

LA TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY Y SU APLICACIÓN AL PROCESAMIENTO DE
IMÁGENES DIGITALES BINARIAS 2D.

Yazmin Rubiela Cote Contreras

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemática Aplicada.

Director

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física-Matemática

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

Dedicado a mis padres, mi hermano y a Jhon.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

★ A Dios por haberme permitido cursar esta Maestría.

★ Al profesor Ph.D. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su paciencia, compromiso y dedicación. Agradezco todos sus aportes, su amistad, orientación y el apoyo brindado a lo largo de este proceso.

★ A mis padres, a mi hermano Javier y a mi tío Sergio, por su incondicional apoyo en la realización de mis estudios.

★ A Jhon por ser incondicional, escucharme, animarme y apoyarme durante la realización de este posgrado.

★ A los profesores de la Escuela de Física y Matemáticas que contribuyeron a mi crecimiento personal y me transmitieron su pasión por la ciencia y la investigación.

★ A mis amigos, en especial a Daniel y Melissa, quienes siempre estuvieron a mi lado en los buenos y malos momentos.

★ A mis compañeros de posgrado con los que compartí materias, en especial a Iván, por acompañarme a lo largo de este posgrado.

Agradezco sinceramente a todos quienes contribuyeron a mi formación académica y personal.

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. Topología digital	18
1.1. Preliminares	19
1.2. Topologías Alexandroff	20
1.3. La recta digital	21
1.3.1. Caracterización de los COTS	24
1.4. El plano digital.	39
1.4.1. Arcos y Caminos.	41
1.4.2. Adyacencias en el plano.	46
1.5. El teorema de la curva de Jordan	50
2. Procesamiento de imágenes	64
2.1. El plano de Rosenfeld	65
2.2. El teorema de Jordan versión gráfica	68
2.3. Puntos simples	69
2.3.1. Condiciones suficientes para ser punto simple	74
2.3.2. Condiciones necesarias para ser un punto simple	81
2.3.2.1. $S_p \setminus \{p\}$ con dos 8-componentes.	82

LA TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY Y SU APLICACIÓN AL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES DIGITALES BINARIAS 2D.	5
2.3.2.2. $S_p \setminus \{p\}$ con tres 8-componentes.	88
2.3.2.3. $S_p \setminus \{p\}$ con cuatro 8-componentes.	91
2.4. Algoritmo para detectar puntos simples	93
2.4.1. Algoritmos de reducción y adelgazamiento	99
3. Las imágenes en el plano digital.	104
3.1. El plano digital y el plano de Rosenfeld.	105
3.1.1. Los caminos, las curvas y el operador Γ^* .	110
3.2. El teorema de la curva de Jordan Rosenfeld	127
3.3. Los conjuntos 4-conexos y 8-conexos en el plano digital.	141
3.4. Los puntos simples en el plano digital	147
3.4.1. Funciones continuas	159
Apéndices	163
.1. Código de python	163
Referencias Bibliográficas	165

Lista de Figuras

Figura 1.	Preorden de especialización de la topología digital junto con las vecindades minimales.	23
Figura 2.	Porción del plano digital.	40
Figura 3.	Teorema 1.29 parte 5.	47
Figura 4.	Adyacencias en el plano.	49
Figura 5.	Adyacencia cuando se gira en un mixto.	50
Figura 6.	Adyacencias de i y j	53
Figura 7.	Borde ajustado en el plano digital.	53
Figura 8.	Representación de la Proposición 1.35.	54
Figura 9.	Caso $ X = Y = 3$ en el Lema 1.36.	55
Figura 10.	Un ejemplo del Teorema 1.38. Cada color representa una componente de $X \times Y \setminus C$ y $AD(X \times Y) \setminus C$.	57
Figura 11.	Ilustración de la demostración del Teorema de Jordan para J con mixtos en con coordenada en $y = v$.	62
Figura 12.	Ilustración de la demostración del Teorema de Jordan para J con puntos puros en con coordenada en $y = v$.	62
Figura 13.	Representación de la Proposición 1.40.	63
Figura 14.	Relaciones de adyacencia.	65

Figura 15.	Componentes en el plano.	66
Figura 16.	Teorema de Jordan-Rosenfeld.	69
Figura 17.	Ejemplo de imágenes (8,4)-equivalentes.	71
Figura 18.	En esta imagen el punto p es un punto simple, cuando se considera la relación de adyacencia (8,4).	72
Figura 19.	Un conjunto sin puntos simples consideran la relación de adyacencia (8,4).	72
Figura 20.	Ejemplo de punto p que no simple.	73
Figura 21.	Ejemplo de algoritmo de reducción.	73
Figura 22.	Enumeración de los 8-vecinos de p .	75
Figura 23.	Lema 2.12 $2 \Rightarrow 1$.	77
Figura 24.	Lema 2.12 $1 \Rightarrow 2$.	77
Figura 25.	Casos para la prueba del Lema 2.14.	79
Figura 26.	$N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ con dos 8-componentes.	84
Figura 27.	Resumen de los casos si $S_p \setminus \{p\}$ tiene dos 8-componentes.	85
Figura 28.	Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene tres 8-componentes.	89
Figura 29.	Casos para el Lema 2.24.	89
Figura 30.	Lema 2.25.	92
Figura 31.	$N_4(p) \cap \bar{S} = \emptyset$.	92
Figura 32.	$N_8(p) \cap S \setminus \{p\} = \emptyset$.	92
Figura 33.	Casos para el Lema 2.27.	94
Figura 34.	Casos para el Lema 2.28.	95

Figura 35.	Casos para el Lema 34.	95
Figura 36.	Casos para el Lema 2.30.	96
Figura 37.	Caso 1: $p_4 = 0$ y $p_3 = 1$.	99
Figura 38.	Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$ y $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 0$.	99
Figura 39.	Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$, $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 1$, $p_6 = 1$ y $\text{máx}\{p_7, p_8\} = 0$.	99
Figura 40.	Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$, $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 1, \text{máx}\{p_7, p_8\} = 1$ y $p_6 = p_8 = 1$.	100
Figura 41.	Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$, $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 1, \text{máx}\{p_7, p_8\} = 1$, $p_6 = 1$ y $p_8 = 0$.	100
Figura 42.	Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$, $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 1$ y $p_6 = 0$.	100
Figura 43.	Algoritmo de Reducción.	101
Figura 44.	Algoritmo de adelgazamiento.	102
Figura 45.	Aplicación de algoritmo de reducción.	102
Figura 46.	El plano Rosenfeld sumergido en el plano digital.	106
Figura 47.	Los 4 vecinos de p en el plano digital bajo Γ .	108
Figura 48.	Los puntos 8-adyacentes a p bajo Γ en el plano digital.	109
Figura 49.	Susbcasos del Lema 3.6, para el caso 1.	114
Figura 50.	Caso 1 del Lema 3.7.	117
Figura 51.	La imagen de un 8-camino C , bajo Γ .	120
Figura 52.	Operador Γ^* con un 8-camino C .	120

- Figura 53. Se muestra el caso en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes puros en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$. 122
- Figura 54. Se muestra el caso, en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes mixtos en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$. 123
- Figura 55. Se muestra el caso, en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes uno mixto y otro puro en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$. 123
- Figura 56. C son los puntos verdes en el plano de la derecha y $\Gamma^1(C)$ no es un 8-curva. 124
- Figura 57. Representación del Lema 3.13. 128
- Figura 58. Caso 2. 132
- Figura 59. Representación R' sumergida en el plano $X \times Y$. 134
- Figura 60. Representa cuando $D \not\subseteq \Gamma^*(R')$, donde puntos morados son $\Gamma(a, b)$ y $\Gamma(c, d)$ o (a, b) y (c, d) respectivamente. 135
- Figura 61. Ejemplo de D' . 135
- Figura 62. Ejemplo de $C \subset D'$ de la figura 61. 136
- Figura 63. Ejemplo de camino C' . 136
- Figura 64. $\Gamma^{-1}(C')$ 137
- Figura 65. Representación del Caso 1.1 del Teorema 3.15, sin considerar sus casos análogos. 140

Figura 66.	Representación del Caso 1.2 del Teorema 3.15, sin considerar sus casos análogos.	140
Figura 67.	Caso 2 del Teorema 3.15, representación de los casos sin considerar sus casos análogos.	140
Figura 68.	Ejemplo de $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) \neq C$ y $\Gamma^{-1}(C)$ es un 4-camino.	145
Figura 69.	Lema 3.25.	152
Figura 70.	Análisis del Caso 2.2 del el Lema 3.26.	155
Figura 71.	Continuación del análisis del Caso 2.2 del el Lema 3.26.	155
Figura 72.	Ilustra el Lema 3.26, donde se evidencia como de un 8-camino en $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, se puede obtener un arco en $A(\Gamma(p)) \cap S^*$.	156
Figura 73.	Adyacencia de un punto mixto con su clausura y vecindad minimal.	157
Figura 74.	Punto simple Khalimsky x .	159
Figura 75.	$(\Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma^{-1}(x)\}))^* \neq S^* \setminus \{x\}$.	160
Figura 76.	Ejemplo general de Γ_f .	160
Figura 77.	Ejemplo de Γ_f .	162

Resumen

Título: La topología de Khalimsky y su aplicación al procesamiento de imágenes digitales binarias 2D. *

Autor: Yazmin Rubiela Cote Contreras **

Palabras Clave: Procesamiento de imágenes, Plano digital, Topología de Khalimsky, Teorema de la curva de Jordan.

Descripción: La topología digital surgió en los años 1970-1975 con los trabajos pioneros de Rosenfeld [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1975b, Rosenfeld, 1974, Rosenfeld, 1974, Rosenfeld, 1975a]. Su objetivo era introducir conceptos y herramientas topológicas para el análisis de imágenes digitales, especialmente para fundamentar algoritmos de adelgazamiento. Rosenfeld basó sus ideas en grafos y relaciones de adyacencia entre píxeles, que se tradujeron en ciertas nociones de conexidad. Es por eso que en el año 1990 Khalimsky, Kopperman y Meyer [Khalimsky et al., 1990b, Khalimsky et al., 1990a] introdujeron una topología en \mathbb{Z} y en \mathbb{Z}^2 , llamada topología de Khalimsky.

La tesis se divide en tres capítulos. El primero estudia la topología de Khalimsky y el plano digital, centrándose en probar una versión del teorema de la curva de Jordan para esta topología probado en [Khalimsky et al., 1990b]. El segundo capítulo se enfoca en el procesamiento de imágenes binarias, definiendo conexiones y algoritmos de reducción. Se caracterizan los puntos simples y se estudia su relación con la matriz de la imagen. En el tercer capítulo explora la relación entre los enfoques de los dos capítulos anteriores, introduciendo una función Γ introducida por [Khalimsky et al., 1990a] y presentamos su extensión Γ^* aporte de nuestro trabajo.

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas

Abstract

Title: The Khalimsky Topology and Its Application to 2D Binary Digital Image Processing. *

Author: Yazmin Rubiela Cote Contreras **

Keywords: Image processing, Digital plane, Khalimsky Topology, Jordan Curve Theorem.

Description: Digital topology emerged in the 1970s-1975 through the pioneering work of Rosenfeld [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1975b, Rosenfeld, 1974, Rosenfeld, 1975a]. Its objective was to introduce topological concepts and tools for the analysis of digital images, particularly to underpin thinning algorithms. Rosenfeld based his ideas on graphs and adjacency relationships between pixels, translating into certain notions of connectivity. Hence, in 1990, Khalimsky, Kopperman, and Meyer [Khalimsky et al., 1990b, Khalimsky et al., 1990a] introduced a topology on \mathbb{Z} and \mathbb{Z}^2 , known as Khalimsky Topology.

The thesis is structured into three chapters. The first chapter delves into Khalimsky Topology and the digital plane, with a focus on proving a version of the Jordan Curve Theorem for this topology, as demonstrated in [Khalimsky et al., 1990b]. The second chapter concentrates on binary image processing, defining connections and reduction algorithms. Simple points are characterized, and their relationship with the image matrix is studied. In the third chapter, we explore the connection between the approaches of the previous two chapters, introducing a function Γ as presented in [Khalimsky et al., 1990a] and presenting its extension Γ^* as a contribution of our work.

* Bachelor Thesis

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas.

Introducción

El campo de la topología digital tiene sus inicios en la década de los 70 gracias a los trabajos de Rosenfeld [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1975b, Rosenfeld, 1974, Rosenfeld, 1975a]. El objetivo fue introducir conceptos y herramientas topológicas para analizar imágenes digitales, las cuales se interpretan como un subconjunto de \mathbb{Z}^2 donde cada píxel es un punto de \mathbb{Z}^2 . Las ideas que introdujo Rosenfeld se caracterizaron por basarse en grafos, es decir, en las relaciones de adyacencia entre los píxeles de la imagen, lo que se tradujo en ciertas nociones de conexidad que, sin embargo, no son nociones estrictamente topológicas en el sentido que le damos en topología general. Es por eso que años después Khalimsky, Kopperman y Meyer [Khalimsky et al., 1990b, Khalimsky et al., 1990a] introdujeron una topología en \mathbb{Z} y en \mathbb{Z}^2 con el ánimo de dar un mayor soporte matemático a la topología digital. Es interesante observar que Rosenfeld reconoce las ventajas de este enfoque puramente topológico en comparación con el que él introdujo (ver [Kong and Rosenfeld, 1991]).

Rosenfeld quería desarrollar herramientas para el procesamiento digital de imágenes y, en particular, para fundamentar matemáticamente algunos algoritmos de adelgazamiento (“shrinking”). Uno de los primeros resultados que Rosenfeld probó fue una versión del teorema de la curva de Jordan expresado en el lenguaje de los grafos [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970]. Ese resultado juega un papel fundamental para caracterizar los puntos simples, esto es, los puntos que se pueden eliminar de una imagen sin cambiar sus propiedades topológicas. Esa caracterización es a su vez la clave para diseñar un algoritmo para reducir imágenes, como lo

explicaremos mas adelante en el capítulo 2. Este concepto tiene su origen en el concepto de punto eliminable de Rosenfeld [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970], posteriormente en [Rosenfeld, 1976] se introduce el término de punto simple; también se han estudiado para imágenes en 3D (ver por ejemplo [Bertrand, 1994, Lobregt et al., 1980, Morgenthaler, 1981, Tsao and Fu, 1981]).

Se han desarrollado otros enfoques para el análisis de imágenes digitales usando herramientas topológicas. Enfoques más recientes abordan el análisis de imágenes a color, objetos en 3D y dimensiones superiores [Kong and Rosenfeld, 1989, Kong, 1995, Rosenfeld, 1980]. Se han utilizado herramientas de topología algebraica (ver por ejemplo [Gonzalez-Diaz et al., 2005, McAndrew and Osborne, 1996, McAndrew and Osborne, 1993]). También han sido estudiadas sus aplicaciones para el análisis de imágenes médicas (ver por ejemplo [Bazin and Pham, 2007, Palágyi et al., 2001, Saha et al., 2015, Udupa, 1992]) y mejoramiento de las imágenes (ver por ejemplo [Couprie and Bertrand, 2012]) y otros desarrollos sin duda muy interesantes. No pretendemos hacer una revisión bibliográfica de la literatura. Nuestro objetivo es presentar dos aspectos que podrían catalogarse de clásicos, pues fueron desarrollados inicialmente en los años 1970-1980 y 1990.

La tesis está dividida en tres capítulos. En el primero estudiamos la topología de Khalimsky. Comenzaremos presentando la recta digital, es decir, la topología de Khalimsky sobre \mathbb{Z} siguiendo el trabajo [Khalimsky et al., 1990b]. Introducimos los espacios COTS, los cuales son espacios topológicos conexos que tienen a lo sumo dos puntos que no son de corte (es decir,

puntos que separan al espacio en exactamente dos componentes). Seguidamente probaremos que los COTS finitos son homeomorfos a intervalos finitos de la recta digital. Estudiaremos las propiedades de ellos y cómo caracterizarlos.

Posteriormente se definirá el plano digital $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde \mathbb{Z} tiene la topología de Khalimsky y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la topología producto. El objetivo principal de este capítulo es probar la versión del teorema de la curva de Jordan para la topología de Khalimsky en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ver el Teorema 1.39). En esta parte del trabajo usaremos principalmente el artículo [Khalimsky et al., 1990b].

En el segundo capítulo nos enfocaremos en el procesamiento de imágenes digitales de dos colores. Comenzaremos definiendo los conceptos de 4-adyacencia y 8-adyacencia en \mathbb{Z}^2 y sus correspondientes nociones de 4-conexidad y 8-conexidad para subconjuntos de \mathbb{Z}^2 . Llamaremos a \mathbb{Z}^2 dotado de esas relaciones de adyacencia el plano de Rosenfeld para distinguirlo del \mathbb{Z}^2 con la topología de Khalimsky. Hemos seguido principalmente a [Kong and Rosenfeld, 1989].

Un punto p es eliminable de un conjunto S si S y $S \setminus \{p\}$ son equivalentes en el sentido que ambos tienen el mismo número de 8-componentes conexas y sus complementos tienen el mismo número de 4-componentes conexas. Como mencionamos más arriba, los algoritmos de reducción que estudiaremos se basan en poder detectar cuándo un punto es simple (o eliminable). A primera vista parecería que determinar si un punto es eliminable de un conjunto S requiere conocer globalmente a S . Aunque parezca algo sorprendente, se puede caracterizar un punto eliminable basado en información local del punto (de hecho solo hace falta conocer

8 puntos alrededor de p). El objetivo principal del capítulo 2 es presentar una demostración completa de la caracterización de los puntos simples de un subconjunto del plano de Rosenfeld (ver Teorema 2.11) y su correspondiente versión para matrices de píxeles (ver Teorema 2.26) que es la que se implementa en los algoritmos. En la literatura que pudimos consultar solo conseguimos esbozos muy incompletos de la demostración del Teorema 2.11 (ver [Davis, 2012, Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1976]) y del Teorema 2.26 no encontramos su demostración. Por esa razón nos dimos a la tarea de presentar una prueba bastante completa que requirió la verificación de numerosos casos.

La caracterización de los puntos simples hace uso de una versión del teorema de la curva de Jordan en el plano de Rosenfeld (ver los Teoremas 2.6 y 2.7). La demostración la presentaremos en el capítulo 3 siguiendo el trabajo [Khalimsky et al., 1990a] que hace uso de la topología de Khalimsky y es completamente diferente a la dada originalmente por Rosenfeld.

Cerramos este capítulo presentando una aplicación de un algoritmo de reducción escrito en el lenguaje de programación de Python. En lo que respecta a los algoritmos existe una extensa bibliografía sobre este tema (ver por ejemplo, [Boxer and Staecker, 2016, Boxer, 1994, Escribano et al., 2012, Escribano et al., 2008, Escribano et al., 2009, Han and Sostak, 2013, Kong and Rosenfeld, 1996, Kong and Rosenfeld, 1989, Davis, 2012, Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1975b, Rosenfeld, 1974].)

Khalimsky, Kopperman y Meyer [Khalimsky et al., 1990a] mostraron una forma de interpretar el plano de Rosenfeld dentro del plano digital de Khalimsky. Siguiendo esas ideas, en el capítulo 3 veremos la relación existente entre los dos enfoques presentados en los capítulos

1 y 2. Denotaremos por \mathbb{K}^2 al plano digital de Khalismky y por \mathbb{Z}^2 al plano de Rosenfeld. Ellos introdujeron una función $\Gamma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ que les permitió dar una demostración del teorema de la curva Jordan- Rosenfeld usando el teorema de la curva de Jordan topológico que vimos en el capítulo 1. Analizaremos con detenimiento la relación entre los conceptos de conexidad en el plano de Rosenfeld y la conexidad topológica en plano de Khalismky. Como aporte del trabajo extenderemos el operador Γ a otro denotado Γ^* que resultó ser mas útil para entender la relación entre el plano de Rosenfeld y el de Khalimsky y establecer un concepto análogo al de punto simple pero en el contexto topológico (ver definición 1).

Presentaremos algunos resultados originales que no están en la literatura consultada (ver por ejemplo las proposiciones 3.8, 3.20 y 3.21 los Teoremas 3.19 y 3.28).

Los resultados demostrados a lo largo de la tesis que aparecen sin referencia bibliográfica son contribuciones propias de nuestra investigación.

1. Topología digital

El campo de la topología digital tiene sus inicios en los años 1970-1975 gracias a los trabajos de Rosenfeld [Rosenfeld, 1973, Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1975b, Rosenfeld, 1974]. El objetivo fue introducir conceptos y herramientas topológicas para analizar imágenes digitales que son representaciones de imágenes reales. Las ideas que introdujo Rosenfeld tenían un enfoque basado en grafos, años después Khalimsky, Kopperman y Meyer [Khalimsky et al., 1990b, Khalimsky et al., 1990a] con el ánimo de dar un mayor soporte matemático, introdujeron una topología en \mathbb{Z} que modela la recta digital y es conocida como la topología de Khalimsky, la cual estudiaremos en este capítulo.

Iniciamos este capítulo dando algunas definiciones y teoremas generales que utilizaremos en este capítulo. Seguidamente nos dedicamos al estudio de la recta digital y su relación con los espacios COTS los cuales son espacios topológicos conexos, que satisfacen que dado tres puntos uno de ellos separa a los dos en componentes diferentes, daremos algunas características de estos espacios, finalizamos esta parte del trabajo probando que los COTS finitos son homeomorfos a intervalos finitos de la recta digital (ver el Teorema 1.24).

Posteriormente nos centramos en plano digital, el cual es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde \mathbb{Z} tiene la topología de Khalimsky y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la topología producto. Seguidamente caracterizaremos los arcos en el plano en digital (ver el Teorema 1.29). Finalizamos este capítulo con la demostración del teorema de Jordan en el plano digital (ver el Teorema 1.39), el cual es uno de los objetivos

principales de este capítulo.

1.1. Preliminares

En este apartado definiremos conceptos y enunciaremos teoremas de la topología general que se utilizarán a lo largo del documento.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es llamada base de alguna topología si satisface:

- $X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$.
- Si B_1 y B_2 están en \mathcal{B} y $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.2. Un espacio topológico X es llamado **disconexo**, si existen abiertos no vacíos, U y V de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. En caso contrario se dice que el espacio topológico es **conexo**.

Proposición 1.3. Un espacio topológico es conexo si los únicos subconjuntos que son simultáneamente cerrados y abiertos son el vacío y el espacio completo.

Definición 1.4. Un subconjunto C de un espacio topológico X es **una componente conexa** de X , si C es conexo y dado un conexo L de X tal que $C \subset L$ entonces $C = L$, es decir, C es un conexo maximal.

De ahora en adelante diremos solo componente en vez de componente conexa.

Definición 1.5. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una vecindad N_x de x es minimal si dada cualquier otra vecindad V de x , se cumple que $N_x \subseteq V$.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico y A y B subconjuntos de X diremos que A y B son *mutuamente separados*, si $(cl(A) \cap B) \cup (A \cap cl(B)) = \emptyset$

Teorema 1.7. Sean X un espacio y Z un subespacio de X . Entonces, Z es desconexo si y solo si existen subconjuntos A y B de X mutuamente separados y no vacíos tales que $Z = A \cup B$.

Teorema 1.8. Sea X, Y espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$, una función continua. Si $K \subset X$ es conexo, entonces $f(K)$ es conexo.

Teorema 1.9. . Sea A un subconjunto conexo de un espacio X . Si B es tal que $A \subset B \subset cl(A)$, entonces B es conexo.

Teorema 1.10. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios conexos de X , tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

1.2. Topologías Alexandroff

En esta sección mostraremos algunas propiedades generales de las topologías de Alexandroff.

Definición 1.11. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es de **Alexandroff**, si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Estos espacios tiene importancia en las matemáticas aplicadas, una de las aplicaciones de ellas es la que estudiaremos, la topología digital. Ejemplos de espacios Alexandroff son los espacios finito. También tenemos que el producto finitos de espacios Alexandroff es un espacio

de Alexandroff. Una referencia general para los espacios Alexandroff es [Rubiano and Robles, 2013].

En los espacios Alexandroff todo punto $x \in X$ tiene una vecindad minimal que es la intersección de todos los abiertos que contienen a x , será denotada como $N(x)$. En 1935 Alexandroff y Tucker establecieron una relación entre los preordenes y una forma de construir topologías (ver [Rubiano and Robles, 2013]). El orden de especialización \preceq_τ en un espacio topológico (X, τ) se define por: $x \preceq_\tau y$ si y solo si $x \in cl_\tau\{y\}$. En los espacios Alexandroff se tiene que

$$N(x) = \{y \in X : x \preceq_\tau y\}.$$

En relación a la continuidad en espacios Alexandroff tenemos:

Proposición 1.12. *Sean X, Y espacios de Alexandroff y $f : X \rightarrow Y$. Entonces, f es continua si y solo si $f(N(x)) \subseteq N(f(x))$, donde $N(x)$ y $N(f(x))$ son las vecindades minimales de x y $f(x)$ respectivamente.*

1.3. La recta digital

Nuestro objetivo en este apartado será demostrar que los **COTS** finitos son homeomorfos a intervalos de la recta digital. Para ello iniciaremos definiendo la base de la topología digital y seguidamente presentaremos una caracterización de los COTS.

La recta digital es \mathbb{Z} con la topología generada por los siguientes abiertos básicos:

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{Si } n \text{ es impar.} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{Si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En la figura 1 se puede observar las vecindades minimales de los enteros del intervalo $[-3, 5]$ con la topología digital y el orden de especialización. Esta topología también la llamaremos **topología de Khalimsky** y la denotaremos como \mathbb{K} .

Proposición 1.13. *\mathbb{Z} con la topología digital es un espacio Alexandroff conexo donde todo punto es abierto o cerrado.*

Demostración. Supongamos que \mathbb{Z} es desconexo, entonces existen U y V abiertos no vacíos tales que $\mathbb{Z} = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Observe primero que si un abierto U contiene todos los pares, entonces es igual a \mathbb{Z} , dado que U es la unión de abiertos básicos de la forma $\{n-1, n, n+1\}$ donde n es par, contradiciendo así la desconexidad. Por lo tanto, U y V deben contener ambos números pares.

Sea $n \in U$ con n par, con la condición de que $n+2 \notin U$. Dado que n es par se tiene que el abierto más pequeño que contiene a n es $\{n-1, n, n+1\}$, luego $\{n-1, n, n+1\} \subset U$. Si $n+2 \notin U$, entonces $n+2 \in V$, de igual forma como $n+2$ es par, $\{n+1, n+2, n+3\} \subset V$ por lo que $U \cap V \neq \emptyset$ contradiciendo la desconexidad. Por tanto, \mathbb{Z} es conexo con la topología digital. □

Los intervalos finitos de la recta digital poseen una propiedad especial que definiremos a continuación.

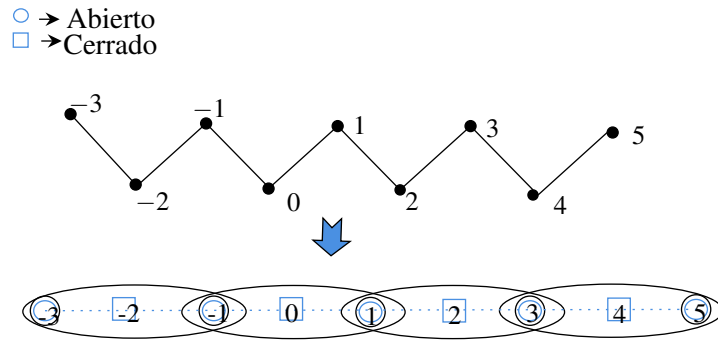


Figura 1. Preorden de especialización de la topología digital junto con las vecindades minimales.

Definición 1.14. Un espacio topológico conexo es **COTS** si satisface la siguiente propiedad:

Para todo $Y \subseteq X$ con tres elementos, existe $y \in Y$ tal que $X \setminus \{y\}$ tiene dos componentes y los otros dos elementos están en componentes diferentes de $X \setminus \{y\}$. Es decir, dado tres puntos uno de ellos separa a los otros dos.

La terminología de COTS es por las siglas en inglés *Connected Order Topological Space*.

Teorema 1.15. \mathbb{Z} es un COTS con la topología digital.

Demostración. Sea $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $a < b < c$ en el orden usual de \mathbb{Z} . Se tiene $\mathbb{Z} \setminus \{b\} = A(b) \cup B(b)$ donde:

$$A(b) = \{x \in \mathbb{Z} : x < b\} \text{ y } B(b) = \{x \in \mathbb{Z} : x > b\}.$$

Es claro que $a \in A(b)$ y $c \in B(b)$. Falta ver que $A(b)$ y $B(b)$ son conexos, para mostrar que c , separa a y b .

Supongamos que $A(b)$ es desconexo. Sean U y V abiertos no vacíos tales que $A(b) = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que ambos abiertos deben contener números pares menores que b . Sea n un número par tal que $n \in U$ y $n+2 \in V$, entonces, por definición de la topología de la recta digital, $\{n-1, n, n+1\} \subset U$, de igual manera, como $n+2$ es par, tenemos que $\{n+1, n+2, n+3\} \subset V$, luego $U \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, $A(b)$ es conexo. Análogamente se prueba que $B(b)$ también es conexo. Por lo tanto \mathbb{Z} es COTS con la topología digital. \square

El siguiente resultado juega un papel central en todo el desarrollo de la topología digital y será demostrado mas adelante.

Teorema 1.16. *[Khalimsky et al., 1990b] Todo COTS finito es homeomorfo a un intervalo de la recta digital.*

1.3.1. Caracterización de los COTS. En este apartado presentamos la demostración del Teorema 1.16. Para hacerlo necesitaremos algunos resultados generales sobre espacios conexos.

Lema 1.17. *1. Si Y es un subconjunto conexo de un espacio topológico conexo X y A y B separan a $X \setminus Y$, entonces $Y \cup A$ es conexo. En particular, si A es abierto y cerrado en $X \setminus \{x\}$, para algún $x \in X$, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.*

2. Un espacio finito no vacío con al menos n componentes se puede expresar como la unión de n subconjuntos abiertos-cerrados no vacíos.

Demostración. 1) La demostración la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que

$Y \cup A$ es desconexo, luego cerrados relativos de $Y \cup A$, X_1, X_2 no vacíos tales que $Y \cup A = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Dado que A, B separan a $X \setminus Y$, tenemos que:

$$X = A \cup B \cup Y = B \cup X_1 \cup X_2.$$

Como Y es conexo, supondremos que $Y \subset X_1$ y $X_2 \subset A$. Mostraremos ahora que $B \cup X_1$ y X_2 son mutuamente separados, para ello debemos ver que $cl(X_1 \cup B) \cap X_2 = \emptyset = (X_1 \cup B) \cap cl(X_2)$.

- $cl(X_1 \cup B) \cap X_2 = (cl(X_1) \cap X_2) \cup (cl(B) \cap X_2)$.

Tenemos que X_1 es cerrado relativo de $Y \cup A$ y $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, luego $cl(X_1) \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Por otra parte $X_2 \subset A$, y A, B separan a $X \setminus Y$ por tanto tenemos que $A \cap cl(B) = \emptyset$, luego $X_2 \cap cl(B) = \emptyset$. Por consiguiente $cl(X_1 \cup B) \cap X_2 = \emptyset$.

- $(X_1 \cup B) \cap cl(X_2) = (X_1 \cap cl(X_2)) \cup (B \cap cl(X_2))$.

X_2 es cerrado y $X_2 \subset A$ luego tenemos $B \cap cl(X_2) = \emptyset$ y $X_1 \cap cl(X_2) = \emptyset$. Por tanto $(X_1 \cup B) \cap cl(X_2) = \emptyset$.

Como $B \cup X_1$ y X_2 son mutuamente separados, por Teorema 1.7 X es desconexo, lo que es una contradicción, por tanto $Y \cup A$ es conexo. Para la segunda de parte del inciso 1, basta con tomar $Y = \{x\}$ y $B = (X \setminus \{x\}) \setminus A$, pues es claro que A y B separan a $X \setminus \{Y\} = X \setminus \{x\}$.

2) Esta prueba la realizaremos por inducción sobre el número de componentes. Supongamos que X tiene al menos dos componentes. Sea A una componente de X , como A es una componente de X , A es cerrado. Se tiene que $C = X \setminus A$ es abierto.

Veamos que C es cerrado. Se tiene que X es finito, luego C es la unión finita de componentes de $X \setminus A$, es decir que C es cerrado, por lo tanto A es abierto. Se sigue que X es la unión de dos abiertos cerrados.

Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que es cierto para $n = k + 1$. Sea X con al menos $k + 1$ componentes. Sea A una componente de X , luego $X \setminus A$ tiene al menos k componentes, por hipótesis de inducción, se tiene que $X \setminus A$ se puede expresar como la unión de k disjuntos abiertos-cerrados. Por ser A componente se tiene que A es un cerrado. Veamos que A es abierto, dado que $X \setminus A$ es la unión de k cerrados, entonces $X \setminus A$ es cerrado, se sigue que A es abierto. Por lo tanto X es la unión finita de $k + 1$ abiertos-cerrados.

□

Lema 1.18. [Khalimsky et al., 1990b] Sea X un espacio conexo.

1. Suponga que w y x son elementos distintos de X y A, B son abiertos-cerrados en $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{w\}$, respectivamente.

- Si $w \in A$ y $x \notin B$, entonces $B \subset A$.
- Si B es un subconjunto no vacío de A , entonces $x \notin B$ y $w \in A$.

2. Si P , Q y R son conjuntos abiertos-cerrados, disjuntos y no vacíos cuya unión es $X \setminus \{x\}$, entonces para cada $p \in P$, $Q \cup R$ está contenida en una componente de $X \setminus \{p\}$.

Demostración. 1) Supongamos primero que $w \in A$ y $x \notin B$ y veamos que $B \subset A$. Por el Lema 1.17, $B \cup \{w\}$ es conexo. Dado que $w \in A$ y A es abierto-cerrado, entonces $B \cup \{w\} \subset A$, luego $B \subset A$.

Supongamos que $B \neq \emptyset$ y $B \subset A$. Claramente, $x \notin B$, pues A es abierto cerrado de $X \setminus \{x\}$. Veamos ahora que $w \in A$. Tenemos que B es abierto cerrado en $X \setminus \{w\}$, se sigue del Lema 1.17 que $B \cup \{w\}$ es conexo y $B \subset A$, dado que A es abierto-cerrado, necesariamente $w \in A$.

2) Como Q y R son abiertos-cerrados en $X \setminus \{x\}$, por Lema 1.17 tenemos que $Q \cup R \cup \{x\}$ es conexo en X , en particular en $X \setminus \{p\}$, pues $p \notin Q \cup R \cup \{x\}$. Por tanto $Q \cup R$ está en una componente de $X \setminus \{p\}$.

□

Definición 1.19. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es llamado **punto de corte** si $X \setminus \{x\}$ tiene 2 componentes. Un punto x es **final** si no es de corte, es decir, si $X \setminus \{x\}$ tiene una sola componente.

Una característica que estudiaremos en esta sección es que un COTS tiene a lo más 2 puntos finales. Esta propiedad es similar a la de que caracteriza los arcos: Un continuo X es un arco si y solo si X tiene exactamente dos puntos de no corte (ver [Nadler, 2017] Teorema 6.17).

Proposición 1.20. [Khalimsky et al., 1990b] Sea X un COTS, entonces X tiene a lo más dos puntos finales y cualquier otro punto es un punto de corte.

Demostración. Supongamos X tiene tres puntos finales, por definición de COTS, uno de ellos separa a los otros en dos componentes, luego uno de ellos es un punto de corte, lo que contradice nuestra suposición. Por tanto, X no puede tener más de dos puntos finales y todos los demás son de corte. \square

El siguiente resultado es fundamental para entender los COTS y justifica el nombre que reciben. Primero introducimos una notación. Si $<$ es un orden total sobre X , $x \in X$, denotamos los siguientes conjuntos:

$$L(x) = \{y \in X : y < x\} \text{ y } U(x) = \{y \in X : y > x\}.$$

Teorema 1.21. [Khalimsky et al., 1990b] Si X es COTS, entonces existe un orden total $<$ en X tal que $L(x)$ y $U(x)$ son las componentes de $X \setminus \{x\}$ para cada $x \in X$.

Recíprocamente, si X es un espacio topológico conexo y existe un orden $<$ total sobre X tal que para cada x , $L(x)$ y $U(x)$ son las componentes de $X \setminus \{x\}$, entonces X es COTS.

Demostración. Probaremos primero que si X es COTS, entonces existe un orden total en X como en el enunciado del teorema. Fijemos $x \in X$, con la condición de que x no es un punto final, por la Proposición 1.20 se sigue que x es un punto de corte, luego $X \setminus \{x\}$ tiene dos componentes. Llamaremos U_x a una y L_x a la otra. Para $y \in X \setminus \{x\}$ definimos los conjuntos L_y y U_y de la siguiente manera: Si $y \in L_x$, entonces L_y será la componente de $X \setminus \{y\}$ que no contiene a x . En el caso de que $y \notin L_x$, L_y es la componente que contiene a x . Tenemos entonces que si $y \in L_x$, $x \notin L_y$ y por el Lema 1.18 (1) se sigue que $L_y \subset L_x$. Análogamente, si $y \notin L_x$,

entonces $L_y \subset L_x$.

Definimos el orden de la siguiente manera:

$$y < z \Leftrightarrow L_y \subset L_z.$$

Es fácil ver que es un orden parcial. Falta ver que es un orden total. Para ello debemos ver que dado y, z se tiene que $z < y$ o $y < z$.

Sean x, y, z elementos distintos de X , consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $z \in L_x$ y $y \notin L_x$. Teniendo en cuenta la definición se sigue $x \notin L_z$ y $x \in L_y$. Por el Lema 1.18 (1) $L_z \subset L_x$ y $L_x \subset L_y$. Se sigue que $L_z \subset L_y$, es decir, $z < y$.

Caso 2: Si $y \in L_x$ y $z \notin L_x$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior se concluye que $y < z$.

Caso 3: Si $y, z \in L_x$. Para este caso, debemos considerar los siguientes subcasos:

1. $z \in L_y$ y $y \notin L_z$. Por el Lema 1.18(1) tenemos $L_z \subset L_y$, por lo tanto $z < y$.
2. $z \notin L_y$ y $y \in L_z$. Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior concluimos $y < z$.
3. $z \in L_y$ y $y \in L_z$, por definición L_y y L_z tenemos $z \notin U_y$ y $x \notin L_z$. Luego por el Lema 1.18(1) $U_y \subset L_z$ y $L_z \subset L_x$, es decir que $U_y \subset L_x$. Por otra parte si $y \in L_x$, entonces

$x \notin L_y$, luego $L_y \subset L_x$, se sigue que:

$$X \setminus \{y\} = U_y \cup L_y \subset X \setminus \{x\}$$

Lo que es una contradicción, luego este caso no se puede dar.

4. $z \notin L_y$ y $y \notin L_z$. Por definición de L_y y L_z se tiene que $z \in U_y$ y $y \in U_z$. Dado que $y, z \in L_x$, entonces $x \notin L_y$ y $x \notin L_z$, es decir, $x \in U_y$ y $x \in U_z$.

Por tanto tenemos y y z no separan a $\{x, y, z\}$, pues $z, x \in U_y$, $y, z \in L_x$ y $y, x \in U_z$.

Contradiendo la definición de COTS, luego este caso tampoco se puede dar.

El segundo enunciado se sigue directamente de la definición de COTS. □

De ahora en adelante en un COTS usaremos $<$ para denotar el orden total dado por el Teorema 1.21. La expresión **sucesor y predecesor inmediato** es en relación a ese orden.

Diremos que x e y son **adyacentes** si no existe un elemento entre los dos según este orden.

Lema 1.22. [Khalimsky et al., 1990b] Sea X un COTS y $x, y \in X$.

1. Si A, B separan a $X \setminus \{x\}$, entonces $cl(A) \subset A \cup \{x\}$ y $\{x\}$ es abierto o es cerrado. Además:

- A es abierto, si y solo si, $\{x\}$ es cerrado.
- A es cerrado, si y solo si, $\{x\}$ es abierto.

En particular, cada punto de corte es abierto o es cerrado.

2. Si x no tiene sucesor inmediato, entonces $\{x\}$ es cerrado.

3. Suponga que X tiene al menos tres puntos. Si x e y son adyacentes, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $\{x\}$ es cerrado.

b) $y \notin cl(\{x\})$.

c) $\{y\}$ es abierto.

d) $x \in cl(\{y\})$.

4. x e y son puntos adyacentes si y solo si $\{x, y\}$ es conexo.

Demostración. 1. Probaremos primero que $cl(A) \subset A \cup \{x\}$ y $\{x\}$ es abierto o es cerrado.

Tenemos que A y B separan a $X \setminus \{x\}$, luego $cl(A) \cap B = \emptyset$ y $cl(B) \cap A = \emptyset$. Dado que $A \subset X \setminus B$ y teniendo en cuenta lo anterior se sigue que $cl(A) \subset A \cup \{x\}$.

Veamos ahora que $\{x\}$ es abierto o es cerrado.

Si $x \in cl(A)$, entonces $cl(A) = A \cup \{x\}$. Se sigue que $cl(B) = B \cup \{x\}$ o $cl(B) = B$. Si $cl(B) = B$, entonces tenemos que $A \cup \{x\}$ es un abierto-cerrado de X , contradiciendo la conexidad de X . Entonces $cl(B) = B \cup \{x\}$, por tanto $\{x\}$ es cerrado, pues $cl(A) \cap cl(B) = \{x\}$.

Si $x \notin cl(A)$, entonces $cl(A) = A$. Por un razonamiento análogo al anterior se concluye que $cl(B) = B$, por tanto tendemos que $\{x\}$ es abierto, pues $X \setminus (A \cup B) = \{x\}$.

■ Veamos que si A es abierto, si y solo si, $\{x\}$ es cerrado. Si A es abierto entonces

$cl(A) = A \cup \{x\}$, con un razonamiento análogo a lo considerado anteriormente, se sigue que $cl(B) = B \cup \{x\}$, por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, pues $cl(A) \cap cl(B) = \{x\}$.

Supongamos ahora que $\{x\}$ es cerrado y $x \notin cl(A)$, luego $x \notin cl(B)$, es decir, $cl(A) = A$ y $cl(B) = B$. Luego $X \setminus (A \cup B) = \{x\}$, es decir, que $\{x\}$ es abierto, lo que es una contradicción pues X es conexo. Por lo tanto $x \in cl(A)$ y por consiguiente $cl(B) = B \cup \{x\}$, se sigue que A es abierto, pues $A = X \setminus cl(B)$.

- Veamos que A es cerrado, si y solo si, $\{x\}$ es abierto. En ambas direcciones se razona como en el caso anterior.

2. Teniendo en cuenta el inciso anterior basta con demostrar que $U(x)$ es un conjunto abierto, para así concluir que $\{x\}$ es cerrado. Como x no tiene sucesor inmediato tenemos que para cada $y \in U(x)$ existe un $z \in U(x)$ tal que $x < z < y$. Tenemos que el conjunto $X \setminus cl(L(z))$ es un abierto que contiene a y , pues por el inciso anterior se tiene que $cl(L(z)) \subset L(z) \cup \{z\}$. Luego para cada y tenemos $X \setminus cl(L(z)) \subset U(x)$, se sigue que $U(x)$ es abierto, pues todo punto de $U(x)$ es interior. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

3. Para ver las equivalencias probaremos que $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$

- $a \Rightarrow b$. Si $\{x\}$ es cerrado, entonces $cl\{x\} = \{x\}$, por tanto $y \notin cl\{x\}$.
- $b \Rightarrow c$. Supongamos que $y < x$ y veamos que $U(y)$ es cerrado. Note que $U(y) = U(x) \cup \{x\}$ luego tenemos que $cl(U(y)) = cl(U(x) \cup \{x\}) = cl(U(x)) \cup cl\{x\}$ y $cl(U(y)) \subset U(y) \cup \{y\}$. Por hipótesis se sigue que $y \notin cl(U(y))$, es decir que $cl(U(y)) = U(y)$. Por lo tanto $\{y\}$ es abierto.

- $c \Rightarrow d$. Tomaremos nuevamente que $y < x$. Si $\{y\}$ es abierto, entonces $U(y)$ es cerrado. Tenemos que $L(x) = L(y) \cup \{y\}$ es un abierto, pues $X \setminus U(y) = L(x)$. Por inciso 1 y la conexidad de X se sigue que $cl(L(x)) = L(x) \cup \{x\}$. Por otro lado tenemos $cl(L(x)) = cl(L(y) \cup \{y\}) = cl(L(y)) \cup cl\{y\}$ y la $cl(L(y)) \subset L(y) \cup \{y\} = L(x)$. Por tanto $x \in cl\{y\}$, pues $x \in cl(L(x))$.
- $d \Rightarrow a$ Si $L(x) = L(y) \cup \{y\}$ y $x \in cl\{y\}$, entonces $x \in cl(L(x))$. Por inciso 1 tenemos $cl(L(x)) = L(x) \cup \{x\}$, por lo tanto $U(x)$ es abierto, se sigue nuevamente por inciso 1 que $\{x\}$ es cerrado.

4. Si x e y son adyacentes, sin pérdida de generalidad supondremos que $x \in cl\{y\}$, se sigue que $\{y\} \subset \{x, y\} \subset cl\{y\}$. Por el Teorema 1.9 tenemos $\{x, y\}$ es conexo.

Para el recíproco lo demostraremos por contradicción. Si x y y no son adyacentes, entonces existe z tal que $y < z < x$. Entonces z es abierto o es cerrado por tanto $U(z)$ y $L(z)$ son abiertos o cerrados que separan a $\{x, y\}$. Lo cual contradice la conexidad de $\{x, y\}$. Por lo tanto x e y son adyacentes.

□

De ahora en adelante, si X es un COTS finito etiquetaremos sus elementos de la siguiente manera $\{x_1, \dots, x_n\}$ donde los índices están dados según el orden total asociado a X . Observe que x_{i-1} y x_{i+1} son los adyacentes a x_i .

Lema 1.23. *Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un COTS finito con $n \geq 3$ y $1 \leq i \leq n$.*

1. Si x_i es cerrado, entonces se cumple lo siguiente:

- a) Si $1 \leq i-1 < n$ y $i+1 \leq n$, entonces $N(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$.
- b) Si $i = n$, entonces $N(x_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$.
- c) Si $i = 1$, entonces $N(x_1) = \{x_1, x_2\}$.

2 Si x_i es abierto, entonces se cumple lo siguiente:

- a) Si $1 \leq i-1 < n$ y $i+1 \leq n$, entonces $cl(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$.
- b) Si $i = n$, entonces $cl(x_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$.
- c) Si $i = 1$, entonces $cl(x_1) = \{x_1, x_2\}$.

Demostración. Primero probaremos 1.

[a)] Veamos primero que $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto. Si x_i es cerrado, por el Lema 1.22 (3), tenemos que x_{i-1} y x_{i+1} son abiertos. Consideremos los siguientes casos:

1. ■ **Caso 1:** Si $3 \leq i$ y $i \leq n-2$, entonces por el Lema 1.22 se tiene $\{x_{i-2}\}$ y $\{x_{i+2}\}$ son cerrados. Por tanto $U(x_{i-2})$ y $L(x_{i+2})$ son abiertos. Se sigue que $U(x_{i-2}) \cap L(x_{i+2}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto.
- **Caso 2:** Si $i \geq 3$ y $i > n-2$, entonces como x_{i-1} es abierto, x_{i-2} es cerrado, luego $U(x_{i-2}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto.
- **Caso 3** Si $i < 3$ y $i+2 \leq n$. Por un razonamiento análogo al caso anterior se tiene $L(x_{i-2}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto.

- **Caso 4** Si $|X| = 3$, entonces $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto.

Concluimos que $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es abierto y en consecuencia $N(x_i) \subseteq \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$.

Supongamos que $\{x_{i-1}, x_i\}$ es abierto en X . Por el Lema 1.22 (d), tenemos que $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es un conjunto conexo. Como $\{x_{i-1}, x_i\}$ es abierto en X , también lo es $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, por tanto x_{i+1} es cerrado. Dado que x_i es cerrado x_{i+1} es abierto, es decir que $\{x_{i+1}\}$ es un abierto-cerrado en $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, lo cual contradice la conexidad de $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. Concluimos $\{x_{i-1}, x_i\}$ no es un abierto. Análogamente se demuestra que $\{x_i, x_{i+1}\}$ no es abierto. Por lo tanto $N(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$.

2. Dado que $|X| \geq 3$, si $i = n$, entonces x_{i-1} y x_{i-2} adyacentes a x_i y x_{i-1} respectivamente. Como x_i es cerrado x_{i-1} es abierto, se sigue que x_{i-2} es cerrado. Luego $U(x_{i-2}) = \{x_{i-1}, x_i\}$ es abierto. Por hipótesis X es conexo, entonces x_i no puede ser abierto, por lo tanto $N(x_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$.
3. Utilizando un razonamiento análogo al anterior podemos concluir que $N(x_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$.

Probaremos ahora 2.

[a)] Si $1 \leq i-1 < n$ y $i+1 \leq n$, entonces x_{i-1}, x_{i+1} son adyacentes a x_i . Por el Lema 1.22 (3) se sigue que $x_{i-1}, x_{i+1} \in cl\{x_i\}$. Por tanto $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\} \subset cl\{x_i\}$. Falta ver que $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es cerrado. Consideremos los siguientes casos:

1.
 - **Caso 1:** Si $3 \leq i$ y $i \leq n-2$, entonces por el Lema 1.22 (3) se tiene que x_{i-2} y x_{i+2} son abiertos, luego $U(x_{i-2})$ y $L(x_{i+2})$ son cerrados. Por tanto $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\} =$

$U(x_{i-2}) \cap L(x_{i+2})$ es cerrado.

- **Caso 2:** Si $i \geq 3$ y $i > n - 2$, entonces x_{i-2} abierto. Luego $U(x_{i-2}) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es cerrado.
- **Caso 3** $i < 3$ y $i + 2 \leq n$, por un razonamiento análogo al anterior se concluye que $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es cerrado.
- **Caso 4** Si $|X| = 3$, entonces $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ es cerrado.

2. Dado que $|X| \geq 3$ y si $i = n$, entonces existen x_{i-1}, x_{i-2} adyacentes a x_i y x_{i-1} respectivamente. Como x_{i-1} y x_i son adyacentes, entonces $x_{i-1} \in cl\{x_i\}$, es decir, $\{x_{i-1}, x_i\} \subset cl(\{x_i\})$. Por otra parte x_{i-2} es abierto, pues x_{i-1} cerrado, dado que x_i es abierto. Por tanto $U(x_{i-2}) = \{x_{i-1}, x_i\}$ es cerrado, entonces tenemos que $cl\{x_i\} = \{x_{i-1}, x_i\}$.

3. Con un razonamiento análogo al inciso anterior se concluye $cl\{x_i\} = \{x_i, x_{i+1}\}$.

□

Teorema 1.24. [Khalimsky et al., 1990b] *Todo COTS finito es homeomorfo a un intervalo de la recta digital.*

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un COTS finito, Y un intervalo de la recta digital. Observe que todo punto de X es abierto o es cerrado por Lema 1.22 (3). Consideremos dos casos:

- **Caso 1:** Si $\{x_1\}$ es abierto, el intervalo de la recta digital escogido es $Y = \{1, \dots, m\}$ y definimos f de la siguiente manera:

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(x_i) = i$$

Es claro que f es biyectiva, veamos ahora que f y f^{-1} son continuas.

Para probar la continuidad de utilizaremos la Proposición 1.12. Sea $n \in Y$, consideraremos dos casos con respecto a n :

- **Caso 1:** Si n es impar, entonces $N(n) = \{n\}$. Por Lema 1.22(3) se tiene $f^{-1}(N(n)) = \{x_n\}$ es un conjunto abierto y además que $N(x_n) = \{x_n\}$.
- **Caso 2:** Si n es par, debemos considerar dos casos:
 - **Caso 2.1:** Si $n < m$, entonces $n + 1 \in Y$, luego $N(n) = \{n - 1, n, n + 1\}$, por tanto $f^{-1}(N(n)) = \{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$. Por otra parte tenemos que $\{x_1\}$ es abierto, entonces por Lema 1.22(3) se tiene que $\{x_n\}$ es cerrado, se sigue que $N(x_n) = \{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ por Lema 1.23 (1).
 - **Caso 2.2:** Si $n = m$, entonces $N(n) = \{n - 1, n\}$ y $f^{-1}(N(n)) = \{x_{n-1}, x_n\}$. Por Lema 1.23 (1) tenemos $N(x_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, pues $\{x_n\}$ es cerrado.

Por tanto tenemos $f^{-1}(N(n)) = N(x_n) = N(f^{-1}(n))$. De forma análoga podemos concluir $f(N(x_i)) = N(f(x_i)) = N(i)$, por tanto f y f^{-1} son continuas.

- **Caso 2:** Si $\{x_1\}$ es cerrado, entonces el intervalo de la recta digital es $Y = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ y definimos f de la misma forma del caso 1. Realizando un razonamiento análogo al anterior concluimos que f y f^{-1} son continuas.

Por lo tanto $X \cong Y$

□

Otra caracterización de la recta digital puede verse en [Honari and Bahrampour, 1999].

En el siguiente lema presentamos otra propiedad importante de los COTS.

Lema 1.25. [Khalimsky et al., 1990b] *Si X es un espacio topológico conexo finito que tiene dos puntos distintos e y f tal que para cada punto $z \in X \setminus \{e, f\}$ los dos están en componentes diferentes de $X \setminus \{z\}$, entonces X es un COTS, e y f son puntos finales.*

Demostración. Fijemos $z \in X \setminus \{e, f\}$. Veamos primero que z es un punto de corte. Supongamos que $X \setminus \{z\}$ tiene al menos tres componentes, entonces por el Lema 1.17(2) se tiene que existen 3 abiertos cerrados A, B, C disjuntos tales que $X \setminus \{z\} = A \cup B \cup C$.

Podemos suponer que $e, f \notin A$, luego $e, f \in B \cup C$, se sigue por el Lema 1.18, e, f están en la misma componente de $X \setminus \{t\}$ para $t \in A$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto $X \setminus \{z\}$ tiene 2 componentes.

Ahora veamos que e, f son puntos finales para ello probaremos que $X \setminus \{e\}$ es conexo.

Sea $w \in X \setminus \{e\}$ y $U(w)$ la componente $X \setminus \{w\}$ tal que $f \in U(w)$. Se tiene que $U(w)$ es un abierto cerrado de $X \setminus \{w\}$, por el Lema 1.17(1) tenemos $U(w) \cup \{w\}$ es conexo. Note que $X \setminus \{e\} = \bigcup_{w \in X \setminus \{e\}} U(w) \cup \{w\}$, donde $f \in U(w), \forall w \in X \setminus \{e\}$. Se sigue $\bigcap_{w \in X \setminus \{e\}} U(w) \cup \{w\} \neq \emptyset$, por tanto $X \setminus \{e\} = \bigcup_{w \in X \setminus \{e\}} U(w) \cup \{w\}$ es conexo.

Análogamente se puede concluir que $X \setminus \{f\}$ es conexo, es decir, que e, f son puntos finales de X .

Veamos que X es COTS. Denotaremos U_w la componente de $X \setminus \{w\}$ que tiene a f y L_w la que tiene e para cada $w \in X \setminus \{e, f\}$.

Probemos primero que para x, y puntos distintos de X se tiene que si $x \in U_y$ si y solo si $y \in L_x$. Supongamos que $x \in U_y$ y $y \in U_x$ entonces $x \notin L_y$ luego por el Lema 1.18 $L_y \subset U_x$, lo cual es una contradicción, pues $e \notin U_x$. De forma análoga se tiene una contradicción para el caso $y \in L_x$ y $x \in L_y$. Por lo tanto si $x \in U_y$ si y solo si $y \in L_x$.

Sea $Y = \{x, y, z\}$. Supongamos que ni x ni z separan a los puntos de Y , entonces y debe separar a los elementos de Y . Dado que z no separa a los elementos de Y . Sin pérdida de generalidad asumiremos que $x, y \in L_z$, luego $z \in U_y$ y $z \in U_x$. Como x no separa los puntos de Y y $z \in U_x$, entonces $y \in U_x$, se sigue $x \in L_y$, es decir que y separa los elementos de Y , pues $x \in L_y$ y $z \in U_y$, por lo tanto X es un COTS. \square

1.4. El plano digital.

El **plano digital** es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde \mathbb{Z} tiene la topología de Khalimsky y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la topología producto. En capítulos posteriores la denotaremos como \mathbb{K}^2 , en referencia a Khalimsky. Un **plano digital finito** es el producto de dos intervalos acotados de \mathbb{Z} .

La base para la topología producto en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ viene dada de la siguiente manera:

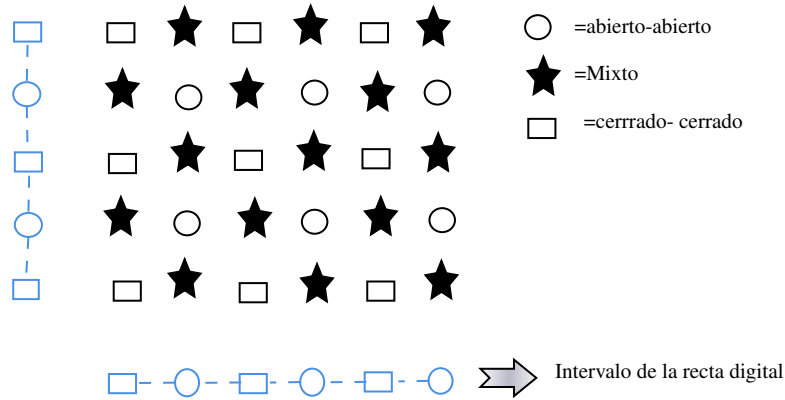


Figura 2. Porción del plano digital.

$$B(m,n) = \begin{cases} \{(m,n)\} & \text{si } m \text{ y } n \text{ son impares,} \\ \{(m+a,n) \mid a = -1,0,1\} & \text{si } m \text{ es par y } n \text{ es impar,} \\ \{(m,n+b) \mid b = -1,0,1\} & \text{si } m \text{ es impar y } n \text{ es par,} \\ \{(m+a,n+b) \mid a,b = -1,0,1\} & \text{si } m \text{ y } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Una porción del plano digital se puede ver en la figura 2. En el plano digital encontramos dos tipos de puntos. Los **puntos puros** son las parejas (x,y) tal que x e y son ambos abiertos o ambos cerrados. Los otros son llamados **puntos mixtos** y son las parejas tales que una coordenada es abierta y la otra es cerrada.

En esta sección presentaremos algunos resultados en relación con los arcos y las adyacencias en el plano digital.

1.4.1. Arcos y Caminos. . Comenzaremos con las definiciones de camino y arco. Seguidamente daremos una caracterización de los COTS y en la siguiente sección caracterizar los arcos en el plano a través de las adyacencias de sus puntos.

Definición 1.26. *Sea Y un espacio topológico. Un camino COTS (respectivamente un arco COTS) en Y es la imagen continua (respectivamente, homeomorfa) de algún COTS finito.*

De ahora en adelante nos referiremos a los caminos y arcos sin escribir la palabra COTS.

Proposición 1.27. *Sea X un COTS y $f : X \rightarrow Y$ una función continua inyectiva, entonces $f(X)$ es un COTS.*

Demostración. Sea $f(X) = C$, queremos ver que C es un COTS, note primero C es conexo, pues f es continua y X es conexo, por ser COTS.

Sea $\{x, y, z\} \subset C$, veamos que uno de ellos separa a los otros dos en componentes distintas. Como $x, y, z \in C$, existen x_0, y_0, z_0 , tales que $f(x_0) = x$, $f(y_0) = y$ y $f(z_0) = z$ con $x_0, y_0, z_0 \in X$.

Tenemos que $\{x_0, y_0, z_0\} \subset X$, como X es COTS, uno de ellos separa los otros dos en componentes diferentes. Sin pérdida de generalidad supondremos que es y_0 , es decir que $X \setminus \{y_0\}$ tiene dos componentes las cuales denotaremos como A y B donde $x_0 \in A$ y $z_0 \in B$. Dado que f es continua y inyectiva se sigue que $f(X \setminus \{y_0\}) = C \setminus \{y\} = f(A) \cup f(B)$, donde $f(A)$ y $f(B)$ son componentes conexas de $C \setminus \{y\}$ y $x \in f(A)$ y $z \in f(B)$, por lo tanto C es un COTS.

□

Definición 1.28. Sea Y un espacio topológico. Las adyacencias de un punto $x \in Y$ es el conjunto

$$A(x) = \{y \in Y : y \neq x, \{x, y\} \text{ es conexo}\}.$$

El siguiente teorema da una caracterización de los COTS a partir del conjunto de adyacencias de los puntos en el plano digital.

Teorema 1.29. [Khalimsky et al., 1990b] Sea Y un espacio topológico finito.

1. $\{x, y\} \subset Y$ es conexo si y solo si $x \in cl(y)$ o $y \in cl(x)$. Además se tiene que $A(x) \cup \{x\} = cl(x) \cup N(x)$ para cualquier $x \in Y$.
2. Si C es un conexo minimal de Y que contiene a los puntos x e y , entonces C es un arco con puntos finales x e y .
3. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) Y es conexo a través de arcos.
 - b) Y es conexo a través de caminos.
 - c) Y es conexo.

Supongamos que A y B son subconjuntos disjuntos de Y no vacíos y conexos. Entonces $A \cup B$ es conexo si y solo si para algunos $a \in A$ y $b \in B$, $\{a, b\}$ es conexo.

4. Si $x \in Y$, entonces cualquier arco que contiene a x interseca a $A(x)$. Además si Y es conexo, entonces cada componente de $Y \setminus \{x\}$ interseca $A(x)$. En consecuencia, si $|A(x)| = 1$

y Y es COTS, entonces x es un punto final.

5. Si Y es COTS, entonces existen puntos distintos x, y tales que $|A(y)| = |A(x)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para $w \in Y \setminus \{x, y\}$. Recíprocamente, si Y es conexo y contiene puntos distintos x, y tales que $|A(y)| = |A(x)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para $w \in Y \setminus \{x, y\}$, entonces Y es un COTS.

Demostración. 1. Por el Lema 1.22 (4), $\{x, y\}$ es conexo si y solo si x, y son adyacentes.

De nuevo, por el Lema 1.22 (3), tenemos que $x \in cl\{y\}$ o $y \in cl\{x\}$. Ahora veamos que $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup N(x)$.

$$A(x) \cup \{x\} = \{y \in Y \mid \{x, y\} \text{ es conexo}\}$$

$$= \{y \in Y \mid x \in cl\{y\} \text{ o } y \in cl\{x\}\}$$

$$= cl\{x\} \cup \{y \in Y \mid x \in cl\{y\}\}$$

Dado que Y es finito, $N(x)$ es la vecindad minimal de x , luego si $x \in cl\{y\}$, entonces $y \in N(x)$, es decir que:

$$cl\{x\} \cup \{y \in Y \mid x \in cl\{y\}\} = cl\{x\} \cup N(x).$$

2. Fijemos $z \in C \setminus \{x, y\}$. Observe que x, y deben estar en componentes diferentes de $C \setminus \{z\}$.

Si están en la misma componente, entonces la componente que contiene a x e y es el conexo minimal más pequeño que contiene a x, y . Por tanto x, y están en componentes diferentes de $C \setminus \{z\}$. Por el Lema 1.25, se tiene que C es un COTS con puntos finales x e y , es decir, es un arco.

3. ■ $a \Rightarrow b$ es trivial pues todo arco COTS es un camino COTS.
- $b \Rightarrow c$ Supongamos que Y no es conexo. Sean U, V abiertos tales que $Y = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$ y C un camino con extremos x e y . Como C es conexo por ser la imagen continua de un conexo, por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$, contradicción, se sigue que Y es conexo.
- $c \Rightarrow a$ Por hipótesis Y es conexo. Si $x, y \in Y$, entonces existe un conexo minimal C que contiene a x, y , pues Y es finito. Por el inciso anterior C es un arco, luego Y es conexo por arcos.

Para mostrar la última afirmación de este inciso, sean A y B conjuntos conexos disjuntos y no vacíos. Veamos primero que $A \cup B$ es conexo. Supongamos que $A \cup B$ es desconexo, entonces existen U y V abiertos relativos de $A \cup B$ tales que $A \cup B = U \cup V$ con $U \cap V = \emptyset$. Como $\{a, b\}$, A y B son conexos, podemos suponer que $\{a, b\} \subset U$, $A \subset U$ y $B \subset V$, pero esto contradice que $U \cap V = \emptyset$, pues $b \in B$. Por lo tanto $A \cup B$ es conexo.

Ahora supongamos que $A \cup B$ es conexo, entonces es conexo por arcos. Se sigue que existe un arco C con puntos finales $x \in A$ y $y \in B$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a, b \in C$ y b es el sucesor inmediato de a en el arco C . Por el Lema 1.22 (d), se tiene $\{a, b\}$ conexo.

4. Probaremos primero que cualquier arco que contiene x interseca a $A(x)$. Fijemos C un arco de Y tal que $x \in C$. Dado que C es un COTS finito, se tiene que existe un $y \in C \setminus \{x\}$ adyacente a x y como C es COTS por el Lema 1.22 (4), se sigue que $\{x, y\}$ es conexo por lo tanto $C \cap A(x) \neq \emptyset$.

Veamos ahora que si Y es conexo entonces $Y \setminus \{x\}$ interseca a cada componente de $A(x)$. Para ello supongamos lo contrario, es decir, que existe una componente $B \subset Y \setminus \{x\}$ tal que $B \cap A(x) = \emptyset$. Como B es una componente y Y es finito, entonces B es abierto-cerrado en $Y \setminus \{x\}$. Por el Lema 1.17 se tiene que $B \cup \{x\} \subset Y$ es un conjunto conexo. Por tanto existe un arco $C \subset B \cup \{x\}$ de x a $b \in B$ tal que $C \cap A(x) \neq \emptyset$, lo cual contradice que $B \cap A(x) = \emptyset$.

Falta ver que si $|A(x)| = 1$ y Y es un COTS, entonces x es un punto final. Realizaremos la prueba por contradicción. Supongamos que x no es un punto final, entonces $Y \setminus \{x\}$ tiene dos componentes, $L(x)$ y $U(x)$. Como que Y es finito existe $y_1 \in L(x)$ y $y_2 \in U(x)$ que son adyacentes a x por tanto $y_1, y_2 \in A(x)$. Se sigue que $|A(x)| \geq 2$ lo que es una contradicción, luego x es un punto final.

5. Dado que Y es un COTS finito. Se tiene que Y tiene dos puntos finales, sean x y y los puntos finales. Como x es un punto final se sigue que $Y \setminus \{x\}$ tiene una componente, luego que existe un único $y_0 \in Y \setminus \{x\}$ tal que y_0 es adyacente a x , por lo tanto $|A(x)| = 1$. Análogamente se demuestra que $|A(y)| = 1$.

Sea $w \in Y \setminus \{x, y\}$, luego w es un punto de corte, por tanto $Y \setminus \{w\}$ tiene dos componentes.

Por tanto se tiene que existen $x_0, y_0 \in Y \setminus \{w\}$ que son adyacentes a w , por la linealidad del orden y ser Y finito se tiene que son únicos. Luego tenemos que $|A(w)| = 2$.

Ahora supongamos que Y es conexo y que tiene puntos distintos x y y tales que $|A(x)| = |A(y)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para $w \in Y \setminus \{x, y\}$, veamos que es COTS.

Si Y es conexo, entonces es conexo por arcos. Sea A un arco de x a y . Como A es un arco es un COTS. Veamos que $Y = A$. Supongamos que $Y \neq A$. Sea $w \in Y \setminus A$, dado Y es conexo se tiene que existe un arco B de x a w . Se tiene $A \cap B \neq \emptyset$, tome $r \in A \cap B$ tal que su sucesor en el COTS A no este en B , esto se puede por que B y A son finitos y son COTS (ver la Figura 3).

Observe primero que $r \neq x$. Para ello suponga que $r = x$, se tiene que existe un y_0, x_0 en A y B adyacentes de r con $x_0 \neq y_0$ luego $|A(r)| \geq 2$, contradicción pues $|A(x)| = |A(r)| = 1$.

Análogamente se concluye que $r \neq y$.

Sea u y e adyacentes de r en A pues r no puede ser un punto final en A . Por otra parte se tiene que existe un punto adyacente s en B adyacente r , tal que $s \neq e$ y $s \neq u$. Luego $|A(r)| \geq 3$ contradicción, por lo tanto $Y = A$.

□

1.4.2. Adyacencias en el plano.. El plano digital está compuesto de dos tipos de puntos, los puntos puros y los mixtos, cada uno de ellos tienen diferente conjunto de adyacencias. En los planos digitales finitos también encontramos los puntos de borde que son aquellos que tienen una coordenada que es un punto final de los COTS que conforman el plano

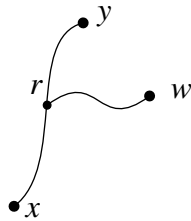


Figura 3. Teorema 1.29 parte 5.

digital finito. El siguiente lema muestra las relaciones de adyacencia en el plano digital.

Lema 1.30. [Khalimsky et al., 1990b] Sea $(x,y) \in X \times Y$ donde X y Y son COTS finitos.

Denotamos por x^+ , x^- , y^+ , y^- los puntos adyacentes a x , y y y respectivamente, en X , Y . El conjunto $A(x,y)$ en el plano es:

1. Si (x,y) es un punto puro, entonces:

$$A(x,y) = \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \setminus \{(x,y)\}.$$

2. Si (x,y) es un punto mixto, entonces:

$$A(x,y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x,y)\}.$$

3. Si (x,y) es un punto en el borde, el conjunto $A(x,y)$ es:

▪ Si (x,y) es punto puro, entonces:

$$A(x,y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \setminus \{(x,y)\}) \cap (X \times Y).$$

- Si (x, y) es punto mixto, entonces:

$$A(x, y) = ((\{x^-, x, x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x, y)\}) \cap (X \times Y).$$

Demostración. 1. Si (x, y) un punto puro debemos considerar dos casos:

Caso 1: Si x e y son abiertos, entonces por el Lema 1.23 $N(x) = \{x\}$, $N(y) = \{y\}$ y $cl\{x\} = \{x^-, x, x^+\}$, $cl\{y\} = \{y^-, y, y^+\}$. Por el Teorema 1.29(1) tenemos:

$$\begin{aligned} A(x, y) \cup \{(x, y)\} &= N(x, y) \cup cl(x, y) = N(x) \times N(y) \cup cl\{x\} \times cl\{y\} \\ &= (\{x\} \times \{y\}) \cup (\{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\}) = \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A(x, y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x, y)\}$.

Caso 2: Si x e y son cerrados. Por un razonamiento análogo al caso anterior se concluye que $A(x, y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x, y)\}$.

2. Si (x, y) es un punto mixto. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\{x\}$ es abierto, $\{y\}$ cerrado. Por el Lema 1.23 tenemos: $N(x) = \{x\}$, $N(y) = \{y^-, y, y^+\}$, $cl\{x\} = \{x^-, x, x^+\}$, $cl\{y\} = \{y\}$.

Como $A(x, y) \cup \{(x, y)\} = N(x, y) \cup cl(x, y)$ y siguiendo un razonamiento similar al caso

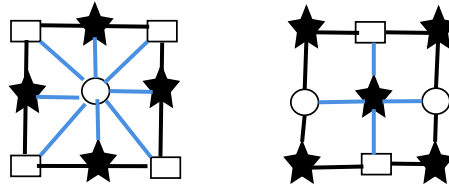


Figura 4. Adyacencias en el plano.

anterior.

$$A(x,y) = (\{x^-,x,x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-,y,y^+\}) \setminus \{(x,y)\}.$$

3. Se sigue inmediatamente de los items anteriores, pues es el conjunto de adyacencia en el plano debe estar en el plano.

□

Los items 1 y 2 también son válidas si se considera el plano digital $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pues para espacios Alexandroff se cumple que $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup N(x)$ ver [Khalimsky et al., 1990b].

La figura 4 muestra el conjunto de adyacencia de los puntos puros y mixtos. El conjunto de adyacencias de un punto permitirá determinar como son los caminos en el plano digital, para ello observe lo siguiente:

- Un COTS es un espacio topológico conexo, por tanto no se puede construir un camino que pase de forma consecutiva por dos mixtos de acuerdo al orden del COTS y igualmente un arco.
- Un arco no puede girar en un punto mixto, dado que los puntos puros adyacentes, a este

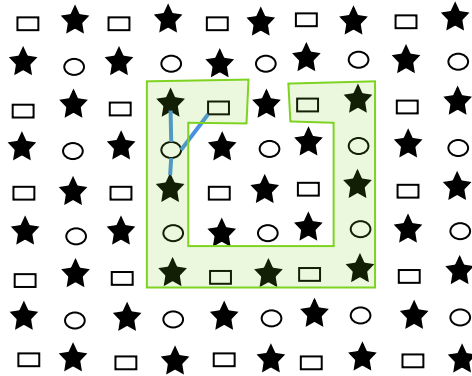


Figura 5. Adyacencia cuando se gira en un mixto.

en el posible arco construido tendría tres puntos adyacentes y por tanto dejaría de ser COTS. (ver la Figura 5).

1.5. El teorema de la curva de Jordan

El objetivo de esta sección es dar un bosquejo de la demostración del Teorema de Jordan. No incluimos todos los detalles ya que requieren el análisis de numerosos casos y haría muy extensa la presentación. Las demostraciones completas se encuentran en el trabajo [Khalimsky et al., 1990b].

Comenzaremos demostrando una series de lemas que ayudarán para la demostración del Teorema de Jordan.

Definición 1.31. Sea Y un COTS. Una **curva de Jordan** en Y es un subconjunto conexo J de Y con $|J| \geq 4$ tal que $J \setminus \{j\}$ es un arco para todo $j \in J$.

El siguiente lema permite dar una caracterización de las curvas de Jordan en el plano digital.

Lema 1.32. [Khalimsky et al., 1990b] Sea J un conjunto finito. J es una curva de Jordan si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. J es conexo.
2. J tiene al menos cuatro puntos.
3. $|A(j) \cap J| = 2$ para cada $j \in J$.

Si J es una curva de Jordan, entonces $A(j) \cap J \setminus \{j\}$ es desconexo.

Demostración. Probaremos primero que si J es una curva Jordan se cumple los tres items.

Sea J una curva de Jordan, por definición se tiene que J es conexo y $|J| \geq 4$. Fijemos $j \in J$. Veamos que $|A(j) \cap J| = 2$. Sea $j' \in J$ con $j \neq j'$ luego $J \setminus \{j'\}$ es un COTS, pues J es una curva de Jordan. Como $|J| \geq 4$ podemos escoger j' tal que j no es un punto final del COTS $J \setminus \{j'\}$.

Dado que $J \setminus \{j'\}$ es un COTS finito y j no es un punto final, por el Teorema 1.29 se tiene que $|A(j) \cap (J \setminus \{j'\})| = 2$. Por la elección de j' , tenemos que j y j' no son adyacentes, por lo tanto $|A(j) \cap J| = 2$.

Veamos ahora que J es una curva de Jordan si se cumplen los tres items. Se tiene J es conexo y $|J| \geq 4$. Fijemos $j \in J$. Falta ver que $J \setminus \{j\}$ es un COTS. Usaremos el Teorema 1.29(5). Por hipótesis tenemos que $|A(j) \cap J| = 2$. Sea $A(j) \cap J = \{e, f\}$ y $x \in J \setminus \{j\}$. Consideremos dos casos con respecto a x .

Caso 1: Si $x \in (J \setminus \{j\}) \setminus \{e, f\}$. Tenemos que $|A(x) \cap (J \setminus \{j\})| = 2$, pues j no es adyacente de x , dado que $A(j) = \{e, f\}$ en J . Luego $|A(x) \cap (J \setminus \{j\})| = 2$.

Caso 2: Si $x \in \{e, f\}$. Como $A(j) = \{e, f\}$ y $|A(e) \cap J| = |A(f) \cap J| = 2$, se sigue que $|A(e) \cap (J \setminus \{j\})| = |A(f) \cap (J \setminus \{j\})| = 1$, es decir, $|A(e) \cap J \setminus \{j\}| = |A(j) \cap J \setminus \{j\}| = 1$.

Por el Teorema 1.29(5) se sigue que $J \setminus \{j\}$ es un COTS. Luego J es una curva de Jordan.

Para la última afirmación, veamos que $A(j) \cap (J \setminus \{j\})$ es desconexo. Como $|A(j) \cap J| = 2$ sea $A(j) = \{e, f\} \cap J$. Note que e y f tiene un único punto adyacente en $J \setminus \{j\}$, pues se tiene $|A(e) \cap J| = 2$ y $|A(f) \cap J| = 2$ y j es uno de ellos. Luego $|A(e) \cap J \setminus \{j\}| = |A(f) \cap J \setminus \{j\}| = 1$, es decir, e y f son puntos finales del COTS $J \setminus \{j\}$. Por tanto e y f no son adyacentes, se sigue por el Lema 1.22(4) $A(j) \cap (J \setminus \{j\}) = \{e, f\}$ es desconexo. \square

Definición 1.33. Sea $X \times Y$ un plano digital finito. El **borde** es el conjunto formado por las parejas $(x, y) \in X \times Y$ tales que x o y es un punto final.

El **borde ajustado** de un plano se define como el conjunto formado por los puntos del borde exceptuando las esquinas del plano que sean un punto mixto. El borde de un plano $X \times Y$ se denotará como $BD(X \times Y)$ y el borde ajustado como $AD(X \times Y)$.

Lema 1.34. Sea $X \times Y$ un plano digital finito y $r \in X \times Y$. Entonces $AD(X \times Y)$ es una curva de Jordan y $A(r)$ es una curva de Jordan para cada $r \notin BD(X \times Y)$.

Demostración. Veamos primero que $A(r)$ es una curva Jordan cuando $r \notin BD(X \times Y)$ para ello veamos que cumple las condiciones del Lema 1.32.

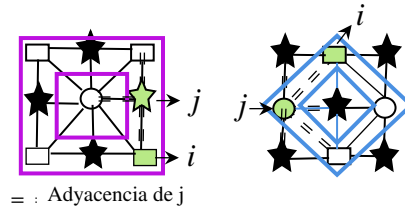


Figura 6. Adyacencias de i y j

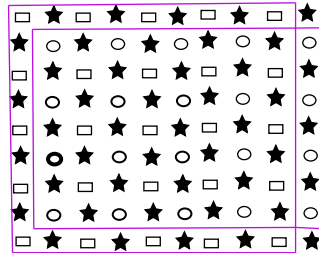


Figura 7. Borde ajustado en el plano digital.

Se tiene $|A(r)| \geq 4$ ya sea puro o mixto y $A(r)$ es un conjunto conexo (ver la Figura 4). Ahora note que para cada $j \in A(r)$ se tiene $|A(j) \cap A(r)| = 2$ (ver la Figura 6). Por lo tanto $A(r)$ es una curva de Jordan.

Veamos ahora que $AD(X \times Y)$ es una curva de Jordan. Tenemos que $|AD(X \times Y)| \geq 4$ y es conexo (ver la Figura 7). Fijemos $j \in AD(X \times Y)$ probemos que $|A(j) \cap AD(X \times Y)| = 2$.

Si j es un punto mixto, entonces $|A(j) \cap X \times Y| = 3$ y solo dos de estos puntos pertenecen $AD(X \times Y)$. Por tanto $|A(j) \cap AD(X \times Y)| = 2$.

Si j es puro, entonces $|A(j) \cap X \times Y| = 5$. Dado que los puntos mixtos de las esquinas no pertenecen al borde ajustado, entonces $|A(j) \cap AD(X \times Y)| = 2$ (ver la Figura 7). Luego $AD(X \times Y)$ es una curva de Jordan .

□

La siguiente proposición jugará un papel importante en la demostración del Teorema de

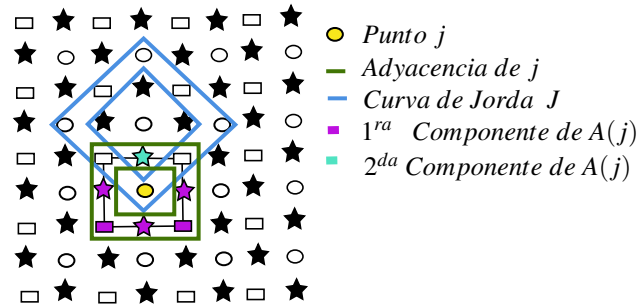


Figura 8. Representación de la Proposición 1.35.

Jordan.

Proposición 1.35. [Khalimsky et al., 1990b] Sea J es una curva de Jordan en un plano digital finito y $j \in J$. Si $A(j)$ no interseca al borde, entonces $A(j) \setminus J$ tiene exactamente 2 componentes.

Demostración. Note que $A(j) \setminus J = A(j) \setminus \{p, q\}$ (ver la Figura 8). Por el Lema 1.34 $A(j)$ es una curva de Jordan, luego $A(j) \setminus \{p\}$ es un COTS. Observe que p y q no son adyacentes, luego q no es punto final de $A(j) \setminus \{p\}$, entonces q es un punto de corte, por la Proposición 1.20 . Por tanto $(A(j) \setminus \{p\}) \setminus \{q\} = A(j) \setminus \{p, q\}$ tiene dos componentes, es decir, $A(J) \setminus J$ tiene dos componentes. □

Los siguiente lemas se enunciarán sin demostración, su demostración se encuentra en [Khalimsky et al., 1990b].

Lema 1.36. [Khalimsky et al., 1990b, Lema 5.5] Sean C y D arcos en un plano digital finito $X \times Y$. Si D interseca a más de una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$, entonces D interseca a C .

Un ejemplo que ilustra el Lema 1.36 se puede ver en la figura 9.

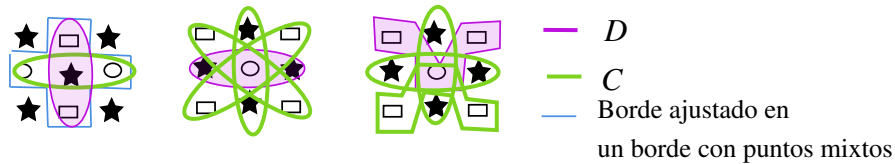


Figura 9. Caso $|X| = |Y| = 3$ en el Lema 1.36.

Lema 1.37. [Khalimsky et al., 1990b, Lema 5.4] Sea J una curva de Jordan en un plano digital finito $X \times Y$, Q una componente de $X \times Y \setminus J$ la cual no interseca a $AD(X \times Y)$ y $P = J \cup Q$. Si C es un arco de P , entonces cada componente de $P \setminus C$ interseca a J en un conjunto conexo.

El siguiente teorema permite determinar cuántas componentes existen en un plano digital finito, cuando trazamos un arco que toca el borde del plano.

Teorema 1.38. [Khalimsky et al., 1990b] Si C es un arco en un plano digital $X \times Y$, entonces $AD(X \times Y) \setminus C$ y $X \times Y \setminus C$ tienen el mismo número de componentes.

Demostración. Consideremos la función ψ del conjunto de componentes de $AD(X \times Y) \setminus C$ al conjunto de componentes de $X \times Y \setminus C$ definida de la siguiente manera: Para cada componente W de $AD(X \times Y) \setminus C$, sea $\psi(W)$ la componente de $X \times Y \setminus C$ tal que $W \subset \psi(W)$. Mostraremos que ψ es biyectiva.

- (i) ψ es inyectiva. Sean $A' \neq B'$ donde A', B' son componentes de $AD(X \times Y) \setminus C$. Fijemos $d_1 \in A'$ y $d_2 \in B'$. Sea D un arco con puntos finales d_1, d_2 en $X \times Y$. Ya que D interseca a más de una componente a $AD(X \times Y) \setminus C$, se tiene (por Lema 1.36) que D interseca a C . Como esto vale para cualquier arco D que una d_1 con d_2 , necesariamente d_1, d_2 están en

componentes diferentes $X \times Y \setminus C$. Se sigue que existen componentes A y B diferentes en $X \times Y \setminus C$ tales que $A' \subset A$ y $B' \subset B$. Por lo tanto $\psi(A') \neq \psi(B')$.

(ii) ψ es sobreyectiva. Sea B una componente $X \times Y \setminus C$, queremos ver que existe una componente D de $AD(X \times Y) \setminus C$ tal que $D \subset B$. Inicialmente definimos los siguientes conjuntos $B^* = B \setminus BD(X \times Y)$, $C^* = C \setminus BD(X \times Y)$ y $Q = X \times Y \setminus BD(X \times Y)$. Note que Q es una componente de $X \times Y \setminus AD(X \times Y)$.

Definimos $P = Q \cup AD(X \times Y)$ $B' = B^* \cup (B \cap AD(X \times Y))$ y $C' = C^* \cup (C \cap AD(X \times Y))$.

Observe que C' es un arco en P , pues C es un arco y B' es una componente de $P \setminus C'$, pues B es una componente de $X \times Y \setminus C$. Por el Lema 1.37 (aplicado con J igual a $AD(X \times Y)$), P y Q como fueron definidos arriba y al arco C' se tiene que $D = B' \cap AD(X \times Y) = B \cap AD(X \times Y)$ es conexo.

Veamos ahora que D es una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$, para ello supongamos que no es una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$. Entonces existe una componente D_0 de $AD(X \times Y) \setminus C$ tal que $D \subset D_0$ y $D_0 \cap C = \emptyset$. Note que $D_0 \cap B \neq \emptyset$, se sigue que $B \cup D_0$ es conexo y $B \cup D_0 \subset X \times Y \setminus C$, luego B no es una componente, pues $B \subset B \cup D_0$. Pero B es una componente, contradicción, se sigue que D es una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$.

$AD(X \times Y) \setminus C' = AD(X \times Y) \setminus C$, se tiene que D es una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$ y se tiene que $D \subset B$. Con esto hemos mostrado que ψ es sobreyectiva.

□

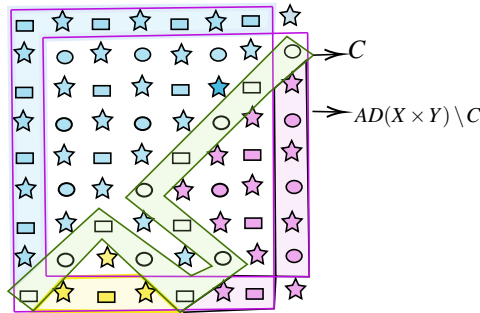


Figura 10. Un ejemplo del Teorema 1.38. Cada color representa una componente de $X \times Y \setminus C$ y $AD(X \times Y) \setminus C$.

La Figura 10 ilustra el Teorema 1.38. A continuación demostramos el Teorema de Jordan para el plano digital.

Teorema 1.39. [Khalimsky et al., 1990b] Sea $X \times Y$ un plano digital finito y J una curva de Jordan en $X \times Y$. Si J no intersecta al borde, entonces $X \times Y \setminus J$ tiene 2 componentes.

Demostración. Sea $v = \text{mín} \{y \in Y : \exists x \in X (x, y) \in J\}$, donde el mínimo es respecto al orden de Y como COTS. Sea $Y^* = Y \setminus L(v)$.

- (1) Mostraremos que existe un arco C con puntos finales (w^-, v) y (w^+, v) en $X \times Y^*$. Para esto consideraremos dos casos.

Caso 1: J tiene al menos un punto mixto de la forma (w, v) (ver la Figura 11 [A]).

Sea (w, v) un punto mixto de J , dado que J no puede girar en un punto mixto se tiene $(w^-, v), (w^+, v) \in J$. Definimos

$$C = J \setminus (w, v).$$

C es un arco con puntos finales (w^-, v) y (w^+, v) en $X \times Y^*$ (ver la figura 11 [B]).

Caso 2: Todos los puntos de J de la forma (w, v) son puros. Sea $(w, v) \in J$. Entonces $(w^-, v) \notin J$ y $(w^+, v) \notin J$, pues son mixtos (ver la figura 12). Definimos

$$C = (J \setminus \{(w, v)\}) \cup \{(w^-, v), (w^+, v)\}.$$

C es un arco con puntos finales (w^-, v) y (w^+, v) en $X \times Y^*$ (ver la figura 12 [B]).

- (2) Veamos que si J no tiene puntos mixtos en $y = v$, entonces $(w^-, v^+), (w^+, v^+) \in J$ (ver la figura 12). Esto con el fin de ver cuáles puntos adyacentes de (w, v^+) están en J en este caso, pues se necesitará más adelante en la prueba.

Por ser J una curva de Jordan se tiene que $|A(w, v) \cap J| = 2$. Los posibles adyacentes a (w, v) en J son: $(w^-, v^+), (w, v^+), (w^+, v^+)$. No se puede dar el caso que $A(w, v) \cap J = \{(w^-, v^+), (w, v^+)\}$ o $A(w, v) \cap J = \{(w, v^+), (w^+, v^+)\}$, pues esto implicaría girar en un punto mixto (ver la figura 12[B]). Por tanto $(w^-, v^+), (w^+, v^+) \in J$.

- (3) Ahora veamos que (w, v) es una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C$.

Para ver esto mostremos que (w, v) es un punto aislado de $AD(X \times Y^*) \setminus C$, es decir, que es un punto abierto en $AD(X \times Y^*) \setminus C$. Tenemos que $N((w, v)) \subset \{(w^-, v), (w, v), (w^+, v)\}$ en $AD(X \times Y^*)$ y se tiene que $\{(w^-, v), (w^+, v)\} \notin AD(X \times Y^*) \setminus C$, dado que por (1) $(w^-, v), (w^+, v) \in C$. Luego $N((w, v)) = \{(w, v)\}$, en $AD(X \times Y^*) \setminus C$, es decir, (w, v) es abierto en $AD(X \times Y^*) \setminus C$. Por tanto (w, v) es un punto aislado de $AD(X \times Y^*) \setminus C$. Se sigue que (w, v) es una componente en $AD(X \times Y^*) \setminus C$.

(4) Veamos que ningún punto de $(AD(X \times Y^*) \setminus C) \setminus \{(w, v)\}$ puede conectarse a (w, v^+) por un arco en $X \times Y^* \setminus J$.

Por (3) tenemos $AD(X \times Y^*) \setminus C$ tiene más una componente. Ahora por el Lema 1.36 se tiene todo punto de $(AD(X \times Y^*) \setminus C) \setminus \{(w, v)\}$ no se puede conectar a (w, v) mediante un arco D en $X \times Y^* \setminus C$, pues D interseca a C .

Sea $z \in (AD(X \times Y^*) \setminus C) \setminus \{(w, v)\}$. Consideremos nuevamente los dos casos de (1):

Caso 1: Si J tiene puntos mixtos en $y = v$, se sigue $C \subset J$, luego se tiene $X \times Y^* \setminus J \subset X \times Y^* \setminus C$. Supongamos que existe un arco $D^* \in X \times Y^* \setminus J \subset X \times Y^* \setminus C$ de z a (w, v^+) . Se tiene (w, v) es adyacente a (w, v^+) , luego $D^* \cup (w, v)$ es un arco que conecta a (w, v) con z , lo que es una contradicción.

Caso 2: Si J no tiene puntos mixtos en $y = v$, (ver la figura 12) se sigue que $C \not\subset J$, entonces por (2) $(w^-, v^+), (w^+, v^+), (w, v) \in J$ y (w, v) es un punto puro, pues J no tiene puntos mixtos en $y = v$. Supongamos que existe un arco en $X \times Y^* \setminus J$ que puede conectar (w, v^+) con z .

Este arco debe pasar por algún punto adyacente a (w, v^+) . Note que (w, v^+) (ver la figura 12 B) es un punto mixto, pues (w, v) es puro. Por lo tanto tenemos que $A(w, v^+) = \{(w^-, v^+), (w^+, v^+), (w, v), (w, v^{++})\}$, y por (2) $(w^-, v^+), (w^+, v^+), (w, v) \in J$. Luego este arco debe pasar (w, v^{++}) , si $(w, v^{++}) \notin J$, pues en caso contrario este D no existe, ya que no hay más puntos adyacentes a (w, v^+) en $X \times Y^* \setminus J$.

Note que D no necesariamente debe pasar por (w^-, v) , (w^+, v) , pues (w^-, v) , (w^+, v) no son adyacentes (w, v^+) , por eso tome a D un arco que no pasa por dichos puntos, luego $D \subset X \times Y^* \setminus C$. Observe que $D \cup \{w, v\}$ es un arco de z a (w, v) y $D \cup \{w, v\} \subset X \times Y^* \setminus C$. Se sigue que z se conecta con (w, v) en $X \times Y^* \setminus C$, pero esto es imposible, luego este arco no existe.

(5) Veamos ahora que $X \times Y^* \setminus J$ tiene por lo menos dos componentes.

Por (4) no es posible conectar (w, v^+) con un punto z en $(AD(X \times Y^*) \setminus C) \setminus \{(w, v)\}$. Luego se tiene que $X \times Y \setminus J^*$ tiene al menos dos componentes, pues (w, v^+) esta en una componente y z en otra componente.

Esto funciona para todo $z \in AD(X \times Y^*) \setminus J$ dado que si $z = (w^-, v)$ o $z = (w^+, v)$, es decir, si $C \not\subseteq J$, tampoco se puede conectar (w, v^+) con z (ver la figura 12). Para ello note (w^-, v) es un punto mixto y solo (w^{--}, v) es adyacente a este en $X \times Y^* \setminus J$ y (w^{--}, v) no se puede conectar con (w^+, v) por(4), pues en este caso $(w^{--}, v) \in (AD(X \times Y^*) \setminus C) \setminus \{(w, v)\}$ (ver la figura 12). Análogamente se tiene para (w^+, v) . Es decir que z y (w^+, v) están en componentes diferentes.

(6) Veamos que $X \times Y \setminus J$ tiene al menos 2 componentes.

Debemos ver que no existe un arco en $X \times Y \setminus J$ desde un punto $X \times (Y \setminus Y^*)$ a (w, v^+) . Supongamos que si existe un arco C_0 que cumple lo anterior, si existe debe interseca a $X \times \{v\} \setminus J$, es decir, pasa por un punto z de $AD(X \times Y^*) \setminus J$, por tanto un sub-arco de

C_0 esta en $X \times Y^* \setminus J$ y conecta (w, v^+) con z . Se sigue por (5) que C_0 conectaría puntos que estaban componentes diferentes de $X \times Y^* \setminus J$, contradicción. Luego C_0 no existe, entonces $X \times Y \setminus J$ tiene al menos dos componentes.

(7) Veamos $X \times Y \setminus J$ tiene exactamente dos componentes.

Para probar (7). Sea $j \in J$. Dado que J es una curva de Jordan, se tiene $J \setminus \{j\}$ es un arco.

Se tiene $AD(X \times Y) \setminus (J \setminus \{j\}) = AD(X \times Y)$, pues $J \setminus \{j\}$ no interseca al borde, luego por el Teorema 1.38 se tiene que $(X \times Y) \setminus (J \setminus \{j\})$ es conexo.

Por el Teorema el 1.29 parte 4, tenemos que cada componente de $X \times Y \setminus (J \setminus \{j\}) \setminus \{j\} = X \times Y \setminus J$ interseca cada componente de $A(j)$. Dado que $J \cap (X \times Y \setminus J) = \emptyset$ entonces se tiene que cada componente de $A(j) \setminus J$ interseca cada componente de $X \times Y \setminus J$. Por la Proposición 1.35 se tiene que $A(j) \setminus J$ tiene dos componentes, se sigue que $X \times Y \setminus J$ tiene dos componentes.

□

Proposición 1.40. *Sea J un curva de Jordan en \mathbb{K}^2 . Si $m \in J$, entonces $A(m) \cap O(J) \neq \emptyset$ y $A(m) \cap I(J) \neq \emptyset$, donde $O(J)$ la componente exterior.*

Demostración. Fijemos $m \in J$, dado que $|A(m)| > 2$ luego $A(m) \setminus J \neq \emptyset$ y $A(m) \setminus J \subset O(J) \cup I(J)$. Supongamos que $A(m) \setminus J \subset O(J)$. Sea $X \times Y \subset \mathbb{K}^2$ un plano digital finito que contiene a J y tal que J no interseca a $BD(X \times Y)$. Tenemos que $J \setminus \{m\}$ es un arco, como J no interseca a $BD(X \times Y)$, tampoco interseca al $AD(X \times Y)$.

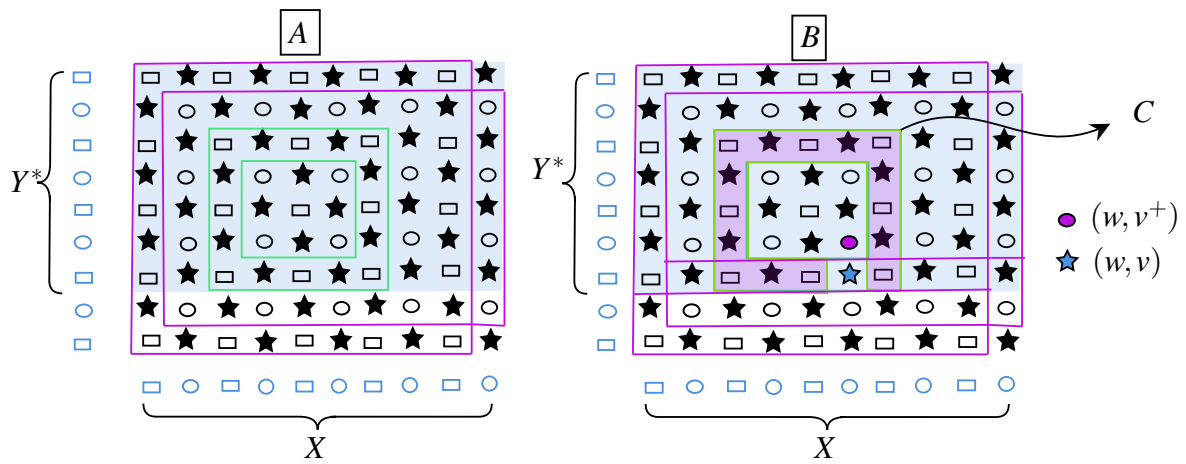


Figura 11. Ilustración de la demostración del Teorema de Jordan para J con mixtos en con coordenada en $y = v$.

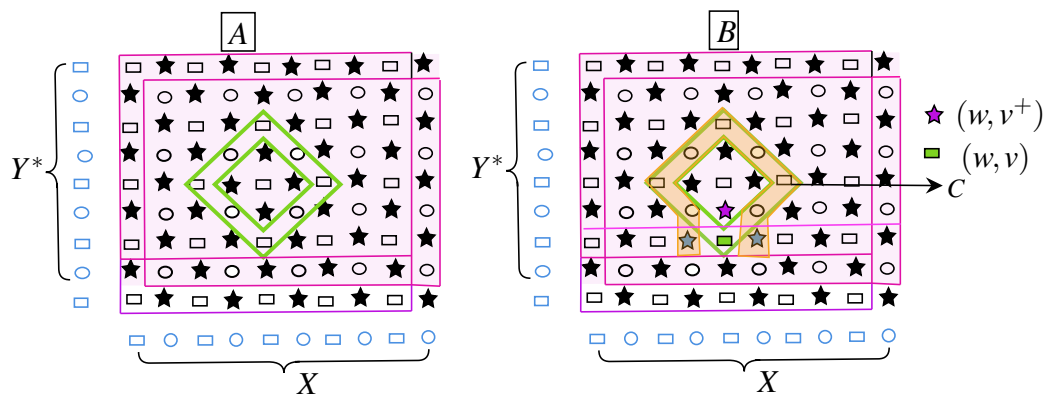


Figura 12. Ilustración de la demostración del Teorema de Jordan para J con puntos puros en con coordenada en $y = v$.

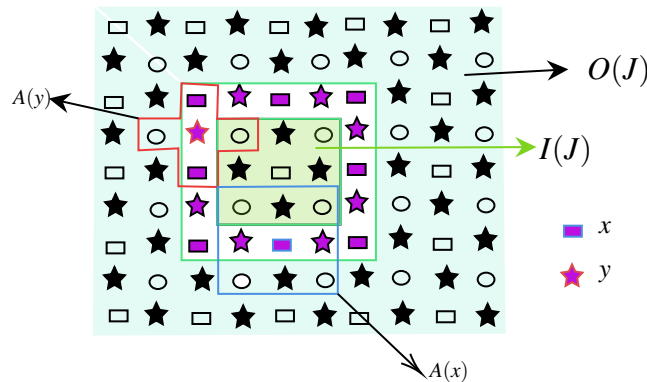


Figura 13. Representación de la Proposición 1.40.

Sea $C = J \setminus \{m\}$, luego $AD(X \times Y) \setminus C = AD(X \times Y)$ por el Teorema 1.38 se sigue que $X \times Y \setminus C$ es conexo, es decir $O(J) \cup I(J) \cup \{m\}$ es conexo. Sea $y \in I(J)$ y $z \in O(J)$, como $O(J) \cup I(J) \cup \{m\}$ es conexo, existe un camino $D \subset O(J) \cup I(J) \cup \{m\}$ con puntos finales y y z . Dado que $I(J) \cup O(J)$ es desconexo, entonces $m \in D$, se esto se sigue que $A(m) \cap D = \{w_1, w_2\}$. Dado que $A(m) \setminus J \subset O(J)$, entonces $w_1, w_2 \in O(J)$.

Como D es conexo, existe un camino $D_1 \subset D$ de y a w_1 y también un camino $D_2 \subset D$ de z a w_2 . Luego $D_1 \cup D_2 \subset I(J) \cup O(J)$. Por otra parte tenemos que $w_1, w_2 \in O(J)$ y $O(J)$ es conexo, luego existe un camino D_0 con puntos finales w_1 y w_2 . Se sigue que $D_1 \cup D_2 \cup D_0$ es conexo, pues $D_1 \cap D_0 \neq \emptyset$ y $D_2 \cap D_0 \neq \emptyset$. Observe que $D_1 \cup D_2 \cup D_0 \subset O(J) \cup I(J)$, por tanto $O(J) \cup I(J)$ es conexo, pero esto es una contradicción. Por tanto $A(m) \setminus J \not\subset O(J)$.

Análogamente tenemos que $A(m) \setminus J \not\subset I(J)$. Por lo tanto, $A(m) \cap O(J) \neq \emptyset$ y $A(m) \cap I(J) \neq \emptyset$. □

2. Procesamiento de imágenes

En este capítulo presentamos algunos conceptos que permiten desarrollar algoritmos para procesar imágenes digitales a partir de conceptos topológicos, para ello expondremos en este capítulo las ideas de Rosenfeld que dieron origen a la topología digital. Una imagen digital será un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 , donde cada píxel es representado como un punto en el plano \mathbb{Z}^2 . Solo consideraremos imágenes a dos colores: blanco y negro; así las imágenes computacionalmente se representaran como una matriz de ceros y unos.

Los algoritmos de procesamiento de imágenes que estudiaremos se basan principalmente en propiedades del tipo “graph theoretical” pues se definen en términos de las relaciones de adyacencia. Los que estudiaremos en este capítulo se llaman algoritmos de reducción pues buscan que eliminar puntos negros de la imagen (es decir, cambiar un punto negro por uno blanco) sin que se altere la conexidad de la imagen y obtengamos conjuntos topológicamente equivalentes (ver definición 2.9). Para ello el concepto principal que trataremos es el de punto simple (ver definición 2.10) y es el tema central de este capítulo.

Mostraremos en este capítulo dos formas de caracterizar los puntos simples. La primera caracteriza los puntos simples en términos de las relaciones de adyacencia (ver el Teorema 2.11). Seguidamente este resultado lo traducimos al lenguaje de las matrices de ceros y unos para su implementación computacional (ver el Teorema 2.26). Cerramos este capítulo presentando una implementación del Teorema 2.26 en Python.

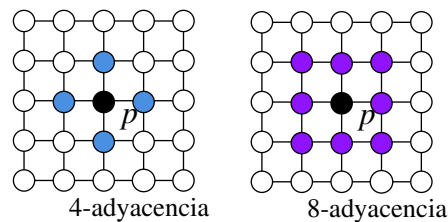


Figura 14. Relaciones de adyacencia.

2.1. El plano de Rosenfeld

El **plano de Rosenfeld** es \mathbb{Z}^2 dotado de ciertas relaciones de adyacencia. Observe que \mathbb{Z}^2 no tiene topología a diferencia de \mathbb{K}^2 que es \mathbb{Z}^2 con la topología producto de Khalimsky. El objetivo central del próximo capítulo será comparar estas dos estructuras.

Definición 2.1. Se dice que dos puntos de \mathbb{Z}^2 son **adyacentes** si sus coordenadas difieren a lo sumo en una unidad.

Cada punto p tiene 8 puntos adyacentes, los cuales son llamados los 8-vecinos de p o puntos 8-adyacentes a p . Denotaremos por $N_8(p)$ al conjunto de los puntos 8-adyacentes a p junto con $\{p\}$. También se usa un subconjunto de $N_8(p)$ llamado los 4 vecinos de p y que junto con $\{p\}$ lo denotaremos por $N_4(p)$. En la figura 14 se representan estas relaciones con los puntos de colores y el punto p .

Las adyacencias permiten introducir una noción de conexidad en subconjuntos de \mathbb{Z}^2 que no se basan en consideraciones topológicas. Decimos que dos subconjuntos A, B de \mathbb{Z}^2 son **4-adyacentes** si existe $x \in A$ y $z \in B$ tales que x y z son 4-adyacentes. Este concepto permite dar una noción de conexidad de la siguiente manera.

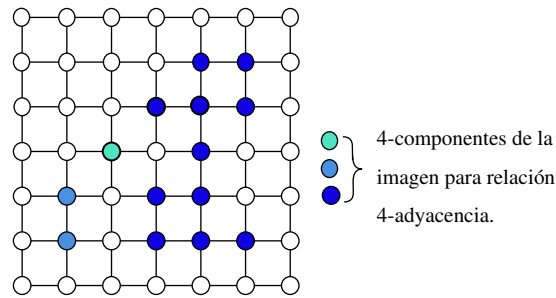


Figura 15. Componentes en el plano.

Definición 2.2. Un subconjunto S de \mathbb{Z}^2 es **4-disconexo** si se puede dividir en dos subconjuntos no vacíos que no son 4-adyacentes entre sí. En caso contrario se dice es **4-conexo**.

Análogamente se define un conjunto **8-conexo** usando la relación de 8-adyacencia. Igualmente se define una **4-componente** como un 4-conexo maximal. De manera análoga se define una **8-componente**.

La figura 15 ilustra el concepto de componente. Observe que:

- Si analizamos el conjunto de puntos coloreados en la figura usando la relación de 8-adyacencia, los puntos de colores es un conjunto 8-conexo. Esto es, existe una única 8-componente en el conjunto de puntos de colores.
- Si usamos la relación de 4-adyacencia para los puntos de colores, cada conjunto de puntos de un color es 4-conexo y forma una 4-componente.

Las adyacencias también nos permiten definir una noción de camino, para ello sea C un subconjunto de \mathbb{Z}^2 . Diremos que un punto de C es **8-final** si tiene exactamente un solo punto en C que es 8-adyacente a él. Análogamente definimos cuando un punto es **4-final**.

Definición 2.3. *Un subconjunto finito C de \mathbb{Z}^2 es un **8-camino** si tiene exactamente dos puntos 8-finales y los otros puntos de C tienen exactamente dos puntos en C 8-adyacentes. Análogamente se define un **4-camino**.*

La proposición que sigue es muy útil para verificar si un conjunto es 8-conexo. Este resultado también se tiene para 4-conexidad. Fue inicialmente dado como definición de 4-conexidad y 8-conexidad en [Rosenfeld, 1970] artículo pionero de la topología digital.

Proposición 2.4. *Sea $A \subset \mathbf{R}$. A es 8-conexo si, y solo si, para todo $x, y \in A$ existe un 8-camino de x a y .*

Demostración. \Rightarrow Supongamos A es 8-conexo. Fijemos $x \in A$ y sea $B = \{y \in A : \text{existe un 8-camino de } x \text{ a } y\}$, note que $B \neq \emptyset$, pues $x \in B$. Queremos ver que $A = B$. Si $A \neq B$, entonces existe $C = A \setminus B$ tal que $C \neq \emptyset$, se sigue que existe un $z \in B$ y $w \in C$ tal que z y w son 8-adyacentes, pues A es 8-conexo.

Luego como $z \in B$, existe un 8-camino D de z a x . Por lo tanto existe D_0 un 8-camino de x a w , tal que $D_0 \subset D \cup \{w\}$. Se sigue que $w \in B$ pero esto no puede ser cierto. Por lo tanto C y B no son 8-adyacentes, luego A no es 8-conexo contradicción, es decir que $B = A$.

\Leftarrow Supongamos ahora que A no es 8-conexo, entonces existen dos subconjuntos C y D que no son 8-adyacentes tal que $A = B \cup D$. Existen $x \in B$ y $y \in D$ tal que C el mínimo 8-camino posible entre elementos de B y D . Como B y D no son 8-adyacentes entonces existe un $y' \in C$ tal que es 8-adyacente a y , con la condición que $y' \in B$. Luego C no es el mínimo 8-camino

entre elementos de B y D , pues $C \setminus \{y\}$ es más pequeño. Contradiciendo la minimalidad de C , luego A es 8-conexo. \square

2.2. El teorema de Jordan versión gráfica

En este apartado enunciaremos una versión del teorema de la curva de Jordan que será usado más adelante. Para ello necesitamos definir la versión del concepto de curva de Jordan que usan en este contexto.

Definición 2.5. *Un subconjunto finito C de \mathbb{Z}^2 es una **8-curva simple cerrada** si cada punto de C tiene exactamente dos puntos en C que son 8-adyacentes a él. Análogamente se define una **4-curva simple cerrada**.*

Los siguientes dos resultados son la versión gráfica del Teorema de la curva de Jordan que demostró Rosenfeld y que llamaremos Teoremas de Jordan-Rosenfeld. El enunciado que presentamos es de [Davis, 2012] quien se lo atribuye a Rosenfeld. Donde \bar{C} se refiere al complemento de C .

Teorema 2.6. *[Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1973] Si C es una 4-curva simple cerrada en \mathbb{Z}^2 y $|C| > 4$, entonces \bar{C} tiene exactamente dos 8-componentes.*

Teorema 2.7. *[Rosenfeld, 1970, Rosenfeld, 1973] Si C es una 8-curva simple cerrada en \mathbb{Z}^2 y $|C| > 3$, entonces \bar{C} tiene exactamente dos 4-componentes.*

La figura 16 ilustra el Teorema 2.7. El siguiente teorema lo hemos tomado de [Davis, 2012] quien se lo atribuye a Rosenfeld [Rosenfeld, 1973].

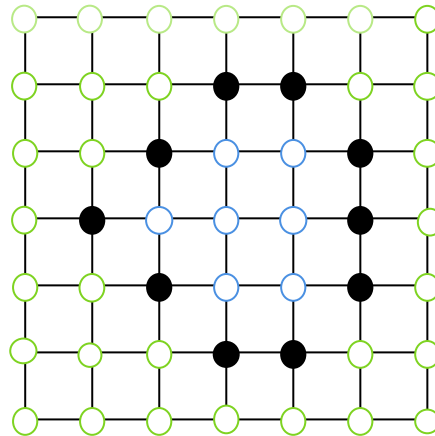


Figura 16. Teorema de Jordan-Rosenfeld.

Teorema 2.8. [Davis, 2012] Si C es una 8-curva simple cerrada en \mathbb{Z}^2 y $|C| > 3$, entonces cada punto de C tiene un 4-vecino en cada una de las dos 4-componentes de \bar{C} .

El Teorema 2.8 también es válido para 4-curvas en lugar de 8-curvas. En este caso la conclusión es en términos de 8-componentes y 8-vecinos. Presentaremos una demostración alternativa de los Teoremas 2.6, y 2.7 en el siguiente capítulo (ver el Teorema 3.14), utilizando la topología de \mathbb{K}^2 como lo hicieron Khalimsky, Kopperman y Meyer en [Khalimsky et al., 1990a]. Del Teorema 2.8 realizamos también una demostración utilizando la topología de \mathbb{K}^2 (ver el Teorema 3.15).

2.3. Puntos simples

Como ya lo dijimos, una imagen se representará como un subconjunto S de \mathbb{Z}^2 de tal manera que los elementos de S corresponden a los puntos negros de la imagen y los puntos del complemento de S a los blancos. Denotaremos por \bar{S} al complemento de S .

Para analizar las nociones de 4-conexidad y 8-conexidad no se usa la misma relación de

adyacencia para los puntos negros que para los puntos blancos. Trabajaremos principalmente la relación de adyacencia $(8, 4)$, esto significa que para los puntos negros se usa la relación de 8-adyacencia y para los blancos la 4-adyacencia.

El siguiente concepto jugará un papel importante en la elaboración de algoritmos para el procesamiento de imágenes.

Definición 2.9. [Davis, 2012, pag 82] Sean S, S' subconjuntos de \mathbb{Z}^2 con $S' \subset S$. Decimos S' y S son $(8, 4)$ -equivalentes si satisfacen las siguientes condiciones:

- Cada 8-componente de S contiene exactamente una 8-componente de S' .
- Cada 4-componente de $\overline{S'}$ contiene exactamente una 4-componente de \overline{S} .

De manera análoga se define el concepto de conjuntos $(4, 8)$ -equivalentes, las condiciones anteriores se remontan desde [?] aunque no se definen como tal en este artículo. En la literatura (ver por ejemplo [Cámara Caunedo, 2016, Kong and Rosenfeld, 1996, Kong and Rosenfeld, 1989, Davis, 2012]) se suele decir que S' **preserva la topología** de S . La $(8, 4)$ -equivalencia significa que S y S' tienen el mismo número de 8-componentes negras, y sus complementos el mismo número de 4-componentes blancas. Un ejemplo se muestra en la figura 17.

Un tipo de algoritmo que estudiaremos son los **algoritmos de reducción**, el cual consiste en una función que transforma un subconjunto N en otro $f(N)$ tal que $f(N) \subseteq N$ y $f(N)$ y N son $(8, 4)$ -equivalentes. Nos concentraremos principalmente en el caso cuando $N \setminus f(N)$

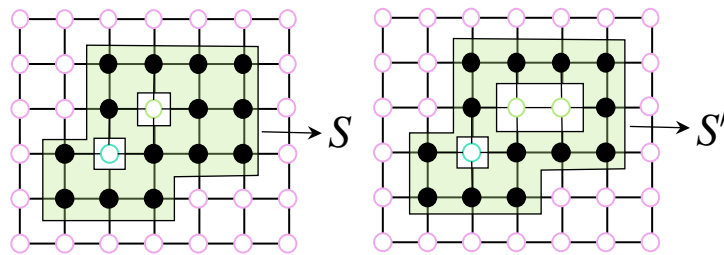


Figura 17. Ejemplo de imágenes (8,4)-equivalentes.

tiene un solo punto, es decir, la imagen se reduce cambiando solo un punto negro a blanco. Este proceso de eliminación motiva la siguiente definición.

Definición 2.10. [Kong and Rosenfeld, 1989, pag 367] Sea $S \subseteq \mathbb{Z}^2$. Un punto $p \in S$ es **simple** si S y $S \setminus \{p\}$ son (8,4)-equivalentes

En otras palabras, un punto $p \in S$ es simple si $S \setminus \{p\}$ y S tienen el mismo número de 8-componentes, y \bar{S} y $\overline{S \setminus \{p\}}$ tienen el mismo número de 4-componentes. Un ejemplo de un punto simple se observa en la figura 18. En dicha figura se puede evidenciar que p es simple, ya que se conserva tanto el número de 4-componentes blancas como el de 8-componentes negras cuando se elimina p .

Por otra parte, también podemos encontrar imágenes que no contienen puntos simples, un ejemplo de este tipo de imágenes se puede ver en la figura 19.

La figura 20 muestra un conjunto S tal que $S \setminus \{p\}$ y S tienen el mismo número de 8-componentes, pero \bar{S} y $\overline{S \setminus \{p\}}$ no tienen el mismo número de 4-componentes. En esa figura también se puede evidenciar que $N_8(p) \cap S$ y $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ no tienen el mismo número de 8-componentes. Igualmente tenemos que los conjuntos $N_8(p) \cap \bar{S}$ y $N_8(p) \cap \overline{(S \setminus \{p\})}$ no tienen el mismo número de 4-componentes.

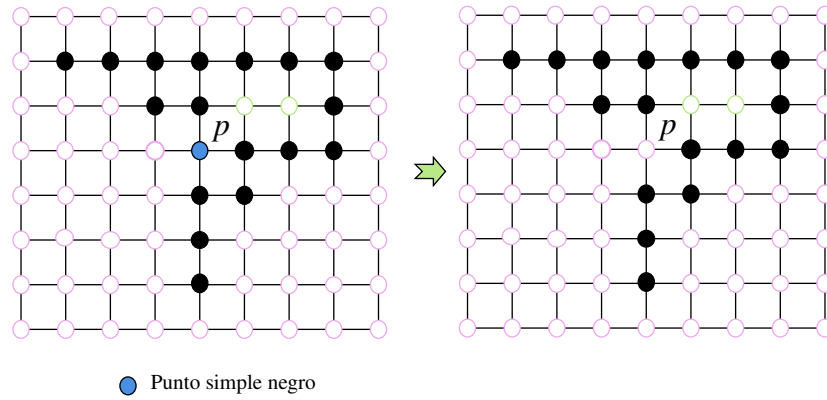


Figura 18. En esta imagen el punto p es un punto simple, cuando se considera la relación de adyacencia (8,4).

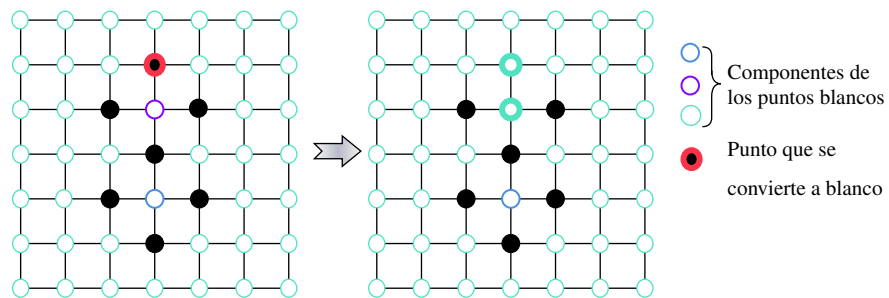


Figura 19. Un conjunto sin puntos simples consideran la relación de adyacencia (8,4).

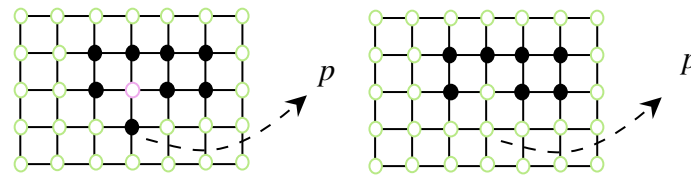


Figura 20. Ejemplo de punto p que no simple.

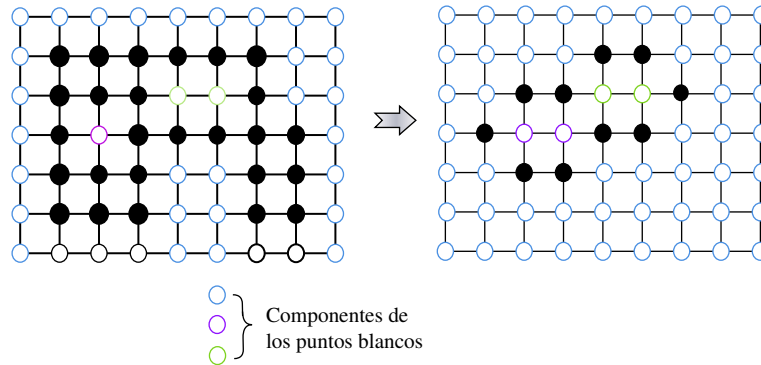


Figura 21. Ejemplo de algoritmo de reducción.

Por tanto los algoritmos de reducción se encargan de encontrar puntos simples y eliminarlos. Un ejemplo de una imagen a la cual se le aplicó un algoritmo de reducción se puede ver en la figura 21.

Como se mencionó anteriormente la parte fundamental en dichos algoritmos consiste en identificar los puntos simples. El Teorema 2.11 caracteriza a los puntos simples de manera local y jugará un papel crucial en todo lo que haremos.

Teorema 2.11. [Davis, 2012, pag 80] Sea $p \in S \subset \mathbb{Z}^2$. Entonces p es simple si y solo si las siguientes condiciones locales se cumplen:

1. p tiene un 4-vecino en \bar{S} .
2. p tiene un 8-vecino en $S \setminus \{p\}$.

3. $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es δ -conexo.

Con respecto al Teorema 2.11 tenemos que los items 1 y 2 se pueden expresar de forma equivalente diciendo que $N_4(p) \cap \bar{S} \neq \emptyset$ y $N_8(p) \cap S \setminus \{p\} \neq \emptyset$.

En las secciones siguientes procederemos a demostrar el Teorema 2.11. No hemos conseguido ninguna referencia donde hallan realizado una prueba completa de este teorema. Rosenfeld [Rosenfeld, 1976, pag 17] lo realiza presentando un definición de punto simple diferente a que la hemos presentado, (ver proposición 2.5.3 de [Rosenfeld, 1976]). En [Rosenfeld, 1976] no se realizan especificaciones de la relación de adyacencia que se están utilizando en los conjuntos S y \bar{S} . El enunciado de este teorema lo hemos tomado de [Davis, 2012], pues tampoco se encuentra en [Rosenfeld, 1976]. En [Davis, 2012] también citan como referencia del Teorema 2.11 a [Rosenfeld, 1973], pero en este artículo tampoco se encuentra una demostración del Teorema 2.11.

Por eso hemos incluido una demostración bastante completa. Sin embargo, como hace falta verificar numerosos casos, muchos similares entre sí, solo incluiremos los detalles de los casos más importantes que dan la idea de como tratar los otros. Es importante observar que el teorema de la curva de Jordan-Ronsefeld (Teorema 2.7) y Teorema 2.8 son indispensables para demostrar una de las direcciones del Teorema 2.11.

2.3.1. Condiciones suficientes para ser punto simple. En esta sección nos enfocamos en mostrar que las condiciones 1, 2 y 3 en el enunciado del Teorema 2.11 implican que p es simple. Como dijimos antes, ese teorema caracteriza los puntos simples en términos de

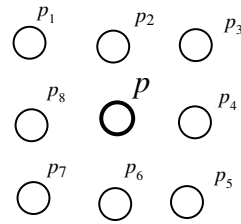


Figura 22. Enumeración de los 8-vecinos de p .

condiciones locales de p . Para aclarar mejor esa afirmación considere los siguientes conjuntos:

$$S_p = S \cap N_8(p) \quad \bar{S}_p = \bar{S} \cap N_8(p)$$

Mostraremos inicialmente que si p satisface las condiciones 1, 2 y 3, entonces S_p y $S_p \setminus \{p\}$ son $(8, 4)$ -equivalentes. Para luego mostrar que si S_p y $S_p \setminus \{p\}$ son $(8, 4)$ -equivalentes, entonces S y $S \setminus \{p\}$ también lo son. Así concluiremos que p es simple.

Los 8-vecinos de un punto $p \in S$ los etiquetaremos como se indica en la figura 22.

Un equivalencia importante, que utilizaremos varias veces más adelante, se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.12. Sea $p \in S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $N_4(p) \cap \bar{S}$ está contenido en una 4-componente de \bar{S}_p .
2. $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo.

Demostración. $2 \Rightarrow 1$. Mostraremos la contrarrecíproca. Suponga que $p_i, p_j \in N_4(p) \cap \bar{S}$ no están en la misma 4-componente de $N_8(p) \cap \bar{S}$. Debemos considerar los casos posibles para p_i y p_j .

- **Caso 1:** Supongamos que $\{p_i, p_j\}$ es $\{p_2, p_8\}$, $\{p_6, p_8\}$, $\{p_4, p_6\}$ o $\{p_2, p_4\}$. Solo haremos el primer caso pues los otros son similares al ser rotaciones del primero. Se tiene que $p_1, p_k \in S$ para algún $k \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ pues p_8 y p_2 están en 4-componentes diferentes (ver la figura 23 A). Note p_1 y p_k están en 8-componentes diferentes de $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$. Luego $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ no es 8-conexo.
- **Caso 2:** Supongamos que $\{p_i, p_j\}$ es $\{p_2, p_6\}$ o $\{p_4, p_8\}$. Consideraremos solo el primer caso, pues el otro caso se realiza de manera similar. Ver la figura 23 B.

Tenemos que existen $k \in \{3, 4, 5\}$ y $k' \in \{1, 8, 7\}$ tales que $p_k, p_{k'} \in S$, pues p_2, p_6 están en 4-componentes diferentes de $N_8(p) \cap \bar{S}$. Observe que $p_k, p_{k'} \in N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ y están en 8-componentes diferentes de $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$. Por lo tanto $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ no es 8-conexo.

$1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ no es 8-conexo. Luego existen p_i y p_j que están en 8-componentes diferentes de $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$. Consideremos los siguientes dos casos:

- **Caso 1:** $i \in \{1, 3, 5, 7\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = 1$, en los otros casos el razonamiento es análogo. Ver la figura 24 A. Como p_1 y p_j no son 8-adyacentes, entonces $j \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Luego p_8 y p_2 están en 4-componentes diferentes de $N_8(p) \cap \bar{S} = S_p$.
- **Caso 2:** $i \in \{2, 4, 6, 8\}$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $i = 2$, en los otros casos el razonamiento es análogo. Ver la figura 24 B. Tenemos que p_j y p_2 no son 8-

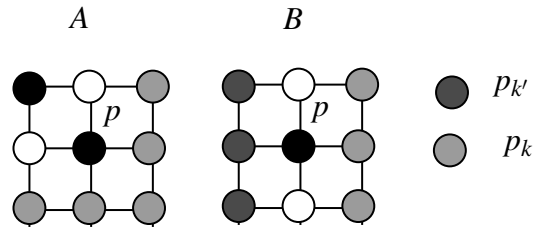


Figura 23. Lema 2.12 $2 \Rightarrow 1$.

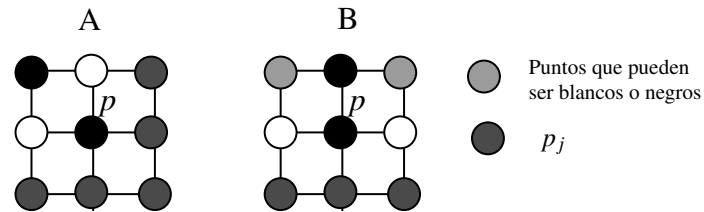


Figura 24. Lema 2.12 $1 \Rightarrow 2$.

adyacentes, entonces $j \in \{5, 6, 7\}$. Note que $p_8, p_4 \in \bar{S} \cap N_4(p)$ y están en 4-componentes diferentes de $N_8(p) \cap \bar{S} = S_p$.

□

Lema 2.13. Sea $p \in S$. Suponga que $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo y no vacío. Entonces S_p es 8-conexo.

Demostración. La hipótesis implica que $\{p\}$ no es una 8-componente de $N_8(p) \cap S$. Luego, $N_8(p) \cap S$ es 8-conexo. □

Note que decir $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo es lo mismo que decir $N_8 \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo.

El lema siguiente es similar al anterior pero ahora es sobre las 4-componentes de $N_8(p) \cap \bar{S}$. La hipótesis que $N_4(p) \cap \bar{S}_p \neq \emptyset$ es lo mismo que tener $N_4(p) \cap \bar{S} \neq \emptyset$.

Lema 2.14. Sea $p \in S$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $N_4(p) \cap \overline{S_p} \neq \emptyset$.

2. $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo.

Entonces el número de 4-componentes de $\overline{S_p}$ y $\overline{S_p} \cup \{p\}$ son iguales.

Demostración. Por la hipótesis 1 tenemos que el conjunto $N_4(p) \cap \overline{S} \neq \emptyset$, luego $N_4(p) \cap S$ tiene a lo sumo 3 puntos. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $|N_4(p) \cap S| = 1$. Supongamos que $N_4(p) \cap S = \{p_8\}$, (las otras alternativas se tratan de manera similar) luego $p_4, p_6, p_2 \in \overline{S}$ (ver la figura 25 A). Dado que $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo, entonces $p_3, p_5 \in \overline{S}$ (pues $p_4, p_6, p_2 \in \overline{S}$). Note que $\overline{S_p}$ es 4-conexo, luego $\overline{S_p} \cup \{p\}$ es 4-conexo.

Caso 2: $|N_4(p) \cap S| = 2$. Veamos primero que no se puede dar el caso de que $N_4(p) \cap S = \{p_2, p_6\}$ o $N_4(p) \cap S = \{p_4, p_8\}$. Supongamos que $N_4(p) \cap S = \{p_2, p_6\}$ (ver la figura 25 B), luego $p_4, p_8 \in \overline{S} \cap N_4(p)$ y así p_4 y p_8 están en 4-componentes diferentes de $\overline{S_p}$. Por el Lema 2.12 esto contradice la hipótesis 2. De manera análoga se demuestra que no se puede dar que $N_4(p) \cap S = \{p_4, p_8\}$.

Las alternativas que quedan para $N_4(p) \cap S$ son: $\{p_8, p_6\}$, $\{p_8, p_2\}$ y $\{p_8, p_4\}$. Solo haremos el caso $N_4(p) \cap S = \{p_8, p_6\}$, ver la figura 25 C, pues los demás son análogos.

Tenemos que $p_2, p_4 \in \overline{S} \cap N_4(p)$. Por la hipótesis 2 y el Lema 2.12 se tiene que p_2 y p_4 están en una misma 4-componente de $\overline{S_p}$, se sigue que $p_3 \in \overline{S}$. Note que $N_8(p) \cap \overline{S}$ tiene a lo más dos 4-componentes, las cuales serían $\{p_7\}$ y la 4-componente que contiene a $\{p_2, p_3, p_4\}$,

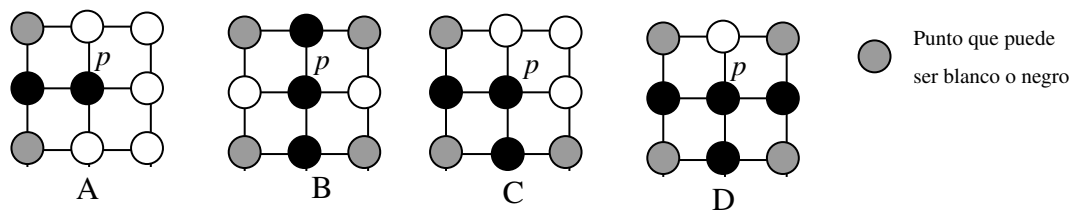


Figura 25. Casos para la prueba del Lema 2.14.

la cual denotamos por C . Observe que $C \cup \{p\}$ es una 4-componente de $N_8(p) \cap (\bar{S} \cup \{p\})$ y $\{p_7\}$ sería la otra. Por lo tanto $N_8(p) \cap \bar{S}$ y $N_8(p) \cap (\bar{S} \cup \{p\})$ tienen el mismo número de 4-componentes, es decir \bar{S}_p y $\bar{S}_p \cup \{p\}$ tiene en mismo número de 4-componentes.

Caso 3: $|N_4(p) \cap S| = 3$. Las alternativas posibles para este conjunto son: $\{p_4, p_6, p_8\}$, $\{p_8, p_2, p_4\}$ y $\{p_6, p_8, p_2\}$. Supondremos que $N_4(p) \cap S = \{p_4, p_6, p_8\}$, ver la figura 25 D. Los otros casos se tratan de manera análoga.

Luego $p_2 \in \bar{S}$. En este caso note que $N_8(p) \cap \bar{S}$ tiene a lo más tres 4-componentes, las cuales serían $\{p_7\}$, $\{p_5\}$ y la 4-componente que contiene a $\{p_2\}$, la cual denotamos como D . Note que $D \cup \{p\}$ es una 4-componente de $N_8(p) \cap (\bar{S} \cup \{p\})$ (pues $p_2 \in D$). Por otra parte, $\{p_5\}$ y $\{p_7\}$ serían las otras 4-componentes de este conjunto, pues p no es 4-adyacente ni a p_5 , ni a p_7 . Por lo tanto $N_8(p) \cap \bar{S}$ y $N_8(p) \cap (\bar{S} \cup \{p\})$ tiene el mismo número de 4-componentes. \square

Lema 2.15. Sea $p \in S$. Si S_p y $S_p \setminus \{p\}$ tienen el mismo número de 8-componentes, entonces S y $S \setminus \{p\}$ tienen el mismo número de 8-componentes.

Demostración. Demostraremos la contrarrecíproca. Supongamos que S y $S \setminus \{p\}$ no tienen el mismo número de 8-componentes. Consideremos dos casos:

- **Caso 1:** $S \setminus \{p\}$ tiene menos 8-componentes que S . Si esto ocurre, $\{p\}$ es una 8-componente de S . Luego S_p tiene más 8-componentes que $S_p \setminus \{p\}$.
- **Caso 2:** $S \setminus \{p\}$ tiene más 8-componentes que S . Entonces existe un conjunto 8-conexo A de S de la forma $A = D \cup \{p\} \cup C$. Donde C y D son 8-componentes de $S \setminus \{p\}$. Se sigue que p es 8-adyacente a C y a D . Observe que p es el único punto de S que es 8-adyacente a D y C , pues C y D son 8-componentes de $S \setminus \{p\}$. Por lo tanto, existen $c \in C$ y $d \in D$ tales que $c, d \in S_p$. Note que $\{c\} \cup \{p\} \cup \{d\}$ está contenido en una 8-componente de S_p . Además c y d están en 8-componentes diferentes de $S_p \setminus \{p\}$, pues p es el único punto de S que es 8-adyacente a c , y d . Por consiguiente $S_p \setminus \{p\}$ tiene más 8-componentes que S_p .

□

Ahora mostraremos un resultado similar para las 4-componentes de \bar{S} .

Lema 2.16. *Sea $p \in S$. Si \bar{S}_p y $\bar{S}_p \cup \{p\}$ tienen el mismo número de 4-componentes, entonces \bar{S} y $\overline{S \setminus \{p\}}$ tienen el mismo número de 4-componentes.*

Demostración. Demostraremos la contrarrecíproca. Consideraremos dos casos:

- **Caso 1:** $\overline{S \setminus \{p\}}$ tiene más 4-componentes que \bar{S} . Entonces $\{p\}$ es una 4-componente de $\overline{S \setminus \{p\}}$. Luego $\bar{S}_p \cup \{p\}$ tiene más 4-componentes que \bar{S}_p .
- **Caso 2:** $\overline{S \setminus \{p\}}$ tiene menos 4-componentes que \bar{S} . Entonces existe una 4-componente A de $\overline{S \setminus \{p\}}$ con $p \in A$ tal que $A \setminus \{p\}$ no es 4-conexo. Luego $|(A \setminus \{p\}) \cap N_4(p)| \geq 2$,

es decir que existen $c, d \in (A \setminus \{p\}) \cap N_4(p)$ tal que $\{c\} \cup \{p\} \cup \{d\}$ están en una 4-componente de $\bar{S}_p \cup \{p\}$. Se sigue que c y d están en 4-componentes diferentes de \bar{S}_p . Por lo tanto \bar{S}_p y $\bar{S}_p \cup \{p\}$ no tiene el mismo número de 4-componentes.

□

Demostración del Teorema 2.11 \Leftarrow . Por hipótesis 1), 3) y el Lema 2.13 $N_8(p) \cap S$ y $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tienen el igual número de 8-componentes. Ahora por hipótesis 2 y 3 y el Lema 2.14 los conjuntos $N_8(p) \cap \bar{S}$ y $N_8(p) \cap \overline{S \setminus \{p\}}$ tienen igual número de 4-componentes. Del Lema 2.15 concluimos que S y $S \setminus \{p\}$ tienen igual número de 8-componentes. Igualmente por el Lema 2.16 tenemos que \bar{S} y $\overline{S \setminus \{p\}}$ tienen el mismo número de 4-componentes. Por lo tanto p es simple.

□

2.3.2. Condiciones necesarias para ser un punto simple. Ahora veremos las condiciones necesarias para que un punto sea simple. Mostraremos que si p es simple, entonces se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del Teorema 2.11. Para ello primero mostraremos que las condiciones 1 y 2 se cumplen.

Lema 2.17. *Si p es simple, entonces $N_4(p) \cap \bar{S} \neq \emptyset$ y $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.*

Demostración. Probaremos la contrarrecíproca. Supongamos primero $N_4(p) \cap \bar{S} = \emptyset$, (ver la figura 31). Entonces $\{p\}$ es una 4-componente de $\overline{S \setminus \{p\}}$, es decir que $\overline{S \setminus \{p\}}$ tiene más 4-componentes que \bar{S} luego p no es simple.

Ahora, si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\}) = \emptyset$, entonces p es una 8-componente de S (ver la figura 32).

Así, S tiene más 8-componentes que $S \setminus \{p\}$, luego p no es simple. \square

Ahora veremos que si p es simple, entonces $S_p \setminus \{p\}$ es 8-conexo. La prueba es por reducción al absurdo. Analizaremos por separado todas las posibilidades de acuerdo al número de 8-componentes de $S_p \setminus \{p\}$.

2.3.2.1. $S_p \setminus \{p\}$ con dos 8-componentes.. Comenzaremos suponiendo que $S_p \setminus \{p\}$ tiene dos 8-componentes, los posibles casos están presentados en la figura 26. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene dos 8-componentes, entonces $2 \leq |N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| \leq 6$. Por esto las alternativas las hemos clasificado de acuerdo a $|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})|$. Observe que no hemos incluidos las alternativas que se obtienen por reflexión o rotación.

Si $|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 6$, tenemos dos posibilidades representadas en las gráficas 1 y 2. Las alternativas cuando $|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 5$ se obtienen cambiando un punto negro a blanco en las alternativas del caso anterior. Los puntos marcados de color azul son aquellos que pueden cambiarse a blanco sin que se altere el número 8-componentes de $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$. Por ejemplo, la alternativa 1 tiene 4 puntos azules, cualquiera de ellos que se cambie a blanco produce un gráfico similar al 3. En cambio, la alternativa 2, genera a 4 y a 5.

Realizando un razonamiento análogo hasta llegar al caso cuando $|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 2$ obtenemos 19 alternativas posibles. Para simplificar el argumento, clasificaremos esos 19 grafos en 5 casos (ver la figura 27) que serán tratados en los lemas que siguen.

- El caso 1 representa los casos en que $p_8, p_4 \in S$ y $p_2, p_6 \in \bar{S}$, es decir las alternativas 1,

3, 6, 7, 8, 13 y 18.

- El caso 2 representa los casos en que $p_1, p_3 \in S$ y $p_2, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 \in \bar{S}$, es decir la alternativa 17.
- El caso 3 representa los casos en que $p_3, p_7 \in S$ y $p_1, p_2, p_4, p_5, p_6, p_8 \in \bar{S}$, es decir la alternativa 19.
- El caso 4 los casos en que $p_3, p_8 \in S$ y $p_2, p_4, p_5 \in \bar{S}$, es decir las alternativa 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15 y 16.
- El caso 5 representa los casos en que $p_1, p_3, p_5, p_6, p_8 \in S$ y $p_2, p_4 \in \bar{S}$, las alternativa 2 y 4.

Lema 2.18. *Sea $p \in S$. Si $p_4, p_8 \in S$ y $p_6, p_2 \in \bar{S}$, entonces p no es simple.*

Demostración. El argumento es por contradicción. Supondremos que p es simple, (ver la figura 27 caso 1).

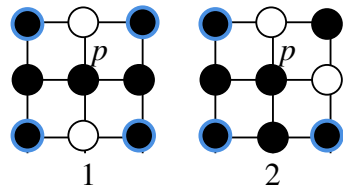
(1) Existe un 8-camino C de p_8 a p_4 en $S \setminus \{p\}$.

Tenemos que p_4 y p_8 están en la misma 8-componente de S . Dado que p es simple, p_4 y p_8 están en la misma 8-componente de $S \setminus \{p\}$. Luego existe un 8-camino C de p_8 a p_4 en $S \setminus \{p\}$.

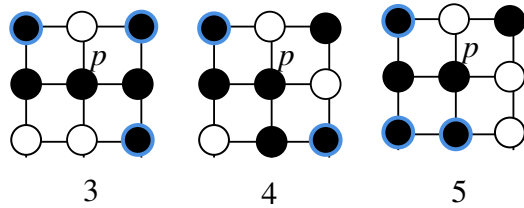
(2) Existe un 8-camino $C_0 \subset C$ tal que $C_0 \cap N_8(p) = \{p_i, p_j\}$, donde p_i y p_j son puntos 8-finales.

Debemos considerar los siguientes casos:

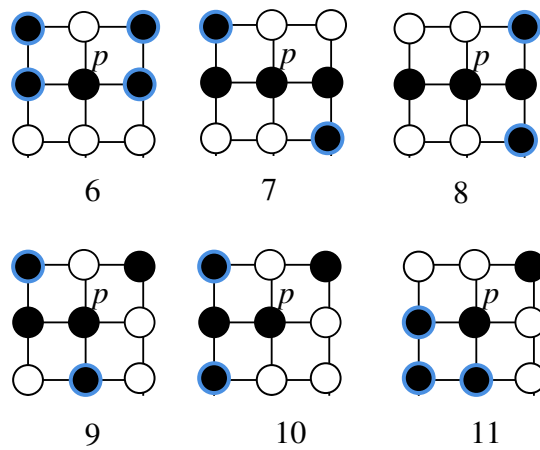
$$|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 6$$



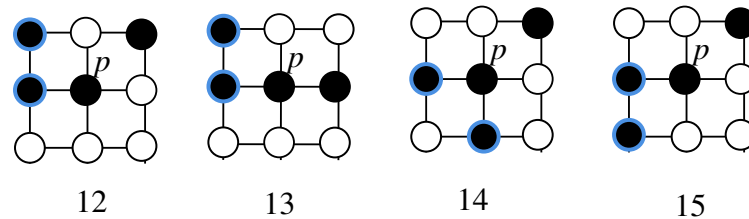
$$|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 5$$



$$|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 4$$



$$|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 3$$



$$|N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| = 2$$

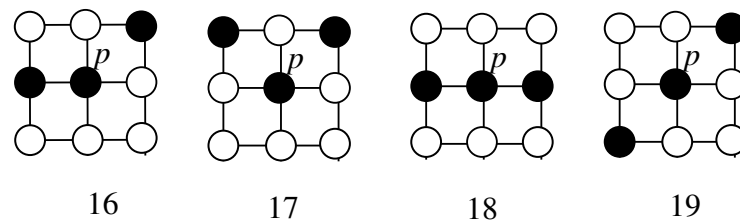


Figura 26. $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ con dos 8-componentes.

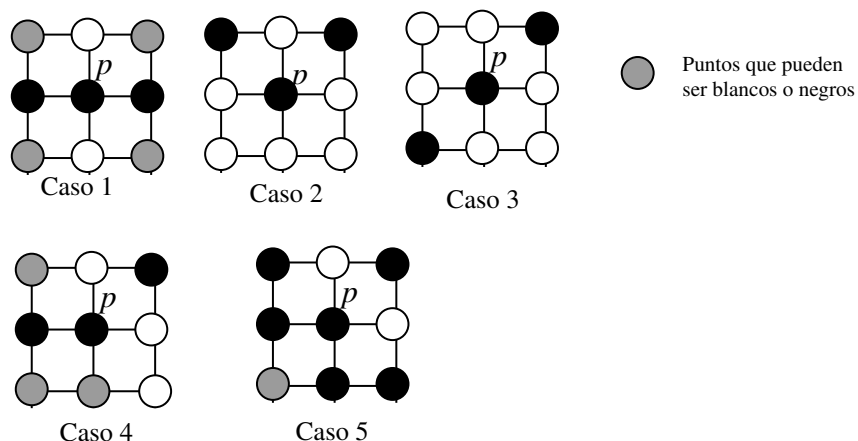


Figura 27. Resumen de los casos si $S_p \setminus \{p\}$ tiene dos 8-componentes.

- Si p no tiene ningún punto 8-adyacente en $C \setminus \{p_4, p_8\}$. Entonces $C_0 = C$.
- Si p tiene un único punto 8-adyacente en $C \setminus \{p_4, p_8\}$. Sea p_i tal punto entonces $i \in \{1, 3, 5, 7\}$. Si $i \in \{1, 7\}$, entonces $C_0 = C \setminus \{p_8\}$. Si $i \in \{3, 5\}$, entonces $C_0 = C \setminus \{p_4\}$.
- Si p tiene dos puntos 8-adyacentes en $C \setminus \{p_4, p_8\}$. Sean p_i y p_j tales puntos, entonces $i, j \in \{1, 3, 5, 7\}$ y $C_0 = C \setminus \{p_4, p_8\}$. Observe que no se puede dar los casos que C_0 tenga puntos finales p_1 y p_7 o p_3 y p_5 , pues C en este caso tiene puntos finales p_4 y p_8 .

(3) $D = C_0 \cup \{p\}$ es una 8-curva simple cerrada.

Tenemos que p_i y p_j son 8-adyacentes a p . Note que p no es 8-adyacente a ningún otro punto de C_0 . Se sigue que D es una 8-curva simple cerrada.

(4) Existen C_1 y C_2 dos 4-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus D$, tales que $p_2 \in C_2$ y $p_6 \in C_1$.

De la afirmación (3) y por el Teorema 2.7, $\mathbb{Z}^2 \setminus D$ tiene exactamente dos 4-componentes C_1 y C_2 . Note que $p_2 \notin D$, entonces p_2 esta C_1 o C_2 . Supondremos que $p_2 \in C_2$ y veamos que

$p_6 \in C_1$. Por el Teorema 2.8, p tiene puntos 4-adyacentes en C_1 y C_2 . Sea $j \in \{8, 6, 4\}$ tal que $p_j \in C_1$. Debemos considerar los siguientes subcasos:

- $|\{p_4, p_8\} \cap D| = 2$. Entonces $p_6 \in C_1$.
- $|\{p_4, p_8\} \cap D| = 1$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $p_4 \in D$ y $p_8 \notin D$. Luego C_0 tiene puntos finales p_4 y p_i para algún $i \in \{1, 7\}$.

Comenzaremos con $i = 1$. Entonces $p_7, p_8, p_6 \notin D$ se sigue que p_7, p_6 y p_8 están en la misma 4-componente de $\mathbb{Z}^2 \setminus D$. Por lo tanto $p_6, p_8 \in C_1$. Ahora si $p_7 \in C_0$, tenemos que $p_8, p_2 \in C_2$ y $p_6 \in C_1$ dado que $p_1 \notin D$.

- Si $|\{p_4, p_8\} \cap D| = 0$. Entonces C_0 tiene puntos finales $\{p_1, p_3\}, \{p_5, p_7\}, \{p_1, p_5\}$ o $\{p_3, p_7\}$. Si son p_1 y p_3 , entonces p_4, p_8 y p_6 están en la misma 4-componente de $\mathbb{Z}^2 \setminus D$, pues $p_4, p_8, p_5, p_7, p_6 \notin D$, luego $p_6 \in C_1$. Análogo se trata p_5, p_7 .

Ahora si son p_1 y p_5 (análogo a tener p_3 y p_7). Observe que p_2 y p_4 están en 4-componente de $\mathbb{Z}^2 \setminus D$ y p_6 y p_8 en la otra, pues $p_2, p_3, p_4, p_7, p_6, p_8 \notin D$. Por lo tanto $p_6 \in C_1$.

(5) Como $\bar{S} \subset C_1 \cup C_2$, y $p_6 \in C_1$ y $p_2 \in C_2$. Sean D_1 y D_2 4-componentes de \bar{S} tal que $p_2 \in D_2$ y $p_6 \in D_1$.

(6) \bar{S} y $\overline{S \setminus \{p\}}$ no tienen el mismo número de 4-componentes. Lo que contradice que p es simple.

Note que $D_1 \cup D_2 \cup \{p\}$ es 4-conexo pues p es 4-adyacente a p_6 y a p_2 , se sigue que $D_1 \cup D_2 \cup \{p\} \subset \overline{S \setminus \{p\}}$. Por otra parte, D_1 y D_2 son 4-componentes de \overline{S} . Concluimos que $\overline{S \setminus \{p\}}$ tiene menos 4-componentes que \overline{S} .

□

Lema 2.19. *Sea $p \in S$. Si $p_1, p_3 \in S$ y $p_2, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 \in \overline{S}$, entonces p no es simple.*

Demostración. El argumento es por contradicción. Veremos el caso 2 de la figura 27. Suponemos que p es simple, se sigue que existe un 8-camino $C \subset S \setminus \{p\}$ de p_1 y p_3 . Realizando un razonamiento similar al Lema 2.18 tenemos que p no es simple. □

La demostración del lema siguiente es similar al anterior tomando un 8-camino de p_3 a p_7 en $S \setminus \{p\}$ por tal motivo la omiteremos y corresponde al caso 3 de la figura 27.

Lema 2.20. *Sea $p \in S$. Si $p_3, p_7 \in S$ y $p_1, p_2, p_4, p_5, p_6, p_8 \in \overline{S}$, entonces p no es simple.*

Ahora enunciaremos los lemas correspondientes para los casos 4 y 5 de la figura 27.

Lema 2.21. *Sea $p \in S$. Si $p_3, p_8 \in S$ y $p_2, p_4, p_5 \in \overline{S}$, entonces p no es simple.*

Demostración. El argumento nuevamente es por contradicción. Suponemos que p es simple. Se sigue que existe un 8-camino C de p_3 a p_4 en $S \setminus \{p\}$. Realizando un razonamiento similar al Lema 2.18 (3) y (4) probamos que existen 4-componentes D_1 y D_2 de \overline{S} tal que $p_2 \in D_2$ y $p_4 \in D_1$, siguiendo un razonamiento análogo a (5) del Lema 2.18 tenemos que p no es simple. □

Lema 2.22. *Sea $p \in S$. Si $p_3, p_8, p_6, p_5 \in S$ y $p_2, p_4, p_5 \in \overline{S}$, entonces p no es simple.*

Demostración. Supondremos que p es simple. Se sigue que existe un 8-camino C de p_3 a p_4 en $S \setminus \{p\}$. Si $|(C \setminus \{p_3, p_4\}) \cap N_8(p)| \leq 2$ se sigue el mismo razonamiento del Lema 2.21.

Ahora si $|(C \setminus \{p_3, p_4\}) \cap N_8(p)| = 3$, entonces $p_5 \in C$. Sea $D = C_0 \subset C$ un 8-camino p_3 a p_5 , luego $C_0 \cup \{p\}$ es una 8-curva. Realizando un razonamiento similar al Lema 2.18 (4), mostramos que existen 4-componentes D_1 y D_2 de \bar{S} tal que $p_2 \in D_2$ y $p_4 \in D_1$. Así, utilizando el mismo razonamiento del ítem (5) en la prueba del Lema 2.18 se tiene que p no es simple. \square

La prueba del siguiente lema se sigue de manera inmediata por los Lemas anteriores (ver Lema 2.18, Lema 2.19, Lema 2.20, Lema 2.21 y Lema 2.22).

Lema 2.23. *Sea $p \in S$. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene dos 8-componentes, entonces p no es un punto simple.*

2.3.2.2. $S_p \setminus \{p\}$ con tres 8-componentes.. Si $S_p \setminus \{p\}$ tiene tres 8-componentes, se debe cumplir que $3 \leq |N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})| \leq 5$. La figura 28 muestra todas las posibilidades, las cuales se obtuvieron realizando el mismo razonamiento que se hizo en la figura 26 y la figura 29 muestra el resumen de los casos, en ella el caso 1 representa los casos en que $p_1, p_3, p_6 \in S$ y $p_2, p_4, p_8 \in \bar{S}$ es decir la alternativa 1, 2 y 4, el caso 2 representa a la alternativa 3.

Lema 2.24. *Sea $p \in S$. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene tres 8-componentes, entonces p no es un punto simple.*

Demostración. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene tres 8-componentes, entonces exceptuando los casos simétricos y rotaciones con respecto a p , debemos considerar los casos de la figura 29. Supondremos en ambos casos que p es simple.

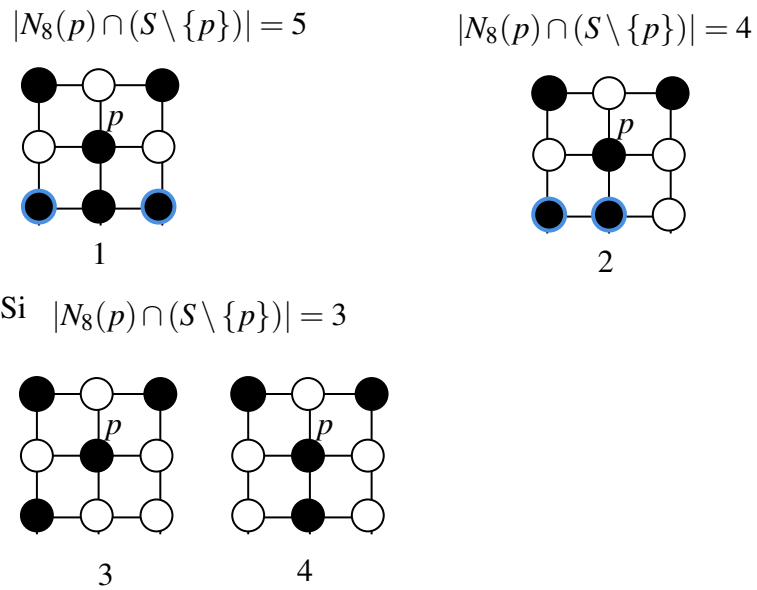


Figura 28. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene tres 8-componentes.

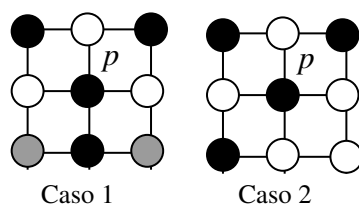


Figura 29. Casos para el Lema 2.24.

- **Caso 1:** Tenemos que p_6 y p_3 están en la misma 8-componente de S . Como p es simple existe un 8-camino C en $S \setminus \{p\}$ de p_6 a p_3 , pues p_6 y p_3 están en la misma 8-componente en $S \setminus \{p\}$.

- **Caso 1.1:** Si $C \setminus \{p_3, p_6\}$ no tiene puntos 8-adyacentes a p , entonces $D = C \cup \{p\}$ es una 8-curva simple cerrada. Por el Teorema 2.7 $\mathbb{Z}^2 \setminus D$ tiene dos 4-componentes C_1 y C_2 .

Por Teorema 2.8 tenemos que si $p_4 \in C_1$, entonces existe $j \in \{2, 8\}$ tal que $p_j \in C_2$, pues $p \in D$. Como $p_2, p_4, p_8 \in \bar{S}$ y $\bar{S} \subset C_1 \cup C_2$, sean $D_1 \subset C_1 \cap \bar{S}$, una 4-componente de $\bar{S} \cap C_1$, tal que $p_4 \in D_1$, y $D_2 \subset C_2 \cap \bar{S}$ una 4-componente de $\bar{S} \cap C_2$, tal que $p_j \in D_2$.

Note que D_1 y D_2 son 4-componentes de \bar{S} . Luego realizando un razonamiento análogo al Lema 2.18 a partir de (5) se concluye que p no es simple.

- **Caso 1.2:** Si $C \setminus \{p_3, p_6\}$ tiene un punto 8-adyacente a p . Sea p_k el punto 8-adyacente a p en $C \setminus \{p_3, p_6\}$, (con $k \in \{1, 7, 5\}$) y $C_0 \subset C$ un 8-camino, con puntos finales p_3 y p_k . Ahora note que $C_0 \cup \{p\}$ es un 8-curva.

Construimos D_1 y D_2 igual que el caso anterior, con la condición que $p_2 \in D_2$ y $p_4 \in D_1$ 4-componentes de \bar{S} . Realizando el mismo razonamiento del Lema 2.18 (5) concluimos que p no es simple.

- **Caso 1.3:** Si $C \setminus \{p_3, p_6\}$ tiene dos puntos 8-adyacentes a p , entonces estos deben

ser p_1 y p_k para $k \in \{5, 7\}$. Tome $C_0 \subset C$ un 8-camino de p_1 a p_k y observe que $D = C_0 \cup \{p\}$ es una 8-curva.

Construimos D_1 y D_2 igual que en los casos anteriores, 4-componentes de \bar{S} , con la condición que $p_2 \in D_2$ y $p_8 \in D_1$ (Note que en este caso p_2 y p_4 están en la misma 4-componente C_2 , pues $p_3 \notin D$). Haciendo el mismo razonamiento del caso 1 (5) del Lema 2.18 tenemos que p no es simple.

- **Caso 2** Tome un 8-camino C de p_1 a p_3 en $S \setminus \{p\}$ y siga el mismo razonamiento del caso 1.

□

2.3.2.3. $S_p \setminus \{p\}$ con cuatro 8-componentes.. Por último nos falta por analizar el caso en que $S_p \setminus \{p\}$ tiene cuatro 8-componentes. Este caso es el más sencillo pues solo debemos considerar un caso el que se muestra en la figura 30.

Lema 2.25. *Sea $p \in S$. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene cuatro 8-componentes, entonces p no es simple.*

Demostración. Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ tiene 4-componentes, entonces es de la forma que se muestra en la figura 30. Supongamos que p es simple, entonces p_1 y p_k para $k \in \{3, 5, 7\}$ están en la misma 8-componente de $S \setminus \{p\}$, pues p_1 y p_k están en la misma 8-componente en S .

Luego existe un 8-camino $C \subset S \setminus \{p\}$ tal que $C \setminus \{p_1, p_k\}$ no tiene ningún punto 8-adyacente a p . Por lo tanto $C \cup \{p\}$ es una 8-curva simple cerrada. Siguiendo razonamiento

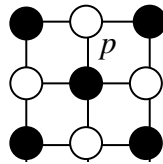


Figura 30. Lema 2.25.

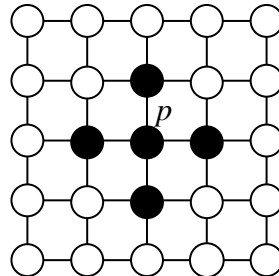


Figura 31. $N_4(p) \cap \bar{S} = \emptyset$.

similar al del Lema 2.18 (a partir de (4)) podemos concluir que p no es un punto simple. \square

Demostración del Teorema 2.11 parte \Rightarrow . Sea p un punto simple, por Lema 2.17 se tiene que p tiene un 4-vecino en \bar{S} y un 8-vecino en $S \setminus \{p\}$. Por lo tanto se cumple 1 y 2.

Note que $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ tiene a lo más cuatro 8-componentes. Si $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ tiene dos, tres o cuatro 8-componentes por los Lemas 2.23, 2.24 y 2.25 se tiene que p no es simple. Luego $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ debe tener una 8-componente, es decir que, $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ es conexo,

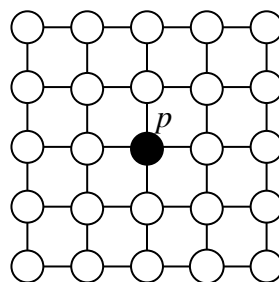


Figura 32. $N_8(p) \cap S \setminus \{p\} = \emptyset$.

pues p es simple.

□

2.4. Algoritmo para detectar puntos simples

Para la implementación en un lenguaje de programación los algoritmos de reducción las imágenes son tratadas como matrices. Como solo analizaremos imágenes en blanco y negro, las matrices estarán compuestas de ceros y unos, donde el valor 1 representará el color negro y el valor 0 el color blanco.

El resultado principal es el siguiente teorema que traduce en una fórmula algebraica el criterio de punto simple dado por el Teorema 2.11. Esta fórmula es muy fácil de implementar en un algoritmo computacional.

Utilizaremos nuevamente la enumeración de los 8-vecinos de un punto dada en la figura 22. Denotaremos por p'_i a $1 - p_i$. Este enunciado sigue las operaciones aritméticas usuales. (no son módulo 2).

Teorema 2.26. [Kong and Rosenfeld, 1996, p. 34] Sea $p \in S \subset \mathbb{Z}^2$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

(i) p es simple.

$$(ii) [p'_2 \cdot \max\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \max\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \max\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \max\{p_1, p_2\}] = 1.$$

Este resultado fue utilizado por primera vez en [Hilitch, 1969] según [Kong and Rosenfeld, 1996], pero dicho artículo no pudimos obtenerlo, por tal motivo la demostración que

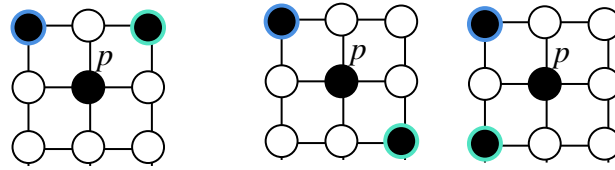


Figura 33. Casos para el Lema 2.27.

presentamos es nuestra. La demostración que realizaremos la obtuvimos utilizando el Teorema 2.11. Comenzaremos demostrando una serie de lemas.

Lema 2.27. Si p es simple y $p_2 = p_4 = p_6 = p_8 = 0$, entonces existe un único $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ tal que $p_j = 1$.

Demostración. Si p es simple y $p_2 = p_4 = p_6 = p_8 = 0$, entonces por el Teorema 2.11 (2) se tiene que existe algún $p_j = 1$ para $j \in \{1, 3, 5, 7\}$. Para probar la unicidad, supongamos que existe otro $p_k = 1$, para $k \neq j$ y $k \in \{1, 3, 5, 7\}$. Luego $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ tiene dos 8-componentes (ver la figura 33). Contradiciendo la simplicidad de p , pues por el Teorema 2.11 (3) $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ es 8-conexo. Por lo tanto p_j es único. \square

Lema 2.28. Si $p_{2i} = p_{2i+4} = 0$ y $p_{2i+2} = p_{2i+6} = 1$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (con la suma de los índices módulo 8), entonces p no es simple.

Demostración. Consideremos el caso $i = 1$, para los otros casos el razonamiento es análogo. Entonces $p_2 = p_6 = 0$ y $p_4 = p_8 = 1$. Es decir, $p_4, p_8 \in N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ y $p_2, p_6 \notin N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$. Entonces, $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ tiene dos 8-componentes, ver la figura 34 A. Luego por el Teorema 2.11, p no es simple. \square

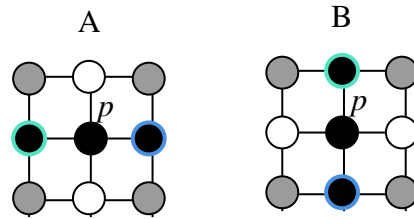


Figura 34. Casos para el Lema 2.28.

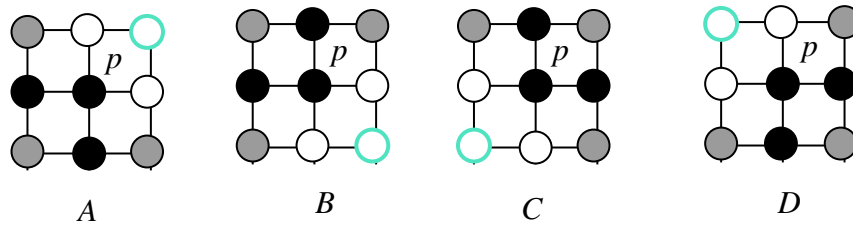


Figura 35. Casos para el Lema 34.

Lema 2.29. Si $p_{2i} = p_{2i+2} = 0$, $p_{2i+4} = p_{2i+6} = 1$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (con la suma de los índices módulo 8) y p es simple, entonces $p_{2i+1} = 0$.

Demostración. Consideremos el caso $i = 1$, en los otros casos el razonamiento es análogo, ver la figura 35 A. Por hipótesis $p_2, p_4 \in N_4(p) \cap \bar{S}$ y p es simple, luego por el Teorema 2.11 y el Lema 2.12 se tiene que p_2, p_4 están en la misma 4-componente de $N_8(p) \cap \bar{S}$. Por lo tanto existe un 4-camino $C \subset N_8(p) \cap \bar{S}$ de p_2 a p_4 . Como $p_6, p_8 \in S$ y $C \subset N_8(p) \cap \bar{S}$, entonces $p_3 \in C$, luego $p_3 = 0$. □

Lema 2.30. Si $N_4(p) \cap S \setminus \{p\} = \{p_{2i}\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y p es simple, entonces $p_{2i+3} = 0$ y $p_{2i+5} = 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que $i = 1$, luego $p_2 \in S$ y $p_4, p_6, p_8 \in N_4(p) \cap \bar{S}$, ver la figura 36 A. Por el Teorema 2.11 y el Lema 2.12 tenemos que p_4 y p_8 están

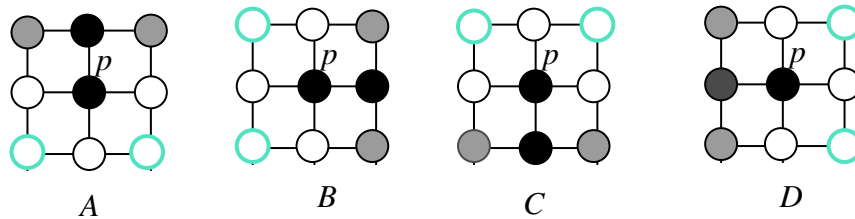


Figura 36. Casos para el Lema 2.30.

la misma 4-componente. Se sigue que existe un 4-camino $C \subset N_8(p) \cap \bar{S}$ de p_4 a p_8 . Como $p_2 \in S$, C debe pasar por p_6 . Dado que C es un 4-camino, entonces $p_5, p_7 \in C$, es decir que $p_5 = p_7 = 0$. □

Demostración del Teorema 2.26: Supongamos primero que p es simple. Por el Lema 2.17, existe $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ tal que $p_i = 0$. Analizaremos todos los posibles casos dependiendo de $|N_4(p) \cap \bar{S}|$.

- **Caso 1:** $|N_4(p) \cap \bar{S}| = 1$. Sin pérdida de generalidad supondremos $p_2 = 0$. Luego $p_4 = p_6 = p_8 = 1$. Por lo tanto tenemos:

$$[p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \text{máx}\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \text{máx}\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \text{máx}\{p_1, p_2\}] = 1.$$

- **Caso 2:** $|N_4(p) \cap \bar{S}| = 2$. Entonces $p_i = p_j = 0$ para $i, j \in \{2, 4, 6, 8\}$ con $i \neq j$.

Dado que p es simple, por el Lema 2.28 se tiene $|i - j| = 2$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $p_4 = p_2 = 0$ y $p_6 = p_8 = 1$. Por el Lema 2.29, tenemos que $p_3 = 0$.

Luego:

$$\begin{aligned} & [p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \text{máx}\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \text{máx}\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \text{máx}\{p_1, p_2\}] \\ & = p_3 + 1 = 1. \end{aligned}$$

- **Caso 3:** $|N_4(p) \cap \bar{S}| = 3$ Sin pérdida de generalidad supondremos que $p_2 = 1$ y $p_4 = p_6 = p_8 = 0$. Realizando el cálculo obtenemos:

$$\begin{aligned} & [p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \text{máx}\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \text{máx}\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \text{máx}\{p_1, p_2\}] \\ & = p_5 + p_7 + 1. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.30, se tiene que $p_5 = p_7 = 0$, luego $p_5 + p_7 + 1 = 1$.

- **Caso 4:** $|N_4(p) \cap \bar{S}| = 4$. Entonces $p_2 = p_4 = p_6 = p_8 = 0$. Realizando el cálculo obtenemos que:

$$\begin{aligned} & [p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \text{máx}\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \text{máx}\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \text{máx}\{p_1, p_2\}] \\ & = p_1 + p_3 + p_5 + p_7. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.27, se tiene que $p_1 + p_3 + p_5 + p_7 = 1$.

Recíprocamente, supongamos que p satisface (ii) y mostremos que p es simple. Tene-

mos que:

$$[p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] + [p'_4 \cdot \text{máx}\{p_5, p_6\}] + [p'_6 \cdot \text{máx}\{p_7, p_8\}] + [p'_8 \cdot \text{máx}\{p_1, p_2\}] = 1.$$

Se deduce que un solo sumando debe ser 1. Supondremos que:

$$[p'_2 \cdot \text{máx}\{p_3, p_4\}] = 1.$$

Luego $p_2 = 0$ y $\text{máx}\{p_3, p_4\} = 1$. Debemos considerar los siguientes casos:

- **Caso 1:** $p_4 = 0$ y $p_3 = 1$. Ver la figura 37, de esto se deduce que $p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_1 = 0$. Luego por el Teorema 2.11, se tiene que p es simple.
- **Caso 2:** $p_4 = 1$ y $p_3 = 0$. Consideraremos los siguientes sub casos:
 1. $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 0$. Ver la figura 38. Luego $p_5 = p_7 = p_8 = p_1 = 0$, se sigue que p es simple por el Teorema 2.11.
 2. $\text{máx}\{p_5, p_6\} = 1$. Si $p_6 = 1$ tenemos los siguientes sub casos por considerar:
 - Si $\text{máx}\{p_7, p_8\} = 0$. Se deduce los casos que se muestran en la figura 39. Por el Teorema 2.11 se tiene que p es simple.
 - Si $\text{máx}\{p_7, p_8\} = 1$. Debemos considerar dos casos, con respecto a p_8 , ver la figura 40 y figura 41. En todos los casos se concluye que p es simple, por el Teorema 2.11.

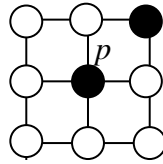


Figura 37. Caso 1: $p_4 = 0$ y $p_3 = 1$.

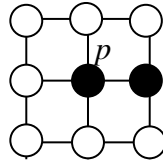


Figura 38. Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0$ y $\max\{p_5, p_6\} = 0$.

Ahora, Si $p_6 = 0$. Entonces $p_7 = p_8 = p_1 = 0$, ver la figura 42. Por el Teorema 2.11 se sigue que p es simple.

- **Caso 3:** $p_4 = 1$ y $p_3 = 1$. Se tienen las mismas alternativas del caso anterior con $p_3 = 1$ y por un razonamiento similar concluimos que p es simple.

□

2.4.1. Algoritmos de reducción y adelgazamiento. En esta sección, mostramos dos ejemplos de implementación de algoritmos de reducción y adelgazamiento en imágenes digitales utilizando el lenguaje de programación Python (el algoritmo implementado en python se puede ver en el anexo).

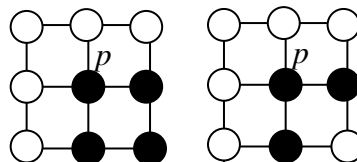


Figura 39. Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0, \max\{p_5, p_6\} = 1, p_6 = 1$ y $\max\{p_7, p_8\} = 0$.

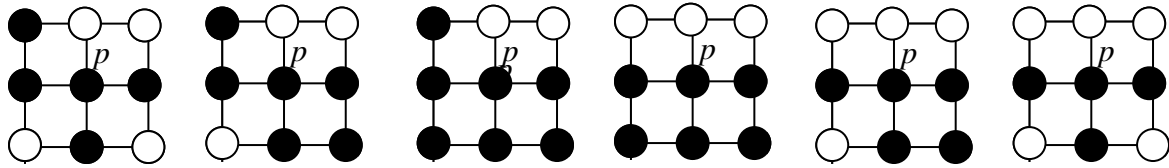


Figura 40. Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0, \text{máx}\{p_5, p_6\} = 1, \text{máx}\{p_7, p_8\} = 1$ y $p_6 = p_8 = 1$.

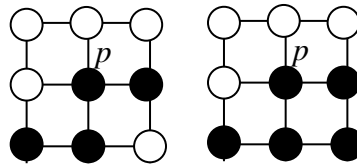


Figura 41. Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0, \text{máx}\{p_5, p_6\} = 1, \text{máx}\{p_7, p_8\} = 1, p_6 = 1$ y $p_8 = 0$.

Los algoritmos de adelgazamiento son una clase de algoritmos de reducción los cuales matemáticamente no es fácil de definirlos. En [Rosenfeld, 1975a] los definen como un algoritmo que preserva la conectividad de los subconjuntos de la imagen, en la cual las curvas, arcos y puntos aislados permanecen sin cambios y además los rectángulos verticales cuyo largo y ancho son mayores que un píxel, se les debe realizar cambios.

Tanto los algoritmos de reducción como los de adelgazamiento generan imágenes que son topológicamente equivalentes a la original. Es importante destacar que los algoritmos de adelgazamiento son un subconjunto de los algoritmos de reducción debido a que ellos preservan la conexidad de la imagen. Sin embargo, es crucial tener en cuenta que no todos los algoritmos de reducción cumplen con los criterios para ser considerados como algoritmos de

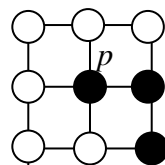


Figura 42. Caso 2: $p_4 = 1, p_3 = 0, \text{máx}\{p_5, p_6\} = 1$ y $p_6 = 0$.

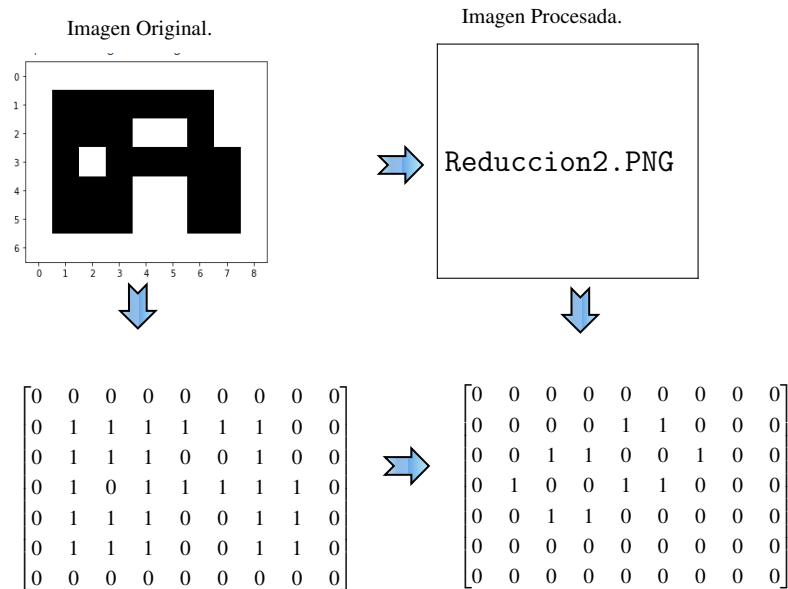


Figura 43. Algoritmo de Reducción.

adelgazamiento. Pues estos no necesariamente preservan caminos, pues un camino puede ser reducido a un punto.

La figura 43 muestra un ejemplo de una imagen procesada, a la cual se le aplicó un algoritmo de reducción. Para lograr esto, se llevó a cabo un recorrido de la matriz que compone la imagen, evaluando cada punto para determinar si es considerado simple o no, de acuerdo con el Teorema 2.26. Esta figura también muestra una imagen completamente reducida, pues la imagen resultante no contiene más puntos simples.

La figura 44 muestra un algoritmo de reducción que es de adelgazamiento. El cual se realizó nuevamente aplicando el Teorema 2.26. En esta figura se puede evidenciar que se cumple las condiciones para ser considerado un algoritmo de adelgazamiento. Pues se preservó conectividad, los caminos y las curvas permanecen sin cambios y los rectangulos verticales se

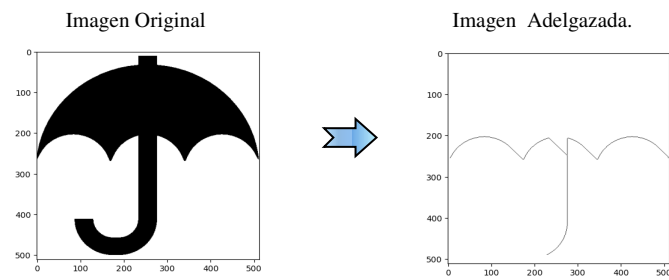


Figura 44. Algoritmo de adelgazamiento.

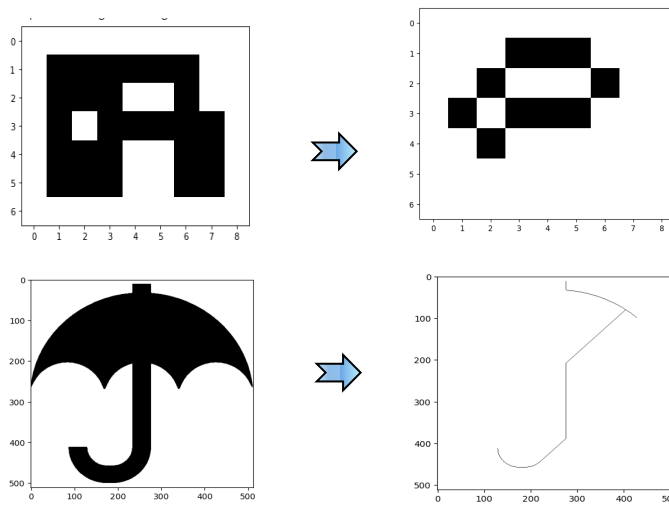


Figura 45. Aplicación de algoritmo de reducción.

les realizó cambios.

La figura 45 muestra la aplicación del mismo algoritmo de reducción, pero realizando un recorrido diferente en la matriz a las dos imágenes digitales anteriores.

Los algoritmos de reducción, como se mencionó anteriormente, se enfocan en la eliminación de puntos simples en una imagen digital. Otros algoritmos que podemos aplicar son, por ejemplo, los de **alternancia en campos** y los de **frontera norte** [Cámara Caunedo, 2016] los cuales se enfocan en la eliminación de puntos simples estableciendo determinadas condiciones.

3. Las imágenes en el plano digital.

Khalimsky, Kopperman y Meyer [Khalimsky et al., 1990a] mostraron una forma de interpretar el plano de Rosenfeld dentro del plano digital de Khalimsky. La idea clave para comparar estos dos enfoques se basa en usar una función $\Gamma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, donde \mathbb{Z}^2 es el plano de Rosenfeld, que es \mathbb{Z}^2 junto con las relaciones de adyacencia, y \mathbb{K}^2 que es el plano de Khalimsky. La función Γ les sirvió para traducir el teorema de la curva de Jordan desde \mathbb{K}^2 al plano de Rosenfeld obteniendo de esa manera una prueba topológica del teorema de Jordan-Rosenfeld que se enuncia en el lenguaje de los grafos (ver los Teoremas 2.7, 2.8 y 3.14). Esos teoremas jugaron un papel importante para la caracterización de los puntos simples (ver el Teorema 2.11) que, como vimos en el capítulo 2, fue el resultado crucial para construir algoritmos de reducción.

En este capítulo analizaremos con detenimiento la relación entre los conceptos de conexidad en el plano de Rosenfeld y la conexidad topológica en plano de Khalismky. Extenderemos el operador Γ a otro denotado Γ^* que resultó ser más útil para entender la relación entre el plano de Rosenfeld y el de Khalimsky y además permite establecer un concepto análogo al de punto simple pero en el contexto topológico (ver definición 1).

Presentaremos algunos resultados originales que no están en la literatura consultada (ver por ejemplo las proposiciones 3.8, 3.20 y 3.21 los Teoremas 3.19 y 3.28).

3.1. El plano digital y el plano de Rosenfeld.

En el capítulo anterior se abordó el procesamiento de imágenes usando las relaciones de adyacencia en el plano de Rosenfeld o \mathbb{Z}^2 , en este no se usa ninguna topología. Ahora queremos dotar a las imágenes digitales de una topología. Para ello, “sumergimos” el plano de Rosenfeld en el plano digital \mathbb{K}^2 , siguiendo las ideas presentadas en [Khalimsky et al., 1990a].

Es importante destacar que en [Khalimsky et al., 1990a], se trabajaba con un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 , denotado como \mathbf{R} es decir $\mathbf{R} = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$. El plano digital finito seleccionado es $X \times X$, donde $X = \{0, \dots, 2m + 2n\}$. En $X \times X$ tiene la topología de subespacio de \mathbb{K}^2 . Para “sumergir” a \mathbf{R} en el plano digital usaremos la siguiente función $\Gamma : \mathbf{R} \rightarrow X \times X$, definida por:

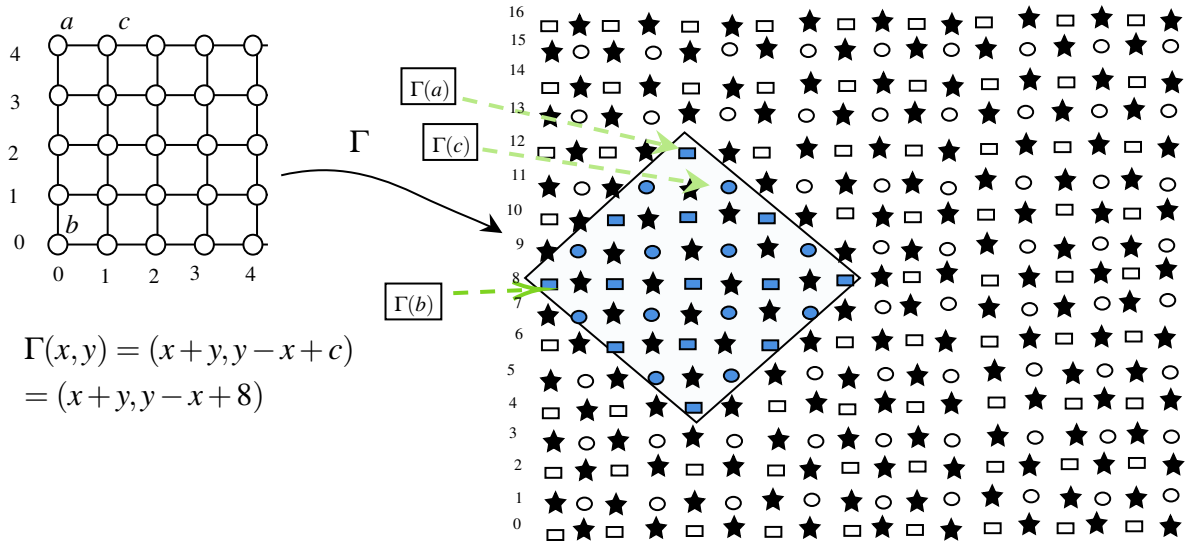
$$\Gamma_c(x, y) = (x + y, y - x + c)$$

donde $c = n + m$, si $n + m$ es par, en caso contrario, $c = n + m + 1$.

La figura 46 muestra un ejemplo de cómo queda sumergido el plano de Rosenfeld en el plano digital finito bajo Γ . A lo largo de este capítulo, el parámetro c no juega ningún papel, pues este parámetro en [Khalimsky et al., 1990a] se utiliza para sumergirlo adecuadamente en el plano digital finito y \mathbf{R} sera \mathbb{Z}^2 y el plano digital \mathbb{K}^2 por lo que definimos $\Gamma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ de la siguiente manera:

$$\Gamma(x, y) = (x + y, y - x).$$

De Γ sabemos que es una función inyectiva y envía a solo puntos puros de \mathbb{K}^2 . Con el



$$\Gamma(x, y) = (x + y, y - x + c)$$

$$= (x + y, y - x + 8)$$

Figura 46. El plano Rosenfeld sumergido en el plano digital.

objetivo de preservar la conexidad en algunos casos utilizaremos el siguiente operador:

$$\Gamma^*(A) = \Gamma(A) \cup \{(x, y) \text{ un punto mixto tal que:} \tag{1}$$

$$N(x, y) \subset \Gamma(A) \cup \{(x, y)\} \text{ o } cl(x, y) \subset \Gamma(A) \cup \{(x, y)\}\}$$

Note que la preimagen del operador Γ y Γ^* en el plano Rosenfeld va ser la misma. En [Khalimsky et al., 1990a] se define un operador similar para las k -curvas, donde $k \in \{4, 8\}$. Sin embargo, este difiere un poco del que hemos definido. Sabemos que el análisis del procesamiento de imágenes se basa principalmente en las relaciones de adyacencia entre los píxeles de las imágenes. Las proposiciones 3.1 y 3.2 muestra la relación de 4-adyacencia y 8-adyacencia bajo Γ en el plano digital. Recordemos que $A(w, z)$ es el conjunto de puntos de \mathbb{K}^2 adyacentes a (w, z) topológicamente hablando (ver la definición 1.28).

Proposición 3.1. Sean $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$. Entonces, (x, y) y (x', y') son 4-adyacentes en \mathbb{Z}^2 si

y solo si $\Gamma(x',y') \in A(\Gamma(x,y))$.

Demostración. \Rightarrow Si (x,y) y (x',y') son puntos 4-adyacentes, entonces $(x',y') = (x \pm 1, y)$ o $(x',y') = (x, y \pm 1)$. Sin pérdida de generalidad, supondremos $(x',y') = (x, y + 1)$. Luego $\Gamma(x',y') = (x + y + 1, y + 1 - x)$ y $\Gamma(x,y) = (x + y, y - x)$. Por lo tanto $\Gamma(x',y') \in A(\Gamma(x,y))$, pues $\Gamma(x,y)$ es un punto puro.

\Leftarrow Primero notemos que tanto $\Gamma(x,y)$ como $\Gamma(x',y')$ son puntos puros. Si $\Gamma(x',y') \in A(\Gamma(x,y))$, entonces ambas coordenadas de $\Gamma(x',y')$ difieren en uno en comparación con las coordenadas de $\Gamma(x,y)$, es decir que $\Gamma(x',y') = (x + y \pm 1, y - x \pm 1)$. Sin pérdida de generalidad tomaremos $\Gamma(x',y') = (x + y + 1, y - x + 1) = (x' + y', y' - x')$. A partir de esto, se deducen las siguientes dos ecuaciones:

- $x' + y' = x + y + 1.$
- $y' - x' = y - x + 1.$

Resolviendo las dos ecuaciones tenemos $y' = y + 1$ y $x' = x$. De forma general tenemos que $(x',y') = (x \pm 1, y)$ o $(x',y') = (x, y \pm 1)$, por tanto (x,y) es 4-adyacente a (x',y') .

□

La figura 47 muestra la relación de 4-adyacencia para el punto p bajo Γ en el plano digital.

Sabemos que los 8 vecinos de un punto p en \mathbb{Z}^2 también están formados por puntos que son 4-adyacentes, pero también por otros puntos que no lo son. La siguiente proposición

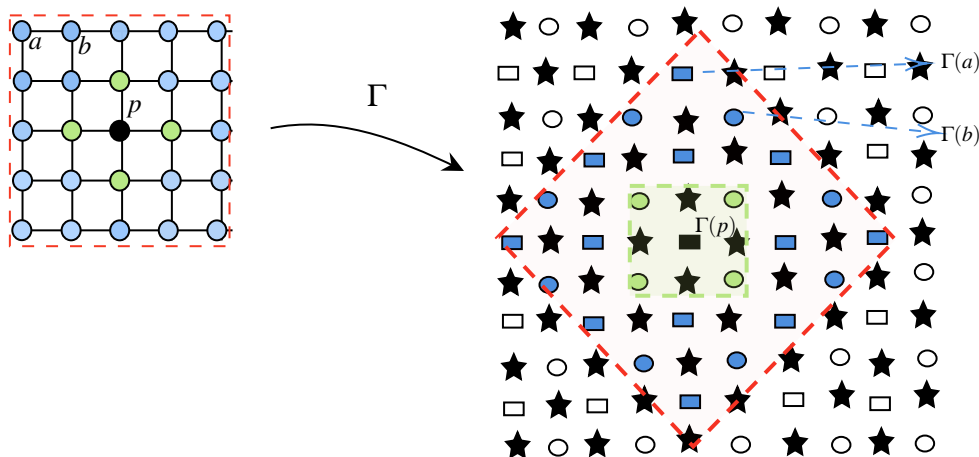


Figura 47. Los 4 vecinos de p en el plano digital bajo Γ .

evidencia cómo se ven estos puntos que no son 4-adyacentes bajo Γ en el plano digital.

Proposición 3.2. Sean $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$. Entonces los puntos (x, y) y (x', y') son 8-adyacentes y no 4-adyacentes en \mathbb{Z}^2 si y solo si existe un único punto mixto (u, v) tal que $\Gamma(x', y'), \Gamma(x, y) \in A(u, v)$.

Demostración. \Rightarrow Si (x', y') es 8-adyacente a (x, y) pero no 4-adyacente, entonces es de la forma $(x', y') = (x \pm 1, y \pm 1)$. Sin pérdida de generalidad, supondremos $(x', y') = (x + 1, y + 1)$. Por lo tanto $\Gamma(x, y) = (x + y, y - x)$ y $\Gamma(x', y') = (x + y + 2, y - x)$. Es decir que $\Gamma(x, y)$ y $\Gamma(x', y')$ no son adyacentes en el plano digital.

Observe que $\Gamma(x, y)$ y $\Gamma(x', y')$ son adyacentes a $(u, v) = (x + y + 1, y - x)$, el cual es un punto mixto. Luego $\Gamma(x, y), \Gamma(x', y') \in A(u, v)$. Ahora note que los otros puntos mixtos adyacentes a $\Gamma(x, y)$ no son adyacentes a $\Gamma(x', y')$ ver la figura 48. Se sigue que (u, v) es único.

\Leftarrow Sea (u, v) un punto mixto tal que $\Gamma(x, y), \Gamma(x', y') \in A((u, v))$. Tenemos que $\Gamma(x, y)$ y $\Gamma(x', y')$ son puntos puros que están $A(u, v)$, luego difieren en 1 o -1 en una coordenada en

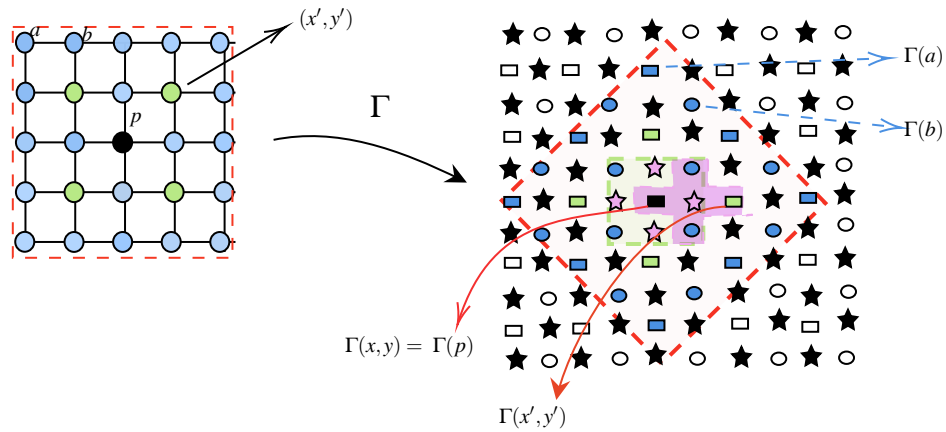


Figura 48. Los puntos 8-adyacentes a p bajo Γ en el plano digital.

relación con (u, v) . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(u, v) = (x + y + 1, y - x)$ en relación con $\Gamma(x, y)$. Entonces, $\Gamma(x', y')$ es uno de los siguientes puntos: $\{(x + y + 1, y - x + 1), (x + y + 1, y - x - 1), (x + y + 2, y - x)\}$.

Como (u, v) es único, se tiene $\Gamma(x', y') = (x + y + 2, y - x)$, pues en los otros casos contradice la unicidad. Deduciendo así las siguientes ecuaciones :

- $x' + y' = x + y + 2$
- $y' - x' = y - x$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos $(x', y') = (x + 1, y + 1)$, es decir, (x', y') es 8-adyacente a (x, y) . Análogamente se prueban los otros casos. □

La figura 48 se puede observar un ejemplo de la anterior proposición.

En las proposiciones anteriores vimos que los puntos 4-adyacentes en \mathbb{Z}^2 se transforman con Γ en puntos adyacentes topológicamente. Sin embargo, no ocurre lo mismo con algunos

puntos 8-adyacentes. De ahí la utilidad del operador “ Γ^* ” que si preserva la conexidad al agregar el punto mixto. Con el fin de simplificar la notación, en algunos casos escribiremos A^* en lugar de $\Gamma^*(A)$.

3.1.1. Los caminos, las curvas y el operador Γ^* . En esta sección analizaremos en qué se transforman (al aplicarles Γ) los k -caminos y las k -curvas en \mathbb{Z}^2 , para $k \in \{4, 8\}$.

Lema 3.3. *Si C es un 4-camino finito en \mathbb{Z}^2 , entonces $\Gamma(C)$ es un arco en el plano digital.*

Demostración. Sea $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$ un 4-camino con puntos 4-finales (x_0, y_0) y (x_n, y_n) .

Tenemos que $\Gamma(C) = \{\Gamma(x_0, y_0), \Gamma(x_1, y_1), \dots, \Gamma(x_{n-1}, y_{n-1}), \Gamma(x_n, y_n)\}$. Para ver $\Gamma(C)$ es un arco debemos ver que es un COTS. Para ello verificaremos que cumple el Teorema 1.29 parte 5.

Veamos primero que $\Gamma(C)$ es conexo. Sea $A_{i-1} = \{\Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), \Gamma(x_i, y_i)\}$ con $1 \leq i \leq n$. Tenemos que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $0 \leq i < n$, por la Proposición 3.1 se tiene que cada A_i es conexo. Se sigue por el Teorema 1.10 que $\Gamma(C)$ es conexo.

Veamos ahora que $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap \Gamma(C)| = 2$ para $1 \leq i \leq n - 1$.

Dado que C es un 4-camino y (x_i, y_i) no es punto 4-final de C , se tiene que (x_i, y_i) es 4-adyacente (x_{i-1}, y_{i-1}) a (x_{i+1}, y_{i+1}) . Luego por la Proposición 3.1 se tiene que $\Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}) \in A(\Gamma(x_i, y_i))$. Por lo tanto $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap \Gamma(C)| \geq 2$.

Si $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap \Gamma(C)| > 2$, entonces existe $(x', y') \in \Gamma(C)$ que es adyacente a $\Gamma(x_i, y_i)$. Luego existe $(u, v) \in C$ tal que $\Gamma(u, v) = (x', y')$, se sigue que por la Proposición 3.1 (u, v) que

es 4-adyacente a (x_i, y_i) y diferente de (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) . Sin embargo, esto contradice el hecho de que C es un 4-camino. Por lo tanto $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap \Gamma(C)| = 2$.

Probemos ahora que para $i = 0$ o $i = n$ tenemos que $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap \Gamma(C)| = 1$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $i = 0$. Se tiene que (x_0, y_0) es 4-adyacente a (x_1, y_1) , luego $\Gamma(x_1, y_1) \in A(x_0, y_0)$, se sigue que $|\Gamma(x_0, y_0) \cap \Gamma(C)| \geq 1$. Por el mismo argumento anterior dado en $1 < i < n$ tenemos $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap \Gamma(C)| = 1$.

□

Por la Proposición 2.4 ser 4-conexo es equivalente a ser 4-conexos por 4-caminos, entonces una consecuencia inmediata del lema anterior y del Teorema 1.29 parte 3, es que los conjuntos 4-conexos son conexos topológicos bajo Γ .

Corolario 3.4. *Si A es 4-conexo en \mathbb{Z}^2 y finito, entonces $\Gamma(A)$ es conexo.*

Si C es un 8-camino en \mathbb{Z}^2 , no necesariamente se convierte en un arco en el plano digital bajo la aplicación de Γ . Sin embargo, el operador Γ^* transforma los 8-caminos en arcos en el plano digital (ver el Lema 3.8). La Figura 51 muestra cómo se ve $\Gamma(C)$ y la Figura 52 el funcionamiento del operador Γ^* . Los siguientes lemas nos permitirán probar la Proposición 3.8.

Lema 3.5. *Sean $x, y \in \mathbb{K}^2$ puntos puros. Entonces x y y tienen en común dos puntos mixtos adyacentes, si y solo si x y y son adyacentes.*

Demostración. \Rightarrow Supongamos que x y y no son adyacentes. Por hipótesis, tenemos que existe $u = (v, w)$ mixto tal que $x, y \in A(u)$. Como x y y no son adyacentes, entonces $x = (v - 1, w)$ y $y = (v + 1, w)$ o de la forma $x = (v, w - 1)$ y $y = (v, w + 1)$, donde en ambos casos tenemos que $|A(x) \cap A(y)| = 3$ y solo uno de estos puntos es mixto, el cual sería u , lo que contradice que x y y tiene dos puntos mixtos adyacentes en común. Por lo tanto x y y son adyacentes.

\Leftarrow Sea $x = (u, v)$, dado que y es adyacente a x y es puro, entonces $y = (u \pm 1, v \pm 1)$, sin pérdida de generalidad supondremos que $y = (u + 1, v + 1)$. Note que $(u, v + 1)$ y $(u + 1, v)$ son puntos mixtos adyacentes a x y y . Además x y y no tiene más puntos mixtos en común.

□

Lema 3.6. *Sea C un 8-camino. Si (x, y) es un punto 8-final de C , entonces $|A(\Gamma(x, y)) \cap \Gamma^*(C)| = 1$.*

Demostración. Sea $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$ un 8-camino con puntos 8-finales (x_0, y_0) y (x_n, y_n) . Solo analizaremos el caso (x_0, y_0) , pues el otro punto final se trata de manera similar. Sea $C^* = \Gamma^*(C)$, consideremos dos casos:

- **Caso 1:** Suponga que (x_1, y_1) es 4-adyacente a (x_0, y_0) . Como (x_0, y_0) es 8-adyacente a (x_1, y_1) , tenemos que $\Gamma(x_1, y_1) \in A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*$ (ver la Proposición 3.1). Luego $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*| \geq 1$.

Razonando indirectamente, suponga que $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*| > 1$. Entonces existe $(u, v) \in A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*$ tal que $(u, v) \neq \Gamma(x_1, y_1)$.

Si (u, v) es puro se tiene que $\Gamma^{-1}(u, v) \in C$ y es 8-adyacente a (x_0, y_0) por la Proposición 3.1. Dado que $\Gamma^{-1}(u, v) \neq (x_1, y_1)$, luego (x_0, y_0) tiene dos puntos 8-adyacentes, lo que contradice que (x_0, y_0) es un punto 8-final de C .

Si (u, v) es mixto, entonces $N(u, v) \subset \Gamma(C) \cup \{(u, v)\}$ o $cl(u, v) \subset \Gamma(C) \cup \{(u, v)\}$ ver la figura 49. Supondremos lo primero, pues el otro caso se trata de manera similar. Veamos ahora que existe (u', v') un puro en $N(u, v)$ tal que $(u', v') \neq \Gamma(x_1, y_1)$ o $(u', v') \neq \Gamma(x_0, y_0)$ con $(u', v') \in \Gamma(C)$.

Como $\Gamma(x_1, y_1), (u, v) \in A(\Gamma(x_0, y_0))$, entonces $\Gamma(x_1, y_1)$ es adyacente a $\Gamma(x_0, y_0)$ y tenemos que solo uno de ellos esta en $N(u, v)$. Consideremos dos casos:

Caso 1.1: Supongamos que $\Gamma(x_0, y_0) \in N(u, v)$ ver la figura 49 A. Como $|N(u, v)| = 3$ y dos son puros, entonces existe $(u', v') \in N(u, v)$ tal que $(u', v') \neq \Gamma(x_0, y_0)$ y $(u', v') \in \Gamma(C)$. Por otra parte tenemos que $\Gamma(x_1, y_1) \notin N(u, v)$, entonces $(u', v') \neq \Gamma(x_1, y_1)$.

Note $\Gamma(x_0, y_0)$ y (u', v') no son adyacentes y que dos puntos puros tiene a lo más dos puntos mixtos adyacentes en común, entonces por el Lema 3.5 se tiene que (u, v) es el único punto mixto adyacente a $\Gamma(x_0, y_0)$ y (u', v') . Se sigue por la Proposición 3.2 tenemos que $\Gamma^{-1}(u', v')$ es 8-adyacente a (x_0, y_0) y cumple que $\Gamma^{-1}(u', v') \neq (x_1, y_1)$ y $\Gamma^{-1}(u', v') \in C$. Contradiendo así que (x_0, y_0) es un punto 8-final.

Caso 1.2: Supongamos que $\Gamma(x_1, y_1) \in N(u, v)$ ver la figura 49 B. Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior tenemos que existe $(u', v') \in N(u, v)$ tal que

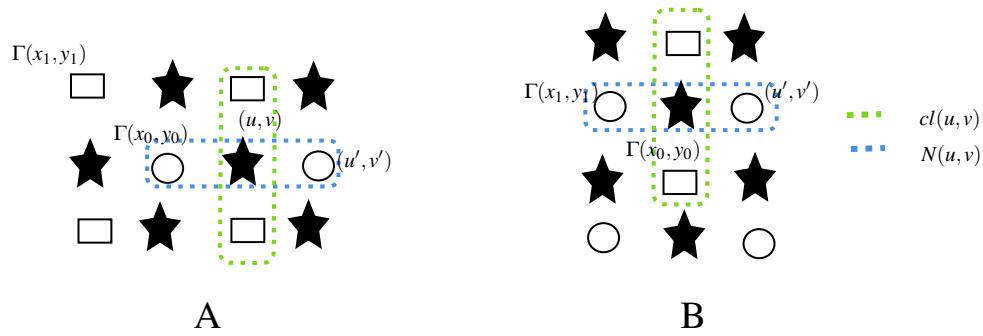


Figura 49. Subcasos del Lema 3.6, para el caso 1.

$\Gamma(x_1, y_1) \neq (u', v') \neq \Gamma(x_0, y_0)$ y $(u', v') \in \Gamma(C)$. Ahora note que $(u', v') \in A(\Gamma(x_0, y_0))$, pues $(\Gamma(x_1, y_1)) \in A(\Gamma(x_0, y_0))$ y $\Gamma(x_1, y_1) \in N(u, v)$. Por tanto por la Proposición 3.1 tenemos que $\Gamma^{-1}(u', v')$ es 4-adyacente a (x_0, y_0) , contradiciendo así que (x_0, y_0) es punto 8-final.

Por lo tanto tenemos que $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*| = 1$ en este caso.

- **Caso 2:** Si (x_1, y_1) es 8-adyacente a (x_0, y_0) y no 4-adyacente. Por la Proposición 3.2, se tiene que existe un único punto mixto (u, v) tal que $\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_0, y_0) \in A(u, v)$. Como $\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_0, y_0)$ no son adyacentes, se tiene que $N(u, v) = \{\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_0, y_0), (u, v)\}$ o $cl(u, v) = \{\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_0, y_0), (u, v)\}$, es decir, que $(u, v) \in C^*$.

Por lo tanto $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*| \geq 1$. Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior podemos concluir $|A(\Gamma(x_0, y_0)) \cap C^*| = 1$.

□

Lema 3.7. *Sea C un 8-camino con puntos 8-finales (x_0, y_0) y (x_n, y_n) . Suponga que $(x, y) \in \Gamma^*(C)$, con la condición que $(x, y) \neq \Gamma(x_0, y_0)$ y $(x, y) \neq \Gamma(x_n, y_n)$. Entonces $|A(x, y) \cap \Gamma^*(C)| = 2$.*

Demostración. Sea $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$ un 8-camino con puntos 8-finales (x_0, y_0) y (x_n, y_n) . Sea $C^* = \Gamma^*(C)$. Consideremos los siguientes dos casos con respecto (x, y) :

Caso 1: Suponga que (x, y) es mixto. Entonces $cl(x, y) \subset \Gamma(C) \cup (x, y)$ o $N(x, y) \subset \Gamma(C) \cap (x, y)$, luego existen $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) \in C$, tales que $\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}) \in A(x, y)$, se sigue que $|A(x, y) \cup C^*| \geq 2$. Note que (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) son 8-adyacentes, pues $\Gamma(x_i, y_i)$ y $\Gamma(x_{i+1}, y_{i+1})$ no son adyacentes y (x, y) es un punto mixto (ver el Lema 3.5 y la Proposición 3.2).

Si $|A(x, y) \cap C^*| > 2$, entonces existe $(u, v) \neq \Gamma(x_i, y_i)$ y $(u, v) \neq \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1})$ tal que $(u, v) \in A(x, y) \cup C^*$. Como (x, y) es un punto mixto, entonces (u, v) deber ser un punto puro y $(u, v) \in \Gamma(C)$. Observe que $(u, v) \in A(\Gamma(x_i, y_i))$ y $(u, v) \in A(\Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}))$ (ver la figura 50). Se sigue $\Gamma^{-1}(u, v) = (x', y') \in C$ y es 8-adyacente a (x_{i+1}, y_{i+1}) y (x_i, y_i) .

Implicando que C es una 8-curva de tres puntos o C tiene un punto con tres puntos 8-adyacentes. Lo contradice en ambos casos que C es un 8-camino, por lo tanto $|A(x, y) \cup C^*| = 2$.

Caso 2: Si (x, y) es puro. Entonces existe un $(x_i, y_i) \in C$, tal que $\Gamma(x_i, y_i) = (x, y)$ con $i \neq 0$ y $i \neq n$. Tenemos que C es un 8-camino, luego existen (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) 8- adya-

centes a (x_i, y_i) , pues (x_i, y_i) no es punto final de C . Debemos considerar los siguientes subcasos:

- **Caso 2.1:** Si (x_i, y_i) es 4-adyacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) . Entonces por la Proposición 3.1 se tiene que $\Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}) \in A(x, y)$, luego $|A(x, y) \cap C^*| \geq 2$. Si $|A(x, y) \cap C^*| > 2$, entonces (x_i, y_i) tiene 3 puntos 8-adyacentes, lo que contradice que C es un 8-camino, por lo tanto $|A(x, y) \cap C^*| = 2$.
- **Caso 2.2:** Si (x_i, y_i) es 8-adyacente a ambos (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) , pero no es 4-adyacente a ninguno de ellos. Entonces que existen puntos mixtos (u, v) y (u', v') que satisfacen que:

$$\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}) \in A(u, v) \text{ y } \Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), \Gamma(x_i, y_i) \in A(u', v').$$

Como (x_i, y_i) no es 4-adyacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) tenemos que:

- $cl(u, v) = \{\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}), (u, v)\}$ ó,
 $N(u, v) = \{\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}), (u, v)\}$.
- $cl(u', v') = \{\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), (u', v')\}$ ó,
 $N(u', v') = \{\Gamma(x_i, y_i), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}), (u', v')\}$.

Es decir $(u, v), (u', v') \in C^*$, por tanto $|A(x, y) \cap C^*| \geq 2$.

Si $|A(x, y) \cap C^*| > 2$, entonces (x_i, y_i) tiene 3 puntos 8-adyacentes en C , lo que contradice que C es un 8-camino, luego $|A(x, y) \cap C^*| = 2$.

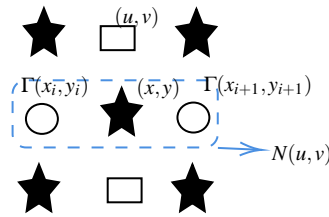


Figura 50. Caso 1 del Lema 3.7.

- **Caso 2.3:** Si (x_i, y_i) es 8-adyacente y no 4-adyacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) y 4-adyacente a (x_{i+1}, y_{i+1}) .

Por el mismo argumento del caso anterior que existe un (u, v) mixto tal que $(u, v) \in A(x, y) \cap C^*$ y $\Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}) \in A(x, y) \cap C^*$. Es decir que $|A(x, y) \cap C^*| \geq 2$. Siguiendo un razonamiento análogo a los casos anteriores tenemos que $|A(x, y) \cap C^*| = 2$.

□

Proposición 3.8. Si C es un 8-camino en \mathbf{R} , entonces $\Gamma^*(C)$ es un arco.

Demostración. Sea $C = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$ un 8-camino con puntos finales (x_0, y_0) y (x_n, y_n) . Sea $C^* = \Gamma^*(C)$, para ver que C^* es un arco, debemos ver C^* es conexo, que existen dos puntos que tiene solo un punto adyacente en C^* y lo otros puntos tiene dos puntos adyacentes en C^* .

Por el Lema 3.6 para $i = 1$ o $i = n$ se tiene que $|A(\Gamma(x_i, y_i)) \cap C^*| = 1$. Por el Lema 3.7 se tiene para $(x, y) \in C^*$ con $\Gamma(x_n, y_n) \neq (x, y) \neq \Gamma(x_0, y_0)$ tenemos que $|A(x, y) \cap C^*| = 2$.

Veamos ahora que C^* es conexo, sea $|C^*| = m$ y $z_j \in C^*$ tal que para $1 \leq j \leq m$, tenemos que $z_1 = \Gamma(x_0, y_0)$ y $z_m = \Gamma(x_n, y_n)$, y para $1 < j < m$ tenemos que $A(z_j) \cap C^* = \{z_{j-1}, z_{j+1}\}$.

Definimos $A_j = (A(z_j) \cup \{z_j\}) \cap C^*$ para $1 \leq j \leq m$, note que $A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset$ y A_j es conexo, así por el Teorema 1.10 se sigue que C^* es conexo. Por lo tanto por el Teorema 1.29 parte 5 tenemos C^* es arco.

□

La siguiente proposición muestra como obtener curvas de Jordan a partir de una k -curva simple bajo Γ y el operador Γ^* .

Proposición 3.9. *Sea J una k -curva simple con $|J| > 3$, para $k \in \{4, 8\}$.*

1. *Si $k = 4$, entonces $\Gamma(J)$ es una curva de Jordan en el plano digital.*
2. *Si $k = 8$, entonces $\Gamma^*(J)$ es una curva de Jordan en el plano digital.*

Demostración. Para probar que es una curva de Jordan utilizaremos el Lema 1.32.

1. Por un razonamiento similar al usado en la demostración del Lema 3.3 se tiene que $\Gamma(J)$ es conexo. Dado que $|J| > 3$, entonces $\Gamma(J)$ tiene más de 4 elementos.

Ahora veamos que si $(u, v) \in \Gamma(J)$, entonces $|A(u, v) \cap \Gamma(J)| = 2$.

Si $(u, v) \in \Gamma(J)$, entonces existe un $(x_i, y_i) \in J$ tal que $\Gamma(x_i, y_i) = (u, v)$. Como J es una 4-curva (x_i, y_i) tiene dos puntos 4-adyacentes en J , los cuales denotaremos por (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) . Por la Proposición 3.1, se sigue que $\Gamma(x_{i-1}, y_{i-1}), \Gamma(x_{i+1}, y_{i+1}) \in A(u, v)$, luego $|A(u, v) \cap \Gamma(J)| \geq 2$.

Siguiendo un razonamiento similar al Lema 3.3 tenemos que $|A(u, v) \cap \Gamma(J)| = 2$. Así por el Lema 1.32, se sigue que $\Gamma(J)$ es una curva de Jordan.

2. Tenemos que $|J^*| \geq 4$, veamos que para $(u, v) \in J^*$ tenemos que $|A(u, v) \cap J^*| = 2$. Debemos considerar dos casos:

Caso 1: Si $(u, v) \in \Gamma(J)$, entonces existe $(x_i, y_i) \in J$ tal que $(u, v) = \Gamma(x_i, y_i)$. Dado que $(x_i, y_i) \in J$ y J es una 8-curva, se sigue que (x_i, y_i) tiene dos puntos 8-adyacentes en J . Los cuales denotaremos como (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_{i+1}, y_{i+1}) .

Siguiendo un razonamiento análogo al presentado en el caso 2 del Lema 3.7, tenemos que $|A(u, v) \cap J^*| = 2$.

Caso 2: Si (u, v) es un punto mixto. Siguiendo un razonamiento similar al caso 1 del Lema 3.7 tenemos que $|A(u, v) \cap J^*| = 2$, pues J no es una 8-curva de tres puntos, dado que $|J| > 3$.

Realizando un argumento similar al Lema 3.8 para probar la conexidad tenemos que J^* es conexo. Por lo tanto por Lema 1.32 tenemos que $\Gamma^*(J)$ es una curva de Jordan.

□

Proposición 3.10. *Sea C un arco en el plano digital con puntos finales z y w que además supondremos son puntos puros.*

1. *Si C tiene solo puntos puros, entonces $\Gamma^{-1}(C)$ es un 4-camino en \mathbb{Z}^2 con puntos finales $\Gamma^{-1}(w)$ y $\Gamma^{-1}(z)$.*
2. *Si C tiene puntos mixtos, entonces existe un 8-camino $C_0 \subset \Gamma^{-1}(C)$ en \mathbb{Z}^2 con puntos finales $\Gamma^{-1}(w)$ y $\Gamma^{-1}(z)$.*

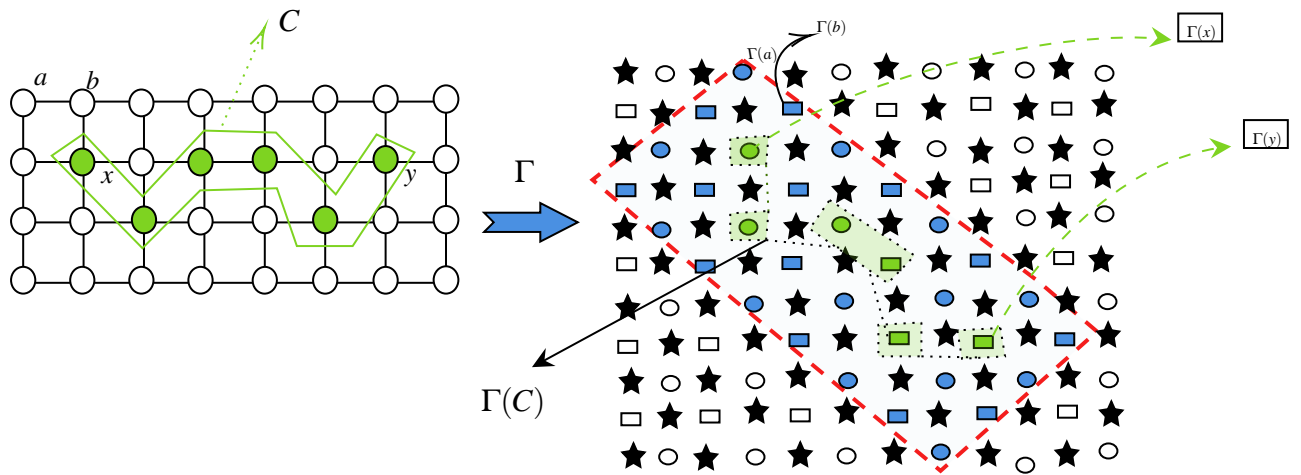


Figura 51. La imagen de un 8-camino C , bajo Γ .

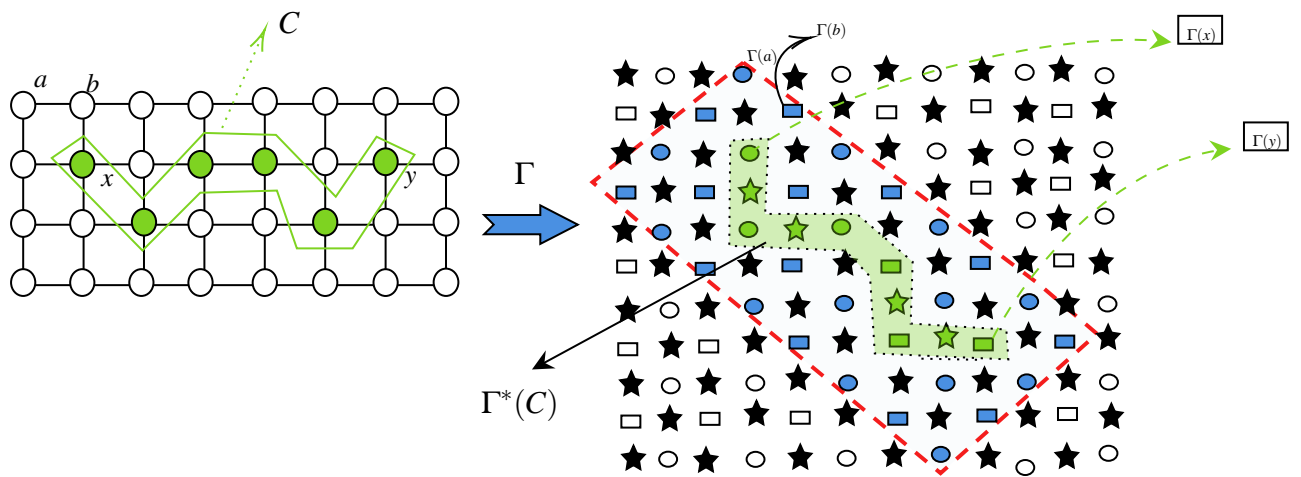


Figura 52. Operador Γ^* con un 8-camino C .

Demostración. 1. Supongamos primero que C tiene solo puntos puros. Sea $x \in \Gamma^{-1}(C)$, tal que $x \notin \{\Gamma^{-1}(w), \Gamma^{-1}(z)\}$, luego $A(\Gamma(x)) \cap C = \{v, y\}$. Tenemos que v y y son puntos puros, luego $\Gamma^{-1}(v)$ y $\Gamma^{-1}(y)$ son 4-adyacentes a x en $\Gamma^{-1}(C)$ por la Proposición 3.1. Observe que no hay ningún otro punto 4-adyacente a $\Gamma^{-1}(x)$ en $\Gamma^{-1}(C)$, puesto esto alteraría que $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 2$.

Si $x \in \{\Gamma^{-1}(w), \Gamma^{-1}(z)\}$, entonces $A(\Gamma(x)) \cap C = \{y\}$. Se sigue que x tiene un solo punto 4-adyacente en $\Gamma^{-1}(C)$ y es $\Gamma^{-1}(y)$. Por lo tanto $\Gamma^{-1}(C)$ es un 4-camino.

2. Supongamos ahora que C es un arco con puntos mixtos. Por la Proposición 2.4, probar que existe un 8-camino $C_0 \subset \Gamma^{-1}(C)$ de $\Gamma^{-1}(w)$ a $\Gamma^{-1}(z)$, es suficiente mostrar que $\Gamma^{-1}(C)$ es 8-conexo.

Supongamos que $\Gamma^{-1}(C)$ no es 8-conexo. Entonces existen dos subconjuntos A y B no vacíos tales que A y B no son 8-adyacentes, $\Gamma^{-1}(C) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Note que $\Gamma(A) \cup \Gamma(B) \subset C$ y contiene todos los puntos puros de C .

Para $x \in A$ y $y \in B$, como C es conexo, existe un arco entre $\Gamma(x)$ a $\Gamma(y)$. Sea $D \subseteq C$ el arco de cardinalidad mínima entre elementos de $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$.

Sean $x \in A$ y $y \in B$ los puntos finales de D . Veamos primero que los únicos puntos puros de D son $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$. Supongamos que no es así, sea $w \in D$ otro punto puro de D . Tenemos que $w \in \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$ y supondremos sin pérdida de generalidad que $w \in \Gamma(A)$. Como D es un arco, existe otro arco $D' \subset D$ de w a $\Gamma(y)$. Note que $\Gamma^{-1}(w) \in A$ y D' esta contenido que $D \setminus \{\Gamma(x)\}$. Esto contradice la escogencia de D . Con esto mostramos que los únicos

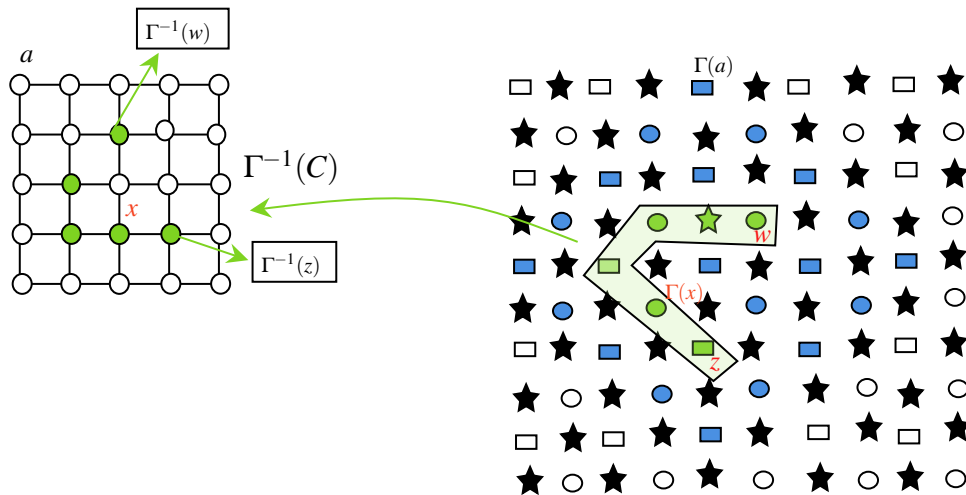


Figura 53. Se muestra el caso en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes puros en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

puntos puros D son $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$.

Dado que D es un arco con puntos finales $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$, tenemos que $A(\Gamma(x)) \cap D = \{w_1\}$ y $A(\Gamma(y)) \cap D = \{w_2\}$. Observe que w_1 y w_2 son puntos mixtos, pues $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$ son los únicos puntos puros de D . Se sigue que $|A(w_1) \cap D| = |A(w_2) \cap D| = 2$, luego w_1 y w_2 son adyacentes a $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$. Si $w_1 \neq w_2$, por el Lema 3.5 $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$ serían adyacentes, luego por la Proposición 3.1 x y y son 4-adyacentes y esto es una contradicción, por lo tanto $w_1 = w_2$. De esto se concluye que x y y son 8-adyacentes (ver la Proposición 3.2) pues w_1 sería el único punto adyacente a $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$. Luego A y B son 8-adyacentes, con esta contradicción termina la demostración de que $\Gamma^{-1}(C)$ es 8-conexo.

□

En la proposición anterior probamos que si C es un arco que contiene puntos mixtos y con punto finales puros z y w , entonces existe un 8-camino $C_0 \subset \Gamma^{-1}(C)$ de $\Gamma^{-1}(z)$ a $\Gamma^{-1}(w)$.

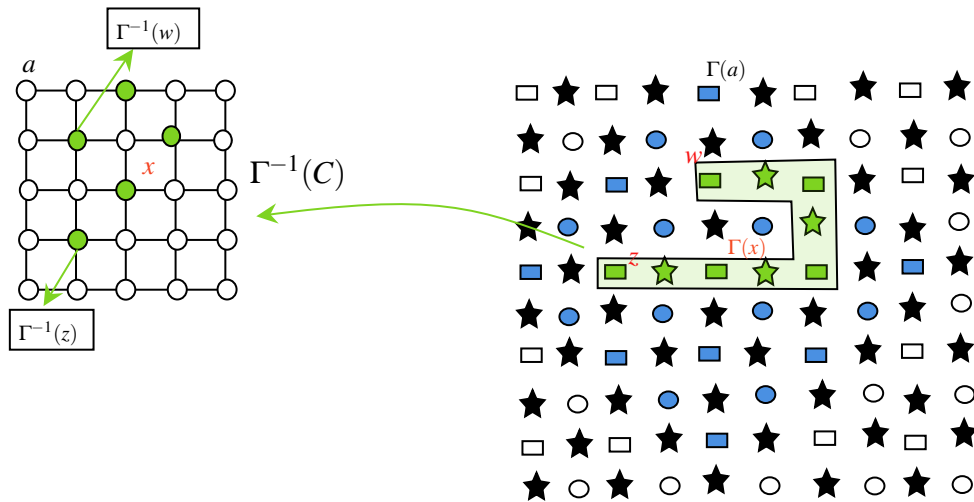


Figura 54. Se muestra el caso, en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes mixtos en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

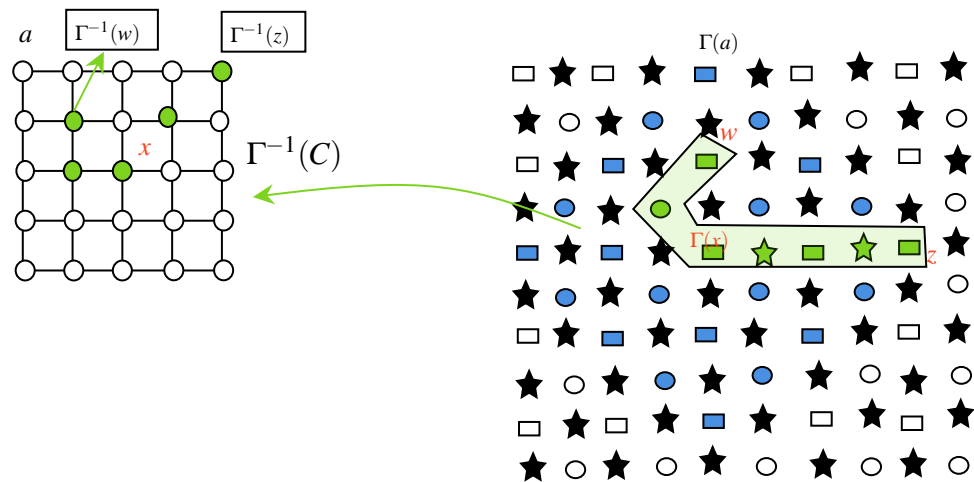


Figura 55. Se muestra el caso, en el que $\Gamma(x) \in C$ un arco de puntos mixtos, en el cual $\Gamma(x)$ tiene dos puntos adyacentes uno mixto y otro puro en C y x tiene tres puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

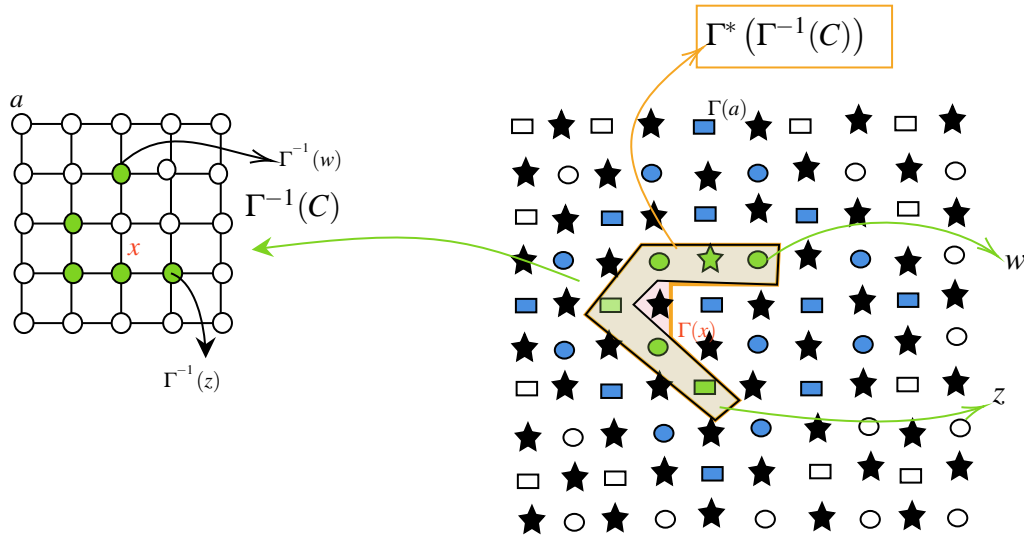


Figura 56. C son los puntos verdes en el plano de la derecha y $\Gamma^{-1}(C)$ no es un 8-curva.

En general, $\Gamma^{-1}(C)$ no es un 8-camino; en las figuras 53, 54 y 55 se muestran tres situaciones donde $\Gamma^{-1}(C)$ no es un 8-camino.

La siguiente proposición muestra una condición suficiente para que $\Gamma^{-1}(C)$ sea un 8-camino.

Proposición 3.11. *Sea C un arco que contiene puntos mixtos en el plano digital con puntos finales z y w que supondremos que son puntos puros. Si $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) = C$, entonces $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino en el plano de Rosenfeld.*

Demostración. Sea $x \in \Gamma^{-1}(C)$ y $(\Gamma^{-1}(C))^* = \Gamma^*(\Gamma^{-1}(C))$. Consideraremos dos casos con respecto a x .

- **Caso 1:** Si $x \notin \{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$. Queremos ver que x tiene exactamente dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$. Como $\Gamma(x) \neq z$ y $\Gamma(x) \neq w$, tenemos que $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 2$.

Sea $A(\Gamma(x)) \cap C = \{u, v\}$. Consideremos los siguientes casos con respecto u y v :

Caso 1.1: Supongamos que u, v son puntos puros. Entonces $\Gamma^{-1}(u)$ y $\Gamma^{-1}(v)$ son 4-adyacentes a x en $\Gamma^{-1}(C)$ por la Proposición 3.1, luego $\Gamma^{-1}(u)$ y $\Gamma^{-1}(v)$ son 8-adyacentes a x . Por lo tanto x tiene por lo menos 2 puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$. Veamos ahora que x tiene exactamente dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$ en este caso. Supongamos que x tiene otro punto 8-adyacente, es decir existe $w_1 \in \Gamma^{-1}(C)$ tal que $\Gamma^{-1}(u) \neq w_1 \neq \Gamma^{-1}(v)$ y w_1 es 8-adyacente a x .

Primero veamos w_1 no es 4-adyacente a x . Para ello supongamos que si lo son. Por la Proposición 3.1 se tiene que $\Gamma(w_1)$ es adyacente a $\Gamma(x)$. Como Γ es inyectiva, tenemos que $u \neq \Gamma(w_1) \neq v$, entonces $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 3$ lo que es una contradicción.

Dado que x y w_1 son 8-adyacentes y no 4-adyacentes, entonces por la Proposición 3.2 se tiene que existe un único punto mixto w'_1 tal que $\Gamma(x), \Gamma(w_1) \in A(w'_1)$. Como $\Gamma(x)$ y $\Gamma(w_1)$ no son adyacentes, entonces $N(w'_1) = \{\Gamma(x), \Gamma(w_1), w'_1\}$ o $cl(w'_1) = \{\Gamma(x), \Gamma(w_1), w'_1\}$. Es decir que $w'_1 \in (\Gamma^{-1}(C))^* = C$, luego $w'_1 \in A(\Gamma(x)) \cap C$.

Note que $u \neq w'_1 \neq v$, pues u y v son puntos puros. Entonces $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 3$, lo que es una contradicción, pues C es un arco.

Por lo tanto x tiene solo dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$ en este caso.

Caso 1.2: Supongamos que u, v son puntos mixtos. Entonces ni u ni v son puntos finales de C , luego $|A(u) \cap C| = |A(v) \cap C| = 2$. Se sigue que $A(u) \cap C = \{\Gamma(x), y\}$ y $A(v) \cap C = \{\Gamma(x), z_1\}$, donde y y z_1 son puntos puros de C .

Note que $\Gamma(x)$ y y no son adyacentes, pues $A(\Gamma(x)) \cap C = \{u, v\}$. Luego u es el único punto mixto adyacente en común entre ellos (ver la figura 4). Análogamente tenemos que v es único punto mixto adyacente a z_1 y $\Gamma(x)$.

Por lo tanto por la Proposición 3.2 se tiene $\Gamma^{-1}(z_1)$ y $\Gamma^{-1}(y)$ son 8-adyacentes a x . Luego x tiene por lo menos dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

Supongamos ahora que x tiene otro punto 8-adyacente diferente a $\Gamma^{-1}(z_1)$ y $\Gamma^{-1}(y)$ en $\Gamma^{-1}(C)$, el cual denotaremos como w_1 .

Note que w_1 no es 4-adyacente a x , pues $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 2$. Luego por la Proposición 3.2 tenemos que existe w'_1 tal que es el único punto mixto adyacente $\Gamma(x)$ y $\Gamma(w_1)$.

Siguiendo el mismo argumento del caso anterior tenemos que $w'_1 \in C$.

Veamos ahora que $u \neq w'_1 \neq v$. Para ello supondremos que $w'_1 = u$, luego $y, \Gamma(x), \Gamma(w) \in A(u)$. Dado que $\Gamma(x) \neq \Gamma(w_1) \neq y$ y y no es adyacente a $\Gamma(x)$, entonces como u es un punto mixto tenemos $\Gamma(w_1)$ es adyacente a $\Gamma(x)$, pero esto no puede ser cierto, pues $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 2$ y $u \neq \Gamma(w_1) \neq v$, se sigue que $u \neq w'_1$. Realizando un razonamiento similar tenemos también que $v \neq w'_1$. Si $u \neq w'_1 \neq v$, entonces $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 3$, pero esto contradice que $|A(\Gamma(x)) \cap C| = 2$.

Por lo tanto x tiene dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$ en este caso.

- **Caso 1.3:** Supongamos u es mixto y v es puro (análogo si v es mixto y u puro).

Utilizando un razonamiento similar a los anteriores casos concluimos que x tiene exactamente dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

- **Caso 2:** Si $x \in \{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$. Entonces $\Gamma(x) \in \{z, w\}$, luego $A(\Gamma(x)) \cap C = \{u\}$. Si u es puro, entonces $\Gamma^{-1}(u)$ es 8-adyacente a x en $\Gamma^{-1}(C)$. Si u es mixto, se sigue que $A(u) \cap C = \{x, z_1\}$, donde z_1 es un punto puro. Luego $\Gamma^{-1}(z_1)$ es 8-adyacente a x por la Proposición 3.2, pues z_1 no es adyacente a $\Gamma(x)$ y tiene un punto mixto adyacente en común. Entonces tenemos que x tiene por lo menos un punto 8-adyacente en $\Gamma^{-1}(C)$.

Realizando un razonamiento similar al caso 1 y teniendo en cuenta que z y w son puntos finales de C , podemos concluir x tiene un solo punto 8-adyacente en $\Gamma^{-1}(C)$.

Por lo tanto por los casos 1 y 2 tenemos que $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino.

□

Los ejemplos ilustrados en las figuras 53, 54 y 55 no cumplen la condición de la proposición anterior. Por ejemplo, la figura 56 ilustra un caso donde $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) \neq C$ y representa el caso ilustrado en la figura 53.

Proposición 3.12. Si H es un 4-camino y J es un 8-camino. Si $H \cap J = \emptyset$, entonces $\Gamma(H) \cap J^* = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\Gamma(H) \cap J^* \neq \emptyset$. Como $H \cap J = \emptyset$, entonces su intersección es un punto mixto, pero $\Gamma(H)$ no tiene puntos mixtos. Por lo tanto $\Gamma(H) \cap J^* = \emptyset$. □

3.2. El teorema de la curva de Jordan Rosenfeld

El objetivo de este apartado es demostrar la versión del teorema de la curva de Jordan en el plano de Rosenfeld. Nuestro ingrediente principal será el Teorema de la curva de Jordan

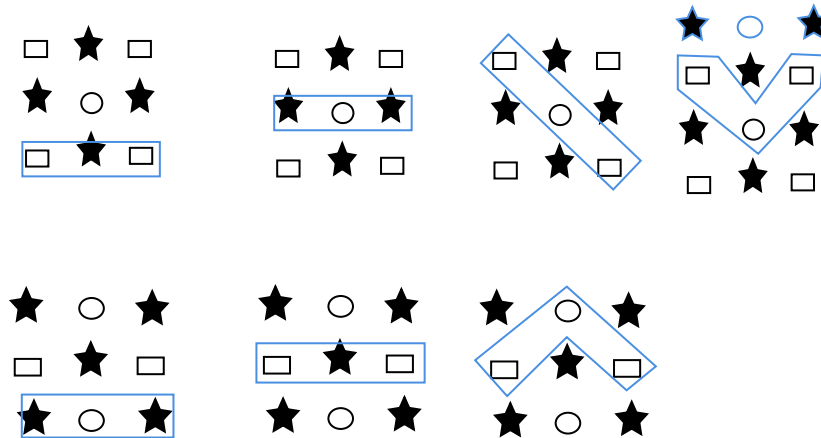


Figura 57. Representación del Lema 3.13.

en su versión topológica (ver Teorema 1.39). Este afirma que si J es una curva de Jordan en un plano digital finito $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^2$, entonces $X \times Y \setminus J$ tiene dos componentes. Denotaremos con $O(J)$ la componente que interseca al borde y con $I(J)$ la otra componente.

Para la demostración del teorema nos hace falta el siguiente resultado.

Lema 3.13 ([Khalimsky et al., 1990a]). *Si J es una curva de Jordan con exactamente 4 puntos, entonces $A(m) = J$, donde m es un punto mixto.*

Demostración. Sea $m \in I(J)$. Dado que J tiene 4 elementos $J \setminus \{j\}$, tiene tres elementos y es un COTS para cada $j \in J$. Se sigue que J esta contenido en subespacio del producto de dos intervalos de tres elementos. Considerando todos los casos ver la figura 57 (sin considerar los casos análogos), tenemos que $A(m) = J$, donde m es un punto mixto. \square

Teorema 3.14 ([Khalimsky et al., 1990a]). *Sea $\{k, k'\} = \{4, 8\}$. Si J es una k -curva simple cerrada con al menos 5 puntos, entonces $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene dos k' -componentes.*

Demostración. Sea $R' \subset \mathbb{Z}^2$ tal que R' es un rectángulo 4-conexo finito cuyo borde es 4-conexo, $J \subset R'$ y con la condición de que J no interseca al borde de R' . Denotaremos al borde de R' como B . Observe que B es una 4-curva simple. Para hacer la demostración realizaremos los siguientes pasos:

- (1) Sumergimos R' en un plano digital finito. Para ello sea $X \times Y \subset \mathbb{K}^2$ finito tal que $\Gamma(R') \subset X \times Y$. Sumergimos con Γ a R' en $X \times Y$ ver la figura 59.
- (2) Si J es una 4-curva, por la Proposición 3.9, $\Gamma(J)$ es una curva de Jordan y si J es una 8-curva, entonces $\Gamma^*(J)$ es una curva de Jordan en el plano digital. En ambos casos la denotaremos como J' .
- (3) Por (2) y por el Teorema 1.39 tenemos que $X \times Y \setminus J'$ tiene dos componentes $I(J')$ y $O(J')$.
- (4) Afirmamos que $\Gamma^{-1}(I(J')) \cap R'$ y $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ son k' -conexos. Veamos que $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ es k' -conexo. Para probar que $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ es k' -conexo, probaremos que para cada $(a, b), (c, d) \in \Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ existe un k' -camino de (a, b) a (c, d) en $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$.

Para construir los k' -caminos usaremos arco en $\Gamma^*(R')$. Fijemos (a, b) a (c, d) en $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$. Se sigue que $\Gamma(a, b), \Gamma(c, d) \in O(J')$, como $O(J')$ es conexo existe un arco D de $\Gamma(a, b)$ a $\Gamma(c, d)$. Veamos ahora que existe un arco C tal que $C \subset \Gamma^*(R')$ con puntos finales $\Gamma(a, b)$ y $\Gamma(c, d)$. Hay dos casos a considerar: $D \subset \Gamma^*(R')$ o $D \not\subset \Gamma^*(R')$. En el primer caso, tome $C = D$. Para el segundo caso la existencia de C requiere más trabajo.

Supongamos que $D \not\subset \Gamma^*(R')$ ver la figura 60. Consideremos $D = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ donde los índices están dados de acuerdo al orden de D (como COTS). Sean $f_i, f_j \in D$ tales que $f_{i+1} \notin \Gamma^*(R')$ y $f_{j-1} \notin \Gamma^*(R')$, donde f_i es el primer elemento que ocurre esto y f_j el último. Note que $f_i, f_j \in \Gamma(B)$. Como $\Gamma(B)$ es conexo, existe un arco $B' \subset \Gamma(B)$ con punto finales f_i y f_j . Definimos D' de la siguiente manera:

$$D' = \{f_0, \dots, f_i\} \cup B' \cup \{f_j \dots f_n\}.$$

Observe que D' es conexo, luego existe un arco $C \subset D'$ con puntos finales $\Gamma(a, b)$ y $\Gamma(c, d)$ y $C \subset \Gamma^*(R')$, pues $D' \subset \Gamma^*(R')$ ver la figura 61 y figura 62.

Ahora si comenzaremos con la existencia los k' -caminos en $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$, para probar que $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ es k' -conexo. Consideremos ahora dos casos:

- **Caso 1:** Si $k = 4$. Tenemos dos casos para considerar con respecto C .

Caso 1.1: Supongamos que C tiene solo puntos puros. Por la Proposición 3.10 (parte 1), $\Gamma^{-1}(C)$ es 4-conexo, luego también $\Gamma^{-1}(C)$ es 8-conexo. Entonces existe un 8-camino $C' \subset \Gamma^{-1}(C)$ de (a, b) a (c, d) en $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$, pues $C \subset O(J') \cap \Gamma^*(R')$.

Caso 1.2: Supongamos que C tiene puntos mixtos. Por la Proposición 3.10 (parte 2), tenemos que existe un 8-camino $C' \subset \Gamma^{-1}(C)$ de (a, b) a (c, d) en $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$, pues $C \subset O(J') \cap \Gamma^*(R)$.

- **Caso 2:** Si $k = 8$. Veamos que existe un arco que contenga solo puntos puros de $\Gamma(a,b)$ a $\Gamma(c,d)$ en $O(J') \cap \Gamma^*(R)$. Recordemos que en este caso $J' = \Gamma^*(J)$. Tenemos que $C \subset O(J') \cap \Gamma^*(R)$. Supongamos que C tiene puntos mixtos, pues en caso contrario C es el arco buscado. Construiremos un arco con solo puntos puros a partir de C .

Sea $m \in C$ un punto mixto. Se tiene que $A(m) \setminus C$ es un conjunto formado por dos puntos puros x, y (ver la figura 58). Veamos ahora que por lo menos uno de ellos está en $O(J')$. Para ellos supongamos que $x, y \notin O(J')$. Entonces $x, y \in J' \cup I(J')$. Mostraremos que $x, y \in J'$. Esto es, $x, y \notin I(J')$. Para ello supongamos que $x \in I(J')$. Tenemos que $\{x, m\}$ es conexo, pues $x \in A(m)$. Luego $I(J') \cup O(J')$ es conexo, pues $m \in O(J)$. Esto es una contradicción, pues $I(J') \cup O(J')$ no es conexo. Análogamente se tiene para y . Con esto hemos mostrado que $x, y \notin I(J')$. Por lo tanto $x, y \in J'$.

Dado que $x, y \in A(m)$ y x, y no son adyacentes (ver la figura 58), entonces $N(m) = \{x, y, m\}$ o $cl(m) = \{x, y, m\}$. Por lo tanto $m \in J' = \Gamma^*(J)$ ¹. En consecuencia tenemos que $C \not\subset O(J')$, pues $m \in J'$ y $m \in O(J')$, lo que es una contradicción.

Veamos ahora que x y y están en $\Gamma(R')$. Sea $C \cap A(m) = \{w_1, w_2\}$, es claro que si $w_1 \notin \Gamma(B)$ o $w_2 \notin \Gamma(B)$, tenemos que $x, y \in \Gamma(R')$, pues $w_1, w_2 \in \Gamma(R')$.

¹ El operador que definen en [Khalimsky et al., 1990a] es similar al nuestro, pero no igual, no pudimos probar directamente que $m \in J'$ con la definición que ellos usan.

(5) $(\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R') \cup (\Gamma^{-1}(I(J')))$ k' -disconexo. Veamos que no existe un k' -camino H de $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ a $\Gamma^{-1}(I(J'))$.

Supongamos que existe k' -camino H en $R' \setminus J$ que une a $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ y $\Gamma^{-1}(I(J'))$. Se sigue que $H' \cap J' \neq \emptyset$, donde H' es $\Gamma^*(H)$ o $\Gamma(H)$ dependiendo si $k' = 8$ o $k' = 4$. Por la contrarrecíproca de la Proposición 3.12 se tiene $H \cap J \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, pues $H \subset R' \setminus J$. Por lo tanto $(\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R') \cup \Gamma^{-1}(I(J'))$ es k' -disconexo.

(6) $R' \setminus J$ tiene dos k' -componentes. Veamos primero $R' \setminus J = (\Gamma^{-1}(O(J')) \cup \Gamma^{-1}(I(J')))) \cap R'$.

Es claro que $(\Gamma^{-1}(O(J')) \cup \Gamma^{-1}(I(J')))) \cap R' \subset R' \setminus J$. Por otra parte sea $x \in R' \setminus J$, entonces $\Gamma(x) \notin J'$, se sigue que $\Gamma(x) \in O(J') \cup I(J')$, luego $x \in \Gamma^{-1}(O(J')) \cup \Gamma^{-1}(I(J')) \cap R'$. Por tanto $R' \setminus J = (\Gamma^{-1}(O(J')) \cup \Gamma^{-1}(I(J')))) \cap R'$.

Luego por (4) (5) y lo anterior se sigue $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ y $\Gamma^{-1}(I(J'))$ son k' -componentes de $R' \setminus J$. Como $R' \setminus J = (\Gamma^{-1}(O(J')) \cup \Gamma^{-1}(I(J')))) \cap R'$, entonces $R' \setminus J$ tiene dos k' -componentes.

(7) $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R' \neq \emptyset$. Esto se tiene por que por lo menos los puntos del borde están $\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$.

(8) $\Gamma^{-1}(I(J')) \neq \emptyset$. Note J' tiene más de 4-puntos, luego por Lema 3.13 tenemos que $I(J')$ tiene al menos un punto puro, pues $I(J)$ no puede estar conformada por solo puntos mixtos, por ser $I(J')$ una componente conexa, se sigue que $\Gamma^{-1}(I(J')) \neq \emptyset$.

(9) $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene dos k' componentes. Dado que R' es rectángulo 4 conexo y su borde lo es,

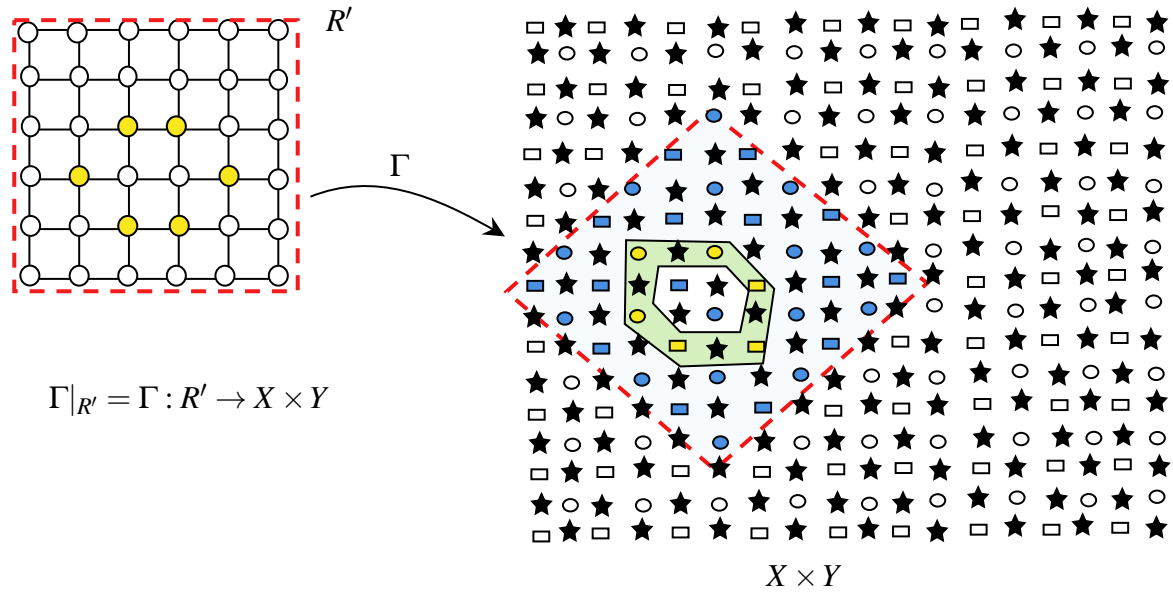


Figura 59. Representación R' sumergida en el plano $X \times Y$.

entonces $\mathbb{Z}^2 \setminus R'$ es 4 conexo. Como $B \subset \Gamma^{-1}(O(J')) \cap R'$ y tenemos que B es 4-adyacente a $\mathbb{Z}^2 \setminus R'$, se sigue que $(\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R') \cup (\mathbb{Z}^2 \setminus R')$ es una k' -componente de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$. Por otro lado $\Gamma^{-1}(I(J'))$ es otra k' -componente de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$.

Note que $\mathbb{Z}^2 \setminus J = (\Gamma^{-1}(O(J')) \cap R') \cup (\mathbb{Z}^2 \setminus R') \cup \Gamma^{-1}(I(J'))$. Por lo tanto $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene dos k' -componentes.

□

En lo que respecta al Teorema 1.39 también se puede generalizar para \mathbb{K}^2 . El siguiente teorema lo usamos en la demostración del Teorema 2.11. La demostración que presentamos usando herramientas topológicas no es la dada por [Rosenfeld, 1973]. Es una nueva forma de demostrar el siguiente Teorema utilizando la topología Khalimsky.

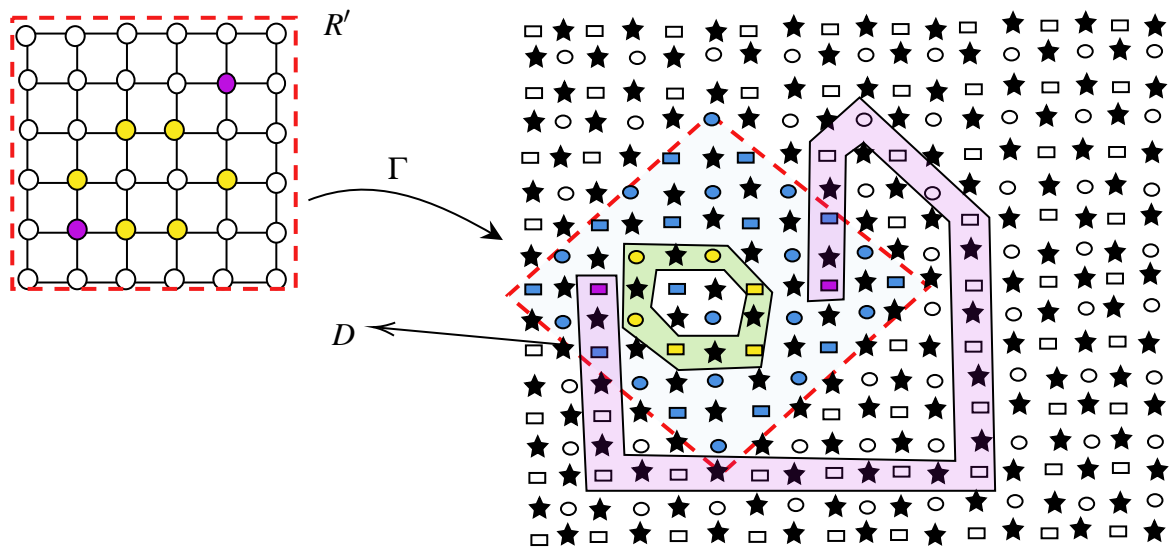


Figura 60. Representa cuando $D \not\subseteq \Gamma^*(R')$, donde puntos morados son $\Gamma(a,b)$ y $\Gamma(c,d)$ o (a,b) y (c,d) respectivamente.

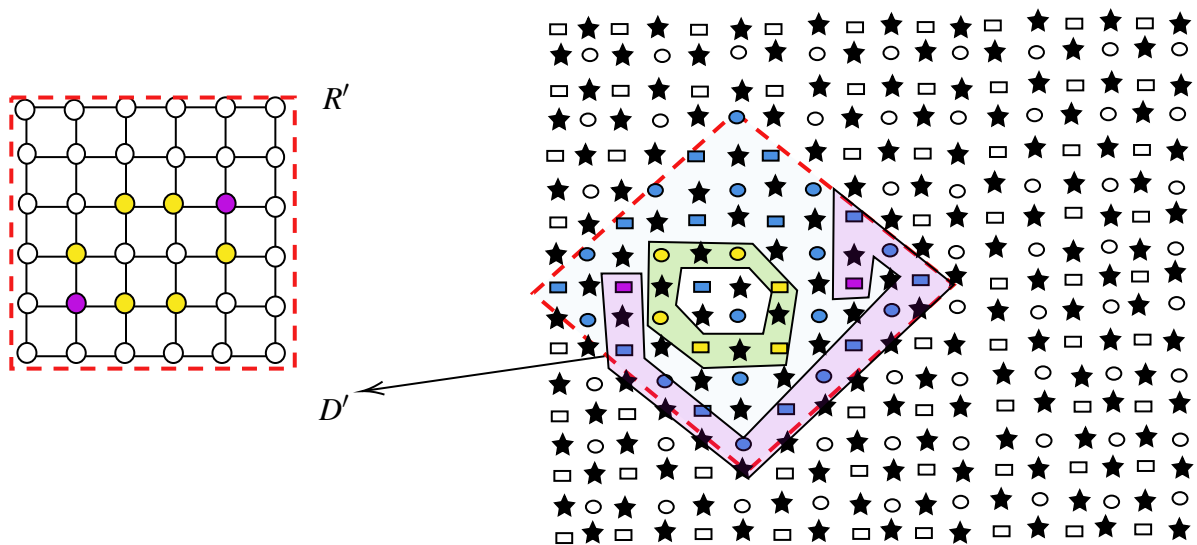


Figura 61. Ejemplo de D' .

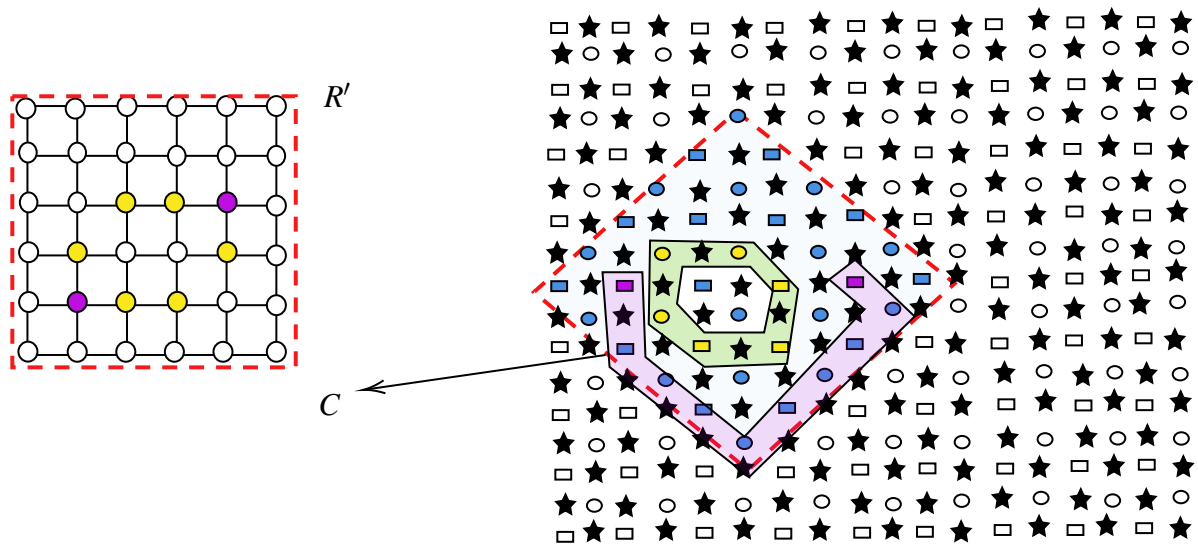


Figura 62. Ejemplo de $C \subset D'$ de la figura 61.

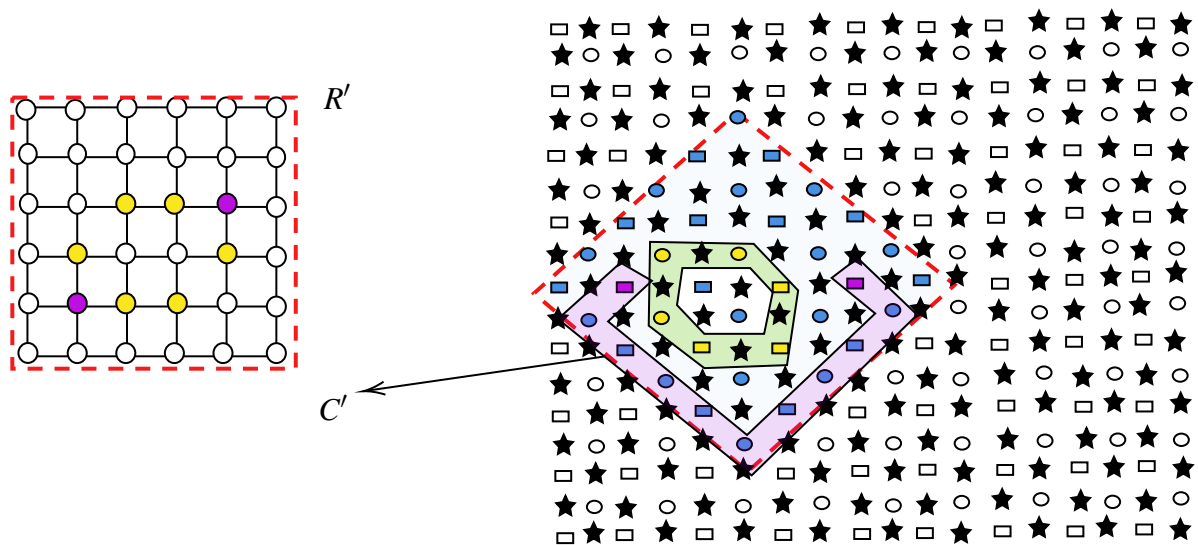


Figura 63. Ejemplo de camino C' .

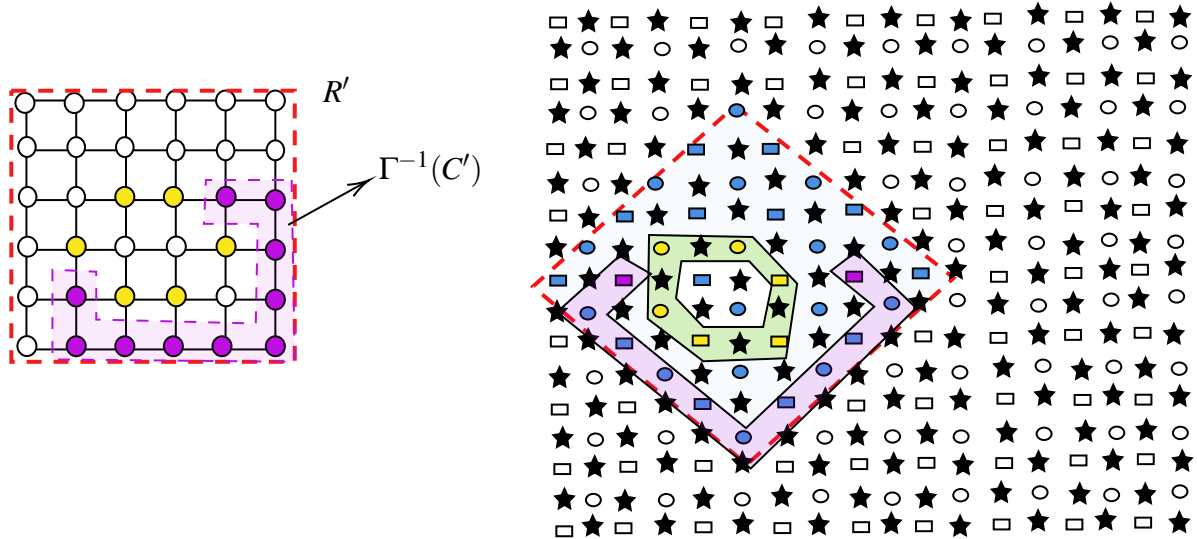


Figura 64. $\Gamma^{-1}(C')$

Teorema 3.15. Sea $\{k, k'\} = \{4, 8\}$. Si J es una k -curva simple cerrada en \mathbb{Z}^2 y $|J| > 5$, entonces cada punto de J tiene un k' -vecino en cada una de las dos k' -componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$.

Demostración. Sea $x \in J$, de aquí en adelante $\Gamma^*(J) = J^*$. Consideraremos dos casos:

Caso 1: Si $k = 8$. Por la Proposición 3.9, se tiene que J^* es una curva de Jordan. Sea $X \times Y$ un plano digital finito que contiene a $\Gamma^*(J)$ y tal que $\Gamma^*(J)$ no interseca $BD(X \times Y)$. Luego por el Teorema 1.39 tenemos que $X \times Y \setminus J^*$ tiene dos componentes que denotaremos $O(J^*)$ y $I(J^*)$.

Sea $A(\Gamma(x)) \cap J^* = \{w_1, w_2\}$. Consideraremos dos subcasos:

Caso 1.1: Supongamos w_1 o w_2 es un punto mixto (ver la figura 65). Sin pérdida de generalidad supondremos que w_1 es un punto mixto. Se sigue que $A(w_1) \cap J^* = \{\Gamma(x), z_1\}$, donde z_1 es un punto puro.

Por la Proposición 1.40 tenemos que $A(w_1) \cap O(J^*) \neq \emptyset$ y $A(w_1) \cap I(J^*) \neq \emptyset$. Como w_1 es un punto mixto se sigue que $A(w_1) \cap O(J^*) = \{z_2\}$ y $A(w_1) \cap I(J^*) = \{z_3\}$, donde z_2 y z_3 son puntos puros y son adyacentes a $\Gamma(x)$, (ver la figura 65).

Por la Proposición 3.1 se tiene que $\Gamma^{-1}(z_2)$ y $\Gamma^{-1}(z_3)$ son 4-adyacentes a x y están en componentes diferentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$, pues $\Gamma^{-1}(O(J^*))$ y $\Gamma^{-1}(I(J^*))$ están 4-componentes diferentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$, según lo probado en el Teorema 3.14.

Caso 1.2: Si w_1 y w_2 son puntos puros. Tenemos que considerar el caso que se muestra en la figura 66.

Primero etiquetaremos los puntos de $A(\Gamma(x)) \setminus J^*$ como se indica en la figura 66. Note que el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es conexo. Luego están en una misma componente de $X \times Y \setminus J^*$, es decir están en $I(J^*)$ o $O(J^*)$. Igualmente ocurre con el conjunto $\{w_4, w_5, w_6\}$, pues el es conexo. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\{w_1, w_2, w_3\} \subset O(J^*)$.

Por la Proposición 1.40 $A(\Gamma(x)) \cap O(J^*) \neq \emptyset$ y $A(\Gamma(x)) \cap I(J^*) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A(\Gamma(x)) \cap O(J^*) = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $A(\Gamma(x)) \cap I(J^*) = \{w_4, w_5, w_6\}$. Dado que $w_2, w_5 \in A(\Gamma(x))$ y son puntos puros, entonces por la Proposición 3.1 $\Gamma^{-1}(w_5)$ y $\Gamma^{-1}(w_2)$ son 4-adyacentes a x y están en 4-componentes diferentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$, pues $\Gamma^{-1}(w_5) \in \Gamma^{-1}(O(J^*))$ y $\Gamma^{-1}(w_2) \in \Gamma^{-1}(I(J^*))$.

Caso 2: Supongamos que $k = 4$. Por la Proposición 3.9, $\Gamma(J)$ es una curva de Jordan. Defina $X \times Y$ como en el caso anterior. Por el Teorema 1.39 $X \times Y \setminus \Gamma(J)$ tiene dos com-

ponentes: $O(\Gamma(J))$ y $I(\Gamma(J))$.

El análisis se basará en la "forma" del conjunto $A(\Gamma(x)) \cap \Gamma(J)$. Sin considerar casos simétricos solo existen dos casos posibles como se indica en la figura 67.

El caso 2.1 de la figura 67 es análogo al caso 1.2. Haciendo el mismo razonamiento podemos concluir que x tiene un punto 8-adyacente en cada una de las 8-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$.

Consideremos ahora el caso 2.2. Observe que el conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ es conexo, luego está contenido en $I(\Gamma(J))$ o en $O(\Gamma(J))$. Supondremos que $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \subset O(\Gamma(J))$. Se sigue que por la Proposición 1.40 que $w_6 \in I(\Gamma(J))$.

Como $|J| > 5$, por el Lema 3.13, existe un punto puro y adyacente a w_6 en $I(\Gamma(J))$. Note que y no es adyacente a $\Gamma(x)$, luego por el Lema 3.5 tenemos que w_6 es el único punto mixto adyacente a y y $\Gamma(x)$, pues ambos son puntos puros. Por la Proposición 3.2 se tiene que x es 8-adyacente a $\Gamma^{-1}(y)$ y $y \in \Gamma^{-1}(I(\Gamma(J)))$.

Por otra parte w_2 y w_4 son puntos puros adyacentes a $\Gamma(x)$, luego por la Proposición 3.1, se tiene $\Gamma^{-1}(w_2)$ y $\Gamma^{-1}(w_4)$ son 8-adyacentes a x y además tenemos $\Gamma^{-1}(w_2), \Gamma^{-1}(w_4) \in \Gamma^{-1}(O(\Gamma(J)))$.

Por lo tanto x tiene puntos 8-adyacentes en cada una de las 4-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$.

□

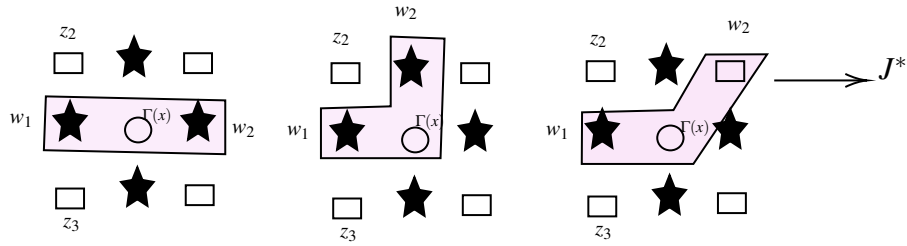


Figura 65. Representación del Caso 1.1 del Teorema 3.15, sin considerar sus casos análogos.

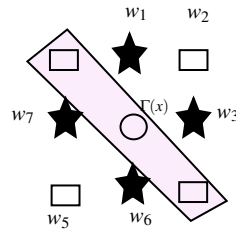


Figura 66. Representación del Caso 1.2 del Teorema 3.15, sin considerar sus casos análogos.

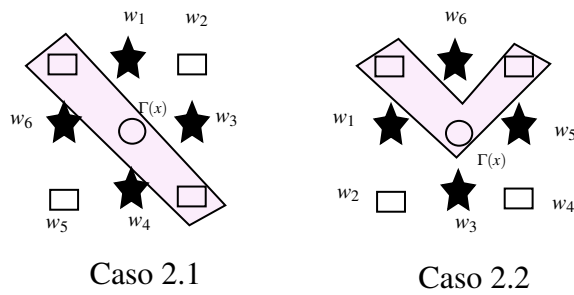


Figura 67. Caso 2 del Teorema 3.15, representación de los casos sin considerar sus casos análogos.

3.3. Los conjuntos 4-conexos y 8-conexos en el plano digital.

En esta sección, expondremos algunas propiedades adicionales del operador Γ^* . Para ello exploraremos la relación entre este operador y los conjuntos 4-conexos y 8-conexos. Comenzaremos probando que si C es un arco para que $\Gamma^{-1}(C)$ sea un 8-camino una condición necesaria, es que $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) = C$, para ello necesitaremos los siguientes dos lemas.

Lema 3.16. *Sea C un arco con más de tres puntos que contiene puntos mixtos en el plano digital \mathbb{K}^2 y con puntos finales z y w que supondremos son puntos puros. Si $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino en el plano de Rosenfeld, entonces $\Gamma^{-1}(z)$ y $\Gamma^{-1}(w)$ son 8-finales en $\Gamma^{-1}(C)$.*

Demostración. Sea u un punto 8-final de $\Gamma^{-1}(C)$. Veamos que $u \in \{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$. Supongamos que $u \notin \{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$, luego $\Gamma(u) \notin \{z, w\}$, se sigue que $\Gamma(u) \cap C = \{v_1, v_2\}$. Consideraremos tres casos:

- **Caso 1:** Si que v_1, v_2 son puntos puros. Entonces $\Gamma^{-1}(v_1)$ y $\Gamma^{-1}(v_2)$ son 8-adyacentes a u en $\Gamma^{-1}(C)$ por la Proposición 3.1. Por tanto u no puede ser punto 8-final en $\Gamma^{-1}(C)$.
- **Caso 2:** Si v_1 y v_2 son puntos mixtos. Entonces ni v_1 ni v_2 son puntos finales de C . Se sigue que $A(v_1) \cap C = \{\Gamma(u), y_1\}$ y $A(v_2) \cap C = \{\Gamma(u), y_2\}$, donde y_1 y y_2 son puntos puros de C .

Note que $\Gamma(u)$ y y_1 no son adyacentes, luego por el Lema 3.5 tenemos que v_1 es el único punto mixto adyacente en común entre ellos. Análogamente tenemos que v_2 es único punto mixto adyacente a y_2 y $\Gamma(u)$.

Por lo tanto por la Proposición 3.2 se tiene $\Gamma^{-1}(y_1)$ y $\Gamma^{-1}(y_2)$ son 8-adyacentes a u , luego u no es un punto 8-final en $\Gamma^{-1}(C)$, pues tiene por lo menos dos puntos 8-adyacentes en $\Gamma^{-1}(C)$.

- **Caso 3:** Si v_1 o v_2 es un punto mixto. Realizando un razonamiento similar a los casos anteriores se tiene que u no es un punto 8-final.

Por lo tanto $u \in \{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$ y como $\Gamma^{-1}(C)$ tiene dos puntos 8-finales diferentes, se sigue que $\{\Gamma^{-1}(z), \Gamma^{-1}(w)\}$ son puntos 8-finales de $\Gamma^{-1}(C)$.

□

Lema 3.17. *Si D es un 8-camino, entonces $\Gamma^*(D)$ tiene puntos finales puros.*

Demostración. Dado que D es un 8-camino se tiene que D tiene exactamente dos puntos 8-finales z , y w , luego por el Lema 3.6 tenemos que $|A(\Gamma(z)) \cap \Gamma^*(D)| = |A(\Gamma(w)) \cap \Gamma^*(D)| = 1$.

Por otra parte por la Proposición 3.8 $\Gamma^*(D)$ es un arco, luego tiene exactamente dos puntos finales, los cuales denotaremos como x y y . Se sigue por lo anterior que $\{\Gamma(z), \Gamma(w)\} = \{x, y\}$, es decir $\Gamma^*(D)$ tiene puntos finales puros. □

Proposición 3.18. *Sea C un arco en el plano digital \mathbb{K}^2 que contiene puntos mixtos y con puntos finales z y w , que supondremos son puntos puros. Si $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino en el plano de Rosenfeld, entonces $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) = C$.*

Demostración. Sea $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) = (\Gamma^{-1}(C))^*$. Veamos primero que $C \subset (\Gamma^{-1}(C))^*$. Fijemos $x \in C$, consideremos dos casos con respecto a x :

Caso 1: Si x es puro. Entonces $\Gamma^{-1}(x) \in \Gamma^{-1}(C)$, luego $x \in \Gamma(\Gamma^{-1}(C))$, es decir que $x \in (\Gamma^{-1}(C))^*$.

Caso 2: Si x es mixto. Entonces $A(x) \cap C = \{z_1, w_1\}$, donde z_1 y w_1 son puntos puros y no son adyacentes pues esto contradice que C es un arco. Por lo tanto $N(x) = \{z_1, w_1, x\}$ o $cl(x) = \{z_1, w_1, x\}$, dependiendo si z_1 y w_1 son ambos abiertos o ambos cerrados. Por otra parte, tenemos que $\Gamma^{-1}(z_1), \Gamma^{-1}(w_1) \in \Gamma^{-1}(C)$. De esto se sigue que $x \in (\Gamma^{-1}(C))^*$, pues $cl(x) \subset \Gamma(\Gamma^{-1}(C)) \cup \{x\}$ o $N(x) \subset \Gamma(\Gamma^{-1}(C)) \cup \{x\}$, dado que $z_1, w_1 \in \Gamma(\Gamma^{-1}(C))$.

Por lo tanto tenemos que $C \subset (\Gamma^{-1}(C))^*$.

Veamos ahora que $(\Gamma^{-1}(C))^* \subset C$.

Sea $x \in (\Gamma^{-1}(C))^*$, nuevamente consideraremos dos casos:

Caso 1: Supongamos que x es un punto puro. Entonces $\Gamma^{-1}(x) \in \Gamma^{-1}(C)$, luego $x \in C$.

Caso 2: Suponga x es mixto. Esta parte de la prueba la realizaremos por contradicción. Supongamos que $x \notin C$, como $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino, tenemos (por la Proposición 3.8) que $(\Gamma^{-1}(C))^*$ es un arco.

Dado que x es mixto, por el Lema 3.17, se tiene que x no es un punto final de $(\Gamma^{-1}(C))^*$.

Luego $A(x) \cap (\Gamma^{-1}(C))^* = \{w_1, w_2\}$, donde w_1 y w_2 son puros. Se sigue, como lo hicimos en el caso anterior, que $w_1, w_2 \in C$. Consideremos dos casos:

Caso 2.1: Si $w_1, w_2 \notin \{w, z\}$, entonces $A(w_1) \cap C = \{z_1, z_2\}$. Observe que $A(w_1) \cap C \subset A(w_1) \cap (\Gamma^{-1}(C))^*$. Dado que $x \notin C$, se sigue que $x \notin \{z_1, z_2\}$, luego $|A(w_1) \cap$

$(\Gamma^{-1}(C))^*| \geq 3$ lo que contradice que $(\Gamma^{-1}(C))^*$ es un arco.

Caso 2.2: Si $w_1 \in \{w, z\}$ o $w_2 \in \{w, z\}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $w_1 = z$. Veamos primero que z y w son puntos finales de $(\Gamma^{-1}(C))^*$. Por el Lema 3.16 tenemos que $\Gamma^{-1}(z)$ $\Gamma^{-1}(w)$ son puntos 8-finales de $\Gamma^{-1}(C)$, se sigue por el Lema 3.6 que $|A(z) \cap (\Gamma^{-1}(C))^*| = |A(w) \cap (\Gamma^{-1}(C))^*| = 1$, es decir que z y w son puntos finales de $(\Gamma^{-1}(C))^*$.

Como w_1 es un punto final de C , entonces $A(w_1) \cap C = \{z_1\}$ para algún z_1 . Dado que $x \notin C$, entonces $x \neq z_1$. Por otra parte, $C \subset (\Gamma^{-1}(C))^*$, luego $A(w_1) \cap C \subset A(w_1) \cap (\Gamma^{-1}(C))^*$, se sigue que $|A(w_1) \cap (\Gamma^{-1}(C))^*| \geq 2$, pues $x \neq z_1$ y $x \in A(w_1)$, pero esto es una contradicción.

Por lo tanto $x \in C$, se sigue $(\Gamma^{-1}(C))^* \subset C$.

□

El siguiente teorema se sigue de forma inmediata de la Proposición 3.11 y la Proposición 3.18.

Teorema 3.19. *Sea C un arco que contiene puntos mixtos en el plano digital \mathbb{K}^2 y con puntos finales z y w que supondremos son puntos puros. Entonces $\Gamma^{-1}(C)$ es un 8-camino en el plano de Rosenfeld, si y solo si $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) = C$.*

El anterior teorema no es válido cuando tenemos un arco C de solo puntos puros, pues aunque $\Gamma^{-1}(C)$ siempre es un 4-camino (ver la Proposición 3.10 (1)) en algunos casos se tiene que $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) \neq C$ (ver la figura 68).

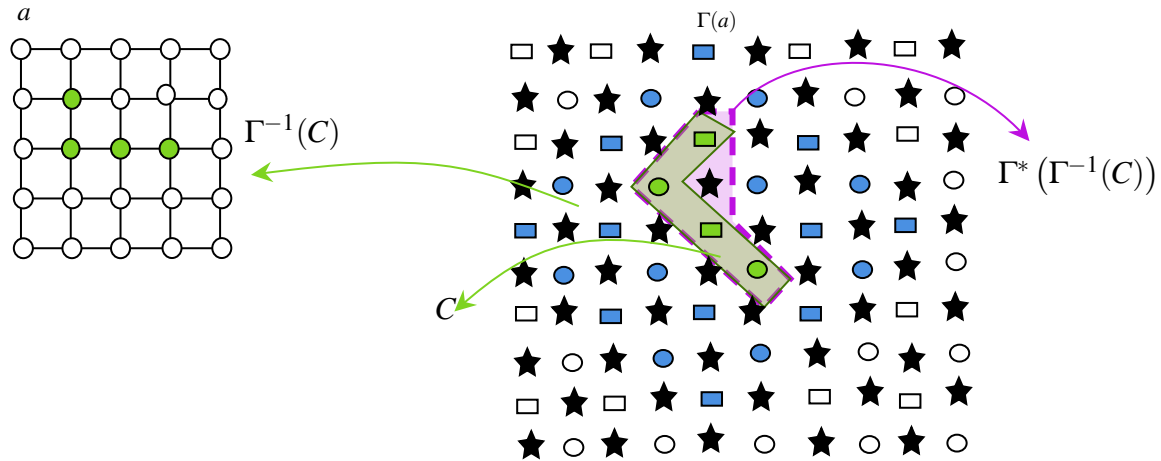


Figura 68. Ejemplo de $\Gamma^*(\Gamma^{-1}(C)) \neq C$ y $\Gamma^{-1}(C)$ es un 4-camino.

Las siguientes proposiciones muestran las relaciones que podemos establecer entre los conjuntos 8-conexos y 4-conexos con respecto a su conexidad bajo Γ o el operador Γ^* .

Proposición 3.20. Sea $A \subset \mathbb{Z}^2$ finito. A es 8-conexo si y solo si $\Gamma^*(A)$ es conexo.

Demostración. Sea $A^* = \Gamma^*(A)$.

\Rightarrow Supongamos que A es 8-conexo y veamos que A^* es conexo. Para ello probaremos que para todo $x, y \in A^*$ no adyacentes existe un arco C de x a y en A^* . Fijemos $x, y \in A^*$ consideremos los siguientes casos:

- **Caso 1:** Si x, y son puntos puros en A^* . Entonces $x, y \in \Gamma(A)$, se sigue que $\Gamma^{-1}(x), \Gamma^{-1}(y) \in A$. Dado que A es 8-conexo existe un 8-camino C de $\Gamma^{-1}(x)$ a $\Gamma^{-1}(y)$, luego por la Proposición 3.8 tenemos que C^* es un arco de x a y en A^* .
- **Caso 2:** Si x es puro y y mixto. Dado que y es mixto, tenemos que $cl(y) \subset A^*$ o $N(y) \subset A^*$, donde en ambos casos, se sigue que existen $w_1, w_2 \in A^*$ puntos puros, adyacentes a y . Observé que $w_1, w_2 \in \Gamma(A)$, luego $\Gamma^{-1}(w_1), \Gamma^{-1}(w_2) \in A$.

Como A es 8-conexo existe un 8-camino C_1 de $\Gamma^{-1}(x)$ a $\Gamma^{-1}(w_1)$ y un 8-camino C_2 de $\Gamma^{-1}(x)$ a $\Gamma^{-1}(w_2)$, tome C como uno de ellos (C_1 o C_2). Sin pérdida de generalidad supondremos que es C_1 , luego por la Proposición 3.8 tenemos que $\Gamma^*(C)$ es un arco de x a w_1 . Note que $\Gamma^*(C) \cup \{y\}$ es conexo, pues y es adyacente w_1 , luego existe un arco de x a y en $\Gamma^*(C) \cup \{y\} \subset A^*$.

- **Caso 3** Si x, y son mixtos. Realizando un razonamiento del caso anterior con x y y obtenemos un arco de x a y en A^* .

Por lo tanto para todo $x, y \in A^*$ existe un arco de x a y en A^* , entonces A^* es conexo.

⇐ Veamos que A es 8-conexo. Para ello debemos ver que dado $x, y \in A$ existe un 8-camino C de x a y en A . Fijemos $x, y \in A$, se sigue que $\Gamma(x), \Gamma(y) \in A^*$. Dado que A^* es conexo, entonces existe un arco D de $\Gamma(x)$ a $\Gamma(y)$. Debemos considerar dos casos con respecto a D :

- **Caso 1** Si D no tiene puntos mixtos. Entonces por la Proposición 3.10 parte 1 se tiene que $\Gamma^{-1}(D) = C'$ es 4-camino de x a y , luego existe C un 8-camino tal que $C \subset C' \subset A$ de x a y .
- **Caso 2** Si D tiene puntos mixtos. Por la Proposición 3.10 parte 2 existe un 8-camino C de x a y , con $C \subset A$.

Por lo tanto por caso 1 y 2 tenemos que A es 8-conexo.

□

Ahora veamos que pasa con lo conjuntos 4-conexos bajo Γ .

Proposición 3.21. *Sea $A \subset \mathbb{Z}^2$ finito. A es 4-conexo si y solo si $\Gamma(A)$ es conexo.*

Demostración. \Rightarrow Se tiene directamente del corolario 3.4.

\Leftarrow Queremos ver que A es 4-conexo, debemos ver que para todo $x, y \in A$, existe un 4-camino C de x a y en A . Fijemos $x, y \in A$, como $\Gamma(A)$ es conexo, tenemos que existe un arco $D \subset \Gamma(A)$ de $\Gamma(x)$ a $\Gamma(y)$. Note que D solo tiene puntos puros, luego por la Proposición 3.10 parte 1, tenemos que $\Gamma^{-1}(D) = C$ es un 4-camino de x a y , con $C \subset A$. Se sigue que A es 4-conexo.

□

3.4. Los puntos simples en el plano digital

Los puntos simples jugarón un papel fundamental en el procesamiento de imágenes que hemos presentado en el capítulo 2. Para determinar el comportamiento de los puntos simples en el plano digital, tomaremos de referencia al Teorema 2.11, ya que este caracteriza a los puntos simples en el plano de Rosenfeld.

En este apartado denotaremos el complemento de un conjunto de la siguiente forma A^c . El conjunto S denotará nuevamente los puntos negros de la imagen, los cuales serán un conjunto finito de \mathbb{Z}^2 .

Primero presentaremos la equivalencia de las condiciones 1 y 2 del Teorema 2.11. Las cuales son los siguientes dos lemas. Finalizamos esta sección con la equivalencia de la condición 3 del Teorema 2.11. Concluyendo así la noción de punto simple en el plano digital.

Con el fin de simplificar la notación en la mayoría de las siguientes pruebas denotaremos

$$\Gamma^*(S) = S^*.$$

Lema 3.22. *Sea $p \in S$. Entonces p tiene un 4-vecino en S^c si y solo si $\Gamma(p)$ tiene un punto puro adyacente en $(\Gamma^*(S))^c$.*

Demostración. \Leftarrow Veamos primero que $\Gamma^{-1}((S^*)^c) = S^c$.

- $S^c \subset \Gamma^{-1}((S^*)^c)$. Fijemos $x \in S^c$, entonces $\Gamma(x) \notin \Gamma(S)$ y $\Gamma(x)$ es un punto puro, por lo tanto $\Gamma(x) \notin S^*$, se sigue que $\Gamma(x) \in (S^*)^c$, luego $x \in \Gamma^{-1}((S^*)^c)$. Concluimos que $S^c \subset \Gamma^{-1}((S^*)^c)$.
- $\Gamma^{-1}((S^*)^c) \subset S^c$. Fijemos $x \in \Gamma^{-1}((S^*)^c)$, luego $\Gamma(x) \in (S^*)^c$, se sigue que $\Gamma(x) \notin \Gamma(S)$, entonces $x \notin S$, luego $x \in S^c$.

Por lo tanto tenemos que $\Gamma^{-1}((S^*)^c) = S^c$. Por hipótesis tenemos que existe un punto $p' \in (S^*)^c$ tal que p' es puro y $p' \in A(\Gamma(p))$. Luego por la Proposición 3.1 y lo mostrado anteriormente se tiene que $\Gamma^{-1}(p')$ y p son 4-adyacentes y $\Gamma^{-1}(p') \in S^c$.

\Rightarrow Veamos primero que $\Gamma(S^c) \subset (S^*)^c$.

Fijemos $x \in \Gamma(S^c)$, luego x es puro, se sigue que $\Gamma^{-1}(x) \in S^c$. Por lo que $\Gamma^{-1}(x) \notin S$, luego $x \in (\Gamma(S))^c$ y como x es un punto puro tenemos que $x \in (S^*)^c$. Por lo tanto $\Gamma(S^c) \subset (S^*)^c$.

Por hipótesis tenemos que existe $x \in S^c$ tal que x es 4-adyacente p . Luego por la Proposición 3.1 se tiene que $\Gamma(x)$ y $\Gamma(p)$ son adyacentes. Por lo anterior tenemos que $\Gamma(x) \in \Gamma(S^c) \subset (S^*)^c$ y $\Gamma(x)$ es puro.

□

Lema 3.23. *Sea $p \in S$. Entonces p tiene un 8-vecino en $S \setminus \{p\}$ si y solo si $\Gamma(p)$ tiene un punto adyacente en $\Gamma^*(S) \setminus \{\Gamma(p)\}$.*

Demostración. \Leftarrow Veamos primero que $\Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\}) = S \setminus \{p\}$.

- $S \setminus \{p\} \subset \Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\})$. Fijemos $x \in S \setminus \{p\}$, entonces $\Gamma(x) \in \Gamma(S \setminus \{p\}) \subset S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$, pues $\Gamma(S \setminus \{p\}) \subset \Gamma(S)$ y Γ es inyectiva. Por lo tanto $x \in \Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\})$.
- $\Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\}) \subset S \setminus \{p\}$. Fijemos $x \in \Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\})$, luego $\Gamma(x) \in S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$. Como $\Gamma(x)$ es un punto puro, entonces $\Gamma(x) \in \Gamma(S) \setminus \{\Gamma(p)\}$. Dado que Γ es inyectiva $\Gamma(S) \setminus \{\Gamma(p)\} \subset \Gamma(S \setminus \{p\})$, se sigue que $x \in S \setminus \{p\}$.

Por hipótesis tenemos que existe un $x \in S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$ tal que $x \in A(\Gamma(p))$. Consideremos dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos x es puro. Entonces $\Gamma^{-1}(x)$ es 4-adyacente a p (ver la Proposición 3.1), es decir 8-adyacente a p y $\Gamma^{-1}(x) \in \Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\}) = S \setminus \{p\}$.
- **Caso 2:** Supongamos x es un punto mixto. Se tiene que $cl(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$ o $N(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$. En ambos casos $|N(x)| = |cl(x)| = 3$ y están conformada por dos puntos puros y el punto mixto. Es decir que existe un punto puro $y \in S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$ tal que $y \in A(x)$.

Por otra parte tenemos $\Gamma(p) \in A(x)$, donde deducimos los siguientes dos casos:

Caso 2.1: Supongamos que y y $\Gamma(p)$ tienen único punto mixto adyacente en común, (el cual es x) entonces por la Proposición 3.2 se sigue que $\Gamma^{-1}(y)$ es 8-adyacente a p . Además $\Gamma^{-1}(y) \in \Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma(p)\}) = S \setminus \{p\}$.

Caso 2.2: Supongamos que y y $\Gamma(p)$ tienen dos puntos mixtos adyacentes en común, (uno de ellos es x), entonces por el Lema 3.5, se sigue que y y $\Gamma(p)$ son adyacentes. Entonces por la Proposición 3.1 tenemos $\Gamma^{-1}(y)$ y p son 8-adyacentes y por lo demostrado inicialmente $\Gamma^{-1}(y) \in S \setminus \{p\}$.

\Rightarrow Por hipótesis tenemos existe $x \in S \setminus \{p\}$ tal que x y p son 8-adyacentes. Entonces $\Gamma(x) \in \Gamma(S \setminus \{p\}) \subset S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$, pues Γ es inyectiva.

Consideramos dos casos:

- **Caso 1** Supongamos x es 4-adyacente a p . Entonces por la Proposición 3.1 se sigue que $\Gamma(x) \in A(\Gamma(p))$ y $\Gamma(x) \in S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$.
- **Caso 2** Si x es 8-adyacente y no 4 adyacentes a p . Por la Proposición 3.2 tenemos que existe z mixto tal que $\Gamma(x), \Gamma(p) \in A(z)$. Por otra parte z cumple que $N(z) = \{\Gamma(x), \Gamma(p), z\}$ o $cl(z) = \{\Gamma(x), \Gamma(p), z\}$, ya que en caso contrario $\Gamma(x)$ y $\Gamma(p)$ serian adyacentes y por lo tanto x y p 4-adyacentes.

Luego $N(z) \subset \Gamma(S) \cup \{z\}$ o $cl(z) \subset \Gamma(S) \cup \{z\}$, se sigue que $z \in S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$ y z es adyacente a $\Gamma(p)$.

□

Los siguientes lemas los utilizaremos para probar la última equivalencia del Teorema 2.11 en el plano digital.

Lema 3.24. *Si $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo, entonces $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo.*

Demostración. Supongamos que $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ no es 8-conexo. Entonces $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\}) = \{p_2, p_6\}$ o $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\}) = \{p_4, p_8\}$. Sin pérdida de generalidad supondremos solo el primer caso.

Dado que $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo, existe un 8-camino C de p_2 a p_6 en $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$. Note que C debe pasar por p_4 o p_8 , pero $p_4, p_8 \notin N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$, pues $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\}) = \{p_2, p_6\}$. Luego no es posible construir un 8-camino C de p_2 a p_6 en $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$, se sigue que $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ no es 8-conexo, lo que es una contradicción. Por lo tanto $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo. \square

Lema 3.25. *Sea $C \subset S$ un 8-camino. Si $C \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$, entonces $\Gamma^*(C) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$.*

Demostración. Sea $\Gamma^*(C) = C^*$. Fijemos $x \in C^*$, consideraremos dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos que x es puro. Entonces $\Gamma^{-1}(x) \in N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$, luego $x \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

- **Caso 2:** Supongamos que x es mixto. Entonces $N(x) \subset \Gamma(C) \cup \{x\}$ o $cl(x) \subset \Gamma(C) \cup \{x\}$.

Por la Proposición 3.1, tenemos que $\Gamma(C) \subset A(\Gamma(p))$, luego los dos puntos puros de $N(x)$ o $cl(x)$ están en $A(\Gamma(p))$. Por lo tanto $x \in A(\Gamma(p))$ ver figura 69, es decir que $x \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$, pues $x \in S^*$.

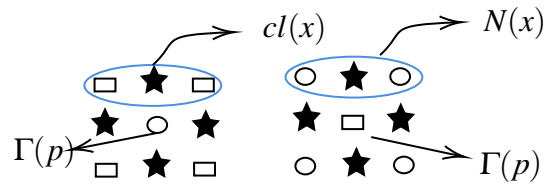


Figura 69. Lema 3.25.

□

Lema 3.26. Sea $p \in S$. Si el conjunto $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ es 8-conexo, entonces $\Gamma^*(S) \cap A(\Gamma(p))$ es conexo.

Demostración. Sea $\Gamma^*(S) = S^*$. Para demostrar que $S^* \cap A(\Gamma(p))$ es conexo, veamos que para todo $x, y \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$ con x y y no adyacentes, existe un arco $C \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ con puntos finales x y y . Fijemos $x, y \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$, consideremos los siguientes casos:

- **Caso 1:** Supongamos x, y son puntos puros. Entonces $\Gamma^{-1}(x), \Gamma^{-1}(y) \in N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

Dado que $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo, entonces por el Lema 3.24 $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo. Se sigue que existe un 8-camino C de $\Gamma^{-1}(x)$ a $\Gamma^{-1}(y)$ tal que $C \subset N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$, luego por la Proposición 3.8 tenemos que $\Gamma^*(C) = C^*$ es un arco de x a y . Además por el Lema 3.25 $C^* \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$, pues $C \subset N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

Caso 2: Supongamos x es mixto y y es puro. Dado que $x \in S^*$, tenemos que $cl(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$ o $N(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$. Sin pérdida de generalidad asumiremos lo primero.

Consideremos los siguientes subcasos:

Caso 2.1: Supongamos que $cl(x) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ o $N(x) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$. Supongamos lo primero, el otro caso se desarrolla similar. Sea $cl(x) = \{w_1, x, w_2\}$ donde w_1 y w_2 son puntos puros. Note que podemos asumir que $w_1 \neq y$, así por la Proposición 3.1 $\Gamma^{-1}(w_1), \Gamma^{-1}(y) \in N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ y $\Gamma^{-1}(w_1) \neq \Gamma^{-1}(y)$.

Por otra parte por el Lema 3.24 tenemos que $N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo, pues $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es conexo. Luego existe un 8-camino C de $\Gamma^{-1}(w_1)$ a $\Gamma^{-1}(y)$ con $C \subset N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

Por la Proposición 3.8 y el Lema 3.25 tenemos que $\Gamma^*(C) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ es un arco de y a w_1 . Si $x \in \Gamma^*(C)$, entonces el arco de x a y es $\Gamma^*(C) \setminus \{w_1\}$. Por otra parte si $x \notin \Gamma^*(C)$, entonces el arco de x a y es $\Gamma^*(C) \cup \{x\}$.

Caso 2.2: Supongamos que $cl(x) \not\subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ y $N(x) \not\subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$. Veamos primero que $\Gamma(p) \in cl(x)$, como $x \in A(\Gamma(p))$, se tiene que $\Gamma(p) \in N(x)$ o $\Gamma(p) \in cl(x)$. Supongamos que $\Gamma(p) \in N(x)$, luego $cl(x) \subset A(\Gamma(p))$ (ver la figura 70), se sigue que $cl(x) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$, pues $cl(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$, lo que es una contradicción, por lo tanto $\Gamma(p) \in cl(x)$.

Sea $cl(x) = \{x, w_1, \Gamma(p)\}$ donde $w_1 \in S^*$, pues $cl(x) \subset \Gamma(S) \cup \{x\}$. Note $w_1 \notin A(\Gamma(p))$ y es un punto puro. Por otra parte tenemos que $w_1, \Gamma(p) \in A(x)$ y x es el único punto mixto adyacentes a ambos, luego por la Proposición 3.2 $\Gamma^{-1}(w_1)$ es 8-adyacente a p .

Dado que $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo y $\Gamma^{-1}(w_1), \Gamma^{-1}(y) \in N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$,

entonces existe un 8-camino C_0 de $\Gamma^{-1}(y)$ a $\Gamma^{-1}(w_1)$, con $C_0 \subset N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

Además observe que $C_0 \setminus \{\Gamma^{-1}(w_1)\} \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$.

Por la Proposición 3.8 tenemos que C_0^* es un arco de w_1 a y en S^* . Veamos ahora que $C_1 = C_0^* \setminus \{w_1\}$ es un arco de $A(\Gamma(p)) \cap S^*$. Primero note que $\Gamma^{-1}(C_1) = C_0 \setminus \{\Gamma^{-1}(w_1)\}$ y $C_0 \setminus \{\Gamma^{-1}(w_1)\} \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$. Supongamos que $C_1 \not\subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$, entonces existe un $z \in C_1$ tal que $z \notin A(\Gamma(p))$, como $\Gamma^{-1}(C_1) \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$ (ver el Lema 3.25), se sigue que z es mixto. Luego existen $w_0, w'_0 \in C_1$, donde w_0, w'_0 son puntos puros tales que $N(z) = \{z, w_0, w'_0\}$ o $cl(z) = \{z, w_0, w'_0\}$. Como $\Gamma^{-1}(C_1) \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$, entonces $w_0, w'_0 \in A(\Gamma(p))$, luego $z \in A(\Gamma(p))$, contradiciendo así lo supuesto. Por lo tanto $C_1 \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

Veamos ahora que $D = C_1 \cup \{x\}$ es un arco. Observe que $x \notin C_1$, pues x es mixto, y tenemos que $cl(x) \not\subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ y $N(x) \not\subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

Sea z_1 el punto final de C_1 , con $z_1 \neq y$, se sigue que $z_1, x \in A(w_1)$ y $x, z_1 \in A(\Gamma(p))$, es decir que z_1 y x son adyacentes simultáneamente a dos puntos puros, como x es mixto (ver la figura 71) se tiene que z_1 y x son adyacentes.

Probemos ahora que x es solo adyacente a z_1 en C_1 , para ello sea $A(x) = \{z_1, w_1, \Gamma(p), a\}$, tenemos que $w_1, \Gamma(p) \notin A(\Gamma(p))$. Supongamos $a \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$, entonces $cl(x) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ o $N(x) \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ lo que es una contradicción. Luego $a \notin A(\Gamma(p)) \cap S^*$, por lo tanto $a \notin C_1$. Se sigue que D es un arco de x a y y $D \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

Caso 3 Supongamos que x y y son puntos mixtos. Siguiendo un razonamiento análogo al

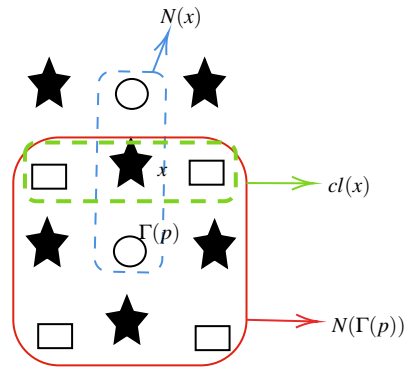


Figura 70. Análisis del Caso 2.2 del el Lema 3.26.

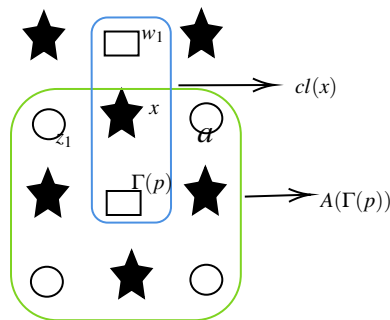


Figura 71. Continuación del análisis del Caso 2.2 del el Lema 3.26.

caso anterior con x y y tenemos que existe un arco C de x a y y $C \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

□

Lema 3.27. Sea $p \in S$. Si $\Gamma^*(S) \cap A(\Gamma(p))$ es conexo, entonces $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ es 8-conexo.

Demostración. Veamos que $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ es 8-conexo. Para ello probaremos que para todo $x, y \in N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, existe un 8-camino C de x a y en $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$ con x y y no 8-adyacentes. Debemos considerar los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $x, y \in N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$. Entonces $\Gamma(x), \Gamma(y) \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

Dado que $A(\Gamma(p)) \cap S^*$ es conexo, existe un arco $C \subset A(\Gamma(p)) \cap S^*$ de $\Gamma(x)$ a $\Gamma(y)$. Note

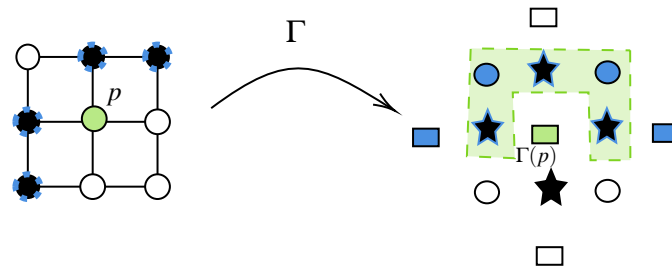


Figura 72. Ilustra el Lema 3.26, donde se evidencia como de un 8-camino en $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, se puede obtener un arco en $A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

que C tiene puntos mixtos, luego por la Proposición 3.10 (2) se tiene que existe un 8-camino C_0 de x a y y $C_0 \subset \Gamma^{-1}(C) \subset N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$.

Caso 2: Supongamos que $x \in N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$ y $y \notin N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$. Por la Proposición 3.1, tenemos que $\Gamma(x) \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$ y $\Gamma(y) \notin A(\Gamma(p)) \cap S^*$. Dado que $y \in N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, se sigue que y es 8-adyacente y no 4-adyacente a p , luego por la Proposición 3.2 existe un punto mixto z tal que $\Gamma(p), \Gamma(y) \in A(z)$. Note que $cl(z) = \{z, \Gamma(p), \Gamma(y)\}$ o $N(z) = \{z, \Gamma(p), \Gamma(y)\}$, pues $\Gamma(p)$ y $\Gamma(y)$ no son adyacentes y como $\Gamma(p), \Gamma(y) \in \Gamma(S)$, se sigue que $z \in S^*$, por lo tanto $z \in A(\Gamma(p)) \cap S^*$.

Dado que $A(\Gamma(p)) \cap S^*$ es conexo, existe un arco C de $\Gamma(x)$ a z en $A(\Gamma(p)) \cap S^*$. Sea $D = C \cup \{\Gamma(y)\}$, observe que D es conexo, pues $z \in C$ y z es adyacente a $\Gamma(y)$. Ahora como $\Gamma^{-1}(C) \subset N_4(p) \cap S \setminus \{p\}$ y $\Gamma^{-1}(y) \in N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, luego $\Gamma^{-1}(D) \subset N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$.

Como D es conexo y $\Gamma(x), \Gamma(y) \in D$, se sigue que existe un arco $D' \subset D$ con puntos finales $\Gamma(x)$ y $\Gamma(y)$. Por lo tanto por la Proposición 3.10 se tiene que existe un 8-camino $C_0 \subset \Gamma^{-1}(D')$ con puntos finales x y y en $N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$, pues $\Gamma^{-1}(D') \subset N_8(p) \cap S \setminus \{p\}$.

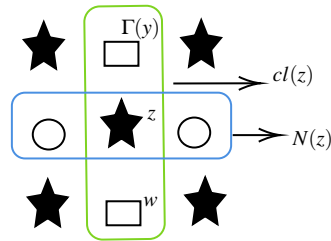


Figura 73. Adyacencia de un punto mixto con su clausura y vencidad minimal.

Caso 3: Si $x, y \notin N_4(p) \cap (S \setminus \{p\})$. Con un razonamiento análogo al caso anterior se tiene que existe un 8-camino de x a y en $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

□

La figura 72 también ilustra el Lema 3.27, solo que en esta vez se empieza con el arco verde de esta figura y a través de este encontramos el 8-camino C en $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$.

Teorema 3.28. Sea $p \in S$ y $\Gamma(p) \in \Gamma(S)$ que cumplen las siguientes condiciones :

1. $\Gamma(p)$ tiene un punto puro adyacente en $(\Gamma^*(S))^c$,
2. $\Gamma(p)$ tiene un punto adyacente en $\Gamma^*(S) \setminus \{\Gamma(p)\}$, y
3. El conjunto $\Gamma^*(S) \cap A(\Gamma(p))$ es conexo,

si y solo si p es simple en el plano de Rosenfeld.

Demostración. \Rightarrow Por los Lemas 3.22, 3.23 y 3.27 tenemos que satisface las condiciones 1) 2) y 3) del Teorema 2.11, luego que p es simple.

\Leftarrow Dado que p es simple, por el Teorema 2.11 tenemos que se cumple que $N_4(p) \cap S^c \neq \emptyset$ y $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, luego por los Lemas 3.22 y 3.23 tenemos que se cumple que:

1. $\Gamma(p)$ tiene un punto puro adyacente en $(S^*)^c$
2. $\Gamma(p)$ tiene un punto adyacente en $S^* \setminus \{\Gamma(p)\}$.

Por el Teorema 2.11, tenemos que el conjunto $N_8(p) \cap (S \setminus \{p\})$ es 8-conexo, luego por el Lema 3.26, se sigue que $S^* \cap A(\Gamma(p))$ es conexo.

□

Teniendo en cuenta el teorema anterior podemos definir una noción de punto simple en el plano digital de la siguiente manera.

Definición 3.29. Sea $p \in \mathbb{K}^2$ y $p \in \Gamma(S)$. Decimos p es un **punto simple Khalimsky** si satisface:

1. p tiene un punto puro adyacente en $(\Gamma^*(S))^c$.
2. p tiene un punto adyacente en $\Gamma^*(S) \setminus \{p\}$.
3. El conjunto $\Gamma^*(S) \cap A(p)$ es conexo.

Una consecuencia del Teorema 3.28 es que si $x \in \mathbb{K}^2$ y x es un punto simple Khalimsky, entonces $\Gamma^{-1}(x)$ es un punto simple en \mathbb{Z}^2 , por lo tanto tenemos que $S \setminus \{\Gamma^{-1}(x)\}$ y S tiene el mismo número de 8-componentes y además, $(S \setminus \{\Gamma^{-1}(x)\})^c$ y S^c tienen el mismo número de 4-componentes. Un ejemplo de punto simple Khalimsky se puede observar en la figura 74.

Una vez definido la noción de punto simple en el plano digital una pregunta que surge es: ¿Cómo definir un algoritmo de reducción en el plano digital?. Por ejemplo, en la figura 75 x es un punto simple Khalimsky y se observa que $(S \setminus \{\Gamma^{-1}(x)\})^* \neq S^* \setminus \{x\}$, lo que sugiere que

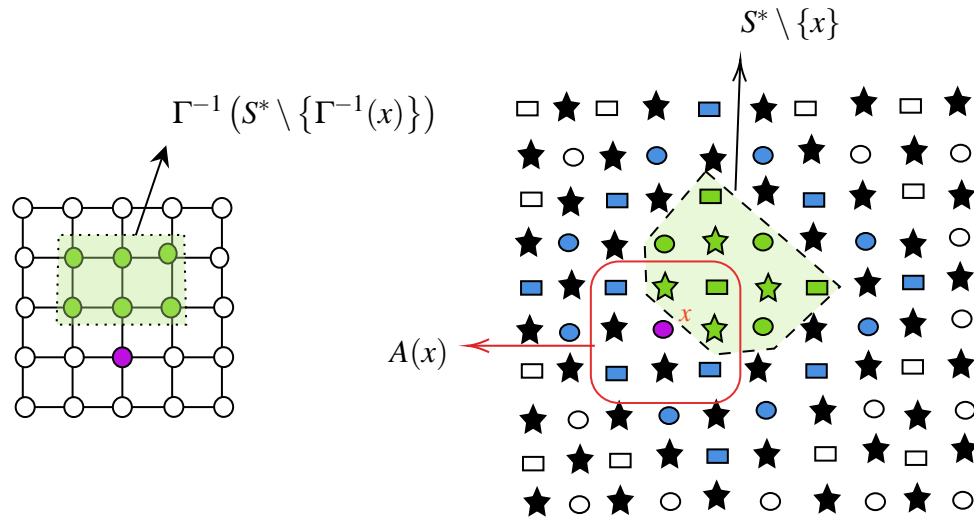


Figura 74. Punto simple Khalimsky x .

para los algoritmos de reducción en el plano digital no solo es suficiente eliminar el punto, sino también algunos puntos mixtos adyacentes a él.

3.4.1. Funciones continuas. La noción de continuidad que se emplea en el procesamiento de imágenes no es la continuidad topológica, sino una noción a partir de relaciones de adyacencia entre los puntos. En esta sección solo comentaremos algunas preguntas que surgieron naturalmente durante la elaboración de este trabajo.

Definición 3.30. [Rosenfeld, 1986] Sea $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ y $k \in \{4, 8\}$. Decimos que f es k -continua si dado x y y k -adyacentes si y solo si $f(x)$ y $f(y)$ son puntos k -adyacentes.

Teorema 3.31. [Rosenfeld, 1986] f es una función 4-continua si y solo si toma conjuntos 4-conexos y los envía a conjuntos 4-conexos.

El resultado anterior también es válido para una función 8-continua. Dada una función $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, la primera pregunta que surge es ¿Cómo asociar una función $\Gamma_f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ que

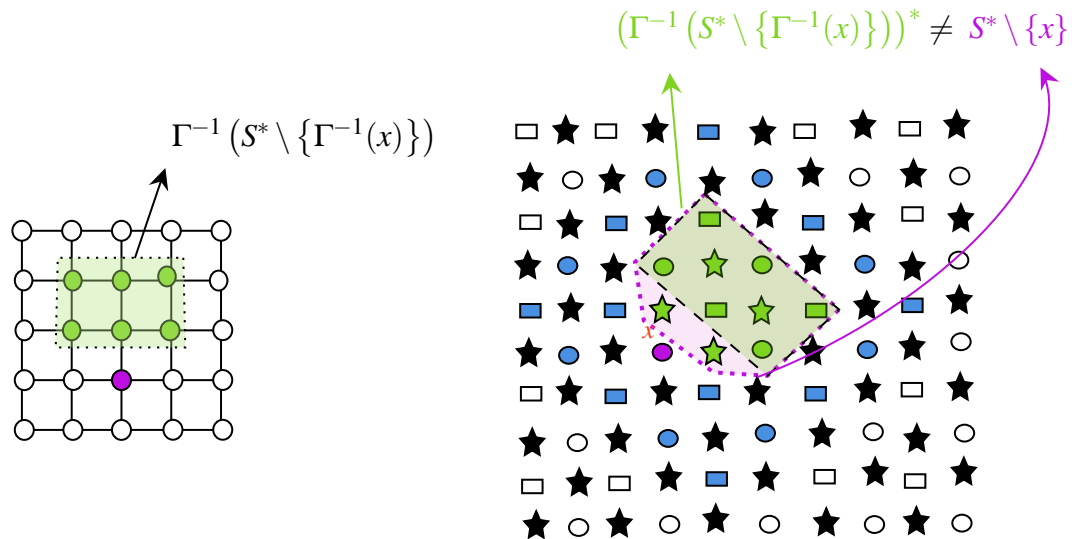


Figura 75. $(\Gamma^{-1}(S^* \setminus \{\Gamma^{-1}(x)\}))^* \neq S^* \setminus \{x\}$.

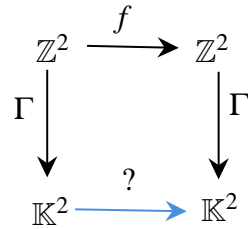


Figura 76. Ejemplo general de Γ_f .

refleje fielmente las propiedades que f posee en el plano Rosenfeld?

Para un punto puro (x, y) es natural definir Γ_f de la siguiente manera:

$$\Gamma_f(x, y) = \Gamma(f(\Gamma^{-1}(x, y))), \quad (2)$$

Ver las figuras 77 y 76. El problema es cómo definir la imagen de los puntos mixtos, pues ellos no tienen preimagen bajo Γ en el plano Rosenfeld.

Consideremos un ejemplo particular. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida de la siguiente manera

$f(x, y) = (x + 1, y)$. Entonces si usamos (2), tenemos que:

$$\Gamma_f(x, y) = (x + 1, y - 1)$$

para (x, y) puro. Podemos usar la misma regla para los puntos mixtos y obtenemos una función Γ_f que preserva la conexidad (pues f es 8-continua).

Sin embargo esa función no es continua. En efecto, sea (x, y) un punto puro cerrado en \mathbb{K}^2 , luego $|N(x, y)| = 8$, por lo que $|\Gamma_f(N(x, y))| = 8$, pues Γ_f es inyectiva. Por otra parte tenemos que $\Gamma_f(x, y) = (x + 1, y - 1)$ es un punto abierto, por lo que

$$N(\Gamma_f(x, y)) = \{(x + 1, y - 1)\}.$$

Luego tenemos que $\Gamma_f(N(x, y)) \not\subseteq N(\Gamma_f(x, y))$. Dado que \mathbb{K}^2 es Alexandroff se sigue que Γ_f no es continua en los puntos puros cerrados (ver la Proposición 1.12).

Por otra parte, tenemos funciones que son 4-continuas, en las cuales Γ_f es continua. Por ejemplo, considere $f(x, y) = (x + 2, y)$ que es una función 4-continua y 8-continua. Usando (2), tenemos que $\Gamma_f(x, y) = (x + 2, y - 2)$ que es continua.

De lo anterior surge la pregunta ¿qué condiciones debe tener la función f para que Γ_f (dada por (2)) se pueda extender a todos puntos mixtos y sea continua?

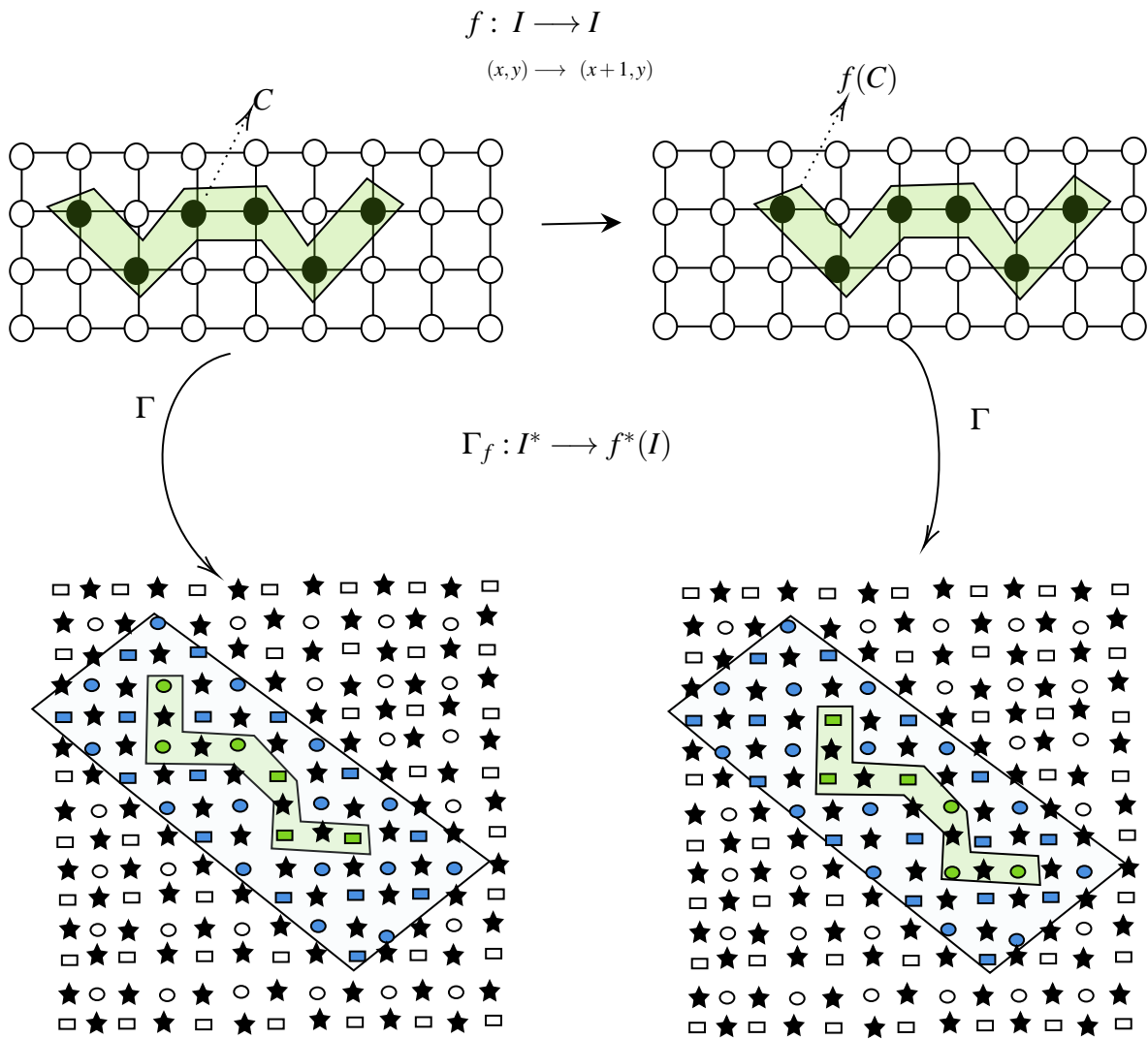


Figura 77. Ejemplo de Γ_f .

Apéndices

.1. Código de python

En esta sección presentamos el algoritmo implementado en Python para la aplicación descrita en el Capítulo 2.

En Python se utiliza el valor 0 para representar el color negro y 255 para representar el color blanco. Nosotros hemos utilizado 1 para representar los puntos negros y 0 los puntos blancos, por este motivo la primera función que definimos llamada “vdeverdad” realiza esta traducción y se muestra a continuación.

```
1 def vdeverdad(p):#Funcion vdeverdad
2
3     if p==0:
4         return int(True)
5     else:
6         return int(False)
```

La segunda función determina cuando un punto en la matriz de la imagen es un punto simple, para ello se aplica el Teorema 2.26.

```
1 def punto_simple(img,i,j):#Funcion punto_simple
2     p1=img[i-1,j+1]
3     p1=vdeverdad(p1)
4     p2=img[i,j+1]
5     p2=vdeverdad(p2)
```

```
6     p3=img[i+1,j+1]
7     p3=vdeverdad(p3)
8     p4=img[i+1,j]
9     p4=vdeverdad(p4)
10    p5=img[i+1,j-1]
11    p5=vdeverdad(p5)
12    p6=img[i,j-1]
13    p6=vdeverdad(p6)
14    p7=img[i-1,j-1]
15    p7=vdeverdad(p7)
16    p8=img[i-1,j]
17    p8=vdeverdad(p8)
18    return ((1-p2)*(max(p3,p4)))+((1-p4)*(max(p5,p6)))+
19    ((1-p6)*(max(p7,p8)))+((1-p8)*(max(p1,p2)))==1
```

Las siguientes dos funciones son los algoritmos de reducción que empleamos en la aplicación presentada en el Capítulo 2 de las figuras 43, 44 y 45. Estas dos funciones de Python realizan recorridos diferentes en la matriz de la imagen con el objetivo de eliminar puntos simples. La primera función comienza desde la parte superior y recorre la matriz por filas, mientras que la segunda comienza el recorrido desde la parte inferior de la imagen.

```
1 def reduccion(img):#Funcion  reduccion
2
3     for row in range(len(img[:, 0])):
4         for col in range(len(img[0])):
```

```
5         if img[row, col] == 0:
6             a = punto_simple(img, row, col)
7             if a == True:
8                 img[row, col] = 255
9
10    return img
```

```
1 def reduccion_inv(img):#Funcion  reduccion_inv
2     for row in range(len(img[:, 0]) - 1, -1, -1):
3         for col in range(len(img[0])):
4             if img[row, col] == 0:
5                 a = punto_simple(img, row, col)
6                 if a == True:
7                     img[row, col] = 255
8
9     return img
```

Referencias Bibliográficas

- Bazin, P.-L. and Pham, D. L. (2007). Topology correction of segmented medical images using a fast marching algorithm. *Computer methods and programs in biomedicine*, 88(2):182–190.
- Bertrand, G. (1994). Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids. *Pattern recognition letters*, 15(10):1003–1011.
- Boxer, L. (1994). Digitally continuous functions. *Pattern Recognition Letters*, 15(8):833–839.
- Boxer, L. and Staecker, P. C. (2016). Connectivity preserving multivalued functions in digital topology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 55:370–377.
- Cámara Caunedo, A. (2016). Algoritmos topológicos de adelgazamiento de imágenes digitales.
- Couprie, M. and Bertrand, G. (2012). Discrete topological transformations for image processing. *Digital Geometry Algorithms: Theoretical Foundations and Applications to Computational Imaging*, pages 73–107.
- Davis, L. S. (2012). *Foundations of image understanding*, volume 628. Springer Science & Business Media.
- Escribano, C., Giraldo, A., and Sastre, M. A. (2008). Digitally continuous multivalued functions. In *Discrete Geometry for Computer Imagery: 14th IAPR International Conference, DGCI 2008, Lyon, France, April 16-18, 2008. Proceedings 14*, pages 81–92. Springer.

- Escribano, C., Giraldo, A., and Sastre, M. A. (2009). Thinning algorithms as multivalued-retractions. In *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 275–287. Springer.
- Escribano, C., Giraldo, A., and Sastre, M. A. (2012). Digitally continuous multivalued functions, morphological operations and thinning algorithms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42:76–91.
- Gonzalez-Diaz, R., Medrano, B., Real, P., and Sánchez-Peláez, J. (2005). Algebraic topological analysis of time-sequence of digital images. In *Computer Algebra in Scientific Computing: 8th International Workshop, CASC 2005, Kalamata, Greece, September 12-16, 2005. Proceedings 8*, pages 208–219. Springer.
- Han, S.-E. and Sostak, A. (2013). A compression of digital images derived from a khalimsky topological structure. *Computational and Applied Mathematics*, 32(3):521–536.
- Hilitch, C. J. (1969). Linear skeletons from square cupboards.
- Honari, B. and Bahrampour, Y. (1999). Cut-point spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(9):2797–2803.
- Khalimsky, E., Kopperman, R., and Meyer, P. R. (1990a). Boundaries in digital planes. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 3(1):27–55.
- Khalimsky, E., Kopperman, R., and Meyer, P. R. (1990b). Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36(1):1–17.

- Kong, T. and Rosenfeld, A. (1991). Digital topology: a comparison of the graph-based and topological approaches. In *Topology and category theory in computer science*, pages 273–289.
- Kong, T. Y. (1995). On topology preservation in 2-d and 3-d thinning. *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, 9(05):813–844.
- Kong, T. Y. and Rosenfeld, A. (1989). Digital topology: Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3):357–393.
- Kong, T. Y. and Rosenfeld, A. (1996). *Topological algorithms for digital image processing*. Elsevier.
- Lobregt, S., Verbeek, P. W., and Groen, F. C. (1980). Three-dimensional skeletonization: principle and algorithm. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (1):75–77.
- McAndrew, A. and Osborne, C. (1996). A survey of algebraic methods in digital topology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6:139–159.
- McAndrew, A. and Osborne, C. F. (1993). Algebraic methods for multidimensional digital topology. In *Vision Geometry II*, volume 2060, pages 14–25. SPIE.
- Morgenthaler, D. G. (1981). Three-dimensional simple points: serial erosion, parallel thinning and skeletonization. *TR-1005*.

Nadler, S. (2017). *Continuum theory: an introduction*. CRC Press.

Palágyi, K., Balogh, E., Kuba, A., Halmai, C., Erdőhelyi, B., Sorantin, E., and Hausegger, K.

(2001). A sequential 3d thinning algorithm and its medical applications. In *Information Processing in Medical Imaging: 17th International Conference, IPMI 2001 Davis, CA, USA, June 18–22, 2001 Proceedings 17*, pages 409–415. Springer.

Rosenfeld, A. (1970). Connectivity in digital pictures. *Journal of the ACM (JACM)*, 17(1):146–160.

Rosenfeld, A. (1973). Arcs and curves in digital pictures. *Journal of the ACM (JACM)*, 20(1):81–87.

Rosenfeld, A. (1974). Adjacency in digital pictures. *Information and Control*, 26(1):24–33.

Rosenfeld, A. (1975a). A characterization of parallel thinning algorithms. *Information and control*, 29(3):286–291.

Rosenfeld, A. (1975b). A converse to the jordan curve theorem for digital curves. *Information and control*, 29(3):292–293.

Rosenfeld, A. (1976). *Digital picture processing*. Academic press.

Rosenfeld, A. (1980). *Three-dimensional digital topology*. Computer Science Center, University of Maryland College Park, MD 20742.

Rosenfeld, A. (1986). 'continuous' functions on digital pictures. *Pattern Recognition Letters*, 4(3):177–184.

Rubiano, G. and Robles, J. (2013). Topologías de alexandroff: diferentes contextos. *Boletín de Matemáticas*, 20(2):125–134.

Saha, P. K., Strand, R., and Borgefors, G. (2015). Digital topology and geometry in medical imaging: a survey. *IEEE transactions on medical imaging*, 34(9):1940–1964.

Tsao, Y.-F. and Fu, K. S. (1981). A parallel thinning algorithm for 3-d pictures. *Computer graphics and image processing*, 17(4):315–331.

Udupa, J. K. (1992). Applications of digital topology in medical three-dimensional imaging. *Topology and its Applications*, 46(3):181–197.