje de ensayo que mejor se adapta al propósito del banco.

- **Acoples rígidos:** Presentan una excelente precisión, alineación y durabilidad a un costo moderado. Sin embargo, el tiempo de instalación es relativamente largo y presentan una limitada compatibilidad con diferentes diámetros.
- **Mandriles:** Son fáciles de desarmar y cambiar, tienen un costo bajo, una buena durabilidad y una alta compatibilidad con diferentes diámetros de ejes. Su precisión es adecuada para este tipo de ensayo ya que el torque transmitido no es muy alto.
- **Mini mandriles:** Son fáciles de desarmar y cambiar, y tienen el costo más bajo de las tres alternativas. Su precisión es adecuada y tienen una buena durabilidad. Sin embargo, no tienen una alta compatibilidad con diferentes diámetros de ejes.

**3.1.1.2. Elaboración de matriz QFD** Mediante esta herramienta grafica se conectan los requisitos de diseño con las características técnicas de los componentes.

Tabla 4. Matriz QFD

<b>Criterios de Selección</b>	<b>Peso relativo</b>	<b>Acoples rígidos</b>	<b>Mandriles</b>	<b>Mini mandriles</b>
<b>Facilidad de desarme</b>	25%	5	9	8

<b>Precisión en la sujeción</b>	25%	9	7	7
<b>Costo</b>	15%	6	8	9
<b>Durabilidad</b>	15%	8	7	7
<b>Compatibilidad</b>	10%	6	9	6
<b>Tiempo de instalación</b>	10%	5	9	8
<b>Total Ponderado</b>	100%	6.85	8.05	7.55

Fuente. Los autores.

**3.1.4. Requerimientos de diseño para la sensórica del banco** A continuación, se establece una lista de los requerimientos básicos del diseño en el desarrollo del banco con respecto a la sensórica.

- Economía.
- Facilidad de instalación.
- Facilidad de montaje.
- Precisión de medición
- Durabilidad.
- Compatibilidad.

**3.1.4.1. Alternativas para la sensórica del banco** Se plantean las siguientes opciones a la hora de escoger el tipo de sensor que mejor se adapta al propósito del banco.

- **Sensores ópticos de herradura:** Tienen un costo bajo, su instalación y montaje es sencilla. Sin embargo, su precisión es moderada, pero adecuada para este tipo de pruebas estándar. Su durabilidad es buena y su compatibilidad es buena.
- **Sensores de ángulo de giro:** Su costo es medianamente alto, y su instalación compleja. Tienen una alta precisión en la medición, una durabilidad alta y compatibilidad alta.
- **Sensores inductivos:** Su costo no es muy elevado y su instalación es moderada. Tienen una precisión adecuada, pero menor al de los sensores de ángulo de giro. Tienen una buena durabilidad y una compatibilidad moderada.

**3.1.4.2. Elaboración de matriz QFD** Mediante esta herramienta grafica se conectan los requisitos de diseño con las características técnicas de los componentes.

Tabla 5. Matriz QFD

<b>Criterios de Selección</b>	<b>Peso relativo</b>	<b>Sensores ópticos de herradura</b>	<b>Sensores de ángulo de giro</b>	<b>Sensores Inductivos</b>
<b>Economía</b>	25%	9	5	7
<b>Facilidad de instalación</b>	20%	9	6	7
<b>Facilidad de montaje</b>	20%	9	6	7
<b>Precisión de medición</b>	15%	7	9	7
<b>Durabilidad</b>	10%	7	9	8
<b>Compatibilidad</b>	10%	9	8	7
<b>Total Ponderado</b>	100%	<b>8.6</b>	6.8	7.3

Fuente. Los autores.

### **3.2. ALTERNATIVA GANADORA**

- Motor: Motor DC.
- Método de sujeción de los discos: Tornillos prisioneros.
- Método de sujeción del rotor: Mandriles.
- Sensórica del banco: Sensores ópticos de herradura.

#### 4. DISEÑO CAD DEL BANCO

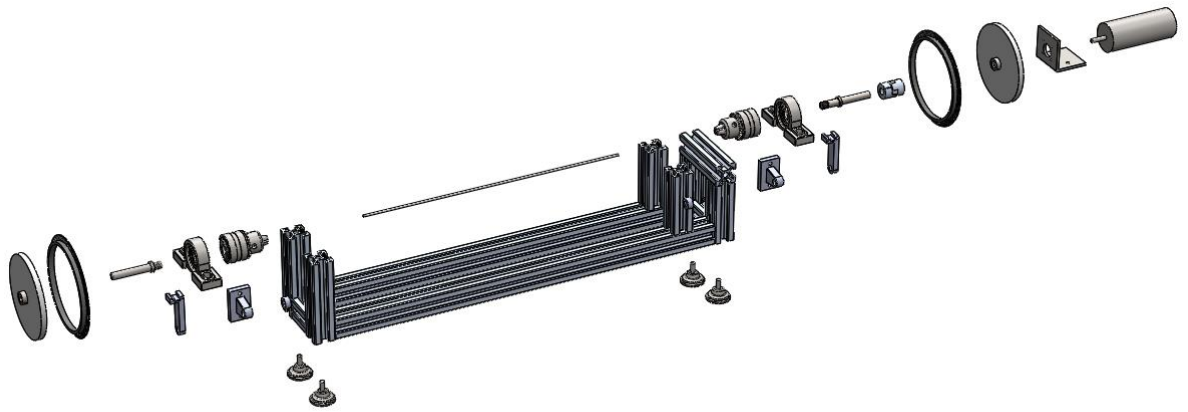
La figura 37 muestra el diseño CAD del banco de experimentación construido, en el cual es posible realizar diferentes pruebas para diferentes condiciones de operación, variando características de excitación, velocidad y modelo de rotor. El sistema mecánico se proyectó para que permitiera las siguientes opciones:

- Montar y desmontar de forma rápida cualquiera de los volantes de inercia, lo que permite obtener sistemas mecánicos con inercias diferentes.
- Montar y desmontar de forma rápida cualquiera de los rotores, lo que permite realizar pruebas con diferentes rigideces.

El sistema de alimentación y excitación torsional permite:

- Alimentar el motor con un voltaje continuo que se puede variar a voluntad. Esto permite variar la velocidad media de rotación del motor.
- Adicionar al voltaje continuo de alimentación una señal de voltaje alterno, la cual permite al motor entregar un torque con una componente alterna que excita la vibración torsional.
- Variar la amplitud y frecuencia de la señal de voltaje alterno, modificando de este modo las características de la excitación torsional.

Figura 37. Banco de pruebas.



Fuente. Los autores.

## 5. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL BANCO

### 5.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

La Figura 38 muestra la configuración del banco de experimentación construido, en el cual se indican los elementos de los diferentes sistemas que lo conforman. En la tabla 6 se describen los componentes principales del banco, con los números correspondientes a los indicados en la Figura 38.

Tabla 6. Descripción de los componentes del banco.

<b>Numero</b>	<b>Descripción</b>
1	Motor de corriente continua
2	Acople rígido tipo
3	Chumacera
4	Eje principal
5	Encoder
6	Rotor
7	Mandril
8	Eje secundario
9	Disco de inercia
10	Sensor óptico
11	Base del sensor

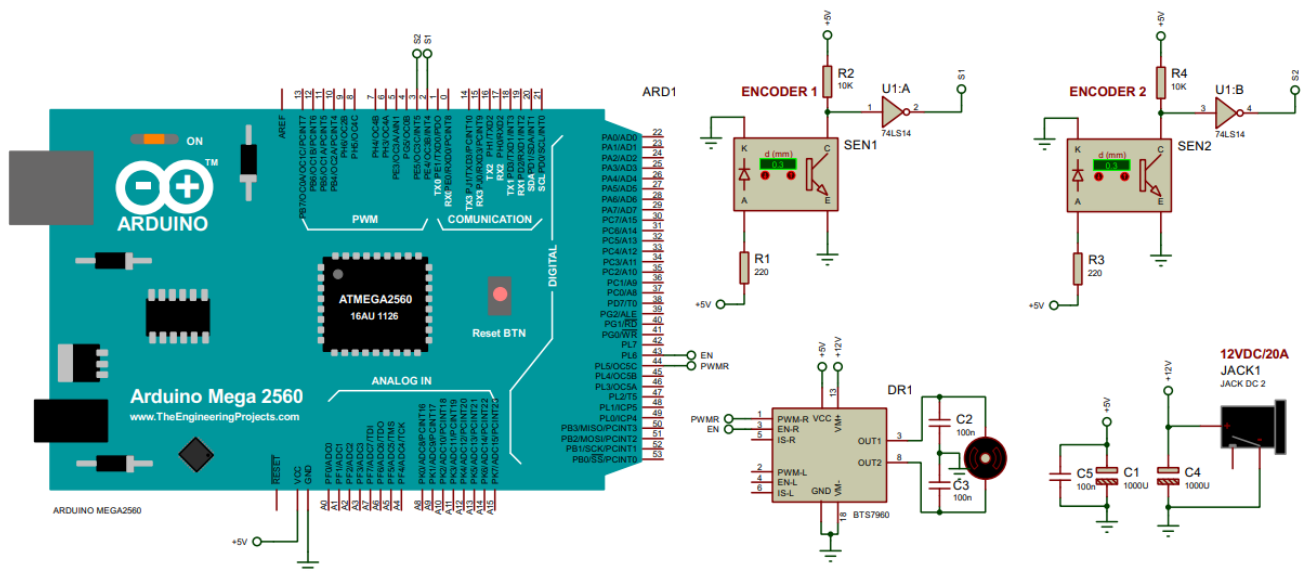


- Computador con software Arduino: Para cuantificar, procesar y visualizar las señales provenientes del Microcontrolador Arduino.

## 5.2. DISEÑO DEL SISTEMA DE ALIMENTACIÓN Y EXCITACIÓN TORSIONAL

La Figura 39, esquematiza el circuito de alimentación y excitación de la vibración torsional.

Figura 39. Circuito de excitación de vibración torsional.



Fuente. Los autores.

La señal alterna que es producida por el generador, presenta un voltaje armónico de amplitud y frecuencias regulables, y la señal de la fuente DC es un voltaje continuo que

también se puede regular. Estas dos señales anteriores llegan a un sumador del cual se obtiene una señal de la forma:

$$V = V_c + V_a \sin wt \quad (59)$$

La cual es llevada a un amplificador de corriente donde se le da a la señal la capacidad de corriente requerida por el motor. Todos estos elementos constituyen la fuente de alimentación del motor. Y el Arduino se encarga de realizar este acondicionamiento de la señal, sin la necesidad de un sumador o amplificador.

**5.2.1. Fuente de alimentación del banco de vibración torsional** Para excitar torsionalmente el sistema, se empleará un motor de corriente continua marca Aprint de 12V, que fue asignado por el Laboratorio de Sistemas Dinámicos para este proyecto. Este motor opera a un rango de 2500 a 3000 revoluciones por minuto (rpm). Debido a que el motor debe soportar las componentes armónicas del sistema, se ha optado por un motor de corriente continua con imanes permanentes. El par torsor que transmite este motor es de 0.145 N·m, suficiente para mover el sistema. El motor presenta unas dimensiones de 10 x 5 x 5 cm, lo que permite una instalación sencilla sobre el bastidor del banco. Para asegurar la fijación al soporte motor, el motor incluye una carcasa de metal que protege tanto el motor como el eje saliente, y cuenta con orificios de montaje para su correcta alineación con otras estructuras. Además, está equipado con dos terminales de alimentación: positivo y negativo. El eje saliente del motor tiene un diámetro de 8 mm, por lo que el acople seleccionado deberá contar con un orificio receptor compatible, mientras que en el otro extremo debe coincidir con el diámetro del eje primario. Adicionalmente, se prevé la necesidad de seleccionar un controlador adecuado para gestionar las condiciones operativas del motor en este entorno. La figura 40 muestra el motor seleccionado.

Figura 40. Motor Aprint asignado por el laboratorio de sistemas dinámicos DIC-BOT

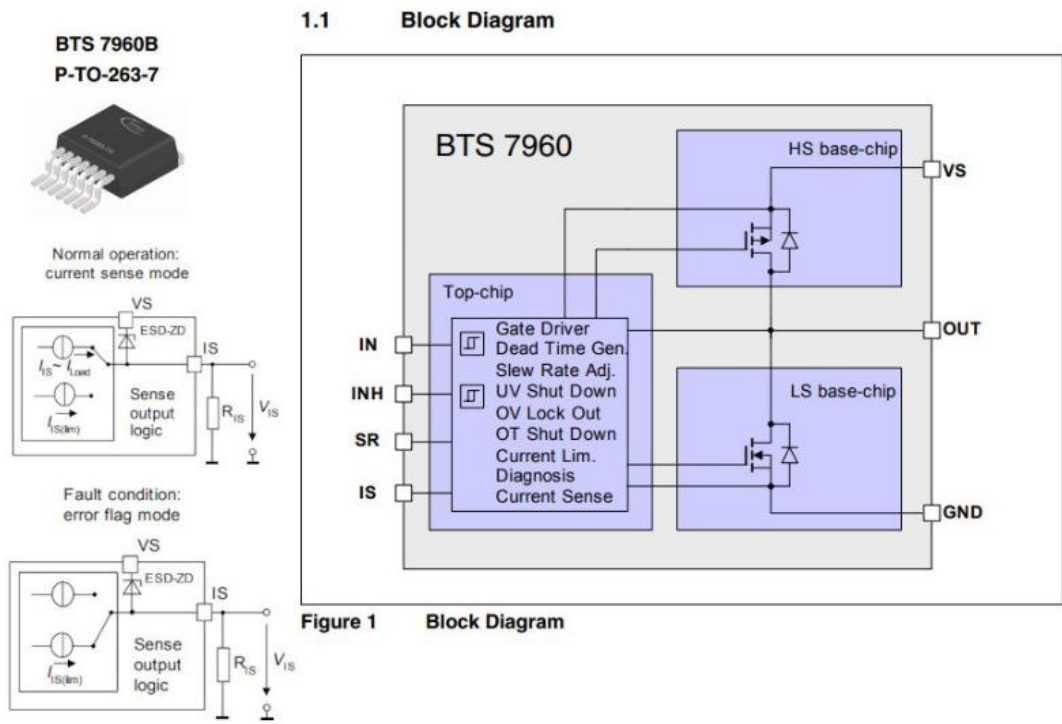


Fuente. Los autores

**5.2.2. Controlador de la fuente de excitación del banco** El controlador de motores BTS7960 es una opción muy utilizada con Arduino, diseñado para manejar motores de gran potencia. Este controlador puede suministrar corrientes elevadas, alcanzando hasta 43 amperios, lo que lo hace ideal para aplicaciones que requieren altos niveles de potencia. Generalmente, este rango de corriente es más que adecuado para la mayoría de las aplicaciones comunes. El controlador BTS7960 recibe señales digitales directamente desde un Arduino, ya sea con niveles de 5V o 3.3V, ya que es compatible con ambos voltajes. Además, tiene una entrada para recibir el voltaje proveniente de una fuente de alimentación externa, que es la encargada de alimentar el motor conectado al controlador. El controlador BTS7960 cuenta con una salida auxiliar (VCC, GND) que suministra 5V regulados, lo que permite alimentar dispositivos externos, como un Arduino, de manera directa y estable. Esto facilita la integración del controlador con otros componentes sin la necesidad de fuentes de alimentación adicionales. El controlador de motores BTS7960 se caracteriza por su simplicidad, ya que integra dos transistores MOSFET BTS7960 en configuración de puente H, junto con circuitería básica de soporte. No cuenta con un Microcontrolador interno ni lógica compleja, solo incorpora un buffer

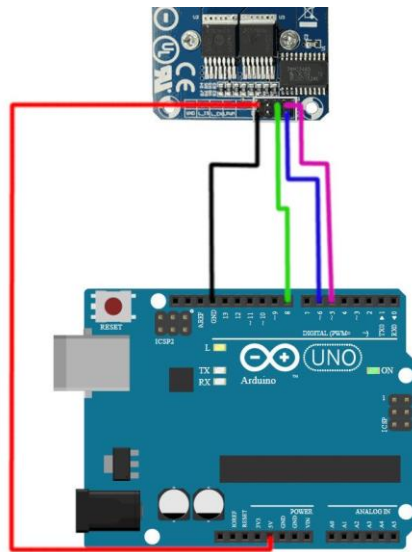
74HC244. Se trata de un controlador de potencia diseñado específicamente para manejar grandes corrientes, como se puede observar en la figura 41.

Figura 41. Esquema básico del BTS7960



Fuente. Handson Technology.

Figura 42. Esquema de conexión con Arduino.



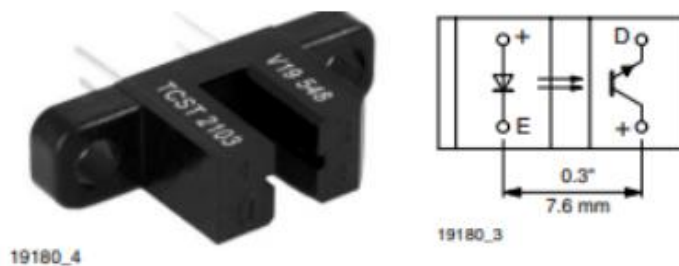
Fuente. Los autores.

Gracias a la velocidad de procesamiento del Arduino, resulta ideal para realizar las mediciones necesarias. Este microcontrolador cuenta con un reloj que opera a 16 MHz, lo que facilita la captura de datos a través de la tarjeta. La alimentación de la placa es de 5 voltios, suministrados por el computador al que esté conectado el Arduino. Se planea implementar una base para facilitar la ubicación del microcontrolador. Además, es importante destacar que la tarjeta recibe conexiones tanto del controlador del motor como de los sensores para medir vibraciones torsionales. Los niveles de PWM variables proporcionados por el Arduino son adecuados para controlar el motor Aprint, utilizado para excitar el banco de pruebas. Otra ventaja del Arduino es su tamaño compacto y peso liviano, lo que facilita su montaje y desmontaje, aportando dinamismo al sistema de pruebas. En resumen, el uso de Arduino proporciona un buen rendimiento dentro de la dinámica del sistema para realizar pruebas de vibración.

### 5.3. DISEÑO DEL SISTEMA DE MEDICIÓN Y ADQUISICIÓN DE DATOS DEL BANCO DE VIBRACIÓN TORSIONAL

De las diferentes técnicas de medición de vibración torsional analizadas, se ha optado por el método de medición en intervalos de tiempo debido a su facilidad de implementación y a que los resultados esperados se ajustan a las necesidades de un banco de pruebas de estas dimensiones. A continuación, se describen algunos de los componentes seleccionados para la medición. Entre ellos se destaca el sensor óptico de herradura TCST2103, el cual presenta características ideales para el análisis del fenómeno torsional. Este sensor, perteneciente a la familia de sensores ópticos, tiene una corriente de salida de 4 miliamperios y opera a un voltaje de 5V. En su operación, genera un diferencial de voltaje en el receptor cuando detecta un objeto dentro de la ranura. La distancia de la ranura es de 3.1 milímetros, lo que, junto a su tamaño compacto, le otorga una alta sensibilidad, haciendo necesario el uso de objetos delgados para obtener mediciones precisas.

Figura 43. Sensor óptico de herradura.



Fuente. VISHAY.

El sensor cuenta con una sensibilidad bastante alta, con un tiempo de respuesta en el rango de 50 microsegundos (0.00005 segundos). Esto proporciona un amplio margen dentro del espectro temporal para realizar mediciones precisas. En el escenario del banco de pruebas, se imprimirá una rueda encoder con 240 ranuras distribuidas uniformemente a lo largo de su perímetro. Esta rueda está diseñada para que encaje alrededor del disco y gire uniformemente con el disco de inercia. El número de dientes por disco ha sido seleccionado en función del tiempo de respuesta del sensor y la precisión deseada en las lecturas. Con una velocidad máxima de trabajo de 1000 RPM proporcionada por el motor, se plantea la validación de este diseño para asegurar que el sensor pueda captar adecuadamente las pulsaciones generadas por las ranuras en la rueda encoder.

$$Tiempo\ por\ revolución = 1000 \frac{rev}{min} * \frac{1\ min}{60\ s} = 16.67 \frac{rev}{s} \quad (60)$$

$$Tiempo\ por\ revolución = 0.06\ s \quad (61)$$

El siguiente paso es calcular el tiempo en el que cada ranura será medida individualmente. Este cálculo es fundamental para validar que el número de ranuras seleccionadas para los discos es el adecuado, garantizando que el sensor pueda capturar cada ranura de manera precisa.

$$Tiempo\ por\ ranura = \frac{0.06}{240} = 0.00025 \quad (62)$$

$$0.000005 < 0.00025 \quad (63)$$

Por lo tanto, se compara el tiempo mínimo de respuesta del sensor con el tiempo de operación en el escenario planteado de 240 ranuras a 1000 RPM. Como se observa, el tiempo de respuesta del sensor es menor, lo que confirma que, bajo los parámetros

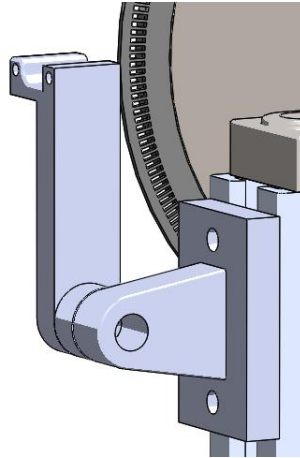
especificados, el sensor puede funcionar correctamente. Tal como se mencionó anteriormente, se utilizarán dos sensores para medir las vibraciones en dos puntos del eje, implementando una configuración con dos sensores TCST2103 en los extremos del sistema. Gracias al uso de luz infrarroja emitida por el conjunto emisor-receptor, los materiales más adecuados para estas aplicaciones suelen ser de superficie fina, como papel o láminas delgadas, cuya textura no afecte la sensibilidad del sensor. En este escenario, se utilizará una impresión 3D de material PET-G diseñada específicamente para este sistema de medición, de forma que active el sensor y generar las pulsaciones adecuadas. Se descartó el uso de una película de acetato sobre acrílico ya que es un material que se raya con el tiempo y puede distorsionar las mediciones. Además, se diseñó en el mismo material dos bases iguales para soportar los sensores y ubicarlos correctamente en las ranuras.

Figura 44. Diseño de rueda encoder.



Fuente. Los autores.

Figura 45. Diseño de la base del sensor.



Fuente. Los autores.

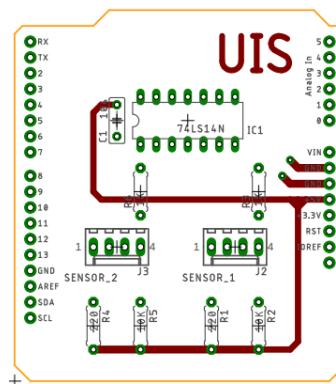
Como resultado, cada conjunto de sensor de herradura está equipado con una compuerta lógica 74LS14 Schmitt Trigger que se puede apreciar en la Figura 46, la cual envía una señal inversa y filtrada a la tarjeta de control cuando detecta un objeto en la herradura del sensor. El sensor se conecta a un conjunto de resistencias. En el lado del emisor, tiene una resistencia de 400 ohmios conectada al positivo, mientras que el negativo va a tierra. En el receptor, hay dos pines, uno de los cuales también se conecta a tierra, mientras que el positivo está conectado a dos resistencias en serie de 200 ohmios y 2.4 kilo ohmios. En el extremo de la primera resistencia se genera la señal que indica la presencia o ausencia de un objeto. Usualmente, emite voltajes entre 3 y 5 voltios. Este conjunto de sensor con resistencias y la compuerta lógica debe montarse sobre la placa de circuito impresa (PCB) que se aprecia en la Figura 47, la cual recibe los 5 voltios necesarios para su correcto funcionamiento mediante la conexión por pines macho-hembra a la tarjeta de adquisición de datos Arduino Mega, que se muestra en la figura 51. El cableado debe estar correctamente dispuesto para facilitar la conexión con la tarjeta controladora. El código ejecutado por el software de Arduino para la visualización del oscilograma se puede consultar en el Anexo A.

Figura 46. Circuito integrado 74LS14.



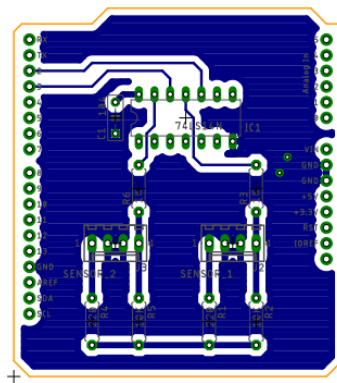
Fuente. Los autores.

Figura 47. Vista inferior de la tarjeta electrónica impresa.



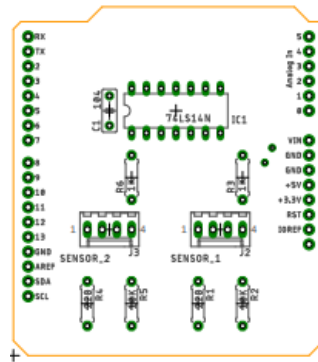
Fuente. Los autores.

Figura 48. Plano intermedio de la tarjeta electrónica impresa.



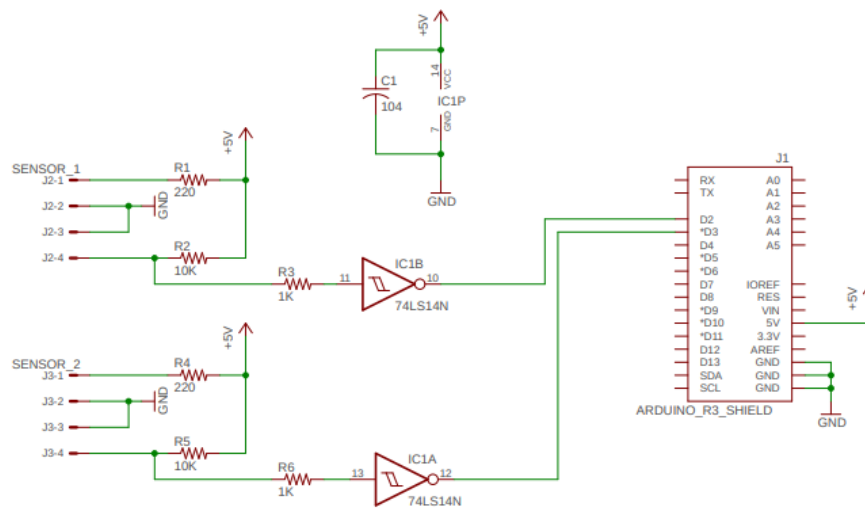
Fuente. Los autores.

Figura 49. Vista superior de la tarjeta electrónica impresa.



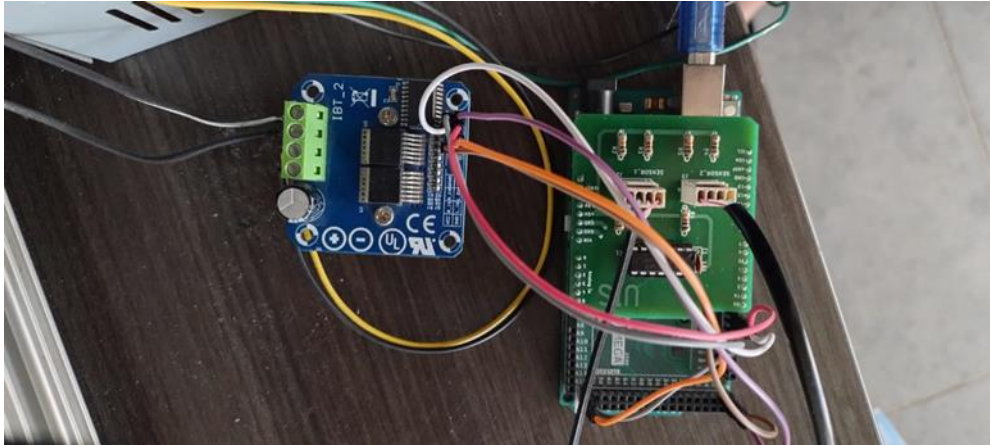
Fuente. Los autores.

Figura 50. Circuito de la tarjeta electrónica diseñada.



Fuente. Los autores.

Figura 51. Diseño final del sistema de adquisición de datos

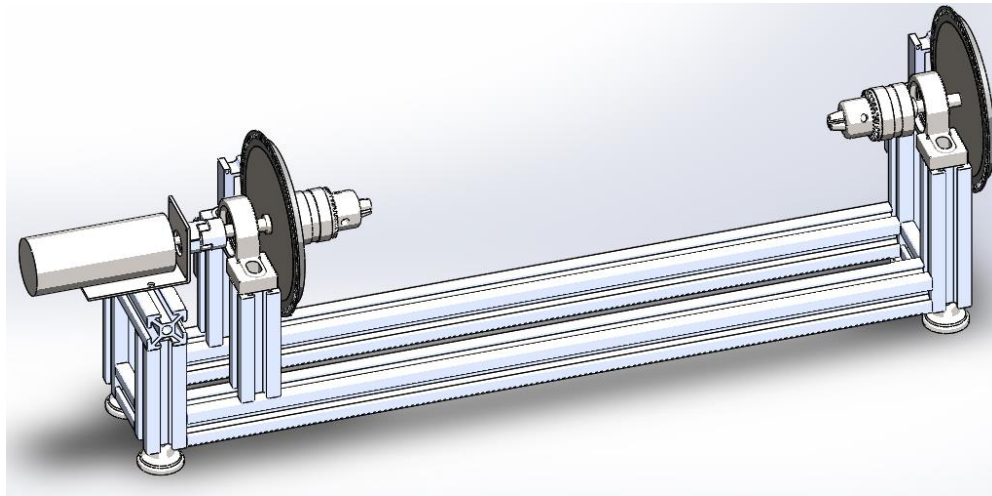


Fuente. Los autores.

## 5.4. DISEÑO DEL SISTEMA MECÁNICO

**5.4.1. Descripción** El sistema mecánico consiste en un bastidor conformado por perfiles TSLOT 4040 de aluminio unidos mediante ángulos con sus respectivas tuercas cabeza de martillo y tornillos avellanados. Sobre este a su vez descansa el soporte motor y dos chumaceras cada una con su conjunto eje-disco-mandrill respectivo. Además, el bastidor está montado sobre 4 patas niveladoras. Mediante el uso de los mandriles se realiza el montaje del rotor. En la Figura 51 se evidencia el diseño del espécimen torsional.

Figura 52. Diseño del espécimen torsional.



Fuentes. Los autores.

El modelo mecánico es un rotor o eje delgado de acero inoxidable y dos volantes de inercia desmontables, sujetados a un eje primario y secundario respectivamente. El eje primario se conecta al motor mediante un acople tipo araña.

El modelo mecánico posee dos inercias principales (la del primer volante de inercia que se asume como la inercia del rotor del motor, acople, disco, mandril y eje primario y el segundo volante de inercia que se asume como la inercia del disco, eje secundario y mandril) que forman un sistema de dos grados de libertad cuya primera frecuencia natural a la torsión es fácilmente calculable y simula el comportamiento torsional de una disposición muy común en trenes de maquinaria, por ejemplo un tren que contenga un motor, un reductor y una carga.

Los modelos mecánicos se diseñaron de tal forma que presente el siguiente comportamiento torsional:

- El modelo mecánico debe poseer su primera frecuencia natural a la torsión lo más baja posible y al mismo tiempo presentar amplitudes de vibración altas con el fin de observar claramente la vibración.

**5.4.2. Cálculo del diámetro de eje primario y secundario** Para determinar el diámetro apropiado era vital saber que se conseguía en el mercado, si bien un eje se puede llevar a la medida que se desee, el elemento limitador es el rodamiento. En este caso se prefirió usar una unidad de rodamiento para hacer más sencillo el montaje y la cual tiene las siguientes características:

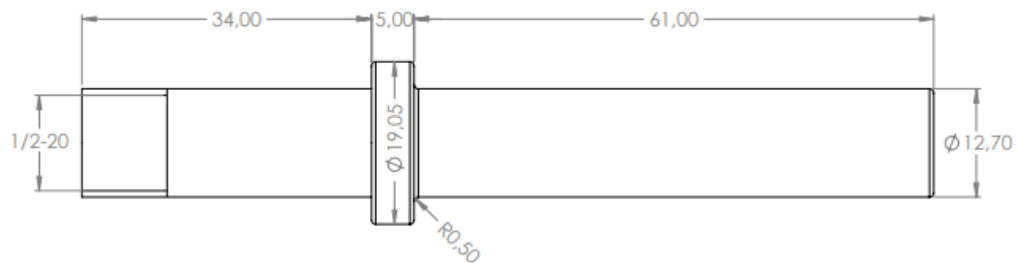
- Fácil montaje
- Rodamientos de bolas
- Fácil adquisición

Estas unidades son fabricadas por la compañía FE y en la ciudad es de fácil adquisición la unidad cuyo diámetro de eje es  $\frac{1}{2}$ ". En milímetros no son muy populares y elegir una medida superior se convertía en algo económicamente inviable y mecánicamente sería sobredimensionar un eje cuyas cargas se preveían no serían altas. Como consideración para este diseño, los ejes debían tener una sección con diámetro menor o igual a 0.75 pulgadas para que sirviera de apoyo o tope a los mandriles y así garantizar la alineación de sus caras. El diámetro de los discos de inercia es de 18 cm aproximadamente, con base en esa medida se diseñó un cubo que sobresaliera al disco para asegurar el ajuste al eje sobre el cual sería montado. La mejor alternativa para la elaboración de un elemento que de entrada no debería inducir desbalance masico ni desalineamiento consistía en mecanizarlo en una sola pieza, evitando así piezas secundarias insertadas mediante presión o juntas soldadas. Diseñando esta pieza en SolidWorks la masa de 2 kg aproximadamente, dato necesario para hallar la entrada de potencia al sistema.

**5.4.2.1 Análisis estático eje primario y secundario** Este banco consta de dos etapas, la primera (eje primario) que recibe el movimiento del motor y que para análisis de vibración torsional actúa como maquina fija y la segunda etapa (eje secundario), donde

se encuentra el disco y el mandril. Como consecuencia que el disco de inercia sea de 18 cm de diámetro, el soporte debe satisfacer dicha altura para que no exista interferencia con la estructura, es por esa razón que esta medida es quien más incidencia tiene en el tamaño del eje primario. Como mínimo la distancia entre la cintura y el extremo debe ser de 19 mm, es por esa razón que el eje primario tiene las siguientes características.

Figura 53. Plano eje primario



Fuente. Los autores

Un eje de estas dimensiones fabricado en acero AISI 1045 tiene una masa de 0.1041 kg. El cambio de sección que se aprecia en la figura tiene por función ser el apoyo del mandril, y sobre este no actuarán cargas externas radiales ni axiales.

- Cálculo del torque

Para calcular el torque para vencer la inercia se tuvo que diseñar previamente el eje y el disco (etapa secundaria) porque es ahí donde está la salida de potencia. Una vez hecho esto, los datos son los siguientes:

Tabla 7. Características del eje, del disco y mandril.

ELEMENTO	MASA [kg]	INERCIA [ $g * mm^2$ ]
EJE	0.1041	2351.53
DISCO	2	3903975.32
MANDRIL	0.2812	83034.79

Fuente. Los autores.

Todo este proceso debe concurrir con el cálculo del torque necesario para mover el eje, el disco y el mandril y llevarlo a una velocidad de régimen, el análisis dinámico es el siguiente:

El sistema debe alcanzar el régimen en 5 segundos y partirá de una velocidad angular 0 (cero) hasta una velocidad angular de 100 y/o 1500 rpm (motores comerciales).

Ecuación. Sumatoria de torques

$$\sum Torque = I * \alpha \quad (65)$$

Ecuación. Inercias eje primario

$$I = I_{disco} + I_{eje} + I_{mandril} \quad (66)$$

Ecuación. Aceleración angular

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (67)$$

Es preciso aclarar que el torque debe darse en N·m para posteriormente seleccionar un motor, por lo tanto, los cálculos llevarán sus factores de conversión pertinentes.

Tabla 8. Torque necesario para mover el sistema.

VELOCIDAD ANGULAR[rpm]	TORQUE [N.m]
100	0.008355
1500	0.125

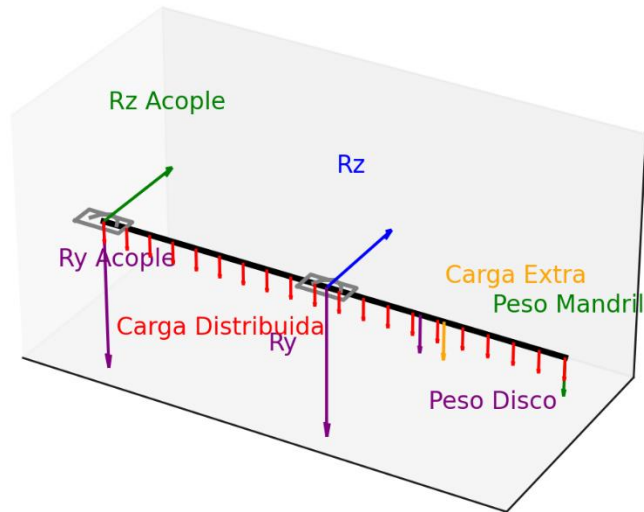
Fuente. Los autores.

Del ítem anterior donde se calculaba el torque necesario para mover el eje, el disco y el mandril, se obtuvo que ese valor es 0.125 cuando gira a 1500 rpm y 0.0133 cuando gira a 100 rpm. Teniendo esto en cuenta el motor asignado por el laboratorio de sistemas dinámicos es lo suficiente seguro para operar y para apreciar las fallas en espectro (usadas como comprobación de la fase) ya que genera un torque aproximado de 0.125 N·m. Entonces el motor generara el torque máximo cuando el sistema trabaje a 1500 rpm.

- Análisis estático: Etapa primaria

En la etapa primaria el eje está sometido al torque del motor, que es transmitido por el acople tipo araña el cual se considera rígido. El siguiente DCL contiene tanto el plano XY como el plano XZ.

Figura 54. DCL eje primario



Fuente. Los autores

- Plano YZ

Las ecuaciones para este plano (en análisis estático) son las siguientes:

Tabla 9. Datos del eje primario.

DATO	MAGNITUD
$L_{EJE}$	100 mm
Masa del eje	0.1041 kg

Fuente. Los autores

Primero, convertimos las masas a fuerzas (peso) usando la aceleración gravitacional:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad (68)$$

Peso del disco:

$$W_{disco} = masa\ disco \times gravedad = 2\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 19.62\ N \quad (69)$$

Peso del mandril:

$$W_{mandril} = masa\ mandril \times gravedad = 0.2812\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 2.76\ N \quad (70)$$

Peso del eje:

Al ser una carga distribuida se calcula de la siguiente manera:

$$W_{eje} = masa\ eje \times gravedad = 0.1041\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 1.02\ N \quad (71)$$

Carga extra:

La carga extra corresponde a la masa de la cintura mecanizada en el eje por la gravedad y tiene un valor de:

$$W_{extra} = 0.098\ N \quad (72)$$

- Momento en el extremo del eje

Calculamos los momentos generados por las fuerzas alrededor del extremo del eje donde se encuentra el acople.

$$\sum M_{acople} = W_{eje} \times \frac{0.1\ m}{2} + W_{disco} \times 0.071\ m + W_{mandril} \times 0.1\ m + W_{extra} \times 0.0635 \quad (73)$$

$$M_{acople} = 1.7262\ N \cdot m \quad (74)$$

Cálculo de la reacción en  $R_y$

Usamos el momento calculado y la distancia de  $R_y$  al extremo del eje para encontrar la reacción  $R_y$

$$R_y = \frac{M_{acople}}{\text{distancia a } R_y} = \frac{1.7262 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.0475 \text{ m}} = 36.34 \text{ N } \uparrow \quad (75)$$

Cálculo de la reacción en  $R_{yacople}$

Sabemos que la suma de todas las fuerzas en el eje debe ser 0. Entonces, para calcular  $R_{yacople}$ , restamos la fuerza  $R_y$  de la suma total de fuerzas.

$$\sum F_y = 0 \quad (76)$$

$$\sum F_y = R_y - W_{disco} - W_{mandril} - W_{eje} - W_{extra} - R_{yacople} = 0 \quad (77)$$

$$R_{yacople} = 28.697 \text{ N } \downarrow \quad (78)$$

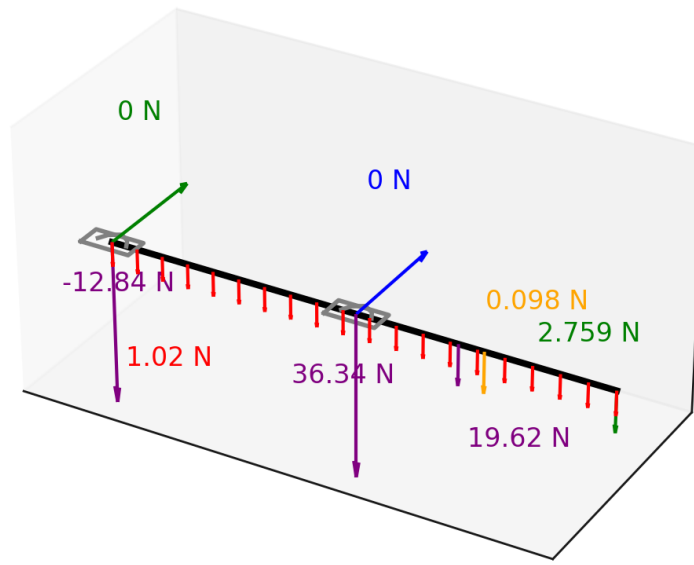
Reacción en  $R_z$  y  $R_{zacople}$

El sistema no presenta cargas en el plano  $z$  por lo tanto el valor de estas reacciones es el mismo y es 0.

$$R_z = 0 \quad (79)$$

Al resolver estas ecuaciones se obtienen los valores de las fuerzas que se representan en los diagramas de cortante y momento flector del plano XY.

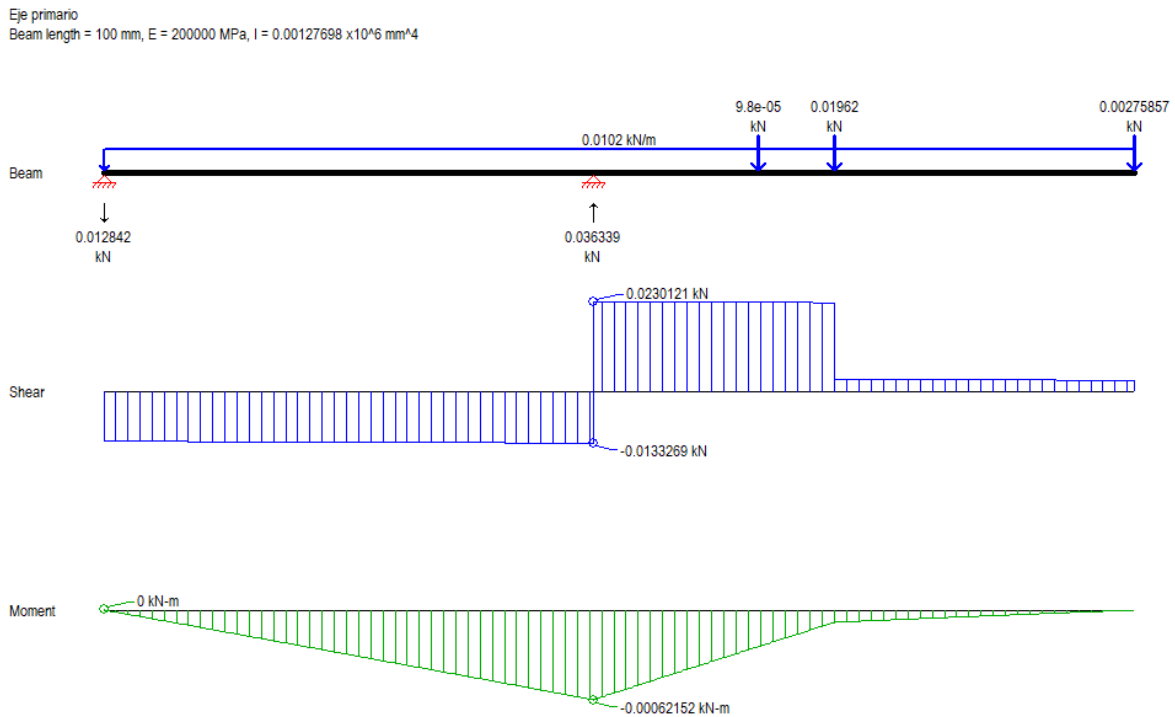
Figura 55. Cargas en eje primario



Fuente. Los autores

Se calcularon los Diagramas cortante y momento flector mediante el programa DSNWinbeam.

Figura 56. Diagrama de Cortante y Momento flector para el eje primario – Plano XY



Fuente. DSNWinbeam.

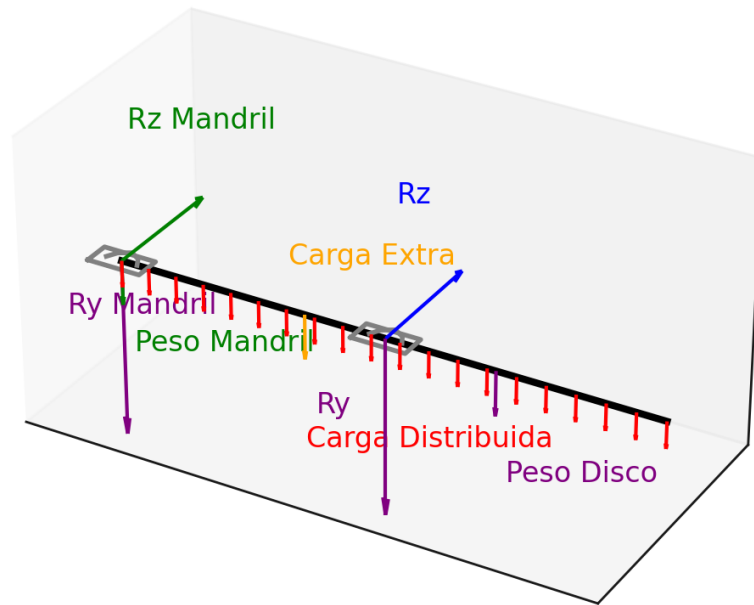
$$V_{XZ} = 23.012 \text{ N} \quad (80)$$

$$M_{XZ} = -0.6215 \text{ N.m} \quad (81)$$

- Análisis estático: Etapa secundaria

La etapa secundaria está diseñada para conectar el segundo rotor con el primero, mediante el eje de ensayo. El siguiente DCL contiene tanto el plano XY como el plano XZ.

Figura 57. DCL eje secundario



Fuente. Los autores.

Tabla 10. Datos físicos etapa secundaria

DATO	MAGNITUD
$L_{EJE}$	90 mm
Masa del eje	0.09354 kg
$W_{disco}$	19.62 N

Fuente. Los autores

Primero, convertimos las masas a fuerzas (peso) usando la aceleración gravitacional:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad (82)$$

Peso del disco:

$$W_{disco} = masa\ disco \times gravedad = 2\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 19.62\ N \quad (83)$$

Peso del mandril:

$$W_{mandril} = masa\ mandril \times gravedad = 0.2812\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 2.76\ N \quad (84)$$

Peso del eje:

Al ser una carga distribuida se calcula de la siguiente manera:

$$W_{eje} = masa\ eje \times gravedad = 0.09354\ kg \times 9.81\ \frac{m}{s^2} = 0.9177\ N \quad (85)$$

Carga extra:

La carga extra corresponde a la masa de la cintura mecanizada en el eje por la gravedad y tiene un valor de:

$$W_{extra} = 0.098\ N \quad (86)$$

- Momento en el extremo del eje

Calculamos los momentos generados por las fuerzas alrededor del extremo eje donde se encuentra el mandril, Usamos el momento calculado y la distancia de  $R_y$  al extremo del eje para encontrar la reacción  $R_y$

$$\sum M_{mandril}: R_y \times 0.0335 = W_{eje} \times 0.0115 + W_{disco} \times 0.0275\ m + W_{extra} \times 0.016 \quad (87)$$

$$R_y = 13.616\ N \uparrow \quad (88)$$

Cálculo de la reacción en  $R_{ymandril}$  (89)

Sabemos que la suma de todas las fuerzas en el eje debe ser 0. Entonces, para calcular  $R_{ymandril}$ , restamos la fuerza  $R_y$  de la suma total de fuerzas.

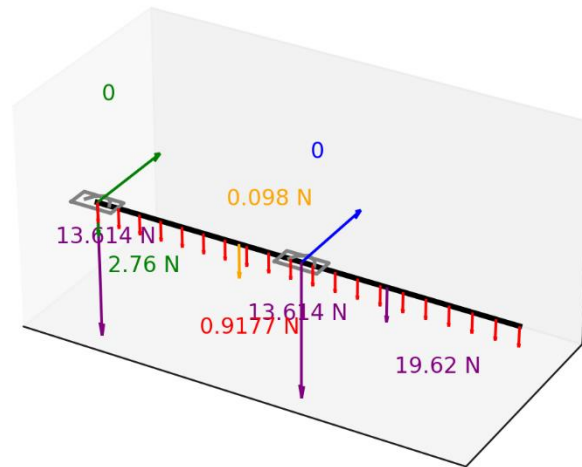
$$\sum F_y = 0 \quad (90)$$

$$\sum F_y = R_y - W_{disco} - W_{mandril} - W_{eje} - W_{extra} - R_{ymandril} = 0 \quad (91)$$

$$R_{ymandril} = 37.010 \text{ N} \downarrow \quad (92)$$

Al resolver estas ecuaciones se obtienen los valores de las fuerzas que se representan en los diagramas de cortante y momento flector del plano XY.

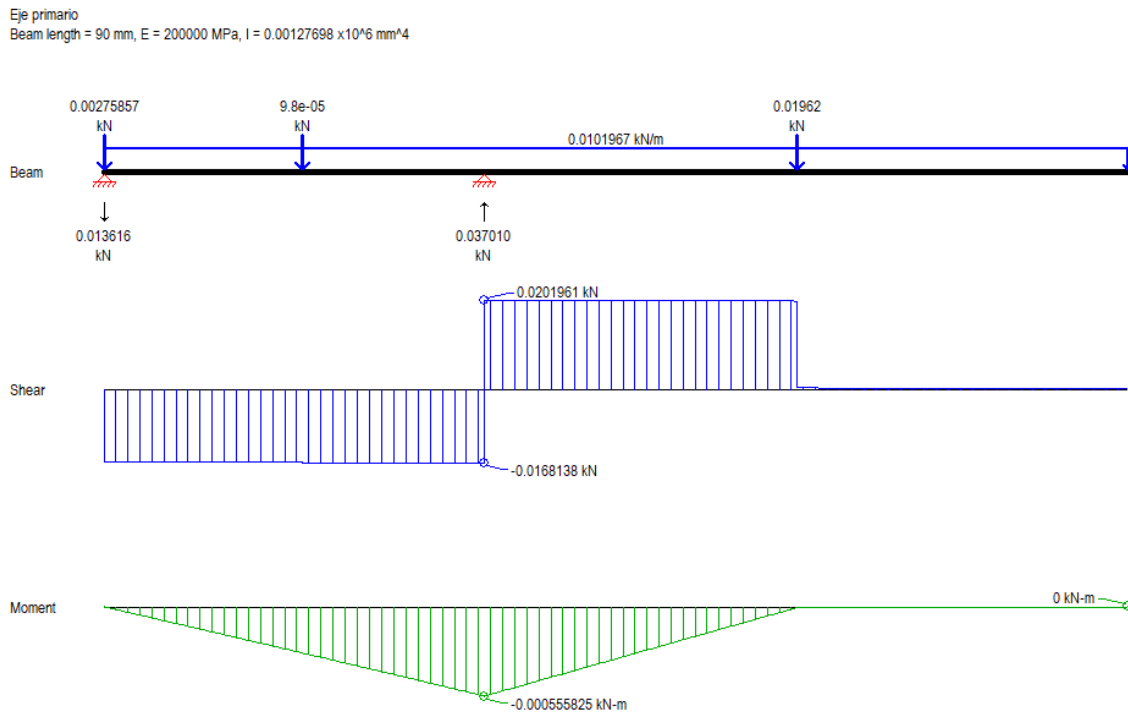
Figura 58. Cargas en eje secundario



Fuente. Los autores

Se calcularon los Diagramas cortante y momento flector mediante el programa DSNWinbeam.

Figura 59. Diagrama de Cortante y Momento flector para el eje secundario – Plano XY



Fuente. DSNWinbeam.

$$V_{XZ} = 20.02 \text{ N} \quad (93)$$

$$M_{XZ} = -0.5583215 \text{ N.m} \quad (94)$$

Momentos máximos de cada eje y en cada plano

Se debe tener en cuenta que, en la sección de apoyo para el mandril, no se ejerce ninguna fuerza ni actúa como hombro para ningún rodamiento, con lo que de acuerdo a la teoría puede asumirse como un eje de sección única.

Tabla 11. Valores de momentos flectores máximos

EJE	PLANO	MOMENTO [N·m]
ETAPA 1	XY	0.622
ETAPA 2	XY	0.556

Fuente. Los autores.

Datos de la sección crítica

$$V_{Max} = 23.012 N \quad (95)$$

$$M_{Max} = 0.6215 N.m \quad (96)$$

$$S_y = 45514.7 Psi \quad (97)$$

$$T_{motor} = 0.125 N.m \quad (98)$$

$$N_{seguridad} = 2.5 \quad (99)$$

**5.4.2.1.1 Criterio de falla por resistencia de materiales** Las siguientes ecuaciones, para definir esfuerzos normales principales, esfuerzos normales y esfuerzo cortante, son tomadas del libro de Hamrock, ecuación 2-16, 4-48, 4-34, respectivamente.

$$\sigma_{1-2} = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (100)$$

$$\sigma_x = \frac{32 * M_{Max}}{\pi * d^3} \quad (101)$$

$$\tau_{xy} = \frac{16 * T_{motor}}{\pi * d^3} + \frac{2 * V_{Max}}{A} \quad (102)$$

$$A = \pi * \left(\frac{d^2}{4}\right) \quad (103)$$

$$\sigma_{1-2} = \frac{S_y}{N_{seguridad}} \quad (104)$$

Resolviendo por EES tenemos.

$$d = 3.717 \text{ mm} \quad (105)$$

**5.4.2.1.2. Cálculos del diámetro por fatiga** Para el acero denominado AISI 1045, que se caracteriza por ser un acero de medio carbono que posee baja soldabilidad y buena maquinabilidad, responde al tratamiento térmico para ser endurecido y que por su dureza y tenacidad es utilizado para la fabricación de componentes de maquinaria, se tienen las siguientes propiedades.

$$S_{ut} = 85340.1 \text{ Psi uo } 588.4 \text{ MPa} \quad (106)$$

$$S_y = 45514.7 \text{ Psi o } 313.8 \text{ MPa} \quad (107)$$

Se determina el límite de resistencia a la fatiga, tomando como referencia el libro de diseño de Hamrock.

$$S_e' = 0.5 * S_{ut} \quad (108)$$

Ecuación 7-7, teniendo en cuenta una desviación estándar de 15%, para cuando no se presenta un estudio detallado del material.

Los factores que se manejan a continuación son tomados del libro de Hamrock y el de Shigley, ver anexo.

$$K_d = 0.886 * d_{fatiga}^{-0.112} = 0.93 \quad (109)$$

$$K_{Temp} = 1 \quad (110)$$

$$K_s = 0.69 \quad (111)$$

$$K_c = 0.897 \quad (112)$$

$$K_t = 1 \quad (113)$$

$$K_m = 1 \quad (114)$$

Por tanto, el límite de fatiga final se obtiene con la siguiente ecuación.

$$S_e = S_e' * K_t * K_d * K_{Temp} * K_s * K_c * K_m \quad (115)$$

Según la ecuación 12-24 del libro de Mott, la cual es compatible con la norma ANSI B 106.IM-1985, se puede usar la siguiente ecuación para flexión pura, torsión pura y esfuerzos combinados.

El factor de seguridad asumido, es usado normalmente donde existe una confianza promedio en los datos de resistencia del material y las cargas.

El factor de concentrador de esfuerzos, es tomado del libro de Diseño I, capítulo de fatiga de Alfredo Parada, este factor es dado por el mecanizado.

$$N = 2,5 \quad (116)$$

$$K_f = 1 \quad (117)$$

$$T_m = 0.125 \text{ N.m} \quad (118)$$

$$M_{Max} = 0.6215 \text{ N.m} \quad (119)$$

$$d_{fatiga} = \left\{ \frac{32 * N}{\pi} * \left[ \sqrt{\left( \frac{K_f * M_{Max}}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} * \left( \frac{T_m}{S_y} \right)^2} \right] \right\}^{1/3} \quad (120)$$

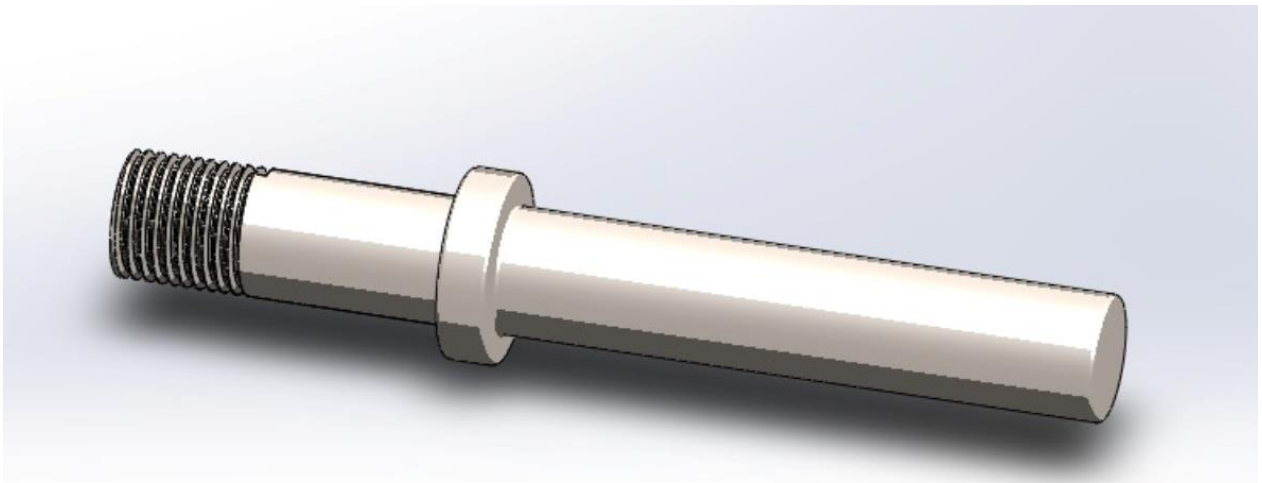
Resolviendo por EES, del anterior sistema se encuentra.

$$d_{fatiga} = 4.545 \text{ mm} \quad (121)$$

De lo anterior se puede concluir, que en general el eje se encuentra sobredimensionado para las cargas a las cuales se va a encontrar sometido, dando como resultado un factor de seguridad muy conservativo.

**5.4.2.1.3. Diseño final del eje primario** De acuerdo con los cálculos realizados anteriormente, se puede establecer el diámetro mínimo necesario para la construcción e implementación del eje principal. Se ha mecanizado un eje de  $\frac{3}{4}$ " de diámetro que fue dispuesto por el consejo de escuela y con respecto a este se desarrolla el modelo final del eje. Como se ve en la figura 60.

Figura 60. Modelo final.



Fuente. Los autores

**5.4.2.1.4. Tolerancias sobre el eje** Para montar las diferentes piezas, que hacen parte del tren principal, es necesario definir el tipo de ajuste con sus respectivas tolerancias. Estas tolerancias se deben tener en cuenta al momento de la fabricación para lograr lo establecido según los diseñadores.

- El ajuste que se selecciona para el conjunto eje-acople, es de tipo rígido, con el cual se logra una unión solidaria entre el eje del motor y el eje primario, de esta manera se evitan vibraciones inducidas por este ensamble. El ajuste que se aplica es FN1, este se caracteriza por ser de tipo forzado ligero, requiere poca presión de montaje y produce ensambles más o menos permanentes. Para este ajuste se tienen las siguientes tolerancias:

Figura 61. Tolerancias eje-acople

Tamaño nominal, pulgadas	Límites de interferencia	Clase FN 1			Límites de interferencia	Clase FN 2		Límites de interferencia	Clase FN 3	
		Límites estándares		Límites estándares		Límites estándares				
		Agujero H6	Eje	Agujero H7		Eje s6	Agujero H7		Eje t5	
0 - 0.12	0.05 0.5	+0.25 -0	+0.5 +0.3	0.2 0.85	+0.4 -0	+0.85 +0.6				
0.12 - 0.24	0.1 0.6	+0.3 -0	+0.6 +0.4	0.2 1.0	+0.5 -0	+1.0 +0.7				
0.24 - 0.40	0.1 0.75	+0.4 -0	+0.75 +0.5	0.4 1.4	+0.6 -0	+1.4 +1.0				
0.40 - 0.56	0.1 0.8	+0.4 -0	+0.8 +0.5	0.5 1.6	+0.7 -0	+1.6 +1.2				
0.56 - 0.71	0.2 0.9	+0.4 -0	+0.9 +0.6	0.5 1.6	+0.7 -0	+1.6 +1.2				
0.71 - 0.95	0.2 1.1	+0.5 -0	+1.1 +0.7	0.6 1.9	+0.8 -0	+1.9 +1.4				
0.95 - 1.19	0.3	+0.5	+1.2	0.6	+0.8	+1.9	0.8	+0.8	+2.1	

Fuente. Dibujo en ingeniería y comunicación gráfica de Bertoline, 1999.

- El ajuste que se selecciona para el conjunto discos de inercia-eje, debe ser un ajuste de tipo de interferencia, ya que esta unión posee elementos mecánicos que sujetan los discos al eje mediante tornillos prisioneros, por tanto, se toma como referencia un ajuste de clase FN1, debido a que es un ajuste no forzado, adecuado para piezas de acero, que en este caso de montan y desmontan continuamente. Por tanto, se toman las mismas tolerancias.

**5.4.2.2 Diseño del eje secundario** Para la determinación del diámetro del eje secundario, se tiene en cuenta inicialmente la disponibilidad del material que se genera al concluir el diseño del eje principal, ya que, este tipo de materia prima comercialmente en longitudes grandes, por tanto, para lograr un aprovechamiento de los recursos se plantea generar un diseño a partir de los medios existentes. Dado lo anterior, el estudio de esta pieza está enfocado simplemente al conocimiento de su capacidad en el diseño frente a las cargas inducidas, por lo cual, el análisis crítico se genera con respecto al diámetro dispuesto para este proyecto que es  $\frac{3}{4}$ ". Teniendo en cuenta que se utiliza el mismo material base para la construcción del anterior eje, todos los factores son iguales menos el momento máximo.

**5.4.2.2.1. Cálculos del diámetro por fatiga** Se tienen los mismos coeficientes de Marín

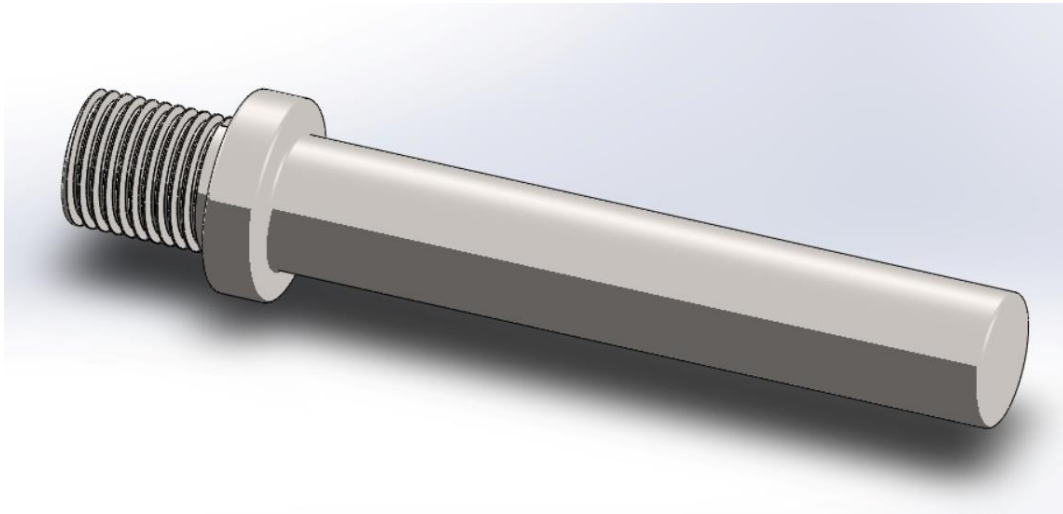
$$M_{Max} = 0.6215 \text{ N.m} \quad (122)$$

Resolviendo por EES mediante la ecuación

$$d_{fatiga} = 4.545 \text{ mm} \quad (123)$$

En conclusión, el diámetro calculado por el análisis de fatiga cumple satisfactoriamente debido a que las dimensiones del eje son mayores a las especificaciones mínimas requeridas por el diseño de fatiga. El modelo final de este se puede ver a continuación.

Figura 62. Modelo eje secundario



Fuente. Los autores.

**5.4.3. Análisis de velocidades críticas** Para el análisis de velocidades críticas, existen diversos métodos desarrollados para situaciones específicas y casos particulares, este análisis se hace necesario debido a que todo eje, aun sin presencia de cargas externas aplicadas sobre él, presentan deformación al momento de la rotación, estas deformaciones dependen de la rigidez del eje y los soportes, de la masa del eje y demás partes adicionadas sobre el eje, del desequilibrio másico del eje y del amortiguamiento final que presente el sistema. Cuando se inicia un análisis de velocidades críticas se debe tener en cuenta, que la deformación es función de la velocidad y esta presenta sus máximos valores en las velocidades críticas, teniendo en cuenta que las más

representativas son la primera y la segunda, después de estas primeras velocidades, las demás son tan altas que resultan muy lejanas a las velocidades frecuentes de operación de las máquinas.

- Método de Rayleigh: Este método proporciona una aproximación primera para el cálculo de la velocidad crítica, en un sistema de masas múltiples, pero genera una sobrestimación en el resultado final.
- Método de Ecuación de frecuencias: Este método muestra valores exactos para el cálculo de  $n$  velocidades, pero resulta ser un método muy complejo, al momento del desarrollo de cálculos.
- Método de Dunkerley: Este método entrega una aproximación de la primera velocidad crítica en un sistema de múltiples masas, pero genera una subestimación al resultado de la primera velocidad.

Por lo tanto, se puede ver que al generar el análisis de Rayleigh y el de Dunkerley, se genera una sobreestimación y una subestimación respectivamente, lo cual sirve para generar un rango de frecuencia crítica y una mejor estimación de la primera velocidad.

#### Nomenclatura

$E$ : Módulo de elasticidad

$I$ : Inercia

$d$ : Diámetro del eje

$P_1$ : Fuerza del mandril

$P_2$ : Fuerza de la carga extra

$P_1$ : Fuerza del disco 1

$W_{cr1Ray}$ : Velocidad crítica método Rayleigh

$W_{cr1Dun}$ : Velocidad crítica método Dunkerley

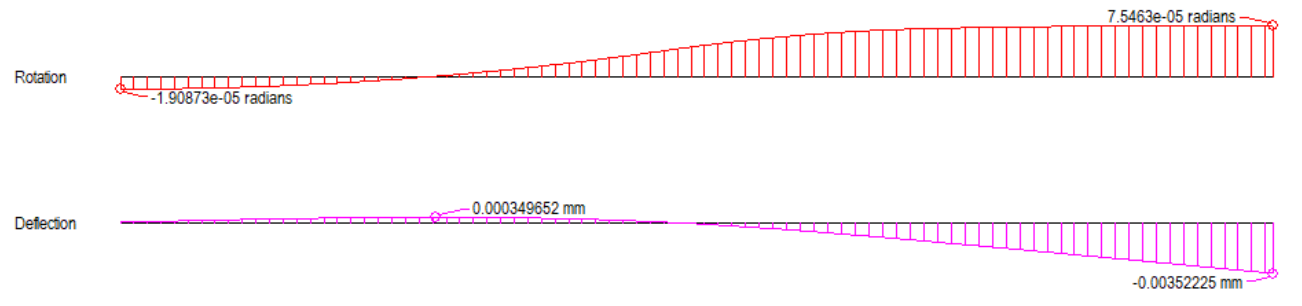
$\delta_i$ : Deformación presente en el eje

**5.4.3.1. Cálculo de la primera velocidad crítica según Rayleigh** Basados en la fórmula de Rayleigh se procede a determinar la primera velocidad crítica del eje principal.

$$W_{cr1Ray} = \sqrt{\frac{g(\sum P_i * \delta_i)}{(\sum P_i * \delta_i^2)}} \quad (124)$$

Con los siguientes valores conocidos y con el uso del software DSNWinbeam se hallan las deformaciones requeridas.

Figura 63. Deformaciones método Rayleigh



Fuente. DSNWinbeam.

$$E = 200000 \text{ MPa} \quad (125)$$

$$I = 0.00127698 \text{ mm}^4 \quad (126)$$

Mediante la herramienta EES se calcula:

$$\delta_1 = 0.000000864 \quad (127)$$

$$\delta_2 = 0.000001379 \quad (128)$$

$$\delta_3 = 0.000003523 \quad (129)$$

Arrojando, una velocidad crítica de

$$W_{cr1Ray} = 2314,7 \text{ RPM} \quad (130)$$

**5.4.3.2. Cálculo de la primera velocidad crítica según Dunkerley** Se halla la velocidad crítica por el método de Dunkerley procediendo de la siguiente forma.

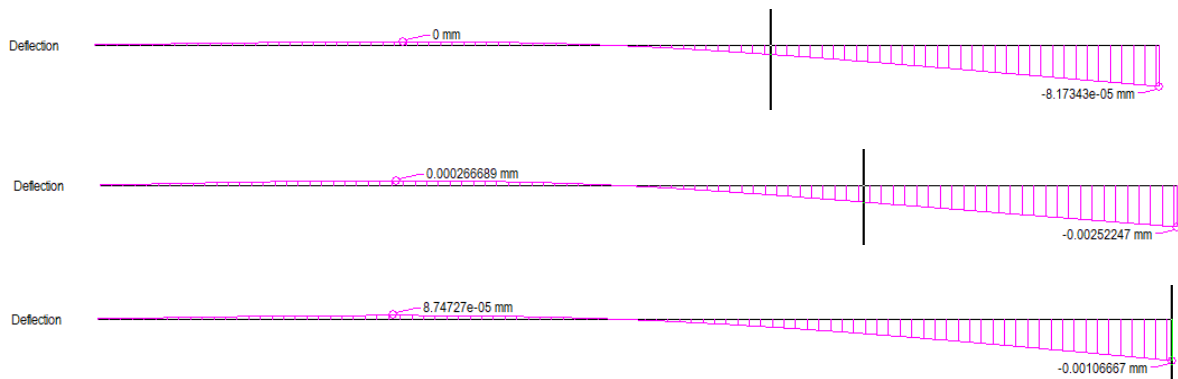
$$\frac{1}{W_{cr1Dun}^2} = \frac{1}{W_{cr1}^2} + \frac{1}{W_{cr2}^2} + \frac{1}{W_{cr3}^2} \quad (140)$$

Donde,

$$W_{cr1} = \sqrt{\left(\frac{g}{\delta}\right)} \quad (141)$$

Con la ayuda del software DSNWinbeam

Figura 64. Deformaciones método Dunkerley.



Fuente. DSNWinbeam.

$$\delta_1 = 0.000000019 \quad (142)$$

$$\delta_2 = 0.000001032 \quad (143)$$

$$\delta_3 = 0.000001067 \quad (144)$$

Dando, una velocidad critica

$$W_{cr1Dun} = 2152.15 \text{ RPM} \quad (145)$$

En conclusión, se puede analizar que el rango de velocidades críticas por los métodos aplicados, se encuentra entre 2152 y 2314 RPM, este rango es solo una estimación matemática de la velocidad critica, durante las pruebas se debe tener en cuenta este rango y se estima una posible velocidad critica real, con el fin de evitar trabajar cerca de esta velocidad.

## 5.5. CALCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LOS MODELOS

**5.5.1. Cálculo de los parámetros dinámicos de los modelos mecánicos** La figura representa un esquema del modelo mecánico subdividido en secciones para el cálculo de los parámetros dinámicos de los rotores (rigidez e inercias) que son necesarios para

el cálculo de las frecuencias naturales de cada modelo. Para el cálculo de la rigidez se considera únicamente la rigidez del rotor, ya que se considera al acople entre el eje del motor y el eje primario como un acoplamiento rígido. La rigidez K del rotor se determina mediante la ecuación.

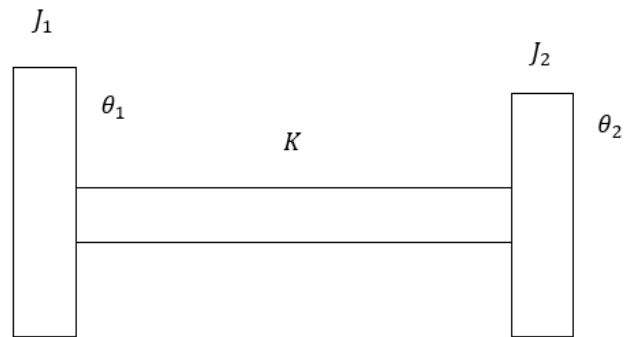
$$K = \frac{G \left[ \frac{N}{m^2} \right] \times M [m^4]}{L [m]} \quad (146)$$

Usando la ecuación 146, se calcula la rigidez de cada rotor, el rotor uno consta de un eje de 1/8" que equivale a 3.175 mm y el rotor dos consiste en un eje de 3/16" que equivale a 4.7625 milímetros. La longitud de estos rotores es de 500 milímetros y su módulo de rigidez corresponde al del acero inoxidable AISI 304 tomado como 75 GPa.

La inercia del motor  $J_m$  se determinó mediante el modelado del rotor del motor en Solidworks y posterior cálculo de sus propiedades físicas.

**5.5.2. Calculo de las frecuencias naturales a la torsión de los modelos** Utilizando el método de Holzer se obtuvieron los valores de las frecuencias naturales y modos de vibración respectivos para los dos modelos. Las tablas muestran los resultados obtenidos en el cálculo de las frecuencias naturales y modos de vibración del modelo uno y dos.

Figura 65. Sistema equivalente de parámetros concentrados



Fuente. Los autores.

$$J_1 = J_{Motor} + J_{Disco} + J_{Ejeprim} + J_{Mandril} + J_{Acople} \quad (147)$$

$$J_2 = J_{Disco} + J_{Ejesecc} + J_{Mandril} \quad (148)$$

Las inercias de estos componentes se calcularon mediante Solidworks.

Tabla 12. Valores de inercia para cada elemento.

Inercia	Valor [ $kg \cdot m^2$ ]
$J_{Disco}$	0,00395334
$J_{Motor}$	0,000081452
$J_{Ejeprim}$	$2,351 \times 10^{-6}$
$J_{Ejesecc}$	0,000002137
$J_{Mandril}$	$8,3777 \times 10^{-5}$
$J_{Acople}$	$5,7222 \times 10^{-6}$

Fuente. Los autores.

Reemplazando

$$J_1 = 0,004126642 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (149)$$

$$J_2 = 0,004038511 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (150)$$

Tabla 13. Frecuencia natural para el modelo mecánico uno.

$\omega [\text{rad}/\text{s}]$	$f [\text{Hertz}]$	$\theta_1$	$T_1$	$\theta_2$
19	3,023	1	1,4897	0,00451

Fuente. Los autores

Tabla 14. Frecuencia natural para el modelo mecánico dos.

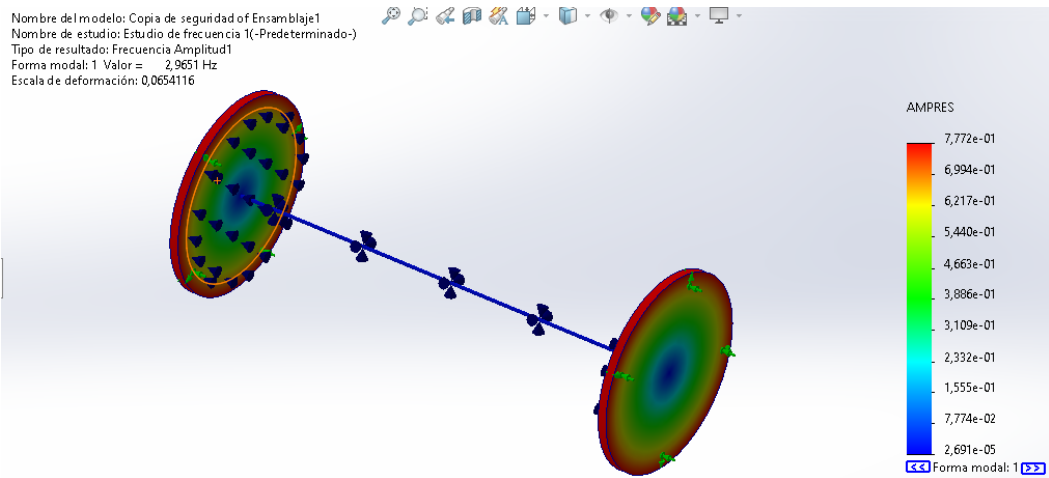
$\omega [\text{rad}/\text{s}]$	$f [\text{Hertz}]$	$\theta_1$	$T_1$	$\theta_2$
42	6,6845	1	7,6302	0,03913

Fuente. Los autores.

### 5.5.3. Calculo de las frecuencias naturales de los modelos mediante Solidworks

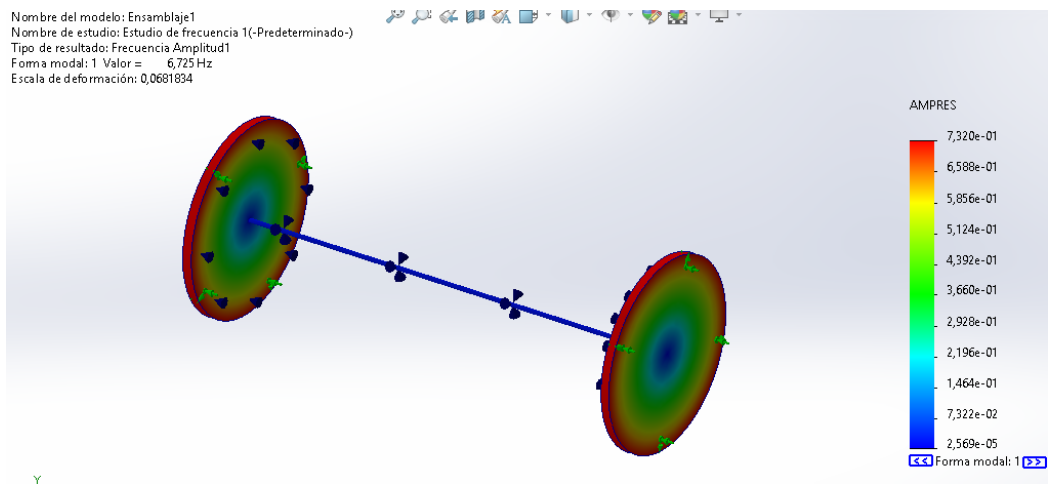
Mediante el programa Solidworks se calculó la primera frecuencia natural de cada modelo mecánico.

Figura 66. Primera frecuencia natural del modelo mecánico uno mediante Solidworks.



Fuente. Solidworks.

Figura 67. Primera frecuencia natural del modelo mecánico dos mediante Solidworks.



Fuente. Solidworks.

## 6. SELECCIÓN DE ELEMENTOS

### 6.1. SELECCIÓN ACOPLE

Un acople rígido tipo araña es ideal para conectar el eje de un motor de 8 mm a un eje de media pulgada debido a su capacidad para transmitir el torque de manera eficiente, manteniendo una alineación precisa entre ambos ejes. Este tipo de acople, compuesto por dos cubos metálicos y un elastómero central, absorbe pequeñas desalineaciones y vibraciones, protegiendo los componentes mecánicos y mejorando la durabilidad del sistema. Además, su diseño compacto y flexible permite una fácil instalación y mantenimiento, lo que lo convierte en una opción confiable para este proyecto.

Figura 68. Acople tipo araña



Fuente. Rollcnc.

### 6.2. SELECCIÓN DE CHUMACERA

La mejor opción para soportar el eje primario y secundario fueron las chumaceras, debido a su bajo costo y fácil adquisición en el mercado, adicionalmente, por ser el más común

se selecciona el código UC: Mecanismo de bloqueo con tornillos y dado la proyección del banco la chumacera deberá ser de piso (P: Soportes tipo puente). La chumacera seleccionada, según ejes de diámetro 1/2" de pulgada es: Chumacera de piso UCP 201-08 Marca FE

Figura 69. Chumacera seleccionada.



Fuente. Quintero Hurtado Ltda.

### **6.3. SELECCIÓN DEL MANDRIL**

La selección de un mandril de media pulgada marca INGCO para el banco de vibración torsional es adecuada porque permite utilizar ejes de ensayo de hasta 13 mm de diámetro, proporcionando versatilidad en la elección de los componentes de prueba. Además, un mandril de este tamaño garantiza una sujeción firme y segura del eje, lo que es esencial para obtener resultados precisos en los experimentos de vibración. La elección de este mandril se ve favorecida por su fácil adquisición en el mercado y su costo accesible, lo que lo convierte en una opción práctica y económica para el proyecto.

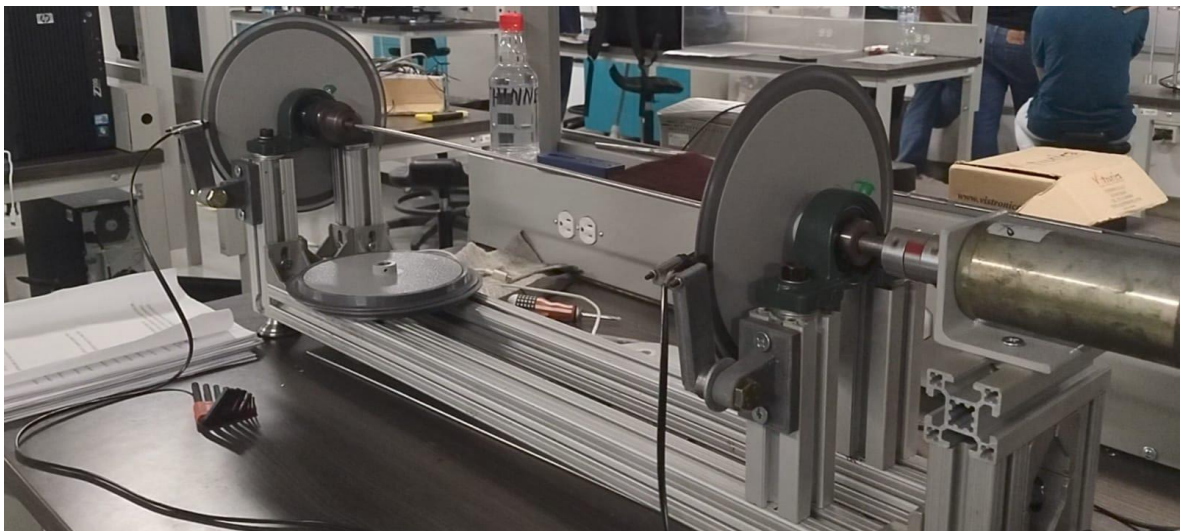
Figura 70. Mandril seleccionado.



Fuente. ING-CO.

En la figura 71, se aprecia el modelo final del banco construido.

Figura 71. Banco construido.



Fuente. Los autores.



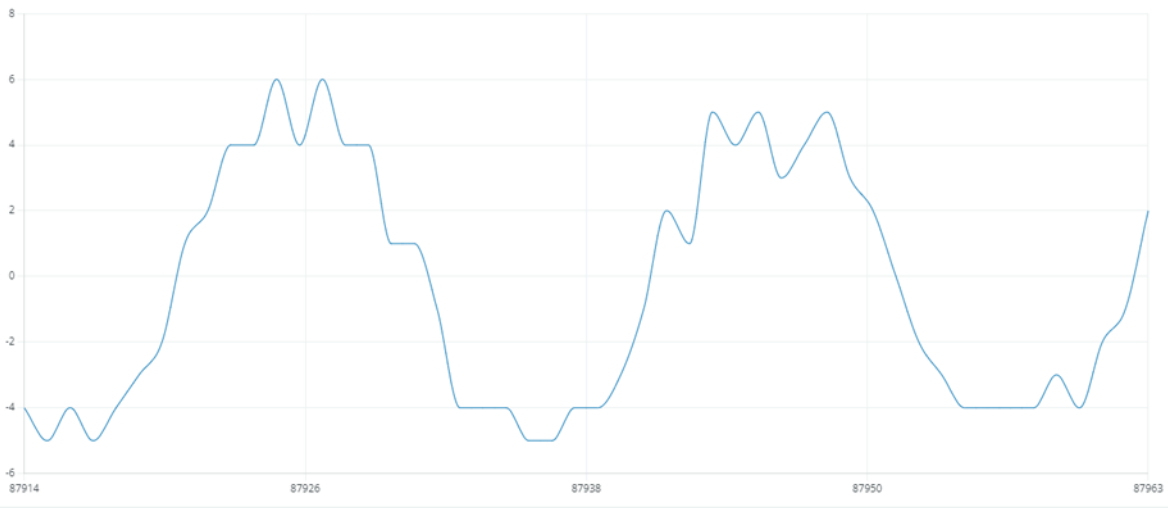
## 8. EXPERIMENTACIÓN

En las pruebas realizadas para validar el banco de vibraciones torsionales, se midió la diferencia de rotación entre dos discos equipados con encoders ópticos tipo herradura. Cada encoder generaba pulsos a medida que los discos giraban, y estos pulsos fueron contados por el Arduino para analizar el comportamiento del sistema. El gráfico generado muestra cómo varía la diferencia de pulsos entre los discos a lo largo del tiempo. El eje X representa el tiempo en milisegundos, mientras que el eje Y refleja la diferencia de pulsos, indicando el desfase angular entre los discos. En condiciones de operación normales, la diferencia de pulsos es mínima; sin embargo, cuando el sistema entra en resonancia, la diferencia se amplifica, lo que provoca picos en la curva, señalando una mayor variación en la velocidad de rotación entre los discos.

### 8.1. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DEL PRIMER ROTOR

**8.1.1. Funcionamiento fuera de resonancia** En la primera prueba realizada al rotor uno, se excitó el sistema a una frecuencia menor a la de su frecuencia natural calculada por Holzer.

Figura 73. Modelo mecánico uno excitado fuera de su primera frecuencia natural.

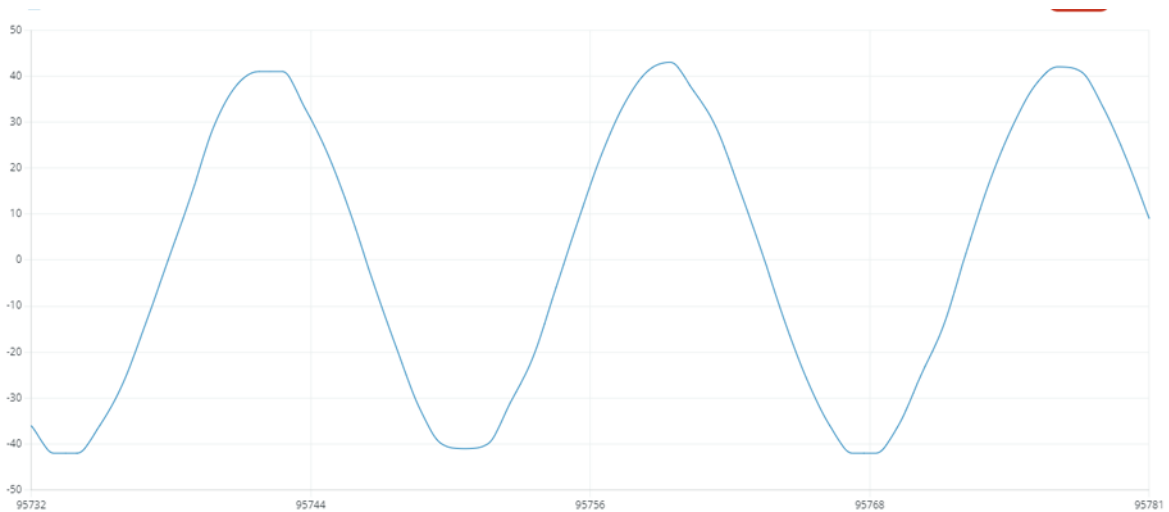


Fuente. Los autores.

En la primera prueba realizada al rotor uno, el sistema fue excitado a una velocidad de 15 rad/s, lo que corresponde a una condición menor de su frecuencia natural. El oscilograma muestra que los discos no giran a la misma velocidad, y se puede observar que las señales de los sensores presentan diferencias apreciables en amplitud y fase, lo que indica una falta de sincronización y un comportamiento asíncrono del sistema debido a su funcionamiento cercano a la frecuencia propia del modelo uno.

**8.1.2. Funcionamiento en resonancia** En la segunda prueba realizada se excitó el sistema en su frecuencia de resonancia hallada de forma experimental.

Figura 74. Modelo mecánico uno excitado en su primera frecuencia natural.



Fuente. Los autores

En la segunda prueba, el sistema fue inducido a una velocidad de 18 rad/s, es decir, aproximadamente 2.87 Hz, lo que está cerca de su primera frecuencia de resonancia calculada por Holzer y por computadora, presentando un error del 5.06% y 3.21%, respectivamente. Bajo estas condiciones, el oscilograma refleja un fenómeno oscilatorio claro, con un desfase evidente entre las señales de ambos sensores. Este comportamiento es característico de un sistema en resonancia, donde las señales presentan un mayor nivel de sincronización y amplitud debido a la excitación cercana a su frecuencia natural.

**8.1.3. Funcionamiento fuera de resonancia** En la tercera prueba realizada se excitó el sistema lejos de su frecuencia de resonancia.

Figura 75. Modelo mecánico uno excitado fuera de su primera frecuencia natural.



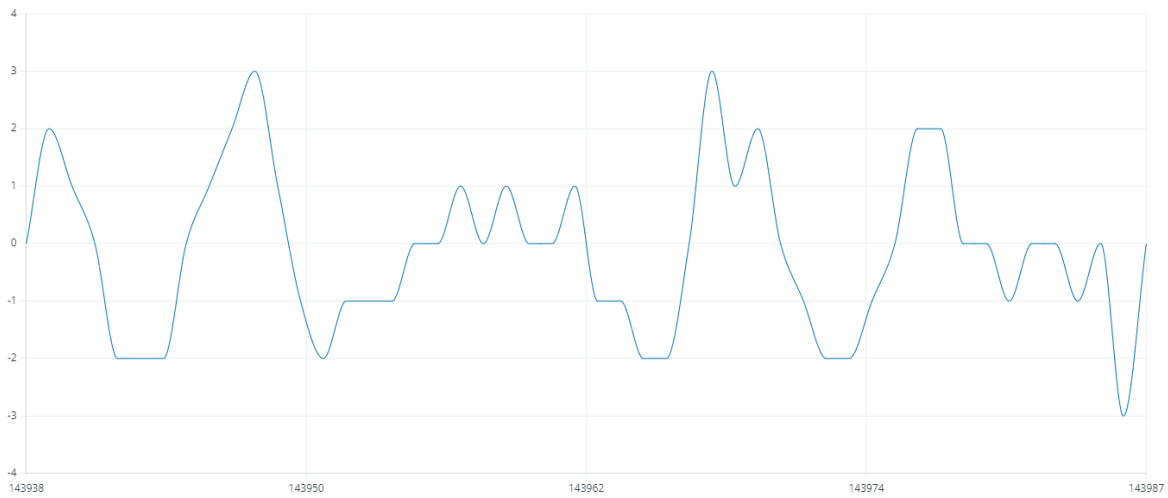
Fuente. Los autores.

Durante esta prueba el rotor uno fue excitado a una velocidad de 25 rad/s. Como se puede apreciar en la Figura 75, las señales no se encuentran desfasadas  $180^\circ$ , por lo tanto no se puede apreciar el comportamiento sinusoidal que si presenta cuando está en resonancia. Por lo tanto se concluye que el sistema está fuera de resonancia.

## 8.2. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DEL SEGUNDO MODELO MECÁNICO.

**8.2.1. Funcionamiento fuera de resonancia** En la primera prueba realizada al rotor dos, se excito el sistema a una frecuencia menor a su frecuencia natural calculada por Holzer.

Figura 76. Modelo mecánico dos excitado fuera de su primera frecuencia natural.

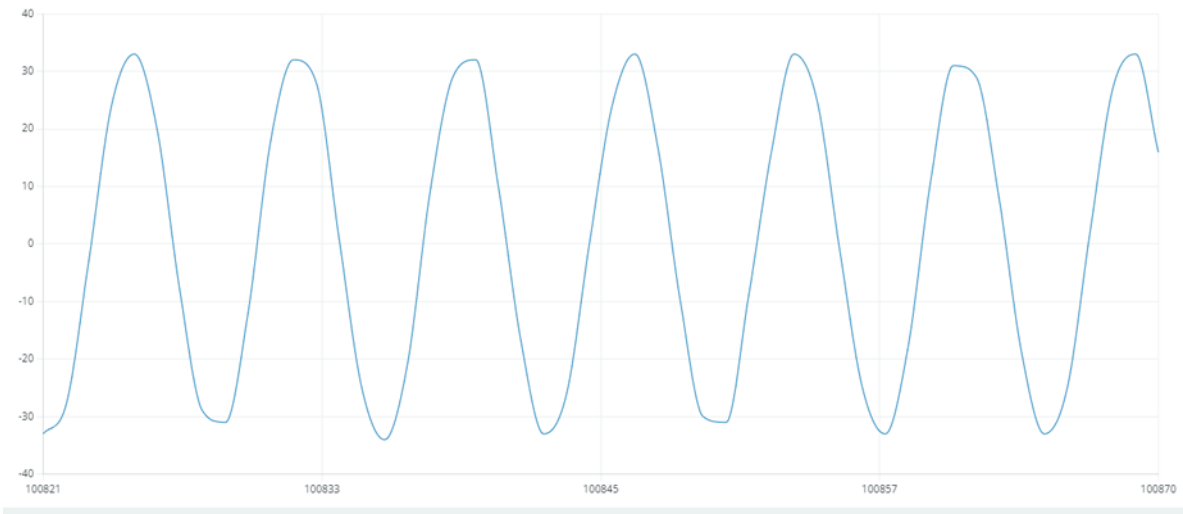


Fuente. Los autores.

En la primera prueba, el sistema fue excitado cerca de su frecuencia natural, a una velocidad de 30 rad/s. El oscilograma muestra un desfase considerable entre las señales de ambos sensores, lo que sugiere que el sistema no estaba en resonancia, presentando una dinámica asíncrona en las señales.

**8.2.2. Funcionamiento en resonancia** En la segunda prueba se indujo el sistema en su primera frecuencia de resonancia hallada experimentalmente.

Figura 77. Modelo mecánico dos excitado en su primera frecuencia natural.

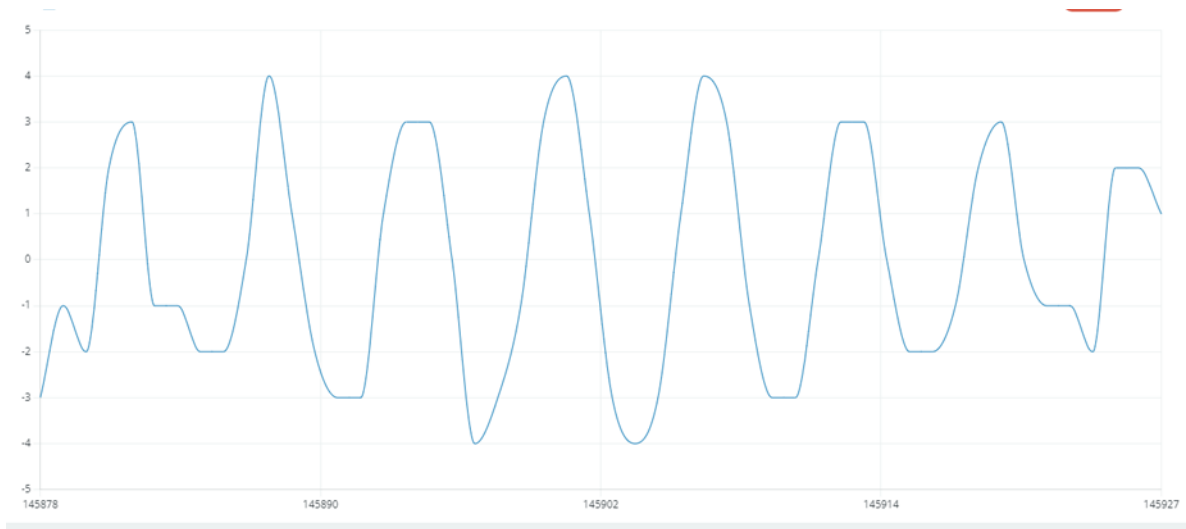


Fuente. Los autores.

En la segunda prueba, el sistema fue inducido a su primera frecuencia de resonancia, a una velocidad de 43 rad/s (equivalente a 6.84 Hz), presentando un error del 2.38% con respecto al calculado por Holzer, y un error del 1.77% comparado con el calculado por computadora. Bajo estas condiciones, el oscilograma refleja un fenómeno oscilatorio más evidente, con ambas señales provenientes de los sensores desfasadas 180°, lo que confirma el comportamiento característico de un sistema en resonancia.

**8.2.3. Funcionamiento fuera de resonancia** En la tercera prueba realizada se excitó el sistema lejos de su frecuencia de resonancia.

Figura 78. Modelo mecánico dos excitado fuera de su primera frecuencia natural.



Fuente. Los autores.

Durante esta prueba el rotor dos fue excitado a una velocidad de 50 rad/s. Como se puede apreciar en la Figura 78, las señales no se encuentran desfasadas  $180^\circ$ , por lo tanto no se puede apreciar el comportamiento sinusoidal que si presenta cuando está en resonancia. Por lo tanto se puede concluir que el sistema está fuera de resonancia.

## 9. MANUAL DE OPERACIÓN DEL BANCO

### 9.1. OPERACIÓN DEL BANCO DE EXPERIMENTACION

**9.1.1. Kit de herramientas** Para el montaje y mantenimiento del banco de pruebas, se requiere el siguiente conjunto de herramientas:

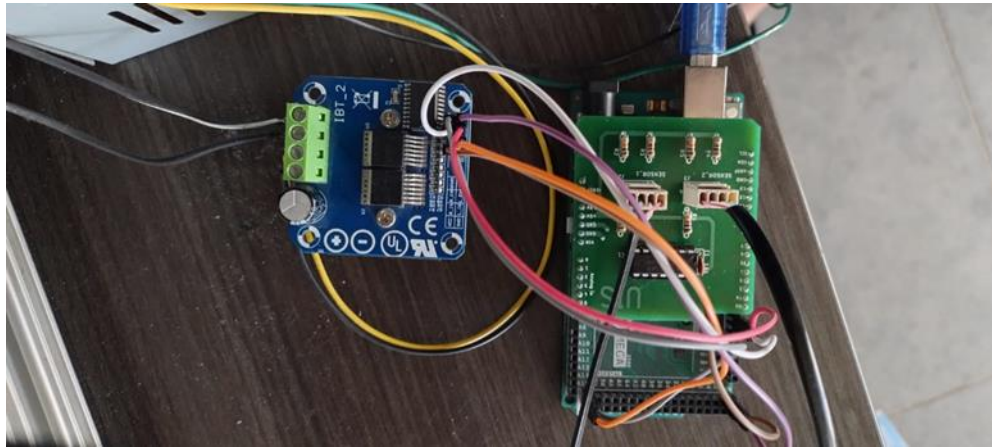
- Destornilladores de punta plana y cruceta (estrella).
- Llave tipo Bristol.
- Llave de carraca (rache).
- Dos llaves fijas o combinadas para ajuste de tornillos.
- Grasa lubricante específica para el mantenimiento preventivo de las chumaceras.
- Cautín de soldadura para la realización de conexiones eléctricas.

**9.1.2. Conexión del sistema de accionamiento** Para la correcta operación del sistema de accionamiento del banco de pruebas, es necesario tener en cuenta los siguientes elementos:

- Un ordenador con el software Arduino instalado y configurado adecuadamente.
- Un puente H, necesario para controlar la dirección y velocidad del motor, junto con cables hembra-macho para las conexiones eléctricas.
- Placa de circuito impreso (PCB) para las conexiones electrónicas.
- Fuente de alimentación adecuada para el suministro de energía.

- Sensores ópticos (con sus respectivos encoders) para la medición de vibraciones torsionales.

Figura 79. Montaje del sistema de adquisición

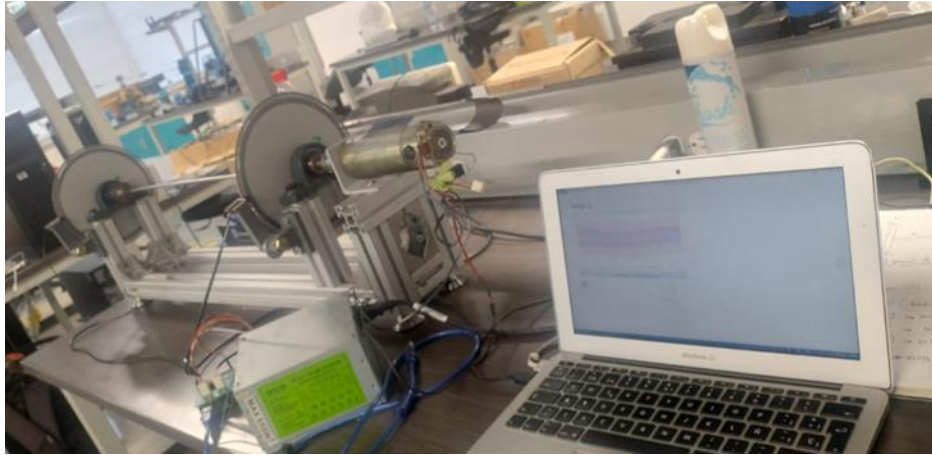


Fuente. Los autores.

Es indispensable contar con el código de programación específico para accionar correctamente el banco de vibraciones mediante el software Arduino.

**9.1.3. Equipo utilizado** Para la realización de las pruebas experimentales, se emplea el siguiente equipo técnico:

Figura 80. Banco de vibraciones



Fuente. Los autores.

- Estabilizador de voltaje con salida regulada de 110 V.
- Fuente de alimentación con control ajustable de tensión.
- Ordenador para procesamiento de datos y control del sistema.
- Herramientas diversas de ajuste y conexión.
- Cables para la interconexión eléctrica del sistema.
- Panel de control de la fuente de alimentación, ubicado en la parte frontal, con interruptor de encendido en la parte inferior derecha y fusible de protección situado sobre este.
- Cada uno de los componentes del sistema de control debe ser utilizado de manera adecuada para asegurar el correcto funcionamiento y evitar fallos operativos.

## 9.2. SECUENCIA DE ENCENDIDO Y APAGADO

- Conectar el motor al sistema.

- Asegurarse de que el voltaje medio de alimentación esté ajustado a cero, y desconectar la señal alterna en la fuente de alimentación.
- Encender el ordenador e iniciar el software Arduino con el código correspondiente cargado.
- Seleccionar la opción Serial Plotter en el menú de herramientas del software para visualizar los datos de la prueba.
- Incrementar de manera gradual el voltaje medio para poner en marcha el rotor. Utilizar el sistema de medición para determinar la velocidad angular del rotor y ajustarla según los requerimientos de la prueba.
- Establecer los valores de frecuencia y amplitud de la señal alterna que se utilizarán para excitar el sistema.
- Registrar las lecturas de la vibración a través del sistema de adquisición de datos, seleccionando el sensor más adecuado según el tipo de prueba. La velocidad del rotor y los parámetros de excitación podrán ser ajustados conforme a las necesidades experimentales.
- Finalizada la prueba, desacoplar la excitación y reducir la amplitud de la señal alterna a cero. A continuación, disminuir lentamente el voltaje medio de alimentación hasta llegar a cero.
- Apagar el sistema, desconectar los cables y almacenarlos de manera ordenada para evitar daños.

### **9.3. PROCEDIMIENTO PARA EL CAMBIO DE ROTOR**

Para sustituir el rotor en el banco de pruebas, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Utilizar la llave correspondiente para aflojar las tuercas de ajuste de los mandriles que sujetan el rotor.

- Retirar el rotor con cuidado, asegurándose de no dañar el eje ni los mandriles.
- Colocar el nuevo rotor en posición, alineando correctamente con los mandriles.
- Apretar de manera uniforme las tuercas de ajuste para asegurar el rotor en su lugar.
- Este procedimiento debe realizarse con precisión para evitar desalineaciones que puedan generar vibraciones no deseadas en las pruebas.

#### **9.4. RECOMENDACIONES PARA LA EXPERIMENTACION**

- Es imperativo no operar el banco de pruebas sin la supervisión de un técnico responsable o el encargado del laboratorio.
- No se debe operar el sistema dentro del rango de velocidades críticas, ya que esto podría generar daños estructurales en los componentes.
- Evitar operar el banco a velocidades bajas durante largos periodos, ya que esto podría reducir la vida útil tanto de la fuente de alimentación como del motor.
- Mantener limpios las ruedas encoder y sensores ópticos, y evitar que sufran daños o rayones que puedan afectar la precisión de las mediciones.
- Verificar periódicamente la nivelación del banco de pruebas, ya que cualquier desajuste podría provocar incertidumbres en los datos obtenidos.
- Manipular los discos de inercia con sumo cuidado para evitar ralladuras o desprendimientos de la pintura protectora, lo que podría llevar a la oxidación de los mismos.
- Asegurarse de no dejar caer los discos para evitar daños estructurales, especialmente en las ruedas encoder.

Estas recomendaciones deben ser seguidas rigurosamente para asegurar la fiabilidad de las pruebas y la seguridad del equipo de experimentación.

## 10. CONCLUSIONES

El equipo desarrollado cumplió de manera óptima con el diseño propuesto, logrando la creación de un banco de vibraciones torsionales con dos discos y un eje central intercambiable. Este diseño permite variar las condiciones iniciales de operación y los componentes del sistema, facilitando la recolección de datos en tiempo real. Esto asegura que el banco se adapte a diferentes escenarios de análisis, maximizando su utilidad en la docencia e investigación.

La construcción del banco de vibraciones torsionales, con los componentes necesarios para inducir y medir las vibraciones, fue realizada exitosamente. El sistema de adquisición de datos integrado permite la captura precisa de las señales de vibración torsional, ofreciendo resultados fiables y consistentes. Este logro consolida el banco como una herramienta técnica avanzada para estudios experimentales.

La validación experimental del banco se llevó a cabo con éxito, confirmando que las frecuencias naturales y los modos de vibración obtenidos concuerdan con los cálculos teóricos y simulaciones computacionales. Los resultados presentaron un máximo error del 5% respecto al método Holzer y del 3% frente a las simulaciones realizadas en Solidworks, lo que demuestra la precisión del sistema y su utilidad para estudios analíticos de vibración torsional.

Se elaboró un completo manual de operación que detalla el procedimiento, funcionamiento e interpretación de datos obtenidos en el banco de pruebas. Este documento garantiza un uso adecuado del equipo, facilitando su aplicación tanto en ambientes educativos como en proyectos de investigación, al proporcionar una guía clara y práctica para el estudio de las frecuencias de vibración torsional.

## 11. RECOMENDACIONES

Se recomienda utilizar discos de inercia con diferentes masas y radios para evaluar el comportamiento del sistema bajo diversas condiciones, enriqueciendo el análisis de las vibraciones torsionales.

La incorporación de sensores de mayor resolución mejoraría la precisión en la medición de frecuencias naturales, mientras que el uso de ejes más esbeltos permitiría observar mejor los fenómenos torsionales.

Se sugiere también añadir un amortiguador para mitigar vibraciones no deseadas y evitar posibles daños a los componentes mecánicos.

La implementación de una plataforma de adquisición de datos más avanzada, como LABVIEW, potenciaría el análisis en tiempo real y la visualización de los resultados.

Utilizar un motor de mayor potencia permitiría operar el sistema en velocidades críticas, facilitando el estudio directo de las vibraciones torsionales extremas y su comparación con los modelos teóricos, aportando valiosa información para optimizar sistemas reales.

Se recomienda investigar la influencia de las vibraciones de flexión sobre las vibraciones torsionales.

## BIBLIOGRAFIA

1. BARBOSA, William y ARGOTE, G. Eliminación y amortiguación de vibraciones de torsión en máquinas. Proyecto de grado. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1991.
2. CHAPMAN, S... Máquinas eléctricas. Primera edición, McGraw-Hill. Colombia, 1990.
3. DALLY, J.W.; RILEY, W y MC CONNELL, K. Instrumentation for Engineering Measurements. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1984.
4. DEN HARTOG, J.P. Mecánica de las vibraciones. Cuarta edición Editorial C.E.C.S.A. México, 1964
5. DOEBELIN, E.O. Measurement Systems, Applications and Design. McGraw-Hill International. Tokio, 1975.
6. ESHLEMA, R.L. Torsional response of internal combustion engines. Journal of Engineering for Industry. May 1974, p-p 441-449.
7. GARCIA, A. Vibraciones Mecánicas. Edición U.I.S. Bucaramanga, 1992.
8. HALL, D. Microprocessors and interfacing, programming and hardware. Primera edición, McGraw-Hill. New York, 1986.
9. OCHRAN, W... What is the fast Fourier Transform. IEEE Transactions on audio and electroacoustics. Volumen 15. Junio, p-p 45-55

10. PICO, Miguel. Diseño y construcción de un banco de pruebas para el análisis de vibraciones torsionales. Proyecto de grado. Universidad Autónoma de Bucaramanga, 2021.
11. PRENTIS, J.M. y LECKIE, F.A. Mechanical Vibrations : An introduction to matrix method. Longmans, Green and Co. London, 1973.
12. RAO, D.K. Torsional Frequencies of multi-stepped shafts with rotors. International Journal of Mechanical Science, 20, 415-422, 1978.
13. THOMSON, W. Teoría de vibraciones, aplicaciones. Segunda edición. Prentice-Hall International. Madrid, 1983.
14. TRIEBEL, W. y SINGH, A. Architecture, software & Interfacing techniques. Primera edición. Prentice Hall Inc. New Jersey, 1985.
15. URIBE, Daniel y FONQUE, Agustín. Vibración torsional, sistema de medición y experimentación. Proyecto de grado. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1995.

## ANEXO A. CÓDIGO ARDUINO.

```
#include <TimerOne.h>

int pinS1 = 2;
int pinS2 = 3;
int pinpwm = 14;

int PulsosS1 = 0;
int PulsosS2 = 0;
double PeriodoUs = 20000;
int ppwm = 0;
double velS1 = 0;
double velS2 = 0;
double frecuencia = 0;

void setup() {
  Serial.begin(115200);
  pinMode(pinpwm, OUTPUT);
  pinMode(pinS1, INPUT_PULLUP);
  pinMode(pinS2, INPUT_PULLUP);
```

```

Timer1.initialize(PeriodoUs);
Timer1.attachInterrupt(Sensado);
attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pinS1), Sensor1, CHANGE);
attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pinS2), Sensor2, CHANGE);

}

void loop() {

    ppwm = 125*sin(frecuencia*millis()/1000)+125;
    analogWrite(pinpwm,ppwm);
    analogWrite(15,ppwm);
    if (Serial.available()) {
        frecuencia = Serial.parseFloat();

    }
}

void Sensor1() {
    PulsosS1++;
}

```

```

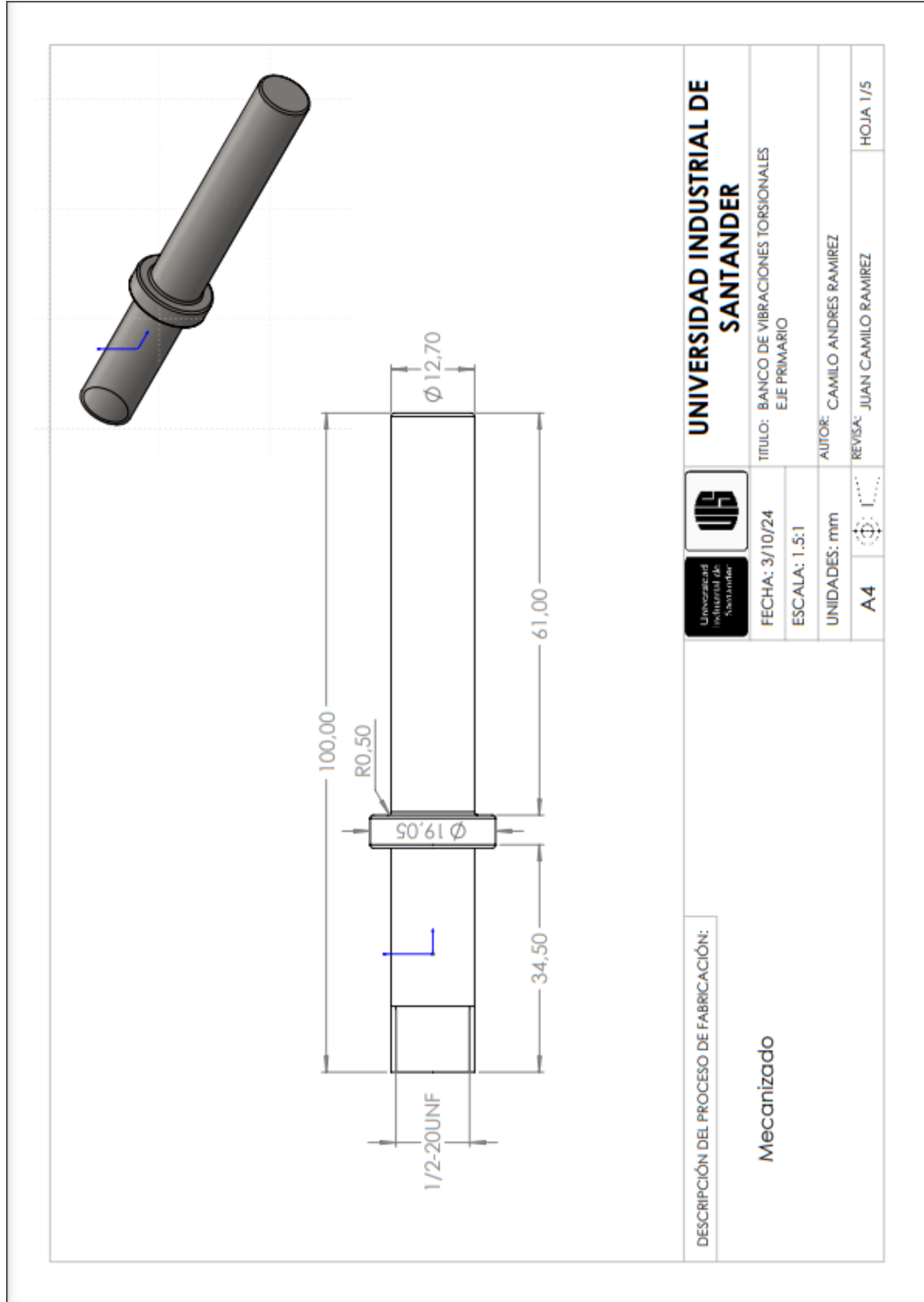
}
void Sensor2() {
    PulsosS2++;
}
void Sensado(void)
{
    Serial.print(PulsosS1-PulsosS2);
    // Serial.print(" ");
    // Serial.print(PulsosS2);
    // Serial.print(" ");
    // Serial.print(ppwm);
    Serial.println(" ");

    //velS1 = 1000000 * (PulsosS1 / 480) / PeriodoUs;
    //velS2 = 1000000 * (PulsosS2 / 480) / PeriodoUs;
    PulsosS1 = 0;
    PulsosS2 = 0;

}

```

## ANEXO B. PLANOS DEL BANCO.



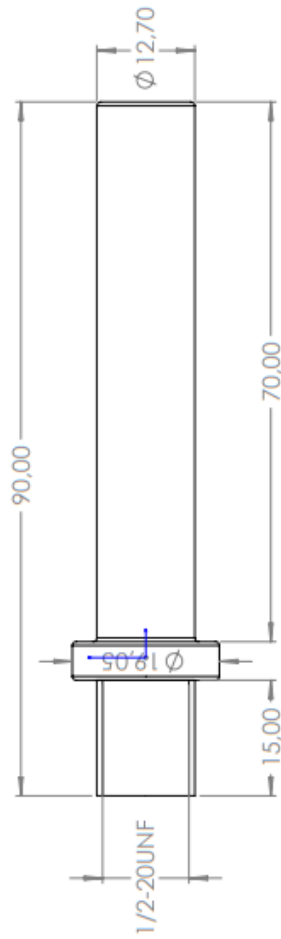
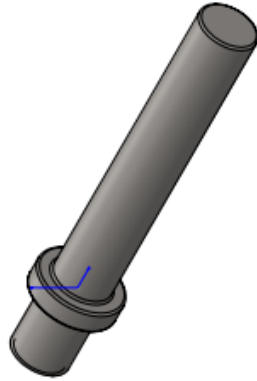
**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**



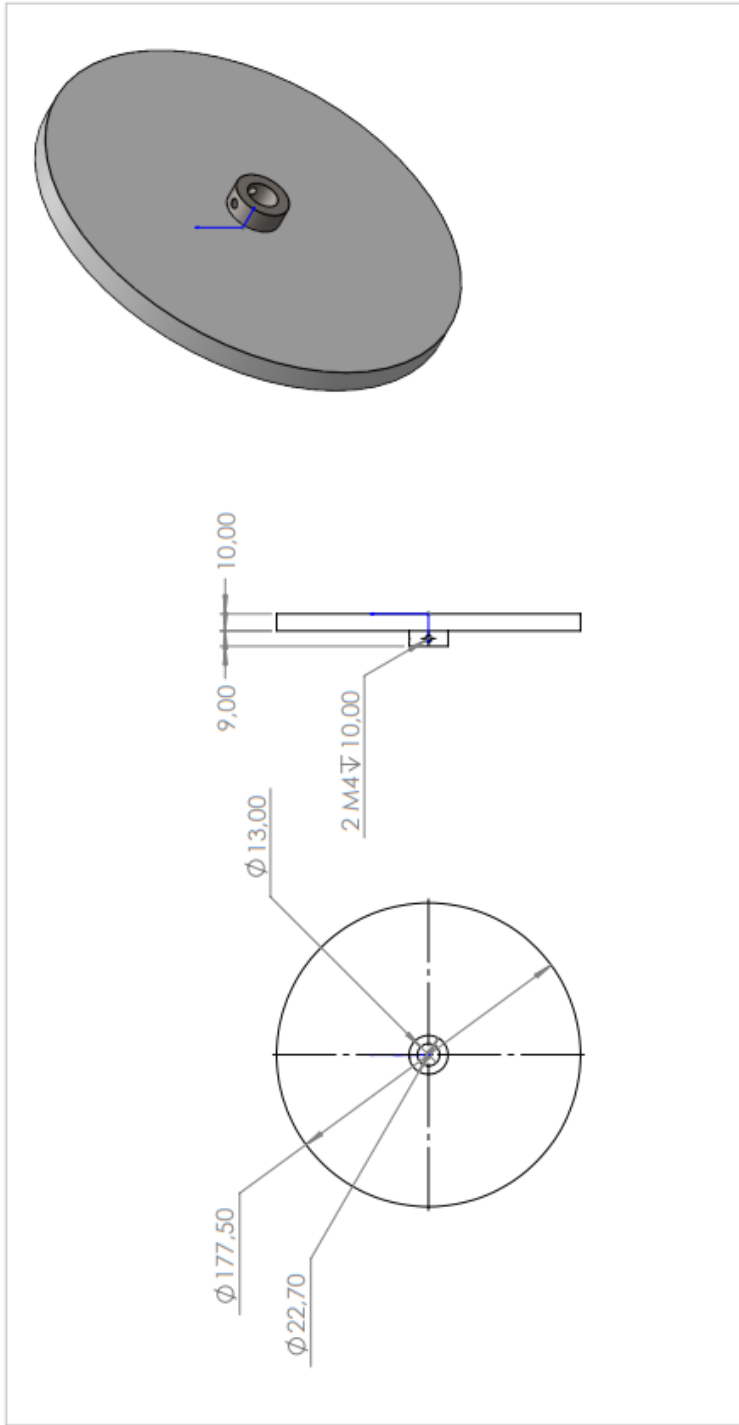
TITULO: BANCO DE VIBRACIONES TORSIONALES EJE PRIMARIO	
FECHA: 3/10/24	AUTOR: CAMILO ANDRES RAMIREZ
ESCALA: 1:5:1	REVISOR: JUAN CAMILO RAMIREZ
UNIDADES: mm	HOJA 1/5
A4	

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

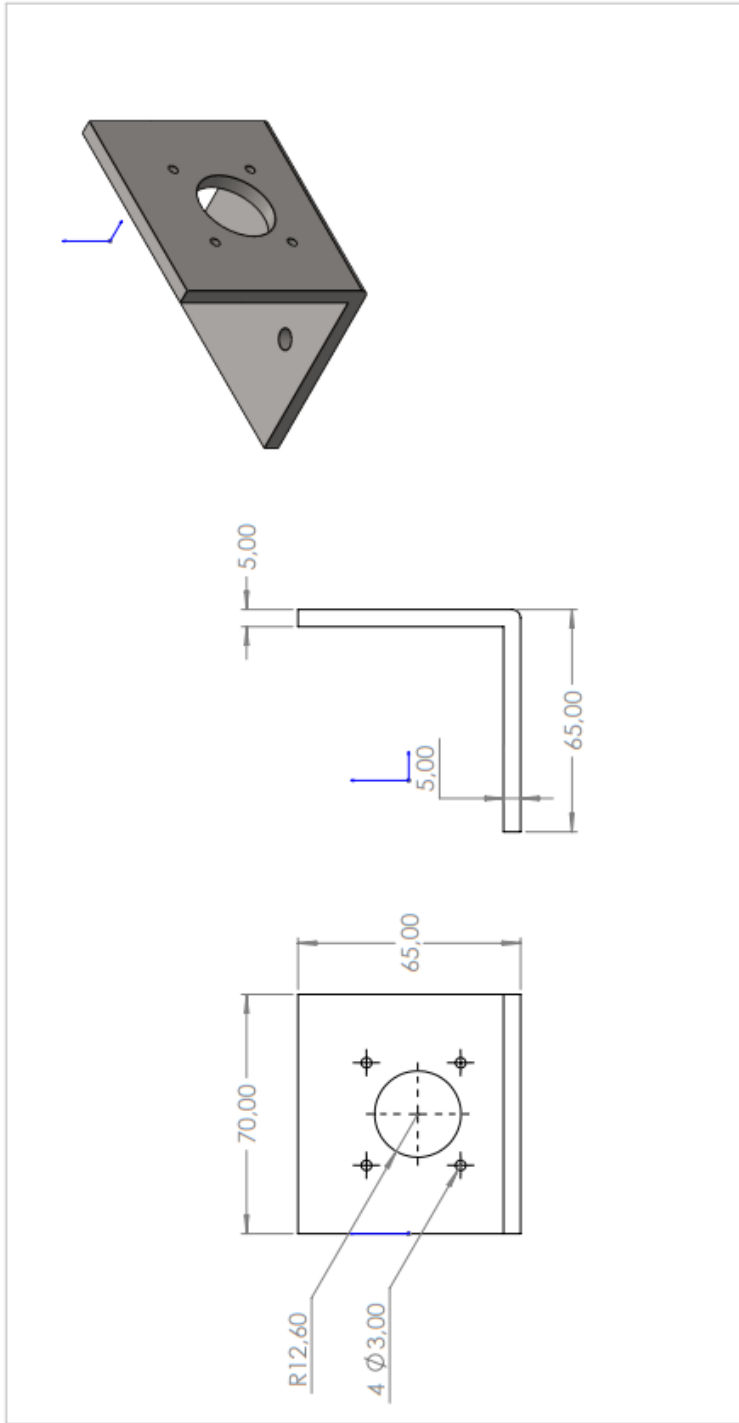
Mecanizado



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:		 		<b>UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER</b>	
Mecanizado		FECHA: 3/10/24	TÍTULO: BANCO DE VIBRACIONES TORSIONALES	EJE SECUNDARIO	
		ESCALA: 1:5:1	AUTOR: CAMILO ANDRES RAMIREZ		
		UNIDADES: mm	REVIS: JUAN CAMILO GUEVARA		HOJA 2/5
		A4			



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:				<b>UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER</b>	
Mecanizado		FECHA: 3/10/24	TÍTULO: BANCO DE VIBRACIONES TORSIONALES		
		ESCALA: 1:3	DISCO DE INERCIA		
		UNIDADES: mm	AUTOR: CAMILO ANDRES RAMIREZ		
		A4	REVISAR: JUAN CAMILO GUEVARA		
			HOJA 3/5		



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:				<b>UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER</b>	
Taladrado		FECHA: 3/10/24	TÍTULO: BANCO DE VIBRACIONES TORSIONALES SOPORTE MOTOR		
		ESCALA: 1:3	AUTOR: CAMILO ANDRES RAMIREZ		
		UNIDADES: mm	REVIS: JUAN CAMILO GUEVARA		
		A4	HOJA 4/5		