

Análisis del espectro de emisión proveniente de un toro magnetizado alrededor de singularidades
desnudas con deformación cuadrupolar

Germán David Prada Méndez

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Físico, M.Sc., Ph.D.

Codirector

Juan Manuel Velásquez Cadavid

Físico, M.Sc.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. Objetivos	22
2. <i>q-metric</i>	23
2.1. Características generales	25
2.2. Órbitas importantes	27
3. Configuraciones toroidales	30
3.1. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica	31
3.2. Condiciones de integrabilidad	35
3.3. Construcción de toros barotrópicos con momento angular constante	40
4. Resultados I: toros magnetizados en la <i>q-metric</i>	46
4.1. Masa ADM variable	46
4.2. Masa ADM fija	57
5. Resultados II: espectros de emisión	67
5.1. Perfiles de emisión	70
5.2. Mapa de intensidad	77

6. Conclusiones 79

Referencias Bibliográficas 83

Apéndices 100

Lista de Figuras

- Figura 1. Órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q 28
- Figura 2. Momento angular específico de las órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q 44
- Figura 3. Comportamiento del momento angular Kepleriano y Potencial efectivo para diferentes valores de q caso de masa ADM variable. (a) $q = -0.3$. (b) $q = -0.15$. (c) $q = 0$. (d) $q = 0.1$. 48
- Figura 4. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 1$. (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 50
- Figura 5. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 51
- Figura 6. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 52
- Figura 7. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 53
- Figura 8. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 55

- Figura 9. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 56
- Figura 10. (a) Órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q para el caso de masa ADM fija. (b) Momento angular específico de las órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q para el caso de masa ADM fija. 58
- Figura 11. Momento angular Kepleriano y Potencial efectivo para el caso de masa ADM fija. (a) $q = -0.3$. (b) $q = -0.15$. (c) $q = 0$. (d) $q = 0.1$. 59
- Figura 12. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 60
- Figura 13. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 1$ en el caso de masa ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 61
- Figura 14. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 62
- Figura 15. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.1$ ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 63
- Figura 16. Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 65
- Figura 17. Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.01$ ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$ 66

- Figura 18. Espectros de discos ópticamente gruesos para valores de $q = -0.3, -0.15, 0, 0.1$ y con parámetro de magnetización $\beta_c = 1, 0.1, 0.01$. Las filas corresponden a los valores del ángulo de observación $\theta = 85^\circ$ (Superior) y $\theta = 30^\circ$ (Inferior) 71
- Figura 19. Espectros de discos ópticamente delgados para valores de $q = -0.3, -0.15, 0, 0.1$ y con parámetro de magnetización $\beta_c = 1, 0.1, 0.01$. Las filas corresponden a los valores del ángulo de observación $\theta = 85^\circ$ (Superior) y $\theta = 30^\circ$ (Inferior) 72
- Figura 20. Toros magnetizados ópticamente delgados alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 85^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$ 73
- Figura 21. Toros magnetizados ópticamente delgados alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 30^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$ 74
- Figura 22. Toros magnetizados ópticamente gruesos alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 85^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$ 75
- Figura 23. Toros magnetizados ópticamente gruesos alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 30^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$ 76

Lista de Tablas

Tabla 1.	Parámetros de discos con masa ADM variable	47
Tabla 2.	Parámetros de discos con masa ADM fija	58

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones de conservación	100
Apéndice B. Ecuaciones de Euler relativistas	113
Apéndice C. Condiciones de integrabilidad	125
Apéndice D. Construcción de toros	137

Resumen

Título: Análisis del espectro de emisión proveniente de un toro magnetizado alrededor de singularidades desnudas con deformación cuadrupolar *

Autor: German David Prada Méndez **

Palabras Clave: relatividad general, singularidades desnudas, discos de acreción, magnetohidrodinámica, trazado de rayos.

Descripción: Desde una perspectiva teórica, el proceso de acreción de materia alrededor de objetos compactos tiene gran relevancia, ya que sirve como laboratorio natural para poner a prueba la relatividad general en el régimen de campo fuerte; esclareciendo el grado de validez del teorema de no pelo, la conjetura de censura cósmica y la posible existencia de soluciones exóticas que fungen como alternativas a los agujeros negros. Por medio de este trabajo, se analiza el espectro de emisión de discos de acreción geoméricamente gruesos alrededor de singularidades desnudas descritas por la q metric. En primera instancia, se estudian las configuraciones de equilibrio de toros magnetizados alrededor de una singularidad desnuda para los casos de masa ADM variable y fija, y se determina el impacto del parámetro de deformación en estas por medio de la ecuación de Euler. Una vez realizada la construcción sistemática de discos en este espacio-tiempo, se realiza un método de trazado de rayos inverso por medio del código OSIRIS, para obtener, por primera vez, simulaciones del mapa de intensidad y perfiles de emisión de toros magnetizados en esta métrica. Se encuentra que los discos con masa ADM constante son de interés astrofísico, ya que permiten identificar el impacto del cuadrupolo de masa para un espacio-tiempo con una masa determinada previamente. Además, se comprueba el impacto del

* Trabajo de grado.

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Juan Manuel Velásquez Cadavid, M.Sc

cuadrupolo sobre las cantidades observables, flujo e intensidad, para discos ópticamente gruesos y delgados. Esto debido a que para valores de $q < 0$, correspondientes a un objeto con deformación prolata, el espectro de emisión presenta mayor intensidad que el obtenido en el espacio tiempo de Schwarzschild. Así, se encuentra una característica diferencial para distinguir los toros formados alrededor de una singularidad desnuda de los presentes en la vecindad de un agujero negro estático.

Abstract

Title: Analysis of the emission spectra of a magnetized torus around a naked singularity with quadrupolar deformation

*

Author: German David Prada Méndez **

Keywords: black hole physics, accretion, accretion discs, radiative transfer, relativistic processes, magnetic fields

Description: From a theoretical perspective, matter accretion processes around compact objects are highly relevant as they serve as a natural laboratory to test general relativity in the strong field regime. This enables us to validate important concepts such as the no-hair theorem, the cosmic censorship hypothesis, and the existence of alternative solutions to Einstein's equations that mimic the effects of black holes. In this study, we analyze the emission spectra of geometrically thick accretion disks, also known as Polish doughnuts, around naked singularities described by the q -metric. First, we examine the equilibrium configurations of magnetized tori in this spacetime for the cases of variable and fixed ADM mass, and determine the impact of the deformation parameter. Once we have systematically studied the disks in this space-time, we use the OSIRIS code to perform a backward ray-tracing method, resulting in the first simulations of the intensity map and emission profiles of magnetized tori in this metric. Furthermore, we validate the effect of the quadrupole moment on observable quantities such as flux and intensity for optically thin and thick disks, since for values of $q < 0$, which correspond to objects with prolate deformation, the emission spectrum exhibits higher intensity than that obtained for Schwarzschild's space-time. Hence, we find a first differential feature that distinguishes tori formed around a naked singularity from those present in the vicinity of a static black hole.

* Bachelor Thesis

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Juan Manuel Velásquez Cadavid, M.Sc

Introducción

Los objetos compactos¹ son una de las predicciones más interesantes de la relatividad general, puesto que su existencia tiene un papel importante en la explicación de varios fenómenos astrofísicos, tales como la lente gravitacional, la sombra producida por la radiación proveniente del disco de acreción formado alrededor del objeto compacto, entre otros. Las primeras evidencias observacionales que se vincularon con este tipo de objetos se dieron al estudiar problemas de altas energías como los cuásares (Rees, 1978) y la producción de “jets” (Blandford and Königl, 1979). Asimismo, han sido relacionados con las oscilaciones cuasi periódicas, las órbitas de diversos objetos en el cosmos (Abuter et al., 2020) y se presume la presencia de este tipo de objetos en los centros galácticos. Por otra parte, se ha postulado que la acreción de materia en objetos compactos es una de las formas más importantes de producción de energía en el universo, transformando energía gravitacional en radiación térmica y electromagnética. Además, de ser relevante en los procesos de producción de rayos X (White et al., 1988).

Recientemente, se han realizado otras observaciones asociadas a los efectos gravitacionales, evidenciados sobre la luz y la materia en la vecindad de objetos compactos. En primer lugar, se tienen mediciones de las trayectorias seguidas por estrellas que orbitan a este tipo de estructuras, cuyos datos fueron recolectados por la colaboración GRAVITY (Abuter et al., 2018). En particular

¹ Objetos astrofísicos con una densidad de masa muy alta. Entre esta clasificación se encuentran agujeros negros, estrellas de neutrones, enanas blancas y demás soluciones exóticas como singularidades desnudas o gravastars.

son de interés las S-estrellas, cúmulo estelar más cercano al agujero negro supermasivo Sagitario A*, ubicado en el centro de la Vía Láctea. Entre este grupo, destaca la estrella S2, debido a que es relativamente brillante y posee una trayectoria cercana a este objeto compacto; por lo cual, permite la mejor constricción del espacio-tiempo en esta vecindad.

Por otro lado, se tienen las observaciones registradas por la colaboración Event Horizon Telescope (EHT) (Akiyama et al., 2019), con las cuales se consiguió una imagen de la sombra² producida por el candidato de agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 (Collaboration et al., 2019); consistente con un agujero negro de Kerr con una masa de $(6,5 \pm 0,7) \times 10^9 M_{\odot}$ y un parametro de rotación $a = 0.90 \pm 0.05$. Adicionalmente, se ha obtenido la más reciente observación de la sombra del objeto compacto en el centro de la Vía Láctea (Akiyama et al., 2022), la cual es consistente con un agujero negro de $4 \times 10^6 M_{\odot}$. Estas imágenes se obtienen a partir de la emisión de los discos de acreción que se forman alrededor de los candidatos de agujero negro.

Asimismo, cabe resaltar que entre las diversas evidencias observacionales indirectas de objetos compactos, las más abundantes en el universo son las relacionadas con el espectro de emisión de los discos de acreción que se forman alrededor de estos (Ho et al., 1997; Richstone et al., 1998). Entonces, con el fin de estudiar estas estructuras, se realiza un análisis de los perfiles de radiación emitida por el sistema y sus respectivas variaciones temporales. Una revisión de las propiedades radiativas en discos delgados se presenta en (Shaikh and Joshi, 2019; Liu et al., 2021, 2022; Gylchev et al., 2020, 2021, 2019; Harko et al., 2009). Además, se ha estudiado la utilidad del análisis

² Término acuñado por Falcke et al. (1999).

del espectro de emisión de discos para diferentes aplicaciones como los jets relativistas (McKinney et al., 2012), la aparición de turbulencias y su relación con el proceso de acreción (Balbus and Hawley, 1991, 1998) y el estudio de inestabilidades (Balbus and Hawley, 1991; Papaloizou and Pringle, 1984; Abramowicz et al., 1983; Bugli et al., 2018).

Por otra parte, la revolución presentada por las mediciones recientes de la sombra de objetos compactos por parte del EHT, evidencia la importancia del estudio de los discos de acreción; de forma que se pueden realizar, por primera vez, comparaciones entre los modelos teóricos y las observaciones de objetos compactos. En primer lugar, se tiene la validación del teorema de no pelo el cual indica que los campos gravitacional y electromagnético de un agujero negro estacionario, están determinados únicamente por su masa, carga y momento angular intrínseco (Bardeen et al., 1973). También, se puede poner a prueba la conjetura de censura cósmica, la cual indica que no es posible formar una singularidad sin un horizonte de eventos a su alrededor (Penrose, 2002). Por último, se puede examinar la validez de soluciones exóticas, alternativas a los modelos tradicionales de agujeros negros, las cuales son consistentes con las observaciones³.

Es usual encontrar en la literatura estudios de las propiedades observacionales de diversos objetos compactos con base en modelos del espectro de discos de acreción (Boshkayev et al., 2020a; Kovacs and Harko, 2010; Joshi et al., 2013). Por consiguiente, el modelado de estas estructuras ha sido un tema de interés durante varias décadas; partiendo de modelos puramente hi-

³ Usualmente a este tipo de soluciones se les conoce como “imitadores de agujeros negros” o “mimickers” ya que reproducen los diferentes efectos de un agujero negro en su vecindad.

drodinámicos y bastante idealizados hasta modelos cada vez más elaborados⁴. Entre las diferentes propuestas destacan las “donas polacas” (Abramowicz et al., 1978), caracterizadas por ser la configuración relativista y estacionaria más simple que describe un fluido ideal rotante alrededor de un agujero negro asumiendo momento angular constante en el disco⁵. Luego, el modelo de las donas polacas fue extendido para incluir los efectos del campo magnético; específicamente con una distribución toroidal, alrededor de un agujero negro rotante (Komissarov, 2006). Este trabajo ha servido como base para el desarrollo de discos geoméricamente gruesos con campo magnético y autoconsistentes con las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

La ampliación del modelo probó ser de gran interés debido al rol del campo magnético en el transporte de momento angular hacia el exterior, inducido por la inestabilidad magnetorotacional (MRI)⁶ (Zanotti and Pugliese, 2015) y el efecto de este mismo en el cálculo de la emisividad de la radiación de sincrotrón (Wardzinski and Zdziarski, 2000). Por otra parte, bajo este marco se realizó el estudio del espectro de emisión de Sgr A*. En este, se encontró que el modelo de campo magnético toroidal puede reproducir las mediciones espectrales en el rango milimétrico de la banda de radio; donde se presenta el pico espectral de Sgr A* (Vincent et al., 2014).

Entre otros avances realizados a partir de este modelo destacan la evolución dinámica de los

⁴ Para una revisión detallada ver Abramowicz and Fragile (2013).

⁵ Review en Abramowicz and Fragile (2013)

⁶ en inglés, *Magneto Rotational Instability*

discos presentada por Montero et al. (2007) y la inclusión del caso con distribución de momento angular no constante (Gimeno-Soler and Font, 2017). Por otra parte, Wielgus et al. (2015) plantea un modelo con una distribución de momento angular en forma de ley de potencias, con el fin de explorar el crecimiento de la MRI (Balbus and Hawley, 1991). Además, la evolución dinámica de estas configuraciones es tratada por Fragile and Skadowski (2017); centrándose específicamente en el decaimiento de la magnetización. Asimismo, se resalta la importancia del reciente trabajo de Pimentel et al. (2018) en el cual se incluye el efecto de la polarización magnética en el disco. Del mismo modo, se han desarrollado otros trabajos en el área para incluir efectos como el de autogravitación del disco (Mach et al., 2019) y la viscosidad del fluido (Lahiri et al., 2021).

Con base en las observaciones recientes y el avance en el modelado de discos, surgieron nuevas líneas de investigación entre las que destaca la restricción de posibles soluciones de la relatividad general y otras teorías de la gravedad (Shaikh et al., 2021a; Psaltis et al., 2020; Kumar and Ghosh, 2020). En general, se asume que la mayoría de objetos compactos son descritos por medio de modelos “tradicionales” que describen agujeros negros⁷, los cuales han sido validados por las observaciones. Sin embargo, existen otros modelos, soluciones a las ecuaciones de Einstein, que también son consistentes con las observaciones registradas hasta la fecha, por lo que no deberían ser descartados.⁸

⁷ Principalmente por medio de las métricas de Schwarzschild y de Kerr.

⁸ Estos se denominan *Black hole mimickers* ya que “imitan” los efectos producidos por un agujero negro en su vecindad.

Por lo tanto, se han realizado comparaciones sistemáticas de las sombras teóricas reportadas para M87 con los diferentes modelos; de forma que se evidencien restricciones en el espacio de parámetros de cada una de las soluciones (Shaikh et al., 2021a) y se limiten las alternativas de agujero negro. Esto es posible, ya que se ha demostrado que algunas características de los discos de acreción dependen de la geometría del espacio-tiempo (Abramowicz and Fragile, 2013). Por lo tanto, se considera a estas estructuras como un marco de trabajo ideal para la distinción entre agujeros negros y sus “imitadores”.

Además, no se pueden descartar los modelos alternativos en favor de los tradicionales, ya que, los estudios realizados en estos últimos aún no logran caracterizar completamente la geometría del espacio en la vecindad del objeto compacto. Por el contrario, se demostró que varios de los “imitadores” seguían siendo alternativas plausibles bajo la luz de los datos observacionales (Bambhaniya et al., 2019a,b, 2021b,a; Nampalliwar et al., 2021; Jusufi, 2021; Saurabh and Jusufi, 2021; Joshi et al., 2020; Dey et al., 2019; Lemos and Zaslavskii, 2008). En general, se ha demostrado que cualquier objeto compacto que presente una esfera de fotones puede producir sombras muy similares a las de un agujero negro (Shaikh and Joshi, 2019).

Entre las alternativas aparecen las estrellas de bosones (Kaup, 1968; Lora-Clavijo et al., 2010; Liebling and Palenzuela, 2017; Vincent et al., 2016), cuya sombra es muy similar a la de un agujero negro de Kerr; las gravastars (Mazur and Mottola, 2004; Sakai et al., 2014), derivadas del concepto de condensado de Bose-Einstein; las soluciones con materia oscura, (Boshkayev et al., 2020a; Becerra-Vergara et al., 2021), ya sean núcleos completamente formados de materia exótica o halos de materia oscura orbitando otros objetos compactos; los agujeros negros regulares

(Hayward, 2006), los cuales se caracterizan por la ausencia de una singularidad de curvatura; los agujeros negros de Yukawa (Cruz-Osorio et al., 2021), caracterizados por una descripción de la gravedad bajo el modelo $f(R)$ y finalmente, opciones aún más exóticas como los son los agujeros de Gusano (Bambhaniya et al., 2022; Gao et al., 2017).

Asimismo, se tienen las singularidades desnudas, objetos compactos con una singularidad de curvatura, pero sin un horizonte de eventos. La existencia de este tipo de soluciones resulta en una violación de la conjetura de censura cósmica (Christodoulou, 1984). Sin embargo, se ha demostrado que partiendo de condiciones físicas razonables, es posible colapsar un fluido de forma que se genere un objeto de este tipo (Shapiro and Teukolsky, 1991). Además, este tipo de soluciones atraen la atención ya que permiten la posibilidad de estudiar fenómenos gravitacionales en el régimen ultra fuerte, es decir, en la vecindad de una singularidad de curvatura (Shaikh et al., 2019). En esta dirección, se han realizado estudios de estas soluciones en diferentes contextos y para distintas métricas del espacio-tiempo (Abdikamalov et al., 2019) (Babar et al., 2017) (Liu et al., 2018) (Gyulchev et al., 2019).

En particular, es de interés el espacio-tiempo descrito por la q -metric (Quevedo, 2011); debido a que es la solución estática y axialmente simétrica más simple a las ecuaciones de Einstein con momento cuadrupolar de masa no nulo (Quevedo, 2011). Esta solución se obtiene por medio de una transformación de Zipoy-Vorhees (Zipoy, 1966; Voorhees, 1970) de la métrica de Schwarzschild. Este tipo de soluciones presentan propiedades interesantes como la aparición de zonas con gravedad repulsiva. Esto se ha descrito en términos del análisis de un potencial y una masa efectivos (Quevedo, 2011); y más recientemente por medio del estudio de los eigenvalores

del tensor de Riemann que describe este espacio-tiempo (Arrieta-Villamizar et al., 2020).

Además, se han realizado diversos estudios centrados en las características de la q -metric; por ejemplo, se ha calculado la sombra (Arrieta-Villamizar et al., 2020; Shaikh et al., 2021b), el anillo de Einstein y los efectos de lente gravitacional (Arrieta-Villamizar et al., 2020), las geodésicas (Chowdhury et al., 2012), los modos cuasinormales (Allahyari et al., 2019), el movimiento de partículas cargadas (Benavides-Gallego et al., 2019) y partículas rotantes (Toshmatov and Malafarina, 2019), las oscilaciones de neutrinos (Boshkayev et al., 2020b) y las colisiones de partículas (Malafarina and Sagynbayeva, 2021), entre otros.

En lo que respecta al estudio de discos de acreción alrededor de singularidades desnudas descritas por esta métrica, se encuentran contadas referencias en la literatura. Por ejemplo, existen estudios para el caso de discos hidrodinámicos delgados, construidos con el método de Novikov-Thorne (Boshkayev et al., 2021; Shaikh et al., 2021b). Por otro lado, existen trabajos recientes en discos hidrodinámicos gruesos como el de Memmen and Perlick (2021); así como extensiones que incorporan parámetros de rotación y magnetización (Faraji and Trova, 2021).

Sin embargo, un elemento clave para la diferenciación entre modelos de agujeros negros y sus imitadores, es la identificación de parámetros observables, que permitan contrastar las diferentes construcciones teóricas bajo la luz de las observaciones. En este sentido, cobran relevancia las simulaciones computacionales que permiten estudiar la radiación proveniente del disco de acreción en la vecindad del objeto compacto; la cual consiste en una serie de fotones emanados desde el disco que escapan de la atracción gravitacional de la fuente. Con este fin, se hace uso de un método conocido como trazado de rayos inverso, el cual permite reconstruir las geodésicas nu-

la que caracterizan a esta radiación. A partir de esta herramienta, se han desarrollado infinidad de estudios del plasma en los alrededores de objetos compactos. Entre estos destacan, la primera imagen computacional de un agujero negro esférico con un disco de acreción geoméricamente delgado (Luminet, 1979) y la caracterización de las líneas de emisión provenientes del mismo tipo de estructuras (Bao et al., 1994).

De forma más reciente, se han presentado trabajos de este tipo, incorporando discos geoméricamente gruesos en el espacio-tiempo de Kerr bajo los regímenes Kepleriano y sub-Kepleriano (Pariev and Bromley, 1998; Wu and Wang, 2007; Velásquez-Cadavid et al., 2023). Asimismo, en lo que respecta a métricas no convencionales, que describen imitadores de agujeros negros, se han presentado algunos avances por medio de las herramientas computacionales. Por ejemplo, se ha simulado la imagen de discos hidrodinámicos delgados alrededor de una singularidad desnuda (Shaikh and Joshi, 2019; Shaikh et al., 2021b). Sin embargo; no se conoce hasta el momento una caracterización del espectro de emisión e imágenes de discos gruesos magnetizados alrededor de una singularidad desnuda.

Con el fin de realizar este estudio, se encuentran en la literatura diversas alternativas para llevar a cabo este proceso, entre la que destacan GeoKerr (Dexter and Agol, 2009), Gyoto (Vincent et al., 2011), BHAC (Porth et al., 2017), entre otros. No obstante, para este trabajo se hace uso del código OSIRIS (Velásquez-Cadavid et al., 2022), de la autoría de los directores de este trabajo; para resolver las geodésicas nulas por medio de la formulación Hamiltoniana. Por último, se resalta que el objetivo del presente trabajo es determinar cambios en los parámetros observacionales que permitan distinguir entre el espacio-tiempo de la q -metric y el de Schwarzschild por medio del

estudio del espectro de emisión de discos de acreción gruesos con campo magnético toroidal, de forma que se puedan presentar la primera serie de simulaciones de las líneas de emisión y mapas de intensidad para toros magnetizados en este espacio-tiempo.

El presente documento se organiza entonces de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta una descripción general de la q -metric y las órbitas de interés para este espacio-tiempo. Luego, en la sección 3 se presenta el modelo para la construcción de discos de acreción geoméricamente gruesos, tomando como base el trabajo de Pimentel et al. (2018); además, de exponer los criterios para obtener configuraciones estables de forma sistemática. En la sección 4 se presentan dos familias de toros magnetizados, las cuales se diferencian por el comportamiento de la masa ADM; asimismo, se evalúa el impacto del parámetro q sobre estas. Posteriormente, en la sección 5 se describe el modelo de radiación de sincrotrón utilizado para la simulación de los espectros de emisión; se presentan los resultados de perfiles de emisión y mapas de intensidad para discos geoméricamente gruesos y delgados alrededor de una singularidad desnuda descrita por la q -metric. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones de la investigación. A lo largo de este trabajo se consideran la signatura $(-,+,+,+)$ y unidades geometrizadas, donde $G = c = 1$, con G la constante gravitacional y c , la velocidad de la luz.

1. Objetivos

Objetivo general

Calcular los perfiles de intensidad, incorporando radiación de sincrotrón, para discos de acreción con campo magnético toroidal formados alrededor de una singularidad desnuda descrita por la q metric.

Objetivos específicos

1. Construir soluciones analíticas de discos de acreción gruesos con campo magnético toroidal formados alrededor de una singularidad desnuda, para un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico, descrito por la q metric.
2. Analizar el efecto del parámetro de deformación cuadrupolar q sobre los potenciales y la formación de los cilindros de Von Zeipel. métodos basados en desplazamientos;
3. Implementar con el código OSIRIS las soluciones encontradas y aplicar un método de trazado de rayos inverso, con radiación de sincrotrón, para obtener el perfil de intensidad de la configuración.
4. Realizar un análisis sistemático de los resultados en términos del parámetro de deformación cuadrupolar y comparar los resultados obtenidos con los hallados previamente para la métrica de Schwarzschild e interpretar las diferencias encontradas.

2. q-metric

Usualmente, la vecindad de los objetos astrofísicos compactos se describe por medio de las métricas de Schwarzschild (Schwarzschild, 1916), que describe agujeros negros estáticos, y de Kerr, para el caso rotante; siendo esta última la solución más general en el espacio vacío (Kerr, 1963). Teniendo en cuenta que el campo gravitacional de los objetos compactos relativistas se puede caracterizar en función de sus momentos multipolares, se tiene que las métricas previamente enunciadas describen las estructuras más simples en términos de estos.

Sin embargo, como se ha expuesto con anterioridad, los agujeros negros no son los únicos candidatos para la descripción de objetos compactos; por lo que es importante estudiar como afecta la estructura multipolar a la descripción de los campos gravitacionales generados por estas fuentes. Una de estas alternativas son las singularidades desnudas, cuya viabilidad a partir de un colapso gravitacional realista ha sido demostrada bajo ciertas circunstancias (Joshi, 2007). La aparición de estas, se presume caracterizada por un colapso inhomogéneo y dependiente tanto de la velocidad del proceso, como de la forma del objeto que colapsa; siendo favorables para su aparición los colapsos rápidos a partir de objetos no exactamente simétricos.

Por ejemplo, a partir de la métrica de Kerr se pueden describir singularidades desnudas para determinada relación entre los parámetros de masa y momento angular. No obstante, se ha encontrado que situaciones realistas de colapsos gravitacionales no llevan a singularidades desnudas de Kerr (De Felice, 1978; Calvani and Nobili, 1979; Rudnicki, 1998), por lo que no se cree que este tipo de objetos puedan ser muy comunes en el universo. Con base en esto y en el hecho

de que para el caso de los multipolos de masa, se ha registrado que después del monopolo, el siguiente momento multipolar no nulo es el cuadrupolo; cobra especial interés la *q-metric* (Quevedo, 2011), generalización más simple de la métrica de Schwarzschild con cuadrupolo, la cual describe singularidades desnudas.

En general, los espacio-tiempos estáticos y axialmente simétricos se describen por medio del elemento de Línea de Weyl (Weyl, 1917), cuyo caso más simple es el de Schwarzschild, el cual posee únicamente momento monopolar de masa. Para generalizar esta solución, se realiza una transformación de Zipoy-Vorhees (Zipoy, 1966; Voorhees, 1970) y se obtiene una familia de soluciones con el momento cuadrupolar de masa no nulo, caracterizadas por un parámetro denominado γ^1 . Además, estas soluciones difieren únicamente en los momentos multipolares de mayor orden y presentan un problema común; el tratamiento analítico de las soluciones debido a su compleja estructura matemática (Quevedo, 1990).

Por lo tanto, se favorece una reinterpretación de la transformación de Zipoy-Vorhees en términos de un nuevo parámetro: q^2 . La *q-metric* es una solución que describe el campo gravitacional exterior a una singularidad desnuda con momento cuadrupolar no nulo y que además, presenta la ventaja de ser una solución exacta que se puede expresar de forma analítica de manera simple (Quevedo, 2011).

¹ De ahí que en gran parte de la literatura se encuentre esta solución con el nombre de métrica γ

² Se puede redefinir el parámetro γ por medio de la relación $\gamma = q + 1$

2.1 Características generales

El tensor métrico en este espacio-tiempo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\mathbf{g} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \right. \\ \left. \times \left(dr \otimes dr \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + r^2 d\theta \otimes d\theta \right) + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi \right], \quad (1)$$

donde q y m son parámetros arbitrarios. Para el caso límite, $q = 0$, esta solución se reduce a la métrica esféricamente simétrica de Schwarzschild. Por otro lado, para el caso de $m = 0$, independientemente del valor de q , se puede reescribir como la métrica de Minkowski. Con base en esto, se va asociando cada uno de estos parámetros a variables físicas del sistema. En el caso de m se ve que está relacionada a una distribución de masa mientras que q se relaciona a una desviación respecto a la simetría esférica.

Esta asociación física de los parámetros se corroba por medio del cálculo de la masa ADM (Boshkayev et al., 2016) y de la estructura multipolar (Quevedo, 2011); esta última se hace por medio de la definición invariante de Geroch Geroch (1970a,b). Para el caso de los multipolos de masa

$$M_0 = (1 + q)m, \quad M_2 = -\frac{m^3}{3}q(1 + q)(2 + q). \quad (2)$$

Además, se tiene que este par de términos describen por completo la estructura multipolar, ya que términos de mayor orden pueden ser reescritos en términos de estos. Por lo tanto, se dice

que los únicos momentos multipolares de masa independientes son el monopolo (M_0) y el cuadrupolo (M_2). De las expresiones (2) se encuentra que el monopolo coincide con la masa ADM y el cuadrupolo se relaciona con la deformación del objeto; esto debido a que para distribuciones de masa prolatas se tienen valores positivos de M_2 , mientras que para configuraciones oblatas se obtienen valores negativos. Del mismo modo, teniendo en cuenta la relación del monopolo con la masa, se impone la condición $q > -1$ para mantener valores de la masa total positivos (Quevedo, 2011).

Por otro lado, el estudio del escalar de Kretschmann (Quevedo, 2011) $K = R_{\mu\nu\lambda\tau}R^{\mu\nu\lambda\tau}$ muestra que esta solución se caracteriza por presentar un par de singularidades de curvatura, ubicadas en $r = 0$ y en la hipersuperficie $r = 2m$; esto para cualesquiera valores de q y m diferentes a los que dan como resultado los casos especiales mencionados previamente. Por añadidura, se han identificado la aparición de otras dos singularidades contenidas dentro del radio $r = 2m$ para valores del parámetro cuadrupolar ($q \in (-1, -1 + \sqrt{3/2}) \setminus \{0\}$). Teniendo en cuenta que Luongo and Quevedo (2014) han mostrado que no existe un horizonte adicional exterior a la superficie previamente enunciada, estas singularidades corresponden a singularidades desnudas.

Adicionalmente, cabe resaltar que se han descrito en la literatura zonas de gravedad repulsiva en la vecindad de una fuente descrita por esta métrica. En primer lugar, se relacionó este efecto al comportamiento de una masa efectiva asociada a un potencial efectivo que describe el movimiento geodésico en este espacio-tiempo (Quevedo, 2011); sin embargo, esta interpretación se veía afectada por una dependencia de las coordenadas. Por lo tanto, estudios posteriores caracterizaron estos efectos repulsivos en términos de los eigenvalores del tensor de Riemann asociado a esta

métrica Arrieta-Villamizar et al. (2020). De esta forma, se elimina la dependencia del fenómeno en las coordenadas escogidas; en cambio, se liga la variación de signo en uno de los eigenvalores, relacionados de forma intrínseca a la curvatura, con un cambio en el comportamiento del campo gravitacional.

Finalmente, es pertinente mencionar otros trabajos relacionados con las propiedades de este tipo de soluciones, los cuales han evaluado el impacto del parámetro q en fenómenos tales como el movimiento geodésico y la formación de configuraciones de equilibrio en forma de discos de acreción gruesos y delgados alrededor de un objeto compacto descrito por esta métrica. Boshkayev et al. (2016); Chowdhury et al. (2012); Kodama and Hikida (2003); Herrera et al. (2005); Herrera and Pastora (2000); Papadopoulos et al. (1981); Parnovskii (1985).

2.2 Órbitas importantes

A la hora de estudiar objetos masivos en relatividad general, es importante tener en cuenta cómo es el comportamiento de objetos que orbitan alrededor de estos. Consecuentemente, es pertinente introducir un par de órbitas importantes para la construcción de discos de acreción alrededor de una singularidad descrita por la q -metric.

En primer lugar, se tiene la última órbita circular estable, más conocida como *ISCO* por sus siglas en inglés². Para la q -metric (Boshkayev et al., 2016) esta se ubica en un radio

$$r_{\text{ms}}^{\pm} = m \left(4 + 3q \pm \sqrt{5q^2 + 10q + 4} \right), \quad (3)$$

² *Innermost Stable Circular Orbit*

donde el subíndice (*ms*) corresponde a las siglas de marginalmente estable³; su comportamiento como función del parámetro q se presenta en la figura 1. Cabe resaltar que para el presente trabajo se hace uso únicamente de la solución (+) de la órbita marginalmente estable. La otra órbita importante en este estudio es la marginalmente ligada⁴ r_{mb} ; la cual está determinada por la ecuación

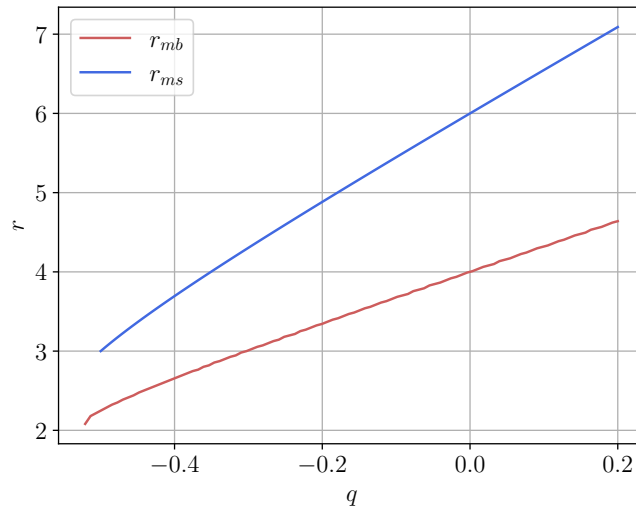


Figura 1

Órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q

$$\mathcal{V}(\varepsilon = 1, L_c(r), r) = 1; \quad \mathcal{V} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} \left[\frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^q + \varepsilon \right], \quad (4)$$

³ en inglés, *marginally stable (ms)*

⁴ en inglés, *marginally bound (mb)*

en la cual \mathcal{V} es el potencial efectivo del espacio-tiempo, ε es un parámetro que indica si la partícula es de tipo tiempo, espacio o nulo y L es el momento angular, donde el subíndice c indica que se debe evaluar en la expresión para una órbita circular. Sin embargo, esta ecuación no se puede resolver de forma analítica para r (Memmen and Perlick, 2021). Por lo tanto, se realiza la solución numérica de esta, plasmada en la figura 1.

3. Configuraciones toroidales

Los discos de acreción son estructuras formadas por un fluido rotante alrededor de un objeto astrofísico masivo (Pringle, 1981). Estos deben su nombre al proceso homónimo, el cual se define como el incremento en la masa de un cuerpo central; a través de la materia en su vecindad, debido a su atracción gravitacional. Una configuración de este tipo se da cuando la distribución de materia sometida al proceso acreción tiene momento angular suficiente, de forma que la caída hacia el objeto fuente del campo no se da en forma radial. Al poner en marcha este mecanismo, el flujo en la dirección perpendicular al eje de rotación del objeto central tiende a formar un disco en el plano ecuatorial, debido a que la rotación se opone al flujo de materia. En cambio, en la dirección paralela se acumula hacia un plano hasta obtener un equilibrio entre las fuerzas asociadas a los gradientes de presión y la fuerza gravitacional.

En general, los discos de acreción pueden ser geoméricamente delgados o gruesos. El primero de estos modelos (Thorne, 1974), describe un fluido viscoso prácticamente confinado al plano ecuatorial del objeto masivo hacia el cual se da la acreción; en un flujo Kepleriano. Sin embargo, este tipo de flujo es consistente con la ecuación relativista de Euler únicamente en el caso de fuerzas asociadas a los gradientes de presión despreciables en comparación con las demás fuerzas presentes en el sistema (Fishbone and Moncrief, 1976). En contraposición, cuando estos gradientes de presión no son despreciables, se tiene el caso de discos geoméricamente gruesos, cuya topología se asemeja más a la de un toroide que a la de un disco (Fishbone and Moncrief, 1976).

3.1 Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

Para construir configuraciones de discos de acreción, se parte de las ecuaciones de conservación fundamentales que rigen el comportamiento de la materia; estas son, la conservación de la masa en reposo (5) y de la energía- momento (6) (Abramowicz and Fragile, 2013)

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad (6)$$

donde ∇_{μ} es el operador derivada covariante asociado con el tensor métrico \mathbf{g} (1), ρ es la densidad de masa en reposo, u^{μ} son las componentes de la 4-velocidad y T_{μ}^{ν} las del tensor de energía-impulso. Estas ecuaciones de conservación se nutren de otras relaciones “materiales” como la ecuación de estado, viscosidad, conductividad, etc. Con base en esto, se puede escribir una forma general del tensor de energía impulso, útil para el tratamiento de discos de acreción. Este se escribe entonces como una suma de contribuciones del fluido, la viscosidad, los campos electromagnéticos y la radiación. Por lo tanto, los modelos de discos de acreción se dan como soluciones a las ecuaciones de conservación para elecciones particulares del tensor T_{μ}^{ν} .

Para este trabajo, es de interés el modelo de discos gruesos con campo magnético toroidal; conocido ampliamente como donas polacas magnetizadas o toroides magnetizados. Para esto, se parte de las donas polacas (Jaroszynski et al., 1980), considerada como la descripción analítica más sencilla, en el sentido de que se aplica la aproximación de fluido de prueba, según la cual se

desprecian los efectos autogravitantes de la materia sometida a la acreción; además, de la aproximación de fluido ideal, por la cual la única contribución al tensor de energía impulso es la asociada al fluido (Abramowicz and Fragile, 2013).

Luego, a partir de los trabajos de Komissarov (2006) y Pimentel et al. (2018), se extiende el modelo previo para incluir los efectos del campo magnético, con distribución toroidal, y de la polarización magnética. Para esto, se escriben las ecuaciones de la MHD⁵ ideal; que no son más que las dos ecuaciones fundamentales de conservación (5), (6), más las ecuaciones de Maxwell relevantes (7) (Pimentel et al., 2018)

$$\nabla_{\mu} (u^{\mu} b^{\nu} - b^{\mu} u^{\nu}) = 0, \quad (7)$$

donde, el tensor de Faraday en forma covariante está dado por la expresión entre paréntesis. Para el caso expuesto previamente, el tensor de energía impulso se construye a partir de dos contribuciones principales

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_M^{\mu\nu}, \quad (8)$$

en esta, el término $T_f^{\mu\nu}$ se refiere a la parte del fluido; mientras que $T_M^{\mu\nu}$ es correspon-

⁵ Magnetohidrodinámica

diente al rol del campo magnético. Después de un corto tratamiento matemático y teniendo en cuenta la aproximación de medio lineal (Pimentel et al., 2018), se obtiene la forma final del tensor de energía-impulso para el modelo

$$T^{\mu\nu} = [w + b^2(1 - \chi)] u^\mu u^\nu + \left[P + \frac{1}{2} b^2(1 - 2\chi) \right] g^{\mu\nu} - (1 - \chi) b^\mu b^\nu. \quad (9)$$

En esta última expresión, w es la densidad de entalpía, P es la presión termodinámica, χ es la susceptibilidad magnética, $b^2 = b^\mu b_\mu$ y $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico.

En particular, para este trabajo, se suponen una serie de condiciones para la descripción de los discos. En primer lugar, se asume que el espacio-tiempo es estacionario y axialmente simétrico, de forma que $\partial_t g_{\mu\nu} = \partial_\phi g_{\mu\nu} = 0$, donde (t, ϕ, r, θ) son las coordenadas. Además, se supone un flujo estacionario y axialmente simétrico, entonces $\partial_t f = \partial_\phi f = 0$, para cualquier parámetro físico f ⁶. Asimismo, el flujo es una rotación pura alrededor del objeto compacto, por lo que $u^r = u^\theta = 0$. Por último, se trabaja con un campo magnético puramente azimutal (distribución toroidal), por lo tanto $b^r = b^\theta = 0$.

Al tener en cuenta esto, las ecuaciones de conservación del número bariónico (5) y las

⁶ Debido a estas 2 condiciones impuestas, la construcción expuesta en el presente trabajo es válida para cualquier espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico

ecuaciones de Maxwell relevantes (7) se satisfacen idénticamente⁷. Por lo tanto, el problema físico es descrito a partir de la ecuación de conservación de la energía-momentum (6) con la forma dada del tensor de energía-impulso (9). Después de un extenso tratamiento matemático, se obtienen las ecuaciones de Euler⁸ (10), las cuales describen completamente la estructura en equilibrio del toroide

$$h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = [w + (1 - \chi)b^2] u_\beta \partial_\nu u^\beta + \partial_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right] - (1 - \chi)b_\alpha \partial_\nu b^\alpha + \frac{1}{2}(1 - \chi)\partial_\nu b^2 = 0, \quad (10)$$

donde $h^\beta{}_\nu = \delta^\beta{}_\nu + u^\beta u_\nu$ es el tensor de proyección. Asimismo, esta expresión puede ser reescrita al incorporar algunas definiciones y realizar un serie de desarrollos matemáticos, de forma que se obtengan las ecuaciones de Euler relativistas⁹

$$\partial_\nu (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} \partial_\nu l + \frac{\partial_\nu (P - \chi P_m)}{w} + \frac{\partial_\nu [(1 - \chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} = 0, \quad (11)$$

en esta ecuación, la presión magnética se define como $P_m = b^2/2$ y $\mathcal{L} = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$; mientras que la velocidad angular (Ω) y el momento angular específico (l) se definen por medio de

⁷ Para un cálculo detallado ver Apéndice 1

⁸ Una descripción detallada de la obtención de esta expresión se encuentra en el Apéndice 1

⁹ Una descripción detallada de la obtención de esta expresión se encuentra en el Apéndice 2

las siguientes expresiones

$$\Omega = \frac{u^\phi}{u^t} = -\frac{g_{\phi t} + l_{tt}}{g_{\phi\phi} + l g_{t\phi}}, \quad (12)$$

$$l = -\frac{u_\phi}{u_t} = -\frac{g_{\phi t} + \Omega g_{\phi\phi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\phi}}. \quad (13)$$

Una vez incorporadas estas definiciones, las ecuaciones de Euler relativistas (11) pueden ser integradas para caracterizar la evolución del fluido. Esta ecuación representa el equilibrio magneto-hidroestático y a partir de ellas se pueden obtener las configuraciones toroidales de interés para este trabajo.

3.2 Condiciones de integrabilidad

Es pertinente describir la ecuación de Euler relativista de forma que sus términos tomen la forma de un diferencial exacto (Pimentel et al., 2018)¹⁰. Para esto, se sigue el procedimiento establecido por Komissarov (2006) según el cual, el fluido obedece una ecuación de estado barotrópica $w = w(P)$, y las superficies de Ω y l constantes coinciden de forma que $\Omega = \Omega(l)$ (Abramowicz et al., 1978). Por lo tanto

¹⁰ Para una descripción completa de los resultados presentados en esta sección ver el apéndice 3

$$d \left(\ln |u_t| + \int_0^P \frac{dP}{w} - \int_0^l \frac{\Omega}{1-l\Omega} dl \right) - \underbrace{\frac{d(\chi P_m)}{w} + \frac{d[(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w}}_{\mathcal{I}} = 0, \quad (14)$$

donde \mathcal{I} está relacionado con los términos donde aparece la susceptibilidad magnética χ .

En general, la susceptibilidad es una función arbitraria de las coordenadas, pero con el fin de poder reescribir también el término I como un diferencial exacto, se asume $\chi = \chi(\mathcal{L})$ (Pimentel et al., 2018). Por lo tanto I queda de la forma

$$\mathcal{I} = \frac{1-2\chi}{w} dP_m + (1-\chi-2\chi'\mathcal{L}) \frac{P_m}{w\mathcal{L}} d\mathcal{L}, \quad (15)$$

en la cual $\chi' = \partial\chi/\partial\mathcal{L}$. Ahora, se busca una función $z = z(P_m, \mathcal{L})$, de modo que

$$\mathcal{I} = dz = \frac{\partial z}{\partial P_m} dP_m + \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} d\mathcal{L}. \quad (16)$$

Al comparar (15) y (16), se encuentra que la función z debe satisfacer las siguientes condiciones

$$\frac{\partial z}{\partial P_m} = \frac{1-2\chi}{w}; \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} = \left[\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right] \frac{P_m}{w}. \quad (17)$$

Luego, cuando se integran las expresiones (17), se obtiene una solución general para la función z de la forma

$$z = (1 - 2\chi) \int_{P_{m0}}^{P_m} \frac{dP_m}{w} + P_{m0} \int_{L_0}^{\mathcal{L}} \frac{1}{w} \left(\frac{1 - \chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) d\mathcal{L} \Big|_{P_{m0}} + z_0, \quad (18)$$

donde z_0 es una constante de integración y la cual es válida si la condición¹¹ (19) se cumple

$$z - P_m \int_{L_0}^{\mathcal{L}} \frac{1 - \chi - 2\chi' \mathcal{L}}{\mathcal{L} w} d\mathcal{L} = \mathcal{F}(P_m), \quad (19)$$

aquí, $\mathcal{F}(P_m)$ es una función que depende únicamente de la presión magnética. En consecuencia, el problema se reduce a encontrar una relación entre las variables w, P_m, \mathcal{L} que cumpla con (19). Con este fin, se procede a transformar esta expresión en una ecuación diferencial parcial para la entalpía w ; para esto se deriva la condición de integrabilidad primero respecto a P_m y luego respecto a \mathcal{L} ¹²

$$(1 - 2\chi) \mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}} - P_m (1 - \chi - 2\chi' \mathcal{L}) \frac{\partial w}{\partial P_m} + (1 - \chi) w = 0. \quad (20)$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por medio del método de separación de variables, de forma que la función solución w es de la forma

$$w = \tilde{K}_m P_m^{\lambda^2} (1 - 2\chi)^{\lambda^2} \mathcal{L}^{\frac{\lambda^2 - 1}{2}} e^{(\lambda^2 - 1)\phi}, \quad (21)$$

¹¹ Esta expresión es conocida como la condición de integrabilidad y su cálculo detallado se encuentra en el apéndice 3

¹² El procedimiento completo se detalla en el apéndice 3

donde \tilde{K}_m es una constante y ϕ está dado por

$$\phi = \int \frac{d\mathcal{L}}{2\mathcal{L}(1-2\chi)}. \quad (22)$$

La ecuación (21) es una forma general de la entalpía $w(P_m, \mathcal{L})$ válida para $\chi = \chi(\mathcal{L})$. Sin embargo, es necesario especificar una forma de la susceptibilidad magnética χ para poder calcular ϕ a partir de la ecuación (22). Con base en la elección de (Pimentel et al., 2018), se escoge la forma

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 \mathcal{L}^\mu, \quad (23)$$

donde χ_0, χ_1, μ son constantes. Además, se puede comprobar que cuando $\chi_0 = \chi_1 = 0$, todas las expresiones reducen a las encontradas por (Komissarov, 2006). Ahora, haciendo uso de la forma (23) se encuentra que la entalpía (21) es descrita por (24)¹³

$$w = \tilde{K}_m P_m^{1/\eta} \mathcal{L}^{-\tilde{k}/\eta} \tilde{f}^{-1/\eta}, \quad (24)$$

en la cual se realizó la sustitución $\lambda^2 \rightarrow 1/\eta$; mientras que \tilde{k} y \tilde{f} son descritos por

$$\tilde{k} = \frac{1-\chi_0}{1-2\chi_0}(\eta-1); \quad \tilde{f} = (1-2\chi)^{\frac{1-\eta}{2\mu(1-2\chi_0)}-1}. \quad (25)$$

Mientras que para la presión magnética se tiene

¹³ Para la derivación detallada de esta expresión ver el apéndice 3

$$P_m = K_m \mathcal{L}^{\tilde{\kappa}} w^\eta \tilde{f}, \quad (26)$$

donde $K_m = \tilde{K}_m^{-\eta}$. Seguidamente, utilizando la expresión (24), se pueden computar las integrales expresadas en (18). Con base en esto

$$z = \frac{\eta}{\eta - 1} (1 - 2\chi) \frac{P_m}{w}, \quad (27)$$

que es una solución particular de z asociada a la forma (23) de χ . Luego, como se conoce la función $z(P_m, \mathcal{L})$ que permite escribir I como un diferencial exacto, las ecuaciones de Euler relativistas (14) tienen como solución una expresión

$$\ln |u_t| + \int_0^p \frac{dP}{w} - \int_0^l \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} + (1 - 2\chi) \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{P_m}{w} = C, \quad (28)$$

en la cual C es una constante. Por otra parte, se introduce el potencial efectivo relativista (Abramowicz et al., 1978)

$$W = \ln |u_t| + \int_l^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega}, \quad (29)$$

donde el primer término corresponde a un término gravitacional en el límite de campo débil; mientras que el segundo refiere a un término asociado a un potencial centrífugo. Esta es la generalización relativista del potencial Newtoniano. Para el caso de un disco se tiene que en el borde interior $P = P_m = 0$, $u_t = u_{t_{in}}$ y $l = l_{in}$. Por lo tanto la ecuación de Euler (28) para el borde

interior del disco se reduce a

$$\ln |u_{in}| - \int_0^{l_{in}} \frac{\Omega}{1 - l\Omega} = C, \quad (30)$$

con lo cual, usando (30) se puede reescribir la ecuación de Euler en términos del potencial efectivo relativista W (29) donde W_{in} es una constante que denota el valor del potencial efectivo al interior del disco¹⁴

$$W - W_{in} + \int_0^P \frac{dP}{w} + \frac{\eta}{\eta - 1} (1 - 2\chi) \frac{P_m}{w} = 0. \quad (31)$$

A partir de esta última expresión, se construyen las configuraciones en equilibrio de toros magnetizados, objetivo del presente trabajo.

3.3 Construcción de toros barotrópicos con momento angular constante

Al revisar la solución de la ecuación de Euler en su forma (31), se hace evidente el hecho de que se necesitan más especificaciones del modelo para poder calcular la integral que aparece en esta expresión. Así, siguiendo los modelos de (Komissarov, 2006) y (Pimentel et al., 2018), se asume un toro donde el fluido presenta un momento angular constante $l = l_0$; y este mismo es descrito por una ecuación de estado politrópica para la presión

$$P = Kw^K, \quad (32)$$

¹⁴ Ver apéndice 3

donde K es una constante y κ el índice politrópico. De la segunda condición se tiene que¹⁵

$$\int_0^P \frac{dP}{w} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P}{w}, \quad (33)$$

mientras que, al aplicar la primera condición a la definición del potencial W

$$W = \ln |u_r|. \quad (34)$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler relativista para un polítropo con momento angular constante $l = l_0$

$$W - W_{in} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P}{w} + \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{P_m}{w} (1 - 2\chi) = 0. \quad (35)$$

Para el caso sin susceptibilidad magnética ($\chi = 0$), esta ecuación se reduce a la encontrada por Komissarov (2006). Por otra parte, debido a que $u_t^2 = \mathcal{L}/\mathcal{A}$ donde $\mathcal{A} = g_{tt}l_0^2 + 2g_{t\phi}l_0 + g_{\phi\phi}$, el potencial efectivo también se puede escribir como

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2} \ln |\mathcal{L}/\mathcal{A}|. \quad (36)$$

De este modo, se tienen prácticamente todos los ingredientes necesarios para describir soluciones analíticas de toros barotrópicos magnetizados. En este modelo, se tienen hasta ahora cuatro

¹⁵ Ver apéndice 4

parámetros libres: el potencial en el borde interior del disco, W_{in} , el momento angular del fluido, l_0 , y los exponentes de las expresiones κ y η ; además de los parámetros de polarización magnética χ_0, χ_1 y μ .

No obstante, es necesario determinar las constantes K y K_m que aparecen en la ecuación de estado politrópica y en la presión magnética (26). Con este fin, se definen otros 2 parámetros: la entalpía en el centro del disco w_c y el parámetro de magnetización en el centro del disco β_c ; los cuales permiten la completa determinación de las constantes previamente enunciadas. Con base en esto, es conveniente entonces definir cual es el $r = r_c$ que define el centro del disco. Tomando como guía (Abramowicz et al., 1978), se define el centro del disco como uno de los dos puntos en el plano ecuatorial donde el momento angular del fluido l_0 es igual al momento angular específico Kepleriano (Memmen and Perlick, 2021).

$$l_K(r)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+2q)} \frac{(1+q)Mr^2}{r - (2+q)M}. \quad (37)$$

Igualmente, el otro punto tiene gran importancia, ya que define la cúspide del disco r_c . Para diferenciar cual punto corresponde a cada característica se usa el criterio $r_{cusp} < r_c$ (Abramowicz et al., 1978). En lo que refiere a los demás parámetros, se tiene que existen un número de condiciones sobre estos. Para el momento angular del fluido l_0 se tiene que el disco está separado del horizonte de eventos o en el caso de la q -metric, de la singularidad solo si

$$|l_0| > |l_{ms}|, \quad (38)$$

donde l_{ms} es el momento angular correspondiente a la órbita marginalmente estable r_{ms} (Abramowicz et al., 1978). Asimismo, se tiene que si

$$|l_0| > |l_{mb}|, \quad (39)$$

con l_{mb} el momento angular correspondiente a la órbita marginalmente ligada r_{mb} , el disco tiene extensión finita únicamente para los casos donde $W_{in} < 0$ (Komissarov, 2006). Sin embargo, este tipo de discos no presentan una cúspide en su borde interior (Memmen and Perlick, 2021). Por lo tanto, son de interés físico los discos en los cuales el momento angular cumple con la condición

$$|l_{ms}| < |l_0| < |l_{mb}|, \quad (40)$$

ya que estos están separados de la singularidad, presentan centro y cúspide, y son de extensión finita siempre que se cumpla la condición

$$W_c < W_{in} < W_{cusp}, \quad (41)$$

donde W_c y W_{cusp} son los valores del potencial en el centro y la cúspide del disco respectivamente. Para el caso de la q -metric, valores de l correspondientes a las órbitas marginalmente estable y ligada, se hace uso de la expresión para el momento angular específico de una órbita circular (Memmen and Perlick, 2021)

$$l_c(r)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-(1+2q)} \frac{(1+q)Mr^2}{r - (2+q)M}. \quad (42)$$

Ahora, conocida (42), se evalúa la expresión como función de q para los radios correspondientes de las órbitas marginalmente estable y ligada, expuestos en la figura 1. Los resultados obtenidos por medio de este proceso se plasman en la figura 2

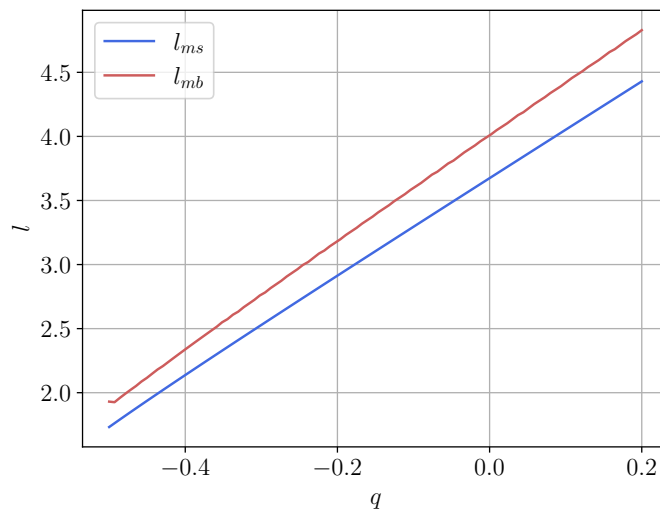


Figura 2

Momento angular específico de las órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q

Una vez se hace la elección del momento angular l_0 , se puede definir también el valor de W_{in} con base en los criterios explicados. Por ende, se tienen todos los elementos necesarios para computar las variables físicas que determinan la configuración del disco. Para esto se parte de (35) y se tiene en cuenta que por definición el parámetro de magnetización es $\beta = P/P_m$. Por lo tanto, se pueden encontrar los valores de la presión del gas y la presión magnética en el centro del disco

$$P_c = w_c (W_{\text{in}} - W_c) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{1 - 2\chi_c}{\beta_c} \right)^{-1}, \quad (43)$$

$$P_{m_c} = \frac{P_c}{\beta_c}. \quad (44)$$

Con estos valores, se encuentra el valor de las constantes K y K_m . Luego, se determina la entalpía como función de las coordenadas a partir de (35)¹⁶. Conocida la entalpía, se procede a computar la presión magnética por medio de (26) y la presión del gas con (32). Finalmente, la densidad de masa en reposo se obtiene por medio de

$$\rho = w - \frac{\kappa P}{\kappa - 1}, \quad (45)$$

con la ecuación (45) se describe ρ como una función de las coordenadas $\rho(r, \theta)$, lo cual permite plasmar por medio de una gráfica el perfil de masa, en el plano ecuatorial, de un disco de acreción alrededor de una singularidad desnuda. Además, es de utilidad para la simulación numérica de la sombra que caracteriza a una configuración de este tipo.

¹⁶ Ver apéndice 4

4. Resultados I: toros magnetizados en la q -metric

Para estudiar discos de acreción geoméricamente gruesos alrededor de una singularidad desnuda descrita por la q -metric, se construyeron de forma sistemática una serie de configuraciones de equilibrio. Esto con el fin de revisar el impacto del cuadrupolo de masa que caracteriza a este espacio-tiempo en la morfología de los discos. Así pues, se construyeron dos clasificaciones de interés teniendo en cuenta las características de la métrica y la motivación previamente expuesta de poder comparar en un futuro los modelos computacionales aquí presentados con las observaciones de objetos compactos.

Por un lado, se tienen los discos con masa ADM variable que permiten explorar las características del espacio-tiempo a cabalidad (Sección 4.1) y los discos con masa ADM fija (Sección 4.2), los cuales representan una mejor posibilidad a la hora de validarlos respecto a las observaciones

4.1 Masa ADM variable

Para este caso se fija el parámetro m , de modo que se puedan caracterizar los discos en términos del otro parámetro libre de la métrica, q (Faraji and Trova, 2021; Faraji et al., 2022). Sin embargo, recordando la definición de los multipolos de masa (2), se tiene que al realizar esta elección, la masa ADM del objeto, M_0 , varía para cada elección de q , de ahí el nombre asignado a esta categoría.

Con motivo de estudiar el impacto del parámetro q sobre los discos de acreción, se construyó una familia de configuraciones que exploran las diversas posibilidades que presenta este espacio-tiempo en lo que refiere a la desviación respecto a la simetría esférica del objeto com-

pacto. En este caso, se eligieron dos valores de $q = -0.3$ y -0.15 que corresponden según (2) a objetos con deformación prolata; mientras que para el caso oblato se toma el valor de $q = 0.1$. Además, se tiene el caso de $q = 0$ como referencia, ya que este reproduce el espacio-tiempo de Schwarzschild, para el cual los discos geoméricamente gruesos dotados de campo magnético han sido ampliamente estudiados (Komissarov, 2006).

Tabla 1

Parámetros de discos con masa ADM variable

q	l_0	r_{cusp}	r_c	W_{cusp}	W_c	W_{in}
-0.3	2.65	3.23	6.27	-0.032	-0.051	-0.040
-0.15	3.30	3.68	8.11	-0.021	-0.045	-0.030
0	3.95	4.11	9.97	-0.012	-0.045	-0.030
0.1	4.20	4.93	9.26	-0.040	-0.050	-0.046

Para el conjunto de valores de q seleccionados, se presentan tres casos del parámetro de magnetización en el centro del disco ($\beta_c = 1, 0.1, 0.01$), de forma que se pueda revisar también el impacto del campo magnético sobre los discos formados en este espacio-tiempo. Teniendo en cuenta la convención tomada para la definición de este parámetro ($\beta = P/P_m$), se tiene que la primera de estas opciones representa un disco donde la presión magnética, P_m , es igual a la presión hidrostática, P , mientras que las otras dos representan toros dominados por los efectos magnéticos, siendo mayor el efecto en el último caso ($\beta = 0.01$).

Los parámetros característicos escogidos para cada toro se presentan en la tabla 1. Estos fueron seleccionados teniendo en cuenta las condiciones expuestas en la sección 3.3. Además, es importante resaltar que los valores de los parámetros $\kappa = \eta = 4/3$ y $w_c = 1$ son comunes a cada una de las configuraciones. Asimismo, en lo que refiere al parámetro de polarización magnética χ presentado en la formulación general de la teoría, se toma este como igual a cero, ya que está fuera de los objetivos del presente estudiar el impacto de esta propiedad.

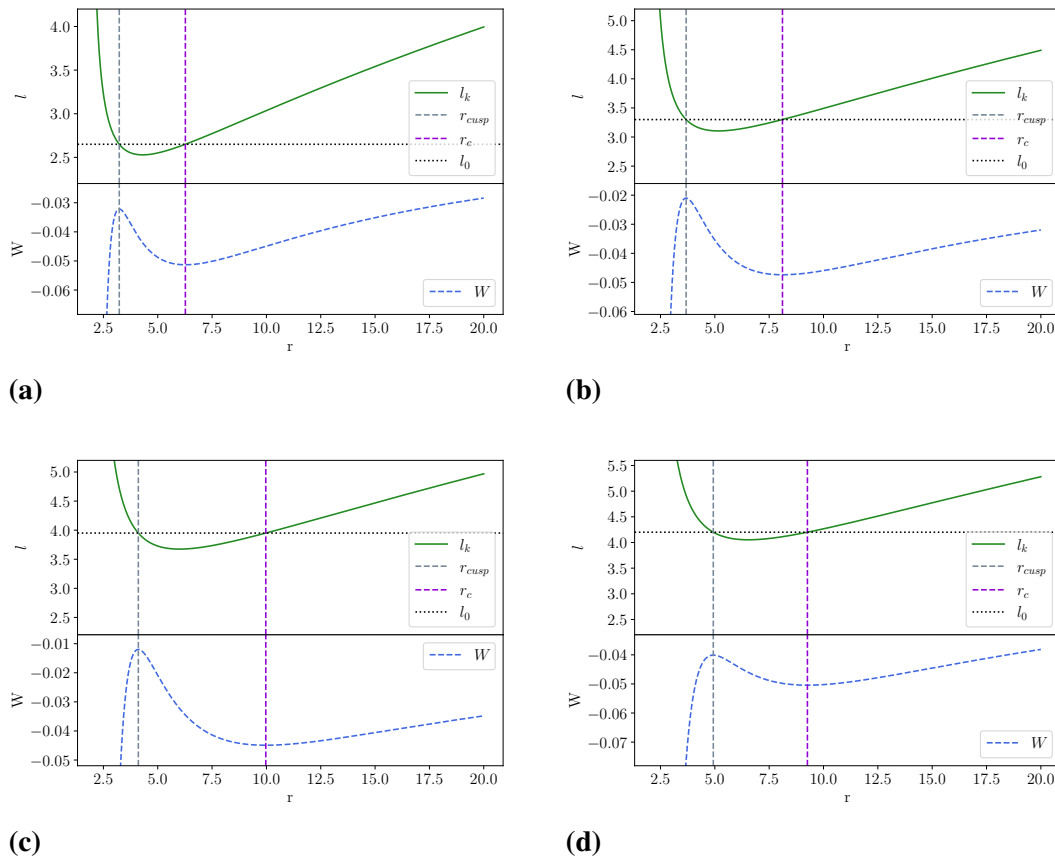


Figura 3

Comportamiento del momento angular Kepleriano y Potencial efectivo para diferentes valores de q caso de masa ADM variable. (a) $q = -0.3$. (b) $q = -0.15$. (c) $q = 0$. (d) $q = 0.1$.

En la figura 3 se muestra el comportamiento del momento angular Kepleriano (37) y el potencial efectivo relativista (34) en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) para las diferentes escogencias de q . En esta se evidencia que la posición del centro y la cúspide del disco se determinan como los puntos donde el momento angular del fluido l_0 toma el mismo valor que el momento angular Kepleriano. Además, se ve que estos mismos coinciden, respectivamente, con un mínimo y un máximo del potencial efectivo. También, cabe resaltar que el comportamiento de estas variables no se ve afectada por la elección del parámetro β_c ; por lo tanto, no cambian mientras se mantengan fijos el momento angular del fluido l_0 y el parámetro q .

Del mismo modo, se evidencia que el valor del momento angular l_0 debe aumentar conforme lo hace también el parámetro q para que existan dos puntos donde la magnitud de l_0 y l_k sean iguales. Además, como se puede inferir a partir de la tabla 1, la distancia entre r_c y r_{cusp} se hace más pequeña al variar el parámetro q de forma que se aleje del valor de referencia, $q = 0$; lo cual conlleva a asociar este efecto a la presencia de un momento cuadrupolar no nulo. Por otra parte, al observar el potencial se tiene que el valor máximo alcanzado disminuye al variar el parámetro respecto al caso de Schwarzschild ($q = 0$); siendo el correspondiente a $q = 0.1$ el de menor magnitud entre todos los expuestos, caracterizado también por presentar la caída de potencial con la menor pendiente.

Por otra parte, en la figura 4 se expone una representación la densidad de masa del disco ρ_m de forma dos dimensional por medio de una gráfica de isocontornos. Para esta figura específica, se toma el valor de $\beta_c = 1$ y se exponen las opciones de q previamente mencionadas. Al observar la figura, se ve que el disco más extenso se da para el valor de $q = 0$, aumentando el grado de

compacidad a medida que el valor de q se aleja de cero; es decir, en tanto que aumente el valor del cuadrupolo de masa M_2 . Así, el disco más compacto se encuentra cuando el valor de q es igual a -0.3 .

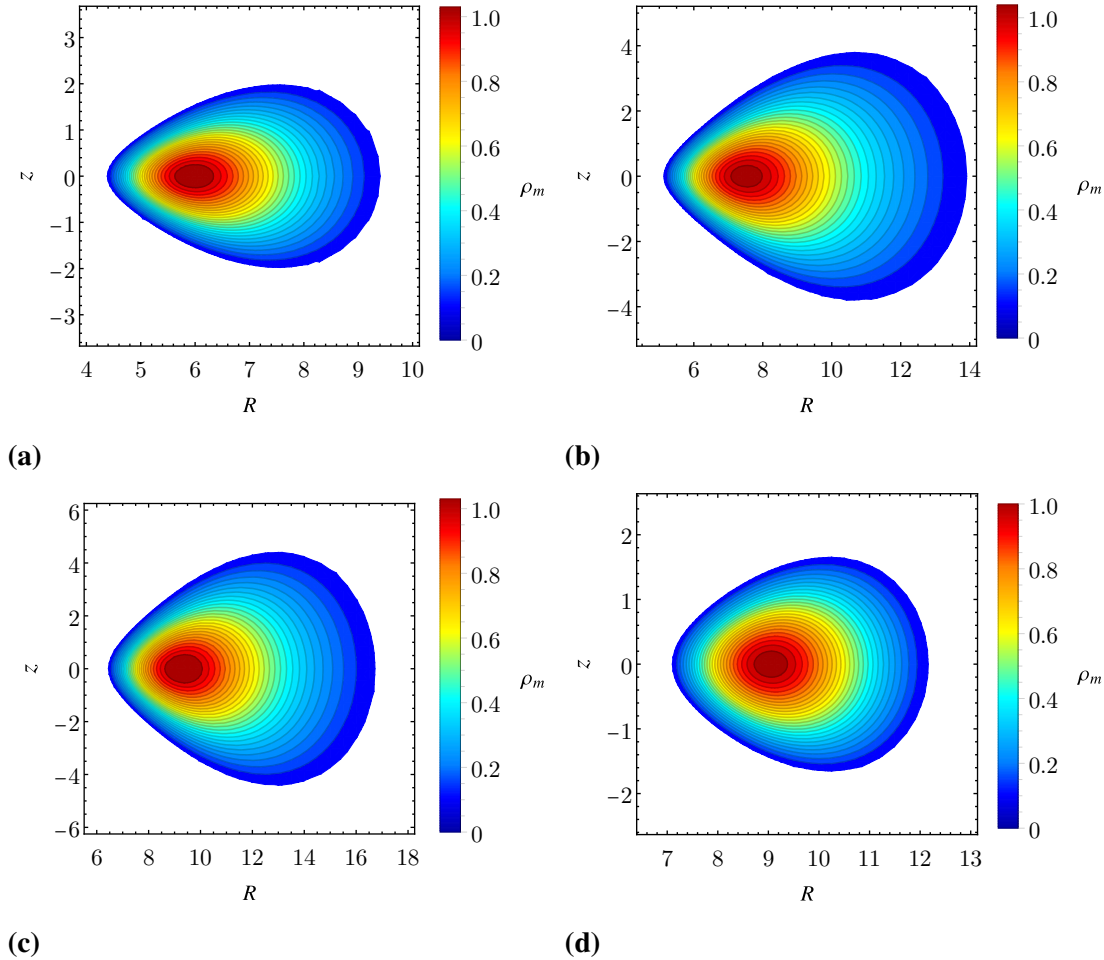


Figura 4

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 1$. (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

Por otro lado, en lo que respecta al impacto sobre los discos del carácter prolato u oblató de la deformación del objeto compacto, se tiene que para $q < 0$ (deformación prolata), los discos

tienen una reducción tanto en la dirección radial como en el eje z , con lo cual los discos toman una forma similar a la de una semilla, la cual se diferencia de la forma característica de los discos con $q = 0$. Por otro lado, para $q > 0$ (Deformación oblata) también se tiene una disminución del tamaño en ambas direcciones; sin embargo, la forma de los discos se ve afectada de diferente forma, en este caso el disco toma una forma más ovalada que igualmente se diferencia de la obtenida para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

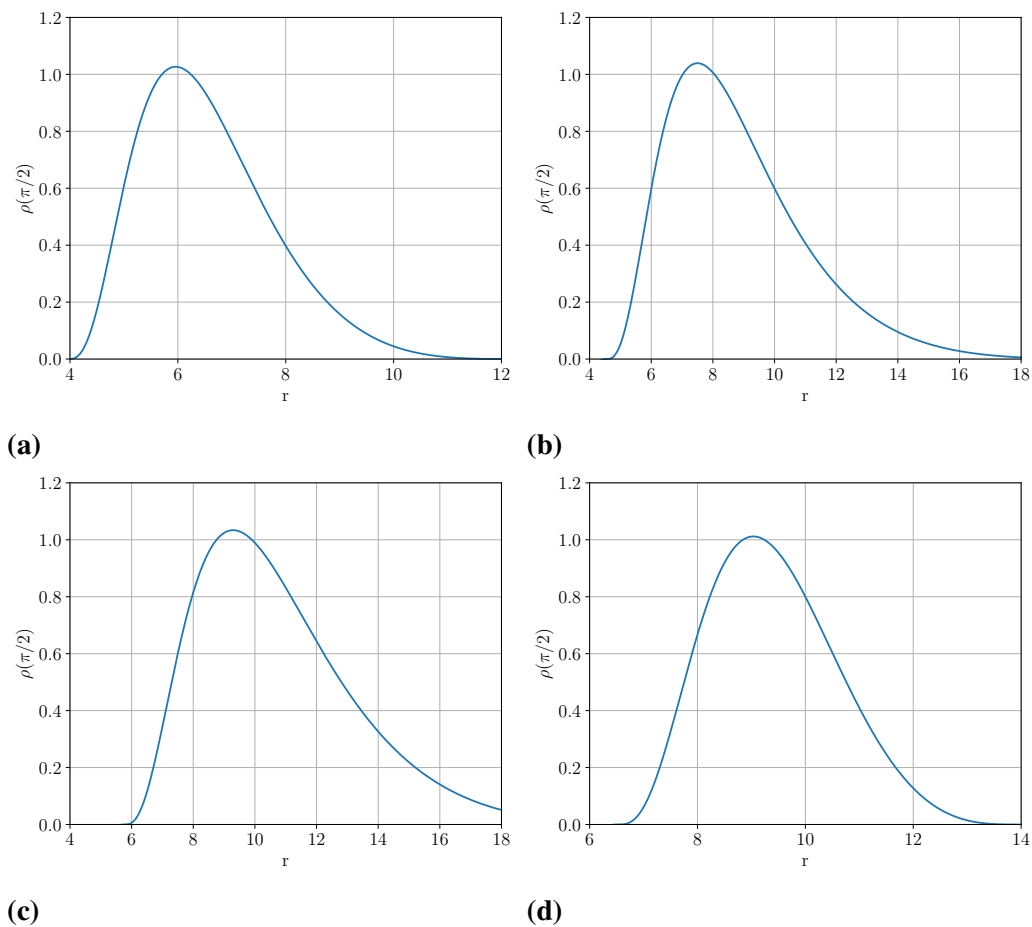


Figura 5

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

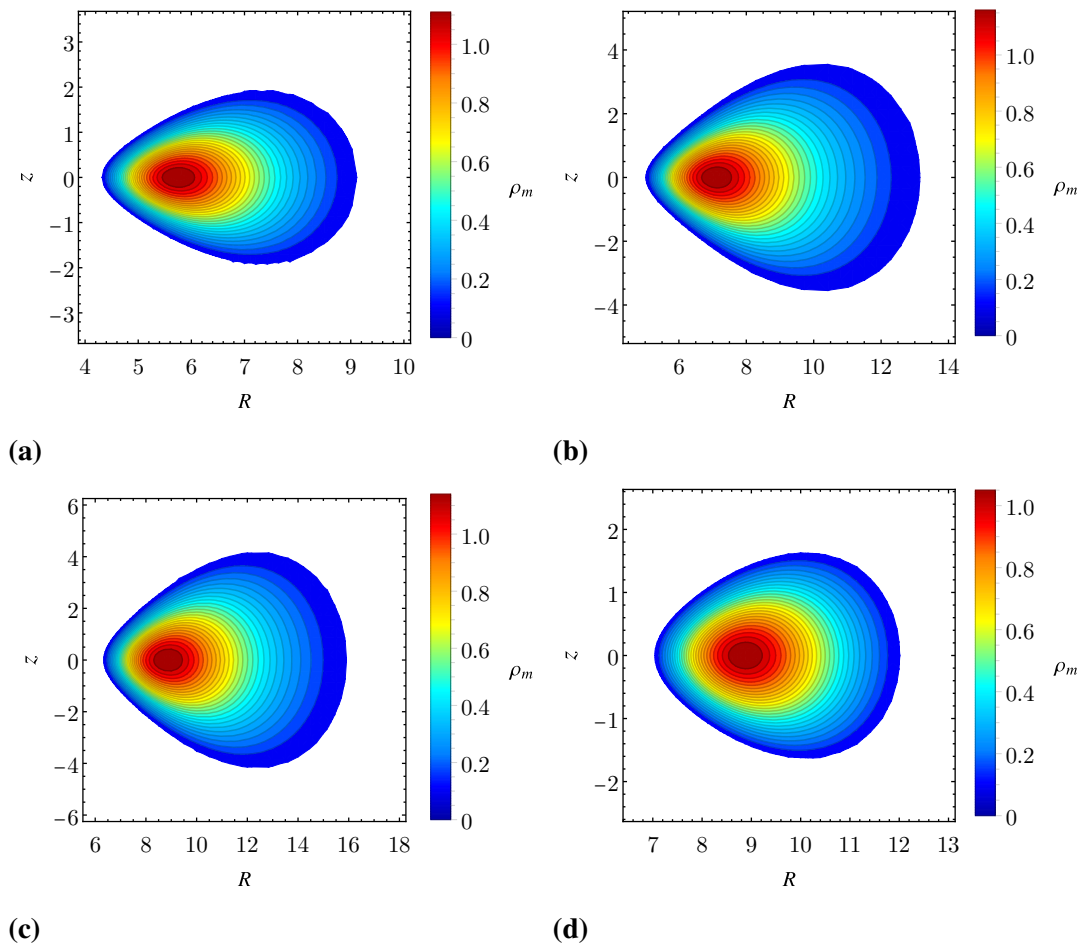


Figura 6

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

De la misma forma, en la figura 5 se presentan los perfiles de densidad de masa en el ecuador para el mismo criterio de elección de β_c y q . En estos se puede apreciar que, en general, el máximo de densidad alcanza valores similares sin importar el valor de q , únicamente en el caso de $q = 0.1$ se nota una diferencia significativa en este valor, el cual es menor que los demás. Además, al observar el perfil, se evidencia que la distancia del disco al objeto compacto se incrementa a

medida que también lo hace el valor de q . No obstante, este no es el único factor que puede jugar un rol importante en esta característica, ya que por ejemplo, para el caso valores positivos de q , (2) indica un aumento de la masa ADM al mantener m fijo. Por lo tanto, este efecto se asocia principalmente al aumento en la magnitud del momento angular consignado en la tabla 2, donde al aumentar el valor de q también lo hace de manera constante el momento angular del fluido l_0 .

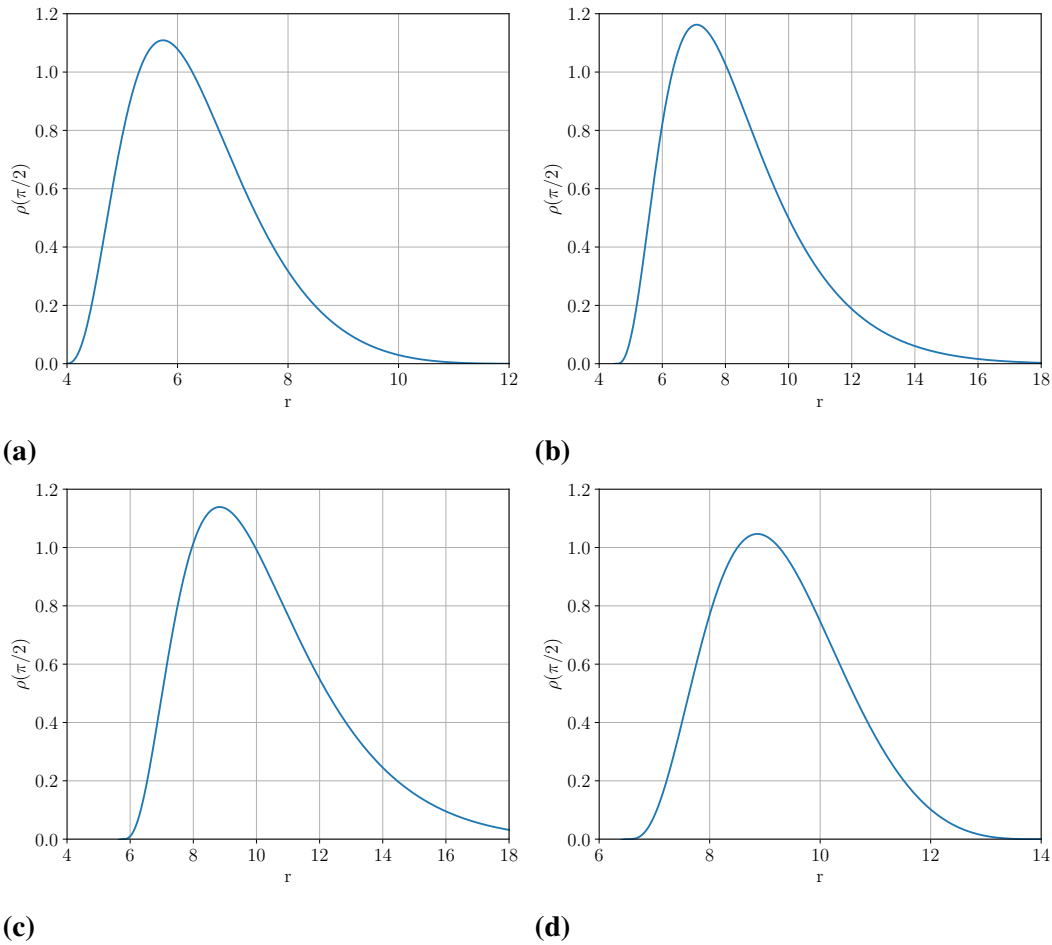


Figura 7

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

Luego, en las gráficas 6 y 8 se presentan los isocontornos de los discos para $\beta_c = 0.1$ y $\beta_c = 0.01$ respectivamente. Del mismo modo en las figuras 7 y 9 se exponen los perfiles de densidad de masa para estos valores del parámetro β_c . Al revisar estos resultados, se tiene que las tendencias previamente enunciadas como la disminución en la extensión al alejarse del caso $q = 0$ y el cambio en la forma según el tipo de deformación del objeto compacto se mantienen al variar β_c . Sin embargo, se pueden identificar una serie de diferencias entre las configuraciones con el mismo valor de q pero diferente β_c , las cuales se asocian al impacto de la magnetización sobre la apariencia de los discos.

Por ejemplo, al comparar las figuras 4a , 6a y 8a que representan el caso $q = -0.3$ a medida que el parámetro β_c se hace más pequeño, se encuentra que al apreciar detalladamente los isocontornos, los discos dominados magnéticamente ($\beta_c < 1$) presentan un aumento en la densidad alrededor del centro. Asimismo, otro detalle a resaltar es que entre mayor es el valor de β_c el disco parece más extendido, cualesquiera sea el valor de q . Sin embargo, al revisar el perfil de densidad se ve que este efecto es prácticamente imperceptible. Este comportamiento se debe principalmente a que para estas representaciones dos dimensionales se grafica a partir de una densidad mínima de $\rho_m = 0.1$, la cual será relevante más adelante para la obtención de los mapas de intensidad. Por lo tanto, lo que se observa es que para una mayor contribución de la presión hidrodinámica, el disco tiene una mayor extensión en lo que refiere a la densidad de masa relevante definida.

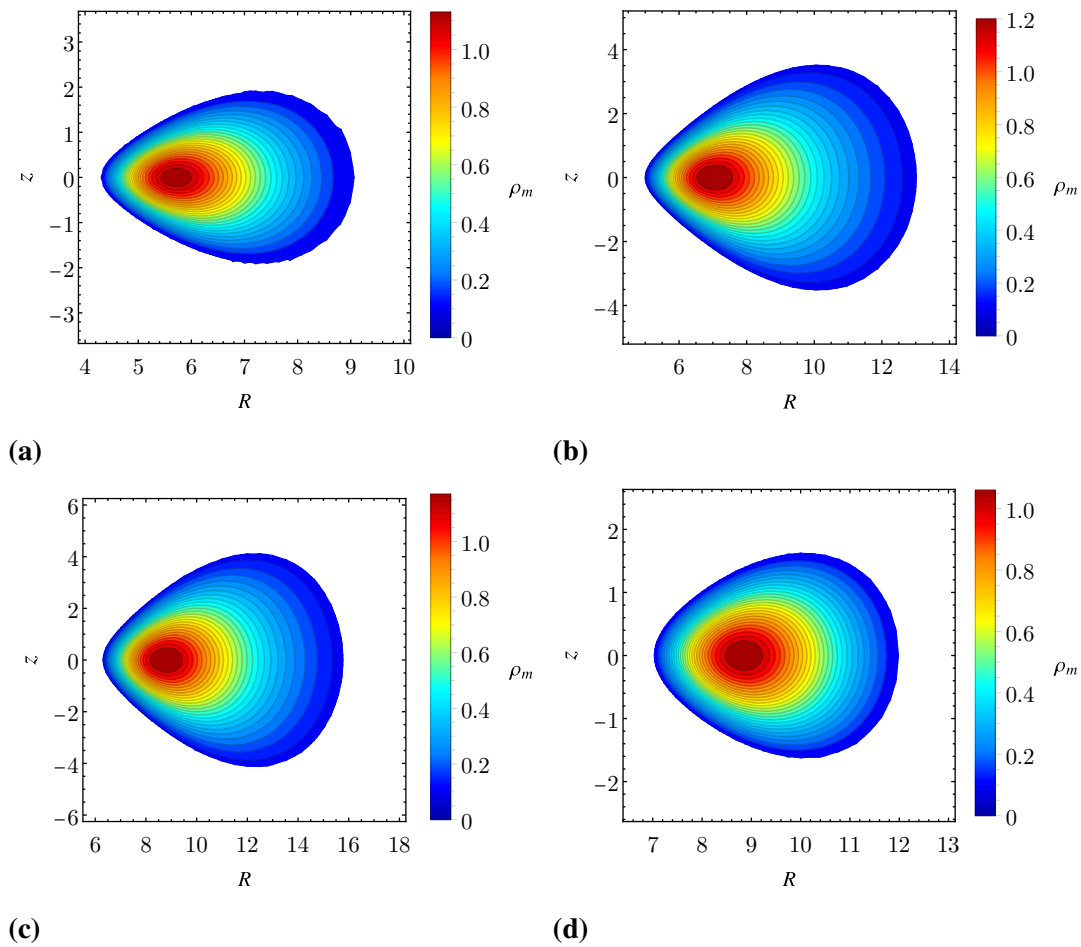


Figura 8

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM variable y $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

De manera análoga, al cotejar las figuras 5b , 7b y 9b se puede observar que el valor máximo de la densidad aumenta a medida que disminuye el parámetro β ; es decir, la densidad máxima es mayor para los discos dominados magnéticamente. Sin embargo, se observa que la mayor variación se da entre los primeros dos casos ($\beta = 1$ y $\beta = 0.1$); lo cual indica que aumentar el grado de magnetización una vez este ya es dominante no tiene un efecto significativo sobre los perfiles de

masa. Además, se puede ver que el valor de r para el cual se da el máximo se va corriendo hacia la cúspide del disco, lo cual indica una mayor concentración de masa en el interior del disco al incrementar la dominancia magnética (Komissarov, 2006; Faraji and Trova, 2021). Comportamientos análogos se pueden observar para los diferentes valores de q al variar el parámetro β_c .

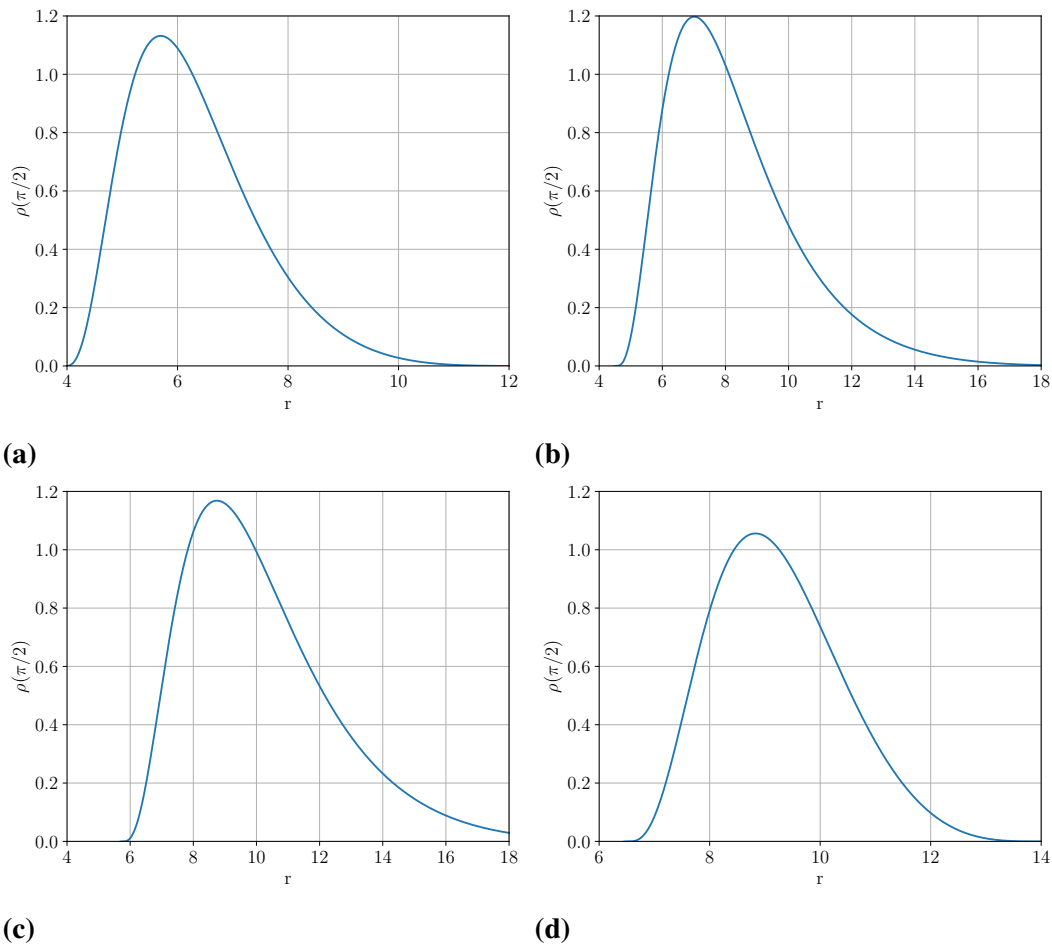


Figura 9

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

4.2 Masa ADM fija

Seguidamente se estudia el caso en el cual la masa ADM mantiene un valor fijo al variar el parámetro q . Para esto, se toma el monopolo de masa como $M_0 = 1$, ya que se ha demostrado que para esta métrica su valor coincide con el de la masa ADM (Boshkayev et al., 2016). Esto se hizo con el fin de evaluar el impacto del parámetro q sobre un espacio-tiempo donde el objeto compacto tiene una masa determinada, de forma que se facilite la comparación con las observaciones astronómicas de objetos compactos. En un procedimiento análogo al de la sección anterior, se estudian cuatro valores de $q = \{-0.3, -0.15, 0, 0.1\}$ y 3 variaciones del parámetro $\beta_c = \{1, 0.1, 0.01\}$.

A la hora de escoger los parámetros para la construcción de discos, se sigue el análisis expuesto en la sección 3.3. No obstante, al fijar el valor de la masa ADM, el comportamiento tanto de las órbitas marginalmente estable y ligada, como de sus respectivos momentos angulares se ve afectado. En la figura 10a se muestran las órbitas de interés teniendo en cuenta esta restricción, mientras que en la figura 10b se exponen los momentos angulares.

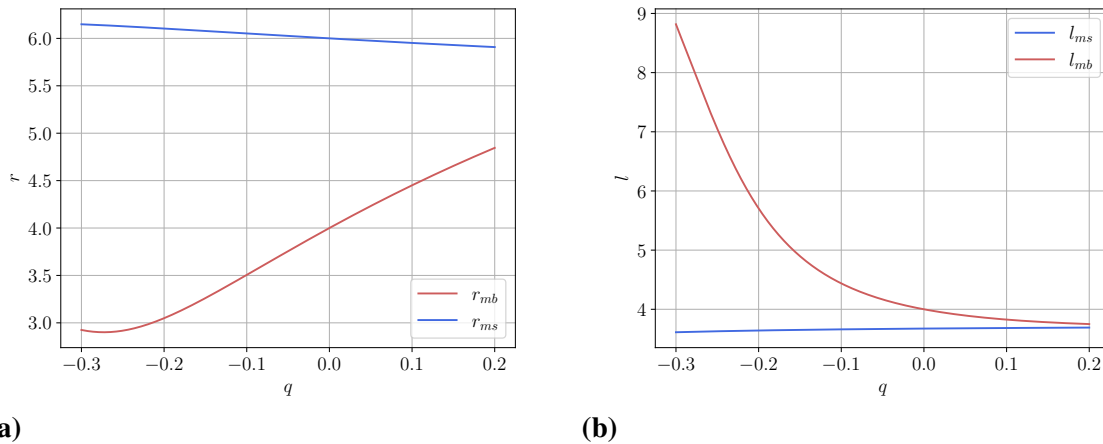
De la figura 10a, se puede observar que a diferencia de 1, la órbita marginalmente estable r_{ms} tiene un comportamiento decreciente, aunque de forma muy leve; sin embargo, la distancia entre los dos radios de interés se reduce a medida que aumenta el parámetro q . Además, es importante resaltar que para este caso la órbita marginalmente ligada r_{mb} está definida únicamente para valores de $q > -0.3$; por lo que se toma este valor de q como caso límite para la construcción de discos con masa ADM fija.

Por otro lado, a partir de 10b, se observa que el momento angular de la órbita estable l_{ms} ,

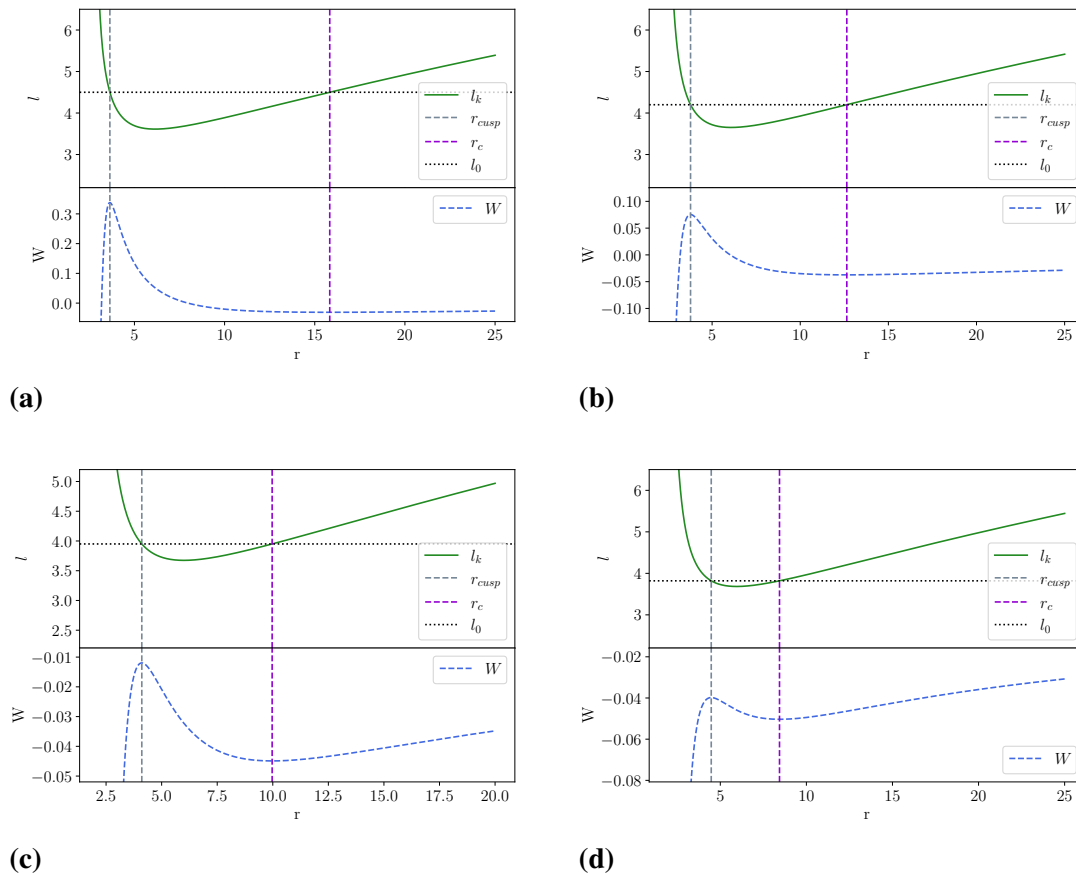
Tabla 2*Parámetros de discos con masa ADM fija*

q	l_0	r_{cusp}	r_c	W_{cusp}	W_c	W_{in}
-0.3	4.5	3.64	15.832	0.011	-0.031	-0.025
-0.15	4.20	3.78	12.64	0.075	-0.037	-0.030
0	3.95	4.11	9.97	-0.012	-0.045	-0.030
0.1	3.82	4.47	8.44	-0.040	-0.050	-0.048

tiene un comportamiento casi constante; mientras que el de la órbita ligada l_{mb} crece rápidamente al disminuir el valor de q . También, se observa que para $q > 0.1$ los valores de los respectivos momentos angulares de interés se hacen prácticamente iguales, lo que restringe en gran medida la construcción de discos para este rango. En la tabla 2 se consignan los parámetros empleados, y al igual que lo expuesto en la sección anterior, se tiene que $\kappa = \eta = 4/3$, $w_c = 1$, $\chi = 0$.

**Figura 10**

(a) Órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q para el caso de masa ADM fija. (b) Momento angular específico de las órbitas marginalmente estable y ligada como función del parámetro q para el caso de masa ADM fija.

**Figura 11**

Momento angular Kepleriano y Potencial efectivo para el caso de masa ADM fija. (a) $q = -0.3$. (b) $q = -0.15$. (c) $q = 0$. (d) $q = 0.1$.

En la figura 11 se muestran el momento angular Kepleriano y el potencial efectivo para las diferentes elecciones de q . La primera diferencia apreciable en la figura 11a respecto a 3a se da en la aparición de un máximo mucho mayor del potencial W y un posterior caída bastante rápida. Esto, ya que al fijar M_0 se cambian totalmente los valores de l_0 permitidos para esta configuración, como se ve en 10b. Por lo tanto, se obtiene un disco con una separación considerable entre la cúspide y el centro. Del mismo modo, al comparar 3b con 11b, se observa que para $q = -0.15$

aparecen el mismo tipo de efectos que para el caso de $q = -0.3$ en el máximo y con un incremento en la distancia entre r_c y r_{cusp} ; efectos marcados por la escogencia de un valor mayor de l_0 como se registra en la tabla 2.

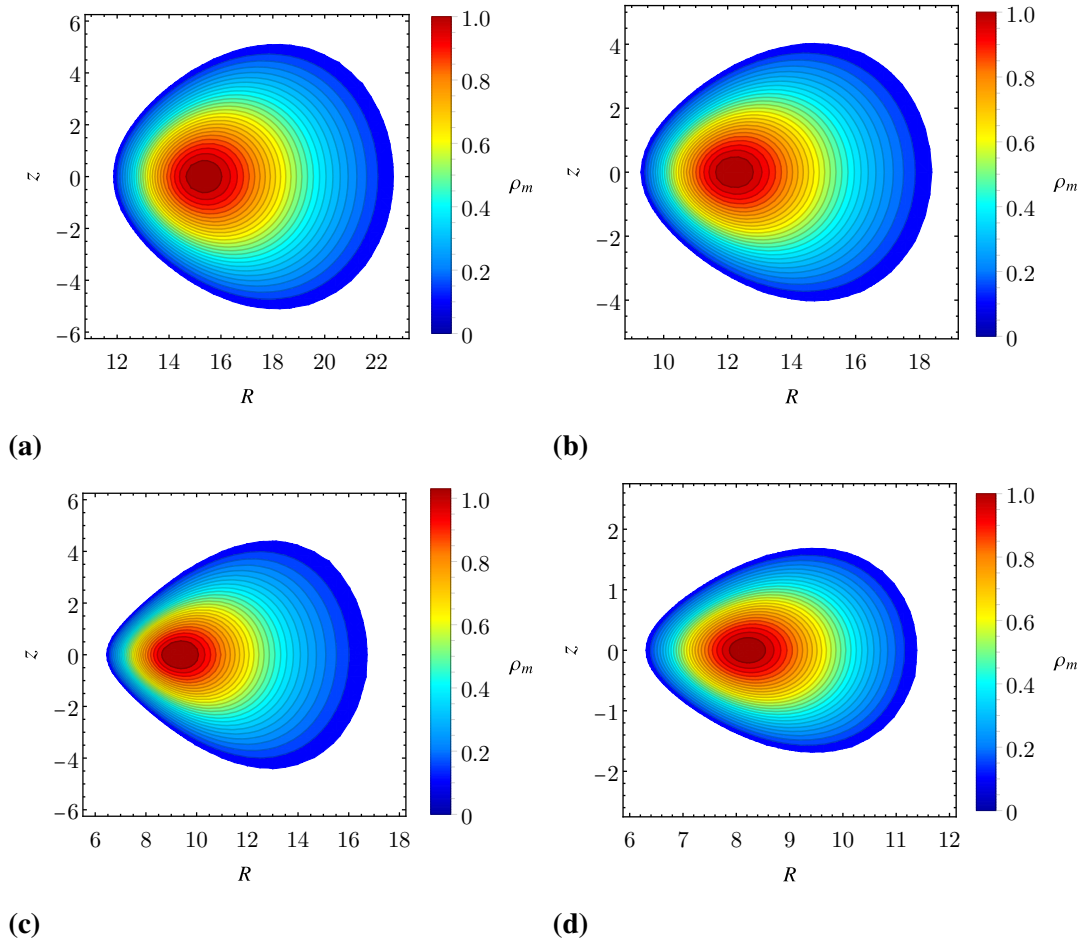


Figura 12

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

Por otra parte, al cotejar 3c y 11c no se encuentra ninguna diferencia; sin embargo esto se debe a una particularidad: al tomar el valor de $q = 0$ y $m = 1$ en el caso de masa ADM variable, se

obtiene un objeto compacto con $M_0 = 1$, es decir un espacio-tiempo con la misma masa ADM que la presentada en esta sección, como se puede comprobar al revisar la expresión (2). Finalmente en lo que respecta al caso $q = 0.1$; a partir de la figura 11d, se puede ver que se tiene el máximo de potencial de menor magnitud y una caída en el mismo bastante ligera; esto se debe a las restricciones impuestas para la construcción del disco, plasmadas en 10b y con las cuales se obtiene una configuración con una distancia pequeña entre el centro y la cúspide.

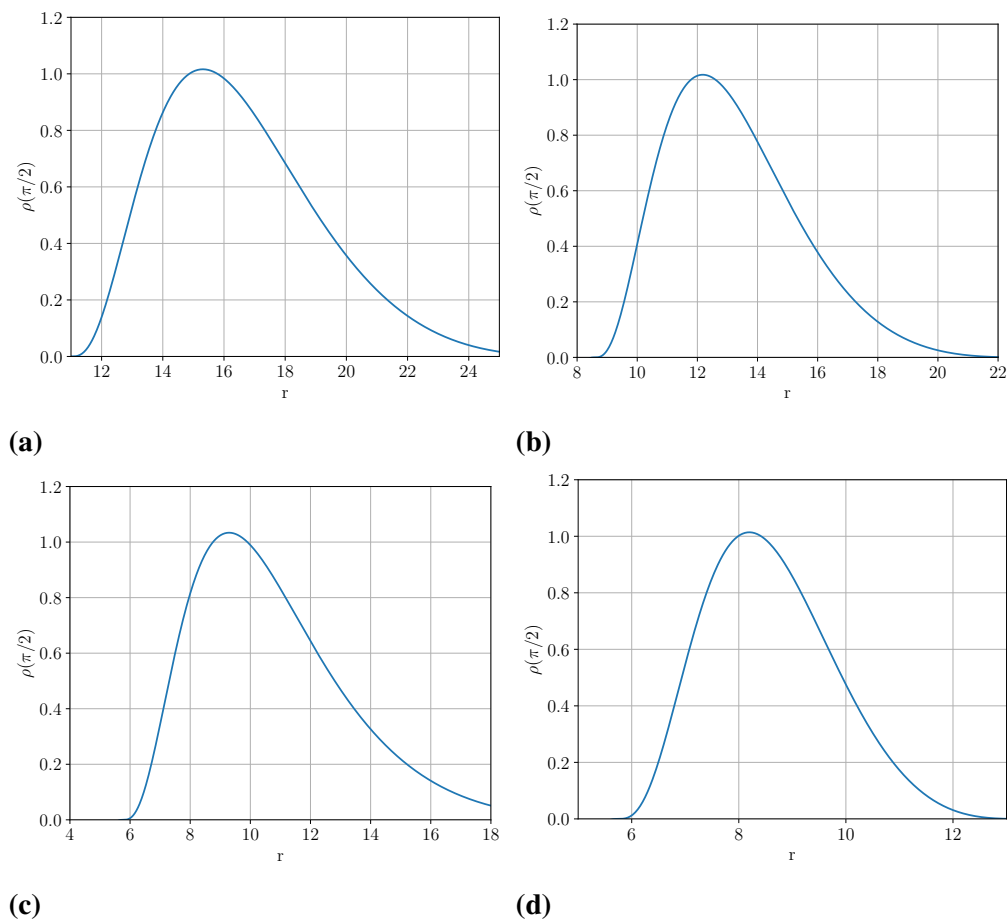


Figura 13

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 1$ en el caso de masa ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

Por otro lado, en la figura 12 se exponen las gráficas de isocontornos de masa para este caso, en estas se tiene que $\beta_c = 1$ y se presentan las opciones de q escogidas para el trabajo. Al observar la figura, se ve que bajo estas condiciones, el disco más extenso se da para el valor de $q = -0.3$, a diferencia de la sección anterior donde resaltaba el espacio-tiempo de Schwarzschild con $q = 0$.

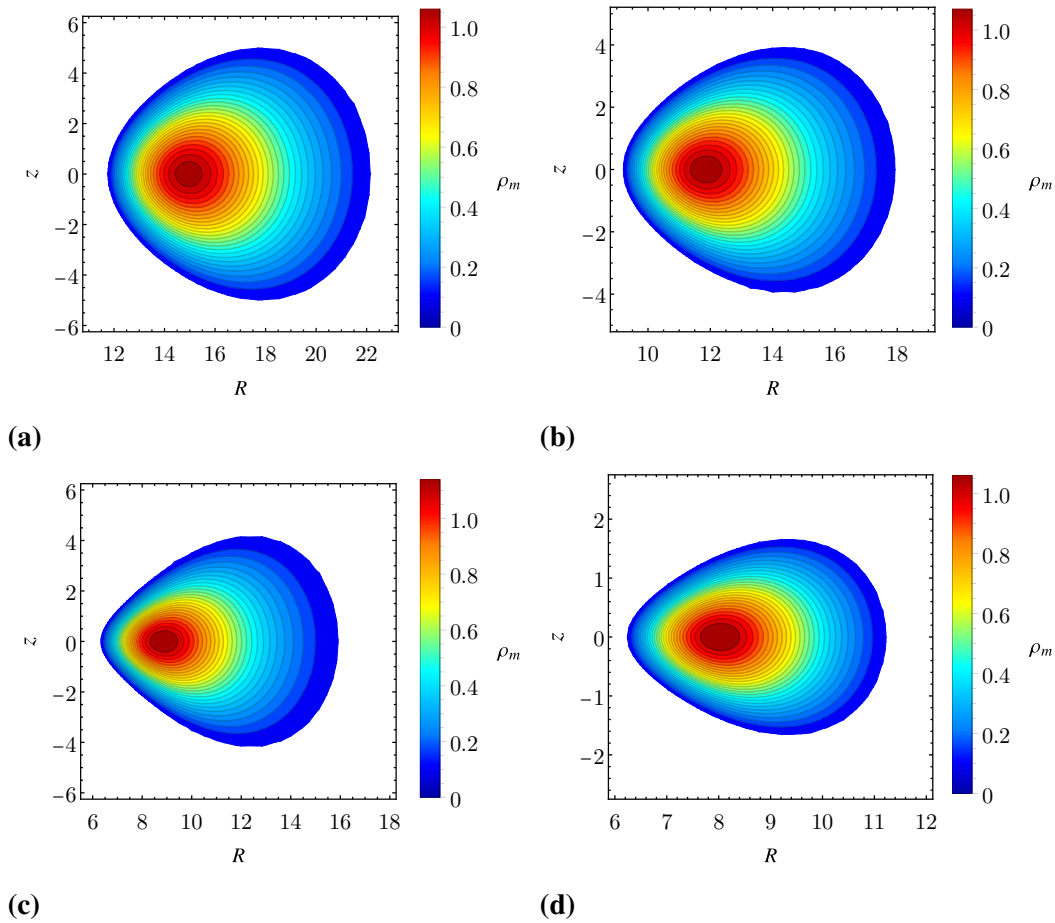


Figura 14

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 0.1$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

En general, los discos son más extensos y se encuentran más alejados del objeto compacto; lo cual, puede estar relacionado con la escogencia del momento angular l_0 el cuál, como se con-

signó en la tabla 2, tiene el mayor valor para $q = -0.3$ y va disminuyendo conforme aumenta q . Ahora, al comparar con $q = 0$, a pesar de que los discos producto de una configuración oblata son más extensos que sus pares en el caso anterior, por ejemplo el disco 12a no logra superar ampliamente al disco del caso de control $q = 0$; mientras que para $q = -0.15$ se tiene de 12b un disco de menor extensión. También, cabe resaltar que para este caso, los discos con $q < 0$ presentan una forma más ovalada, a comparación de la forma de semilla encontrada en 4.

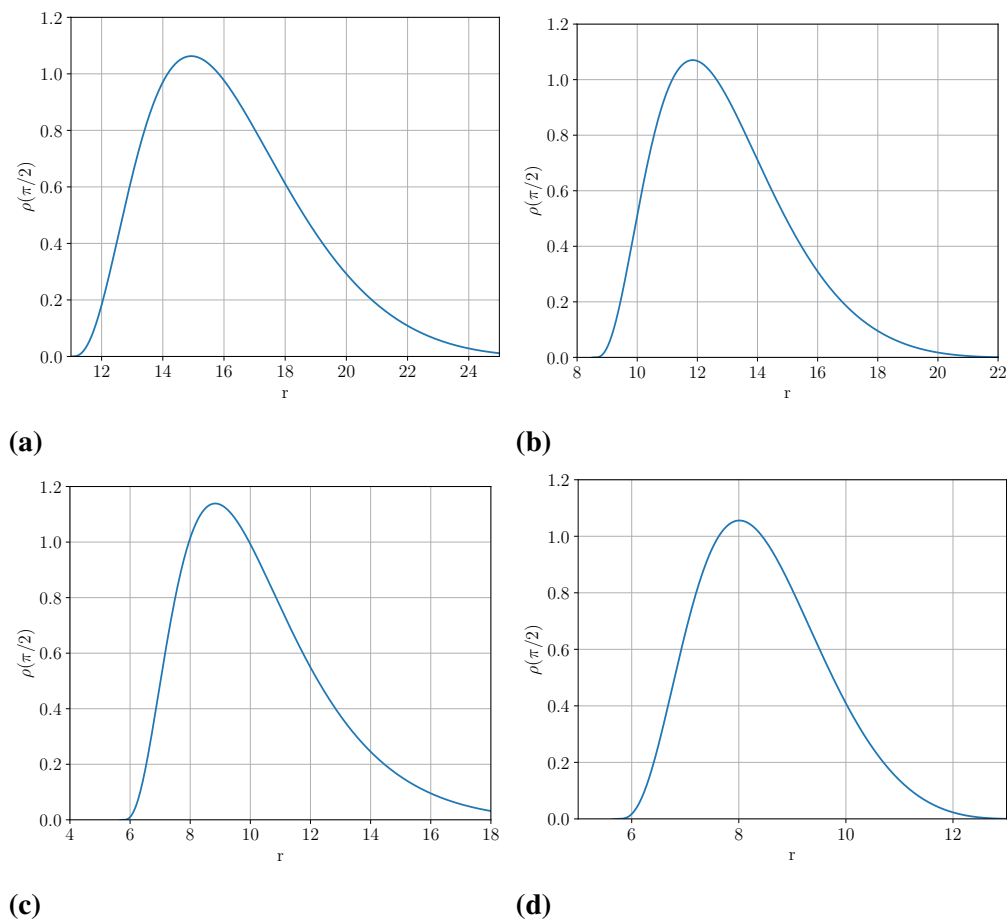


Figura 15

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.1$ ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

Por otra parte, en la figura 13 se presentan los perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 1$ y los diferentes valores de q . En primera instancia, se ve que la densidad de masa ρ_m mantiene el mismo comportamiento con un incremento de esta seguido de un máximo y posterior caída de forma más leve. Luego, al analizar con detalle estas gráficas, se evidencia un fenómeno interesante y es que la densidad máxima tiene un valor más alto para $q = 0$; a diferencia de la sección anterior donde no era tan clara una tendencia. Además, al comparar 13a y 13b con los respectivos 5a y 5b, se observa que para el caso fijo, a pesar de tener discos con mayor extensión, esto no se ve traducido en un aumento en el máximo valor de densidad de masa, sino que por el contrario, se presenta una disminución en este valor. Por añadidura, revisando 13d se encuentra que a pesar de generarse un disco bastante compacto como se vio en 17d, el máximo de densidad es del mismo orden que el de otros valores de q , los cuales presentan discos con mucha mayor extensión; por lo cual es pertinente pensar que esta propiedad está relacionada principalmente con la masa del objeto compacto.

Por otro lado, en las figuras 14 y 16, se exponen las gráficas de densidad de masa 2D para $\beta = 0.1$ y $\beta = 0.01$ respectivamente; mientras que 15 y 17 se presentan los perfiles de densidad para estos mismos casos. Al comparar estas últimas para los diferentes valores de β_c se hace evidente de nuevo el efecto de variar el parámetro q mencionado en la sección anterior, donde una disminución en β_c conllevaba un aumento en el valor máximo de la densidad; sin embargo, para la familia de discos con mas ADM fija, este fenómeno es más leve. Asimismo, se observa el corrimiento de dicho máximo hacia la cúspide del disco.

Encima, al observar las gráficas de los discos al variar β_c , se puede ver que se mantiene

la tendencia de acercamiento al objeto compacto a medida que se aumenta el valor de q ; mientras que al analizar configuraciones como 17a y 12a donde se tiene un mismo valor de q y se cambia β_c , la extensión de los toros es muy similar. Con base en esto se corrobora que el parámetro de magnetización tiene un efecto principalmente en la forma en que se distribuye la materia en el disco y no como tal en la estructura geométrica del mismo (Faraji and Trova, 2021).

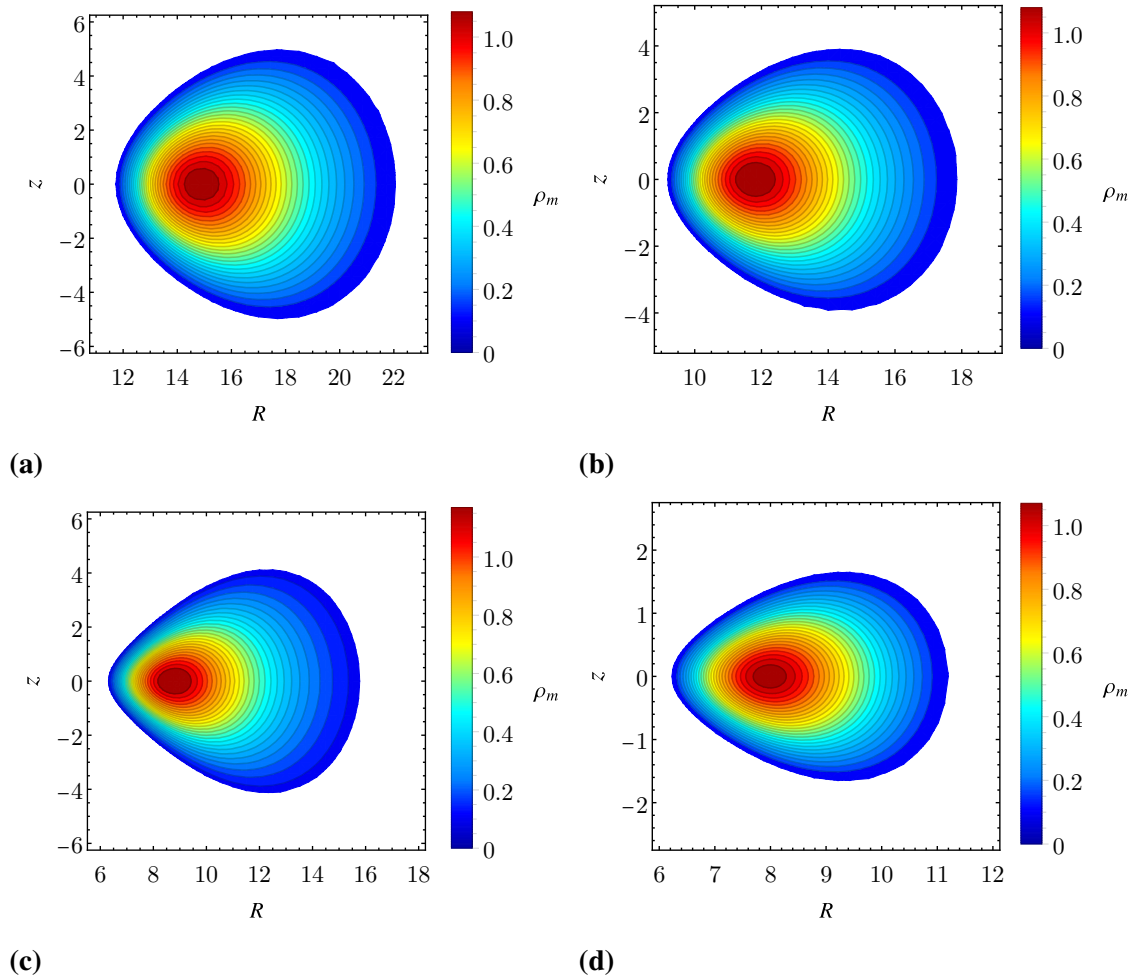
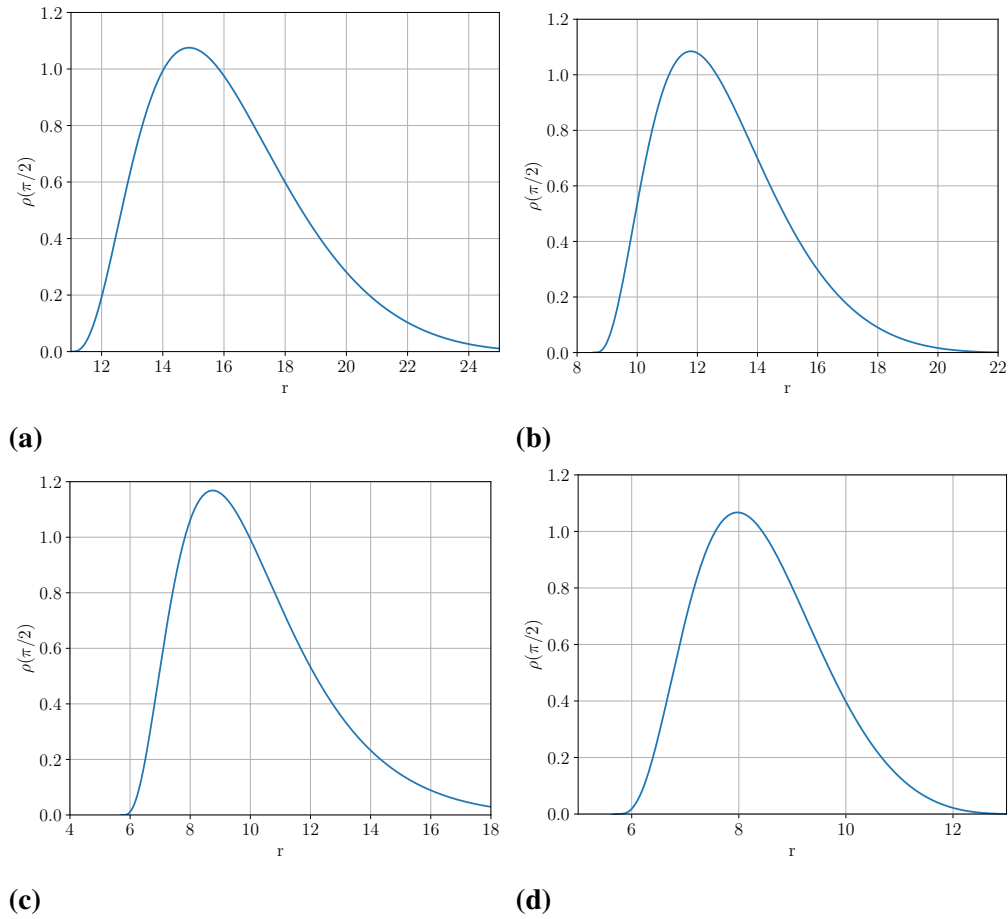


Figura 16

Mapa de color de los isocontornos de densidad de masa ρ_m en el plano para el caso de masa ADM fija y $\beta = 0.01$ (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

**Figura 17**

Perfiles de densidad de masa en el ecuador para $\beta = 0.01$ ADM fija (a) $q = -0.3$ (b) $q = -0.15$ (c) $q = 0$ (d) $q = 0.1$

5. Resultados II: espectros de emisión

Una vez construida la serie de configuraciones de equilibrio que describen toros magnetizados en el espacio-tiempo de la q -metric, se decidió evaluar el posible impacto de los sistemas aquí descritos en las observaciones. Por lo tanto, se decide estudiar los fotones que logran escapar a la atracción gravitacional del objeto compacto, en este caso, una singularidad desnuda; de forma que se pueda obtener una imagen del disco de acreción que le rodea y los espectros de emisión que este genera; los cuales pueden ser detectados por instrumentos en la Tierra. En esta sección se presentan las primeras simulaciones del mapa de intensidades y perfiles de emisión para toros magnetizados (Formulación de Komissarov) en el espacio tiempo de la q -metric

Para esto, se hace uso de simulaciones numéricas que permiten describir de manera precisa las trayectorias que siguen los fotones desde el disco de acreción hasta un observador lejano; en este caso, la herramienta utilizada es un método de trazado de rayos inverso. Este método consiste en tomar al observador como el origen de las geodésicas nulas y hacer una evolución inversa de estas, de forma que se reconstruya la fuente lumínica que los emitió originalmente. Los resultados aquí presentados se obtuvieron por medio del código OSIRIS (Velásquez-Cadavid et al., 2022), el cual se basa en el formalismo Hamiltoniano y usa un método de trazado de rayos inverso para espacio-tiempos estacionarios y axialmente simétricos, como es el caso de la q -metric.

Por otra parte, es importante exponer brevemente el modelo utilizado para describir la transferencia radiativa, para esto se siguió el procedimiento presentado por (Velásquez-Cadavid et al., 2023), esta se describe por medio de la formulación covariante (Rybicki and Lightman, 1991)

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{I_\nu}{\nu^3} \right) = \left(\frac{j_\nu}{\nu^2} \right) - (\nu \alpha_\nu) \left(\frac{I_\nu}{\nu^3} \right), \quad (46)$$

donde I_ν , j_ν y α_ν representan la intensidad específica, el coeficiente de emisión y el coeficiente de absorción, respectivamente, los cuales se miden en el marco comovil. Asimismo, ν es la frecuencia, λ es un parámetro afín y las cantidades entre paréntesis son invariantes de Lorentz.

Es conveniente, introducir la definición de la profundidad óptica τ_ν . Esta permite clasificar los toros en dos categorías: ópticamente gruesos cuando $\tau_\nu = 0$ y ópticamente delgados si $\tau_\nu > 0$

$$\tau_\nu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \nu \alpha_\nu d\lambda'. \quad (47)$$

Al introducir esta definición y definir la función fuente como $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$, la cual no depende de τ_ν ; se puede reescribir la ecuación (46) como

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (48)$$

En este caso, se decidió usar radiación de sincrotrón no térmica, la cual se puede describir como una ley de potencias con los coeficientes constantes

$$j_\nu \propto B^{(\gamma+1)/2} \nu^{(1-\gamma)/2}, \quad \alpha_\nu \propto B^{(\gamma+2)/2} \nu^{-(\gamma+4)/2}, \quad (49)$$

donde $\gamma = 2s + 1$ y $s = 0.75$ es el índice espectral, cuyo valor está motivado por las observaciones de las fuentes de radio tipo S (Pacholczyk and Roberts, 1971). Finalmente, por medio de

invariantes de Lorentz, se puede calcular la intensidad específica medida por un observador lejano

$$I_{v_{\text{obs}}} = \left(\frac{v_{\text{obs}}}{v_{\text{em}}} \right)^3 I_{v_{\text{em}}} = g^3 I_{v_{\text{em}}}, \quad (50)$$

y donde g se conoce como el factor de corrimiento al rojo

$$g = \frac{v_{\text{obs}}}{v_{\text{em}}} = \frac{-p_{\mu} v^{\mu} |_{\lambda_{\text{obs}}}}{-p_{\mu} u^{\mu} |_{\lambda}}. \quad (51)$$

En esta última, v^{μ} es la 4-velocidad del observador lejano, mientras que p_{μ} es el 4-momento de lo fotones. Ahora, cabe resaltar que el proceso de integración de geodésicas nulas se realiza para dos ángulos diferentes, medidos desde el polo, $\theta = 85^{\circ}$ y $\theta = 30^{\circ}$. Este último, escogido con base en las observaciones hechas por el EHT del objeto compacto Sgr A* (Akiyama et al., 2022). Además, se asume que el observador lejano, también denominado Minkowskiano, se encuentra en las coordenadas $\{t_0 = 0, r_0 = 1000, \theta_0 = \theta, \phi_0 = 0\}$. Asimismo, se define la superficie del toro como la región 2D donde la densidad de masa $\rho_m = 0.1$.

Por otra parte, es importante recordar que el proceso de integración de la ecuación de transferencia radiativa depende de las propiedades ópticas del disco. En el caso de discos gruesos, los fotones de interés salen únicamente desde la superficie del toro; mientras que para los discos delgados existe una longitud de camino óptico recorrida por el fotón antes de abandonar el toro. También, se tiene que tanto los coeficientes de emisión y absorción, como el índice espectral $s = 0.75$ se escogen como constantes en el modelo de ley de potencia, lo cual tiene como base las observaciones de las fuentes de radio tipo S (Pacholczyk, 1970). Esta elección de s resulta en un valor de

$\gamma = 2.5$ en (49). Por último, se define la pantalla de observación con un rango de $-20 < x, y < 20$ y una resolución de 1024×1024 pixeles para las simulaciones del mapa de intensidad del disco.

Antes de continuar con los resultados, es importante recordar que hasta ahora, se estudiaron dos posibles familias de discos gruesos, dependiendo la variación o ausencia de esta en la masa ADM del objeto compacto al cambiar el parámetro q . Sin embargo, a la hora de realizar un estudio que tiene como objetivo una futura comparación con las observaciones, es de mayor utilidad tener un espacio-tiempo con la misma masa y donde las únicas variaciones sean sobre el parámetro de deformación; es por esto que de aquí en adelante se presentan resultados únicamente para discos del caso masa ADM fija, por lo tanto los parámetros para las diversas simulaciones son los consignados en la tabla 2.

5.1 Perfiles de emisión

Los perfiles de emisión se obtuvieron al calcular el flujo proveniente de los toros, ya sean ópticamente gruesos o delgados. Para esto se hizo uso de la expresión para el flujo

$$F_v = \int I_v d\Omega, \quad (52)$$

la cual es válida para ambos casos y donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. Teniendo en cuenta que OSIRIS hace uso de un modelo tipo plano-imagen, esta cantidad se puede reescribir como $d\Omega = dx dy / r_0^2$ y queda completamente especificada al definir la resolución de la simulación. Asimismo, para el cálculo computacional del flujo observado, se definió una malla de frecuencias, la cual va de $\nu_i = 0.5$ hasta $\nu_f = 2.0$ con una resolución $d\nu = 0.0375$. De esta forma, el cálculo

del flujo se reduce a una suma de las contribuciones individuales de cada una de las frecuencias a la intensidad. El criterio definido para determinar la frecuencia con la que es emitido un fotón en cada punto del espacio está dado por

$$|v_{\text{malla}} - v_{\text{emitida}}| < \delta_v, \quad (53)$$

donde $\delta_v = 0.2$ es el valor de la tolerancia definida para este problema. En las figuras 18 y 19 están plasmados los flujos emitidos por discos ópticamente gruesos y delgados, respectivamente, en los casos $q = \{-0.3, -0.15, 0, 0.1\}$ para valores de $\beta_c = \{1, 0.1, 0.01\}$ y ángulos de observación $\theta = \{85^\circ, 30^\circ\}$, como función del parámetro de corrimiento al rojo g .

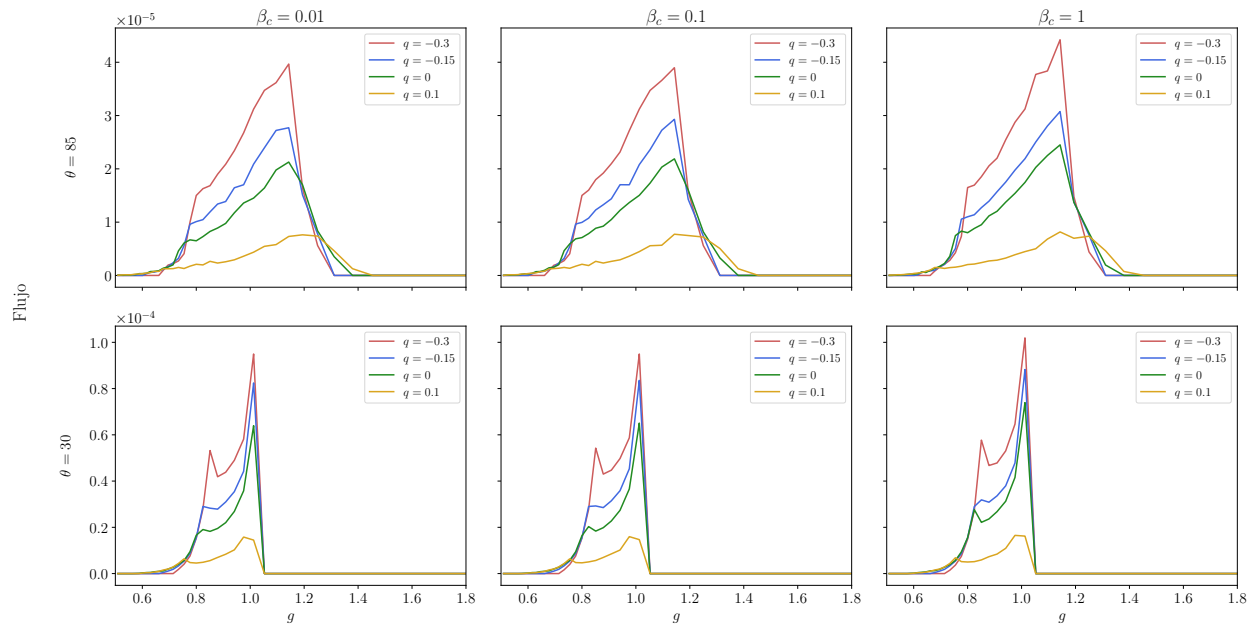


Figura 18

Espectros de discos ópticamente gruesos para valores de $q = -0.3, -0.15, 0, 0.1$ y con parámetro de magnetización $\beta_c = 1, 0.1, 0.01$. Las filas corresponden a los valores del ángulo de observación $\theta = 85^\circ$ (Superior) y $\theta = 30^\circ$ (Inferior)

A partir de estas gráficas, se puede observar que los máximos valores del flujo se dan para el caso $q = -0.3$, el cual es el disco con la mayor extensión (Ver sección 4.2). Luego, le sigue en magnitud el valor $q = -0.15$; el cual, a pesar de tener una extensión un ligeramente menor que la correspondiente a un toro formado en el espacio-tiempo de Schwarzschild, alcanza una mayor magnitud en el flujo.

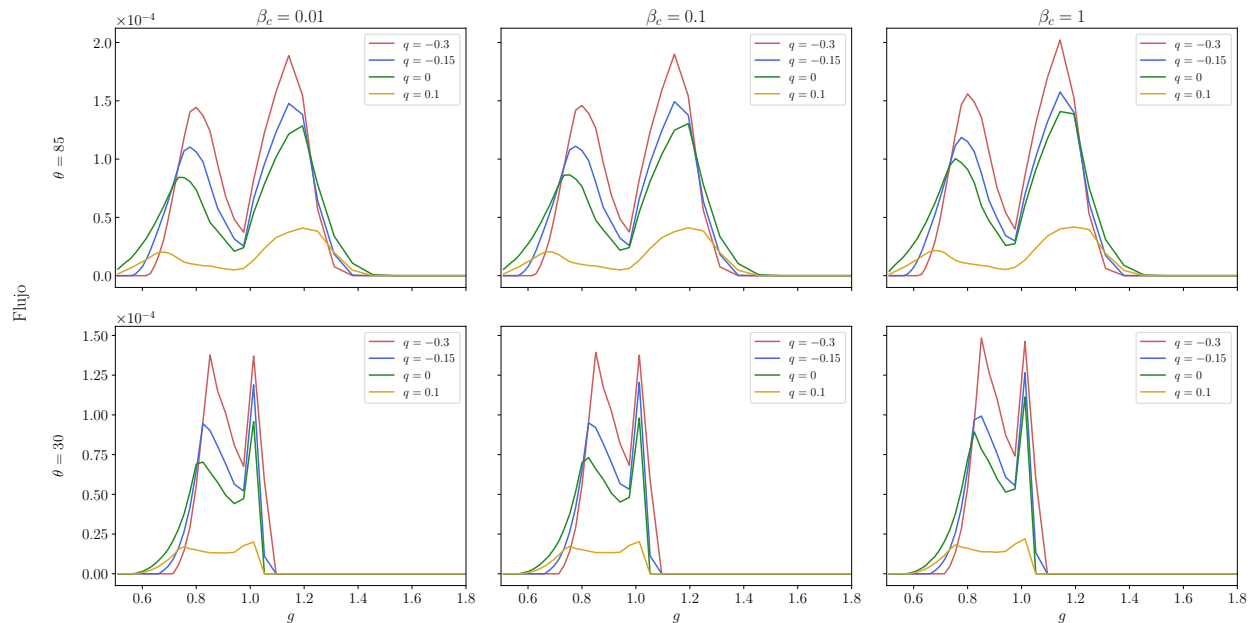


Figura 19

Espectros de discos ópticamente delgados para valores de $q = -0.3, -0.15, 0, 0.1$ y con parámetro de magnetización $\beta_c = 1, 0.1, 0.01$. Las filas corresponden a los valores del ángulo de observación $\theta = 85^\circ$ (Superior) y $\theta = 30^\circ$ (Inferior)

Estos resultados sugieren entonces una correlación entre el valor del parámetro q y el flujo observado. Por otra parte se tiene el espectro generado por un disco con $q = 0.1$, cuya magnitud es notablemente más pequeña que la de sus predecesores; esto se debe a la extensión reducida que tiene este toro con respecto a sus pares, como quedó consignado en la figura 12d. Este comporta-

miento de los perfiles de emisión en términos del parámetro q es común a todos los valores de β_c usados y asimismo, a los ángulos de observación θ propuestos.

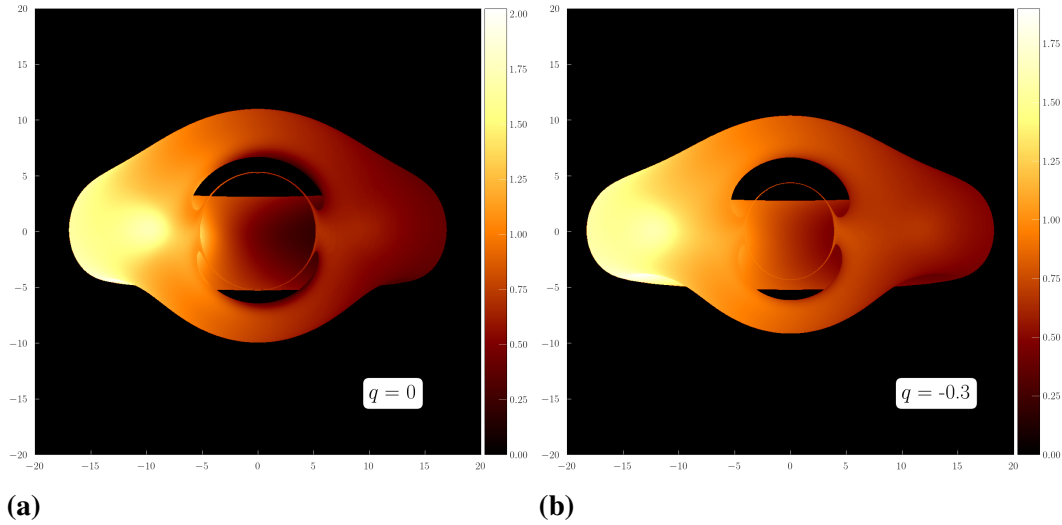


Figura 20

Toros magnetizados ópticamente delgados alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 85^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$

Por otra parte, al revisar el impacto de la magnetización, se encuentra que para todos los casos, el máximo de intensidad en ambos picos crece conforme lo hace el parámetro de magnetización; siendo más evidente este efecto al pasar de discos magnéticamente dominados ($\beta_c = 0.1$) a discos donde la presión magnética e hidrodinámica son del mismo orden ($\beta_c = 1$). Este comportamiento puede ser explicado por medio del modelo escogido para la radiación de sincrotrón. En los coeficientes de la ecuación (49) se observa que la magnitud del campo magnético depende, en su exponente, del índice espectral s . No obstante, al revisar la función fuente S , definida como la razón entre los coeficientes de emisión y absorción, no depende de este índice. En cambio, resulta que para esta, el campo magnético siempre decrece de forma $B^{-1/2}$. Por lo tanto, a medida que aumenta

el campo magnético, la contribución de la función fuente a la intensidad se hace más pequeña, como se evidencia en (48). Con base en esto y en que al disminuir el valor de β_c se incrementa el valor de la presión magnética, y por consiguiente del campo magnético; es coherente que el flujo decrezca cuando lo hace β_c .

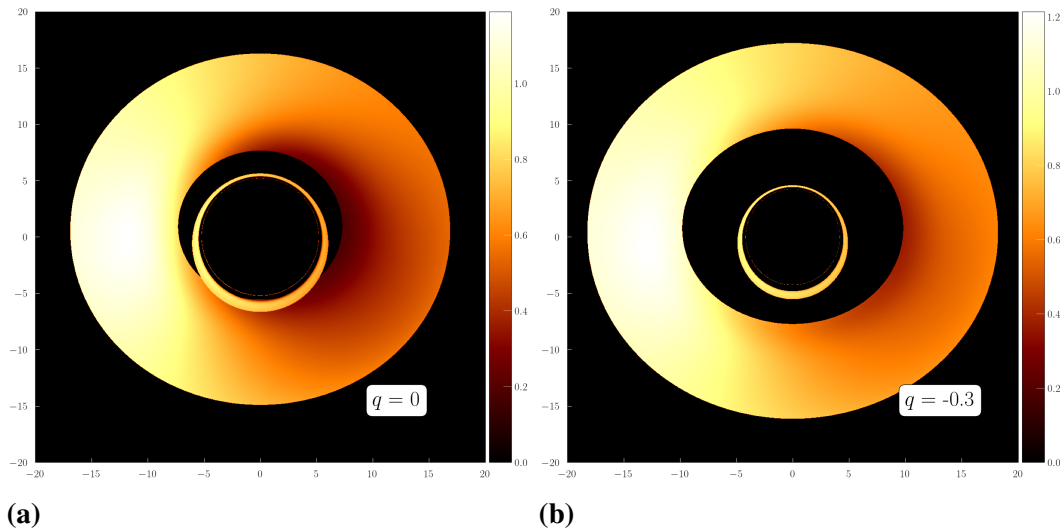


Figura 21

Toros magnetizados ópticamente delgados alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 30^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$

Ahora, en lo que respecta a los discos gruesos, en 18 se puede apreciar que para el caso $q = 0$, la forma del perfil coincide para las halladas por Pariev and Bromley (1998); Wu and Wang (2007) para discos gruesos, con un ligero pico a la izquierda para $\theta = 85^\circ$, el cual se hace más notable al disminuir el ángulo de observación. Del mismo modo, en esta gráfica se evidencia que el flujo alcanza valores mayores cuando $\theta = 30$; esto se debe a que cerca del plano ecuatorial ($\theta = 85$), la región observable del disco es más pequeña. Este fenómeno se denomina autoeclipsado y se evidencia en la figura (Disco grueso 85). Siguiendo la línea de los discos ópticamente gruesos,

se tiene que su perfil de emisión está caracterizado por dos picos, el primero de estos corresponde a la emisión con corrimiento al rojo, la cual proviene de la parte del disco que se aleja del observador; mientras que a la derecha se encuentra otro pico, más marcado, el cual corresponde a la emisión con corrimiento al azul que se origina en el material que se acerca al observador (Fabian et al., 1989). Además, al comparar las 2 filas de 18, se encuentra que para $\theta = 85$ el pico correspondiente al corrimiento al rojo es casi imperceptible, por lo cual el perfil parece tener un solo pico. Este comportamiento está justificado por el autoeclipsado mencionado previamente.

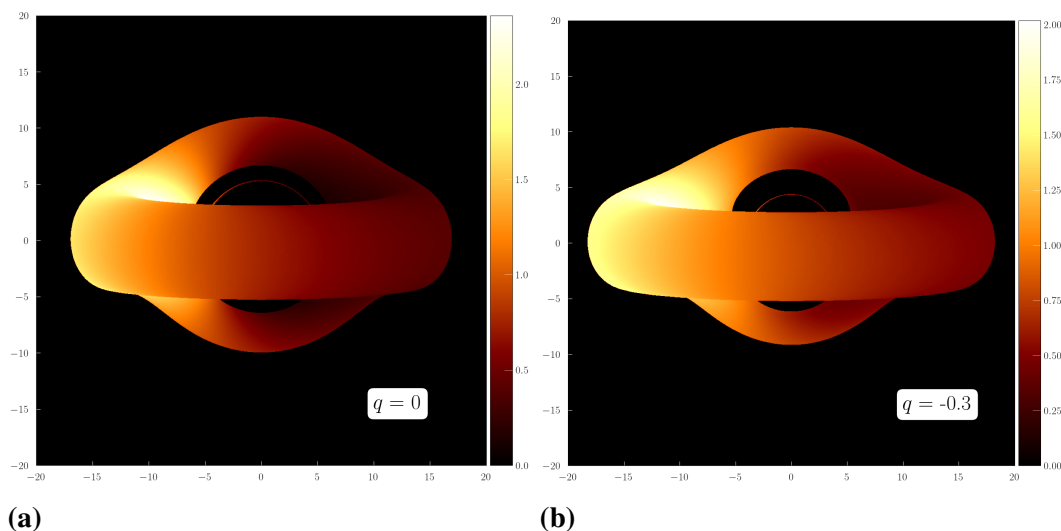


Figura 22

Toros magnetizados ópticamente gruesos alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 85^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$

Por otro lado, al revisar el comportamiento de los discos ópticamente delgados en la figura 19 se encuentra que el perfil está caracterizado por dos picos correspondientes a la emisión con corrimiento al rojo y al azul respectivamente, como se encontró para los discos opacos. Sin embargo, en estos el máximo asociado al corrimiento al rojo es mucho más notable. Esto se debe a la

naturaleza de este tipo de discos, no se presenta en la misma medida el fenómeno de autoeclipseado. Esto está en concordancia con la descripción que se hizo previamente de los discos delgados, para los cuales el fotón tiene un camino óptico dentro del disco antes de salir de este, por lo cual se produce una mayor contribución al flujo.

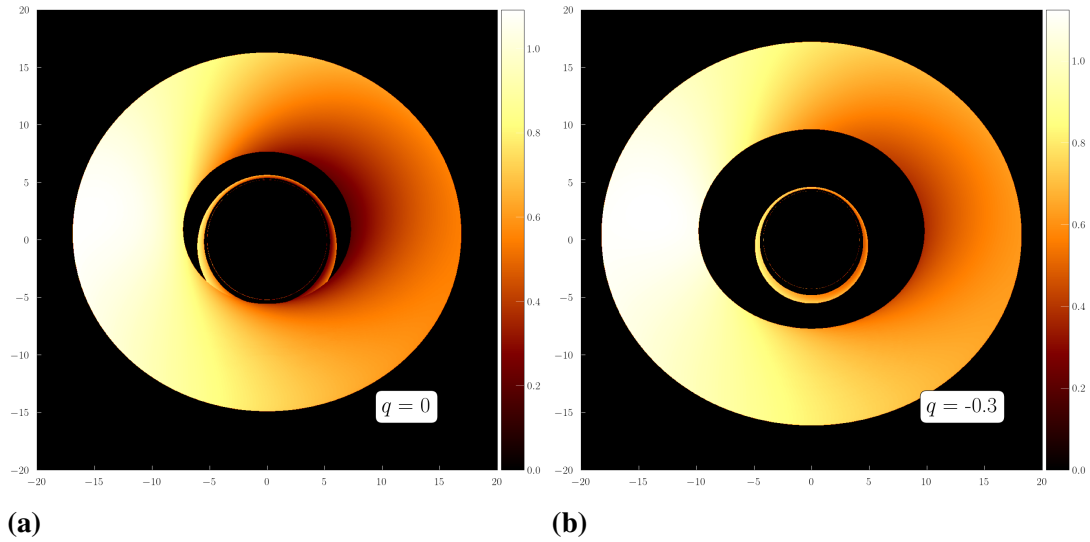


Figura 23

Toros magnetizados ópticamente gruesos alrededor de una singularidad desnuda vistos desde $\theta = 30^\circ$. (a) $q = 0$. (b) $q = -0.3$

Adicionalmente, otra consecuencia de esta naturaleza, es que la magnitud del espectro es similar para los dos ángulos de observación, a diferencia de los discos gruesos donde el autoeclipseado generaba una diferencia considerable entre la magnitud de los perfiles. Además, debido a que se puede observar una mayor parte del toro, el orden de magnitud de la emisión es mayor en los discos delgados, ya sea para $\theta = 30^\circ$ o $\theta = 85^\circ$.

Aparte, al revisar en 19 la observación a 30° , se observa una característica interesante para los toros en este espacio-tiempo; esta es que para $q = -0.3$ se encuentra que el máximo asociado al

corrimiento al rojo supera en magnitud al de corrimiento al azul, lo cual es un fenómeno diferencial a la hora de realizar comparaciones con otros espacio-tiempos como el de Schwarzschild. Por último, cabe resaltar que para todos los casos se encuentra que al cambiar el ángulo de observación de 85° a 30° , se produce un corrimiento al azul en la ubicación de los picos, lo cual se había reportado previamente en la literatura (Jovanović, 2012).

5.2 Mapa de intensidad

En último lugar, se presentan los resultados para el mapa de intensidad de toros magnetizados bajo un modelo de radiación de sincrotrón en el espacio-tiempo de la q -metric para un parámetro de magnetización representativo de $\beta_c = 0.1$. En las figuras 20 y 21 se presentan las configuraciones de discos ópticamente delgados para ángulos de observación de 85° y 30° , respectivamente; mientras que en 22 se muestran los toros ópticamente gruesos para un ángulo de 85° . En cada uno de estos paneles, se presentan los mapas de intensidad correspondientes a $q = -0.3$ y $q = 0$. Se escogieron estos valores representativos ya que el primero evidencia claramente el impacto del espacio tiempo de la q -metric; mientras que el otro sirve como parámetro de control al describir el caso de Schwarzschild. En este mismo orden, se tiene que en la figura 20a se observa el anillo de fotones totalmente circular, característico de un agujero negro estático (Luminet, 1979).

En la figura 20b se puede observar que el anillo de fotones tiene una forma más ovalada respecto a la encontrada en 20a, como se encontró para el caso de discos delgados en (Shaikh and Joshi, 2019). Esto se debe a la desviación respecto a la simetría esférica del objeto compacto para el caso $q = -0.3$. Además, se puede evidenciar que el disco alrededor de un objeto prolato posee una mayor extensión y se encuentra más alejado del objeto compacto, como se consigné en

la sección 4.1. Además de esto, en la imagen 20b se encuentran las características típicas de la sombra de un objeto compacto como lo son el corrimiento al rojo gravitacional, evidenciado por la zona brillante a la izquierda del disco, y el efecto de lente gravitacional que permite observar la parte trasera del toro.

Asimismo, al analizar la figura 21 se puede observar como la parte visible del disco aumenta, lo cual es coherente con el aumento en el flujo encontrado en la sección anterior al variar el ángulo de observación. Además, al revisar la escala de intensidad, se ve como para el caso de $q = -0.3$ la magnitud de esta variable es significativamente mayor.

Por último, los discos ópticamente gruesos se presentan en las figuras 22 y 23 para ángulos de observación de $\theta = 85^\circ$ y $\theta = 30^\circ$, respectivamente. En general, para este tipo de discos se aprecian los mismo efectos de extensión y separación del disco que los reportados para los discos delgados. Sin embargo, debido a su naturaleza, lo que se observa es la superficie del toro; por lo cual en la figura 22 no es posible ver la totalidad de la sombra del objeto compacto. Además, de hacerse evidente el fenómeno del autoeclipsado por el cual unas partes de la superficie observada cubren otras regiones del toro.

Asimismo, al revisar la figura 23 se encuentra una morfología prácticamente idéntica a la de los discos delgados. No obstante, se aprecia una diferencia en la intensidad máxima alcanzada por estos toros; siendo menor para el caso ópticamente grueso, lo cual es coherente con la explicación de este modelo expuesta previamente.

6. Conclusiones

En el presente trabajo, se construyeron de forma sistemática una serie de configuraciones en equilibrio de toros magnetizados alrededor de una singularidad desnuda descrita por la q -metric y se simularon computacionalmente los mapas de intensidad y espectro de emisión para discos ópticamente gruesos y delgados. Por medio de esto, se pudo evaluar el impacto del parámetro q sobre la caracterización de discos geoméricamente gruesos con campo magnético toroidal; además de encontrar diferencias en las cantidades observables como la intensidad o los perfiles de emisión, de forma que se pueda cotejar el modelo con las observaciones.

En la primera parte del trabajo, se encontró que es importante definir dos categorías para los discos formados en este espacio-tiempo, una con valor de la masa ADM variable y otro con esta fija; de forma que se tenga un modelo más adecuado a la hora de realizar el modelado de un objeto compacto real. Para la primera clase, se vio que tanto la forma de los discos, como la compacidad de estos mismos se vio afectada al variar el valor del parámetro q respecto al valor de control, $q = 0$, que reproduce el espacio-tiempo de Schwarzschild. De forma que al alejarse de este valor referencia aumenta la compacidad del objeto compacto. Además, se observó que para esta familia la distancia del toro al objeto compacto aumenta a medida que lo hace el valor de q ; sin embargo, este efecto se asocia principalmente al aumento del momento angular del fluido l_0 al incrementar el valor de q . También, en lo que refiere al impacto del parámetro de magnetización β_c se encuentra que para discos dominados por la presión magnética se evidencia un aumento de densidad en la zona central del disco. Adicionalmente, se encontró que el valor máximo de

la densidad de masa aumenta en medida que el parámetro de magnetización disminuye; efecto que se hace notable principalmente en el paso del equilibrio entre las presiones hidrodinámica y magnética, a una dominancia por parte de la última. Aparte, de que al disminuir el valor de β_c el máximo de densidad se corre hacia la cúspide, lo cual indica una mayor concentración de masa en el centro del disco.

Por otra parte, para los toros con masa ADM fija, se evidenció un cambio radical en el comportamiento de los momentos angulares de interés al imponer esta restricción. Además, se delimitó un intervalo de valores $\{-0.3 \leq q \leq 0.2\}$ para la construcción de este tipo de discos. Para este caso, se encontró que la configuración con la mayor extensión se da para el valor $q = -0.3$, la cual también está caracterizada por tener el mayor valor del momento angular l_0 . Asimismo, en lo que refiere a las características geométricas de los discos, se vio que para las situaciones donde se tiene un objeto compacto con deformación prolata $q < 0$, los discos toman una forma mas ovalada; mientras que para el caso prolato $q > 0$ su forma se asemeja más a la de una semilla. Por añadidura, al comparar con el caso anterior, se encontró que a pesar de tener una mayor extensión, los valores máximos de densidad de masa eran un poco menores a los encontrados previamente pero similares entre sí, por lo cual se relaciona esta característica principalmente con el valor del monopolo de masa M_0 . Además, al analizar el impacto de la magnetización se encontró un comportamiento similar al expuesto para los discos con masa ADM variable. No obstante, se observó que las variaciones del parámetro β_c tienen una magnitud más leve en este caso. De esta forma, se confirma que la elección del parámetro β_c no afecta las propiedades geométricas del disco sino la distribución de masa a lo largo del mismo.

Ahora, en la segunda parte del trabajo enfocada en el análisis de los fotones que logran escapar de la atracción gravitacional del objeto compacto y permiten a un observador lejano caracterizar el disco de acreción formado en la vecindad de este objeto astrofísico se tiene que los resultados aquí registrados configuran la primera serie de simulaciones del mapa de intensidades y perfiles de emisión para toros magnetizados con la formulación de Komissarov en el espacio tiempo de la q -metric. Para esto se asume un modelo en forma de ley de potencia para la radiación de sincrotrón.

Al analizar los perfiles de emisión, se encuentra que para valores de $q < 0$, la magnitud del flujo aumenta respecto al caso control $q = 0$, resulta común tanto a los discos ópticamente delgados como a los gruesos. Asimismo, se encontró que a medida que el grado de magnetización del toro aumenta, se ve disminuida la amplitud del flujo; comportamiento coherente con el hecho de que la función fuente decrece como $B^{-1/2}$. Por otra parte, para los discos gruesos se evidencia que el flujo alcanza valores mayores para un ángulo de observación de 30° en comparación a un ángulo de 85° . Esto se debe a que para registros más cercanos al ecuador, el fenómeno de autoeclipsado del disco juega un rol importante. En general, los resultados obtenidos para los perfiles de emisión de estos discos concuerdan con los encontrados previamente en la literatura, marcados por un pico de gran magnitud asociado al corrimiento al azul, mientras que se tiene un pico mucho más pequeño relacionado con el corrimiento al rojo.

Por otro lado, para discos delgados, se encuentran valores de flujo más grandes que los del caso anterior, lo cual se asocia al mayor camino óptico recorrido por los fotones en este tipo de disco y a la reducción en la magnitud del fenómeno de autoeclipsado debido a la naturaleza de estas

configuraciones. Encima, un resultado diferencial a la hora de estudiar los discos magnetizados en este espacio-tiempo es el aumento en la magnitud del pico de corrimiento al rojo para el caso $q = -0.3$, incluso superando la altura del pico asociado al corrimiento al azul.

Finalmente, en lo que corresponde a los mapas de intensidad se evidencia un cambio en la forma del anillo de fotones, siendo ahora más ovalado, lo cual se asocia al carácter prolato del objeto compacto en el centro de la configuración. También, se observa una mayor distancia entre el borde del disco y el anillo de fotones que delimita la sombra del objeto y un aumento en la intensidad respecto a la referencia de $q = 0$. Además se pueden observar los efectos esperados de este tipo de sistemas astrofísicos como el corrimiento al rojo y la lente gravitacional. También, cabe resaltar que al variar el ángulo de observación o el carácter óptico de los discos, se pueden ver los cambios en la sección visible del disco y el efecto de autoeclipsado, respectivamente.

De esta forma queda claro, que el parámetro q juega un rol importante en la descripción de discos de acreción geoméricamente gruesos con campo magnético toroidal en el espacio-tiempo de la q -metric; con una serie de propiedades características que podrían ser de utilidad para una futura comparación entre las observaciones correspondientes a un posible agujero negro o a un imitador de este descrito por esta métrica. Además, se presentan las primeras imágenes y espectros de discos magnetizados geoméricamente gruesos en este espacio-tiempo. Consecuentemente, se está escribiendo un artículo de investigación con los resultados del presente trabajo, el cual será sometido a la revista científica *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. El siguiente paso a seguir en este estudio, es tomar la solución de discos gruesos alrededor de la q -metric como punto de partida para simulaciones dinámicas del flujo de acreción; de forma que se pueda valorar

de forma más precisa la viabilidad de una singularidad desnuda como imitador de un agujero negro. Mientras que, por otra parte, se está escribiendo un artículo con el fin de describir la órbita de la estrella S2 bajo la atracción gravitacional de una singularidad desnuda en el espacio-tiempo de la q -metric como alternativa para caracterizar el objeto compacto Sgr A*.

Referencias Bibliográficas

- Abdikamalov, A. B., Abdujabbarov, A. A., Ayzenberg, D., Malafarina, D., Bambi, C., and Ahmedov, B. (2019). Black hole mimicker hiding in the shadow: Optical properties of the γ metric. *Physical Review D*, 100(2):024014.
- Abramowicz, M., Jaroszynski, M., and Sikora, M. (1978). Relativistic, accreting disks. *Astronomy and Astrophysics*, 63:221–224.
- Abramowicz, M. A., Calvani, M., and Nobili, L. (1983). Runaway instability in accretion disks orbiting black holes. *Nature*, 302(5909):597–599.
- Abramowicz, M. A. and Fragile, P. C. (2013). Foundations of black hole accretion disk theory. *Living Reviews in Relativity*, 16(1):1–88.
- Abuter, R., Amorim, A., Anugu, N., Bauböck, M., Benisty, M., Berger, J., Blind, N., Bonnet, H., Brandner, W., Buron, A., et al. (2018). Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole. *Astronomy & Astrophysics*, 615:L15.
- Abuter, R., Amorim, A., Bauböck, M., Berger, J., Bonnet, H., Brandner, W., Cardoso, V., Clénet, Y., De Zeeuw, P., Dexter, J., et al. (2020). Detection of the schwarzschild precession in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole. *Astronomy & Astrophysics*, 636:L5.
- Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Algaba, J. C., Anantua, R., Asada, K., Azulay, R., Bach, U., Baczko, A.-K., Ball, D., et al. (2022). First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the

shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L12.

Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., Azulay, R., Baczko, A.-K., Ball, D., Baloković, M., Barrett, J., Bintley, D., et al. (2019). First m87 event horizon telescope results. v. physical origin of the asymmetric ring. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L5.

Allahyari, A., Firouzjahi, H., and Mashhoon, B. (2019). Quasinormal modes of a black hole with quadrupole moment. *Physical Review D*, 99(4):044005.

Arrieta-Villamizar, J., Velásquez-Cadavid, J., Pimentel, O., Lora-Clavijo, F., and Gutiérrez-Piñeres, A. (2020). Shadows around the q-metric. *Classical and Quantum Gravity*, 38(1):015008.

Babar, G. Z., Babar, A. Z., and Lim, Y.-K. (2017). Periodic orbits around a spherically symmetric naked singularity. *Physical Review D*, 96(8):084052.

Balbus, S. A. and Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. i-linear analysis. ii-nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal*, 376:214–233.

Balbus, S. A. and Hawley, J. F. (1998). Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of modern physics*, 70(1):1.

Bambhaniya, P., Dey, D., Joshi, A. B., Joshi, P. S., Solanki, D. N., and Mehta, A. (2021a). Shadows and negative precession in non-kerr spacetime. *Physical Review D*, 103(8):084005.

- Bambhaniya, P., Joshi, A. B., Dey, D., and Joshi, P. S. (2019a). Timelike geodesics in naked singularity and black hole spacetimes. *Physical Review D*, 100(12):124020.
- Bambhaniya, P., Joshi, A. B., Dey, D., and Joshi, P. S. (2019b). Timelike geodesics in naked singularity and black hole spacetimes. *Physical Review D*, 100(12):124020.
- Bambhaniya, P., Jusufi, K., Joshi, P. S., et al. (2022). Thin accretion disk in the simpson-visser black-bounce and wormhole spacetimes. *Physical Review D*, 105(2):023021.
- Bambhaniya, P., Solanki, D. N., Dey, D., Joshi, A. B., Joshi, P. S., and Patel, V. (2021b). Precession of timelike bound orbits in kerr spacetime. *The European Physical Journal C*, 81(3):1–11.
- Bao, G., Hadrava, P., and Ostgaard, E. (1994). Emission-line profiles from a relativistic accretion disk and the role of its multiple images. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 435, no. 1, p. 55-65, 435:55–65.
- Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170.
- Becerra-Vergara, E., Argüelles, C. R., Krut, A., Rueda, J. A., and Ruffini, R. (2021). Hinting a dark matter nature of sgr a* via the s-stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 505(1):L64–L68.
- Benavides-Gallego, C. A., Abdujabbarov, A., Malafarina, D., Ahmedov, B., and Bambi, C. (2019). Charged particle motion and electromagnetic field in gamma spacetime. *Physical Review D*, 99(4):044012.

- Blandford, R. and Königl, A. (1979). Relativistic jets as compact radio sources. *The Astrophysical Journal*, 232:34–48.
- Boshkayev, K., Gasperin, E., Gutierrez-Pineros, A., Quevedo, H., and Toktarbay, S. (2016). Motion of test particles in the field of a naked singularity. *Physical Review D*, 93(2):024024.
- Boshkayev, K., Idrissov, A., Luongo, O., and Malafarina, D. (2020a). Accretion disc luminosity for black holes surrounded by dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 496(2):1115–1123.
- Boshkayev, K., Konysbayev, T., Kurmanov, E., Luongo, O., Malafarina, D., and Quevedo, H. (2021). Luminosity of accretion disks in compact objects with a quadrupole. *Physical Review D*, 104(8):084009.
- Boshkayev, K., Luongo, O., and Muccino, M. (2020b). Neutrino oscillation in the q-metric. *The European Physical Journal C*, 80(10):1–12.
- Bugli, M., Guilet, J., Müller, E., Del Zanna, L., Bucciantini, N., and Montero, P. J. (2018). Papaloizou–pringle instability suppression by the magnetorotational instability in relativistic accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(1):108–120.
- Calvani, M. and Nobili, L. (1979). Dressing up a kerr naked singularity. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 51(2):247–261.
- Chowdhury, A. N., Patil, M., Malafarina, D., and Joshi, P. S. (2012). Circular geodesics and

- accretion disks in the janis-newman-winicour and gamma metric spacetimes. *Physical Review D*, 85(10):104031.
- Christodoulou, D. (1984). Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud. *Communications in Mathematical Physics*, 93(2):171–195.
- Collaboration, E. H. T., Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., AZULY, R., et al. (2019). First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *Astrophys. J. Lett*, 875(1):L1.
- Cruz-Osorio, A., Gimeno-Soler, S., Font, J. A., De Laurentis, M., and Mendoza, S. (2021). Magnetized discs and photon rings around yukawa-like black holes. *Physical Review D*, 103(12):124009.
- De Felice, F. (1978). Classical instability of a naked singularity. *Nature*, 273(5662):429–431.
- Dexter, J. and Agol, E. (2009). A fast new public code for computing photon orbits in a kerr spacetime. *The Astrophysical Journal*, 696(2):1616.
- Dey, D., Joshi, P. S., Joshi, A., and Bambhaniya, P. (2019). Towards an observational test of black hole versus naked singularity at the galactic center. *International Journal of Modern Physics D*, 28(14):1930024.
- Fabian, A., Rees, M., Stella, L., and White, N. E. (1989). X-ray fluorescence from the inner disc in cygnus x-1. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 238(3):729–736.

- Falcke, H., Melia, F., and Agol, E. (1999). Viewing the shadow of the black hole at the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 528(1):L13.
- Faraji, S. and Trova, A. (2021). Magnetised tori in the background of a deformed compact object. *Astronomy & Astrophysics*, 654:A100.
- Faraji, S., Trova, A., and Quevedo, H. (2022). Relativistic equilibrium fluid configurations around rotating deformed compact objects. *arXiv preprint arXiv:2205.03842*.
- Fishbone, L. G. and Moncrief, V. (1976). Relativistic fluid disks in orbit around kerr black holes. *The Astrophysical Journal*, 207:962–976.
- Fragile, P. C. and Skadowski, A. (2017). On the decay of strong magnetization in global disc simulations with toroidal fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(2):1838–1843.
- Gao, P., Jafferis, D. L., and Wall, A. C. (2017). Traversable wormholes via a double trace deformation. *Journal of High Energy Physics*, 2017(12):1–25.
- Geroch, R. (1970a). Multipole moments. i. flat space. *Journal of Mathematical Physics*, 11(6):1955–1961.
- Geroch, R. (1970b). Multipole moments. ii. curved space. *Journal of Mathematical Physics*, 11(8):2580–2588.

- Gimeno-Soler, S. and Font, J. A. (2017). Magnetised polish doughnuts revisited. *Astronomy & Astrophysics*, 607:A68.
- Gyulchev, G., Kunz, J., Nedkova, P., Vetsov, T., and Yazadjiev, S. (2020). Observational signatures of strongly naked singularities: image of the thin accretion disk. *The European Physical Journal C*, 80(11):1–20.
- Gyulchev, G., Nedkova, P., Vetsov, T., and Yazadjiev, S. (2019). Image of the janis-newman-winicour naked singularity with a thin accretion disk. *Physical Review D*, 100(2):024055.
- Gyulchev, G., Nedkova, P., Vetsov, T., and Yazadjiev, S. (2021). Image of the thin accretion disk around compact objects in the einstein–gauss–bonnet gravity. *The European Physical Journal C*, 81(10):1–10.
- Harko, T., Kovács, Z., and Lobo, F. S. (2009). Can accretion disk properties distinguish gravastars from black holes? *Classical and Quantum Gravity*, 26(21):215006.
- Hayward, S. A. (2006). Formation and evaporation of nonsingular black holes. *Physical review letters*, 96(3):031103.
- Herrera, L., Magli, G., and Malafarina, D. (2005). Non-spherical sources of static gravitational fields: Investigating the boundaries of the no-hair theorem. *General Relativity and Gravitation*, 37(8):1371–1383.
- Herrera, L. and Pastora, J. H. (2000). Measuring multipole moments of weyl metrics by means of gyroscopes. *Journal of Mathematical Physics*, 41(11):7544–7555.

- Ho, L. C., Filippenko, A. V., and Sargent, W. L. (1997). A search for “redwarf” Seyfert nuclei. v. demographics of nuclear activity in nearby galaxies. *The Astrophysical Journal*, 487(2):568.
- Jaroszynski, M., Abramowicz, M., and Paczynski, B. (1980). Supercritical accretion disks around black holes. *Acta Astronomica*, 30:1–34.
- Joshi, A. B., Dey, D., Joshi, P. S., and Bambhaniya, P. (2020). Shadow of a naked singularity without photon sphere. *Physical Review D*, 102(2):024022.
- Joshi, P. S. (2007). *Gravitational collapse and spacetime singularities*, volume 2. Cambridge University Press Cambridge.
- Joshi, P. S., Malafarina, D., and Narayan, R. (2013). Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties. *Classical and Quantum Gravity*, 31(1):015002.
- Jovanović, P. (2012). The broad Fe K α line and supermassive black holes. *New Astronomy Reviews*, 56(2-3):37–48.
- Jusufi, K. (2021). Black hole shadows in Verlinde’s emergent gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 503(1):1310–1318.
- Kaup, D. J. (1968). Klein-gordon geon. *Physical Review*, 172(5):1331.
- Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237.

- Kodama, H. and Hikida, W. (2003). Global structure of the zipoy–voorhees–weyl spacetime and the $\delta=2$ tomimatsu–sato spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 20(23):5121.
- Komissarov, S. (2006). Magnetized tori around kerr black holes: analytic solutions with a toroidal magnetic field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368(3):993–1000.
- Kovacs, Z. and Harko, T. (2010). Can accretion disk properties observationally distinguish black holes from naked singularities? *Physical Review D*, 82(12):124047.
- Kumar, R. and Ghosh, S. G. (2020). Black hole parameter estimation from its shadow. *The Astrophysical Journal*, 892(2):78.
- Lahiri, S., Gimeno-Soler, S., Font, J. A., and Mejías, A. M. (2021). Stationary models of magnetized viscous tori around a schwarzschild black hole. *Physical Review D*, 103(4):044034.
- Lemos, J. P. and Zaslavskii, O. B. (2008). Black hole mimickers: regular versus singular behavior. *Physical Review D*, 78(2):024040.
- Liebling, S. L. and Palenzuela, C. (2017). Dynamical boson stars. *Living reviews in relativity*, 20(1):1–78.
- Liu, C., Yang, S., Wu, Q., and Zhu, T. (2022). Thin accretion disk onto slowly rotating black holes in einstein-æther theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(02):034.
- Liu, C., Zhu, T., and Wu, Q. (2021). Thin accretion disk around a four-dimensional einstein-gauss-bonnet black hole. *Chinese Physics C*, 45(1):015105.

- Liu, H., Zhou, M., and Bambi, C. (2018). Distinguishing black holes and naked singularities with iron line spectroscopy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(08):044.
- Lora-Clavijo, F., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. (2010). Evolution of a massless test scalar field on boson star space-times. *Physical Review D*, 82(2):023005.
- Luminet, J.-P. (1979). Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astronomy and Astrophysics*, 75:228–235.
- Luongo, O. and Quevedo, H. (2014). Characterizing repulsive gravity with curvature eigenvalues. *Physical Review D*, 90(8):084032.
- Mach, P., Gimeno-Soler, S., Font, J. A., Odrzywołek, A., and Piróg, M. (2019). Self-gravitating magnetized tori around black holes in general relativity. *Physical Review D*, 99(10):104063.
- Malafarina, D. and Sagynbayeva, S. (2021). What a difference a quadrupole makes? *General Relativity and Gravitation*, 53(12):1–18.
- Mazur, P. O. and Mottola, E. (2004). Gravitational vacuum condensate stars. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(26):9545–9550.
- McKinney, J. C., Tchekhovskoy, A., and Blandford, R. D. (2012). General relativistic magnetohydrodynamic simulations of magnetically choked accretion flows around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3083–3117.

- Memmen, J.-M. and Perlick, V. (2021). Geometrically thick tori around compact objects with a quadrupole moment. *Classical and Quantum Gravity*, 38(13):135002.
- Montero, P. J., Zanotti, O., Font, J. A., and Rezzolla, L. (2007). Dynamics of magnetized relativistic tori oscillating around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378(3):1101–1110.
- Nampalliwar, S., Kumar, S., Jusufi, K., Wu, Q., Jamil, M., and Salucci, P. (2021). Modeling the sgr a* black hole immersed in a dark matter spike. *The Astrophysical Journal*, 916(2):116.
- Pacholczyk, A. (1970). Non thermal processes in galactic and extragalactic sources. *Radio Astrophysics*.
- Pacholczyk, A. G. and Roberts, J. (1971). Radio astrophysics: Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources. *Physics Today*, 24(9):57.
- Papadopoulos, D., Stewart, B., and Witten, L. (1981). Some properties of a particular static, axially symmetric space-time. *Physical Review D*, 24(2):320.
- Papaloizou, J. and Pringle, J. (1984). The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 208(4):721–750.
- Pariev, V. I. and Bromley, B. C. (1998). Line emission from an accretion disk around a black hole: Effects of disk structure. *The Astrophysical Journal*, 508(2):590.

- Parnovskii, S. (1985). The type and structure of time-like singularities in the general theory of relativity- from the gamma-metric to a general solution. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 88:1921–1937.
- Penrose, R. (2002). Golden oldie: Gravitational collapse: the role of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 34(7):1141–1165.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and Gonzalez, G. A. (2018). Analytic solution of a magnetized tori with magnetic polarization around kerr black holes. *Astronomy & Astrophysics*, 619:A57.
- Porth, O., Olivares, H., Mizuno, Y., Younsi, Z., Rezzolla, L., Moscibrodzka, M., Falcke, H., and Kramer, M. (2017). The black hole accretion code. *Computational Astrophysics and Cosmology*, 4(1):1.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 19(1):137–160.
- Psaltis, D., Medeiros, L., Christian, P., Özel, F., Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., Azulay, R., Ball, D., et al. (2020). Gravitational test beyond the first post-newtonian order with the shadow of the m87 black hole. *Physical review letters*, 125(14):141104.
- Quevedo, H. (1990). Multipole moments in general relativity static and stationary vacuum solutions. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 38(10):733–840.

Quevedo, H. (2011). Mass quadrupole as a source of naked singularities. *International Journal of Modern Physics D*, 20(10):1779–1787.

Quevedo, H. (2011). Mass Quadrupole as a Source of Naked Singularities. *Int. J. Mod. Phys. D*, 20(10):1779–1787.

Rees, M. (1978). Quasars. *The Observatory*, 98:210–223.

Richstone, D., Ajhar, E., Bower, R. B. G., Dressler, A., Faber, S., Filippenko, A., Gebhardt, K., Green, R., Ho, L., Kormendy, J., et al. (1998). Supermassive black holes and the evolution of galaxies. *NATURE*, 395:1.

Rudnicki, W. (1998). Cosmic censorship in a kerr-like collapse scenario. *Acta Physica Polonica B*, 29(4):981–986.

Rybicki, G. B. and Lightman, A. P. (1991). *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley & Sons.

Sakai, N., Saida, H., and Tamaki, T. (2014). Gravastar shadows. *Physical Review D*, 90(10):104013.

Saurabh, K. and Jusufi, K. (2021). Imprints of dark matter on black hole shadows using spherical accretions. *The European Physical Journal C*, 81(6):1–14.

Schwarzschild, K. (1916). On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907*, 1916:189–196.

- Shaikh, R. and Joshi, P. S. (2019). Can we distinguish black holes from naked singularities by the images of their accretion disks? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(10):064.
- Shaikh, R., Kocherlakota, P., Narayan, R., and Joshi, P. S. (2019). Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 482(1):52–64.
- Shaikh, R., Pal, K., Pal, K., and Sarkar, T. (2021a). Constraining alternatives to the kerr black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506(1):1229–1236.
- Shaikh, R., Paul, S., Banerjee, P., and Sarkar, T. (2021b). Shadows and thin accretion disk images of the gamma metric. *arXiv preprint arXiv:2105.12057*.
- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (1991). Formation of naked singularities: the violation of cosmic censorship. *Physical review letters*, 66(8):994.
- Thorne, K. S. (1974). Disk-accretion onto a black hole. ii. evolution of the hole. *The Astrophysical Journal*, 191:507–520.
- Toshmatov, B. and Malafarina, D. (2019). Spinning test particles in the gamma spacetime. *Physical Review D*, 100(10):104052.
- Velásquez-Cadavid, J., Arrieta-Villamizar, J., Lora-Clavijo, F., Pimentel, O., and Osorio-Vargas, J. (2022). Osiris: a new code for ray tracing around compact objects. *The European Physical Journal C*, 82(2):1–12.

- Velásquez-Cadavid, J., Lora-Clavijo, F. D., Pimentel, O. M., and Arrieta-Villamizar, J. (2023). Synchrotron emitting komissarov torus with magnetic polarization around kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 519(3):3584–3594.
- Vincent, F., Meliani, Z., Grandclément, P., Gourgoulhon, E., and Straub, O. (2016). Imaging a boson star at the galactic center. *Classical and Quantum Gravity*, 33(10):105015.
- Vincent, F., Yan, W., Straub, O., Zdziarski, A., and Abramowicz, M. (2014). A magnetized torus for modeling sgr a* millimeter images and spectra. *arXiv preprint arXiv:1406.0353*.
- Vincent, F. H., Paumard, T., Gourgoulhon, E., and Perrin, G. (2011). Gyoto: a new general relativistic ray-tracing code. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225011.
- Voorhees, B. (1970). Static axially symmetric gravitational fields. *Physical Review D*, 2(10):2119.
- Wardzinski, G. and Zdziarski, A. A. (2000). Thermal synchrotron radiation and its comptonization in compact x-ray sources. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 314(1):183–198.
- Weyl, H. (1917). The theory of gravitation. *Annalen Phys*, 54:117.
- White, N., Stella, L., and Parmar, A. (1988). The x-ray spectral properties of accretion discs in x-ray binaries. *The Astrophysical Journal*, 324:363–378.
- Wielgus, M., Fragile, P. C., Wang, Z., and Wilson, J. (2015). Local stability of strongly magnetized black hole tori. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 447(4):3593–3601.

Wu, S.-M. and Wang, T.-G. (2007). Iron line profiles and self-shadowing from relativistic thick accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378(3):841–851.

Zanotti, O. and Pugliese, D. (2015). Von zeipel's theorem for a magnetized circular flow around a compact object. *General Relativity and Gravitation*, 47(4):1–14.

Zipoy, D. M. (1966). Topology of some spheroidal metrics. *Journal of Mathematical Physics*, 7(6):1137–1143.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de conservación

Conservación de la masa

En primer lugar, es pertinente recordar que las condiciones impuestas por nuestro modelo sobre el espacio-tiempo y el fluido, se pueden resumir en las expresiones (54–57)

1.

$$\partial_t(g_{\mu\nu}) = 0 \quad ; \quad \partial_\phi(g_{\mu\nu}) = 0 \quad (54)$$

2.

$$\partial_t(f) = 0 \quad ; \quad \partial_\phi(f) = 0 \quad (55)$$

3.

$$u^r = u^\theta = 0 \quad (56)$$

4.

$$b^r = b^\theta = 0. \quad (57)$$

Ahora, la conservación de la masa en reposo (5) se puede reescribir como

$$\nabla_{\alpha}(\rho u^{\alpha}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha}(\sqrt{-g} \rho u^{\alpha}) = 0, \quad (58)$$

donde g es el determinante de la métrica y el signo (-) que la acompaña es debido a la signatura escogida para esta. Al separar los índices $\alpha = \{0, i\}$ con $i = \{1, 2, 3\}$, correspondiente a las componentes espaciales

$$\underbrace{\partial_0(\sqrt{-g} \rho u^0)}_a + \underbrace{\partial_i(\sqrt{-g} \rho u^i)}_b = 0. \quad (59)$$

Tomando la parte (a) de la ecuación anterior y aplicando la regla de Leibniz

$$\partial_0(\sqrt{-g} \rho u^0) = \underbrace{\rho u^0 \partial_0(\sqrt{-g})}_i + \underbrace{\sqrt{-g} u^0 \partial_0(\rho)}_{ii} + \underbrace{\sqrt{-g} \rho \partial_0(u^0)}_{iii}. \quad (60)$$

Por la condición (54) el término (i) se hace cero, mientras que los términos (ii) y (iii) lo hacen debido a (55)

$$\partial_0(\sqrt{-g} \rho u^0) = \cancel{\rho u^0 \partial_0(\sqrt{-g})}^0 + \cancel{\sqrt{-g} u^0 \partial_0(\rho)}^0 + \cancel{\sqrt{-g} \rho \partial_0(u^0)}^0 = 0. \quad (61)$$

Por otro lado, la parte (b) de (59) se puede reformular al tener en cuenta (56)

$$\begin{aligned} \partial_i(\sqrt{-g} \rho u^i) &= \rho u^i \partial_i(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} u^i \partial_i(\rho) + \sqrt{-g} \rho \partial_i(u^i) \\ &= \underbrace{\rho u^3 \partial_3(\sqrt{-g})}_i + \underbrace{\sqrt{-g} u^3 \partial_3(\rho)}_{ii} + \underbrace{\sqrt{-g} \rho \partial_3(u^3)}_{iii}, \end{aligned} \quad (62)$$

por la condición (54) el término (i) se hace cero, mientras que los términos (ii) y (iii) lo hacen debido a (55)

$$\partial_i(\sqrt{-g}\rho u^i) = \cancel{\rho u^3 \partial_3(\sqrt{-g})} + \cancel{\sqrt{-g} u^3 \partial_3(\rho)} + \cancel{\sqrt{-g} \rho \partial_3(u^3)} = 0. \quad (63)$$

Entonces, al retomar (59), se tiene que

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0, \quad (64)$$

por lo que se dice que la ecuación de conservación de la masa en reposo se satisface idénticamente bajo las condiciones dadas.

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell (7) en términos del Tensor de Faraday dual se pueden expresar como

$$\nabla_\alpha(\star F^{\alpha\beta}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha(\sqrt{-g} \star F^{\alpha\beta}) = 0 \quad (65)$$

Al separar los índices $\alpha = \{0, i\}$ con $i = \{1, 2, 3\}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0(\sqrt{-g} \star F^{0\beta})}_a + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i(\sqrt{-g} \star F^{i\beta})}_b = 0. \quad (66)$$

De la definición del tensor dual de Faraday

$$\star F^{\alpha\beta} = u^\beta b^\alpha - u^\alpha b^\beta. \quad (67)$$

Tomando la parte (a) de la ecuación anterior y aplicando la regla de Leibniz

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} \star F^{0\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\underbrace{\star F^{0\beta} \partial_0(\sqrt{-g})}_i + \sqrt{-g} \partial_0 \left(\star F^{0\beta} \right) \right], \quad (68)$$

donde el término (i) se hace cero debido a la condición (54). Por lo tanto, al reemplazar (67)

en (68) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} \star F^{0\beta} \right) = \partial_0 \left(u^\beta b^0 - u^0 b^\beta \right), \quad (69)$$

recordando la condición (56) se encuentra una expresión para la cual todos los términos de la parte derecha se hacen cero a razón de (55).

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \left(\sqrt{-g} \star F^{0\beta} \right) = \partial_0 \left[b^0 \partial_0 \left(u^\beta \right) + u^\beta \partial_0 \left(b^0 \right) - b^\beta \partial_0 \left(u^0 \right) - u^0 \partial_0 \left(b^\beta \right) \right] = 0, \quad (70)$$

Por otro lado, al aplicar la regla de Leibniz a la parte (b) de (66)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \left(\sqrt{-g} \star F^{i\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\underbrace{\star F^{i\beta} \partial_i(\sqrt{-g})}_{(i)} + \underbrace{\sqrt{-g} \partial_i(\star F^{i\beta})}_{(ii)} \right], \quad (71)$$

la cual a su vez se divide en otras dos expresiones. Del término (i) y aplicando tanto (67) como las condiciones (56) y (57) se obtiene

$$\star F^{i\beta} \partial_i(\sqrt{-g}) = (u^\beta b^i - u^i b^\beta) \partial_i(\sqrt{-g}) = (u^\beta b^3 - u^3 b^\beta) \partial_3(\sqrt{-g}), \quad (72)$$

luego, al usar la condición (54) el último termino se hace cero, por lo tanto

$$\star F^{i\beta} \partial_i(\sqrt{-g}) = 0. \quad (73)$$

Asimismo, en lo que respecta al término (ii) de (71), se usan las condiciones (56) y (57)

$$\partial_i(\star F^{i\beta}) = \partial_i(u^3 b^i - u^i b^\beta) = \partial_3(u^3 b^3 - u^3 b^\beta), \quad (74)$$

luego, al aplicar la regla de Leibniz, se tiene que todos los términos de la parte derecha se hacen cero debido a la condición (55)

$$\partial_i(\star F^{i\beta}) = b^3 \partial_3(u^\beta) + u^\beta \partial_3(b^3) - b^\beta \partial_3(u^3) - u^3 \partial_3(b^\beta) = 0. \quad (75)$$

Por lo tanto, al retomar la expresión (71), se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \left(\sqrt{-g} \star F^{i\beta} \right) = 0. \quad (76)$$

Finalmente, al reemplazar estos resultados en (66) es evidente que

$$\nabla_\alpha \left(\star F^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (77)$$

en consecuencia, se dice que las ecuaciones de Maxwell relevantes se satisfacen idénticamente bajo las condiciones dadas.

Conservación de la Energía-Momentum

La ecuación de la conservación de la energía momentum (6) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\mu} = \nabla_\alpha \left(g^{\mu\beta} T^\alpha_\beta \right) \longrightarrow \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0, \quad (78)$$

donde la expresión a la derecha de la flecha es equivalente debido a que la derivada covariante de la métrica es igual a cero. Ahora, se reemplaza la forma del tensor de energía-impulso (9) y se aplica el tensor de proyección espacial a (78)

$$\begin{aligned}
h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta &= \underbrace{h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha u_\beta \}}_{(I)} + \underbrace{h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \left\{ \left[P + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right] \delta^\alpha{}_\beta \right\}}_{(II)} \\
&\quad - \underbrace{h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha [(1 - \chi)b^\alpha b_\beta]}_{(III)} = 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

Al analizar el término (I) de (79)

$$\begin{aligned}
h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha u_\beta \} &= h^\beta{}_\nu \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha \nabla_\alpha (u_\beta) \} + h^\beta{}_\nu \{ u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha \} \\
&= [w + (1 - \chi)b^2] h^\beta{}_\nu \{ u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \} + \underbrace{h^\beta{}_\nu \{ u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha \}}_{(I.a)},
\end{aligned} \tag{80}$$

de la ecuación (80) se procede a revisar el término (I.a)

$$h^\beta{}_\nu \{ u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha \} = h^\beta{}_\nu \left\{ u_\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha) \right\}$$

$$\begin{aligned}
h^\beta{}_\nu \{ u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha \} &= h^\beta{}_\nu u_\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_0 (\sqrt{-g} [w + (1 - \chi)b^2] u^0) + \right. \\
&\quad \left. \partial_i (\sqrt{-g} [w + (1 - \chi)b^2] u^i) \right\},
\end{aligned} \tag{81}$$

donde el primer término de la derecha se hace cero debido a las condiciones (54) y (56).

Entonces, usando la condición (56)

$$h^\beta{}_\nu \{u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha\} = h^\beta{}_\nu u_\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \{ \partial_3 (\sqrt{-g} [w + (1 - \chi)b^2] u^3) \} \quad (82)$$

en esta expresión, el término de la derecha se hace cero a razón de las condiciones (54) y (55). Por lo tanto

$$h^\beta{}_\nu \{u_\beta \nabla_\alpha [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha\} = 0 \quad (83)$$

Ahora, retomamos (80)

$$\begin{aligned} h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha u_\beta \} &= [w + (1 - \chi)b^2] h^\beta{}_\nu \{ u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \} \\ &= [w + (1 - \chi)b^2] \left(\delta^\beta{}_\nu + u^\beta u_\nu \right) u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \\ &= [w + (1 - \chi)b^2] \left\{ (u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu) + \underbrace{u^\beta u_\nu u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta}_{(I.b)} \right\}. \end{aligned} \quad (84)$$

Es pertinente revisar el término (I.b), el cual puede ser reescrito

$$u^\beta u_\nu u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = u_\nu u^\alpha (u^\beta \nabla_\alpha u_\beta). \quad (85)$$

El término entre paréntesis, como se muestra a continuación, se hace cero

$$\nabla_\alpha \left(\underbrace{u^\beta u_\beta}_{=-1} \right) = 0 \quad (86)$$

$$\nabla_\alpha (u^\beta u_\beta) = u^\beta \nabla_\alpha u_\beta + u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = 0 \quad (87)$$

$$\begin{aligned} u^\beta \nabla_\alpha u_\beta &= -u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = -u_\beta \nabla_\alpha (g^{\beta\nu} u_\nu) \\ u^\beta \nabla_\alpha u_\beta &= -u_\beta [u_\nu \nabla_\alpha g^{\beta\nu} + g^{\beta\nu} \nabla_\alpha (u_\nu)] \\ u^\beta \nabla_\alpha u_\beta &= -u_\beta g^{\beta\nu} \nabla_\alpha (u_\nu) \\ u^\beta \nabla_\alpha u_\beta &= -u^\nu \nabla_\alpha (u_\nu) \end{aligned} \quad (88)$$

De esta última expresión, se hace evidente que el término de interés se hace cero. Retomando la expresión (84)

$$h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha u_\beta \} = [w + (1 - \chi)b^2] \underbrace{(u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu)}_{(I.c)}, \quad (89)$$

es conveniente reescribir el término (I.c) y aplicar las condiciones (55) y (56)

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu = u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu = u^\alpha \left[\cancel{\partial_\alpha u_\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u_\mu \right] \quad (90)$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu = -u^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u_\mu \longrightarrow \Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} [\partial_\nu g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\alpha\nu}]. \quad (91)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu &= -u^\alpha \frac{1}{2} g^{\mu\beta} [\partial_\nu g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\alpha\nu}] u_\mu \\ u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu &= -\frac{1}{2} u^\alpha u^\beta (\partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\beta\alpha}) \\ u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu &= -\frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (92)$$

Además

$$\begin{aligned} \partial_\nu (g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta) &= \partial_\nu (u^\alpha u_\alpha) = 0 \\ \partial_\nu (g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta) &= u^\alpha u^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} u^\alpha \partial_\nu u^\beta + g_{\alpha\beta} u^\beta \partial_\nu u^\alpha = 0 \\ u^\alpha u^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta} &= -2g_{\alpha\beta} u^\alpha \partial_\nu u^\beta. \end{aligned} \quad (93)$$

Entonces

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu = g_{\alpha\beta} u^\alpha \partial_\nu u^\beta = u_\beta \partial_\nu u^\beta \quad (94)$$

Al reemplazar (94) en (89) se obtiene

$$h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha \{ [w + (1 - \chi)b^2] u^\alpha u_\beta \} = [w + (1 - \chi)b^2] u_\beta \partial_\nu u^\beta. \quad (95)$$

Por otro lado, retomamos la ecuación (79), esta vez para analizar el término (II)

$$\begin{aligned}
 h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha \left\{ \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] \delta_\beta^\alpha \right\} &= h^\beta \nabla_\nu \nabla_\beta \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] \\
 &= \left(\delta^\beta_\nu + u^\beta u_\nu \right) \nabla_\beta \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] \quad (96) \\
 &= \nabla_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] + u^\beta u_\nu \nabla_\beta \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] \\
 &= \partial_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] + u^\beta u_\nu \partial_\beta \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right],
 \end{aligned}$$

al aplicar las condiciones (55) y (56) al último término, este se hace igual a cero. POr lo tanto

$$h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha \left\{ \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] \delta_\beta^\alpha \right\} = \partial_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right]. \quad (97)$$

Por último, se revisa el término (III) de (79)

$$\begin{aligned}
 h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha \left[(1-\chi)b^\alpha b_\beta \right] &= h^\beta \nabla_\nu \left\{ (1-\chi)b^\alpha \nabla_\alpha b_\beta + b_\beta \nabla_\alpha \left[(1-\chi)b^\alpha \right] \right\} \\
 &= (1-\chi)h^\beta \nabla_\nu b^\alpha \nabla_\alpha b_\beta - b_\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left[\sqrt{-g}(1-\chi)b^\alpha \right], \quad (98)
 \end{aligned}$$

se aplican entonces (54) , (55) y (57) al último término, por lo cual este se hace cero

$$\begin{aligned}
h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha [(1-\chi)b^\alpha b_\beta] &= (1-\chi) \left(\delta^\beta{}_\nu + u^\beta u_\nu \right) b^\alpha \nabla_\alpha b_\beta \\
&= (1-\chi) \left[b^\alpha \nabla_\alpha b_\nu + \underbrace{u^\beta u_\nu b^\alpha \nabla_\alpha b_\beta}_{\text{III.a}} \right].
\end{aligned} \tag{99}$$

Ahora, es pertinente reescribir el término (III.a). Por medio de un procedimiento análogo al usado en el análisis del término (I) se obtiene que

$$b^\alpha \nabla_\alpha b_\beta = -\frac{1}{2} b^\alpha b^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu}. \tag{100}$$

Luego, se reemplaza (100) en (99), de modo que al usar las condiciones (54) y (56), el último término de hace cero

$$\begin{aligned}
h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha [(1-\chi)b^\alpha b_\beta] &= -\frac{1}{2} (1-\chi) b^\alpha b^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \frac{u_\nu u^\beta}{2} b^\alpha b^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu} \\
&= -\frac{1}{2} (1-\chi) \underbrace{b^\alpha b^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta}}_{\text{III.b}},
\end{aligned} \tag{101}$$

Además, se quiere reescribir el término (III.b)

$$\begin{aligned}
\partial_\nu (b^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta}) &= \partial_\nu (b^\alpha b_\alpha) = \partial_\nu b^2 \\
(\partial_\nu g_{\alpha\beta}) b^\alpha b^\beta + g_{\alpha\beta} \partial_\nu (b^\alpha b^\beta) &= \partial_\nu b^2 \\
(\partial_\nu g_{\alpha\beta}) b^\alpha b^\beta + g_{\alpha\beta} b^\alpha \partial_\nu b^\beta + g_{\alpha\beta} b^\beta \partial_\nu b^\alpha &= \partial_\nu b^2 \\
(\partial_\nu g_{\alpha\beta}) b^\alpha b^\beta + 2g_{\alpha\beta} b^\beta \partial_\nu b^\alpha &= \partial_\nu b^2 \\
b^\alpha b^\beta (\partial_\nu g_{\alpha\beta}) &= -2g_{\alpha\beta} b^\beta \partial_\nu b^\alpha + \partial_\nu b^2.
\end{aligned} \tag{102}$$

Al reemplazar (102) en (101) se obtiene

$$\begin{aligned} h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha [(1-\chi)b^\alpha b_\beta] &= -\frac{1}{2}(1-\chi) \left[-2g_{\alpha\beta} b^\beta \partial_\nu b^\alpha + \partial_\nu b^2 \right] \\ h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha [(1-\chi)b^\alpha b_\beta] &= (1-\chi)g_{\alpha\beta} b^\beta \partial_\nu b^\alpha - \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_\nu b^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Una vez analizados cada uno de los términos de interés, se procede a reemplazar los resultados (95), (97) y (103) en (79) se encuentra la ecuación de la energía y momentum, también conocida en este caso como ecuación de Euler (10)

$$h^\beta \nabla_\nu \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = [w + (1-\chi)b^2] u_\beta \partial_\nu u^\beta + \partial_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1-2\chi)b^2 \right] - (1-\chi)b_\alpha \partial_\nu b^\alpha + \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_\nu b^2 = 0. \quad (104)$$

Apéndice B. Ecuaciones de Euler relativistas

Análisis geodésico

Antes que nada, es importante recordar que debido a la normalización de la 4-velocidad

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1 \quad (105)$$

Ahora, de (105), al imponer la condición (56)

$$g_{tt} (u^t)^2 + g_{\phi\phi} (u^\phi)^2 + 2g_{t\phi} u^t u^\phi = -1, \quad (106)$$

además, recordando la definición (12)

$$\begin{aligned} (u^t)^2 [g_{tt} + \Omega^2 g_{\phi\phi} + 2\Omega g_{t\phi}] &= -1 \\ (u^t)^2 &= - [g_{tt} + \Omega^2 g_{\phi\phi} + 2\Omega g_{t\phi}]^{-1} \end{aligned} \quad (107)$$

Por otro lado, a partir de (105) y con la condición (56) también se puede encontrar que

$$u^\alpha u_\alpha = -1 \longrightarrow u^t u_t + u^\phi u_\phi = -1, \quad (108)$$

al usar las definiciones (12) y (13)

$$u^t u_t \left(1 + \frac{u^\phi u_\phi}{u^t u_t} \right) = u^t u_t (1 - l\Omega) = -1, \quad (109)$$

Al elevar ambos lados al cuadrado y despejar se encuentra una relación entre u^t y u_t

$$(u_t)^2 = \frac{(u^t)^{-2}}{(1 - l\Omega)^2}. \quad (110)$$

Además, de (107) se puede despejar una relación de la forma $u^t(\Omega)$

$$(u^t)^{-2} = -g_{tt} - g_{\phi\phi}\Omega^2 - 2\Omega g_{t\phi}. \quad (111)$$

Asimismo, de la definición (13), al aplicar la condición (56)

$$l = -\frac{u_\phi}{u_t} = -\frac{(g_{\phi\alpha}u^\alpha)}{(g_{t\beta}u^\beta)} = -\frac{(g_{\phi t}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi)}{(g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi)} = \frac{u^t (g_{\phi t} + g_{\phi\phi}\Omega)}{u^t (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)}$$

$$l = -\frac{(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega)}{(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)}, \quad (112)$$

al despejar Ω de (112), se obtiene una expresión de la forma $\Omega(l)$ (114)

$$l(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega) = -(g_{\phi t} + g_{\phi\phi}\Omega)$$

$$\Omega(g_{t\phi}l + g_{\phi\phi}) = -(g_{t\phi} + lg_{tt}) \quad (113)$$

$$\Omega = -\frac{(g_{t\phi} + lg_{tt})}{(g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})}. \quad (114)$$

Una vez halladas estas relaciones, se procede a reemplazar (114) en (111)

$$(u^t)^{-2} = -g_{tt} - g_{\phi\phi} \left(\frac{g_{t\phi} + lg_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}} \right)^2 + 2g_{t\phi} \left(\frac{g_{t\phi} + lg_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}} \right), \quad (115)$$

Al despejar y reagrupar los términos

$$\begin{aligned} (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (u^t)^{-2} &= -g_{tt} (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 - g_{\phi\phi} (g_{t\phi} + lg_{tt})^2 + 2g_{t\phi} (g_{t\phi} + lg_{tt}) (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}) \\ &= -g_{tt} (g_{\phi\phi}^2 + l^2 g_{t\phi}^2 + 2lg_{t\phi} g_{\phi\phi}) - g_{\phi\phi} (g_{t\phi}^2 + l^2 g_{tt}^2 + 2lg_{t\phi} g_{tt}) \\ &\quad + 2g_{t\phi} (g_{t\phi} g_{\phi\phi} + l^2 g_{tt} g_{t\phi} + lg_{t\phi}^2 + lg_{tt} g_{\phi\phi}) \\ &= -g_{\phi\phi} (g_{tt} g_{\phi\phi} + g_{t\phi}^2 - 2g_{t\phi}^2) - g_{tt} (l^2 g_{t\phi}^2 + l^2 g_{tt} g_{\phi\phi} - 2l^2 g_{t\phi}) \\ &\quad - 2g_{t\phi} (lg_{tt} g_{\phi\phi} - lg_{t\phi}^2) \end{aligned}$$

$$(g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (u^t)^{-2} = -g_{tt} (-g_{t\phi}^2 + g_{\phi\phi} g_{tt}) l^2 - 2g_{t\phi} (g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2) l - g_{\phi\phi} (g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2). \quad (116)$$

Con esto, se pueden definir dos nuevas cantidades $\mathcal{A} = g_{tt} l^2 + 2g_{t\phi} l + g_{\phi\phi}$ y $\mathcal{L} = g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}$, la cual es puramente geométrica. En términos de estas, (116) queda de la forma

$$(g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (u^t)^{-2} = \mathcal{L} \mathcal{A}. \quad (117)$$

Por otra parte, al usar (114)

$$(1 - l\Omega)^2 = 1 + 2l \left(\frac{g_{t\phi} + lg_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}} \right) + l^2 \left(\frac{g_{t\phi} + lg_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}} \right)^2 \quad (118)$$

$$\begin{aligned} (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (1 - l\Omega)^2 &= (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 + 2l (g_{t\phi} + lg_{tt}) (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}) + l^2 (g_{t\phi} + lg_{tt})^2 \\ (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (1 - l\Omega)^2 &= g_{\phi\phi}^2 + 2lg_{\phi\phi}g_{t\phi} + l^2g_{t\phi}^2 + 2l (g_{t\phi}g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}^2 + lg_{tt}g_{\phi\phi} + l^2g_{t\phi}g_{tt}) \\ &\quad + l^2 (g_{t\phi}^2 + 2lg_{t\phi}g_{tt} + l^2g_{tt}^2) \\ (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (1 - l\Omega)^2 &= l^4g_{tt}^2 + (2l^3g_{t\phi}g_{tt} + 2l^3g_{t\phi}g_{tt}) + (2l^2g_{tt}g_{\phi\phi} + 2l^2g_{t\phi}^2 + l^2g_{t\phi}^2 + l^2g_{t\phi}^2) \\ &\quad + (2lg_{\phi\phi}g_{t\phi} + 2lg_{t\phi}g_{\phi\phi}) + g_{\phi\phi}^2 \\ (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (1 - l\Omega)^2 &= g_{tt}^2l^4 + 4g_{tt}g_{t\phi}l^3 + 2(2g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi})l^2 + 4g_{\phi\phi}g_{t\phi}l + g_{\phi\phi}^2, \end{aligned}$$

al usar la definición de \mathcal{A} , se obtiene

$$(g_{\phi\phi} + lg_{t\phi})^2 (1 - l\Omega)^2 = \mathcal{A}^2. \quad (119)$$

Previamente se había hallado la relación (110), al reemplazar (117) y (119) en esta

$$(u_t)^2 = \frac{\mathcal{L}A}{A^2} \longrightarrow (u_t)^2 = \frac{\mathcal{L}}{A}. \quad (120)$$

Aparte, se tiene que $b^\alpha u_\alpha = 0$ debido a que el primero de ellos es un vector tipo espacio, mientras que el segundo es tipo tiempo. Al usar (56)

$$b^t u_t + b^\phi u_\phi = 0, \quad (121)$$

despejando y con la definición de l

$$b^t = -b^\phi \frac{u_\phi}{u_t} \longrightarrow b^t = lb^\phi. \quad (122)$$

De forma análoga $b_\alpha u^\alpha = 0$

$$b_t u^t + b_\phi u^\phi = 0, \quad (123)$$

con la definición de Ω

$$b_t = -b_\phi \frac{u^\phi}{u^t} \longrightarrow b_t = -\Omega b_\phi. \quad (124)$$

Además

$$b^2 = b^\alpha b_\alpha = b^t b_t + b^\phi b_\phi \quad (125)$$

$$b^2 = b^\phi b_\phi \left(1 + \frac{b^t}{b^\phi} \frac{b_t}{b_\phi} \right)$$

$$b^2 = b^\phi b_\phi (1 - l\Omega). \quad (126)$$

Asimismo

$$\begin{aligned}
b_\phi &= g_{\phi\alpha} b^\alpha = g_{t\phi} b^t + g_{\phi\phi} b^\phi \\
b_\phi &= b^\phi \left(g_{\phi\phi} \frac{b^t}{b^\phi} + g_{\phi\phi} \right)
\end{aligned} \tag{127}$$

$$b_\phi = b^\phi (lg_{t\phi} + g_{\phi\phi}). \tag{128}$$

Con base en esto, se reemplaza (128) en (126) y se hace uso de (114)

$$\begin{aligned}
b^2 &= b^\phi b^\phi (lg_{t\phi} + g_{\phi\phi}) (1 - l\Omega) = (b^\phi)^2 (g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}) \left[1 + l \left(\frac{g_{t\phi} + lg_{tt}}{g_{\phi\phi} + lg_{t\phi}} \right) \right] \\
b^2 &= (b^\phi)^2 \underbrace{(g_{\phi\phi} + lg_{t\phi} + lg_{t\phi} + l^2 g_{tt})}_{\mathcal{A}} \\
b^2 &= \mathcal{A} (b^\phi)^2.
\end{aligned} \tag{129}$$

Por otro lado, recuperando la ecuación de energía-momento (10)

$$[w + (1 - \chi)b^2] \underbrace{u_\beta \partial_\nu u^\beta}_{(a)} + \partial_\nu \left[P + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right] - (1 - \chi) \underbrace{b_\alpha \partial_\nu b^\alpha}_{(b)} + \frac{1}{2}(1 - \chi) \partial_\nu b^2 = 0, \tag{130}$$

ahora, es conveniente reescribir los términos (a) y (b). En primer lugar, se parte de $u^\alpha u_\alpha =$

$$\begin{aligned}\partial_v(u^\alpha u_\alpha) &= u_\alpha \partial_v u^\alpha + u^\alpha \partial_v u_\alpha = 0 \\ u_\alpha \partial_v u^\alpha &= -u^\alpha \partial_v u_\alpha,\end{aligned}\tag{131}$$

al aplicar la condición (56) y las definiciones de l y Ω

$$\begin{aligned}u_\alpha \partial_v u^\alpha &= -u^t \partial_v u_t - u^\phi \partial_v u_\phi \\ &= -u^t (\partial_v u_t + \Omega \partial_v u_\phi) \\ &= -u^t [\partial_v u_t - \Omega \partial_v (l u_t)] = -u^t [\partial_v u_t - \Omega l \partial_v u_t - \Omega u_t \partial_v l] \\ u_\alpha \partial_v u_\alpha &= -u^t [(1 - l\Omega) \partial_v u_t - \Omega u_t \partial_v l],\end{aligned}\tag{132}$$

previamente se había encontrado la relación (109), por lo tanto u^t se puede escribir como

$$u^t = \frac{-1}{u_t(1 - l\Omega)}\tag{133}$$

al reemplazar esto en (132)

$$u_\alpha \partial_v u^\alpha = \frac{1}{u_t(1 - l\Omega)} [(1 - l\Omega) \partial_v u_t - \Omega u_t \partial_v l] = \frac{\partial_v u_t}{u_t} - \frac{\Omega}{(1 - l\Omega)} \partial_v l\tag{134}$$

$$u_\alpha \partial_v u_\alpha = \partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} \partial_v l.\tag{135}$$

De forma análoga, para el término (b) se tiene por medio de la condición (57)

$$b_\alpha \partial_\nu b^\alpha = b_t \partial_\nu b^t + b_\phi \partial_\nu b^\phi, \quad (136)$$

anteriormente, se encontraron las relaciones (122) y (124), al reemplazar estas

$$\begin{aligned} b_\alpha \partial_\nu b^\alpha &= -\Omega b_\phi \partial_\nu (l b^\phi) + b_\phi \partial_\nu b^\phi \\ &= -\Omega b_\phi b^\phi \partial_\nu l - \Omega b_\phi l \partial_\nu b^\phi + b_\phi \partial_\nu b^\phi \end{aligned} \quad (137)$$

$$b_\alpha \partial_\nu b^\alpha = b_\phi \partial_\nu (b^\phi) (1 - l\Omega) - \Omega b_\phi b^\phi \partial_\nu l.$$

Además, se tiene (126); por lo tanto b_ϕ se puede reescribir como

$$b_\phi = \frac{b^2}{b^\phi (1 - l\Omega)}, \quad (138)$$

reemplazando esta expresión en (137)

$$b_\alpha \partial_\nu b^\alpha = \frac{b^2}{b^\phi (1 - l\Omega)} \left[\partial_\nu (b^\phi) (1 - l\Omega) \right] - \Omega \left[\frac{b^2}{b^\phi (1 - l\Omega)} \right] b^\phi \partial_\nu l \quad (139)$$

$$b_\alpha \partial_\nu b^\alpha = b^2 \frac{\partial_\nu b^\phi}{b^\phi} - \frac{\Omega b^2}{(1 - l\Omega)} \partial_\nu l. \quad (140)$$

Ahora, con los términos (a) y (b) reescritos según las expresiones (135) y (140) respectivamente, se reemplazan en la ecuación de energía-momento (130)

$$\begin{aligned}
& [w + (1 - \chi)b^2] \left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} \partial_v l \right] + \partial_v \left[P + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right] \\
& - (1 - \chi) \left[b^2 \partial_v (\ln |b^\phi|) - \frac{\Omega b^2}{(1 - l\Omega)} \partial_v l \right] + \frac{1}{2}(1 - \chi) \partial_v b^2 = 0
\end{aligned} \tag{141}$$

$$\begin{aligned}
& w \left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} \partial_v l \right] + (1 - \chi)b^2 \partial_v (\ln |u_t|) + \partial_v \left[P + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right] \\
& - (1 - \chi)b^2 \partial_v (\ln |b^\phi|) + \frac{1}{2}(1 - \chi) \partial_v b^2 = 0.
\end{aligned} \tag{142}$$

Ahora, se reescribe uno de los términos de (142)

$$\begin{aligned}
& - \partial_v \left[\frac{1}{2}(1 - \chi)b^2 \right] = -\frac{1}{2}b^2 \partial_v \chi + \frac{1}{2}(1 - \chi) \partial_v b^2 \\
& \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \chi) \partial_v b^2}_{(c)} = \partial_v \left[\underbrace{\frac{1}{2}(1 - \chi)b^2}_{(d)} \right] + \frac{b^2}{2} \partial_v \chi.
\end{aligned} \tag{143}$$

En lo que respecta al término (d), se tiene que

$$\frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 = \frac{1}{2}(1 - \chi)b^2 - \frac{\chi}{2}b^2, \tag{144}$$

si se deriva esta expresión

$$\partial_v [(1 - 2\chi)b^2] = \partial_v \left(\frac{1}{2}(1 - \chi)b^2 \right) - \frac{b^2}{2} \partial_v \chi - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 \tag{145}$$

y se le suma el término (c)

$$\begin{aligned} \partial_v [(1-2\chi)b^2] + \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_v b^2 &= \partial_v \left(\frac{1}{2}(1-\chi)b^2 \right) - \frac{b^2}{2}\partial_v \chi - \frac{\chi}{2}\partial_v b^2 + \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_v b^2 \\ \partial_v [(1-2\chi)b^2] + \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_v b^2 &= \partial_v ((1-\chi)b^2) - \frac{\chi}{2}\partial_v b^2. \end{aligned} \quad (146)$$

Luego, se reemplaza (146) en (142)

$$\begin{aligned} w \left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l \right] + (1-\chi)b^2 \partial_v (\ln |u_t|) + \partial_v P + \left(-\frac{1}{2}(1-\chi)\partial_v b^2 + \right. \\ \left. \partial_v ((1-\chi)b^2) - \frac{\chi}{2}\partial_v b^2 \right) - (1-\chi)b^2 \partial_v \left(\ln \left| \frac{u_t}{b^\phi} \right| \right) + \frac{1}{2}(1-\chi)\partial_v b^2 = 0 \end{aligned} \quad (147)$$

$$w \left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l \right] + \underbrace{(1-\chi)b^2 \partial_v \left(\ln \left| \frac{u_t}{b^\phi} \right| \right)}_{(e)} + \partial_v P + \partial_v [(1-\chi)b^2] - \frac{\chi}{2}\partial_v b^2 = 0 \quad (148)$$

Ahora, para reescribir el término (e) recordamos (120) y (129)

$$\left(\frac{u_t}{b^\phi} \right)^2 = \frac{\mathcal{L}}{A} \frac{A}{b^2} = \frac{\mathcal{L}}{b^2} \longrightarrow \frac{u_t}{b^\phi} = \left(\frac{\mathcal{L}}{b^2} \right)^{1/2} \quad (149)$$

$$\partial_v \left[\ln \left| \frac{u_t}{b^\phi} \right| \right] = \frac{1}{2} \partial_v \left[\ln \left| \frac{\mathcal{L}}{b^2} \right| \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_v \mathcal{L}}{\mathcal{L}} - \frac{\partial_v b^2}{b^2} \right). \quad (150)$$

Con esto, se retoma (148)

$$w \underbrace{\left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l \right]}_H + \frac{(1-\chi)}{2} b^2 \left(\frac{\partial_v \mathcal{L}}{\mathcal{L}} - \frac{\partial_v b^2}{b^2} \right) + \partial_v P + \partial_v [(1-\chi)b^2] - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 = 0, \quad (151)$$

donde el primer término se renombra H por conveniencia, ya que permanecerá igual en los cálculos subsiguientes

$$\begin{aligned} H + \partial_v P + \frac{1}{2}(1-\chi) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{\mathcal{L}} - \frac{1}{2}(1-\chi) \partial_v b^2 + \partial_v [(1-\chi)b^2] - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 - \frac{(1-\chi)}{2} \partial_v b^2 &= 0 \\ H + \partial_v P + (1-\chi) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{2\mathcal{L}} - (1-\chi) \partial_v b^2 + (1-x) \partial_v b^2 - b^2 \partial_v \chi - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 &= 0 \\ H + \partial_v P + \underbrace{(1-\chi) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{2\mathcal{L}} - b^2 \partial_v \chi - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2}_M &= 0. \end{aligned} \quad (152)$$

Ahora, se analiza el término M

$$\begin{aligned} (1-x) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{2\mathcal{L}} - b^2 \partial_v \chi - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 &= (1-\chi) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{2\mathcal{L}} - \frac{1}{2} b^2 \partial_v \chi - \frac{1}{2} b^2 \partial_v \chi - \frac{\chi}{2} \partial_v b^2 \\ &= (1-\chi) \frac{\partial_v (b^2 \mathcal{L})}{2\mathcal{L}} + \frac{\mathcal{L}}{2\mathcal{L}} b^2 \partial_v (1-\chi) - \frac{1}{2} \partial_v (\chi b^2) \\ &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \partial_v [(1-\chi)b^2 \mathcal{L}] - \frac{1}{2} \partial_v (\chi b^2). \end{aligned} \quad (153)$$

Luego, se reemplaza este resultado en (152) y se define la presión magnética $P_m = \frac{b^2}{2}$

$$\begin{aligned}
H + \partial_v P + \frac{1}{2\mathcal{L}} \partial_v [(1-\chi)b^2\mathcal{L}] - \frac{1}{2} \partial_v (\chi b^2) &= 0 \\
H + \partial_v (P - \chi P_m) + \frac{\partial_v [(1-\chi)b^2\mathcal{L}]}{2\mathcal{L}} &= 0.
\end{aligned} \tag{154}$$

Finalmente, al expandir el término H se obtiene la ecuación de Euler en su forma relativista

(11)

$$\begin{aligned}
w \left[\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l \right] + \partial_v (P - \chi P_m) + \frac{\partial_v [(1-\chi)P_m\mathcal{L}]}{\mathcal{L}} &= 0 \\
\partial_v (\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l + \frac{\partial_v (P - \chi P_m)}{w} + \frac{\partial_v [(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} &= 0
\end{aligned} \tag{155}$$

Apéndice C. Condiciones de integrabilidad

Parte I

Con el fin de reescribir la ecuación de Euler relativista como un diferencial exacto, se multiplica (11) por dx^v y se tiene en cuenta que $df = \partial_v f dx^v$

$$\begin{aligned}
 & \partial_v (\ln |u_t|) dx^v - \frac{\Omega}{1-l\Omega} \partial_v l (dx^v) + \frac{\partial_v (P - \chi P_m)}{w} dx^v + \frac{\partial_v [(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} dx^v = 0 \\
 & d(\ln |u_t|) - \frac{\Omega}{1-l\Omega} dl + \frac{d(P - \chi P_m)}{w} + \frac{d[(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} = 0 \\
 & d(\ln |u_t|) + \underbrace{\frac{dP}{w}}_{(i)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-l\Omega} dl}_{(ii)} - \frac{d(\chi P_m)}{w} + \frac{d[(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} = 0
 \end{aligned} \tag{156}$$

Ahora, haciendo uso de que $w = w(P)$ y $\Omega = \Omega(l)$ se reescriben los dos términos resaltados en la ecuación anterior. Para el término (i)

$$\frac{dP}{w} = \frac{d}{dP} \int_0^P \frac{dP}{w} dP = d \left[\int_0^P \frac{dP}{w} \right], \tag{157}$$

mientras que para el término (ii)

$$\frac{\Omega}{1-l\Omega} dl = d \left[\int_0^l \frac{\Omega}{1-l\Omega} dl \right] \tag{158}$$

Al reemplazar (157) y (158) en (156) se obtiene la expresión (14)

$$d \left(\ln |u_t| + \int_0^P \frac{dP}{w} - \int_0^l \frac{\Omega}{1-l\Omega} dl \right) - \underbrace{\frac{d(\chi P_m)}{w} + \frac{d[(1-\chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w}}_{\mathcal{I}} = 0. \quad (159)$$

Ahora, en lo que respecta al término \mathcal{I} se toman como variables independientes χ, P_m, \mathcal{L}

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\chi}{w} dP_m - \frac{P_m}{w} d\chi - \frac{P_m}{w} d\chi + (1-\chi) \frac{d(\mathcal{L}P_m)}{\mathcal{L}w} \\ I &= -\frac{\chi}{w} dP_m - \frac{2P_m}{w} d\chi + (1-\chi) \frac{P_m}{\mathcal{L}w} d\mathcal{L} + (1-\chi) \frac{dP_m}{w} \\ I &= \frac{(1-2\chi)}{w} dP_m - \frac{2P_m}{w} d\chi + (1-\chi) \frac{P_m}{\mathcal{L}w} d\mathcal{L}. \end{aligned} \quad (160)$$

Como se asumió $\chi = \chi(\mathcal{L})$ se tiene que $d\chi = \frac{d\chi}{d\mathcal{L}} d\mathcal{L} = \chi' d\mathcal{L}$. Debido a esto, el término \mathcal{I} queda de la forma (15)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1-2\chi}{w} dP_m - \frac{2P_m}{w} \chi' d\mathcal{L} + (1-\chi) \frac{P_m}{\mathcal{L}w} d\mathcal{L} \\ I &= \frac{1-2\chi}{w} dP_m + \left[\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right] \frac{P_m}{w} d\mathcal{L} \end{aligned} \quad (161)$$

Parte II

Ahora, se integran las condiciones (17). Para la primera

$$\frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} = \left[\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right] \frac{P_m}{w}, \quad (162)$$

al integrar respecto a \mathcal{L}

$$z - z(P_m, \mathcal{L}_0) = P_m I_1; \quad I_1 = \int_{\mathcal{L}_0}^{\mathcal{L}} \frac{1}{w} \left(\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) d\mathcal{L}, \quad (163)$$

dada una función $\chi(\mathcal{L})$ y la función $w(\mathcal{L}, P_m)$, se puede calcular I_1 . Por lo tanto

$$z = P_m I_1 + z(P_m, \mathcal{L}_0). \quad (164)$$

Por otra parte, la segunda condición de (17)

$$\frac{\partial z}{\partial P_m} = \frac{1 - 2\chi}{w} \quad (165)$$

Al integrar respecto a P_m

$$z - z(P_{m0}, \mathcal{L}) = (1 - 2\chi)I_2; \quad I_2 = \int_{P_{m0}}^{P_m} \frac{dP_m}{w}. \quad (166)$$

Luego, se reemplaza (164) en (166) y se evalúa en P_{m0}

$$P_m I_1 + z(P_m, \mathcal{L}_0) - z(P_{m0}, \mathcal{L}_0) - (P_m I_1)|_{P_{m0}} = (1 - 2x)I_2$$

$$z(P_m, \mathcal{L}_0) = (1 - 2x)I_2 - P_m I_1 + P_{m0} I_1|_{P_{m0}} + z_0. \quad (167)$$

A la expresión (167), se le conoce como la condición de integrabilidad. Posteriormente, se reemplaza esta en (164), con esto se obtiene la ecuación (18)

$$z = (1 - 2x)I_2 + P_{m_0}I_1|_{P_{m_0}} + z_0$$

$$z = (1 - 2x) \int_{P_{m_0}}^{P_m} \frac{dP_m}{w} + P_{m_0} \int_{L_0}^{\mathcal{L}} \frac{1}{w} \left(\frac{1 - \chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) d\mathcal{L} \Big|_{P_{m_0}} + z_0 \quad (168)$$

Parte III

Ahora, se deriva la condición de integrabilidad (167) respecto a P_m . Como los dos últimos términos no dependen de esta variable, su derivada es igual a cero y se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_m} z(P_m, \mathcal{L}_0) &= (1 - 2\chi) \frac{\partial}{\partial P_m} I_2 - \frac{\partial}{\partial P_m} (P_m I_1) + \frac{\partial}{\partial P_m} (P_{m_0} I_1|_{P_{m_0}}) + \frac{\partial}{\partial P_m} (z_0) \\ \frac{\partial}{\partial P_m} z(P_m, \mathcal{L}_0) &= \frac{(1 - 2\chi)}{w} - P_m \frac{\partial I_1}{\partial P_m} - I_1. \end{aligned} \quad (169)$$

Después, se deriva esta última respecto a \mathcal{L}

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{L} \partial P_m} z(P_m, \mathcal{L}_0) = (1 - 2\chi) \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{\partial \chi'}{w} - P_m \frac{\partial}{\partial P_m} \left[\frac{1}{w} \left(\frac{1 - \chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) \right] - \frac{1}{w} \left(\frac{1 - \chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) = 0, \quad (170)$$

donde se tuvo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}} I_1 = \frac{1}{w} \left(\frac{1 - \chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right). \quad (171)$$

Además, como $\chi = \chi(\mathcal{L})$

$$-\frac{1-2\chi}{w^2} \frac{\partial \omega}{\partial \mathcal{L}} - \frac{2\chi'}{w} + \frac{P_m}{w^2} \left(\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) \frac{\partial w}{\partial P_m} - \frac{1}{w} \left(\frac{1-\chi}{\mathcal{L}} - 2\chi' \right) = 0, \quad (172)$$

después, se multiplica esta última expresión por $-w^2 \mathcal{L}$ y se obtiene la ecuación (20)

$$\begin{aligned} (1-2\chi)\mathcal{L} \frac{\partial \omega}{\partial \mathcal{L}} + 2\chi' \mathcal{L} \omega - P_m (1-\chi - 2\chi' \mathcal{L}) \frac{\partial w}{\partial P_m} + w (1-\chi - 2\chi' \mathcal{L}) &= 0 \\ (1-2\chi)\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}} - P_m (1-\chi - 2\chi' \mathcal{L}) \frac{\partial w}{\partial P_m} + (1-\chi)w &= 0. \end{aligned} \quad (173)$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial, se hace uso de un par de artilugios matemáticos y posteriormente se utiliza el método de separación de variables. En primer lugar, se divide la expresión anterior entre $(1-\chi - 2\chi' \mathcal{L})$ y se definen dos funciones f_1 y f_2

$$f_1(\mathcal{L}) = \frac{1-2\chi}{1-\chi-2\chi'\mathcal{L}} \quad ; \quad f_2(\mathcal{L}) = \frac{1-\chi}{1-\chi-2\chi'\mathcal{L}}. \quad (174)$$

Con estas definiciones, la ecuación (173) se reescribe como

$$f_1 \mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}} - P_m \frac{\partial w}{\partial P_m} + f_2 w = 0. \quad (175)$$

Ahora, se supone una solución para w de la forma

$$w = A(\mathcal{L})B(P_m), \quad (176)$$

luego (175)

$$f_1 \mathcal{L} B \frac{dA}{d\mathcal{L}} + f_2 AB - P_m A \frac{dB}{dP_m} = 0, \quad (177)$$

al dividir por AB

$$\underbrace{\frac{f_1 \mathcal{L}}{A} \frac{dA}{d\mathcal{L}} + f_2}_{(1)} - \underbrace{\frac{P_m}{B} \frac{dB}{dP_m}}_{(2)} = 0, \quad (178)$$

como (1) depende únicamente de \mathcal{L} y (2) de P_m , se tiene que por una parte

$$\begin{aligned} \frac{f_1 \mathcal{L}}{A} \frac{dA}{dL} + f_2 &= \lambda^2 \\ \frac{dA}{A} &= \frac{\lambda^2 - f_2}{f_1 L} dL \\ \ln_n(A) &= \lambda^2 \underbrace{\int \frac{dL}{f_1 L}}_{\phi_1} - \underbrace{\int \frac{f_2}{f_1}}_{\phi_2} dL = \lambda^2 \phi_1 - \phi_2, \end{aligned} \quad (179)$$

donde λ es una constante arbitraria, entonces

$$A = A_0 e^{\lambda^2 \phi_1 - \phi_2}. \quad (180)$$

mientras que, para el término (2)

$$\begin{aligned} \frac{P_m}{B} \frac{dB}{dP_m} &= \lambda^2 \\ \frac{dB}{B} &= \frac{\lambda^2}{P_m} dP_m \end{aligned} \quad (181)$$

$$B = B_0 \left(\frac{P_m}{P_{m_0}} \right)^{\lambda^2}. \quad (182)$$

Por lo tanto, (176) queda de la forma

$$w = K_m P_m^{\lambda^2} e^{\lambda^2 \phi_1 - \phi_2} \quad (183)$$

donde K_m es una constante. Ahora bien, se puede reescribir f_2 como

$$f_2 = \frac{1 - \chi}{1 - \chi - 2\chi' \mathcal{L}} = \frac{1 - 2\chi + \chi}{1 - \chi - 2\chi' \mathcal{L}} = f_1 + f_3; \quad f_3 = \frac{\chi}{1 - \chi - 2\chi' \mathcal{L}} \quad (184)$$

entonces ϕ_2

$$\phi_2 = \int \frac{f_2}{\mathcal{L} f_1} d\mathcal{L} = \int \frac{f_1 + f_3}{\mathcal{L} f_1} d\mathcal{L} = \int \left(\frac{1}{\mathcal{L}} + \frac{f_3}{\mathcal{L} f_1} \right) d\mathcal{L}, \quad (185)$$

pero se tiene que $f_3/f_1 = \chi/1 - 2\chi$

$$\phi_2 = \ln \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} \right) + \int \frac{\chi d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1 - 2\chi)}. \quad (186)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}f_1} = \int \frac{1-\chi-2\chi'\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} d\mathcal{L} \\
&= \int \frac{1-2\chi+\chi-2\chi'\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} d\mathcal{L} \\
&= \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \int \frac{\chi d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} - 2 \int \frac{\chi' d\mathcal{L}}{(1-2\chi)} \\
&= \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \int \frac{\chi d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} - 2 \int \left(-\frac{1}{2}\right) d\ln(1-2\chi)
\end{aligned} \tag{187}$$

$$\phi_1 = \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \ln\left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0}\right) + \int \frac{\chi d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} \tag{188}$$

pero como $\frac{\chi}{1-2\chi} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1-2\chi}\right)$

$$\int \frac{\chi d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} = -\frac{1}{2} \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)}, \tag{189}$$

entonces, al reemplazar (189) en (186)

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} \\
\phi_2 &= \frac{1}{2} \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)}.
\end{aligned} \tag{190}$$

Por otra parte, al reemplazar (189) en (188)

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \ln\left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) \\
\phi_1 &= \frac{1}{2} \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathcal{L}}{\mathcal{L}(1-2\chi)} + \ln\left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0}\right).
\end{aligned} \tag{191}$$

Luego, se reemplaza (190) en (191) para obtener una relación entre ϕ_1 y ϕ_2

$$\phi_1 = \phi_2 + \ln \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right). \quad (192)$$

Finalmente, al insertar (191) en (183)

$$\begin{aligned} w &= K_m P_m^{\lambda^2} e^{\lambda^2 \phi_1 - \phi_2} \\ w &= K_m P_m^{\lambda^2} e^{\lambda^2 \phi_2 + \lambda^2 \ln \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right) - \phi_2} \\ w &= K_m P_m^{\lambda^2} e^{(\lambda^2 - 1) \phi_2} e^{\ln \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right)^{\lambda^2}} \\ w &= K_m P_m^{\lambda^2} \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right)^{\lambda^2} e^{(\lambda^2 - 1) \phi_2}. \end{aligned} \quad (193)$$

Por otro lado, se puede reescribir (190) haciendo uso de una nueva definición (ϕ_3)

$$\phi_2 = \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)^{1/2} + \phi \quad ; \quad \phi = \int \frac{dL}{2L(1-2x)}. \quad (194)$$

A consecuencia de esto (193)

$$\begin{aligned} w &= K_m P_m^{\lambda^2} \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right)^{\lambda^2} e^{\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)^{\frac{\lambda^2-1}{2}}} e^{(\lambda^2-1)\phi} \\ w &= K_m P_m^{\lambda^2} \left(\frac{1-2\chi}{1-2\chi_0} \right)^{\lambda^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} \right)^{\frac{\lambda^2-1}{2}} e^{(\lambda^2-1)\phi}. \end{aligned} \quad (195)$$

De esta forma se encuentra la forma general de la entalpía $w(P_m, \mathcal{L})$ con $\chi = \chi(\mathcal{L})$, descrita por la ecuación (21)

$$w = \widetilde{K}_m P_m^{\lambda^2} (1-2\chi)^{\lambda^2} \mathcal{L}^{\frac{\lambda^2-1}{2}} e^{(\lambda^2-1)\phi}; \quad \phi = \int \frac{d\mathcal{L}}{2\mathcal{L}(1-2\chi)} \quad (196)$$

Parte IV

Una vez se tiene la forma de χ (23), se procede a computar el valor de ϕ

$$\begin{aligned}\phi &= \int \frac{d\mathcal{L}}{2\mathcal{L}(1-2\chi_0-2\chi_1\mathcal{L}^\alpha)} = \frac{1}{2\mu(1-2\chi_0)} \ln \left| \frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi_0)-2\chi_1\mathcal{L}^\mu} \right| \\ &= \frac{1}{2\mu(1-2\chi_0)} \ln \left| \frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi)} \right| \\ &= \ln \left(\frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi)} \right)^{1/2\mu(1-2\chi_0)}.\end{aligned}\tag{197}$$

Una vez conocido ϕ , se recuerda que en la expresión para la entalpía (21), aparece el término

$$e^{(\lambda^2-1)\phi} = e^{(\lambda^2-1)\ln\left(\frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi)}\right)^{1/2\mu(1-2\chi_0)}} = \left(\frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi)}\right)^{(\lambda^2-1)/2\mu(1-2\chi_0)}.\tag{198}$$

Al reemplazar este en (21)

$$\begin{aligned}w &= \widetilde{K}_m P_m^{\lambda^2} (1-2\chi)^{\lambda^2} \mathcal{L}^{\frac{\lambda^2-1}{2}} \left(\frac{\mathcal{L}^\mu}{(1-2\chi)}\right)^{(\lambda^2-1)/2\mu(1-2\chi_0)} \\ w &= \widetilde{K}_m P_m^{\lambda^2} \left[(1-2\chi)^{\lambda^2} (1-2\chi)^{-\frac{(\lambda^2-1)}{2\mu(1-2\chi_0)}} \right] \mathcal{L}^{\frac{\lambda^2-1}{2}} \mathcal{L}^{\frac{\lambda^2-1}{2\mu(1-2\chi_0)}} \\ w &= \widetilde{K}_m P_m^{\lambda^2} (1-2\chi)^{\lambda^2} (1-2\chi)^{-\frac{(\lambda^2-1)}{2\mu(1-2\chi_0)}} \mathcal{L}^{\frac{(\lambda^2-1)}{2}} \frac{(1-\chi_0)}{(1-2\chi_0)}\end{aligned}\tag{199}$$

Luego, se realiza la sustitución $\lambda^2 \rightarrow 1/\eta$

$$w = \widetilde{K}_m P_m^{1/\eta} (1-2\chi)^{-\frac{1-\eta}{2\mu(1-\chi_0)\eta} + \frac{1}{\eta}} L^{\frac{(1-\eta)}{\eta} \frac{(1-\chi_0)}{(1-2\chi_0)}},\tag{200}$$

y se usan las definiciones (25)

$$\tilde{k} = \frac{1 - \chi_0}{1 - 2\chi_0}(\eta - 1); \quad \tilde{f} = (1 - 2\chi)^{\frac{1-\eta}{2\mu(1-2\chi_0)} - 1} \quad (201)$$

de forma que se llega a la expresión (24) para describir w

$$w = \tilde{K}_m P_m^{1/\eta} \mathcal{L}^{-\tilde{k}/\eta} \tilde{f}^{-1/\eta}. \quad (202)$$

Finalmente, con esta forma de w se resuelven las ecuaciones (18) (puedo hacer el calculo izi pero idk como pag 25 de discos 2)

Potencial efectivo relativista

Por medio de la introducción del potencial efectivo relativista (29) y teniendo en cuenta que para el interior de un disco $P = P_m = 0$, $u_t = u_{tin}$ y $l = l_{in}$, se tiene que la ecuación de Euler (28), para el caso del borde interior del disco se reduce a (30)

$$\ln|u_t| + \int_0^P \frac{dP}{w} - \int_0^l \frac{\Omega}{1 - l\Omega} dl - \frac{(\chi P_m)}{w} + \frac{[(1 - \chi)\mathcal{L}P_m]}{\mathcal{L}w} = C \quad (203)$$

$$\ln|u_{tin}| - \int_0^{l_{in}} \frac{\Omega}{1 - l\Omega} = C. \quad (204)$$

Ahora, se puede reescribir la Ecuación de Euler relativista como

$$\ln|u_t| - \int_0^l \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} + \int_0^P \frac{dP}{w} + z = \ln|U_{tin}| - \int_0^{l_{in}} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega}. \quad (205)$$

Además, despejando de la definición de W (29)

$$\ln |u_t| = W - \int_l^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega}. \quad (206)$$

Al reemplazar (206) en (205)

$$\begin{aligned} W - \int_l^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} - \int_0^l \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} + \int_0^P \frac{dP}{w} + z &= W_{in} - \int_{l_{in}}^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} - \int_0^{l_{in}} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} \\ W - \int_0^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} + \int_0^P \frac{dP}{W} + z &= W_{in} - \int_0^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega}, \end{aligned} \quad (207)$$

entonces, al usar el resultado encontrado para z (27), se obtiene la expresión (31)

$$W - W_{in} + \int_0^P \frac{dP}{w} + \frac{\eta}{\eta - 1} (1 - 2\chi) \frac{P_m}{w} = 0 \quad (208)$$

Apéndice D. Construcción de toros

Especificaciones adicionales

Como el fluido es politrópico, la presión y la entalpía están relacionadas por medio de una ecuación de tipo

$$P = Kw^\kappa. \quad (209)$$

Por lo tanto, al usar esta condición sobre el término dependiente de P y w en la ecuación de Euler, se obtiene

$$\int_0^P \frac{dP}{w} = \int_0^P (\kappa)^{1/\kappa} P^{-1/\kappa} dP = \frac{\kappa}{\kappa-1} (\kappa)^{1/\kappa} P^{-1/\kappa+1} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P}{w}. \quad (210)$$

Por otro lado, al tomar la condición de momento angular constante

$$W = \ln |u_t| + \int_{l_0}^{l_0} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} \longrightarrow W = \ln |u_t| \quad (211)$$

donde la integral se anula ya que sus límites son iguales. Además, teniendo en cuenta la relación (120), se llega a la expresión (34)

$$W = \ln |u_t|. \quad (212)$$

Entalpía

Para calcular la entalpía w con una función de las coordenadas, se usa la ecuación de Euler

(35). Sin embargo, primero se debe encontrar el valor de las constantes K y K_m ; para esto se evalúan en $r = r_c$ las expresiones (26) y (32)

$$K = \frac{P_c}{w_c^\kappa}; \quad K_m = \frac{P_{mc}}{\mathcal{L}_c^{\tilde{\kappa}} w_c^\eta \tilde{f}_c} \quad (213)$$

Luego, se vuelve a hacer uso de (26) y (32), esta vez en la ecuación de Euler para eliminar la dependencia de P y P_m

$$W - W_{\text{in}} + \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \right) K w^{k-1} + \frac{\eta}{\eta - 1} K_m L^{\tilde{k}} w^{n-1} \tilde{f} = 0 \quad (214)$$

Ahora, a partir de (214) se puede despejar $w(r, \theta)$

$$w = \left(\frac{W_{\text{in}} - W}{\frac{\kappa}{\kappa - 1} K + \frac{\eta}{\eta - 1} (1 - 2\chi) K_m \mathcal{L}^\lambda \tilde{f}} \right)^{\frac{1}{\eta - 1}} \quad (215)$$