

Propiedades dinámicas en espacios métricos compactos

Autor:

Winston Deian Andrey Ferreira Delgado

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2024

Propiedades dinámicas en espacios métricos compactos

Autor:

Winston Deian Andrey Ferreira Delgado

Trabajo de grado para optar al título de:

Matemático

Director:

Javier Enrique Camargo García

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2024

## **Dedicatoria**

Dedicado a mi familia, los cuales siempre me apoyaron en este proceso.

## **Agradecimientos**

En primer lugar me gustaría agradecer al profesor Javier Camargo, por toda su dedicación y esfuerzo en este trabajo, fue gratificante todo el conocimiento adquirido bajo su dirección.

Deseo manifestar mi más sincero agradecimiento a mi familia, en particular a mis padres, Flor Maritza Delgado y Victor Hugo Ferreira y a mi nona Cecilia Vargas, quienes han sido una fuente constante de estímulo a lo largo de la elaboración de este trabajo de grado. La paciencia, comprensión y aliento que me han brindado resultaron esenciales para lograr exitosamente y llevar a cabo esta monografía.

También agradezco a todos los profesores de la escuela de matemáticas, a todos esos amigos y colegas que hice en la universidad, en especial a Santiago Mayorga y Marco Quintanilla.

**Lista de contenido**

	<b>pág.</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>10</b>
2.1. Resultados básicos y notación . . . . .	10
2.2. Función tienda . . . . .	18
2.3. Función shift de Bernoulli . . . . .	21
<b>3. Funciones caóticas</b>	<b>25</b>
3.1. Funciones caóticas según Devaney . . . . .	25
3.2. Funciones caóticas según Li-Yorke . . . . .	36
3.3. Funciones caóticas según Block-Coppel . . . . .	55
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>62</b>
<b>Referencias</b>	<b>62</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** Propiedades dinámicas en espacios métricos compactos \*

**AUTOR:** Winston Deian Andrey Ferreira Delgado \*\*

**PALABRAS CLAVE:** Caos, Sistemas dinámicos discretos, Devaney.

### DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico discreto es una pareja  $(X, f)$ , donde  $X$  es un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Los sistemas dinámicos discretos pueden ser simples o complejos, y pueden exhibir una amplia variedad de comportamientos, incluyendo: ciclos periódicos, sensibilidad, transitividad o diferentes nociones de caos. Siendo este último en el cual nos enfocaremos en este trabajo.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Matemáticas

**ABSTRACT**

**TITLE:** Dynamic properties in compact metric spaces \*

**AUTHOR:** Winston Ferreira Delgado \*\*

**KEYWORDS:** Chaos, Discrete dynamical systems, Devaney.

**DESCRIPTION:**

A discrete dynamical system is a pair  $(X, f)$ , where  $X$  is a metric space and  $f: X \rightarrow X$  a continuous function. Discrete dynamical systems can be simple or complex, and can exhibit a wide variety of behaviors, including: periodic cycles, sensitivity, transitivity or different notions of chaos. The latter being the one we will focus on in this work.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor Matemáticas

## 1. Introducción

Los sistemas dinámicos discretos son un área de las matemáticas que estudian como los objetos o sistemas, cambian a lo largo del tiempo. A diferencia de los sistemas continuos, los sistemas dinámicos discretos evolucionan en pasos discretos; esto es, podemos determinar por ejemplo, el lugar de una partícula a la hora, dos horas, tres horas, etc., pero no podemos determinar su ubicación a los 15 o 30 minutos, pasada una hora determinada.

Toda situación o estructura que implique cambios en el transcurso del tiempo puede considerarse un sistema dinámico. Es por esto que es sencillo encontrar ejemplos de sistemas dinámicos en muchas áreas de la ciencia, desde la física y la biología, hasta la economía y la informática. Un ejemplo típico y que se ha estudiado por muchos investigadores es un modelo de población que tenga en cuenta la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad de una especie en un intervalo de tiempo determinado. Por otra parte, el tiempo meteorológico constituye otro ejemplo, muy complejo, de sistema dinámico. Este último ha sido materia de estudio por muchos investigadores ya que, entender esta dinámica, implica evitar desastres naturales y salvar muchas vidas.

Un sistema dinámico discreto es una pareja  $(X, f)$ , donde  $X$  es un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Dado un punto  $x_0 \in X$ , la órbita de  $x_0$  bajo  $f$ , que

denotamos por  $\mathcal{O}_f(x_0)$ , se define como la sucesión:

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), (f \circ f)(x_0), (f \circ f \circ f)(x_0), \dots\}.$$

Podemos afirmar que el objetivo de un sistema dinámico es determinar con total precisión el comportamiento de todas las órbitas del sistema.

Los sistemas dinámicos discretos pueden ser simples o complejos, y pueden exhibir una amplia variedad de comportamientos, incluyendo: ciclos periódicos, sensibilidad, transitividad o diferentes nociones de caos. Siendo este último en el cual nos enfocaremos en este trabajo.

El objetivo de este trabajo no va a ser únicamente dar a conocer tres definiciones de caos, sino también, hacer el estudio de la relación entre las definiciones presentadas.

Este trabajo está estructurado por 2 capítulos. En el primero haremos una primera toma de contacto con algunas definiciones relacionadas a los sistemas dinámicos discretos, además mostraremos algunas funciones que emplearemos seguidamente, las cuales son la Función Tenda y la Función Shift de Bernoulli. En el segundo capítulo mostraremos las tres definiciones de caos y algunas de sus propiedades, además de mostrar la relación que hay entre ellas.

## 2. Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados necesarios para la comprensión de este trabajo.

### 2.1. Resultados básicos y notación

En esta sección, exploraremos la notación que utilizaremos a lo largo de este curso. Esta notación nos permitirá escribir y manipular expresiones matemáticas de manera clara y eficiente para todos.

En este trabajo todos los espacios serán espacios métricos. Denotaremos la bola abierta con centro en  $x$  y radio  $\varepsilon$  como  $B(x; \varepsilon)$ . Si  $A$  y  $B$  corresponden a dos conjuntos de un espacio métrico, denotaremos:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

La adherencia e interior de un conjunto  $A$  lo notaremos por  $\overline{A}$  y  $A^\circ$ , respectivamente. Si  $f: X \rightarrow X$  es una función, denotaremos por  $f^n$  a la composición  $f \circ \dots \circ f$   $n$ -veces.  $f^0$  representa la función identidad. Todas las funciones serán funciones continuas. La siguiente definición es fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

Otras definiciones que estaremos trabajando es la de límite superior e inferior, las cuales las definiremos de la siguiente manera:

**Definición 2.1.1.** Sea  $(a_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de números reales. Consideremos  $A_n =$

$\{a_k : k \geq n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Los siguientes los llamamos *límite superior* y *límite inferior*, respectivamente:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{\sup\{A_i\} : i \in \mathbb{N}\};$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{\inf\{A_i\} : i \in \mathbb{N}\}.$$

*Observación 2.1.2.* El límite superior también cumple con ser el mayor valor de adherencia de una sucesión, y el límite inferior cumple con ser el menor valor de adherencia de una sucesión.

**Definición 2.1.3.** Sean  $X$  un espacio métrico,  $f: X \rightarrow X$  una función continua, y  $x$  un punto cualquiera de  $X$ . Llamamos la *órbita* de  $x$  bajo la función  $f$  a la sucesión

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, decimos que un *sistema dinámico discreto* es una pareja  $(X, f)$ , donde  $X$  es un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua en el que el problema básico es analizar el comportamiento de las orbitas bajo  $f$ . Ahora, veremos algunas definiciones y teoremas sobre los sistemas dinámicos discretos que profundizaremos en el desarrollo de nuestro trabajo.

**Definición 2.1.4.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua donde  $X$  es un espacio métrico. Decimos que  $x_0$  es *punto fijo* de  $f$  si  $f(x_0) = x_0$ . En este caso la órbita de  $x_0$  bajo  $f$  es la

siguiente sucesión constante:

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, x_0, \dots\}.$$

Si consideramos una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es claro que los puntos fijos se representan como los puntos donde la gráfica de  $f$  intersecta a la identidad  $y = x$ . Esta herramienta la usaremos continuamente en el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.1.5.** Sean  $f: X \rightarrow X$  una función continua donde  $X$  es un espacio métrico y  $x_0 \in X$ . Decimos que  $x_0$  es un *punto periódico* de  $f$  si existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^n(x_0) = x_0$ . Al conjunto de todos los puntos periódicos de  $f$  lo denotamos con  $Per(f)$ . Si  $x \in Per(f)$  decimos que  $\mathcal{O}_f(x)$  es una *órbita periódica*.

Sea  $x_0 \in Per(f)$ . Decimos que  $x_0$  tiene periodo  $k$  si

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

Es claro que si  $x_0$  es un punto fijo de  $f$ , entonces  $x_0 \in Per(f)$  y  $x_0$  tiene periodo 1. Fijando un entero positivo  $n$ , escribiremos  $Per_n(f)$  para referirnos a los puntos de periodo  $n$ ; es decir, los puntos fijos de  $f^n$ .

Por mostrar un ejemplo sencillo, consideremos la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cada  $x \in \mathbb{R}$  por  $f(x) = 1 - x$ . Vemos que al hallar los puntos fijos de  $f$ , tenemos que resolver la ecuación  $1 - x = x$ . Así, el único punto fijo sería  $x = \frac{1}{2}$ . Pero si miramos los puntos fijos de  $f^2$ , tenemos que deben cumplir que  $x = x$ , lo que equivale a que todos los puntos de  $\mathbb{R}$ , esto es,  $Per_2(f) = \mathbb{R}$ .

En 1964 el matemático soviético Oleksandr Mikolaiovich Sarkovskii postula un teorema, el cual dice que la existencia de un punto periódico de periodo 3 en funciones de  $A$  en si mismo, donde  $A$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$  es una condición necesaria para la existencia de puntos de periodo  $n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Este resultado se conoce como el *Teorema de Sarkovskii*, teorema que ha sido ampliamente estudiado, lo usaremos, a continuación lo enunciamos sin demostración.

**Teorema 2.1.6** (Teorema de Sarkovskii). *Sean  $A$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f: A \rightarrow A$  una función continua. Si  $f$  tiene un punto de periodo 3, entonces  $f$  tiene al menos un punto de periodo  $n$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Definición 2.1.7.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Diremos que  $f$  es:

1. *exacta* si para cada abierto no vacío  $U$  de  $X$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^n(U) = X$ ;
2. *topológicamente transitiva* si para todo par de conjunto abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  de  $X$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Es fácil ver que toda función exacta es topológicamente transitiva. Sin embargo, existen funciones topológicamente transitivas no exactas como por ejemplo: Sean  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  y  $f: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f(z) = ze^i$ . Observe que  $f$  representa una rotación que no constituye una función exacta. Sin embargo, dados dos abiertos  $U$  y  $V$  de  $S^1$ , cualquier punto  $z_0 \in U$  tiene como órbita una sucesión  $\mathcal{O}_f(z_0) = \{z_0, z_0e^i, z_0e^{2i}, z_0e^{3i}, \dots\}$  que forma un subconjunto denso de  $S^1$ , es decir, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $z_0e^{ki} \in V$  y  $f$  es topológicamente transitiva. Note que esta función no tiene puntos periódicos.

Daremos una forma equivalente de definir topológicamente equivalente.

**Definición 2.1.8.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Diremos que  $f$  es *topológicamente transitiva* si existe  $x \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$

Ahora probaremos que se cumple la equivalencia bajo algunas condiciones.

**Proposición 2.1.9.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto y sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Entonces,  $f$  es topológicamente transitiva si, y solo si, existe  $x \in X$  con órbita densa; esto es  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $f$  es topológicamente transitiva. Dado un abierto no vacío  $U$  de  $X$ , veamos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$  es un abierto denso de  $X$ . Como  $f$  es continua,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$  es abierto. Además, si  $W$  es un abierto de  $X$ , como  $f$  es topológicamente transitiva, existe  $k$  tal que  $f^k(W) \cap U \neq \emptyset$ . Así,  $W \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$  es denso. Sea  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base numerable de  $X$ . Note que, por el Teorema de categorías de Baire (Teorema 9.13 de (J. Camargo, 2020)),

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(B_n),$$

es denso. Sean  $x \in H$  y  $V$  un abierto de  $X$ . Como  $\mathcal{B}$  es base, existe  $B_k \in \mathcal{B}$  tal que  $B_k \subseteq V$ . Así,  $x \in f^{-j}(B_k)$  para algún  $j \in \mathbb{N}$ . De lo anterior,  $f^j(x) \in V$  y  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $x \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$ . Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$ . Como  $\mathcal{O}_f(x)$  es densa, existe  $m$  tal que  $f^m(x) \in U$ . Sea  $y = f^m(x)$ . Como  $X$  no tiene puntos aislados,  $V \setminus \{x, \dots, f^m(x)\}$  es un abierto no vacío. Así, existe  $l$  tal

que  $f^l(x) \in V \setminus \{x, \dots, f^m(x)\}$ . Es claro que  $m < l$  y  $f^k(y) \in V$ , donde  $k = l - m$ . De lo anterior,  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$  y  $f$  es topológicamente transitiva.

□

En caso que las condiciones no se cumplan, es posible que la equivalencia no se satisfaga, como mostraremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.10.** Sea  $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  y  $f: X \rightarrow X$  definida para cada  $x \in X$  por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{si } x = \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Note que  $X$  es un espacio métrico compacto; en particular, métrico completo. Observe-mos que  $\mathcal{O}_f(1) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  es denso. Sin embargo, si  $U = \{\frac{1}{2}\}$  y  $V = \{1\}$ ,  $U$  y  $V$  son abiertos, y  $f^n(U) \cap V = \emptyset$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $f$  no es topológicamente transitiva.

Con el ejemplo anterior mostramos que la condición de no tener puntos aislados en la Proposición 2.1.9, es importante.

**Definición 2.1.11.** Dado  $x \in X$ , diremos en un punto  $y \in X$  está en el *conjunto  $\omega$ -límite* de  $x$  si existe una sucesión estrictamente creciente  $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$ . El conjunto  $\omega$ -límite se denota por  $\omega(x, f)$ .

En otras palabras  $y \in \omega(x, f)$  si existe una subsucesión de  $\mathcal{O}_f(x)$  convergente a  $y$ .

Es fácil ver que

$$\omega(x, f) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\bigcap_{n \geq N} \{f^n(x)\}}. \quad (2.1)$$

El siguiente lema se sigue directamente de las definiciones.

**Lema 2.1.12.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Entonces, existe  $x \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$  si, y solo si,  $\omega(x, f) = X$ .

La siguiente proposición es inmediata de la Proposición 2.1.9 y el Lema 2.1.12.

**Proposición 2.1.13.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Se tiene que  $f$  es topológicamente transitiva si y solo si existe  $x \in X$  es tal que  $\omega(x, f) = X$ .

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow X$  transitiva y  $U$  un conjunto abierto no vacío. Para todo abierto no vacío  $V \in X$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Entonces  $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$  es un conjunto abierto y denso en  $X$ . Como  $X$  es un espacio métrico compacto, existe una base numerable  $(U_k)_{k \geq 0}$ . Y como vimos anteriormente, para cada  $k \geq 0$ ,  $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U_k)$  también es denso en  $X$ . Si definimos

$$G := \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U_k),$$

para todo  $x \in G$ , se tiene que  $\mathcal{O}(x)$  interseca a todos los  $U_k$ . Como  $U_k$  es base, entonces  $\mathcal{O}(x)$  es denso en  $X$ . Por el Lema 2.1.12,  $\omega(x, f) = X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $\omega(x, f) = X$ ,  $a, b$  dos puntos arbitrarios de  $X$  y  $\varepsilon > 0$ . Por la definición de  $\omega$ -límite, se tiene que existen sucesiones  $s_1$  y  $s_2$  de elementos de la órbita de  $x$  tal que  $s_1 \rightarrow a$  y  $s_2 \rightarrow b$ . Entonces existe algún  $n_1$  suficientemente grande, de modo que  $f^{n_1}(x) \in B(a, \varepsilon)$  y análogamente existe  $n_2 > n_1$  tal que  $f^{n_2}(x) \in B(b, \varepsilon)$ . Con esto encontramos un elemento  $k = f^{n_1}(x)$  tal que  $k \in B(a, \varepsilon) \cap X$  tal que al iterarlo  $n_2 - n_1$  veces, este elemento interseca con  $B(b, \varepsilon)$ , luego  $f$  es una función transitiva. □

La siguiente definición es muy importante en el desarrollo del presente trabajo, pues, está muy relacionada con las nociones de caos que abordaremos más adelante.

**Definición 2.1.14.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Decimos que  $f$  es *sensible a las condiciones iniciales* en  $X$  si existe un valor  $\epsilon_0 > 0$ , tal que para todo  $x \in X$ , y cualquier  $\delta > 0$ , podemos encontrar  $y \in B(x, \delta)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0$ .

Al número  $\epsilon_0$  se le llama *constante de sensibilidad* de  $f$ .

**Definición 2.1.15.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Un subconjunto no vacío  $Y$  de  $X$  es llamado *f-invariante* si  $f(Y) \subseteq Y$ . Además, es llamado *fuertemente f-invariante* si  $f(Y) = Y$ .

A continuación mostraremos un ejemplo de un conjunto el cual es invariante, mas sin embargo no es fuertemente invariante. En el siguiente ejemplo denotaremos por  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  el espacio producto conocido como *espacio de Cantor*. Además,  $\pi_i: \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$  representa la proyección natural a la  $i$ -ésima coordenada.

**Ejemplo 2.1.16.** Sea  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definida para cada  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{C}$  por  $f(x) = (1, x_1, x_2, \dots)$ . Sea  $Y = \pi_1^{-1}(1) \cap \pi_2^{-1}(1)$ . Observe que si  $z \in Y$ , entonces  $z = (1, 1, z_3, z_4, \dots)$  y  $f(z) = (1, 1, 1, z_3, z_4, \dots)$ . Es decir,  $f(Y) \subseteq Y$  pero  $f(Y) \neq Y$ .

**Definición 2.1.17.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Un punto  $x \in X$  es llamado *aproximadamente periódico* si para cada  $\epsilon > 0$  existe un punto periódico  $z \in X$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x); f^n(z)) < \epsilon$ .

Esto quiere decir que si  $x$  es un punto aproximadamente periódico, a partir de un  $n$  suficientemente grande se tiene que  $f^k(x) \in B(f^k(z), \epsilon)$  para un punto periódico  $z$  de  $X$ .

**Definición 2.1.18.** Sean  $f: X \rightarrow X$  una función continua y  $X$  un espacio métrico. Se dice que  $f$  es *totalmente transitiva* si cumple que  $f^k$  es transitiva para todo  $k > 0$ .

**Definición 2.1.19.** Sea  $I$  un intervalo real no trivial; es decir, con más de un punto. Una función  $f: I \rightarrow I$  es *turbulenta* si existen subintervalos con a lo más un punto en común y compactos  $J, K \subseteq I$  tal que  $J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K)$ . Si además  $J$  y  $K$  son disjuntos  $f$  es *estrictamente turbulenta*.

## 2.2. Función tienda

La función tienda es una función con múltiples propiedades. En esta sección mostraremos algunas. Esta función la mencionaremos constantemente en el desarrollo del presente escrito.

Con el fin de dar una idea más clara y dar algunos ejemplos de las definiciones mencionadas anteriormente, definimos la función  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  para cada  $x \in [0, 1]$  por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, 1/2]; \\ 2(1 - x), & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La cual es conocida como la *función tienda*, la denotaremos con la letra  $T$  y su gráfica la podemos ver en la Figura [2.1](#).

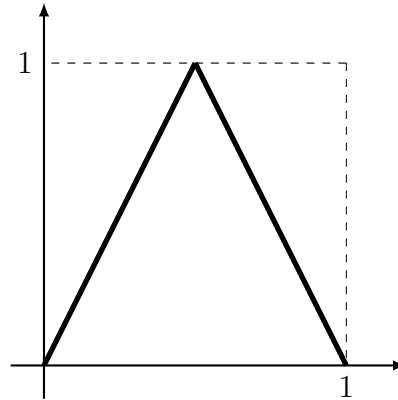
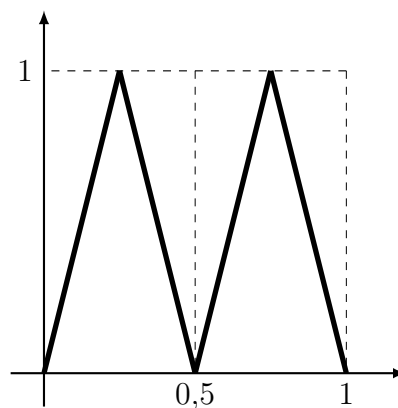


Figura 2.1. Función tienda.

Para iniciar a revisar las propiedades que tiene la función tienda, iniciamos estudiando las orbitas de  $T$ ; sus puntos fijos y periódicos. Es claro que  $T$  solo tiene dos puntos fijos,  $x = 0$  y  $x = \frac{2}{3}$ , pero que pasa si queremos ver los puntos periódicos de orden 2 de  $T$ , para esto basta con encontrar los puntos fijos de  $T^2$ , pero esta función corresponde a hacer un duplicado de  $T$  contrayéndola entre  $[0, \frac{1}{2}]$  y entre  $[\frac{1}{2}, 1]$  de modo que queda como vemos en la Figura 3.2.

Figura 2.2. Función  $T^2$ .

Así tenemos que  $T^2$  tiene cuatro puntos fijos:  $x = 0$ ,  $x = \frac{2}{5}$ ,  $x = \frac{3}{5}$  y  $x = 1$ ; de los cuales  $x = 0$  y  $x = \frac{2}{5}$  son los puntos fijos, y  $x = \frac{3}{5}$  y  $x = 1$  son los puntos de periodo 2,

para los cuales  $\mathcal{O}_f(\frac{2}{5}) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots\}$  y  $\mathcal{O}_f(\frac{4}{5}) = \{\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\}$ .

Para las siguientes iteraciones de  $T^n$  se repite el proceso, dividiendo cada una de las copias de la función tienda original en dos, de modo que cada copia quede en un intervalo  $[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}}]$ , donde  $k$  pertenece a los naturales menores que  $2^{n-1}$ , así que en cada uno de estos intervalos vamos a tener dos biyecciones de  $[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{2k-1}{2^n}]$  a  $[0, 1]$  y de  $[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{k}{2^{n-1}}]$  a  $[0, 1]$ , así que la intersección con la diagonal  $\{(x, y) : x = y\}$  siempre va a ser diferente de vacío, mas específicamente dos intersecciones por cada copia de la función tienda, así que vamos a tener  $2^n$  puntos fijos de la función  $T^n$ , lo que se traduce en  $2^n$  puntos de periodo  $n$  de  $T$ .

Esto nos impulsa a pensar que los puntos periódicos de  $T$  son densos en  $[0, 1]$ , ya que podemos hacer que los intervalos en donde se hacen las copias de la función tienda al hacer varias iteraciones de la función sean tan pequeños como queramos. Veamos que  $Per(T)$  es denso en  $[0, 1]$ . Sea  $U$  un abierto arbitrario de  $[0, 1]$ , es claro que podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, y un  $k \in \mathbb{N}$  menor que  $2^{n-1}$  tales que  $[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}}] \subseteq U$ . Por lo anterior, tenemos que en ese intervalo tenemos una copia de la función tienda para  $T^n$ . Así, tenemos dos puntos fijos  $p_1$  y  $p_2$  de  $T^n$ ; estos puntos son puntos periódicos de  $T$ . De esta manera  $A \cap Per(T) \neq \emptyset$ , por lo que se tiene que el conjunto de los puntos periódicos de  $T$  son densos en  $[0, 1]$ .

Usando lo anterior también podemos observar que  $T^n([\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}}]) = [0, 1]$ . Esto es, para cualquier abierto  $U$ , existe un entero positivo  $n$ , donde  $T^n(U) = [0, 1]$ . Así,  $T$  es una función exacta y por tanto, topológicamente transitiva.

Veamos ahora que  $T$  satisface la Definición 2.1.14, la cual habla de la sensibilidad

de  $T$  a las condiciones iniciales. Así, veamos que efectivamente la función  $T$  es sensible a las condiciones iniciales. Sea  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\delta > 0$  y  $x \in [0, 1]$  arbitrarios. Como tenemos que la función tienda es una función exacta, existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$T^n(B(x, \delta)) = [0, 1].$$

Así que tenemos dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  en  $B(x, \delta)$  tales que  $T^n(p_1) = 0$  y  $T^n(p_2) = 1$ , de esto podemos concluir por la desigualdad triangular que

$$d(T^n(x), T^n(p_1)) > \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad d(T^n(x), T^n(p_2)) > \frac{1}{2}$$

En cualquiera de los dos casos, hemos encontrado un  $y \in B(x, \delta)$  tal que la distancia de  $x$  y  $y$  al iterar  $n$  veces es mayor al  $\epsilon$  establecido. Con esto también concluimos que la función tienda tiene una constante de sensibilidad igual a  $\frac{1}{2}$ .

Finalmente, notemos que  $T([0, \frac{1}{4}]) = T([\frac{3}{4}, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$ . De esto,  $T$  es estrictamente turbulenta (ver Definición 2.1.19).

### 2.3. Función shift de Bernoulli

Esta función estará definida sobre el conjunto de Cantor  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  el cual es el conjunto formado por todas las sucesiones formadas por ceros y unos dotado de la topología producto. Como es usual, dados  $a = (a_i)_{i=0}^{\infty}$  y  $b = (b_i)_{i=0}^{\infty}$  puntos en  $\mathcal{C}$ , definimos la métrica por

$$d(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}.$$

**Definición 2.3.1.** Definamos la función  $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  dada por  $\sigma((a_i)_{i=0}^{\infty}) = (a_{i+1})_{i=0}^{\infty}$  para cada  $(a_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ . Esta función se conoce como la *función shift de Bernoulli*.

Es fácil ver que la función shift de Bernoulli posee puntos periódicos de cualquier orden, ya que los puntos periódicos de esta función corresponden a las secuencias que se repiten cada  $n$  elementos, es decir, de la forma  $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_0, a_1, \dots)$ .

Adicionalmente a lo anterior, no es difícil ver que, dado cualquier entero positivo  $n$ , existen exactamente  $2^n$  puntos periódicos de periodo menor o igual a  $n$ .

A continuación se mostraran algunas propiedades importantes de la función shift.

**Lema 2.3.2.** Sean  $a, b \in \mathcal{C}$ . Entonces, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_i = b_i$  para todo  $i \leq n$  si, y solo si,  $d(a, b) \leq 1/2^n$ .

*Demostración.* Si se tiene que  $a_i = b_i$ , usando la métrica anteriormente definida, se tiene que

$$d(a, b) = \sum_{i=0}^n \frac{|a_i - b_i|}{2^i} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j - b_j|}{2^j} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j - b_j|}{2^j} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

Ahora, si existe algún natural  $k < n$  tal que  $a_k \neq b_k$ , se tiene que

$$d(a, b) \geq \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^n}.$$

□

**Proposición 2.3.3.** La función shift de Bernoulli  $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es una función continua.

*Demostración.* Sean  $\epsilon > 0$  y  $a \in \mathcal{C}$  tal que  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Considere  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \epsilon$ . Sea  $\delta = 1/2^{n+1}$ . Ahora, si tomamos  $b \in B(a, \delta)$ , por el Lema 2.3.2, se tiene que

$a_i = b_i$  para todo  $i \leq n + 1$ . Al aplicarles la función shift se obtiene  $\sigma(a) = (a_1, a_2, \dots)$  y  $\sigma(b) = (b_1, b_2, \dots)$ . Nuevamente por el Lema 2.3.2, se tiene que  $d(\sigma(a), \sigma(b)) \leq 1/2^n \leq \epsilon$ . Por lo tanto  $\sigma$  es una función continua.  $\square$

Otras propiedades importantes de la función shift las mostramos en los siguientes resultados.

**Proposición 2.3.4.** *El conjunto  $Per(\sigma)$  es denso en  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Sean  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{C}$  y  $\epsilon > 0$ . Considere  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \epsilon$ . Tomemos  $y = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0, x_2, \dots)$ . Es claro que  $y$  es un punto periódico de periodo  $n + 1$  y por el Lema 2.3.2, se tiene que  $d(x, y) \leq 1/2^n < \epsilon$ . Entonces  $x$  pertenece a  $\overline{Per(\sigma)}$ .  $\square$

**Proposición 2.3.5.** *La función Shift de Bernoulli es topológicamente transitiva.*

*Demostración.* Sea  $s \in \mathcal{C}$  definido de la siguiente manera:

$$s = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots). \quad (2.2)$$

El punto  $s$  lista todos los posibles bloques de todos los tamaños (finitos), que se pueden hacer con 0 y 1. Esto es:  $s_0 = 0$  y  $s_1 = 1$  bloques de tamaño 1;  $s_2, s_3 = 0, 0$ ,  $s_4, s_5 = 0, 1$ ,  $s_6, s_7 = 1, 0$ ,  $s_8, s_9 = 1, 1$  bloques de tamaño 2, representados en gris en (2.2);  $s_{10}, s_{11}, s_{12} = 0, 0, 0$ ,  $s_{13}, s_{14}, s_{15} = 0, 0, 1$ ,  $s_{16}, s_{17}, s_{18} = 0, 1, 0$ ,  $s_{19}, s_{20}, s_{21} = 1, 0, 0$ ,  $s_{22}, s_{23}, s_{24} = 0, 1, 1$ ,  $s_{24}, s_{25}, s_{26} = 1, 0, 1$ ,  $s_{27}, s_{28}, s_{29} = 1, 1, 0$ ,  $s_{30}, s_{31}, s_{32} = 1, 1, 1$  bloques de tamaño 3; etc.

De esta forma, dado cualquier  $x = (x_i)_{i=0}^{\infty}$  y cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Por la construcción de  $s$ , existe  $m$  tal que  $\sigma^m(s) = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s_{m-s}, s_{m-s+1}, \dots)$ . Así, por el Lema 2.3.2,  $d(x, \sigma^m(s)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . De lo anterior,  $\mathcal{O}_\sigma(s)$  es denso y por el Lema 2.1.12,  $\omega(s, \sigma) = \mathcal{C}$ . Por la Proposición 2.1.13,  $\sigma$  es topológicamente transitiva.  $\square$

**Proposición 2.3.6.** *La función  $\sigma$  es sensible a las condiciones iniciales.*

*Demostración.* Probaremos que la constante de sensibilidad es  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Sean  $\delta > 0$  y  $x = (x_i)_{i=0}^{\infty}$  un punto en  $\mathcal{C}$ . Tomemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^{n_0} < \delta$ . Definamos,  $y = (y_i)_{i=0}^{\infty}$  donde

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } i \neq n_0; \\ 0, & \text{si } x_{n_0} = 1; \\ 1, & \text{si } x_{n_0} = 0. \end{cases}$$

Observe que  $d(x, y) < \delta$ . Además,

$$d(\sigma^{n_0}(x), \sigma^{n_0}(y)) = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto concluimos que  $\sigma$  es sensible a las condiciones iniciales.  $\square$

### 3. Funciones caóticas

Las funciones caóticas son un tema fascinante en el campo de las matemáticas. Estas funciones son conocidas por su comportamiento impredecible y altamente sensible a las condiciones iniciales.

Las funciones caóticas se definen por diferentes autores, con diferentes puntos de vista de lo que para ellos es una función que exhibe un comportamiento caótico. Una propiedad común, que aparentemente la comunidad matemática está de acuerdo, es que una función caótica debe tener la condición que a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a grandes diferencias en el comportamiento de la función a largo plazo. En este capítulo veremos algunos ejemplos que cumplen ciertos conceptos de caos.

A continuación veremos tres definiciones de función caótica: la primera definida por Robert DEVANEY en 1992 ([Devaney, 1989](#)), la segunda planteada por Tien-Yien LI y James YORKE en el año 1975 ([Li y Yorke, 1975](#)) y por último la definición más reciente dada por Louis BLOCK y William COPPEL en 1991 ([Coppel, 1991](#)).

#### 3.1. Funciones caóticas según Devaney

El objetivo de este capítulo es estudiar la definición de caos según Devaney, algunas de sus propiedades y otros resultados que esta definición conlleva, para esto partimos de la siguiente definición.

**Definición 3.1.1.** Sea  $X$  un espacio métrico sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua, decimos que  $f$  es *caótica en el sentido de Devaney*, o genera un sistema dinámico caótico en  $X$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El conjunto  $Per(f)$  forma un conjunto denso en  $X$ ;
2.  $f$  es topológicamente transitiva en  $X$ ; y
3.  $f$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ .

Dos ejemplos de una función caótica son la función tienda y la función Shift de Bernoulli, estas dos funciones fueron definidas en las secciones 2.2 y 2.3, respectivamente, para las cuales demostramos cada una de las propiedades necesarias para ver que estas funciones cumplan la Definición 3.1.1.

Claramente hay funciones que no son caóticas por el hecho de no cumplir una de las condiciones necesarias, a continuación se darán dos ejemplos los cuales no son caóticas pero si cumplen dos de las tres condiciones necesarias.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ 2x - \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]; \\ \frac{5}{2} - 2x, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

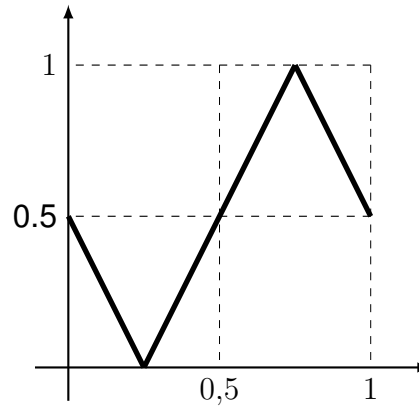


Figura 3.1. Gráfica de función  $f$ .

Tiene un comportamiento análogo a la función tienda, ya que sus puntos periódicos también son densos en  $[0, 1]$  y es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad igual a  $\epsilon = \frac{1}{4}$ , esto se demuestra usando razonamientos similares a los que se trabajaron para la función tienda. Pero si tomamos dos abiertos  $A$  y  $B$  tales que  $A \subseteq [0, \frac{1}{2}]$  y  $B \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$  y así tenemos que las imágenes de  $A$  quedan contenidas en el mismo intervalo en los cuales estaban inicialmente contenidos, por lo que se tiene que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f^n(A) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{y} \quad f^n(B) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Entonces,

$$f^n(A) \cap B = \emptyset, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo que tenemos que esta función no es transitiva y por lo tanto,  $f$  no es una función caótica.

**Ejemplo 3.1.3.** Existe una función transitiva que no tiene puntos periódicos, ni es sensible

a las condiciones iniciales.

Sea  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  el conjunto formado por todas las sucesiones formadas por ceros y unos dotado de la topología producto.  $\mathcal{C}$  es conocido como el conjunto o espacio de Cantor. Sea  $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definida para cada  $x \in \mathcal{C}$  por:

$$H(x) = \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots), & \text{para } n = \min\{i \mid x_i = 0\}; \\ (0, 0, 0, \dots), & \text{si } x_i = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esta función es llamada la *función sumadora de Cantor*. Veamos que esta función no tiene puntos periódicos, no es sensible a las condiciones iniciales, pero si es transitiva.

Para el ejemplo anterior, definimos la siguiente base sobre el conjunto de Cantor. Definamos primero para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\beta_n = \{[a_1 a_2 \dots a_n] \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}\},$$

donde

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = \{x \in \mathcal{C} \mid x_i = a_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Es claro que  $\beta = \bigcup \beta_n$  es una base de  $\mathcal{C}$ .

Nótese que fijando un entero positivo  $m$ , la colección de abiertos  $\beta_m$  tiene exactamente  $2^m$  elementos, donde además:

$$\mathcal{C} = \bigcup \beta_m.$$

Observe que:

- $\beta_1 = \{[0], [1]\};$
- $\beta_2 = \{[00], [01], [10], [11]\};$
- $\beta_3 = \{[000], [010], [100], [110], [001], [011], [101], [111]\}.$

Aplicando la función  $H$  a cada uno de los conjuntos tenemos que:

- $H([0]) = [1]$  y  $H([1]) = [0];$
- $H([00]) = [10], H([10]) = [01], H([01]) = [11]$  y  $H([11]) = [00].$
- $H([000]) = [100], H([100]) = [010], H([010]) = [110], H([110]) = [001],$   
 $H([001]) = [101], H([101]) = [011], H([011]) = [111]$  y  $H([111]) = [000].$

Con estos argumentos no es difícil mostrar el siguiente lema.

**Lema 3.1.4.** *Sean  $\mathcal{C}$  es conjunto de Cantor,  $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  la función sumadora de Cantor y*

*$\beta = \cup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$  la base, como los definimos anteriormente. Entonces:*

1.  $\mathcal{C} = \bigcup \beta_n$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\beta_n = \{[a_1 \dots a_n], H([a_1 \dots a_n]), H^2([a_1 \dots a_n]), \dots, H^{2^n-1}([a_1 \dots a_n])\}$ , donde  $[a_1 \dots a_n]$  es cualquier elemento de  $\beta_n$ .
3.  $H|_{[a_1 \dots a_n]}: [a_1 \dots a_n] \rightarrow H([a_1 \dots a_n]) = [b_1 \dots b_n]$  donde  $[a_1 \dots a_n] \neq [b_1 \dots b_n]$ , es un homeomorfismo, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $H^k([a_1 \dots a_n]) \neq [a_1 \dots a_n]$ , para todo  $k < 2^n$ , cualquier abierto  $[a_1 \dots a_n] \in \beta_n$ , y  $H^{2^n}([a_1 \dots a_n]) = [a_1 \dots a_n]$ .

5.  $|([a_1 \dots a_n])| \leq \frac{1}{3^n}$ , para todo  $[a_1, \dots, a_n] \in \beta_n$ .

Probemos que  $H$  cumple las propiedades planteadas en el enunciado del Ejemplo 3.1.3.

**Afirmación 3.1.5.**  $H$  no tiene puntos periódicos.

*Demostración.* Primero veamos que la función  $H$  no tiene puntos periódicos. Supongamos que existe un punto  $x_0 \in \mathcal{C}$  tal que es un punto periódico de periodo  $k$ , tome  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $2^a > k$ . Es claro que  $x \in c_i$  para algún  $c_i \in \beta_a$ , ahora, ya que se tiene la condición que  $2^a > k$  y por el lema anterior tenemos que  $H^k(c_i) \neq c_i$ , luego, como  $x \in c_i$ , se tiene que  $H(x) \notin c_i$ , por lo que  $H(x) \neq x$ , luego  $x$  no es un punto periódico.  $\square$

**Afirmación 3.1.6.**  $H$  es transitiva.

*Demostración.* Ahora veamos que  $H$  es transitiva. Sean  $A$  y  $B$  abiertos de  $\mathcal{C}$ . Como  $\beta$  es una base de  $\mathcal{C}$ , existen  $c_i \in \beta_n$  y  $c_j \in \beta_m$  para algunos  $n, m \in \mathbb{N}$ , tales que  $c_i \subseteq A$  y  $c_j \subseteq B$ . Supongamos que  $m < n$ . Luego existe  $c'_j \in \beta_n$  tal que  $c'_j \subseteq c_j$ . De lo anterior,  $c_i \subseteq A$  y  $c'_j \subseteq B$ . Ahora, por el Lema 3.1.4, parte 2, tenemos que existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $H^k(c_i) = c'_j$ . Así, concluimos que  $H^k(A) \cap B \neq \emptyset$  y  $H$  es transitiva.  $\square$

**Afirmación 3.1.7.**  $H$  no es sensible a las condiciones iniciales.

*Demostración.* Veamos que  $H$  no es sensible a las condiciones iniciales. Para esto, sea  $\epsilon > 0$ . Note que existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^m} < \epsilon$ . Consideremos  $\delta < \frac{1}{3^m}$ . Si  $d(x, y) < \delta$ , entonces existe  $i \in \{1, \dots, 2^m\}$  tal que  $x, y \in c_i$ , donde  $c_i \in \beta_m$ . Por el Lema 3.1.4, inciso 3, tenemos que  $H^i(x), H^i(y) \in c_j$  para algún  $j \in \{1, \dots, 2^m\}$  y todo  $i \in \mathbb{N}$ . Como  $|c_j| <$

$\frac{1}{3^m} < \varepsilon$ ,  $d(H^i(x), H^i(y)) < \varepsilon$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Así,  $H$  no es sensible a las condiciones iniciales.  $\square$

Nótese que se dieron ejemplos de funciones las cuales solo cumplen dos de las tres condiciones, pero no se vio una función en la cual se cumpla que sus puntos periódicos son densos en el conjunto y sea topológicamente transitiva pero que no sea sensible a las condiciones iniciales, esto se debe a que posterior al planteamiento de la definición de caos según Devaney, se demostró que esto no es posible, por esto a continuación se mostrara que la Definición 3.1.1 se puede simplificar, ya que los incisos uno y dos, implican el inciso tres.

Antes de mostrar el teorema de simplificación probaremos un lema auxiliar que facilitara la demostración de este.

Dados un espacio métrico  $X$ ,  $A \subseteq X$  y  $p \in X \setminus A$ , en el siguiente resultado, usaremos la siguiente notación:

$$d(p; A) = \inf\{d(p; x) : x \in A\}.$$

**Lema 3.1.8.** *Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $Per(f)$  tiene al menos dos puntos. Entonces, existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $x \in X$ , podemos encontrar un punto periódico  $q \in X$  donde  $d(x; \mathcal{O}(q)) > \frac{\delta_0}{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $x$  un punto arbitrario de  $X$ . Consideremos dos puntos periódicos  $q_1$  y  $q_2$ . Sea  $\delta_0 = \min\{d(z, y) : z \in \mathcal{O}_f(q_1), y \in \mathcal{O}_f(q_2)\}$ . Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(x; f^n(q_1)) \leq$

$d(x; f^k(q_1))$  y  $d(x; f^m(q_2)) \leq d(x; f^k(q_2))$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1); f^m(q_2)) \leq d(f^n(q_1); x) + d(f^m(q_2); x).$$

Sin pérdida de generalidad tomamos  $d(f^n(q_1); x) \leq d(f^m(q_2); x)$ . Entonces,

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1); x) + d(f^n(q_1); x) = 2d(f^n(q_1); x).$$

Así,  $d(\mathcal{O}(q_1); x) \geq \frac{\delta_0}{2}$ . □

Con esto podemos seguir con la prueba del teorema que simplifica la Definición 3.1.1.

**Teorema 3.1.9.** *Sea  $X$  un espacio métrico sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Supongamos que  $f$  cumple:*

1.  $Per(f)$  forma un conjunto denso en  $X$ ; y
2.  $f$  es transitiva en  $X$ .

*Con esto, podemos concluir que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales.*

*Demostración.* Considerando  $\delta_0$  siguiendo el Lema 3.1.8, y definimos  $\epsilon = \frac{\delta_0}{8}$ . Sean  $x \in X$  y  $\delta > 0$ . Debemos demostrar que existe  $z \in B(x; \delta)$  y un entero positivo  $n$  tal que  $d(f^n(x), f^n(z)) > \epsilon$ .

Por el Lema 3.1.8, existe un punto periódico  $q$  tal que  $d(x; \mathcal{O}(q)) \geq 4\epsilon$ . Sea  $U = B(x; \min\{\delta, \epsilon\})$ . Por la densidad de  $Per(f)$  existe  $p \in Per(f) \cap U$  donde  $f^n(p) = p$ . Ahora

definamos

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B(f^i(q)); \epsilon).$$

Es claro que  $V$  es abierto y no vacío, ya que  $q$  pertenece a  $V$ . Como  $f$  es transitiva, se tiene que existen  $y \in U$  y  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $f^k(y) \in V$ . Definimos  $j = \left[ \frac{k}{n} \right] + 1$ , con esto tenemos que  $1 \leq nj - k \leq n$  por la definición de  $j$ , entonces

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B(f^{nj-k}(q); \epsilon).$$

También se tiene que  $f^{nj}(p) = p$  ya que el periodo de  $p$  es  $n$ , entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(f^{nj}(p); f^{nj}(y)) = d(p; f^{nj}(y)) \geq d(x; f^{nj}(y)) - d(x; p)$$

$$d(f^{nj}(p); f^{nj}(y)) \geq d(x; f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q); f^{nj}(y)) - d(x; p)$$

Ya que  $p \in U$ ,  $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q); \epsilon)$  y la distancia entre  $x$  y la órbita de  $q$  es mayor a  $4\epsilon$ , tenemos que

$$d(f^{nj}(p); f^{nj}(y)) > 4\epsilon - \epsilon - \epsilon = 2\epsilon$$

Usando la desigualdad triangular tenemos que,

$$d(f^{nj}(x); f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(p); f^{nj}(x)) > 2\epsilon$$

Con esto tenemos que tanto  $d(f^{nj}(x); f^{nj}(y))$  como  $d(f^{nj}(p); f^{nj}(x))$  no pueden ser

menores a  $\epsilon$  al tiempo, entonces.

$$d(f^{n_j}(x); f^{n_j}(y)) > \epsilon \quad \text{o} \quad d(f^{n_j}(x); f^{n_j}(p)) > \epsilon$$

En cualquiera de los dos casos hemos encontrado un punto en cualquier vecindad de  $x$  tal que en la  $n_j$ -ésima iteración sus imágenes están a una distancia mayor a  $\epsilon$ , por lo que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad  $\epsilon$ .  $\square$

**Corolario 3.1.10.** *Sea  $X$  un espacio métrico sin puntos aislados y  $f$  una función continua. Entonces,  $f$  es caótica según Devaney si, y solo si,  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$  y  $f$  es transitiva.*

El siguiente teorema nos muestra que la definición de caos según Devaney se puede simplificar aun más si trabajamos bajo intervalos de la recta real. Para esto primero demostraremos el siguiente lema.

**Lema 3.1.11.** *Sean  $I$  un intervalo de la recta real y  $f: I \rightarrow I$  una función continua. Si  $J \subseteq I$  un intervalo el cual no contiene puntos periódicos de  $f$  y además,  $z, f^m(z)$  y  $f^n(z)$  pertenecen a  $J$  con  $0 < m < n$  para algún  $z$ , entonces  $z < f^m(z) < f^n(z)$  o  $z > f^m(z) > f^n(z)$ .*

*Demostración.* Supongamos que existen  $J \subseteq I$  un intervalo,  $z \in J$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que  $m < n$ ,  $z < f^m(z)$ ,  $f^n(z) < f^m(z)$ , y  $f^m(z), f^n(z) \in J$ . Definimos  $g = f^m$ .

Probemos que  $g(z) < g^2(z)$ . Supongamos que  $g^2(z) \leq g(z)$  y definimos  $h(z) = z - g(z)$ . Observemos que  $h$  es continua. Además  $h(z) < 0$  y  $h(g(z)) = g(z) - g^2(z) > 0$ . Por el teorema del valor intermedio, existe  $c \in (z, g(z))$  tal que  $h(c) = c - g(c) = 0$ . Esto es,  $c$  es un punto periódico en  $J$ , contradiciendo nuestra hipótesis. Entonces,  $g(z) < g^2(z)$ .

De la misma forma realizando un proceso inductivo tenemos que  $g(z) < g^k(z)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . En particular, para  $k = n - m$ , tenemos que  $z < f^{km}(z)$ . Supusimos que  $f^n(z) = f^{(n-m)}(f^m(z)) < f^m(z)$ . Repitiendo el argumento anterior, definiendo la función continua  $h_0(x) = f^{(n-m)m}(x) - x$ , tenemos que  $h_0(z) > 0$  y  $h_0(f^m(z)) = f^n(z) - f^m(z) < 0$ . Así, existe  $c' \in (z, f^{n-m}(z))$  tal que  $h_0(c') = 0$ . De lo anterior,  $c'$  es un punto periódico, llegando nuevamente a una contradicción. El otro caso se muestra de la misma manera. □

**Teorema 3.1.12.** *Sean  $A$  un intervalo no degenerado en  $\mathbb{R}$  y  $f: A \rightarrow A$  una función continua. Si  $f$  es transitiva, entonces el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  es denso en  $A$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $Per(f)$  no es denso en  $A$ , entonces existe un intervalo  $J \subseteq A$  tal que  $J$  no tiene puntos periódicos. Sean  $N \subsetneq J$  y  $E \subseteq J \setminus N$  intervalos abiertos. Como  $f$  es transitiva, existe  $k \in \mathbb{N}$  y  $y \in N$  tal que  $f^k(y) \in E$ . Como  $f$  es continua podemos encontrar una vecindad  $U$  de  $y$  tal que no se salga de  $E$ . Por la transitividad de  $f$  y vemos que existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $x \in U$  tales que  $f^m(x) \in N$ . Como  $x \in U$ , lo podemos escribir como  $f^k(z)$  con  $z \in N$ ; y así,  $f^m(x) = f^{k+m}(z)$ . Hemos encontrado un punto  $z \in N$  tal que  $f^{k+m}(z) \in N$  y  $f^k(z) \in E$ , lo cual contradice el Lema 3.1.11 sin importar como se encuentren ubicados los intervalos  $N$  y  $E$ . Entonces se tiene para cualquier abierto de  $A$  intersectado con  $Per(f)$  es diferente de vacío, luego  $Per(f)$  es denso en  $A$  □

### 3.2. Funciones caóticas según Li-Yorke

En esta sección estudiamos la definición planteada por Li y Yorke en (Li y Yorke, 1975). Mostramos algunas de sus propiedades y algunos ejemplos. También veremos la relación que tiene esta definición con la anterior trabajada en la Sección 3.1.

**Definición 3.2.1.** Una función continua  $f: X \rightarrow X$  en un espacio métrico compacto  $(X, d)$  es llamado caótico en el sentido de Li-Yorke si existe un subconjunto no numerable  $S$  de  $X$  con las siguientes propiedades:

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} > 0$  para todo  $x, y \in S, x \neq y$ ,
2.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} = 0$  para todo  $x, y \in S, x \neq y$ ,
3.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(p))\} > 0$  para todo  $x \in S, p \in X$ , donde  $p$  es un punto periódico.

La definición anterior es la propuesta por Li y Yorke en (Li y Yorke, 1975) en 1975, pero comúnmente en esta definición se remueve el ítem 3, ya que se toma como una redundancia, como mostraremos a continuación.

La definición anterior se puede simplificar, debido a que no es posible que dos puntos que no cumplan el ítem 3 pertenezcan al conjunto, y cumplan los incisos 1 y 2 al tiempo; para ver esto, primero analicemos que puntos no cumplen con el tercer ítem.

La siguiente definición nos será de utilidad en la prueba del teorema que enunciamos a continuación.

**Definición 3.2.2.** Sean  $f: X \rightarrow X$  una función continua y  $x_0 \in X$ . Decimos que  $x_0$  es un punto aproximadamente periódico, si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un punto periódico  $z \in X$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(z))\} < \varepsilon$ .

**Ejemplo 3.2.3.** Observemos que tomando  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = x^2$ , tenemos que como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 1; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Entonces todo punto en  $[0, 1]$  es aproximadamente periódico.

Es fácil ver que cumplir con la Definición 3.2.2 es equivalente a no cumplir el ítem 3 de la Definición 3.2.1.

**Teorema 3.2.4.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua en un espacio métrico compacto  $(X, d)$ . Supongamos que existe un subconjunto no numerable  $S$  de  $X$  tal que:

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} > 0$  para todo  $x, y \in S, x \neq y$ , y
2.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} = 0$  para todo  $x, y \in S, x \neq y$ .

Entonces,  $f$  es caótica en el sentido de Li-Yorke.

*Demostración.* Vemos que la única diferencia que tiene con la Definición 3.2.1 es la tercera condición. Así, basta ver que podemos formar el subconjunto no numerable que cumpla 1 y 2, y que ningún punto incumpla 3. Para esto, vamos a suponer que no pueden existir dos puntos que cumplan 1 y 2 y no cumplan 3 en la Definición 3.2.1.

Sean  $S \subseteq X$  tal que cumple las hipótesis del teorema. Sean  $a, b \in S$  tales que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(a), f^n(b))\} = L > 0$ . Definimos  $\varepsilon < L/4$ . Consideramos  $a$  y  $b$  aproximadamente periódicos; es decir,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(a), f^n(z_1))\} < \varepsilon \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(b), f^n(z_2))\} < \varepsilon,$$

para algún  $z_1, z_2 \in \text{Per}(f)$ . Pero esto muestra que no cumplen el ítem 3 de la Definición 3.2.1. Entonces,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} > 0$ . Con esto concluimos que solo puede existir un punto en el conjunto  $S$  que no cumple la condición 3 de la definición de caos según Li-Yorke. Por lo tanto, al eliminar el punto que no cumple (3), tendremos un conjunto no numerable  $S'$  tal que cumple las tres condiciones para ser caótica según Li-Yorke. □

Una condición suficiente para que una función definida en un intervalo sea caótica según Li-Yorke es la siguiente. La demostración es muy extensa y no se abordara en este trabajo. Una demostración se puede encontrar en (Li y Yorke, 1975, Teorema 1).

**Teorema 3.2.5.** *Sean  $J$  un intervalo con más de un punto y  $f: J \rightarrow J$  una función continua. Supongamos que existe un punto  $a \in J$  tal que  $b = f(a)$ ,  $c = f^2(a)$  y  $d = f^3(a)$ , donde*

$$d \leq a < b < c \quad \text{ó} \quad (d \geq a > b > c).$$

*Entonces,  $f$  es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Es claro que las condiciones del teorema se cumplen si  $a$  es un punto periódico de periodo 3, así que se puede concluir que si una función continua en un intervalo posee

un punto periódico de periodo tres, entonces esa función es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Este teorema nos ayuda mucho en determinar cuando una función es caótica según Li-Yorke como por ejemplo la función tienda mostrada en la Sección 2.2 como se muestra a continuación:

**Ejemplo 3.2.6.** Veamos que la función tienda tiene como mínimo un punto de periodo 3. Para esto, hacemos la gráfica de  $T^3$  y miramos sus puntos fijos.

Es evidente que los puntos fijos de  $T$ , también van a ser puntos fijos de  $T^3$ , por lo que estos puntos no son de periodo 3. Estos puntos corresponden a  $x = 0$  y  $x = \frac{2}{3}$ , y los mostraremos en la siguiente figura.

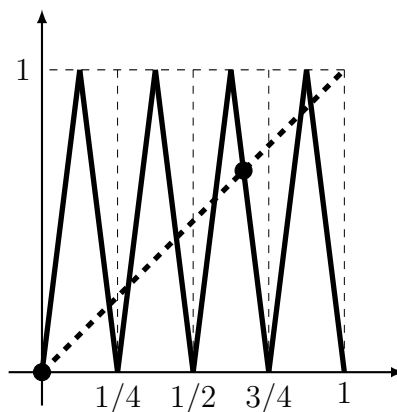


Figura 3.2. Función  $T^3$ .

Como mostramos anteriormente hay puntos en la intersección de  $T^3$  con la identidad, veamos cuales son. Es fácil ver que

$$T^3(x) = -8x + 2 \quad \text{si} \quad \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Al hallar el punto fijo de  $T^3$  en este intervalo tenemos que:

$$-8x + 2 = x \Rightarrow 9x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}.$$

Entonces tenemos que  $x = \frac{2}{9}$  es un punto fijo de  $T^3$ ; es decir,  $T(\frac{2}{9}) = \frac{4}{9}$ ,  $T(\frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$  y  $T(\frac{8}{9}) = \frac{2}{9}$ . Por lo tanto,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{4}{9}$  y  $\frac{8}{9}$  son puntos de periodo tres de  $T$ . Por el Teorema 3.2.5 se tiene que la función tienda es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Con el ejemplo anterior nos podemos preguntar cuando una modificación de la función tienda es caótica.

**Ejemplo 3.2.7.** Definimos la siguiente familia de funciones,  $T_c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que,

$$T_c(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(c-1)x + 2-c, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Y su gráfica la podemos ver en la Figura 3.3.

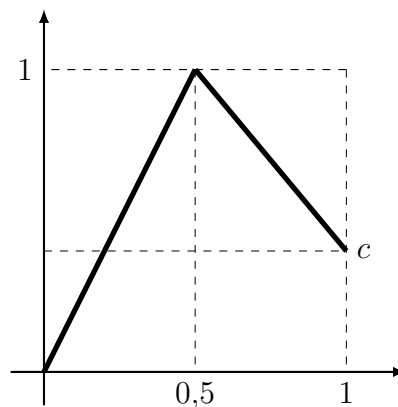


Figura 3.3. Función  $T_c$ .

Es claro que la función  $T_c$  tiene únicamente dos puntos fijos para todo  $C$ .

Primero analicemos cuando  $c > \frac{1}{2}$ . Es claro que  $T_c([\frac{1}{2}, 1]) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ . Entonces  $T_c([\frac{1}{4}, 1]) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$  y  $T_c^2(x) = 4x$  si  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ . Así mismo  $T_c^2([\frac{1}{8}, 1]) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$  y  $T_c^3(x) = 8x$  si  $0 \leq x \leq \frac{1}{8}$ .

Ahora, ya que  $T_c$  corresponde a una función lineal en el intervalo  $(\frac{1}{2}, 1)$  tal que  $T_c: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ , entonces  $T_c^3$  correspondería a una función lineal tal que  $T_c: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$  y  $T_c^3(\frac{1}{2}) = T(c) > \frac{1}{2}$  y  $T_c^3(1) = T^2(c) > \frac{1}{2}$ . De modo que un bosquejo de la función  $T^3$  quedaría de la siguiente manera:

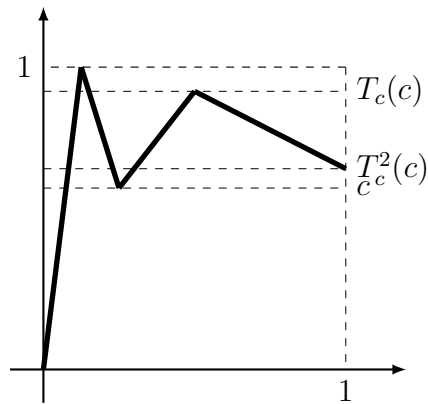


Figura 3.4. Función  $T_c^3$  para  $c > 0,5$ .

Es claro que al hallar los puntos fijos de  $T_c^3$  son únicamente dos puntos para cualquier  $c > \frac{1}{2}$ , los cuales corresponden a los puntos fijos de  $T_c$ , por lo tanto no son puntos de periodo 3. Por otra parte, note que si  $x \in [0, 1] \setminus \{0\}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ , donde  $p$  es el punto fijo de  $T_c$  diferente de 0. Así,  $T_c$  no es caótica en el sentido de Li-Yorke para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Un análisis similar nos muestra que  $T_{\frac{1}{2}}$  tampoco es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Ahora analicemos que pasa cuando  $c < \frac{1}{2}$ . Es claro que  $T_c(x) = 4x$  si  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ . Entonces  $T_c^2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$  y  $T_c^2(\frac{1}{4}) = 1$ . Así mismo  $T_c^3(\frac{1}{8}) = 1$  y  $T_c^3(\frac{1}{4}) = c$ . De modo que

$T_c^3(x) = 8(c-1)x + 2 - c$  si  $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$ . Entonces al igualar con la identidad y despejar para hallar puntos fijos, tenemos que:

$$x = \frac{2-c}{9-8c} \quad \text{para} \quad 0 \leq c \leq \frac{1}{2}.$$

Además  $x$  debe estar entre  $\frac{1}{8}$  y  $\frac{1}{4}$  ya que ese es el intervalo al cual le corresponde esa recta. Esto nos da que  $T_c^3$  intersecta a la función identidad si  $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ . Entonces posee por lo menos un punto de periodo 3. Por el Teorema 3.2.5, tenemos que  $T_c$  es caótica en el sentido de Li-Yorke si  $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ . Es decir, en este caso solo podemos llegar a una conclusión si  $c \in [0, \frac{1}{4}]$ .

No pudimos dar respuesta a la siguiente pregunta:

**Pregunta 3.2.8.** ¿ $T_c$  es caótica en el sentido de Li-Yorke siempre que  $c \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ?

Observemos que por el Teorema 3.2.5, resulta ser muy sencillo construir una función caótica en el sentido de Li-Yorke, como mostramos a continuación.

**Ejemplo 3.2.9.** Sea  $f: [0, 5] \rightarrow [0, 5]$  la definiremos de modo que  $f(1) = 3$ ,  $f(3) = 5$  y  $f(5) = 1$ , entonces, tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ x+2, & \text{si } 1 < x \leq 3; \\ 20-5x & \text{si } 3 < x \leq 4; \\ x-4 & \text{si } 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

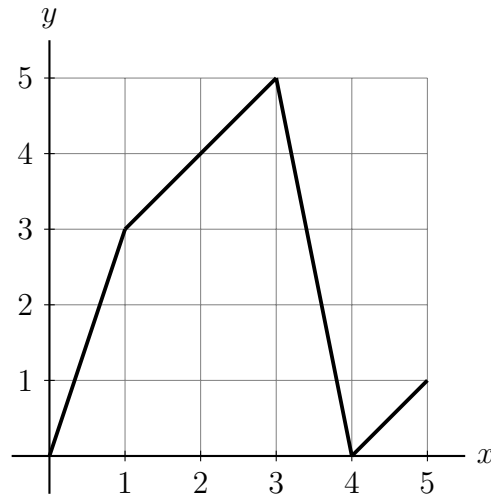


Figura 3.5. Gráfica de construcción de función caótica

Es claro que  $x = 1$  corresponde a un punto de periodo tres. Por el Teorema 3.2.5 se tiene que  $f$  es una función caótica en el sentido de Li-Yorke.

En el caso de que  $X$  sea un intervalo compacto, es posible derivar algunas relaciones entre las nociones de caos que hemos definido previamente. Fijaremos  $(I, f)$  un sistema dinámico con  $I$  un intervalo compacto no trivial. En estas condiciones la noción de Devaney implica la noción de Li-Yorke, como mostramos a continuación. Para esto primero vamos a enunciar unos lemas auxiliares que nos ayudaran con nuestra demostración.

**Lema 3.2.10.** Sean  $I = [u, v]$  y  $f: I \rightarrow I$  topológicamente transitivo pero no totalmente transitivo. Entonces, existe  $J \subsetneq I$  intervalo compacto y  $l \geq 1$  tal que  $f^l(J) = J$ .

*Demostración.* Como  $f$  no es totalmente transitiva, existe  $k > 0$  tal que  $f^k$  no es topológicamente transitiva. Si definimos  $g = f^k$ , entonces existen  $U, V \in I$  tales que  $g^n(U) \cap V = \emptyset$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ya que  $f$  es topológicamente transitivo, por 2.1.8, tenemos que existe  $x_0 \in I$  tal que  $\mathcal{O}_f(x_0)$  es denso en  $I$ , en particular  $\mathcal{O}_f(x_0) \cap U \neq \emptyset$ . De esto, existe  $m \in \mathbb{N}$

tal que  $f^m(x_0) \in U$ . Ya que  $\mathcal{O}_f(x_0)$  no es finito, se tiene que al quitarle una cantidad finita de puntos sigue siendo denso. Así que  $\mathcal{O}_f(f^m(x_0))$  sigue siendo denso en  $I$ . Y sin pérdida de generalidad podemos considerar  $x_0 \in U$ . Por el Teorema 3.1.12, se tiene que  $Per(f)$  es denso en  $I$ . Existe  $y \in U$  tal que  $f^p(y) = y$ , entonces  $g^r(y) = y$  para  $r = pk$ . Si definimos  $h = g^r$ . Se tiene que  $y$  es punto fijo de  $h$  y además,  $h^n(U) \cap V = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  ya que  $g$  no es transitiva. Ahora definimos

$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U).$$

Note que  $L \cap V = \emptyset$ . Además ya que  $h$  es continua, tenemos que

$$h(\overline{L}) = h\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U)}\right) \subseteq \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} h^{n+1}(U)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} h^n(U)} \subseteq \overline{L}.$$

Ahora, como  $\{h^n(\overline{L})\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión decreciente de intervalos compactos. Entonces,

$$J = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(\overline{L})$$

también es un intervalo compacto. Veamos que  $J \neq \{p\}$ . Supongamos que  $J$  es un intervalo degenerado. Para todo  $x \in L$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = p$ . En particular si tomamos  $x_0$ , tenemos que  $h^n(x_0) = f^{rkn}(x_0)$  tienden a  $p$ ; lo cual es una contradicción. Así, podemos concluir que  $J$  es un intervalo compacto no degenerado. Ahora, veamos

que  $J$  es invariante bajo  $h$ .

$$h(J) = h\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(\bar{L})\right) \subseteq h(h^n(\bar{L})) \subseteq h(\overline{h^n(L)}) \subseteq h^{n+1}(\bar{L}).$$

Como esta contención se cumple para todo  $n$ , podemos afirmar que

$$h(J) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (h^{n+1}(\bar{L})) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (h^n(\bar{L})) = J.$$

Ahora, sea  $z \in J$ . Por la construcción de  $J$ , existen puntos  $x_n \in L$  tales que  $h^n(x_n) = z$  para cada  $n$ . Denotamos  $y_n = h^{n-1}(x_n)$ . Entonces  $y_n \in h^{n-1}(\bar{L})$  y  $h(y_n) = z$ . Ya que la secuencia  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  esta dentro de un conjunto compacto, debe tener algún punto de acumulación  $y \in I$ . También sabemos que  $h(y) = z$  ya que  $h$  es continua. Como  $\{h^n(\bar{L})\}$  es una sucesión de intervalos compactos encajados y  $y_n \in h^{n-1}(\bar{L})$ , tenemos que  $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(\bar{L})$ . Entonces  $y \in J$  y así,  $z = h(y) \in h(J)$ . Con esto ya podemos concluir que  $J = h(J)$ . Concluimos de esta manera que existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $f^l(J) = J$ .  $\square$

La demostración del siguiente lema se puede consultar en ([Azahuanche Falcón, 2022](#), Lema 5.0.2). Por su extensión y gran cantidad de casos y cálculos, no la presentaremos en este trabajo.

**Lema 3.2.11.** Sean  $I = [u, v]$  y  $f: I \rightarrow I$  y  $K \subseteq I$  compacto, si  $f^l(K) = K$  para algún  $l \in \mathbb{N}$  (minimal). Entonces hay dos posibles casos:

- $\{f^n(K)\}_{n=0}^{l-1}$  son disjuntos dos a dos.
- $l$  es par y  $J = K \cup f^{l/2}(K)$  es un intervalo, el cual  $\{f^n(J)\}_{n=0}^{l/2}$  son disjuntos dos a

dos.

**Teorema 3.2.12.** Sean  $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: I \rightarrow I$  una función continua, tal que  $f$  es topológicamente transitiva. Entonces  $f$  es totalmente transitivo o existe  $u < t < v$  (el único punto fijo de  $f$ ) tal que  $f([u, t]) = [t, v]$ ,  $f([t, u]) = [u, t]$  y  $f^2|_{[u, t]}$  es totalmente transitivo.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es totalmente transitivo. Por el Lema 3.2.10, tenemos que existe  $J \in I$  un intervalo compacto tal que  $f^l(J) = J$ . Por el Lema 3.2.11 hay dos casos posibles. El primer caso es que  $f^l(J) = J$  y  $\{f^n(J)\}_{n=0}^{l-1}$  son disjuntos dos a dos. Entonces existe  $V \in I$  tal que  $V$  es disjunto a  $f^n(J)$  para todo  $n \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  ya que para ningún  $n$ ,  $f^n(J) = I$  (ya que no sería periódico). Esto es una contradicción ya que  $f$  es transitiva. El otro caso es que  $l$  es par y  $J \cup f^{l/2}(J)$  es un intervalo que pertenece  $f^{l/2}(J) = J$  y  $\{f^n(J)\}_{n=0}^{l/2-1}$  son disjuntos dos a dos. Pero la única posibilidad es que  $l$  sea igual a 2 y que  $J \cup f(J) = I$ , ya que de lo contrario llegaríamos a la misma contradicción del primer caso. Ahora, si definimos  $K = J \cap f(J)$ . Ahora  $f(K) = f(J) \cap f^2(J) = f(J) \cap J = K$ . Entonces  $K = \{t\}$ , ya que de lo contrario,  $K$  sería un conjunto invariante y esto contradeciría la transitividad.

Ahora, si  $u \in J$ , se tiene que  $J = [u, t]$ ,  $f(J) = [t, v]$ ; y si  $v \in J$ , se tendría que  $J = [t, v]$ ,  $f(J) = [u, t]$ . Sea cual sea los casos:  $f([u, t]) = [t, v]$  o  $f([t, v]) = [u, t]$ , con  $t$  el único punto fijo de  $f$ . Por último,  $g = f^2|_{[u, t]}$  es totalmente transitivo, pues se daría el otro caso donde se encontraría  $z$  (el único punto fijo de  $g$ ) tal que

$$g([u, z]) = [t, z], g([t, z]) = [u, t].$$

Esto no se puede dar pues  $t$  es también punto fijo de  $g$ .  $\square$

**Proposición 3.2.13.** Sean  $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: [u, v] \rightarrow [u, v]$  tal que es totalmente transitivo.

Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $J \subset [u, v]$  intervalo no degenerado, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(J) \supset [u + \varepsilon, v - \varepsilon]$ , para cada  $n \geq N$

*Demostración.* Sean  $J \subset [u, v]$  un intervalo no degenerado y  $\varepsilon > 0$ . Ya que  $f$  es transitiva, por el Teorema 3.1.12, tenemos que  $Per(f)$  es denso en  $[u, v]$ . Entonces existen  $x, x_1, x_2 \in Per(f)$ , tales que  $x \in J$ ,  $x_1 \in (u, u + \varepsilon)$  y  $x_2 \in (v - \varepsilon, v)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos tomar  $x_1$  y  $x_2$  de modo ni  $u$  ni  $v$  pertenezcan a sus orbitas; pues ya que a lo mas hay dos puntos periódicos con  $u$  o  $v$  en sus orbitas. Definimos  $y_i = \min\{f^n(x_i); n \geq 0\}$  y  $z_i = \max\{f^n(x_i); n \geq 0\}$ . Entonces tenemos que

$$y_1 \in (u, x_1] \subset (u, u + \varepsilon), z_2 \in [x_2, v) \subset [v - \varepsilon, v) \text{ y } y_2, z_1 \in (u, v).$$

Sea  $k$  el mínimo común múltiplo de los periodos de  $x, x_1$  y  $x_2$ . Ahora definimos  $g = f^k$  y  $K$  de la siguiente forma:

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J).$$

Ya que  $x \in J$  y además es punto fijo de  $g$ , tenemos que  $x \in f^n(J)$  para todo  $n > 0$ . Además, como  $g$  es continua, se tiene que  $f^n(J)$  es un intervalo al cual pertenece  $x$  para todo  $n > 0$ . Entonces  $K$  es un intervalo. Como  $g$  es transitiva, se puede afirmar que  $\overline{K} = [u, v]$ . Y por lo tanto  $(u, v) \subset K$ . Así, tenemos que  $y_1, y_2, z_1, z_2$  pertenecen a  $K$  y son puntos fijos bajo  $g$ . Ahora definimos  $p_i, q_i \in \mathbb{N}$  tales que  $y_i \in g^{p_i}(J)$  y  $z_i \in g^{q_i}(J)$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Ahora tomamos  $N = \max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ . Así  $y_1, y_2, z_1, z_2$  pertenecen a  $g^N(J)$ .

Como  $g^n(J)$  es un intervalo para todo  $n > 0$ , tenemos que  $[y_i, z_i] \subset g^N(J) = f^{kN}(J)$ . Además  $\mathcal{O}(x_i, f) \in [y_i, z_i]$  por como fueron definido. Ya que  $f([y_i, z_i])$  es un intervalo y existen  $m, n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{m+1}(x_i) = y_i$  y  $f^{n+1}(x_i) = z_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces  $[y_i, z_i] \subset f([y_i, z_i])$ . Realizando el mismo proceso inductivamente, tenemos que  $[y_i, z_i] \subset f^n([y_i, z_i])$  para  $i \in \{1, 2\}$  y todo  $n > 0$ . Con las dos contencencias anteriores, tenemos que

$$[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset f^n(J) \text{ para todo } n \geq kN.$$

Ya que  $y_1 < u + \varepsilon$ ,  $z_2 > v - \varepsilon$  y  $f^n(J)$  es un intervalo, tenemos que  $(u + \varepsilon, v - \varepsilon) \subset f^n(J)$  para todo  $n > kN$ .  $\square$

**Proposición 3.2.14.** Sean  $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: [u, v] \rightarrow [u, v]$  tal que es totalmente transitivo. Entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es turbulenta.

*Demostración.* Consideremos  $r, s \in [u, v]$  tales que  $r > s$  y  $\varepsilon > 0$ . Si tomamos  $M = [u + \varepsilon, s]$  y  $N = [r, v - \varepsilon]$ . Se tiene que  $M \cap N = \emptyset$ . Por el Teorema 3.2.13, tenemos que:

$$M \cup N = [u + \varepsilon, s] \cup [r, v - \varepsilon] \subset [u + \varepsilon, v - \varepsilon] \subseteq f^n(M) \cap f^n(N).$$

Entonces existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es turbulenta.  $\square$

**Proposición 3.2.15.** Sean  $[u, v] = I \subseteq \mathbb{R}$  donde  $u < v$  y  $f: I \rightarrow I$  continua tal que  $f^n = g$  es turbulenta para algún  $n \geq 1$ . Entonces, existe  $X \subseteq I$ , tal que  $g(X) = X$ , y  $\phi: X \rightarrow \mathcal{C}$  continua y sobreyectiva donde  $g|_X$  es semi-conjugada a  $\sigma$ , por medio de  $\phi$ . En particular, existe una familia de intervalos cerrados no vacíos  $J_\alpha$  en  $I$ , donde  $\alpha = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$  y  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ , tales que  $X \subseteq J_\alpha$  para cualquier  $\alpha$  y  $J_\alpha = \phi^{-1}([a_0 a_1 \dots a_{n-1}])$ ;

además cumplen que:

1.  $J_{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} \subseteq J_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}$ ;
2. Para todo  $k$ ,  $J_{a_0 \dots a_{k-1}} \cap J_{b_0 \dots b_{k-1}} = \emptyset$  siempre que  $(a_0, \dots, a_{k-1}) \neq (b_0, \dots, b_{k-1})$ ;
3.  $g(J_{a_1 a_2 \dots a_k}) = J_{a_2 \dots a_k}$ , en particular,  $g(\partial J_{a_1 a_2 \dots a_k}) = \partial J_{a_2 \dots a_k}$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |J_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}| = 0$

*Demostración.* Como  $g$  es turbulenta, por la Proposición 3.2.13, y existen intervalos cerrados disjuntos  $J_0$  y  $J_1$  tales que  $J_0 \cup J_1 \subsetneq g(J_0) \cap g(J_1)$ . Existen intervalos cerrados disjuntos  $J_{00}$  y  $J_{01}$  en  $J_0$  tales que  $g(J_{00}) = J_0$  y  $g(J_{01}) = J_1$  y además  $f(\partial J_{00}) = f(\partial J_{01}) = \partial J_0$ . De la misma forma existen  $J_{10}, J_{11}$  en  $J_1$  donde  $g(J_{10}) = J_0$  y  $g(J_{11}) = J_1$ . Ahora, como  $J_{00}, J_{01} \subseteq g(J_{00})$ , existen  $J_{000}$  y  $J_{001}$  contenidos en  $J_{00}$  tales que  $g(J_{000}) = J_{00}$  y  $g(J_{001}) = J_{01}$ . Hacemos el mismo proceso para definir  $\{J_{010}, J_{011}, J_{100}, J_{101}, J_{110}, J_{111}\}$ . Posteriormente seguimos la construcción de manera inductiva como lo mostramos en la Figura 2.6.

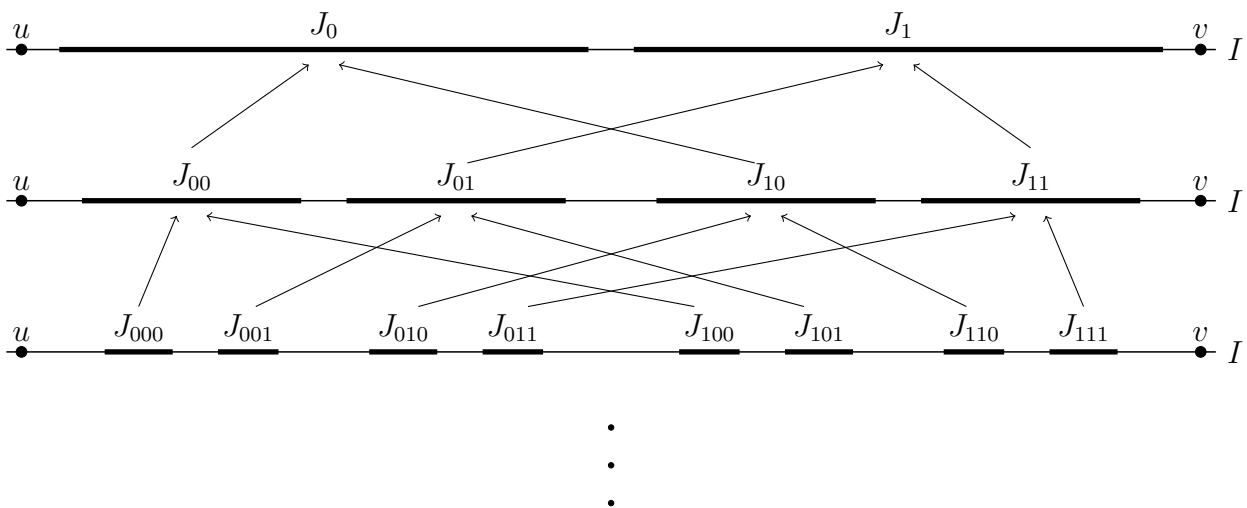


Figura 3.6. Construcción de  $J_\alpha$

Dado  $\bar{\alpha} = (a_0, a_1, \dots)$  en  $\mathcal{C}$ , por construcción, tenemos que  $J_{a_0 \dots a_{n+1}} \subsetneq J_{a_0 \dots a_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{a_0 \dots a_n}$  es un intervalo compacto diferente de vacío. Sea  $J_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{a_0 \dots a_n}$  y definamos

$$X_0 = \bigcup \{J_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathcal{C}\}.$$

Naturalmente, definimos  $\phi: X \rightarrow \mathcal{C}$  por  $\phi(x) = \bar{\alpha}$  para cada  $x \in J_{\bar{\alpha}}$ . Ahora solo basta probar las propiedades mencionadas. Por construcción, se cumplen los incisos 1 y 3.

Veamos que se cumple 2. Haremos la prueba por inducción. Note que  $J_0 \cap J_1 = \emptyset$ . Supongamos que se cumple para  $k = n$ . Probemos para  $n + 1$ . Sean  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$ . Entonces hay dos posibles casos:

**Caso 1.**  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ .

Por el ítem 1, tenemos que  $J_{a_0 a_1 \dots a_n} \subseteq J_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}$  y  $J_{b_0 b_1 \dots b_n} \subseteq J_{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}$ . Por el paso inductivo, tenemos que  $J_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} \cap J_{b_0 b_1 \dots b_{n-1}} = \emptyset$ . Así,  $J_{a_0 a_1 \dots a_n} \cap J_{b_0 b_1 \dots b_n} = \emptyset$ .

**Caso 2.**  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$  y  $a_n \neq b_n$ .

Tenemos que  $g(J_{a_0 a_1 \dots a_n}) = J_{a_1 a_2 \dots a_n}$  y  $g(J_{b_0 b_1 \dots b_n}) = J_{b_1 b_2 \dots b_n}$ . Luego, por el paso inductivo,  $g(J_{a_0 a_1 \dots a_n}) \cap g(J_{b_0 b_1 \dots b_n}) = \emptyset$ . Entonces  $J_{a_0 a_1 \dots a_n} \cap J_{b_0 b_1 \dots b_n} = \emptyset$ .

Con esto concluimos la prueba del inciso 2.

Finalmente, verifiquemos 4. Es claro que si  $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$ , entonces  $J_{\bar{\alpha}} \cap J_{\bar{\beta}} = \emptyset$ . Ahora definimos los siguientes conjuntos:

$$Y := X_0 \setminus \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{C}} \text{Int}(J_{\bar{\alpha}}).$$

Es claro que el conjunto  $Y$  también los podemos escribir como  $Y = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{C}} \partial J_{\bar{\alpha}}$ . Con esto,

es fácil ver que  $Y$  es totalmente desconexo. Por el ítem 3. Tenemos que  $f(\partial J_{\bar{\alpha}}) = \partial J_{\sigma(\bar{\alpha})}$

Ahora definimos la función  $H: Y \rightarrow \mathcal{C}$  por  $H(x) = \phi(x)$  para cada  $x \in Y$ , ya que  $Y \subseteq X$ .

Definamos

$$A = \{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} : J_{\bar{\alpha}} \text{ es un intervalo no degenerado}\} \text{ y } F = \bigcup_{\bar{\alpha} \in A} \partial J_{\bar{\alpha}} = H^{-1}(A).$$

Es claro que si  $\bar{\alpha} \notin A$ , entonces  $J_{\bar{\alpha}} = \{x\}$ . Además, si  $\bar{\alpha} \in A$ , entonces  $\partial J_{\bar{\alpha}} = \{x_1, x_2\}$ .

Con esto, es claro que  $H$  es inyectiva en  $Y \setminus F$ , pero en  $F$ , a dos puntos de  $J_{\bar{\alpha}}$ , los manda

a un mismo punto de  $\mathcal{C}$ . Definamos  $\delta_n$  como la mínima distancia entre dos intervalos  $J_{\alpha}$

y  $J_{\beta}$  tales que  $\alpha = a_0 \dots a_{n-1}$  y  $\beta = b_0 \dots b_{n-1}$ . Por el ítem 2, es claro que  $\delta_n$  es positivo.

Sean  $x, y \in Y$ . Si  $|x - y| < \delta_n$ , entonces  $x$  y  $y$  pertenecen a un mismo intervalo  $J_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$ .

Entonces  $H$  es continua y además  $H \circ g(x) = \sigma \circ H(x)$  para todo  $x \in Y$ . Esto muestra

que  $g|_Y$  es semi-conjugado a  $\sigma$  usando  $H$ . Como vimos en la Sección 2.3, la función

$\sigma$  es transitiva y además  $\mathcal{C}$  es no numerable. Por la Proposición 2.1.13, tenemos que

existe  $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$  tal que  $\omega(\bar{\alpha}, \sigma) = \mathcal{C}$ . Como  $A$  es numerable, existe  $\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \setminus A$  tal que  $\mathcal{O}_{\sigma}(\bar{\alpha})$

es densa en  $\mathcal{C}$ . Sea  $x_0 \in Y$  el único punto tal que  $\phi(x_0) = \bar{\alpha}$ . Definimos el conjunto

$X = \omega(x_0, g)$ . Entonces tenemos que  $X$  es un conjunto cerrado e invariante. Además

tenemos que  $\phi(\omega(x_0, g)) = \omega(\bar{\alpha}, \sigma) = \mathcal{C}$ , así,  $H|_{X_0}$  es sobreyectiva. Con esto, tenemos

que  $X$  es semi-conjugada con  $\mathcal{C}$  mediante  $h$ . Ahora, como  $\omega(x_0, g) = X$ , por 2.1,  $X_0$  es

transitiva y no posee puntos aislados. Además ya que  $X \subseteq Y$ , y  $Y$  es completamente

desconexo, entonces  $X$  también es totalmente desconexo. Y podemos decir que  $X$  es un

conjunto de cantor. Así, para cualquier  $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$ ,  $\bar{\alpha} \notin A$ , ya que  $J_{\bar{\alpha}}$  ha sido reducido a un

único punto. Con esto concluimos la prueba del inciso 4.

□

Ahora si procederemos a mostrar el teorema que relaciona el caos según Devaney con el caos según Li-Yorke.

**Teorema 3.2.16.** *Sea  $f: I \rightarrow I$  tal que  $I = [u, v]$ . Si  $f$  es caótica en el sentido de Devaney. Entonces se tiene que  $f$  es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

*Demostración.* Sean  $[u, v] = I$  y  $f: I \rightarrow I$  caótica en el sentido de Devaney. Entonces por la Definición 3.1.1, tenemos que  $f$  es transitiva. Por el Teorema 3.2.12, tenemos que  $f$  es totalmente transitiva o existe  $t \in I$  tal que  $f^2|_{[u, t]}$  es totalmente transitiva. Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con la función que sea totalmente transitiva y la llamaremos  $g$ . Por la Proposición 3.2.14, tenemos que  $g$  es turbulenta, con los intervalos  $M = [u + \varepsilon, s]$  y  $N = [r, v - \varepsilon]$  los cuales generan la turbulencia. Ahora, aplicando la Proposición 3.2.15 definimos el conjunto  $X$  de modo que  $X$  es semi-conjugado de  $\mathcal{C}$  mediante la función  $\phi$ . Ahora definimos la siguiente relación de equivalencia en  $\mathcal{C}$ :

$$\sim: \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \alpha_m = \beta_m \text{ para todo } m > k.$$

Ahora vamos a ver que cada clase de equivalencia  $[\alpha]$  es numerable. Vemos que si definimos  $\alpha = (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots)$ , para la primera coordenada únicamente hay dos elementos en  $\mathcal{C}$  los cuales están relacionados con  $\alpha$ . Ahora para las dos primeras coordenadas hay cuatro elementos de  $\mathcal{C}$  relacionados con el, los cuales son  $\{(\beta_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots), (\beta_0 \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots), (\alpha_0 \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots), (\alpha_0 \alpha_1 \dots)\}$  donde  $\beta_0 \neq \alpha_0$  y  $\beta_1 \neq \alpha_1$ . Así, tenemos que para las primera  $k$  coordenadas, hay únicamente  $2^k$  elementos de  $\mathcal{C}$  relacionados con  $\alpha$ , por lo que para cada coordenada que

agreguemos, vamos agregando una cantidad finita de elementos relacionados con  $\alpha$ , entonces  $[\alpha]$  es numerable. Por otro lado, sabemos que  $\mathcal{C}$  es un conjunto no numerable y además, tenemos que  $\mathcal{C}$  es igual a la unión de todas las clases de equivalencia. Se tiene que no es posible que haya una cantidad numerable de clases de equivalencia, ya que de lo contrario, tendríamos que  $\mathcal{C}$  correspondería a la unión numerable de conjuntos numerables, lo cual es una contradicción. De lo anterior, hay una cantidad no numerable de clases de equivalencia. Si tomamos un representante de cada clase de equivalencia, y definimos el conjunto  $\Omega \subseteq \mathcal{C}$  tal que en  $\Omega$  están todos los representantes de las clases de equivalencia. Entonces  $\Omega$  es un conjunto no numerable. Ahora generaremos otro conjunto a partir de  $\Omega$ . Definimos

$$\Gamma := \{(\alpha_0, 0, \alpha_1, 0, 0, \alpha_2, 0, 0, 0, \alpha_3, 0, 0, 0, 0, \alpha_4, \dots) : \alpha \in \mathcal{C}\}.$$

De modo que para generar un elemento de  $\Gamma$ , partimos de  $\alpha \in \Omega$  y empezamos agregando  $\alpha_0$  seguido de un cero, posteriormente agregamos el elemento  $\alpha_1$  seguido de dos ceros, y así sucesivamente seguimos agregando cada elemento  $\alpha_k$  seguido de  $k + 1$  ceros. Es claro que  $\Gamma$  sigue siendo un conjunto no numerable contenido en el conjunto de Cantor. Ahora definimos el conjunto  $S := \{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ , el cual está contenido en  $X$  y es no numerable. Ahora probemos que  $S$  cumple las propiedades de la Definición 3.2.1.

1) Sean  $J_\alpha, J_\beta \in S$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $\alpha, \beta \in \Gamma$ , podemos encontrar un  $m > k$  tal que  $\alpha_m \neq \beta$ . Sin pérdida de generalidad podemos afirmar que  $g^m(J_\alpha) \in J_0$  y  $g^m(J_\beta) \in J_1$  por la Proposición 3.2.15 (ítem 1), ya que la coordenada  $m$ -ésima de  $\alpha$  es distinta a la de  $\beta$ . Si llamamos  $l = d(J_0; J_1)$ , la cual sabemos que es positiva por la Proposición

**3.2.15** (ítem 2). Entonces podemos afirmar que existe una subsucesión  $\{n_k\}_{n_k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} d(g(J_\alpha); g(J_\beta)) = l$ . Tenemos de lo anterior que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(g^n(J_\alpha), g^n(J_\beta))\} \geq l > 0$ .

2) Sean  $J_\alpha, J_\beta \in S$  y  $\varepsilon > 0$ . Por la Proposición 3.2.15 (ítem 4), tenemos que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|J_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m}| < \varepsilon$ . Ahora si definimos  $l = \frac{m(m+1)}{2}$ , tenemos que para cada elemento  $x \in \Gamma$ ,  $\sigma(x)$  tiene sus primeros  $m$  elementos iguales a 0. En particular para  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces

$$g^l(J_\alpha), g^l(J_\beta) \in J_p \text{ donde } p = \{0\}^m.$$

Obtenemos que  $d(g^l(J_\alpha), g^l(J_\beta)) \leq \varepsilon$ . Concluimos que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(g^n(J_\alpha); g^n(J_\beta))\} = 0$ .

Encontramos un conjunto no numerable que cumple con las condiciones de la Definición 3.2.1. Entonces podemos concluir que  $g$  es caótica en el sentido de Li-Yorke. Concluimos de esta manera que  $f$  es caótica en el sentido de Li-Yorke.  $\square$

Algo que nos podríamos preguntar es si caos según Li-Yorke también implica caos según Devaney. A continuación mostramos que esta implicación no se cumple mostrando un contra ejemplo.

**Ejemplo 3.2.17.** Retomando la familia de funciones  $T_c$  y considerando  $c = 1/4$ . Como lo vimos en el Ejemplo 3.2.7, esta función es caótica según Li-Yorke al tener un punto de periodo 3. Ahora veamos que  $f$  no es transitiva y por lo tanto no es caótica según Devaney.

Consideremos  $U = (0, 1/4)$  y  $V = (1/2, 1)$ . Es claro que  $T_{1/4}([1/4, 1]) = [1, 1/4]$ . Así  $T_{1/4}^n([1/4, 1]) \cap (0, 1/4) = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En particular para  $(1/2, 1) = V$ . Entonces

$T_{1/4}^n(V) \cap U = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Con esto, podemos decir que  $T_{1/4}$  no es transitiva y por consiguiente no es caótica según Devaney.

### 3.3. Funciones caóticas según Block-Coppel

A continuación se presentara la definición de funciones caóticas según Block y Coppel presentada en (Coppel, 1991), la cual esta fuertemente ligada da la función shift de Bernoulli, la cual definiremos a continuación y mostraremos algunas propiedades sobre ella.

**Definición 3.3.1.** Sean  $X$  un espacio metrico compacto y  $f: X \rightarrow X$ . Se dice que  $f$  es caótico en el sentido de Block-Copell si existe  $M \in \mathbb{N}$  y un subconjunto compacto  $Y \subseteq X$  invariante por  $f^m$  tal que  $f^m|_Y$  es semi-conjugada al shift  $\sigma$ . Es decir, si existe una función  $h: Y \rightarrow \mathcal{C}$  sobreyectiva que satisface

$$h \circ f^m = \sigma \circ h.$$

Un ejemplo trivial de función caótica en el sentido de Block-Coppel es la misma función Shift, la cual es invariante en  $\mathcal{C}$  y es semiconjugada de si misma mediante la identidad.

Lo primero que podríamos pensar al ver la definición de caos según Block-Coppel es que tiene un buen comportamiento bajo conjugación topológica como lo mostraremos a continuación.

**Proposición 3.3.2.** Sean  $X, Y$  espacios métricos compactos y  $f: X \rightarrow X$  y  $g: Y \rightarrow Y$

*funciones continuas topológicamente conjugadas. Entonces  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel si y solo si  $g$  lo es.*

A continuación mostraremos una caracterización de las funciones caóticas en el sentido de Block-Coppel para el caso en el que  $X = I$ , es decir, en el caso en el que la función esta definida desde un intervalo no trivial a él mismo.

**Teorema 3.3.3.** *Una función continua  $f: I \rightarrow I$  con  $I$  un intervalo compacto no trivial es caótica en el sentido de Block-Coppel si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes:*

- $f^m$  es turbulenta para algún  $m \in \mathbb{N}$ .
- $f^m$  es estrictamente turbulenta para algún  $m \in \mathbb{N}$

Primero probaremos que los items 1 y 2 son equivalentes. Posteriormente probaremos que el ítem 1 es equivalente a la noción de caos en el sentido de Block-Coppel.

*Demostración.* (ítem 1 equivalente a ítem 2)

Sea  $f: I \rightarrow I$  tal que  $g = f^m$  es turbulenta. Entonces existen  $J, K \subseteq I$  intervalos cerrados tales que  $J \cup K \subseteq g(J) \cap g(K)$ . Hay dos posibles casos según la Definición 2.1.19,  $J \cap K = \emptyset$  o tienen un único punto en común. si son disjuntos, entonces  $g$  es estrictamente turbulenta. Ahora, consideremos el caso en el que tienen un único punto en común. Ya que  $J, K \subseteq g(J)$ , existe  $J_1, J_2 \subseteq J$  intervalos cerrados tales que  $g(J_1) = J$  y  $g(J_2) = K$ , los cuales no necesariamente disjuntos. Análogamente existen  $K_1, K_2 \subseteq K$  tales que  $g(K_1) = J$  y  $g(K_2) = K$ . Ya que  $J$  y  $K$  tienen un punto en común, existen dos posibles casos.  $J_p \cap K_q = \emptyset$  donde  $p, q \in \{0, 1\}$ . En ese caso podemos tomar  $J_1$  y  $K_2$  tales que

son disjuntos y  $J \cup K \subseteq g^2(J_1)$ , en particular  $J_1 \cup K_2 \subseteq g^2(J_1)$ . Análogamente para  $K_2$ . Por consiguiente, tenemos que  $J_1 \cup K_2 \subseteq g^2(J_1) \cap g^2(K_2)$ . Así  $g^2 = f^{2m}$  es estrictamente turbulenta. El otro caso es que  $J_p \cap K_q \neq \emptyset$  donde  $p, q \in \{0, 1\}$ . En ese caso basta tomar  $J_1$  y  $K_2$  o  $J_2$  y  $K_1$  (la configuración en la que no se intersecten) y hacemos el mismo procedimiento que en el caso anterior, concluyendo que  $f^{2m}$  es estrictamente turbulenta. Sea  $f^m$  estrictamente turbulenta. Por la definición, es trivial que  $f^m$  es turbulenta.

Ahora veamos que el ítem 1 es equivalente a la noción caos en el sentido de Block-Coppel.

Sean  $[u, v] = I$  y  $f: I \rightarrow I$  tal que  $f^m$  es turbulenta. Por el Teorema 3.3.3, tenemos que existe  $X \subseteq I$ , tal que  $g(X) = X$ , y  $\phi: X \rightarrow \mathcal{C}$  continua y sobreyectiva donde  $g|_X$  es semi-conjugada a  $\sigma$ . Esto cumple con la Definición 3.3.1, y por lo tanto  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel.

Sea  $f: I \rightarrow I$  caótica en el sentido de Block-Coppel. Por la Definición 3.3.1, existe  $M \in \mathbb{N}$  y un subconjunto compacto  $Y \subseteq X$  invariante por  $f^m$  tal que  $f^m|_Y$  es semi-conjugada al shift  $\sigma$ . Tomemos  $J = h^{-1}([0, 0, 0])$  y  $K = h^{-1}([0, 1, 0])$  donde  $[0, 1, 0], [0, 1, 1] \in \beta_3$ . Se tiene que  $h \circ f^m(J) = [0, 0]$  y  $h \circ f^m(K) = [1, 0]$ . Así mismo  $h \circ f^{2m}(J) = [0]$  y  $h \circ f^{2m}(K) = [0]$ . Y análogamente  $f^{2m}(J) \cap f^{2m}(K) = [0]$ . Además, es claro que  $J \cup K \in h^{-1}([0])$ . Entonces  $J \cup K \subseteq f^{2n}(J) \cap f^{2n}(K)$ . Y por lo tanto,  $f^m$  es turbulenta, para  $m = 2n$ .  $\square$

**Ejemplo 3.3.4.** Veamos que la función tienda trabajada en la Sección 2.2 también corresponde a una función caótica según Block-Coppel, para esto, veamos que la función tienda es turbulenta. Consideremos  $[0, 1/2]$  y  $[1/2, 1]$ . Es claro que estos dos intervalos

cerrados tienen un único punto en común. Además tenemos que  $T([0, 1/2]) = [0, 1]$  y  $T([1/2, 1]) = [0, 1]$ , por lo tanto, tenemos que

$$[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1] \subseteq [0, 1] = T([0, 1/2]) \cap T([1/2, 1]).$$

Entonces  $T$  es turbulenta y por consiguiente, por el Teorema 3.3.3,  $T$  es caótica según Block-Coppel.

Este ejemplo nos hace preguntarnos, ¿cual es la relación entre las nociones de caos de Devaney y Li-Yorke con la noción de caos de Block-Coppel. Para esto mostraremos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.5.** Sean  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: I \rightarrow I$ . Si la función  $f$  es caótica en el sentido de Devaney, entonces es caótica en el sentido de Block-Coppel.

*Demostración.* Sean  $[u, v] = I$  y  $f: I \rightarrow I$  caótica en el sentido de Devaney. Por la Definición 3.1.1, tenemos que  $f$  es transitiva. Por el Teorema 3.2.12, entonces tenemos que  $f$  es totalmente transitiva o existe  $t \in I$  tal que  $f^2|_{[u,t]}$  es totalmente transitiva. Sin perdida de generalidad, trabajaremos con la función que sea totalmente transitiva y la llamaremos  $g$ . Por la Proposición 3.2.14, tenemos que  $g$  es turbulenta. Entonces por el Teorema 3.3.3. Tenemos que  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel.  $\square$

Con el lema anterior vemos que el caos de Devaney implica la noción de caos de Block-Coppel. Mas si embargo la reciproca no se tiene. A continuación mostraremos un ejemplo de una función caótica en el sentido de Block pero no en el sentido de Devaney.

**Ejemplo 3.3.6.** Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua tal que,

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , \text{ si } x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ -2x + \frac{6}{4} & , \text{ si } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ 2x - \frac{1}{2} & , \text{ si } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ -2x + \frac{5}{2} & , \text{ si } x \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

A continuación mostraremos la gráfica de nuestra función  $f$ .

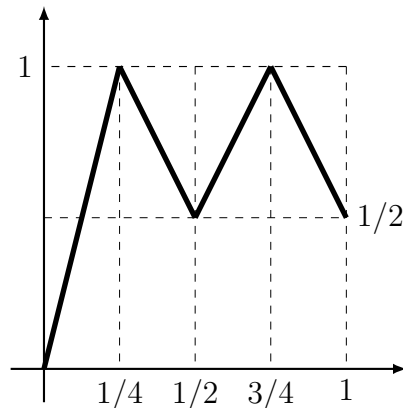


Figura 3.7. Función  $f$ .

Como vemos en la Figura ??, es claro que  $f$  tiene el mismo comportamiento que la función tienda. Así, tenemos que  $f|_{[\frac{1}{2}, 1]}$  es caótica en el sentido de Devaney. Por el Teorema 3.3.5, tenemos que es caótica en el sentido de Block-Coppel. Entonces existe un subconjunto  $X \subset [\frac{1}{2}, 1]$ , el cual es  $f^m$ -invariante tal que  $f|_{[\frac{1}{2}, 1]}$  es semi-conjugada de  $\sigma$ . Ya que  $X \subset [0, 1]$ , entonces  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel.

Ahora, sea  $U = (0, \frac{1}{4})$  y  $V = (\frac{1}{2}, 1)$ . Tenemos que  $f^n(V) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así  $f^n(V) \cap U = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f$  no es transitiva y por lo tanto no es caótica

en el sentido de Devaney.

A pesar que no se tiene que caos según Block-Coppel implica caos según Devaney, mostraremos que si existe un subconjunto compacto en el cual la función si es caótica según Devaney.

**Proposición 3.3.7.** *Sean  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: I \rightarrow I$ . Si  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel, entonces existe  $X \subset I$  compacto tal que  $f|_X$  es caótica en el sentido de Devaney.*

*Demostración.* Sea  $f$  caótica en el sentido de Block-Coppel. Por la Definición 3.3.1, existe  $M \in \mathbb{N}$  y un subconjunto compacto  $X \subseteq I$  invariante por  $f^M$  tal que  $f^M|_X$  es semiconjugada al shift  $\sigma$ . Como ya vimos en la Sección 2.3, la función shift es transitiva. Ya que  $f|_X$  es semiconjugada de  $\sigma$  mediante una función  $h: X \rightarrow \mathcal{C}$ , entonces  $f|_X$  también es transitiva. Ahora sea  $U$  un abierto de  $X$ . Ya que  $Per(\sigma)$  es denso en  $\mathcal{C}$ , existe  $\alpha \in h(U)$  tal que  $\alpha$  es un punto periódico de  $\sigma$ . Y por lo tanto,  $x = h^{-1}(\alpha)$  es un punto periódico de  $X$  y  $x \in X$ . □

**Proposición 3.3.8.** *Sean  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: I \rightarrow I$ . Si  $f$  es caótica en el sentido de Block-Coppel, entonces es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

*Demostración.* Sea  $f: I \rightarrow I$  caótica según Block-Coppel, entonces por el Teorema 3.3.3,  $f$  es turbulenta. Por la Proposición ??, tenemos que existe  $X$  subconjunto compacto tal que  $f|_X$  es semi-conjugada con  $\sigma$ . Siguiendo el mismo proceso de la demostración del Teorema 3.2.16, mostramos que:

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} > 0$  para todo  $x, y \in X, x \neq y$ , y
2.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(f^n(x), f^n(y))\} = 0$  para todo  $x, y \in X, x \neq y$ .

Por el Teorema 3.2.4, tenemos que  $f$  es caótica en el sentido de Li-Yorke.

□

### Referencias

- Azahuanche Falcón, F. (2022). Sistemas dinámicos y tres formas de definir caos.
- Coppel, W. (1991). Chaos in one dimension. *Chaos and Order (Canberra, 1990)*, *World Sci., Singapore*, 14–21.
- Devaney, R. (1989). An introduction to chaotic dynamical systems. *Reprint of the second (1989) edition*.
- J. Camargo, E. V. (2020). *Topología general*. Ediciones UIS, Colombia.
- Li, T.-Y., y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, *82(10)*, 985–992.