
Estudio de las transformaciones de luz parcialmente polarizada en sistemas de placas
compuestas

Cristian Eduardo Hernández Cely

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Física

Director:

Dr. Rafael Ángel Torres Amaris
Doctor en ciencias naturales (Física)

Universidad Industrial de Santander

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2024

“ÉL, quien dena los tiempos y acontecimientos,
dispone y destrona a los gobernantes,
a los sabios da Sabiduría, y a los inteligentes la Ciencia.
ÉL revela los secretos más profundos, las verdades ocultas,
pues ÉL conoce lo que está en las tinieblas;
ÉL ES LA LUZ.”

“ÉL es anterior a todas las cosas,
que por medio de ÉL forman un todo COHERENTE.”

*Dedicado a mi familia,
especialmente a mis padres.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por su maravillosa creación, particularmente por la luz, pues es lo que he decidido intentar entender mediante el estudio de las ciencias físicas en mi vida profesional. A mis padres por apoyarme incondicionalmente a lo largo de mi vida y mi carrera universitaria, por enseñarme y heredar la pasión por el saber y el deber. Agradezco también a todos los profesores de la escuela de Física por demostrarme la belleza tras de las ecuaciones y conceptos que intentan describir el mundo que nos rodea. Por su esfuerzo de intentar plasmar en sus clases sus ideas acerca del proceso de la investigación y lo que significa ser un físico.

Finalmente agradezco a todos mis compañeros y amigos de la carrera y del grupo de investigación GOTS con los que he tenido la oportunidad de interactuar. El tiempo de ocio, las charlas y las incontables divagaciones sobre los misterios de la existencia han hecho de de mi estadía y mi desarrollo profesional en la universidad un espacio más ameno y valioso.

Tabla de contenido

Introducción	12
1 Fundamentos de la polarización de la luz	18
1.1 Estado de polarización de la luz	19
1.1.1 Elipse y estado de polarización	20
1.1.2 Proyección estereográfica de los estados de polarización	24
1.1.3 Esfera de Poincaré	27
1.2 Vectores y matrices de Jones	28
1.2.1 Cambio de Base	29
1.2.2 Efecto de un retardador	30
1.2.3 Rotación de un retardador y sistemas de retardadores	32
1.2.4 Matriz de polarización	33
1.3 Parámetros de Stokes y matrices de Mueller	35
1.3.1 Matriz de Mueller de un retardador	38
1.4 Polarización con cuaterniones y vectores de Pauli	38
1.5 Formalismo para placas de onda compuestas	39
1.6 Transformaciones sobre estados de polarización dinámicos	41
1.6.1 Efecto de un retardador sobre un estado de polarización dinámico	42
1.6.2 Acción de un retardador en una matriz de polarización dinámica	44
1.6.3 Acción de un retardador en un vector de Stokes dinámico	44
1.7 Conclusiones	47
2 Descripción estadística de la polarización	48
2.1 Valor medio de un estado parcialmente polarizado	49
2.1.1 Grado de Polarización	50
2.1.2 Transformaciones de la polarización de luz incoherente	52
2.2 Segundo momento de un estado parcialmente polarizado	54
2.2.1 Transformación de la matriz de covarianza	56
2.2.2 Grado de polarización de segundo orden	59
2.3 Distribución de probabilidad del estado de polarización	61
2.3.1 Distribución de von-Mises-Fisher	62

2.3.2	Distribución de Fisher-Bingham	64
2.3.3	Distribución de probabilidad de Kent	66
2.4	Conclusiones	68
3	El fenómeno de la despolarización de la luz	69
3.1	Despolarización temporal de la luz a través de medios birrefringentes	69
3.1.1	Despolarización de luz elípticamente polarizada a través de un retardador con estados propios elípticos	70
3.1.1.1	Grado de polarización	71
3.1.1.2	Parámetros de Stokes promedio	72
3.1.2	Despolarización a través de un retardador lineal rotante	74
3.1.3	Despolarización a través de una placa de onda compuesta	79
3.2	Conclusiones	88
	Referencias	89

Lista de figuras

- Figura 1 a) Elipse de polarización con elipticidad χ alineada con respecto a un sistema de coordenadas (E_x, E_y) , es decir, $\alpha = 0$. En el caso más simple $\phi_y = \pi/2$ y $\phi_x = 0$. b) Elipse de polarización con elipticidad χ y un ángulo de orientación α 23
- Figura 2 a) Representación de los estados de polarización ζ en el plano complejo cartesiano con respecto a una base de estados lineales Horizontal y Vertical. b) Proyección estereográfica de una esfera de diámetro unitario sobre el plano complejo en una base de estados lineales. Hay una correspondencia de cada punto P de la esfera con cada punto del plano (excepto por el polo superior que se encuentra indefinido, pero al que le corresponde el estado de polarización que se encuentra en el infinito en el plano) y el ángulo azimutal y polar de la esfera coinciden con los ángulos principales de la elipse $(2\chi, 2\alpha)$. En general, cada punto de la esfera con su respectivo punto diametralmente opuesto tiene asociado un plano de estados de polarización ζ' 25
- Figura 3 Esfera de Poincaré, es la proyección estereográfica de ζ tomando como estados base los estados de polarización circular. 27
- Figura 4 Representación del efecto de un retardador con estados propios elípticos \mathbf{r}_{\pm} y retardancia δ en la esfera de Poincaré. Es un rotación de un ángulo δ alrededor de un eje \mathbf{r} que pasa por los dos estados propios de polarización \mathbf{r}_{\pm} del retardador. 33
- Figura 5 a) Representación de un estado de polarización proveniente de una fuente incoherente. Sus parámetros de Stokes son funciones aleatorias del tiempo. b) Representación del estado de polarización promedio. Este es el primer momento asociado con las señales aleatorias que conforman el estado de polarización de una fuente de luz incoherente. 51
- Figura 6 Esquema representativo de los vectores propios $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ asociados con la matriz de covarianza Σ asociada con un estado de polarización $\mathbf{s}(t)$ aleatorio. Los puntos negros representan realizaciones o mediciones de la evolución aleatoria del estado de polarización en el tiempo. 55

- Figura 7 Gráfico de la función de densidad de probabilidad de Von Mises Fisher en la esfera de Poincaré en una escala de colores. El parámetro de concentración es de $\kappa = 20$ y el vector dirección media $\hat{\mathbf{s}} = (1, 0, 0)^T$. Esta distribución posee contornos de probabilidad circulares. Es invariante bajo rotaciones alrededor de $\hat{\mathbf{s}}$ 63
- Figura 8 Gráfico de la función de densidad de probabilidad de Fisher-Bingham en la esfera de Poincaré en una escala de colores. a) Forma antípoda de la distribución cuando $\hat{\mathbf{s}} = 0$, los autovectores de Σ están alineados con los ejes de la esfera, y el autovector alineado con S_2 es mucho más grande que el autovector alineado con S_3 . b) Forma axial de la distribución cuando $\hat{\mathbf{s}} = 0$, los autovectores de Σ están alineados con los ejes de la esfera, y el autovector alineado con S_1 tiene igual magnitud que el autovector alineado con S_2 65
- Figura 9 Gráfico del grado de polarización de un haz de luz incoherente, elípticamente polarizado, que pasa por un retardador con estados propios lineales como función del ángulo de orientación α de la elipse de polarización. Las curvas corresponden con una fuente de luz con grado de coherencia $\gamma(\tau)$ Gaussiano, con longitud de coherencia de $20\mu m$ y el retardador lineal introduce una diferencia de camino óptico de $18\mu m$ 72
- Figura 10 Gráfico del esquema experimental para medir la despolarización de un haz de luz incoherente linealmente polarizado incidiendo sobre un retardador (que introduce un retardo de $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$) con estados propios lineales que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El grado de polarización $P(\theta)$ depende del ángulo de rotación y de la coherencia de la fuente. 75
- Figura 11 Gráfico del vector medio $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ asociado al estado de polarización del haz emergente a un retardador lineal que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El estado inicial corresponde con un haz linealmente polarizado con coherencia Gaussiana y un tiempo de coherencia de $\tau_c \approx 20\mu m/c$. La curva azul corresponde a un retardador lineal de orden cero, el cual no despolariza, y la curva roja a un retardador de orden múltiple el cual sí logra despolarizar el haz de luz. a) El vector $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ para un haz despolarizado se encuentra dentro de la esfera ya su magnitud es menor que la unidad. b) Se grafica el vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ normalizado con respecto a su magnitud o grado de polarización, esto permite tener una mejor visualización en la esfera de Poincaré. 76

- Figura 12 Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ experimental y teórico. Los puntos representan el la dirección media del estado de polarización $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ medido con el polarímetro *PAX5710VIS-T* para el haz emergente al retardador rotante. La curva roja es el vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ teórico calculado usando las expresiones teóricas dadas por la ecuación 3.15 . La coherencia $\gamma(\tau)$ tomada fue Gaussiana con $\tau_c = 20\mu m/c$ y un retardo $\tau = 97\frac{\lambda_0}{4c}$ 78
- Figura 13 Gráfico del esquema experimental para medir la despolarización de un haz de luz incoherente linealmente polarizado incidiendo sobre una biplaca compuesta por dos retardadores lineales idénticos (que introduce un retardo de $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$) de estados propios lineales. La biplaca tiene la la libertad de rotar con un ángulo θ . El grado de polarización $P(\theta, \phi)$ depende del ángulo de rotación, del ángulo entre los ejes principales de los retardadores y de la coherencia de la fuente. 79
- Figura 14 Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}}' \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ asociado al estado de polarización del haz emergente a una biplaca compuesta de dos retardadores lineales $\lambda/4$ con un ángulo $\phi \approx -44^\circ$ que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El estado inicial corresponde con un haz linealmente polarizado con coherencia Gaussiana y un tiempo de coherencia de $\tau_c \approx 25\mu m/c$ y un retardo de $\tau \approx 105\frac{\lambda_0}{4c}$. a) La actividad óptica dada por el ángulo φ desde el eje S_1 hasta el punto A cumple la condición $\varphi' = 2\phi - \pi$. b) Vista lateral de la gráfica, para este caso se cumple que el grado de polarización máximo P_{max} está en el punto extremo de la curva, y el mínimo P_{min} en el punto A ; en el vértice de la curva. . . . 81
- Figura 15 Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}}' \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ asociado al estado de polarización del haz emergente a una biplaca compuesta de dos retardadores lineales $\lambda/4$ con un ángulo $\phi \approx -44^\circ$ que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . a) El gráfico corresponde con un estado de polarización incidente circular derecho $\chi_0 \approx 44,5^\circ$, la curva teórica se calculó usando una coherencia de tipo Gaussiana con $\tau_c \approx 27\mu m/c$ con un retardo en cada placa de $\tau \approx 101\frac{\lambda_0}{4c}$. b) El gráfico corresponde con estado de polarización incidente elíptico $\chi_0 \approx 20^\circ$ y $\alpha_0 \approx 22^\circ$, la curva teórica se calculó usando una coherencia de tipo Gaussiana con $\tau_c \approx 26\mu m/c$ con un retardo en cada retardador lineal de $\tau \approx 99\frac{\lambda_0}{4c}$ 82

- Figura 16 Gráfico del grado de polarización en función del ángulo de rotación de la biplaca. Los puntos son los datos experimentales y las curvas corresponden con la curva teórica en cada caso calculada con los mismos parámetros usados para determinar los parámetros de Stokes. El color azul representa el caso donde el estado de polarización del haz incidente es el elíptico dado por $\chi_0 \approx 20^\circ$ y $\alpha_0 \approx 22^\circ$. El negro representa el caso cuando el estado de polarización del haz incidente es Horizontal. El naranja representa el caso cuando el estado de polarización incidente es circular derecho $\chi_0 \approx 44,5^\circ$ 83
- Figura 17 Gráfico del grado de polarización en función del estado de polarización incidente caracterizado por los ángulos (α, χ) en el rango de $\alpha = [0, \pi]$ y $\chi = [0, \pi/4]$. Para el ángulo entre los dos retardadores $\phi = 45^\circ$. . . 85
- Figura 18 Gráfico del grado de polarización en función del ángulo de rotación θ de la biplaca y el ángulo entre los ejes principales ϕ . La gráfica cubre los rangos de $\theta = [0, \pi]$ y $\phi = [0, \pi/2]$. El ángulo entre los dos retardadores es $\phi = 45^\circ$ y un estado de polarización incidente horizontal. 86

Resumen

Título: Estudio de las transformaciones de luz parcialmente polarizada en sistemas de placas compuestas¹

Autor: Cristian Eduardo Hernández Cely²

Palabras clave: Polarización, Despolarización, Coherencia, Parametros de Stokes, Vectores de Pauli, placas de onda compuestas.

Descripción: El estado de polarización $2D$ de un haz de luz se puede describir mediante diferentes formalismos algebraicos completamente equivalentes. Sin embargo, en el estudio de la luz parcialmente polarizada, producida por fuentes incoherentes, el uso del formalismo de Stokes-Mueller es el dominante. Se deja de lado, y sin la conexión existente como en el caso coherente, los otros formalismos como el de las matrices de Jones, los vectores de Pauli y los cuaterniones, y con ello, cada una de sus ventajas. Una de las consecuencias de este problema es la hasta ahora no existencia de un método general para describir la despolarización de este tipo de fuentes de luz a través de múltiples retardadores (sistemas llamados placas de onda compuestas). También, la formulación estadística de la polarización carece de un método algebraico que tenga en cuenta las correlaciones de orden superior, que son esenciales para describir la dinámica de la polarización de una fuente aleatoria. En función de solucionar estas problemáticas, en este trabajo se propone el álgebra que describen los estados de polarización dinámicos y sus transformaciones a través de operadores lineales. Se usa este resultado para mantener la conexión entre los distintos formalismos algebraicos cuando se usa la teoría de la coherencia y se plantean los dos primeros momentos estadísticos asociados con el vector de Stokes y sus correspondientes reglas de transformación. Con ello, se logra proponer una metodología para describir la transformación de luz parcialmente polarizada en sistemas compuestos por múltiples láminas retardadoras.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Ángel Torres Amaris

Abstract

Title: Study of partial polarized light transformations through composite wave-plate systems. ³

Author: Cristian Eduardo Hernández Cely⁴

Key words: Polarization, Depolarization, Coherence, Stokes parameters, Pauli vectors, composite wave-plates.

Description: The $2D$ polarization state of a light beam can be described by different fully equivalent algebraic formalisms. However, in the study of partially polarized light, produced by incoherent sources, the use of the Stokes-Mueller formalism is the dominant one. It leaves aside, and without the existing connection as in the coherent case, the other formalisms such as Jones matrices, Pauli vectors and quaternions, and with it, each of their advantages. One of the consequences of this problem is the non-existence of a general method to describe the depolarization of this type of light sources through multiple linear retarders (systems called composite waveplates). Also, the statistical formulation of polarization lacks an algebraic method that takes into account higher order correlations, which are essential to describe the polarization dynamics of a random source. In order to solve these problems, this paper proposes the algebra describing the dynamic polarization states and their transformations through linear operators. This result is used to maintain the connection between the different algebraic formalisms when coherence theory is used and the first two statistical moments associated with the Stokes vector and its corresponding transformation rules are proposed. With this, it is possible to propose a methodology to describe the transformation of partially polarized light in systems composed of multiple retarders.

³Master's Thesis

⁴Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Ángel Torres Amaris

Introducción

Antes de describir formalmente el problema de investigación del que trata este trabajo prefiero dar un contexto de la motivación personal que tuve para avanzar en la solución del problema que leerán en los próximos párrafos. Durante la mayor parte de mi carrera en física me he dedicado al estudio y comprensión de las propiedades fundamentales de la luz, particularmente la polarización. Ha sido un poco caótico porque históricamente su desarrollo teórico ha tenido varias etapas en las cuales se han propuesto y usado distintos formalismos algebraicos. Después de mucha lectura y recopilación de varios libros, artículos y discusiones con mis compañeros y mi director de tesis, descubrí que todas estas formas algebraicas de describir la polarización son equivalentes. Sin embargo, esta equivalencia entre formalismos parece ser solamente válida cuando la luz no presenta fluctuaciones aleatorias ni polarización parcial. Curiosamente, solo uno de los formalismos algebraicos, concretamente el de Stokes Mueller, es el que se usa en las teorías estadísticas de la polarización, dejando de lado los otros formalismos, los cuales para el caso de luz totalmente polarizada son equivalentes en el sentido en que describen el mismo estado de polarización y sus transformaciones; pues existe un isomorfismo entre ellos. Es así como me di a la tarea de intentar construir una metodología teórica para, a partir de la formulación algebraica de luz monocromática, poder describir también la de luz policromática (determinista) y más tarde adaptarla, junto con la teoría de la coherencia, a fuentes de luz con fluctuaciones aleatorias (indeterministas). Todo esto con el objetivo de poder entender, con mis propios esquemas mentales y con un orden lógico, la fenomenología y estructura teórica de la polarización de fuentes de luz generales. A su vez, esta metodología será usada para solucionar problemas particulares asociados con la descripción de la luz parcialmente polarizada que han surgido a lo largo de mi estudio. Estos problemas son los siguientes: ¿Cómo describir las transformaciones de la luz parcialmente polarizada, que tengan en cuenta la despolarización o variación del grado de polarización, a través de sistemas compuestos por múltiples retardadores? Y ¿cómo se pueden describir las fluctuaciones aleatorias del estado de polarización, es decir, su dinámica, de fuentes de luz cuando sufren transformaciones y despolarización? Con todo esto, espero que lo que sigue a partir de aquí sea de interés tanto para estudiantes de física como a profesionales que trabajen en polarización o que están interesados en esta área.

La polarización del campo eléctrico surge del carácter vectorial de la radiación electromagnética. Esta se entiende como el lugar geométrico descrito por la evolución temporal del vector campo eléctrico, y en general, corresponde con una elipse en un periodo de evolución para el caso monocromático, sin embargo, para radiación policromática el vector campo eléctrico describe un lugar geométrico diferente, que en el caso cuasimonocromático puede entenderse como una elipse de polarización cuya forma varía en el tiempo (Born y Wolf, 2013). El estado de polarización de la luz obedece el formalismo algebraico de los espinores los cuales tienen múltiples representaciones equivalentes. Los vectores de Jones, los vectores de Pauli o matrices de polarización, los cuaterniones y los parámetros de Stokes son los formalismos algebraicos con los que usualmente se describe la luz polarizada y sus transformaciones a través de operadores lineales y cambios de base. Además, estos formalismos algebraicos permiten la representación de los estados de polarización como un vector unitario de tres dimensiones que se ubica sobre una esfera de radio unitario, llamada esfera de Poincaré. Sin embargo, la unificación de todas las representaciones algebraicas ya mencionadas es válida bajo el caso ideal de una fuente de luz coherente monocromática o luz cuasimonocromática totalmente polarizada.

A pesar que todos los formalismos matemáticos son equivalentes, los parámetros de Stokes han sido los más ampliamente utilizados. Principalmente porque pueden describir todos los procesos de la polarización que sufre un haz de luz cuando hay despolarización debido a la incoherencia espacial o temporal de una fuente de luz, como cuando no hay efectos de despolarización de este tipo. Cuando se busca describir fenómenos asociados con la transformación de estados totalmente polarizados y parcialmente polarizados, el uso de las matrices de Mueller es el estándar. Aun así, el uso de otros formalismos puede resultar útil dependiendo del problema que se este abordando. El uso de los cuaterniones, para colocar un ejemplo, permiten una interpretación geométrica y un cálculo más directo de las transformaciones de la polarización a través de medios birrefringentes y dicroicos, los cuales se pueden entender como rotaciones o proyecciones respectivamente en el espacio de la esfera de Poincaré (Kuntman, Kuntman, Canillas, y Arteaga, 2019; Pellat-Finet, 1984). Los cuaterniones y los vectores de Pauli pueden ser utilizados para no tener que acudir a la muy dura álgebra de las matrices de Mueller. Estos facilitan el cálculo cuando se quieren describir múltiples elementos ópticos que transforman la polarización como las placas de onda compuesta, los cuales se definen como una secuencia de láminas birrefringentes con autoestados ortogonales entre sí (Pabón, Hernandez, y Torres, 2023). La ventaja es que la información fundamental, como por ejemplo los estados propios de un sistema compuesto y su retardo, aparecen de manera explícita. Así, con los cuaterniones y vectores de Pauli no se necesita analizar las 16 componentes de una matriz de Mueller ni tener que realizar un proceso de diagonalización para acceder a la información física que codifican. A pesar de esto, el único formalismo algebraico adaptado

para tratar la polarización de luz tanto coherente como incoherente es el de Stokes-Mueller.

El estado de polarización de una onda electromagnética emitida por una fuente de luz como un LED, un filamento incandescente, un gas excitado o un incluso de un láser, no es estacionario, sino que el vector campo eléctrico describe un estado de polarización que fluctúa en el tiempo (Gil y Ossikovski, 2022). Estos son fuentes de luz incoherentes que tienen asociados estados parcialmente polarizados. Para tratar este tipo de luz, lo normal es usar los parámetros de Stokes, principalmente porque están definidos como promedios temporales de la irradiancia del campo eléctrico, y por tanto, están directamente relacionados con la matriz de polarización-coherencia (Wolf, 1959; Wolf y cols., 2007). Así, los parámetros de Stokes almacenan toda la información estadística (el primer momento estadístico) asociada con el carácter vectorial de la radiación aleatoria.

Los parámetros de Stokes y la matriz de polarización-coherencia tiene asociada una representación geométrica alternativa de los estados de polarización mediante el uso de la esfera de Poincaré. Cada uno de estos parámetros pueden ser ordenados como un vector de \mathbb{R}^3 , el cual define un punto en una región ocupada por una esfera. Los estados totalmente polarizados, los cuales pueden ser entendidos como una elipse y corresponden con puntos ubicados sobre la esfera de Poincaré, es decir, un vector de radio unitario. Por otro lado, los estados parcialmente polarizados, están representados como un punto dentro de la esfera de Poincaré (Goldstein, 2017). El radio de este vector es lo que se conoce como **grado de polarización** y es una medida de qué tan polarizada se encuentra una onda electromagnética.

El grado de polarización es la medida estadística usual que da información sobre la aleatoriedad de la polarización de una fuente lumínica, siendo una medida del grado de correlación de las componentes vectoriales de la radiación emitida por esta (Al-Qasimi, Korotkova, James, y Wolf, 2007). Así, el grado de polarización está directamente relacionado con la función de coherencia de un haz de luz. Por otro lado, la orientación del vector en la representación de la esfera de Poincaré describiría cual es la “elipse” de polarización alrededor de la cual fluctúa la figura geométrica descrita por el vector campo eléctrico a través del tiempo. Es así entonces que el uso de los parámetros de Stokes parece solucionar el problema de describir los estados de polarización de luz indeterminista, al menos en primera aproximación. Los parámetros de Stokes describen el promedio de las fluctuaciones aleatorias del estado de polarización pero no da información detallada sobre su dinámica, es decir, la forma de estas fluctuaciones. Esto es debido a que los parámetros de Stokes están definidos en términos de las funciones de coherencia de segundo orden. Para poder acceder a más información estadística de la luz parcialmente polarizada es necesario plantear un formalismo donde se tengan en cuenta también las funciones de coherencia de cuarto orden. Pero para ello, es necesario entender cómo los parámetros de Stokes que describen estados parcialmente polarizados se relacionan con los otros formalismos de la polarización y con la teoría de la coherencia.

El formalismo de Stokes-Mueller también describe la variación del grado de polarización de haces de luz que interactúan con otros medios, este es el fenómeno de la **despolarización**. Los despolarizadores son elementos ópticos que disminuyen el grado de polarización de un haz de luz (la despolariza) esto puede ocurrir por muchas causas, pero hay dos principales. La primera causa es el resultado de interacciones de un haz de luz polarizado con medios aleatorios, lo que resulta en una variación del grado de polarización (Brosseau, 1998). La segunda causa, y es la que nos concierne en este trabajo, consiste en que los medios despolarizantes introducen descorrelaciones de tipo temporal y espacial sobre las componentes vectoriales del campo eléctrico, entonces cuando los desfases introducidos son comparables con los tiempos y longitudes de coherencia de un haz de luz, el grado de polarización cambia apreciablemente (Chakraborty, 1986; Chipman, 1999). Los primeros tipos de despolarizadores que fueron fabricados y descritos gracias al uso del formalismo de las matrices de Mueller son el despolarizador de Lyot, el de Cornu y el de Wedge, los cuales consisten usualmente de dos medios birrefringentes cuyos ejes principales están orientados uno respecto a otros con ángulos fijos (Cieslak y Domanski, 2008; de Sande, Piquero, y Teijeiro, 2012). Estos elementos han sido de gran utilidad en aplicaciones con fibras ópticas, debido a que la birrefringencia aleatoria de estas también introduce despolarización, y una manera de controlarla y evitarla es estudiando sus propiedades despolarizantes (Bohm, Petermann, y Weidel, 1983), esto también es igualmente utilizado en sistemas de información cuántica que usan la polarización y “despolarización” de fotones (Shaham y Eisenberg, 2011). La despolarización de la luz también es relevante en el estudio de tejidos biológicos, pues se ha encontrado que, de acuerdo a la edad o a la presencia de ciertas patologías la despolarización inducida es diferente, y en el caso de la retina se podría diagnosticar un glaucoma usando este fenómeno (Bueno, 2001, 2004). Así vemos que, la polarización de la luz, sus transformaciones y la despolarización, son fenómenos asociados con la luz importantes principalmente por sus aplicaciones en comunicación y los potenciales usos en biología, medicina y análisis químico.

En vista de que los sistemas despolarizantes juegan un papel importante en las tecnologías e investigaciones en óptica, es importante tener un esquema teórico general que permita describir y calcular los efectos de sistemas compuestos de elementos que puedan despolarizar un haz de luz, como por ejemplo, las placas de ondas compuestas. Uno de los trabajos principales en los que se trata de describir la despolarización a través de medios birrefringentes es en (Dlugnikov, 1984). Aquí se propone una metodología para determinar las matrices de Mueller que tienen en cuenta la despolarización debida a la birrefringencia de los medios. La metodología consiste en adaptar las matrices de Mueller a fuentes que tienen una distribución espectral, esto es, integrar los elementos de la matriz. En principio, esta metodología se puede adaptar a cualquier conjunto de elementos ópticos que se puedan describir por una matriz de Mueller, como las placas compuestas. Sin embargo, aunque las matrices de Mueller

normales pueden derivarse de las matrices de Jones, en el caso de estas matrices de Mueller que incluyen los efectos despolarizantes esto no ocurre. De nuevo, los formalismos algebraicos que deberían ser equivalentes parecen no serlo en la formulación estadística actual de la polarización.

Problema de investigación

A partir de la discusión anterior se pueden extraer dos problemas relacionados con la descripción del estado de polarización y que son los que se abordarán en este trabajo. El primero es que la teoría de la coherencia temporal y la polarización actual está formulada solamente alrededor de los parámetros de Stokes y las matrices de Mueller dejando de lado los otros formalismos algebraicos como las matrices de Jones y los vectores de Pauli. Esto ha conllevado a usar matrices de Mueller que cuantifican el efecto de la despolarización pero que se derivan de manera que no es transparente, sin entender exactamente cuál es el efecto del operador asociado con un medio óptico despolarizante sobre un estado de polarización estocástico. Esta es quizás una de las razones por la cuales no existe un método directo que permita describir la despolarización debida a sistemas múltiples como las placas de onda compuestas. Debería poderse encontrar una metodología que permita solucionar este tipo de sistemas usando cualquiera de las formulaciones algebraicas que existen para la luz polarizada junto con la teoría de la coherencia. En algunos trabajos como ([Makowski y Domański, 2010](#); [Mochizuki, 1984](#)) y principalmente en ([Makowski, Szymanski, y Domanski, 2012](#)) ya se ha intentado resolver este problema, sin embargo, el planteamiento no cubre un sistema general de múltiples láminas retardadoras. En este trabajo se abordará ese problema y se propondrá una solución teórica para la despolarización a través de sistemas de placas compuestas.

El segundo problema es que los parámetros de Stokes y la matriz de coherencia solamente corresponde a una estadística del estado de polarización que solo considera el promedio de ensamble o primer momento estadístico y, por lo tanto, no brinda información sobre las fluctuaciones ni la dinámica asociada con un estado de polarización estocástico. Este problema se ha intentado resolver ya, principalmente en los trabajos ([Barakat, 1987](#); [Brosseau, Barakat, y Rockower, 1991](#)), donde se encuentra una función de densidad de probabilidad para los parámetros de stokes y se encuentran sus tres primeros momentos estadísticos. Por otro lado, nuestro grupo de investigación ha introducido el uso de las distribuciones direccionales para tratar la estadística y la dinámica de la polarización sobre su espacio de configuración, es decir, la esfera de Poincaré ([Hernandez-Cely, Salazar-Ariza, y Torres, 2023](#); [Salazar-Ariza y Torres, 2019](#)). Sin embargo, hasta ahora no ha sido planteada una formulación algebraica para el segundo momento estadístico de un estado de polarización estocástico ni sus transformaciones a través de medios lineales como retardadores. Esto requiere el desarrollo de una formulación

de coherencia de orden cuarto y es lo que se intentará proponer en el capítulo 2 de este trabajo.

Finalmente, se espera mediante este trabajo organizar y hacer una compilación del formalismo y las ideas acerca de la polarización de la luz que se vienen trabajando en el Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales de la Universidad Industrial de Santander. Nuestra visión acerca de la naturaleza de la polarización de la luz a nivel clásico abarca el estudio de la dinámica de la polarización usando distribuciones de probabilidad sobre la esfera de Poincaré y las funciones de coherencia de orden superior. Por otro lado, espero también poder estampar en este texto el proceso cognitivo y lógico que he seguido para poder realizar esta investigación de carácter fundamental. Durante el tiempo que he pertenecido en el GOTS y gracias a la asesoría recibida de mi director Rafael Torres y la interacción con mis compañeros, considero que he podido llegar a estar un poco más cerca de comprender y hacer propia la tarea de un investigador del área de las ciencias físicas. Aunque todavía me queda un duro trabajo de formación por delante espero que lo poco que he logrado aprehender de esta tarea se vea reflejado aquí para los futuros estudiantes de óptica que en algún momento revisen este documento. Aún queda mucho trabajo por hacer en este área, problemas de investigación e ideas que tienen bastante potencial para ser explorados en un próximo trabajo de investigación y que requieren de científicos en formación para que sean solucionados. Con la esperanza que quien lea mi trabajo de grado en un futuro se anime a pensar y trabajar en estos retos de investigación en óptica que se trabajan en la Universidad Industrial de Santander, me veo en la obligación de incluir estas ideas y relacionarlas con el trabajo principal de mi maestría.

Este documento se encuentra separado en tres capítulos. El primer capítulo en su mayoría consiste en una recopilación de los formalismos algebraicos ya conocidos para tratar la polarización de ondas monocromáticas, al final de este se abordará el problema de adaptar estos formalismos a la descripción de estados de polarización dinámicos. En el segundo capítulo se expondrá la formulación estadística de estados de polarización dinámicos con fluctuaciones aleatorias. Se abarcará la determinación del primer y segundo momento estadístico y las reglas de transformación de cada uno cuando un haz de luz, en general parcialmente polarizado, interactúa con medios ópticos descritos por operadores lineales. Finalmente, en el tercer capítulo se aplicará la teoría expuesta en el segundo capítulo para solucionar el problema de la despolarización de la luz a través de sistemas de múltiples láminas retardadoras. Se expone un experimento de un haz de luz incoherente cuyo estado de polarización se transforma a través de una biplaca (un sistema de dos retardadores) y se compararán los datos experimentales con el modelo teórico.

Capítulo 1

Fundamentos de la polarización de la luz

La solución del problema de investigación planteado en este texto tiene una secuencia que consiste en la solución estructurada de algunos problemas teóricos y experimentales particulares. Para comenzar con el estudio de la luz parcialmente polarizada, su tratamiento estadístico, y posteriormente, el estudio de la despolarización, es necesario recordar los fundamentos teóricos y conceptuales para definir inicialmente qué es un estado de polarización de una onda electromagnética y cómo se comporta cuando interactúa con ciertos materiales. En este caso nos limitaremos a los birrefringentes.

Se explicará brevemente el uso de los espinores en la descripción de los estados de polarización, también se introducirán los principales métodos algebraicos equivalentes para describir las transformaciones de los estados de polarización como el formalismo de Stokes-Mueller, el formalismo de Jones, los cuaterniones y los vectores de Pauli. Los lectores que tienen pericia y experiencia en el campo de la óptica, especialmente en el área de la polarización, pueden tomarse las primeras secciones de este capítulo como un breve repaso de los métodos algebraicos para describir los estados de polarización 2D y sus transformaciones para el caso de luz monocromática. Pueden limitarse a leerlas con superficialidad para recordar los conceptos y familiarizarse con la notación que se utilizará a lo largo de este texto. Sin embargo, les recomiendo terminar con la tranquilidad de la lectura a partir de las secciones 1.5 y 1.6, pues en estas se introducirán los primeros aportes de la investigación.

En la sección 1.5 se describirá un método basado en los cuaterniones y vectores de Pauli para describir el operador asociado con múltiples láminas birrefringentes y sus efectos sobre un estado de luz totalmente polarizado, algo conocido como placas de onda compuestas y que se relaciona con la solución de uno de los problemas principales de este trabajo; la despolarización a través de múltiples láminas birrefringentes. Lo descrito en dicha sección no es de mi autoría sino que es fruto de una colaboración conjunta con *Jhon Pabón*, un colega

de investigación del grupo de investigación GOTS.

En la sección 1.6 se introducirá uno de los principales resultados de mi trabajo. En esta se describirá el formalismo teórico de estados de polarización dependientes del tiempo y sus transformaciones. Esto con el objetivo de construir un formalismo para estados parcialmente polarizados considerándolos como vectores de Jones que varían en el tiempo, algo vital para la teoría unida de la polarización y la coherencia con la que se quiere enfocar la solución del problema de investigación en este texto. De nuevo, lo descrito en dicha sección no es de mi completa autoría, es fruto de los incontables momentos de discusión e intercambio de ideas con todos mis compañeros y amigos pertenecientes al grupo GOTS y, por supuesto, el profesor *Rafael Torres*.

1.1. Estado de polarización de la luz

EL estudio de la polarización de la luz formalmente inicia con el estudio de las ondas electromagnéticas. Esta propiedad de la luz posee históricamente gran relevancia ya que fue una de las razones por la cual la comunidad científica decidió adoptar el modelo electromagnético de la luz de manera contundente (Goldstein, 2017). En 1902 *H. Lorentz* y *P. Zeeman* lograron explicar mediante la teoría del electromagnetismo de Maxwell la separación y el tipo de polarización de las líneas espectrales de una lámpara de gas de Sodio bajo la influencia de un campo magnético (Lorentz, 1899; ZEEMAN, s.f.). En esta estructura matemática de la teoría de Maxwell se puede visualizar cómo la polarización no es nada más que el carácter vectorial de la radiación y además posee unas propiedades de una estructura matemática bastante útil para describir rotaciones, un espinor. Adicionalmente, la polarización juega un papel fundamental en la tecnología actual. Desde el desarrollo de la electrodinámica cuántica y la óptica cuántica se conoce que la polarización de la luz proviene del momento angular de espín de los fotones (Saito, 2023), esto ha permitido el avance y nacimiento de tecnologías como la computación cuántica, los sistemas de distribución de clave cuántica y la comunicación cuántica. Por otra parte, son muchos los dispositivos ópticos utilizados para aplicaciones de diagnóstico médico y análisis de tejidos que utilizan la polarización como la microscopía de polarización o la tomografía de coherencia óptica sensible a la polarización. Por todo esto, en esta sección además de estudiar la estructura matemática que mejor describe la polarización de la luz, con el propósito de introducir el formalismo moderno de la polarización, también introduciremos la noción del concepto de espinor con el objetivo de estar al tanto de una de las herramientas matemáticas más utilizadas en la tecnología e investigación en física actual.

1.1.1. Elipse y estado de polarización

Empecemos inicialmente por definir el estado de polarización de un haz de luz. Para ello hay que partir de las ecuaciones de onda electromagnéticas en el vacío las cuales son bien conocidas por cualquier estudiante y profesional en Física. Estas tienen la siguiente forma:

$$\nabla^2 \mathbb{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

donde el campo eléctrico $\mathbb{E}(\mathbf{r}, t)$ y el campo magnético $\mathbb{B}(\mathbf{r}, t)$ están ligados mediante las cuatro ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes

$$\nabla \cdot \mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbb{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.6)$$

Las soluciones de las ecuaciones de onda no satisfacen automáticamente las ecuaciones de Maxwell. Para encontrar las soluciones que coinciden con campos eléctricos y magnéticos Físicos debemos tomar las soluciones de la ecuación de onda y usar las ecuaciones de Maxwell. Al momento de considerar las soluciones particulares de las ecuaciones 1.1 y 1.2, que corresponden con una función vectorial equivalente a una onda plana armónica

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad y \quad \mathbb{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.7)$$

e introducirlas en las ecuaciones de Maxwell obtenemos las relaciones entre el campo eléctrico y magnético. El resultado principal es que el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$ y a su vez, estos son ortogonales a la dirección de propagación \mathbf{k} lo que hace de las ondas electromagnéticas del tipo transversales. Adicionalmente, encontramos que la magnitud o la amplitud del campo eléctrico $|\mathbf{E}_0|$ es c veces mayor que la amplitud del campo magnético $|\mathbf{B}_0|$, por lo que el hecho de que $|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0|$ implica que, en el estudio de la interacción de la radiación electromagnética con la materia, el campo eléctrico $\mathbb{E}(\mathbf{r}, t)$ sea el más relevante en la mayoría de los casos, exceptuando sistemas donde el campo magnético a pesar de ser débil es relevante para las interacciones como en un gas de plasma. Adicionalmente, a partir del campo eléctrico se puede calcular el campo magnético, lo que significa que la parte real e imaginaria del campo eléctrico son las variables conjugadas del campo electromagnético. Por tanto, es en él que centraremos nuestra atención en este

documento. Estos resultados son aplicables cuando consideramos la propagación de radiación en el vacío o en medios lineales homogéneos, para otro tipo de medios y condiciones de frontera estos resultados ya no son válidos. Un desarrollo más elaborado de lo descrito en este párrafo puede ser encontrado en cualquier libro de teoría electromagnética como (Born y Wolf, 2013; Zangwill, 2013). Sin embargo, debido a la naturaleza del problema de investigación en este documento no hará falta entrar en más detalle de teoría electromagnética.

La solución particular dada por la ecuación 1.7 a la ecuación de onda de campo eléctrico puede ser expresada explícitamente en una forma vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \\ \mathcal{E}_z e^{i\phi_z} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.8)$$

La cantidad vectorial \mathbf{E}_0 asociada con la onda eléctrica se conoce con el nombre de **polari- zación**; es el lugar geométrico que describe el campo eléctrico en un punto \mathbf{r} , en el instante de tiempo t . Sin embargo, como se ha escogido una onda plana que se propaga en la dirección \mathbf{k} , sin perder generalidad se puede escoger un sistema de coordenadas rectangulares en el que $\mathbf{k} = (0, 0, k)^T$, es decir, en el que la dirección de propagación coincide con el eje z . En este caso la ecuación 1.8 toma la siguiente forma

$$\mathbb{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.9)$$

la cual se trata de las ecuaciones paramétricas de una *hiperelipse* en el hiperplano complejo de \mathbb{C}^2 al que pertenece el campo eléctrico. Para demostrar esto, tomemos las siguientes cantidades:

$$\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} = e^{i(kz - \omega t)} e^{i\Delta\phi} \quad y \quad \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_x} = e^{i(kz - \omega t)} e^{-i\Delta\phi}, \quad (1.10)$$

donde $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$, y al efectuar la siguiente operación

$$\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} - \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_x} \right) \overline{\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} - \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_x} \right)},$$

donde la sobrelínea en una cantidad \overline{X} indica el complejo conjugado, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{|E_x|^2}{\mathcal{E}_x^2} + \frac{|E_y|^2}{\mathcal{E}_y^2} - 2 \frac{\operatorname{Re}\{E_x \overline{E_y}\}}{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y} \cos \Delta\phi = \sin^2 \Delta\phi, \quad (1.11)$$

la cual es la ecuación de una hiperelipse en el espacio hipergeométrico \mathbb{C}^2 al que pertenece el campo eléctrico $\mathbb{E}(z, t)$. Si se toma la parte real o imaginaria de $\mathbb{E}(z, t)$, la ecuación

1.11 representará entonces una elipse en un plano \mathbb{R}^2 ; a esto se le conoce como **elipse de polarización**, y es el lugar geométrico que describe la parte real del vector campo eléctrico.

En la ecuación 1.11 se nota que la forma y orientación de la elipse de polarización depende solamente de las amplitudes \mathcal{E}_x y \mathcal{E}_y , y de la diferencia de fase $\Delta\phi$, por lo tanto, el **estado de polarización** de una onda electromagnética se puede definir como un vector normalizado

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x e^{i\phi_x} \\ \varepsilon_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

que pertenece también a un espacio complejo \mathbb{C}^2 . Además, el estado de polarización permanece invariante bajo el producto de fases y amplitudes globales, es decir,

$$Ae^{i\alpha}\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}.$$

Ya que siempre es posible normalizar, esto es una de las propiedades de los vectores de Jones los cuales se abordarán más adelante. Este vector se encuentra expresado en una base de estados de polarización lineal horizontal y vertical respectivamente, por

$$\hat{\mathbf{e}} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + E_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Sin embargo, este vector puede ser expresado en otras bases diferentes a los estados lineales debido a la naturaleza de su estructura matemática, esto será abordado en una sección posterior. Nuestra tarea ahora es analizar qué propiedades tiene este vector y mostrar que tiene una estructura matemática conocida como espinor.

Como ya se demostró con la ecuación 1.11, el estado de polarización corresponde con una elipse que traza el vector campo eléctrico a medida que se propaga en todos los puntos de su frente de onda. Esta elipse, en general, tiene un ángulo de elipticidad χ definido como

$$\tan \chi = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \quad (1.14)$$

y orientación α , definido como el ángulo entre el eje x del sistema de coordenadas y el eje mayor de la elipse (ver figura 1b). Estos ángulos dependen de las amplitudes ε_i y las fases ϕ_i del estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$. Para facilitar la identificación de los estados de polarización y así, hacer más sencillos los cálculos y el desarrollo teórico, es útil expresar el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}} = |\varepsilon_i, \phi_i\rangle$ ya no en términos de las amplitudes y fases sino en términos de los ángulos característicos de la elipse de polarización $\hat{\mathbf{e}} = |\alpha, \chi\rangle$.

Para encontrar la relación entre $|\varepsilon_i, \phi_i\rangle$ y $|\alpha, \chi\rangle$, consideremos primero un estado de polarización cuya elipse está alineada con respecto a los ejes principales y en sentido horario, similar a lo mostrado en la figura 1a. Para este caso la relación entre las dos representaciones

$|\varepsilon_i, \phi_i\rangle$ y $|\alpha, \chi\rangle$ es inmediata. Es inmediato notar que para un estado de polarización elíptico de estas características se tienen que cumplir las condiciones $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ y $\phi_y - \phi_x = \pi/2$. Para determinar el valor de las fases ϕ_i podemos escoger un caso particular en el que $\hat{\mathbb{E}}(t=0)$ coincide con el eje E_y , esto se cumple cuando $\phi_x = 0$ y $\phi_y = \pi/2$. Para las amplitudes, por virtud de la definición del ángulo de elipticidad (ecuación 1.14), se obtiene que $\varepsilon_x = \cos \chi$ y $\varepsilon_y = \sin \chi$. De esta manera el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}} = |\alpha = 0, \chi\rangle$ se expresa como sigue

$$\hat{\mathbf{e}} = |0, \chi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

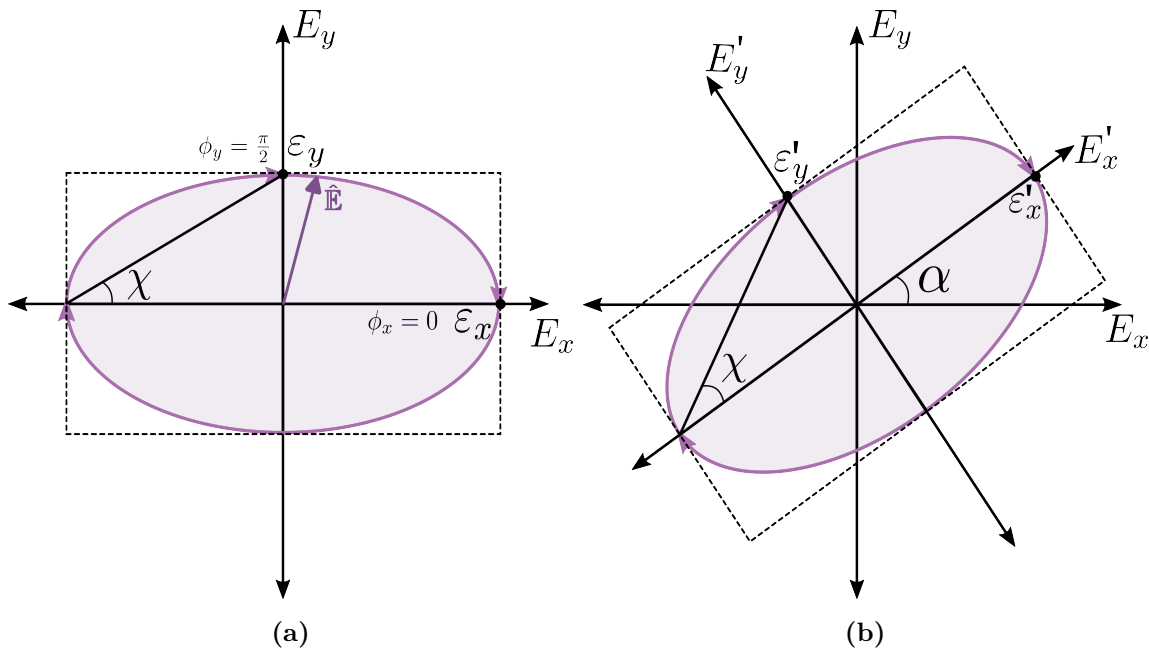


Figura 1: a) Elipse de polarización con elipticidad χ alineada con respecto a un sistema de coordenadas (E_x, E_y) , es decir, $\alpha = 0$. En el caso más simple $\phi_y = \pi/2$ y $\phi_x = 0$. b) Elipse de polarización con elipticidad χ y un ángulo de orientación α .

Para encontrar la expresión del estado de polarización para cualquier ángulo de orientación α se debe realizar una transformación de coordenadas. En particular, una rotación del sistema de coordenadas como se observa en la figura 1b. Algebraicamente esto se representa como sigue:

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{R}^{-1}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}',$$

donde $\hat{R}^{-1}(\alpha)$ es la matriz de rotación del sistema de coordenadas primado al sistema de coordenadas donde la elipse de polarización está orientada un ángulo α . De esta manera el

estado de polarización general en la representación $|\alpha, \chi\rangle$ se calcula como sigue:

$$|\alpha, \chi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} |0, \chi\rangle, \quad (1.16)$$

y esto da como resultado

$$|\alpha, \chi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \chi - i \sin \alpha \sin \chi \\ \sin \alpha \cos \chi + i \cos \alpha \sin \chi \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

este es el estado de polarización en términos de los ángulos principales de la elipse para un sistema de coordenadas cartesiano (de estados de polarización lineales). Este resultado se retomará en una sección posterior, pero por ahora lo que se puede rescatar es que las componentes x e y de $|\alpha, \chi\rangle$, en una base de coordenadas de estados de polarización lineal, se pueden expresar en términos de los ángulos α y χ . Estos ángulos permiten visualizar geoméricamente los estados $|\alpha, \chi\rangle$ ya que se pueden intuir como los asociados a un sistema de coordenadas esférico con un vector de radio unitario; esto debido a que $\langle \alpha, \chi | \alpha, \chi \rangle = 1$. Nos queda ver ahora con qué clase de espacio real \mathbb{R}^3 está asociado este vector de \mathbb{C}^2 .

1.1.2. Proyección estereográfica de los estados de polarización

En 1892 *H. Poincaré* introdujo dos formas de representar el estado de polarización de una onda electromagnética bastante útiles en su libro *théorie mathématique de la lumière* ([Poincaré, 1892](#)). La primera de estas es la representación sobre un plano complejo. Esta representación consiste en darse cuenta que, de acuerdo a la ecuación 1.12, para conocer el estado de polarización de una onda electromagnética es suficiente con saber la relación entre las amplitudes o amplitud relativa $\varepsilon_x/\varepsilon_y$ y la diferencia de las fases o fase relativa $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$. Por lo que es conveniente definir una cantidad imaginaria ζ que contenga esa información

$$\zeta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} e^{i\Delta\phi}. \quad (1.18)$$

Así, ζ asocia un punto en el plano complejo con un estado de polarización. Usando la relación encontrada en la ecuación 1.17, se puede expresar ζ en términos de los ángulos característicos de la elipse de polarización ([Azzam y Bashara, 1977](#))

$$\zeta = \frac{\tan \alpha + i \tan \chi}{1 - i \tan \alpha \tan \chi}, \quad (1.19)$$

de esta manera, el número complejo ζ tiene una correspondencia con los estados $|\alpha, \chi\rangle$ y por lo tanto, da la posibilidad de expresar los estados de polarización como un punto en un

espacio geométrico; el plano del espacio \mathbb{C} . Esta representación geométrica de los estados de polarización se conoce con el nombre de **representación en el plano complejo cartesiano**.

Veamos cómo se visualizan las elipses de polarización en este plano complejo. Para esto conviene analizar los casos límites. En el caso cuando $\chi = 0$, es decir, los estados de polarización lineales con orientación arbitraria $\alpha = (-\pi/2, \pi/2)$, el número complejo ζ toma solamente un valor real, por lo tanto, en esta representación todos los estados de polarización lineales se encuentran en el eje horizontal de los reales, donde el estado de polarización horizontal está asignado al origen de coordenadas ($0 + i0$), el vertical se encuentra en el infinito ($\infty + i0$), y en los puntos $(\pm 1 + i0)$ están los estados lineales a $\pm 45^\circ$.

Otro caso particular es cuando $\alpha = 0$ y $\chi = (-\pi/2, \pi/2)$, aquí los estados de polarización se encuentran sobre el eje vertical de los imaginarios. Los estados sobre este eje son todos los estados con todas las posibles elipticidades que están orientados a un ángulo $\alpha = 0$, especialmente vemos que en el punto ($0 + i0$) está de nuevo el estado de polarización horizontal, el vertical se encuentra en ($0 + i\infty$) y en los puntos ($0 \pm i$) se encuentran los estados de polarización circular en sentido horario y antihorario respectivamente.

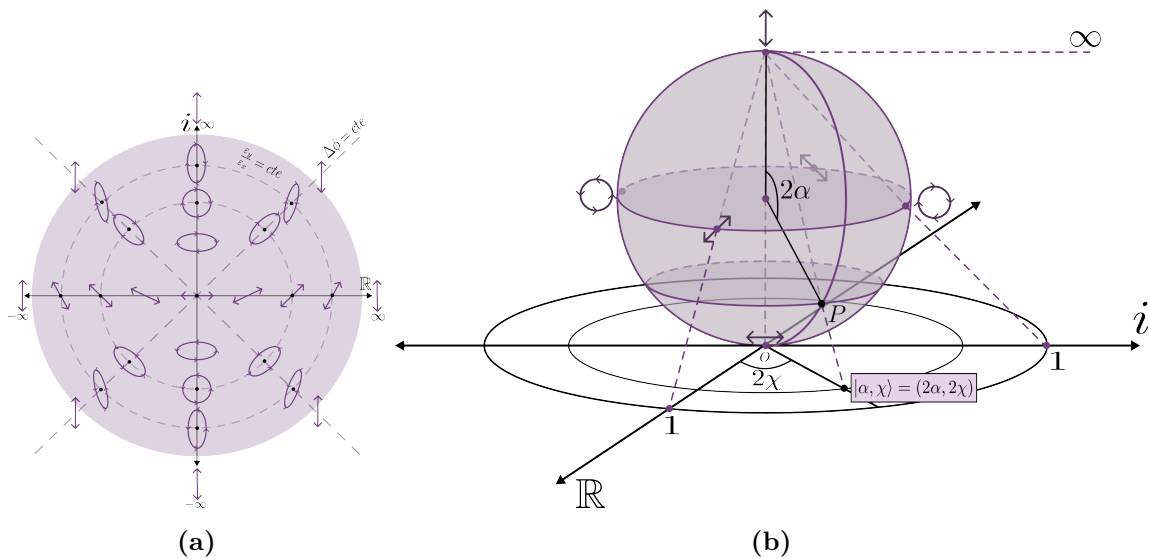


Figura 2: a) Representación de los estados de polarización ζ en el plano complejo cartesiano con respecto a una base de estados lineales Horizontal y Vertical. b) Proyección estereográfica de una esfera de diámetro unitario sobre el plano complejo en una base de estados lineales. Hay una correspondencia de cada punto P de la esfera con cada punto del plano (excepto por el polo superior que se encuentra indefinido, pero al que le corresponde el estado de polarización que se encuentra en el infinito en el plano) y el ángulo azimutal y polar de la esfera coinciden con los ángulos principales de la elipse $(2\chi, 2\alpha)$. En general, cada punto de la esfera con su respectivo punto diametralmente opuesto tiene asociado un plano de estados de polarización ζ' .

Si se sigue analizando de esta manera cuáles estados de polarización están asignados a cada punto del plano complejo, se encuentra que en origen de coordenadas ($0 + i0$) está el estado horizontal, en todos los puntos ($\infty + i\infty$) el estado vertical, y en los demás puntos todas las posibles elipses de polarización. De esta manera obtenemos una visualización gráfica como la que se observa en la figura 2a. El hecho de que en el origen y en el infinito se encuentren los estados de polarización horizontal y vertical respectivamente no es casualidad, es una consecuencia de haberlos escogido como base, es decir, por haber usado la ecuación 1.17. Si se hubiese escogido como base cualquier par de estados ortonormales, como el circular horario y antihorario, estos estados base son los que ocuparían dichos lugares en el plano complejo y como consecuencia los patrones del plano de polarización cambiarán.

El plano complejo donde se encuentra ζ puede asociarse con otro espacio geométrico que permite ver propiedades más generales y que se conservan frente a estos cambios de base. Nótese que así como cada punto ζ tiene una correspondencia con un estado de polarización, se puede encontrar una relación del plano \mathbb{C} al que pertenece ζ con otro espacio geométrico. Podemos encontrar una relación con los puntos de la superficie de una esfera de diámetro unitario y los puntos del plano en el que se encuentra ζ , a esto se le conoce como **proyección estereográfica**.

Como se observa en la figura 2b cada punto de la esfera está conectado con un punto del plano. En general, los círculos de radio $\varepsilon_y/\varepsilon_x = cte$ del plano complejo (figura 2a) tienen una correspondencia con los paralelos de la esfera, y las rectas dadas por $\Delta\phi = cte$ con los meridianos de la esfera. Adicionalmente, si se relaciona el ángulo azimutal de la esfera, es decir, el ángulo entre el eje real (\mathbb{R}) y un punto en el plano con el ángulo de elipticidad de las elipses de polarización se encuentra que el ángulo azimutal es igual 2χ . De la misma manera, el ángulo polar o de colatitud está relacionado con el ángulo de orientación de la elipse de polarización, en este caso la colatitud es igual a 2α . Así, a todo punto P sobre la esfera le corresponde un estado de polarización que está etiquetado con las coordenadas esféricas $P = |\alpha, \chi\rangle = (1/2, 2\alpha, 2\chi)$.

Particularmente, el polo sur de la esfera corresponde con el estado de polarización horizontal, y el polo norte se conecta con todos los puntos que están en el infinito, que es donde está el estado de polarización vertical. De esta manera, los polos de la esfera coinciden con los estados de polarización base que se ha escogido en este desarrollo. El ecuador de la esfera por su parte, está conectado con todos los puntos del círculo de radio unitario en el plano complejo, estos son todas las elipses de polarización donde se cumple que $\varepsilon_y/\varepsilon_x = 1$, incluyendo los estados lineales a $\pm 45^\circ$ y los dos estados circulares.

Pensemos ahora en el proceso inverso, tomando un plano cuyo origen de coordenadas coincide con cualquier punto P de la esfera se obtendrá entonces la representación de ζ en una base de estados de polarización que corresponde con la del punto P y el punto diametralmente

opuesto. Por lo tanto, todo punto de la esfera tiene un plano tangente asociado con una representación diferente de ζ y además, cualquier par de puntos diametralmente opuestos sobre la esfera son candidatos a ser bases ortonormales del estado de polarización.

Algo inmediato de concluir es que bajo estas transformaciones de cambio de base los ángulos 2α y 2χ , los cuales etiquetan cada estado de polarización sobre la esfera, permanecen invariantes. Lo mismo sucede bajo transformaciones de rotación alrededor de cualquier eje de la esfera. En otras palabras, el patrón de estados de polarización sobre la esfera permanece invariante bajo transformaciones de rotación y cambio de base, los cuales son elementos del grupo $SO(3)$. Consecuentemente, como existe una correspondencia de los elementos de un espacio vectorial \mathbb{C}^2 , al que pertenece el estado de polarización \hat{e} , y un subespacio de \mathbb{R}^3 , que es la superficie de esfera de diámetro unitario podemos deducir que los estados de polarización \hat{e} son espinores. Dicho de una manera más formal, hay un homomorfismo de los elementos del grupo $SU(2)$ que actúan sobre los vectores en \mathbb{C} con los elementos del grupo $SO(3)$ que actúan sobre los vectores de \mathbb{R}^3 sobre la superficie de la esfera. Esto es en esencia la definición de la **representación espinorial**. En la siguiente sección se explicará en detalle todas las operaciones y el formalismo algebraico de esta representación, que es comúnmente conocida como los vectores y matrices de Jones.

1.1.3. Esfera de Poincaré

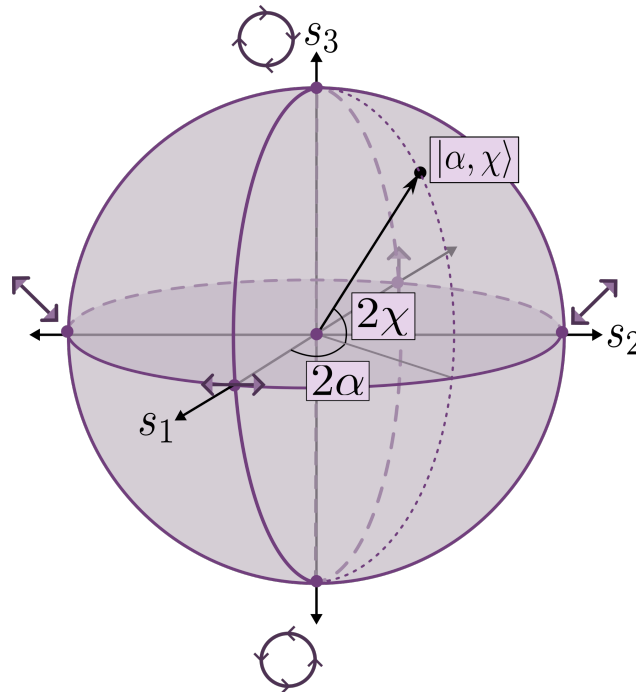


Figura 3: Esfera de Poincaré, es la proyección estereográfica de ζ tomando como estados base los estados de polarización circular.

Así como el figura 2b tenemos la proyección estereográfica tomando como base los estados lineales, lo más común en la literatura es tomar como base de la representación los estados de polarización circular en sentido horario y antihorario. En este caso se obtiene una esfera cuyos polos son estos estados circular base y el ecuador corresponde con todos los posibles estados lineales. En esta representación el ángulo de latitud corresponde con 2χ y el ángulo azimutal con 2α . De esta manera, cualquier punto sobre la esfera, al que le corresponde un estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$, puede expresarse como un vector normalizado $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ que se encuentra sobre la superficie de una esfera de radio unitario :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\chi \\ \cos 2\alpha \sin 2\chi \\ \sin 2\chi \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

se cumple entonces que $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_0^2$. A estas cuatro cantidades s_i ($i = 0, 1, 2, 3$) se les conoce como los **parametros de Stokes** y juegan un papel muy importante en la descripción de la polarización de la luz y sus transformaciones. Una representación gráfica de la esfera de Poincaré se observa en la figura 3. Por convención se escoge un sistema de ejes coordenados que llevan el nombre de los parámetros de Stokes s_1 , s_2 y s_3 , siendo s_3 el equivalente al eje z que pasa por dos polos de la esfera.

1.2. Vectores y matrices de Jones

Como ya se vio en la sección anterior, el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ dado por la ecuación 1.12 es un espinor llamado vector de Jones y este representa una elipse de polarización que a su vez corresponde con un punto en la esfera de Poincaré. Examinemos ahora cómo las transformaciones lineales que sufren estos vectores equivalen a procesos físicos que sufren los haces de luz a medida que se propagan por medios, y además, cómo estos se visualizan en la esfera de Poincaré.

Primero debemos introducir un producto interno entre los vectores de Jones. Debido a que pertenecen a un espacio \mathbb{C}^2 el producto interno entre ellos viene dado por:

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = (a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2), \quad (1.21)$$

donde \bar{b}_i indica el complejo conjugado. De esta manera podemos comprobar que dos puntos diametralmente opuestos en la esfera de Poincaré son ortogonales, es decir, que su producto interno será igual a cero. Para un vector de Jones arbitrario $\hat{\mathbf{a}}$ expresado en la base de estados lineales

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \chi - i \sin \alpha \sin \chi \\ \sin \alpha \cos \chi + i \cos \alpha \sin \chi \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

su correspondiente vector diametralmente puesto $\hat{\mathbf{a}}_-$ en la representación de la esfera de Poincaré será aquel en el que $\alpha_- = \alpha$ y $\chi_- = \chi - \pi/2$. De esta manera

$$\hat{\mathbf{a}}_- = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\chi - \pi/2) - i \sin(\alpha) \sin(\chi - \pi/2) \\ \sin(\alpha) \cos(\chi - \pi/2) + i \cos(\alpha) \sin(\chi - \pi/2) \end{pmatrix},$$

lo que significa que

$$\hat{\mathbf{a}}_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \chi + i \sin \alpha \cos \chi \\ \sin \alpha \sin \chi - i \cos \alpha \cos \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\bar{a}_2 \\ -i\bar{a}_1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

y esto implica que el producto interno

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_- = -ia_1a_2 + ia_1a_2 = 0, \quad (1.24)$$

es decir, un estado de polarización arbitrario $\hat{\mathbf{e}}$ al que le corresponde un punto sobre la esfera de Poincaré y su punto diametralmente opuesto al que le corresponde el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}_-$ son estados ortonormales y por lo tanto, conforman una base de los estados de polarización (Gori y cols., 1997).

1.2.1. Cambio de Base

Así como podemos expresar el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ en una base de estados de polarización horizontal y vertical, es posible realizar un cambio de base para expresar los estados de polarización en cualquier base de estados ortonormales elípticos arbitrarios $\hat{\mathbf{r}}_+$ y $\hat{\mathbf{r}}_-$ caracterizados por los ángulos α y χ . Para ello se debe encontrar la matriz de transformación de cambio de base \hat{T}_\pm de una base de estados de estados elípticos en la base de estados lineales, esta se construye a partir de los estados dados por las ecuaciones 1.22 y 1.23, de esta manera:

$$\hat{T}_\pm = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \chi - i \sin \alpha \sin \chi & \cos \alpha \sin \chi + i \sin \alpha \cos \chi \\ \sin \alpha \cos \chi + i \cos \alpha \sin \chi & \sin \alpha \sin \chi - i \cos \alpha \cos \chi \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Por lo tanto, las componentes E_+ y E_- de un estado de polarización arbitrario en una base de estados elípticos arbitrarios pueden determinarse al operar la matriz de transformación inversa \hat{T}_\pm^{-1} con el estado de polarización expresado en una base de estados lineales:

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \hat{T}_\pm^{-1} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Una base de especial interés es la de estados circulares, identificados con $\chi = \pm 45^\circ$, para este caso la matriz de transformación es

$$\hat{T}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

y aplicando la matriz inversa, como en la ecuación 1.26, se obtendrá la expresión del vector de Jones en una base de estados circulares:

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \chi - \sin \chi)e^{i\alpha} \\ (\cos \chi + \sin \chi)e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

1.2.2. Efecto de un retardador

Es bien conocido que los medios birrefringentes son utilizados como dispositivos ópticos que permiten cambiar el estado de polarización de un haz de luz. Esto debido a que introducen una diferencia de fase o retardo $\delta = \delta_1 - \delta_2$ entre dos componentes ortonormales del campo eléctrico que forman una base de estados de polarización, es decir, entre cualquier par de bases elípticas de polarización que son diametralmente opuestas en la representación de la esfera de Poincaré. La acción de un birrefringente sobre un estado de polarización inicial $\hat{\mathbf{e}}$ puede ser modelado como una transformación lineal de los vectores de Jones. Particularmente, se representa como una transformación de rotación perteneciente al grupo SU(2).

Un retardador o placa de onda es un material (cristal) birrefringente al que se le ha realizado un corte transversal con respecto a sus ejes ópticos principales. Usualmente es una lámina con un espesor l y una birrefringencia $\Delta n = n_1 - n_2$, que es la diferencia entre los dos índices de refracción del material. Así, un retardador cuyos ejes principales de polarización coinciden con la base de estados en la que se está expresando el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$, tiene la siguiente forma diagonal

$$\hat{R}_\delta = \begin{bmatrix} e^{i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

donde

$$\delta_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_i l, \quad (1.30)$$

y

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n l, \quad (1.31)$$

es el retardo, siendo Δn la birrefringencia del material y l la longitud que recorre el haz de luz dentro del material. El retardo de la lámina birrefringente entonces depende de la longitud de onda en el vacío y el camino óptico $\Delta n l$ que recorre el haz de luz dentro del material. Una conclusión esencial e inmediata que podemos deducir de la forma del operador \hat{R}_δ es que, debido a que es diagonal, sus estados propios coinciden con los dos estados ortonormales elípticos arbitrarios $\hat{\mathbf{f}}_1$ y $\hat{\mathbf{f}}_2$ que conforman una base del estado de polarización. Por lo tanto, el operador diagonal \hat{R}_δ representa un **retardador con estados propios elípticos** que equivalen a la base de estados de polarización que se esté utilizando.

Ahora veamos el efecto que tiene la operación de la matriz \hat{R}_δ sobre un estado de polarización en la representación $|\alpha, \chi\rangle$. Si se toma un estado de polarización en la base de estados de circulares, es decir, la ecuación 1.28 entonces el operador \hat{R}_δ dado por la ecuación 1.29 equivale a un retardador con estados propios circulares. Al realizar la operación se obtiene el siguiente resultado:

$$\hat{R}_\delta|\alpha, \chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \chi - \sin \chi)e^{i(\alpha+\delta)} \\ (\cos \chi + \sin \chi)e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \chi - \sin \chi)e^{i(\alpha+\delta/2)} \\ (\cos \chi + \sin \chi)e^{-i(\alpha+\delta/2)} \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Se observa entonces que el efecto que produce es el de cambiar el ángulo de orientación $\alpha \rightarrow \alpha + \delta/2$, lo que equivale a una rotación de un ángulo δ alrededor del eje s_3 en la representación de la esfera de Poincaré. Similarmente, si se aplica la matriz \hat{R}_δ a un estado de polarización expresado en una base de estados lineales horizontal y vertical (ecuación 1.17), entonces la matriz \hat{R}_δ representa un retardador con estados propios lineales y se puede demostrar que el efecto que tiene es realizar una rotación de un ángulo δ al rededor del eje s_1 de la esfera de Poincaré. De esta manera se observa que las operaciones del grupo SU(2) equivalen a operaciones del grupo SO(3), es decir, operaciones de rotación a un vector de un espacio \mathbb{C}^2 equivalen a una rotación de un vector en \mathbb{R}^3 .

En general, el operador \hat{R}_δ puede sufrir una transformación de cambio de base. Esto se hace con el objetivo de encontrar la representación de un retardador con estados propios elípticos que son diferentes a la base escogida. Para hacer esto se opera la matriz \hat{R}_δ con una matriz de cambio de base \hat{T} entre dos bases cualesquiera, de la siguiente manera

$$\hat{R}_{\mathbf{r}_\pm, \delta} = \hat{T}^{-1} \hat{R}_\delta \hat{T}, \quad (1.33)$$

donde el subíndice \mathbf{r}_\pm representa los estados propios del retardador expresados en la otra base.

Para obtener una expresión explícita que ejemplifique el concepto de un retardador con estados propios elípticos, intentemos encontrar la expresión para el operador de un retardador con estados propios elípticos arbitrarios en la base de estados lineales horizontal y vertical. Para ello, se toma la matriz de transformación T_\pm dada por la ecuación 1.25 y se realiza el cambio de base sobre el operador \hat{R}_δ , tras algunas simplificaciones trigonométricas se encuentra el siguiente resultado

$$\hat{R}_{\mathbf{r}, \delta} = \hat{T}_\pm^{-1} \hat{R}_\delta \hat{T}_\pm = \begin{bmatrix} \cos \delta/2 + i(\cos 2\alpha \cos 2\chi) \sin \delta/2 & (i \cos 2\alpha \sin 2\chi - \sin 2\chi) \sin \delta/2 \\ (i \cos 2\alpha \sin 2\chi + \sin 2\chi) \sin \delta/2 & \cos \delta/2 - i(\cos 2\alpha \cos 2\chi) \sin \delta/2 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

y usando la ecuación 1.20 se puede escribir la matriz $\hat{R}_{\mathbf{r}, \delta}$ en términos de las proyecciones del estado propio \mathbf{r} del retardador en los ejes coordenados de la esfera de Poincaré, es decir, sus

parámetros de Stokes asociados

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta} = \hat{T}_{\pm}^{-1} \hat{R}_{\delta} \hat{T}_{\pm} = \begin{bmatrix} \cos \delta/2 + ir_1 \sin \delta/2 & (ir_2 - r_3) \sin \delta/2 \\ (ir_2 + r_3) \sin \delta/2 & \cos \delta/2 - ir_1 \sin \delta/2 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Esta matriz puede ser expandida en términos de unas matrices base, las matrices de Pauli, así

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mathbf{r},\delta} &= \cos(\delta/2)\hat{\sigma}_0 + i \sin(\delta/2)(r_1\hat{\sigma}_1 + r_2\hat{\sigma}_2 + r_3\hat{\sigma}_3) \\ &= \cos(\delta/2)\hat{\sigma}_0 + i \sin(\delta/2)\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde las matrices σ_i están definidas como sigue

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Algo interesante es que la forma en la que está representado el operador $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$, en la ecuación 1.36, permite expresarlo de la siguiente manera (Gori y cols., 1997)

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta} = e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{\delta}{2}}, \quad (1.38)$$

que es un resultado que evidencia que el formalismo de la polarización puede ser escrito en cuaterniones y vectores de Pauli. Estas son unas de las representaciones equivalentes del estado de polarización que son virtud de la estructura de álgebra geométrica que posee la polarización.

El efecto de un retardador elíptico $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ sobre un estado de polarización inicial $|\alpha, \chi\rangle$ se calcula algebraicamente de la siguiente manera:

$$|\alpha', \chi'\rangle = \hat{R}_{\mathbf{r},\delta} |\alpha, \chi\rangle, \quad (1.39)$$

y su representación en la esfera de Poincaré se puede observar en la figura 4. Aquí se ve como el efecto de un retardador sobre el estado de polarización se representa como un rotación con respecto de un eje en la esfera de Poincaré. Este eje pasa por los dos estados de polarización diametralmente opuestos que coinciden con los estados propios del operador $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ del retardador.

1.2.3. Rotación de un retardador y sistemas de retardadores

Por otro lado, si se quiere realizar otro tipo de transformación de coordenadas al operador del retardador, como una rotación en el espacio físico alrededor del eje de propagación, se sigue el mismo procedimiento

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}(\theta) = \hat{R}^{-1}(\theta) \hat{R}_{\mathbf{r},\delta} \hat{R}(\theta), \quad (1.40)$$

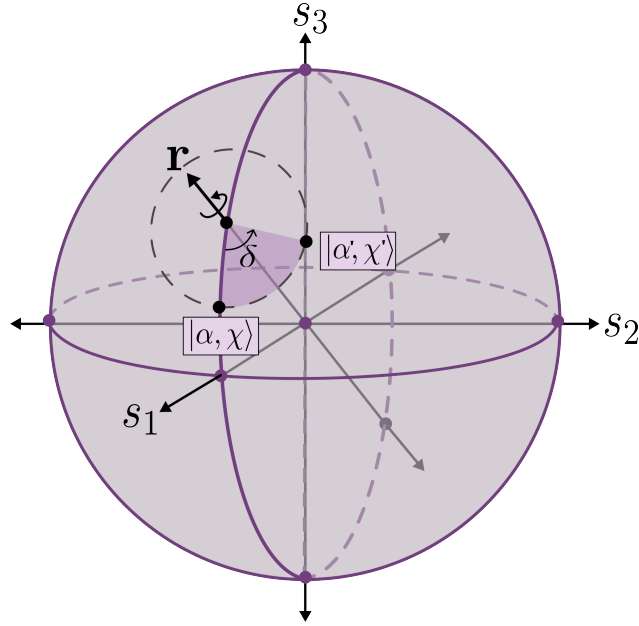


Figura 4: Representación del efecto de un retardador con estados propios elípticos \mathbf{r}_{\pm} y retardancia δ en la esfera de Poincaré. Es un rotación de un ángulo δ alrededor de un eje \mathbf{r} que pasa por los dos estados propios de polarización \mathbf{r}_{\pm} del retardador.

donde la matriz $\hat{R}(\theta)$ de rotación de coordenadas es

$$\hat{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

De manera general en este formalismo, si se quiere solucionar el problema de la transformación del estado de polarización de un haz de luz que atraviesa N láminas birrefringentes rotantes se debe realizar la transformación de los operadores correspondientes, es decir

$$|\alpha', \chi'\rangle = \prod_{i=1}^N \hat{R}_{\mathbf{r}_i, \delta_i}(\theta_i) |\alpha, \chi\rangle. \quad (1.42)$$

A este tipo de sistemas compuestos por múltiples retardadores se les conoce como placas de onda compuestas, y serán analizadas en una sección posterior.

1.2.4. Matriz de polarización

Como se ha visto, es bastante útil e intuitivo representar los estados de polarización junto con sus transformaciones en la esfera de Poincaré. Por lo tanto, sería conveniente encontrar una manera de poder extraer los parámetros de Stokes asociados con un vector de Jones al realizar sus transformaciones. Para hacer esto se puede pensar en el resultado que obtenido en la ecuación 1.36. De este se puede intuir, sin entrar en mucho formalismo, que las matrices

de Pauli son la conexión entre los vectores de Jones y las coordenadas de la esfera de Poincaré o los parámetros de Stokes. El paso que se debe seguir es “elevar” el estatus del vector de Jones al de una matriz. Esto significa que se pasará de una representación de los estados de polarización como un tensor de rango 1/2 (espinor de Pauli o vector de Jones) al de un tensor de rango 1 conocido como un vector de Pauli. Este vector de Pauli es el producto punto entre el vector de \mathbb{R}^3 que se construye con los parámetros de Stokes y el vector σ que se construye con las matrices de Pauli (Tudor, 2010).

La matriz de polarización \mathbf{J} se construye mediante el producto tensorial del vector de Jones (Baylis, Bonenfant, Derbyshire, y Huschilt, 1993)

$$\mathbf{J} = |\alpha, \chi\rangle\langle\alpha, \chi| = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{E_1} & \overline{E_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1\overline{E_1} & E_1\overline{E_2} \\ E_2\overline{E_1} & E_2\overline{E_2} \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

esta matriz también guarda toda la información relacionada con la polarización de la radiación electromagnética, pero lo más importante quizás es que la polarización ahora está expresada en términos de intensidades lo que permite la medición experimental de los estados de polarización en un laboratorio. En particular, se puede extraer la intensidad total, que es la traza de la matriz de polarización

$$I = \text{Tr}\{\mathbf{J}\} = E_1\overline{E_1} + E_2\overline{E_2}. \quad (1.44)$$

Ahora, esta matriz se puede entender como un vector llamado **vector de Pauli**, eso implica que tiene como base las matrices de Pauli. Entonces, si se intenta expandir la matriz \mathbf{J} en las matrices de Pauli obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2} s_i \hat{\sigma}_i, \quad (1.45)$$

y para determinar los coeficientes de expansión s_i , los cuales coinciden con los parámetros de Stokes, se usa la siguiente expresión

$$s_i = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i \mathbf{J}\}, \quad (1.46)$$

esto nos indica que la relación entre los parámetros de Stokes y los elementos de la matriz de polarización es la siguiente

$$\begin{aligned} s_0 &= J_{11} + J_{22}, \\ s_1 &= J_{11} - J_{22}, \\ s_2 &= J_{12} + J_{21}, \\ s_3 &= i(J_{21} - J_{12}). \end{aligned} \quad (1.47)$$

De esta manera, podemos encontrar el vector conformado por los parámetros de Stokes, y por lo tanto, el punto sobre la esfera de Poincaré asociado a un estado de polarización en la representación de los vectores de Jones.

La matriz de polarización también puede ser construida por un vector de Jones que es operado por una transformación lineal como las que hemos estudiado. Tomemos un vector de Jones $\hat{\mathbf{e}}$ el cual mediante una transformación lineal o matriz de Jones arbitraria \hat{T} se transforma en el vector $\hat{\mathbf{e}}'$

$$\hat{\mathbf{e}}' = \hat{T}\hat{\mathbf{e}}, \quad (1.48)$$

ahora se encuentra la matriz de polarización asociada con el vector $\hat{\mathbf{e}}'$

$$\mathbf{J}' = \hat{\mathbf{e}}' \otimes \hat{\mathbf{e}}' = \hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{e}}'^{\dagger} = (\hat{T}\hat{\mathbf{e}})(\hat{T}\hat{\mathbf{e}})^{\dagger}$$

y usando las propiedades de la adjunta $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \hat{T}(\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}^{\dagger})\hat{T}^{\dagger} \\ &= \hat{T}(\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}})\hat{T}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

notamos que $\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}}$ es la matriz de polarización \mathbf{J} asociada con el vector $\hat{\mathbf{e}}$ que no ha sufrido la transformación. Se obtiene así una regla de transformación para las matrices de polarización:

$$\mathbf{J}' = \hat{T}\mathbf{J}\hat{T}^{\dagger}, \quad (1.50)$$

De esta manera, las matrices de Polarización o los vectores de Pauli son una representación que permite representar los estados de polarización y también sus transformaciones.

1.3. Parámetros de Stokes y matrices de Mueller

Existe una equivalencia de la matriz de polarización y los parámetros de Stokes. Por lo tanto, así como se ha desglosado el formalismo de los vectores de Jones, las matrices de Jones y la matriz de polarización para representar los estados de polarización y sus transformaciones, se puede encontrar el formalismo para operar directamente con los parámetros de Stokes y las correspondientes matrices de Mueller. Esto es lo que se conoce como el **formalismo de Stokes-Mueller**

Para lograr el objetivo primero conviene vectorizar la matriz de polarización, es decir, organizar sus elementos en un vector de \mathbb{C}^4 de la siguiente manera:

$$\mathbb{X} = (J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22})^T, \quad (1.51)$$

este vector también puede ser obtenido mediante un producto directo o producto de kronecker (\times) del vector de Jones, es decir:

$$\mathbb{X} = \hat{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{e}}. \quad (1.52)$$

Se puede encontrar ahora una transformación que, dado el resultado obtenido en la ecuación 1.45, transforme el vector $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^4$ en el vector de Stokes $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^4$ cuyos elementos son los 4 parámetros de stokes. La transformación lineal \hat{A} que permite esto es la siguiente:

$$\mathbf{S} = \hat{A}\mathbb{X} \quad (1.53)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{12} \\ J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

De esta manera, se encuentra un vector de \mathbb{R}^4 cuyos elementos son los parámetros de Stokes. La idea de esto es poder operar con este vector para trabajar directamente con los parámetros de Stokes y sus transformaciones.

Todas las transformaciones lineales que ya se han estudiado con el formalismo de Jones, tales como la rotación del sistema de coordenadas o el efecto de una lámina retardadora se pueden representar como una matriz 4×4 llamada matriz de *Mueller* que opera sobre el vector de Stokes \mathbf{S} . La forma de estas matrices de Mueller asociada con cada proceso óptico puede ser determinada a partir de las matrices de Jones. Para ello, se toma la ecuación 1.52 y se usa para un vector de Jones al que se le aplica una transformación lineal \hat{T} , haciendo esto se obtiene

$$\mathbb{X}' = (\hat{T}\hat{\mathbf{e}} \times \overline{\hat{T}\bar{\mathbf{e}}}) \quad (1.55)$$

ahora se aplica la propiedad de las matrices bajo el producto directo $(AB \times CD) = (A \times C)(B \times D)$ y se obtiene:

$$\mathbb{X}' = (\hat{T} \times \overline{\hat{T}})\mathbb{X}, \quad (1.56)$$

donde $(\hat{T} \times \overline{\hat{T}})$ es una matriz de transformación de 4×4 que representa la transformación lineal que sufre el vector \mathbb{X} . Ahora, para obtener la matriz de Mueller \hat{M} se debe aplicar la transformación de representación \hat{A} sobre la matriz que se acaba de obtener, esto es:

$$\hat{M} = A(\hat{T} \times \overline{\hat{T}})A^{-1}. \quad (1.57)$$

Así, se encuentra un álgebra matricial que permite describir directamente las transformaciones del vector de Stokes y su representación inmediata sobre la esfera de Poincaré ([Azzam y Bashara, 1977](#); [Gil y Ossikovski, 2022](#)).

Siguiendo los mismos razonamientos que en el formalismo de Jones, en el formalismo de Stokes-Mueller también existe un producto interno. Sean dos vectores de Stokes \mathbf{S} y \mathbf{S}' el producto interno se define como el de un vector de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}' = \sum_{i=0}^3 s_i s'_i. \quad (1.58)$$

De nuevo, este mantiene la propiedad de que los vectores de Stokes asociados con puntos diametralmente opuestos sobre la esfera de Poincaré son ortogonales y por lo tanto, su producto interno es igual a cero. Por otra parte, como las matrices de Mueller representan dispositivos, procesos ópticos o rotaciones del sistema de coordenadas que se pueden aplicar en un cierto orden, la transformación más general de los vectores de Stokes a través de las matrices de Mueller se puede expresar como sigue

$$\mathbf{S}' = \prod_i \hat{M}_i \mathbf{S}. \quad (1.59)$$

Adicionalmente, las matrices de Mueller también tienen sus estados y valores propios que indican, por ejemplo, los ejes principales de una lámina birrefringente. De esta manera, el formalismo de Stokes-Mueller y el formalismo de Jones son equivalentes.

Otra manera de determinar los elementos de la matriz de Mueller asociada a una matriz de Jones se obtiene usando la ecuación 1.50 en las ecuaciones 1.46 y 1.45, haciendo esto se obtiene (Mandel y Wolf, 1995)

$$\begin{aligned} s'_j &= \text{Tr}\{\hat{T}\mathbf{J}\hat{T}^\dagger\sigma_j\}, \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\{\hat{T}s_k\sigma_k\hat{T}^\dagger\sigma_j\}, \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\{\hat{T}^\dagger\sigma_j\hat{T}s_k\sigma_k\}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Esta última ecuación tiene la forma de los elementos de un vector de Stokes que ha sufrido una transformación lineal, es decir, la ecuación 1.60 es equivalente a

$$s'_j = M_{jk}s_k, \quad (1.61)$$

por lo tanto, los elementos M_{jk} de la matriz de Mueller vienen dados por

$$M_{jk} = \frac{1}{2}\text{Tr}\{\hat{T}^\dagger\sigma_j\hat{T}\sigma_k\}, \quad (1.62)$$

la cual es equivalente a la ecuación 1.57. Así, esta metodología permite encontrar la matriz de Mueller asociada con la matriz de Jones \hat{T} .

1.3.1. Matriz de Mueller de un retardador

Si se toma la matriz de Jones \hat{R}_δ asociada con un retardador con estados propios lineales y con retardo δ (ver ecuación 1.29) y se usa la ecuación 1.62 se obtiene su equivalente matriz de Mueller:

$$R_{jk} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{R}_\delta^\dagger \sigma_j \hat{R}_\delta \sigma_k \right\}, \quad (1.63)$$

y en su forma matricial será:

$$\hat{R}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) & \frac{1}{2i} (e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2i} (e^{-i\delta} - e^{i\delta}) & \frac{1}{2} (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

Lo mismo se puede hacer para encontrar cualquier otra matriz de Mueller asociada a una matriz de Jones cualquiera.

1.4. Polarización con cuaterniones y vectores de Pauli

De acuerdo a la ecuación 1.45, el estado de polarización de un haz de luz se puede representar como el siguiente vector de pauli:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} s_0 \hat{\sigma}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.65)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ es el vector conformado por las matrices de Pauli y $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ el vector que representa los estados de polarización en la esfera de Poincaré. Nótese que las matrices $\hat{\sigma}_i$ actúan como una base del vector de polarización y forman un grupo cerrado bajo su producto matricial:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k. \quad (1.66)$$

Se puede escoger alguna otra base que cumpla con la misma condición. En particular, si se realiza el cambio de base (Pellat-Finet y Bausset, 1992)

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow -i\hat{\sigma}_i = \mathbf{q}_i, \quad (1.67)$$

se obtiene la representación de los cuaterniones la cual cumple con la siguiente relación de clausura bajo el producto cuaterniónico:

$$\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = -\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \mathbf{q}_k. \quad (1.68)$$

Esto implica que existe un isomorfismo entre los vectores de Pauli y los cuaterniones (Rao, 1988). Así, es posible escribir el estado de polarización como un **cuaternión** de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{e}} = s_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{q}, \quad (1.69)$$

donde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$. La parte escalar del cuaternión s_0 es la intensidad de la luz, mientras que el cuaternión puro $\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}$ es un punto, en la representación de los estados de polarización, sobre la esfera de Poincaré.

El interés de esta representación es que los operadores asociados con un retardador con estados propios elípticos $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ se pueden escribir como un cuaternión unitario. Usando el resultado obtenido en la ecuación 1.38 y realizando el cambio de base dado por la ecuación 1.67, obtenemos la representación del operador $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ en los cuaterniones:

$$\hat{R}_{\mathbf{q}_r,\delta} = e^{\mathbf{q}_r \frac{\delta}{2}} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{q}_r \sin \frac{\delta}{2}, \quad (1.70)$$

donde

$$\mathbf{q}_r = (\cos 2\chi \cos 2\alpha) \mathbf{q}_1 + (\cos 2\chi \sin 2\alpha) \mathbf{q}_2 + (\sin 2\chi) \mathbf{q}_3, \quad (1.71)$$

es un cuaternión unitario que tiene la representación de un punto en la esfera de Poincaré y define el eje alrededor del cual se efectúa la rotación, es decir, define los estados propios del retardador. Finalmente, la manera como actúa el operador $\hat{R}_{\mathbf{q}_r,\delta}$ sobre un estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ viene dado por:

$$\hat{\mathbf{e}}' = \hat{R}_{\mathbf{q}_r,\delta} \hat{\mathbf{e}} \hat{R}_{\mathbf{q}_r,\delta}^{-1} = e^{\mathbf{q}_r \frac{\delta}{2}} \hat{\mathbf{e}} e^{-\mathbf{q}_r \frac{\delta}{2}}, \quad (1.72)$$

donde los productos se realizan bajo la regla del producto cuaterniónico. Una de las ventajas inmediatas a notar de esta representación es que los operadores están escritos en términos explícitos de su fase δ y de sus estados propios dados por \mathbf{q}_r . Esto implica que las operaciones de cambio de base del estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ y de los operadores de rotación (los retardadores) son inmediatas de realizar.

1.5. Formalismo para placas de onda compuestas

Lo que se explicará a continuación es el primer aporte realizado en este trabajo y, como ya se había dicho al inicio del capítulo, surge como una colaboración con otro estudiante del grupo de GOTS cuyo tema de investigación comparte algo común con el mío; el estudio de las placas de onda compuestas. Los resultados que se describen aquí se pueden resumir en usar el formalismo de los vectores de Pauli y los cuaterniones para realizar el cálculo del operador

lineal asociado con un sistema óptico compuesto por múltiples retardadores dispuestos en cascada como una composición de retardadores; estos son las placas de onda compuestas. Inicialmente, este formalismo lo aplicamos para el caso particular de una biplaca, un sistema compuesto por la composición de dos retardadores lineales y los resultados fueron publicados en (Pabón y cols., 2023).

Si se tienen múltiples retardadores diferentes con operadores asociados $\hat{R}_{\mathbf{q}_i, \delta_i}$ entonces, en el formalismo de cuaterniones, el operador equivalente será el producto cuaterniónico:

$$\prod_i \hat{R}_{\mathbf{q}_i, \delta_i} = \prod_i \exp\left\{\mathbf{q}_i \frac{\delta_i}{2}\right\}. \quad (1.73)$$

En el caso cuando se tengan retardadores con el mismo estado propio \mathbf{q} y diferentes desfases δ_i el producto cuaterniónico se reduce a lo siguiente:

$$\prod_i \exp\left\{\mathbf{q} \frac{\delta_i}{2}\right\} = \exp\left\{\mathbf{q} \sum_i \frac{\delta_i}{2}\right\}, \quad (1.74)$$

que es la adición directa de los desfases en el operador.

Mas importante aun, por virtud de los teoremas de Jones (Hurwitz y Jones, 1941), el operador equivalente de múltiples retardadores es otro retardador y a su vez, este es equivalente a la composición de un operador de actividad óptica (retardador con estados propios circulares), y un retardador lineal. Escrito matemáticamente en el lenguaje de los cuaterniones esto es (Pabón y cols., 2023):

$$\begin{aligned} \prod_i \hat{R}_{\mathbf{q}_i, \delta_i} &= \prod_i \exp\left\{\mathbf{q}_i \frac{\delta_i}{2}\right\}, \\ &= \exp\left\{\mathbf{q}_e \frac{\delta_e}{2}\right\} = \exp\left\{\mathbf{q}_3 \frac{\varphi}{2}\right\} \exp\left\{\mathbf{q}_l \frac{\delta_l}{2}\right\}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

donde \mathbf{q}_e esta asociado con un vector en la esfera de Poincaré que representa el estado propio equivalente del sistema compuesto y δ_e el desfase equivalente que introduce. Por otro lado, \mathbf{q}_3 es un cuaternión que coincide con en el eje S_3 de la esfera de Poincaré, es decir, representa un retardador con estados propios circulares y φ es la actividad óptica que introduce. El cuaternión $\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_1 \sin 2\alpha + \mathbf{q}_2 \cos 2\alpha$ está asociado con un punto del ecuador en la esfera poincaré y representa los estados propios lineales (con orientación α) de un retardador con un desfase δ_l equivalente. De esta manera, usando las igualdades entre ambas representaciones se pueden hallar las características importantes de un sistema de placas compuestas como su desfase y estados propios equivalentes, y su correspondiente composición de actividad óptica y retardo lineal, de manera explícita sin recurrir a productos matriciales.

1.6. Transformaciones sobre estados de polarización dinámicos

En esta sección se dejaremos a un lado el formalismo para estados de polarización estáticos y se dará el primer paso y aporte en la solución del problema planteado en la introducción de este trabajo. Hasta ahora hemos tratado con estados de polarización estacionarios, es decir, que no dependen del tiempo debido a que toda la teoría se ha construido en base a ondas electromagnéticas monocromáticas o armónicas y se ignoró la solución más general de la función de onda; la superposición lineal de ondas armónicas. En esta sección se explorará la descripción del estado de polarización de este tipo de ondas mediante un vector de Jones dependiente del tiempo. Se estudiarán sus transformaciones y su representación en la esfera de Poincaré.

Empecemos por considerar las soluciones más generales de la función de onda del campo eléctrico. Estas se pueden expresar como una combinación lineal de la solución particular de ondas planas monocromáticas:

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}, \quad (1.76)$$

esta representa una onda policromática con un frente de onda arbitrario. Sin embargo, dejaremos a un lado la parte espacial y trataremos el caso que nos interesa que es la parte temporal. Nos concentraremos entonces en ondas policromáticas con un frente de onda plano, de esta manera los campos eléctricos que vamos a considerar son del tipo:

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}. \quad (1.77)$$

Debido a que el campo eléctrico es una señal analítica, es más conveniente expresarlo en su forma polar, la cual para este caso se expresa como sigue

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi(t))}, \quad (1.78)$$

y ahora podemos expresar el campo eléctrico en una representación vectorial explícita similar al de la ecuación 1.9

$$\mathbb{E}(z, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(t) e^{i\phi_x(t)} \\ \mathcal{E}_y(t) e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} e^{ikz}. \quad (1.79)$$

De esta manera obtendremos de nuevo una estructura matemática igual a la que hemos desarrollado en las secciones anteriores para las ondas monocromáticas.

Nótese que si se toma las componentes x e y de este campo eléctrico policromático y se intenta encontrar cuál es la figura geométrica que el vector campo eléctrico describe

podemos seguir el mismo proceso utilizado en la subsección 1.1.1 para encontrar la elipse de polarización. Al seguir dicho proceso se obtiene de nuevo la ecuación de la elipse:

$$\frac{|E_x|^2}{\mathcal{E}_x^2(t)} + \frac{|E_y|^2}{\mathcal{E}_y^2(t)} - 2\frac{\text{Re}\{E_x\overline{E_y}\}}{\mathcal{E}_x(t)\mathcal{E}_y(t)} \cos \Delta\phi(t) = \sin^2 \Delta\phi(t), \quad (1.80)$$

la diferencia es que en este caso las amplitudes $\mathcal{E}_i(t)$ y la diferencia de fase $\Delta\phi(t)$ dependen del tiempo. Esto se traduce en que las ondas policromáticas poseen un estado de polarización que cambia en el tiempo. Geométricamente, este estado de polarización se puede entender como una elipse de polarización instantánea en un tiempo t que cambia a otra elipse de polarización en el tiempo $t + dt$ según la ecuación de la elipse 1.80. A este cambio del estado de polarización que sufre de manera natural una fuente de luz policromática lo llamamos **dinámica de la polarización** de una fuente de luz.

El anterior resultado indica que se puede imponer todo el formalismo tratado en las secciones anteriores para el estudio de la polarización de luz policromática. De esta manera, se puede construir un estado de polarización dinámico $\hat{\mathbf{e}}(t)$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_x^2(t) + \mathcal{E}_y^2(t)}} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \mathcal{E}_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \varepsilon_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

Análogamente, se puede expresar el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}(t)$ en la representación de los ángulos principales de la elipse. Por ejemplo, en la base circular:

$$|\alpha(t), \chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [\cos \chi(t) - \sin \chi(t)]e^{i\alpha(t)} \\ [\cos \chi(t) + \sin \chi(t)]e^{-i\alpha(t)} \end{pmatrix}, \quad (1.82)$$

y lo mismo en cualquier otra base de estados de polarización. De esta manera, $|\alpha(t), \chi(t)\rangle$ representa la evolución temporal del estado de polarización, que no es nada más que el cambio de la forma de la elipse de polarización. Equivalentemente, se representa este estado de polarización sobre la esfera de Poincaré como un vector de Stokes dinámico que describe trayectorias sobre la esfera. Los estados de polarización que presentan una dinámica temporal se conocen como **estados parcialmente polarizados**.

1.6.1. Efecto de un retardador sobre un estado de polarización dinámico

Ahora, pasemos a lo que es el resultado fundamental de este trabajo, ya que es lo que se usará para darle solución a los problemas planteados. Los estados de polarización dinámicos se pueden describir usando los vectores de Jones. Para tener una generalidad del problema tomemos el operador \hat{R}_δ (ecuación 1.29) de un retardador elíptico expresado en la base que

corresponde con sus estados propios de polarización y efectuemos su operación sobre un estado de polarización dinámico que está escrito en la misma base:

$$\hat{R}_\delta \hat{\mathbf{e}}(t) = \begin{pmatrix} E_1(t)e^{i\delta} \\ E_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

Se obtiene el mismo resultado algebraico que antes pero la diferencia es que ahora las componentes del estado de polarización $E_i(t)$ son una función no armónica. Entonces, al multiplicarla por la cantidad $e^{i\delta}$ no se traduce inmediatamente en una diferencia de fase como en el caso de luz monocromática. Para solucionar este problema y encontrar qué efecto hace la multiplicación del factor $e^{i\delta}$ sobre la función $E_i(t)$ debemos recordar que, aunque se trate de luz policromática, el campo eléctrico se puede seguir representando como una señal analítica ya que solo se pueden considerar frecuencias positivas, y por lo tanto, su transformación de Fourier existe (Chekhova y Banzer, 2021; Goodman, 2015). Escribiendo el producto en términos de la transformada de Fourier de $E_i(t)$ encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} e^{i\delta} E_i(t) &= e^{i\delta} \int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= e^{i\frac{2\pi\nu}{c} \Delta l} \int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta l}{c})} d\nu, \end{aligned} \quad (1.84)$$

donde se ha introducido el factor $e^{i\frac{2\pi\nu}{c} \Delta l}$ dentro de la integral bajo la condición de que la onda policromática es de espectro estrecho, lo cual es razonable para el caso del intervalo espectral que abarca la luz visible. Ahora, la integral final de la ecuación 1.84 es una transformación de Fourier con el Kernel desplazado temporalmente $t \rightarrow t + \frac{\Delta l}{c}$ por lo tanto, la transformada de Fourier inversa se encuentra deslaza temporalmente, es decir,

$$\int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta l}{c})} d\nu = E_i\left(t + \frac{\Delta l}{c}\right). \quad (1.85)$$

Por consiguiente, el factor $e^{i2\pi\nu\tau}$ actúa como un operador de desplazamiento:

$$e^{i2\pi\nu\tau} E_i(t) = E_i(t + \tau), \quad (1.86)$$

donde $\tau = \frac{\Delta l}{c}$, siendo $\Delta n = n_1 - n_2$ la birrefringencia del material, es la diferencia de tiempo que tarda la componente de la onda electromagnética E_1 en propagarse por una lámina retardadora de grosor l e índice de refracción n_1 con respecto a la componente E_2 que se propaga con un índice de refracción n_2 . Así, la ecuación 1.86 muestra que **el efecto de un operador de fase $e^{i\delta}$ sobre una señal temporal analítica, es el de realizar una traslación temporal de dicha señal**. Este resultado es uno de los más importantes ya que se usará como base para solucionar la mayoría de los problemas planteados en este trabajo.

Usando el resultado encontrado en la ecuación 1.86 se puede expresar la transformación de un estado de polarización dinámico o parcialmente polarizado a través de un retardador

$$\hat{\mathbf{e}}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(t + \tau) \\ E_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.87)$$

Donde se observa que el efecto de un retardador \hat{R} sobre un estado de polarización dinámico es una traslación temporal entre las componentes del campo eléctrico. A partir de esta regla de transformación para los vectores de Jones dinámicos se pueden encontrar las equivalencias en las demás representaciones como en las matrices de polarización, el formalismo de Stokes-Mueller y en los cuaterniones.

1.6.2. Acción de un retardador en una matriz de polarización dinámica

Para el caso de las matrices de polarización se debe usar la regla de transformación encontrada en la ecuación 1.50, de esta manera se debe efectuar la siguiente operación:

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{pmatrix} E_1(t)\overline{E_1(t)} & E_1(t)\overline{E_2(t)} \\ E_2(t)\overline{E_1(t)} & E_2(t)\overline{E_2(t)} \end{pmatrix} \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{pmatrix} E_1(t)\overline{E_1(t)} & E_1(t)\overline{E_2(t)}e^{i\delta} \\ E_2(t)\overline{E_1(t)}e^{-i\delta} & E_2(t)\overline{E_2(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Ahora se usa el resultado encontrado en la ecuación 1.86 para encontrar la regla de transformación de un retardador para la matriz de polarización de un estado de polarización dinámico

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \mathbf{J}(t) \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{pmatrix} E_1(t)\overline{E_1(t)} & E_1(t)\overline{E_2(t + \tau)} \\ E_2(t)\overline{E_1(t - \tau)} & E_2(t)\overline{E_2(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Después de esto, se pueden obtener los parámetros de Stokes dinámicos usando la ecuación 1.46 y por lo tanto, también la representación del estado de polarización dinámico y sus transformaciones sobre la esfera de Poincaré.

1.6.3. Acción de un retardador en un vector de Stokes dinámico

Este cálculo también lo podemos realizar en el formalismo de Stokes-Mueller, para ello se debe transformar un vector de Stokes dinámico con la matriz de Mueller asociada con un retardador (ver ecuación 1.64)

$$\mathbf{S}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) & \frac{1}{2i}(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2i}(e^{-i\delta} - e^{i\delta}) & \frac{1}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Al resolver el producto matricial se obtiene el siguiente resultado

$$\mathbf{S}'(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \frac{s_2(t)}{2} (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + \frac{s_3(t)}{2i} (e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ \frac{s_3(t)}{2} (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) - \frac{s_2(t)}{2i} (e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Ahora, para encontrar cual es el efecto de los factores $e^{\pm i\delta}$ sobre las funciones temporales $s_i(t)$ se expresan los parámetros de Stokes en términos de los elementos de la matriz de polarización, es decir, se usa la ecuación 1.47. De esta manera, los parámetros de Stokes instantáneos son

$$s_0(t) = E_1(t)\overline{E_1(t)} + E_2(t)\overline{E_2(t)}, \quad (1.92)$$

$$s_1(t) = E_1(t)\overline{E_1(t)} - E_2(t)\overline{E_2(t)}, \quad (1.93)$$

$$s_2(t) = E_1(t)\overline{E_2(t)} + E_2(t)\overline{E_1(t)}, \quad (1.94)$$

$$s_3(t) = i[E_1(t)\overline{E_2(t)} - E_2(t)\overline{E_1(t)}]. \quad (1.95)$$

Ahora se procede a determinar los parámetros de Stokes transformados $s'_i(t)$. De acuerdo a 1.91, los primeros dos parámetros de Stokes permanecen invariantes $s'_0(t) = s_0(t)$ y $s'_1(t) = s_1(t)$. Para el caso de $s'_2(t)$, se toma la ecuación 1.91 y se realiza el desplazamiento temporal de cada función según la ecuación 1.86:

$$s'_2(t) = \frac{1}{2} \left[-E_1(t)\overline{E_2(t-\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)} + E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t+\tau)} \right. \\ \left. + E_1(t)\overline{E_2(t-\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)} + E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t+\tau)} \right], \quad (1.96)$$

esto se puede simplificar y obtener el siguiente resultado para s'_2 :

$$s'_2(t) = E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)}. \quad (1.97)$$

Realizando el mismo desarrollo para $s'_3(t)$ se llega a:

$$s'_3(t) = \frac{i}{2} \left[E_1(t)\overline{E_2(t-\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)} + E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t+\tau)} \right. \\ \left. - E_1(t)\overline{E_2(t-\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)} + E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t+\tau)} \right], \quad (1.98)$$

y al simplificar se obtiene

$$s'_3(t) = i[E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)}]. \quad (1.99)$$

Así, el efecto de un retardador, con estados propios lineales horizontal y vertical, sobre un vector de Stokes dinámico se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} + E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)} \\ i[E_1(t)\overline{E_2(t+\tau)} - E_2(t)\overline{E_1(t-\tau)}] \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Se nota entonces que el método para describir transformaciones sobre estados de polarización representados por un vector de Stokes dinámico se puede obtener siguiendo el mismo procedimiento realizado y por virtud del resultado obtenido en la ecuación 1.86; el operador de desplazamiento temporal para señales analíticas. Las transformaciones de casos más complicados como un retardador elíptico cuyo sistema de coordenadas ha sido rotado, o múltiples retardadores formando una placa de onda compuesta, pueden llegar a ser exhaustivos de tratar mediante el formalismo de Stokes-Mueller por la cantidad de términos matriciales que hay que tener en cuenta. Sin embargo, vemos que las representaciones algebraicas para luz con polarización dinámica también son equivalentes.

En el capítulo segundo y tercero se usará este formalismo de estados de polarización dinámicos para analizar el caso de fuentes reales, las cuales emiten estados parcialmente polarizados pero cuya dinámica es una función aleatoria del tiempo. Las transformaciones del estado de polarización de este tipo de fuentes a través de elementos ópticos como los retardadores producen la despolarización de la luz emitida por estas fuentes. Usando la teoría de la coherencia aplicada al formalismo de los estados de polarización dinámicos se podrá estudiar la despolarización usando el formalismo de las matrices de polarización o vectores de Pauli y también se podrá encontrar las matrices de Mueller correspondientes para describir la despolarización en el formalismo de Stokes-Mueller.

1.7. Conclusiones

Todo el formalismo algebraico que describe el estado de polarización $2D$ de los haces de luz se puede aplicar a los estados de polarización dinámicos. En general, las fuentes de luz que emiten radiación policromática tienen asociado un estado de polarización dinámico que se puede entender como una elipse de polarización cuya amplitud, orientación y elipticidad varía en el tiempo. Como resultado, los estados de polarización dinámicos se pueden representar como un vector de Jones cuyas componentes son funciones del tiempo, y por tanto, también se puede representar como una matriz de polarización dinámica y un vector de Stokes dinámico.

El principal problema de usar el formalismo de Jones para estados de polarización dinámicos era el de determinar los efectos de los operadores lineales ya conocidos para el caso estático. En particular se estudió el efecto de los retardadores, los cuales son descritos por el operador lineal \hat{R}_δ , sobre los estados dinámicos. El resultado es que se demostró que la fase que introducen los retardadores sobre las componentes del campo eléctrico se traduce como una traslación de las funciones que describen su evolución temporal una cantidad igual al retardo asociado con la placa de onda. Se planteó así un método algebraico para describir las transformaciones de haces de luz con estados de polarización dinámicos cuando se propagan por múltiples láminas retardadoras, que en general, tienen estados propios elípticos.

En este capítulo se mostraron las conexiones entre los diferentes formalismos algebraicos que describen la polarización de la luz. Se mostró su equivalencia en la descripción de luz totalmente polarizada, es decir, que existe un morfismo entre ellos que garantiza que representen la misma elipse de polarización. Sin embargo, se mostró también que estos formalismos algebraicos son igualmente equivalentes entre sí para el caso de fuentes de luz con un estado de polarización dinámico o parcialmente polarizado. Por lo tanto, la metodología utilizada para adaptar los vectores de Jones, las matrices de polarización y los parámetros de Stokes, junto con sus respectivos operadores, a la descripción de estados de polarización dinámicos se puede adaptar también a los vectores de Pauli y los cuaterniones. Esto con el objetivo de usar sus ventajas algebraicas en el tratamiento de fuentes de luz policromáticas.

Capítulo 2

Descripción estadística de la polarización

En las secciones finales del capítulo anterior se propuso un método para describir luz parcialmente polarizada y sus transformaciones a través de medios birrefringentes. Sin embargo, este método descrito solo funciona para fuentes de luz con una dinámica de polarización determinista, es decir, que las funciones temporales de sus parámetros de Stokes, o de las componentes del campo eléctrico, son conocidas. Este modelo debe ser adaptado para tratar también las fuentes de luz incoherentes, es decir, aquellas fuentes cuya dinámica de polarización es indeterminista, y por lo tanto, las funciones temporales que definen las componentes del campo eléctrico son señales aleatorias. La metodología para lograr esto es directa; se debe tomar los instrumentos de la teoría de la coherencia y las señales aleatorias y aplicarlo al modelo de polarización dinámica desarrollado en el capítulo anterior.

El formalismo utilizado en este trabajo para describir estados de polarización de campos eléctricos aleatorios es el de la matriz de polarización descrito en las secciones 1.2.4 y 1.6.2. Para construir la matriz de polarización de un campo eléctrico aleatorio se determina el vector de Jones asociado en alguna base de estados de polarización arbitraria

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde $E_1(t)$ y $E_2(t)$ son señales aleatorias, y por lo tanto, el vector de Jones $\hat{\mathbf{e}}(t)$ es un vector unitario aleatorio. En principio, para cada instante de tiempo el estado de polarización corresponde con una elipse diferente. La forma en cómo cambia esta elipse en función del tiempo depende de la aleatoriedad y naturaleza de la fuente de luz que emitió el campo eléctrico, es decir, depende de la función de densidad de probabilidad que caracteriza las fluctuaciones aleatorias del campo eléctrico. Por ahora se evitarán estos detalles concernientes con la dinámica de la polarización de fuentes aleatorias y nos concentraremos en los observables que

se pueden obtener de este vector de Jones aleatorio.

La matriz de polarización asociada con el vector de Jones aleatorio es una matriz o vector de Pauli aleatorio dado por:

$$\mathbf{J}(t, t') = \begin{pmatrix} E_1(t)\overline{E_1(t')} & E_1(t)\overline{E_2(t')} \\ E_2(t)\overline{E_1(t')} & E_2(t)\overline{E_2(t')} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Cada uno de los elementos de esta matriz son funciones aleatorias. Por razones físicas sujetas a la capacidad de medición de la intensidad de luz en un laboratorio de óptica, se ha de asumir que que estas funciones aleatorias son ergódicas, es decir, que su promedio de ensamble se asume igual a su promedio temporal. Adicionalmente, cuando las fuentes de luz aleatorias se encienden y emiten radiación durante una cierta cantidad de tiempo, la fuente de luz y la radiación emitida alcanzan un estado termodinámico de equilibrio. Esto se traduce en que las funciones aleatorias que describen al campo eléctrico de dicha radiación son, por lo menos, estadísticamente estacionarias en el sentido débil (sus dos primeros momentos estadísticos son independientes del tiempo). De esta manera, la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ representa un estado de polarización instantáneo aleatorio que cumple con la hipótesis de ergodicidad y es débilmente estacionario.

2.1. Valor medio de un estado parcialmente polarizado

Uno de los principales observables en el estudio de una señal aleatoria es su valor esperado y este se obtiene a través del promedio de ensamble de la señal. En este caso, aprovechando la hipótesis de ergodicidad podemos obtener el estado de polarización medio usando un promedio temporal de la señal en cuestión, esto es

$$E\{\mathbf{J}(t, t')\} = \langle \mathbf{J}(t, t') \rangle = \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \langle E_1(t)\overline{E_1(t')} \rangle & \langle E_1(t)\overline{E_2(t')} \rangle \\ \langle E_2(t)\overline{E_1(t')} \rangle & \langle E_2(t)\overline{E_2(t')} \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde los elementos $\langle E_i(t)\overline{E_j(t')} \rangle$ de la matriz $\langle \mathbf{J}(t) \rangle$ son las funciones de correlación de segundo orden de las componentes del campo eléctrico y, por lo tanto, esta matriz contiene toda la información estadística de segundo orden asociada con la dinámica de la polarización de una fuente de luz aleatoria. De esa manera, por conveniencia y facilidad del lenguaje llamaremos a esta matriz como matriz de polarización promedio o **matriz de coherencia** de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$. El nombre es debido a que los elementos de esta matriz ahora son funciones de correlación o de coherencia asociadas con el producto de las señales $E_i(t)$ y $E_j(t)$, es decir, campos eléctricos al cuadrado.

Esta matriz de coherencia de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$ es la misma que propone *E. Wolf* en su teoría de la coherencia y la polarización ([Wolf y cols., 2007](#)). Cada uno de los elementos de

esta matriz puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\Gamma_{ij} = \langle E_i(t) \overline{E_j(t')} \rangle = \langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle} \gamma(t - t'), \quad (2.4)$$

donde $\langle E_i \rangle$ es la amplitud promediada en el tiempo de cada componente del campo y $\gamma(t - t')$ es el grado complejo de coherencia de segundo orden, que es una función tal que $0 < |\gamma(t - t')| \leq 1$. En el caso cuando $|\gamma(t - t')| = |\gamma(0)| = 1$ y, por tanto, la función de correlación es igual al producto de los promedios, o sea

$$\langle E_i(t) \overline{E_j(t')} \rangle = \langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle},$$

la matriz de coherencia corresponde con la de un estado completamente polarizado. En contraste, el caso extremo cuando el grado de coherencia sea aproximadamente nulo $|\gamma(t - t')| \approx 0$, y por tanto, la función de correlación

$$\langle E_i(t) \overline{E_j(t')} \rangle = 0,$$

se tiene la matriz de coherencia asociada con un estado completamente no polarizado. Así, la matriz de coherencia permite representar y caracterizar estados totalmente polarizados, no polarizados y parcialmente polarizados.

2.1.1. Grado de Polarización

Conviene ahora encontrar una cantidad asociada con la matriz de coherencia que permita distinguir entre un estado totalmente polarizado y uno parcialmente polarizado. El estado de polarización medio $\langle \mathbf{J}(t) \rangle = \mathbf{\Gamma}$ tiene asociados unos parámetros de Stokes promedio dados por:

$$\langle s_i(t) \rangle = \text{Tr}\{\sigma_i \mathbf{\Gamma}\}, \quad (2.5)$$

los cuales están asociados con un punto dentro de la esfera de Poincaré, como se observa en la figura 5b. Esto es de esperar ya que el promedio de un vector unitario aleatorio da como resultado, según la estadística direccional, un vector con módulo menor que la unidad cuya dirección corresponde con la dirección media del vector aleatorio (Mardia, Jupp, y Mardia, 2000). El módulo del vector de Stokes medio viene dado por la siguiente expresión

$$|\langle \mathbf{s}(t) \rangle| = \sqrt{\frac{\langle s_1(t) \rangle^2 + \langle s_2(t) \rangle^2 + \langle s_3(t) \rangle^2}{\langle s_0(t) \rangle^2}} \leq 1, \quad (2.6)$$

donde alcanza la unidad cuando el vector de Stokes aleatorio $\mathbf{s}(t)$ mantiene la misma dirección a lo largo del tiempo; esto indica un estado totalmente polarizado. Por otro lado, es menor que la unidad cuando su dirección varía; esto es un estado parcialmente polarizado. De esta

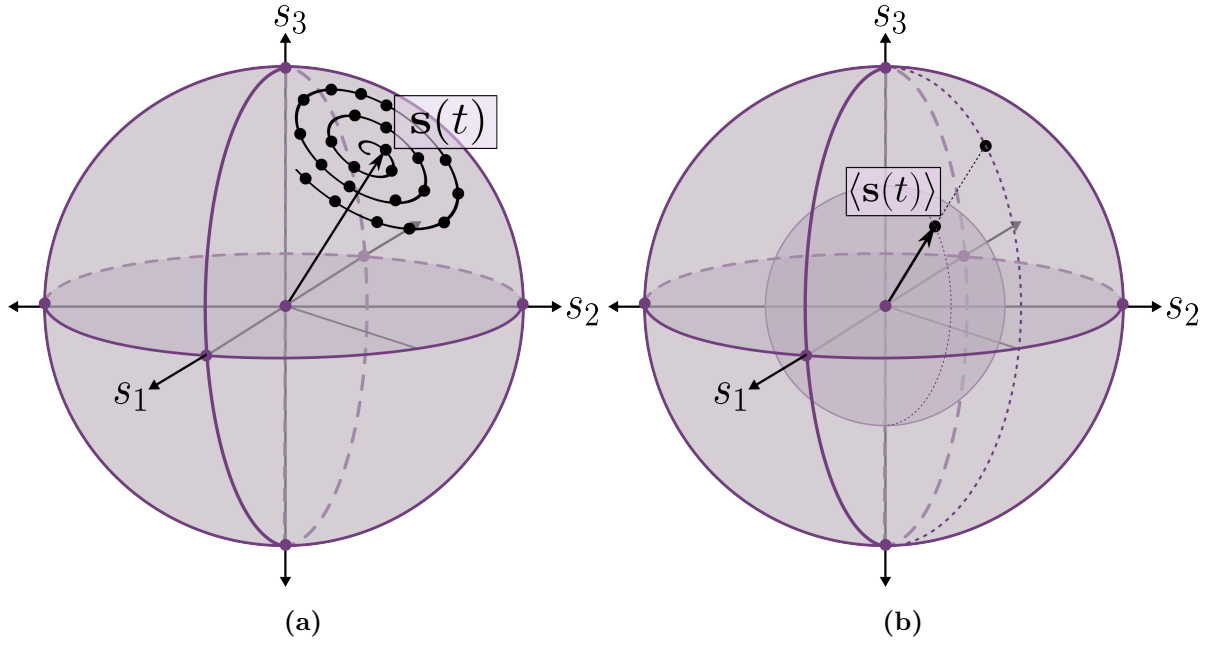


Figura 5: a) Representación de un estado de polarización proveniente de una fuente incoherente. Sus parámetros de Stokes son funciones aleatorias del tiempo. b) Representación del estado de polarización promedio. Este es el primer momento asociado con las señales aleatorias que conforman el estado de polarización de una fuente de luz incoherente.

manera, el valor $|\langle s(t) \rangle|$ es una medida estadística que indica el grado de polarización de un haz de luz.

El módulo del vector de Stokes promedio también puede ser expresado en términos de los elementos de matriz de polarización. Para ello se toman las expresiones dadas en 1.47 y se introducen en la ecuación 2.6. El objetivo de esta manipulación matemática es encontrar una expresión del grado de polarización en términos de la matriz de coherencia de segundo orden; esta fue previamente encontrada por *E. Wolf* ([Wolf y cols., 2007](#)). Haciendo dicho procedimiento se obtiene:

$$|\langle s(t) \rangle| = \sqrt{\frac{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 + 2\Gamma_{12}\Gamma_{21} - \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 + 2\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}}},$$

ahora se completan cuadrados agregando $2\Gamma_{11}\Gamma_{22} - 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}$ en el numerador y se simplifica para obtener la siguiente expresión:

$$|\langle s(t) \rangle| = \sqrt{1 + \frac{-4\Gamma_{11}\Gamma_{22} + 4\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}}},$$

y finalmente se reemplaza $\det\{\Gamma\} = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}$ y $\text{Tr}\{\Gamma\}^2 = \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}$ para obtener la expresión final del grado de polarización P en términos de la matriz de coherencia

Γ

$$|\langle \mathbf{s}(t) \rangle| = P = \sqrt{1 - \frac{4 \det\{\Gamma\}}{\text{Tr}\{\Gamma\}^2}}. \quad (2.7)$$

Nótese que el grado de polarización P es invariante ante transformaciones de cambio de base sobre la matriz de coherencia, ya que está dado en términos de su determinante y su traza (Wolf, 1959). En la mayor parte de la literatura se da por sentado que el formalismo de Jones, o el de las matrices de polarización, no son adecuados para describir la despolarización de la luz o, en general, las transformaciones de luz parcialmente polarizada. Sin embargo, basándose en los resultados de la sección anterior sobre las transformaciones de estados de polarización dinámicos, se propondrá un método para describir las transformaciones de luz parcialmente coherente y parcialmente polarizada usando el formalismo de las matrices de polarización y la matriz de coherencia.

2.1.2. Transformaciones de la polarización de luz incoherente

La cuestión que se debe abordar ahora es lograr plantear el proceso algebraico para describir las transformaciones asociadas con los estados de polarización de luz incoherente. El razonamiento que se debe seguir para solucionar esto es usar el hecho de que los estados de polarización asociados con luz incoherente se pueden modelar como estados de polarización dinámicos y posteriormente aplicar las transformaciones propuestas en la subsección 1.6.2. Una vez realizadas las transformaciones sobre la matriz de polarización inicial $\mathbf{J}(t)$ se obtienen los observables estadísticos de la matriz de polarización resultante, es decir, se encuentra la matriz de coherencia.

Escrito en términos matemáticos generales, si un estado de polarización inicial $\mathbf{J}(t)$ asociado con un campo eléctrico incoherente se propaga a través de múltiples elementos ópticos y/o sufre múltiples transformaciones ópticas que se pueden expresar como una matriz de transformación lineal \hat{T}_i , la matriz de coherencia $\langle \mathbf{J}'(t) \rangle$ del estado de polarización final está dado por

$$\Gamma' = \langle \mathbf{J}'(t) \rangle = \left\langle \prod_i \hat{T}_i \mathbf{J}(t) \prod_i \hat{T}_i^\dagger \right\rangle. \quad (2.8)$$

Posteriormente, a partir de esta matriz de coherencia se pueden extraer los parámetros de Stokes promedio y visualizar en la representación de la esfera de Poincaré el cambio del estado de polarización de una fuente incoherente y el cambio en su grado de polarización.

Veamos un caso particular de la transformación de la matriz Γ , que en general representa un estado parcialmente polarizado, bajo la acción de una lámina retardadora descrita por el operador \hat{R}_δ . Según la regla de transformación obtenida previamente y usando el resultado

encontrado en la ecuación 1.89 se obtiene:

$$\mathbf{\Gamma}' = \langle \hat{R}_\delta \mathbf{J}(t) \hat{R}_\delta^\dagger \rangle = \langle \mathbf{J}'(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} E_1(t) \overline{E_1(t')} & E_1(t) \overline{E_2(t' + \tau)} \\ E_2(t) \overline{E_1(t' - \tau)} & E_2(t) \overline{E_2(t')} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.9)$$

Cuando se efectúa el promedio temporal sobre cada uno de los elementos de la matriz $\mathbf{J}'(t)$ se obtienen las funciones de coherencia de segundo orden evaluadas en el retardo temporal que haya sufrido cada elemento de la matriz inicial $\mathbf{J}(t)$. De esta manera, los elementos de la matriz de coherencia resultante $\mathbf{\Gamma}'$ se pueden representar de una manera compacta como sigue:

$$\Gamma'_{ij} = \langle E_i(t) \overline{E_j(t' + \varepsilon_{ijk}\tau)} \rangle = \langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle} \gamma(t - t' + \varepsilon_{ijk}\tau), \quad (2.10)$$

y por lo tanto, la transformación debida al retardador \hat{R}_δ puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\Gamma'_{ij} = \langle E_i(t) E_j(t') e^{i\varepsilon_{ijk}\delta} \rangle = \langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle} \gamma(t - t' + \varepsilon_{ijk}\tau). \quad (2.11)$$

De aquí se puede notar que, para este caso, $\langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle} \gamma(t - t') = \Gamma_{ij}(t - t')$ son las amplitudes de las componentes de la matriz de coherencia inicial $\mathbf{\Gamma} = \langle \mathbf{J}(t) \rangle$. Con esto en consideración se puede reescribir la anterior transformación de la siguiente forma

$$\Gamma'_{ij} = \Gamma_{ij}(t - t') e^{i\varepsilon_{ijk}\delta} = \Gamma_{ij}(t - t' + \varepsilon_{ijk}\tau). \quad (2.12)$$

Esto finalmente significa que la regla de transformación dada por la ecuación 2.8, es equivalente a la siguiente transformación:

$$\mathbf{\Gamma}' = \prod_i \hat{T}_i \mathbf{\Gamma}(t - t') \prod_i \hat{T}_i^\dagger, \quad (2.13)$$

teniendo en cuenta que los operadores del tipo $e^{i2\pi\nu\tau}$ producen, en este caso, una translación sobre las funciones de coherencia. Así, este ejemplo evidencia que esta metodología funciona para estudiar los cambios de un estado, en general parcialmente polarizado, cuando se propaga a través de una lámina retardadora. Debemos notar también que, cuando se efectúa la operación matricial 2.13 y se realizan las traslaciones temporales en las funciones de coherencia, la transformación dada por los operadores lineales $\prod_i \hat{T}_i$ ya no dejan invariante su grado de polarización, por lo que esta metodología permite estudiar también como cambia el grado de polarización de un haz de luz cuando interactúa con medios ópticos como los retardadores. Este resultado se usará en el siguiente capítulo para abordar el problema de la despolarización de la luz, allí se abordarán en más detalle estas transformaciones solucionando una serie de problemas con respaldo experimental.

Una metodología similar a la expuesta en esta sección fue previamente planteada por *E. Wolf* en la sección 6.4.5 del libro ([Mandel y Wolf, 1995](#)). Allí se menciona que se pueden

estudiar las transformaciones de luz parcialmente polarizada a través de sistemas ópticos en cascada con transformaciones sobre la matriz de coherencia, es decir, de la forma

$$\langle \mathbf{J}'(t) \rangle = \hat{T}_i \langle \mathbf{J}(t) \rangle \hat{T}_i^\dagger. \quad (2.14)$$

El inconveniente con esto es que el grado de polarización es un invariante bajo transformaciones como ya se ha mencionado, por lo tanto, no se puede describir la despolarización de la luz usando dicha formulación; esto también lo afirman los autores en dicho libro. En contraste, el método planteado en este capítulo sí permite tratar la despolarización debido a que no se opera directamente sobre la matriz de coherencia sino sobre la matriz de polarización que aún representa el estado dinámico. Además, se demostró su equivalencia con el método propuesto por *E. Wolf* mostrando que este se puede adaptar para tratar el problema del cambio del grado de polarización planteando el efecto de los retardadores sobre la matriz de coherencia; que es el de trasladar las funciones de coherencia.

2.2. Segundo momento de un estado parcialmente polarizado

El valor medio permite describir algunas de las propiedades estadísticas de una fuente de luz parcialmente polarizada como es su grado de polarización y algunos de los procesos que sufre como la despolarización. Sin embargo, hay información que no describe como lo relacionado con la dinámica de polarización de la fuente de luz. Un ejemplo que nos permite ver esto es que una fuente de luz cuya dinámica consiste en la intermitencia de dos estados de polarización diametralmente opuestos tendrá un estado de polarización medio nulo $\langle \mathbf{J}(t) \rangle = 0$. El mismo estado medio nulo se obtiene con una fuente cuya dinámica consiste en recorrer todos los posibles estados lineales o recorrer todos los posibles estados con sentido de giro horario, es decir, todos los que se encuentran en uno de los hemisferios de la esfera de Poincaré. Esta problemática también se plantea en algunos de los trabajos del investigador *Alfredo Luis* como lo son ([Luis, 2002, 2007](#)) y más tarde por nuestro grupo de investigación en el trabajo de *Karol Salazar y Rafael Torres* ([Salazar-Ariza y Torres, 2019](#)). Las soluciones que estos trabajos proponen al problema planteado corresponde con el uso de un grado de polarización de segundo orden y distribuciones de probabilidad sobre la esfera de Poincaré. Estas ideas son pieza fundamental de la solución que se que se expondrá aquí.

En vista de que se necesita una cantidad estadística medible que permita describir otros aspectos relacionados con la dinámica de una fuente de luz, uno de los candidatos es el segundo momento asociado con la matriz de polarización, esto será:

$$E \{ \mathbf{J}(t) \mathbf{J}^\dagger(t) \} = \langle \mathbf{J}(t) \mathbf{J}^\dagger(t) \rangle, \quad (2.15)$$

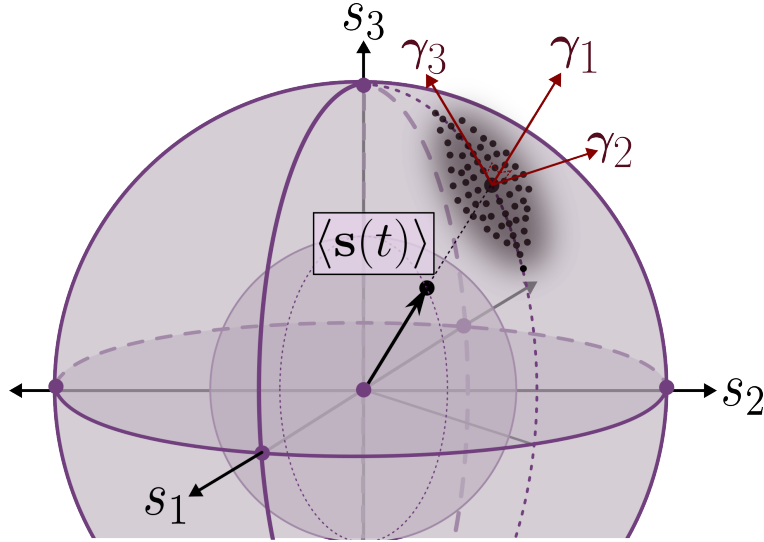


Figura 6: Esquema representativo de los vectores propios γ_1 , γ_2 y γ_3 asociados con la matriz de covarianza Σ asociada con un estado de polarización $\mathbf{s}(t)$ aleatorio. Los puntos negros representan realizaciones o mediciones de la evolución aleatoria del estado de polarización en el tiempo.

el cual debe corresponder con la matriz de covarianza de los parámetros de Stokes. Para obtener la forma de la matriz $\langle \mathbf{J}(t)\mathbf{J}^\dagger(t) \rangle$ se puede considerar la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ como un vector de Pauli cuyas componentes son los parámetros de Stokes. De esta manera, el producto $\mathbf{J}(t)\mathbf{J}^\dagger(t)$ es equivalente al producto del vector de Stokes $\mathbf{S}(t) = [s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t)]^T$ por su transpuesto. De esta manera, el segundo momento estadístico de una fuente incoherente parcialmente polarizada viene dado por:

$$\langle \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^\dagger(t) \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_0(t)s_0(t) \rangle & \langle s_0(t)s_1(t) \rangle & \langle s_0(t)s_2(t) \rangle & \langle s_0(t)s_3(t) \rangle \\ \langle s_1(t)s_0(t) \rangle & \langle s_1(t)s_1(t) \rangle & \langle s_1(t)s_2(t) \rangle & \langle s_1(t)s_3(t) \rangle \\ \langle s_2(t)s_0(t) \rangle & \langle s_2(t)s_1(t) \rangle & \langle s_2(t)s_2(t) \rangle & \langle s_2(t)s_3(t) \rangle \\ \langle s_3(t)s_0(t) \rangle & \langle s_3(t)s_1(t) \rangle & \langle s_3(t)s_2(t) \rangle & \langle s_3(t)s_3(t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

sin embargo, en esta formulación matemática para describir estados de polarización dinámicos se ha estado considerando siempre una normalización respecto a la intensidad de la fuente de luz, la cual corresponde en magnitud con el parámetro de Stokes $s_0(t)$. Adicionalmente, los procesos ópticos que sufre el estado de polarización de un haz de luz, como el efecto de un retardador, se han descrito de tal manera que no alteran la intensidad de la luz, por lo tanto, se puede considerar a $s_0(t) = 1$ y de esta manera, las correlaciones de los parámetros de Stokes s_i con el parámetro de Stokes s_0 no aportan información sustancial, es decir, $\langle s_0(t)s_i(t) \rangle = 1 \cdot s_i$. En consecuencia, las correlaciones de los parámetros de Stokes que realmente dan información de la dinámica de una fuente de luz son las correlaciones entre los parámetros de Stokes s_1 , s_2 y s_3 . De esta manera, es más conveniente expresar la matriz

de covarianza como una matriz 3×3 :

$$\langle \mathbf{s}(t)\mathbf{s}^\dagger(t) \rangle = \Sigma = \begin{pmatrix} \langle s_1(t)s_1(t) \rangle & \langle s_1(t)s_2(t) \rangle & \langle s_1(t)s_3(t) \rangle \\ \langle s_2(t)s_1(t) \rangle & \langle s_2(t)s_2(t) \rangle & \langle s_2(t)s_3(t) \rangle \\ \langle s_3(t)s_1(t) \rangle & \langle s_3(t)s_2(t) \rangle & \langle s_3(t)s_3(t) \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Esta matriz de covarianza Σ corresponde con la de un vector unitario aleatorio de 3 dimensiones, en este caso es el vector $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), s_3(t)]^T$ de la representación de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré. Cada uno de los elementos de la matriz cuantifica la dispersión de las componentes del vector $\mathbf{s}(t)$ con respecto a los ejes de coordenadas. Además, los vectores propios de esta matriz coinciden con la dirección del vector medio y con las direcciones principales en las cuales hay mayor y menor dispersión de estados de polarización respectivamente, como se representa en la figura 6.

Es posible realizar una rotación del sistema de coordenadas de la esfera de Poincaré, de tal manera que los ejes S_1 , S_2 y S_3 coincidan con los vectores $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ (ver figura 6), los cuales son los autovectores de Σ . Esto implica que Σ , en la base usual del vector de Stokes, puede ser expresada como una transformación de cambio de base de la siguiente forma:

$$\Sigma = \hat{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \hat{Q}^T, \quad (2.18)$$

donde $\hat{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ es la matriz de cambio de base y los λ_i ($i = 1, 2, 3$) son los autovalores de la matriz de covarianza. De esta manera, los autovectores y autovalores de la matriz Σ no solo brindan información acerca del estado medio de polarización y su grado de polarización asociado, sino que además, permite conocer en primera aproximación la dinámica de la polarización de una fuente de luz mediante una medida de dispersión estadística. En este caso, se obtiene en qué direcciones principales ocurre la dispersión de los estados de polarización si se midieran en el tiempo y qué tan dispersos se encuentran en términos de las varianzas y covarianzas.

2.2.1. Transformación de la matriz de covarianza

Similar al tratamiento realizado para obtener las matrices de Mueller en la sección 1.3, se puede encontrar una matriz 4×4 análoga a la matriz de polarización ya no en términos de las intensidades del campo, sino del producto de las intensidades, es decir, proporcional al campo eléctrico a la cuarta potencia. Esto se logra usando el vector \mathbb{X} , construido a partir

del producto de kronecker del vector de Jones $\hat{\mathbf{e}}$ (ver ecuación 1.52):

$$\Gamma^{(2)} = \langle \mathbb{X}(t) \mathbb{X}^\dagger(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} J_{11}(t) \\ J_{12}(t) \\ J_{21}(t) \\ J_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11}(t') & J_{21}(t') & J_{12}(t') & J_{22}(t') \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.19)$$

los elementos de esta matriz 4×4 van a corresponder con cada una de las funciones de coherencia de cuarto orden del campo eléctrico $\langle E_i(t) \overline{E_j(t)} E_m(t') \overline{E_l(t')} \rangle = \langle J_{ij}(t) J_{ml}(t') \rangle$ ($i, j, m, l = 1, 2$), que representan las correlaciones de cada una de los elementos de la matriz de polarización (correlación de intensidades), por ello es conveniente llamarla como Matriz de coherencia de cuarto orden $\Gamma^{(2)}$. Así, cada uno de los elementos de esta matriz puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\Gamma_{ijml}^{(2)} = \langle J_{ij} \rangle \langle J_{lm} \rangle \gamma^{(2)}(t - t'), \quad (2.20)$$

donde $\langle J_{ij} \rangle$ es el promedio temporal de cada elemento del vector \mathbb{X} o de la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ asociada al estado de polarización dinámico, escrito de otra manera, coincide con los elementos de la matriz de coherencia de segundo orden $\langle J_{ij} \rangle = \Gamma_{ij}(0)$. La función $\gamma^{(2)}(t - t')$ es el grado de coherencia de cuarto orden, y es una función tal que $1 < \gamma^{(2)}(t - t') \leq 2$. Con los valores que adquiere $\gamma^{(2)}(t - t')$ se puede distinguir entre un estado parcialmente polarizado de uno totalmente polarizado. Cuando $\gamma^{(2)}(t - t') = \gamma^{(2)}(0) = 2$ se tiene una matriz de coherencia de cuarto de orden asociada con un estado totalmente polarizado y en los otros casos se tienen todos los posibles estados parcialmente polarizados.

Ahora encontremos cómo transforma esta matriz cuando la luz interactúa con medios ópticos que pueden ser representados por una transformación lineal \hat{T} . Para ello se usa el resultado dado en la ecuación 1.56 y se aplica en la ecuación 2.19, de esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{X}'(t) \mathbb{X}'^\dagger(t) \rangle &= \left\langle (\hat{T} \times \overline{\hat{T}}) \mathbb{X} \left[(\hat{T} \times \overline{\hat{T}}) \mathbb{X} \right]^\dagger \right\rangle \\ \Gamma'^{(2)} &= \left\langle (\hat{T} \times \overline{\hat{T}}) (\mathbb{X} \mathbb{X}^\dagger) (\hat{T} \times \overline{\hat{T}})^\dagger \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Evidentemente la matriz de transformación 4×4 dada por $(\hat{T} \times \overline{\hat{T}})^\dagger$ está relacionada con las matrices de Mueller, sin embargo, antes de plantear dicha correspondencia examinemos como cambia la matriz de coherencia $\Gamma^{(2)}$ cuando la matriz de transformación $\hat{T} = \hat{R}_\delta$ es la de una lámina retardadora.

Primero encontremos la matriz de transformación 4×4 asociada con el operador \hat{R}_δ ,

para ello desarrollemos el producto de Kronecker de las dos matrices:

$$\hat{R}_\delta \times \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{bmatrix} e^{i\delta} \begin{bmatrix} e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Ahora se opera con esta matriz según la regla de transformación dada por la ecuación 2.21, y de esta manera obtenemos el siguiente resultado:

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} J_{11}^2(t) & J_{11}(t)J_{21}(t)e^{-i\delta} & J_{11}(t)J_{12}(t)e^{i\delta} & J_{11}(t)J_{22}(t) \\ J_{11}(t)J_{12}(t)e^{i\delta} & J_{12}(t)J_{21}(t) & J_{12}(t)J_{12}(t)e^{2i\delta} & J_{12}(t)J_{22}(t)e^{i\delta} \\ J_{11}(t)J_{21}(t)e^{-i\delta} & J_{21}(t)J_{21}(t)e^{-2i\delta} & J_{12}(t)J_{21}(t) & J_{21}(t)J_{22}(t)e^{-i\delta} \\ J_{11}(t)J_{22}(t) & J_{21}(t)J_{22}(t)e^{-i\delta} & J_{12}(t)J_{22}(t)e^{i\delta} & J_{22}^2(t) \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.23)$$

Antes de aplicar el promedio temporal sobre la matriz resultante, se efectúan las traslaciones temporales de cada función por virtud de la operación con los exponenciales $e^{i\delta}$, esto es, aplicar el resultado obtenido en la ecuación 1.86, de este modo obtenemos:

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} J_{11}^2(t) & J_{11}(t)J_{21}(t-\tau) & J_{11}(t)J_{12}(t+\tau) & J_{11}(t)J_{22}(t) \\ J_{11}(t)J_{12}(t+\tau) & J_{12}(t)J_{21}(t) & J_{12}(t)J_{12}(t+2\tau) & J_{12}(t)J_{22}(t+\tau) \\ J_{11}(t)J_{21}(t-\tau) & J_{21}(t)J_{21}(t-2\tau) & J_{12}(t)J_{21}(t) & J_{21}(t)J_{22}(t-\tau) \\ J_{11}(t)J_{22}(t) & J_{21}(t)J_{22}(t-\tau) & J_{12}(t)J_{22}(t+\tau) & J_{22}^2(t) \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.24)$$

Así vemos que, al aplicar el promedio temporal sobre cada componente de la matriz, obtenemos las funciones de coherencia de cuarto de orden en las variables que están desplazadas temporalmente. De manera análoga al caso de la coherencia de segundo orden (ver ecuación 2.4), cada uno de los elementos de la matriz de coherencia de cuarto orden se pueden expresar de una manera compacta como sigue:

$$\langle J_{ij}(t)J_{ml}(t + (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau) \rangle = \langle J_{ij}(t) \rangle \langle J_{ml}(t) \rangle \gamma^{(2)}((\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau) \quad (i, j, m, l = 1, 2), \quad (2.25)$$

donde $\langle J_{ij}(t) \rangle$ son los promedios temporales de la amplitud de cada intensidad y $\gamma^{(2)}$ es el grado de coherencia de cuarto orden evaluado en $(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau$. Podemos también escribir la transformación completa de la siguiente manera:

$$\Gamma_{ijml}^{(2)} = \left\langle e^{i(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau} J_{ij}(t)J_{ml}(t) \right\rangle, \quad (2.26)$$

y esto implica que tenemos una regla de transformación análoga que para la matriz de coherencia de segundo orden, pues se cumple que se puede realizar una traslación de la función de coherencia de cuarto orden:

$$\Gamma_{ijml}^{(2)} = e^{i(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau} \Gamma_{ijml}^{(2)}(t - t') = \Gamma_{ijml}^{(2)}(t - t' + (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{mlk})\tau). \quad (2.27)$$

Por lo tanto las transformaciones sobre la matriz de coherencia de cuarto orden se pueden determinar de la siguiente manera:

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = \prod_i (\hat{T}_i \times \overline{\hat{T}}) \mathbf{\Gamma}^{(2)}(t - t') \prod_i (\hat{T}_i \times \overline{\hat{T}})^\dagger. \quad (2.28)$$

En la sección 1.3 se planteó la transformación del vector \mathbb{X} mediante la matriz de transformación \hat{A} , de esta manera se obtiene el vector de Stokes, eso significa que la matriz de covarianza 2.16 de los parámetros de Stokes se puede obtener de la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{S}(t) \mathbf{S}^T(t) \rangle = \hat{A} \mathbf{\Gamma}^{(2)} \hat{A}^{-1}, \quad (2.29)$$

con lo que para cualquier transformación que sufra la matriz de coherencia de cuarto orden $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$, calculada con la regla de transformación dada por la ecuación 2.21, se puede hallar la correspondiente matriz de covarianza de los parámetros de Stokes.

Por ahora, solo nos basta con conocer el segundo momento estadístico del estado de polarización de una fuente incoherente. Se podrían hallar los momentos de orden superior generalizando el proceso realizado en esta sección para hallar la matriz de coherencia de cuarto orden, sin embargo, habría que considerar una hipótesis de estacionariedad en el sentido fuerte. Para los momentos de orden superior se tendría que trabajar con matrices de coherencia de sexto orden y así sucesivamente. Sin embargo, con el segundo momento estadístico es suficiente para inferir, en primera aproximación, la dinámica del estado de polarización de una fuente y cómo este se afecta bajo transformaciones a través de dispositivos ópticos como los retardadores.

Algo importante a remarcar antes de finalizar esta sección es notar que la matriz de polarización de orden superior, construida a partir del producto $\mathbb{X}(t)\mathbb{X}^\dagger(t)$, debe ser otro de los formalismos algebraicos de la polarización, equivalente a todos los demás. La única diferencia es que, así como la matriz de polarización se construye para estudiar la polarización en términos de las intensidad del campo eléctrico, la matriz $\mathbb{X}(t)\mathbb{X}^\dagger(t)$ se puede usar para estudiar la polarización en términos del producto de intensidades. En principio, se puede seguir con esta secuencia indefinidamente, por lo que todo parece apuntar que existen infinitos modelos algebraicos para estudiar la polarización.

2.2.2. Grado de polarización de segundo orden

El grado de polarización P dado por la ecuación 2.7 es una cantidad que permite distinguir la matriz de coherencia de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$ asociada a un estado parcialmente polarizado de otra matriz de coherencia asociada con un estado totalmente polarizado. De la misma manera, se debe plantear una cantidad adimensional que permita caracterizar la matriz de coherencia de cuarto orden $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ asociada con estados totalmente polarizados de los parcialmente polarizados. Se debe definir un grado de polarización de segundo orden $P^{(2)}$.

Cuando los elementos de la matriz $\mathbf{\Gamma}$ corresponden con las de un estado totalmente polarizado se cumple que $\det\{\mathbf{\Gamma}\} = 0$ y por lo tanto $P = 1$ según la ecuación 2.7. En el caso de la matriz de coherencia de cuarto orden $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ se cumple la misma propiedad $\det\{\mathbf{\Gamma}^{(2)}\} = 0$. Basta con ejemplo para darse cuenta de esto. Si se tiene un estado polarizado linealmente horizontal, el único elemento de la matriz $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ que es diferente de cero es $\Gamma_{11}^{(2)} = \Gamma_{11}^2(0)$, por lo tanto, su determinante es nulo. La demostración general se puede hacer expresando los elementos de la matriz de coherencia en alguna de las bases de estados de polarización, por ejemplo la lineal (ver ecuación 1.17), para cualquier estado elíptico arbitrario y encontrar el determinante. Al final se puede simplificar las expresiones trigonométricas para encontrar que el determinante de la matriz de coherencia de cuarto orden se anula.

De esta manera, el grado de polarización de segundo orden se puede proponer como una generalización del grado de polarización de primer orden para la matriz de coherencia de cuarto orden. De una forma análoga a la ecuación 2.7, el grado de polarización de segundo orden se define como sigue:

$$P^{(2)} = \sqrt{1 - \frac{4 \det\{\mathbf{\Gamma}^{(2)}\}}{\text{Tr}\{\mathbf{\Gamma}^{(2)}\}^2}}, \quad (2.30)$$

cuyos valores se encuentran en el rango de $0 < P^{(2)} \leq 1$. Alcanzará la unidad cuando $\det\{\mathbf{\Gamma}^{(2)}\} = 0$, que corresponde con una $\Gamma^{(2)}$ asociado con un estado totalmente polarizado.

Este grado de polarización $P^{(2)}$ debe poder distinguir de dos procesos aleatorios de polarización diferentes que no se pueden distinguir usando el grado de polarización P normal. Por ejemplo, debe poder distinguir dos procesos en los que se tenga el mismo estado de polarización medio pero una dinámica de polarización diferente. Sin embargo, por ahora esta afirmación no será comprobada experimentalmente ni teóricamente, se dejará para un próximo trabajo en donde se analice la transformación de la matriz de coherencia de cuarto orden para un caso práctico.

Durante los desarrollos iniciales de este trabajo se propuso una definición de grado de polarización de segundo orden a partir de la matriz de covarianza Σ de los parámetros de Stokes. Este grado de polarización se define a partir de una medida de las correlaciones de los parámetros de Stokes ([Hernandez-Cely y cols., 2023](#)):

$$\begin{aligned} \gamma_{GP}(\tau) &= \langle \mathbf{s}^T(t) \hat{\Lambda} \mathbf{s}(t + \tau) \rangle \\ &= \sum_{n,m=1}^3 \Lambda_{nm} \langle s_n(t) s_m(t + \tau) \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

que es una forma cuadrática en donde $\hat{\Lambda}$ es una matriz 3×3 simétrica cuyos elementos determinan qué tan relevantes son cada una de las correlaciones de los parámetros de Stokes para un proceso óptico.

A partir de la ecuación 2.31 se puede definir otro grado de polarización, que llamamos de segundo orden, como sigue:

$$P^{(2)} \equiv \sqrt{\gamma_{GP}(0)}$$

el cual, en términos de los parámetros de Stokes promedio se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [P^{(2)}]^2 &= \frac{1}{\langle s_0(t)^2 \rangle} \left[\Lambda_{11} \langle s_1(t)^2 \rangle + \Lambda_{22} \langle s_2(t)^2 \rangle + \Lambda_{33} \langle s_3(t)^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2\Lambda_{12} \langle s_1(t)s_2(t) \rangle + 2\Lambda_{13} \langle s_1(t)s_3(t) \rangle + 2\Lambda_{23} \langle s_2(t)s_3(t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Este grado de polarización se aplicó a la despolarización de un haz de luz a través de un retardador variable de cristal líquido. Con esto, se pudo explicar algunas discrepancias de la curva de grado de polarización en función del retardo introducido por el cristal líquido que con el grado de polarización de primer orden no se podía explicar. Sin embargo, hay que aclarar que tampoco se evaluó su capacidad para describir la dinámica de la polarización de una fuente de luz y distinguir fuentes parcialmente polarizadas.

2.3. Distribución de probabilidad del estado de polarización

Se han estudiado ya el primer y segundo momento estadístico asociado con un estado de polarización que evoluciona aleatoriamente en el tiempo. Conviene ahora encontrar una función de densidad de probabilidad asociada con este proceso aleatorio, la cual describe la estadística asociada con la dinámica de polarización de una fuente de luz incoherente. De esta distribución se deben extraer por lo menos los dos primeros momentos estadísticos asociados con el estado de polarización.

La propuesta de una distribución de probabilidad para el estado de polarización ya ha sido previamente hecha en trabajos como ([Barakat, 1987](#); [Brosseau y cols., 1991](#)). Inicialmente se puede asumir una función de densidad de probabilidad sobre las fluctuaciones del campo eléctrico y a partir de ahí encontrar la función de densidad de probabilidad de los parámetros de Stokes. En los trabajos previamente mencionados se asume una estadística Gaussiana sobre las fluctuaciones del campo eléctrico y esto permite determinar las funciones de densidad de probabilidad de cada parámetro de Stokes en términos del grado de polarización, y por tanto, de las correlaciones de segundo orden. En este trabajo omitiremos el trabajo de expresar la función de densidad de probabilidad para cada parámetro de Stokes, también llamadas distribuciones marginales. Si se quiere obtener más información sobre estas distribuciones y el proceso a seguir para determinarlas pueden remitirse a los artículos ya mencionados en este párrafo o a la sección 3.3 del libro ([Brosseau, 1998](#)).

Trabajar con las distribuciones marginales, es decir, con las funciones de densidad de probabilidad de cada parámetro de Stokes, no es conveniente debido a que las transformaciones que sufre el estado de polarización (la matriz de coherencia de segundo y cuarto orden) no tienen una representación explícita en dicha formulación. Esto hace que el cálculo para determinar las distribuciones marginales de los parámetros de Stokes luego de que un haz de luz haya sufrido un proceso de despolarización al propagarse a través de, por ejemplo, un retardador lineal no sean evidentes. Para solucionar este problema se pueden usar funciones de densidad de probabilidad que representen directamente la estadística sobre el espacio geométrico donde ocurre el proceso aleatorio. En este caso, ese espacio es la esfera de Poincaré.

El uso de la estadística direccional y sus distribuciones asociadas para una esfera de radio unitario permite solucionar el problema planteado en la sección anterior. Las distribuciones direccionales se pueden expresar explícitamente en términos del primer y segundo momento de un vector aleatorio, es decir, en términos del vector medio $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$ y de la matriz de covarianza Σ , los cuales ya hemos visto cómo transforman bajo elementos ópticos como los retardadores. Estas distribuciones ya han sido previamente aplicadas al estudio de la polarización, particularmente en el artículo (Salazar-Ariza y Torres, 2019) se propone el uso de la distribución de Von-Mises-Fisher (vMF) como la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $\mathbf{s}(t)$ que representa el estado de polarización sobre la esfera de Poincaré. En dicho trabajo se demuestra que las distribuciones marginales de vMF para el estado de polarización son equivalentes a las distribuciones marginales encontradas en (Barakat, 1987; Brosseau y cols., 1991) para los parámetros de Stokes. Por lo tanto, la distribución de Von-Mises-Fisher es la función de densidad de probabilidad para el estado de polarización de un campo eléctrico cuyas fluctuaciones son dadas por una estadística Gaussiana.

2.3.1. Distribución de von-Mises-Fisher

Antes de proponer una distribución de polarización más general que incluya los dos primeros momentos estadísticos resulta interesante estudiar la distribución de vMF como caso particular. Esta función de densidad de probabilidad viene dada por la siguiente expresión (Salazar-Ariza y Torres, 2019)

$$f(\mathbf{s}; \kappa) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh \kappa} e^{\kappa \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{s}}, \quad (2.33)$$

donde \mathbf{s} representa un estado de polarización arbitrario sobre la esfera de Poincaré, κ es un parámetro llamado concentración y $\hat{\mathbf{s}}$ es conocido como el **vector dirección media** del estado de polarización y es definido como el vector asociado con el estado de polarización medio normalizado, o sea, $\hat{\mathbf{s}} = \frac{\langle \mathbf{s}(t) \rangle}{|\langle \mathbf{s}(t) \rangle|}$.

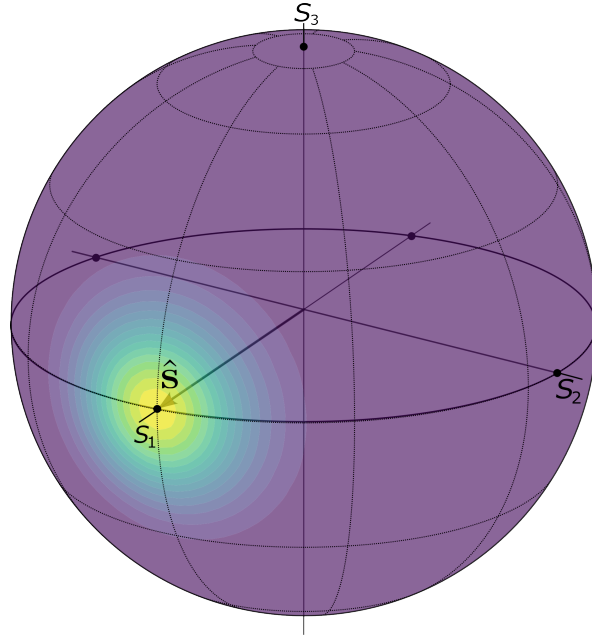


Figura 7: Gráfico de la función de densidad de probabilidad de Von Mises Fisher en la esfera de Poincaré en una escala de colores. El parámetro de concentración es de $\kappa = 20$ y el vector dirección media $\hat{\mathbf{s}} = (1, 0, 0)^T$. Esta distribución posee contornos de probabilidad circulares. Es invariante bajo rotaciones alrededor de $\hat{\mathbf{s}}$.

El primer momento asociado con esta distribución viene dado por (Fisher, 1953):

$$E\{\mathbf{s}\} = \left(\coth \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \hat{\mathbf{s}} = |\langle \mathbf{s}(t) \rangle| \hat{\mathbf{s}}, \quad (2.34)$$

y coincide con el vector medio del estado de polarización, por lo tanto, la magnitud de dicho vector debe ser el grado de polarización (Salazar-Ariza y Torres, 2019):

$$P = \coth \kappa - \frac{1}{\kappa}, \quad (2.35)$$

que se encuentra relacionado con el parámetro de concentración de la distribución. Esto quiere decir que entre mayor sea el grado de polarización más concentrada alrededor del vector dirección media $\hat{\mathbf{s}}$ debe estar la distribución, tendiendo a un delta de Dirac $\delta(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})$ sobre la superficie de la esfera cuando $P = 1$. En el caso contrario, cuando $P \approx 0$ la distribución tiene de ser una distribución uniforme sobre toda la superficie de la esfera.

La dinámica de polarización de fuentes de luz que obedezcan este tipo de distribución de probabilidad consiste en fluctuaciones del estado de polarización alrededor del estado $\hat{\mathbf{s}}$ como se observa en la figura 7. Además, estas fluctuaciones son las mismas en todas las vecindades de $\hat{\mathbf{s}}$, ya que los contornos de probabilidad de la distribución de vMF son circulares e invariantes bajo rotaciones con respecto a $\hat{\mathbf{s}}$. El tipo de radiación que mejor se ajusta a este tipo de distribución es en el que la fase y la amplitud del campo eléctrico son estadísticamente

independientes. Un ejemplo de este tipo de radiación es la asociada con los modos coherentes estudiados en óptica cuántica. Las fluctuaciones de estos modos coherentes vienen dados por el estado base de las funciones de Hermite-Gauss y por tanto, el campo eléctrico como el campo magnético presentan fluctuaciones dadas por una función de densidad de probabilidad de tipo Gausiana, que además es la que minimiza el principio de incertidumbre.

Hay que notar que la distribución de vMF aplicada a la polarización solo depende del estado medio de polarización $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$ cuyas transformaciones se pueden determinar a partir de las transformaciones de la matriz de coherencia de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$ dadas por la ecuación 2.13. Así, se puede estudiar cómo se transforma la dinámica de la polarización de un haz de luz, cuya función de densidad de probabilidad asociada es de vMF, cuando interactúa con medios y transformaciones ópticas representadas por un operador lineal \hat{T} .

2.3.2. Distribución de Fisher-Bingham

Aunque la distribución de vMF ya ayuda a describir un tipo muy particular de haces de luz, está limitada para haces de luz con estadísticas más generales. La distribución de vMF solamente genera contornos de probabilidad circulares alrededor del vector dirección media. Sin embargo, pueden existir haces de luz cuya polarización tenga una dinámica diferente como, por ejemplo, fluctuar a lo largo de un meridiano o un paralelo, o tener fluctuaciones no homogéneas alrededor del vector dirección media, es decir, que su función de densidad de probabilidad tenga contornos de probabilidad que no son invariantes bajo rotaciones alrededor de $\hat{\mathbf{s}}$. Una función de densidad de probabilidad más general que satisface estas características incluye no solamente el primer momento estadístico sino también el segundo momento, es decir, la matriz de covarianza Σ que ya se ha estudiado.

Para el proceso aleatorio del estado de polarización, la función de densidad de probabilidad de Fisher-Bingham viene dada por la siguiente expresión (Kent, 1982):

$$f(\mathbf{s}; \Sigma) = \frac{1}{c(\kappa, \Sigma)} \exp\left\{ \kappa \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Sigma^{-1} \mathbf{s} \right\}, \quad (2.36)$$

donde κ es el parámetro de concentración, $\hat{\mathbf{s}}$ el vector dirección media del estado de polarización, Σ la matriz de covarianza de los parámetros de Stokes, y $c(\kappa, \Sigma)$ es la constante de normalización de la distribución. Esta función de densidad de probabilidad ya no solamente tiene contornos de probabilidad que son circulares sino que tiene como casos particulares los contornos elípticos alrededor del vector dirección media $\hat{\mathbf{s}}$. También tiene los casos en los que $\hat{\mathbf{s}} = 0$, cuando esto sucede la distribución de probabilidad puede adoptar la forma de una distribución uniforme ya que contiene como caso particular la distribución de vMF. Sin embargo, algo interesante es que dependiendo de la matriz Σ puede tener la forma de una distribución antípoda como la que se muestra en la figura 8b. Este tipo de distribución

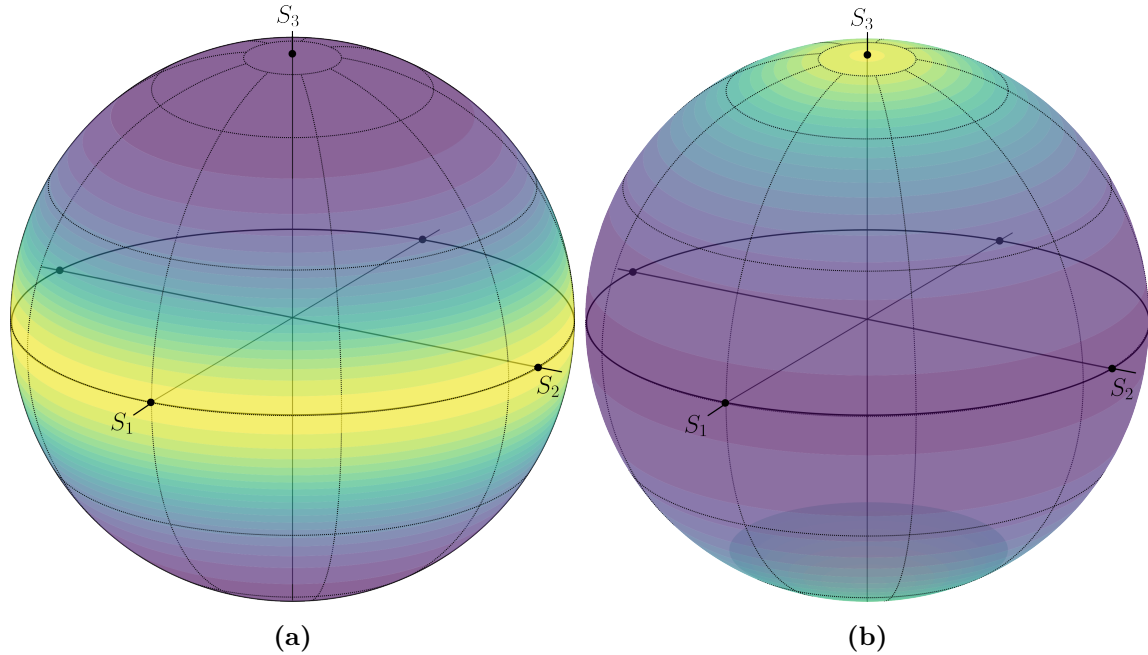


Figura 8: Gráfico de la función de densidad de probabilidad de Fisher-Bingham en la esfera de Poincaré en una escala de colores. a) Forma antípoda de la distribución cuando $\hat{\mathbf{s}} = 0$, los autovectores de Σ están alineados con los ejes de la esfera, y el autovector alineado con S_2 es mucho más grande que el autovector alineado con S_3 . b) Forma axial de la distribución cuando $\hat{\mathbf{s}} = 0$, los autovectores de Σ están alineados con los ejes de la esfera, y el autovector alineado con S_1 tiene igual magnitud que el autovector alineado con S_2 .

puede describir una dinámica de polarización que consista en la intermitencia y fluctuación alrededor de estados de polarización diametralmente opuestos. En general, se pueden dar distribuciones con simetría axial. Otro ejemplo es la distribución graficada en la figura 8a en la que la probabilidad está distribuida a lo largo del ecuador y se adaptaría a una dinámica de polarización que consista en fluctuaciones de ese tipo.

Las transformaciones de la función de densidad de probabilidad $f(\mathbf{s}; \Sigma)$ asociadas con un haz de luz que interactúa con medios ópticos lineales se pueden determinar usando las reglas de transformación para la matriz de coherencia de segundo (ecuación 2.13) y cuarto orden (ecuación 2.28). A partir de las matrices $\mathbf{\Gamma}'$ y $\mathbf{\Gamma}'^{(2)}$ transformadas se pueden determinar los parámetros κ , $\hat{\mathbf{s}}$ y la matriz de covarianza Σ de $f(\mathbf{s}; \Sigma)$ tras la transformación. La forma que asuma la función $f(\mathbf{s}; \Sigma)$ está completamente determinada por la función del grado de coherencia de segundo orden $\gamma(\tau)$ y de cuarto orden $\gamma^{(2)}(\tau)$. De esta manera, la función de densidad de probabilidad, que describe la dinámica de la polarización y sus transformaciones, depende exclusivamente de las funciones de coherencia de una fuente de luz.

2.3.3. Distribución de probabilidad de Kent

Uno de los casos particulares de la distribución de Fisher-Bingham es la distribución de Kent (Kent, 1982), las cuales generan contornos de probabilidad elípticos alrededor de un vector dirección media. La densidad de probabilidad asociada con fuentes de luz cuya dinámica de polarización consiste en ese tipo de fluctuaciones, alrededor de su estado de polarización medio, se puede describir mediante la distribución de Kent como fue propuesto en (Hernandez-Cely y cols., 2023):

$$f(\mathbf{s}; \kappa, \beta) = \frac{1}{c(\kappa, \beta)} \exp\left\{ \kappa \boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{s} + \beta \left[(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \mathbf{s})^2 - (\boldsymbol{\gamma}_3 \cdot \mathbf{s})^2 \right] \right\}, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{S} representa un vector de Poincaré, los $\boldsymbol{\gamma}_i$ son vectores ortonormales que definen las direcciones principales de la distribución y son los mismos vectores que organizan la matriz \hat{Q} en la ecuación 2.18. El factor

$$c(\kappa, \beta) = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\Gamma(j + 1)} \beta^{2j} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{2j + \frac{1}{2}} I_{2j + \frac{1}{2}}(\kappa), \quad (2.38)$$

es la constante de normalización de la distribución, donde $I_{2j + \frac{1}{2}}(\kappa)$ son las funciones modificadas de Bessel, $\Gamma(x)$ es la función Gamma, el parámetro κ determina la concentración alrededor del eje $\boldsymbol{\gamma}_1$, que en este caso es el vector dirección media, y el parámetro β determina la elipticidad del contorno de probabilidad de la distribución, cuyo eje máximo y mínimo coincide con los ejes $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$.

El primer momento de esta distribución viene dado por:

$$\mathbf{E}[\mathbf{s}] = \frac{c_k}{c(\kappa, \beta)} \boldsymbol{\gamma}_1, \quad (2.39)$$

donde $c_k = \partial c(\kappa, \beta) / \partial \kappa$. Así, el grado de polarización de primer orden viene dado por la magnitud del primer momento de la distribución:

$$P = \frac{c_k}{c(\kappa, \beta)}. \quad (2.40)$$

Por otro lado, el segundo momento de la distribución corresponde con la matriz de covarianza

$$\mathbf{E}[\mathbf{ss}^T] = \Sigma = \hat{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \hat{Q}^T, \quad (2.41)$$

donde la matriz $\hat{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ contiene los autovectores de Σ y sus autovalores λ_i son dados

por las siguientes expresiones:

$$\lambda_1 = \frac{c_k}{c(\kappa, \beta)}, \quad (2.42)$$

$$\lambda_2 = \frac{c(\kappa, \beta) - c_{kk} + c_\beta}{2c(\kappa, \beta)}, \quad (2.43)$$

$$\lambda_3 = \frac{c(\kappa, \beta) - c_{kk} - c_\beta}{2c(\kappa, \beta)}, \quad (2.44)$$

donde $c_{kk} = \partial^2 c(\kappa, \beta) / \partial \kappa^2$ y $c_\beta = \partial c(\kappa, \beta) / \partial \beta$. Cada autovalor λ_i representa una medida de la varianza de la distribución a lo largo del autovector γ_i como se explicó con la figura 6.

2.4. Conclusiones

EL formalismo matemático para describir los haces de luz con estados de polarización dinámicos se puede aplicar también a fuentes de luz cuya dinámica de polarización fluctúa aleatoriamente en el tiempo. Aplicando la teoría de la coherencia a los estados de polarización dependientes del tiempo, bajo la hipótesis de ergodicidad y estacionariedad débil, se puede formular una teoría para describir los observables de la polarización para fuentes de luz aleatorias. Por un lado, se formuló el primer momento estadístico definido como el estado de polarización promedio. Se mostró que este corresponde con la matriz de coherencia de segundo orden. Por otro lado, se formuló el segundo momento estadístico como la matriz de covarianza de los parámetros de Stokes la cual puede ser determinada a partir de la matriz de coherencia de cuarto orden. Se derivaron reglas de transformación de estos dos momentos estadísticos que tienen en cuenta el cambio del grado de polarización asociado a cada matriz, es decir, su despolarización cuando el haz de luz incoherente interactúa con medios ópticos descritos por operadores lineales, en particular, los retardadores.

Los momentos estadísticos descritos en este capítulo se definieron usando el formalismo algebraico de los parámetros de Stokes y de las matrices de Polarización. Sin embargo, es posible efectuar la misma metodología usando vectores de Pauli o cuaterniones para explorar sus ventajas al momento de trabajar con luz parcialmente polarizada y con la teoría de la coherencia. Adicionalmente, se propusieron distribuciones direccionales para modelar la dinámica de las fluctuaciones del estado de polarización. Estas distribuciones se definen en términos del primer y segundo momento. Esto implica que todas las reglas de transformación derivadas para estos también se aplican a las funciones de densidad de probabilidad. Es posible también definir distribuciones de probabilidad ya no solamente para el vector \mathbf{s} sino para cualquiera de las otras representaciones algebraicas como la matriz de polarización, el vector de Stokes, los vectores de Pauli o los cuaterniones.

El desarrollo realizado en este capítulo es totalmente temporal. Para tener en cuenta efectos estocásticos en el frente de onda de un haz de luz, y así tener una teoría completa de la polarización, un desarrollo análogo donde se tenga en cuenta también la coherencia espacial debe realizarse en una futura investigación. Esto permitiría analizar también la estadística de la polarización en el frente de onda y estudiar con una teoría estadística de coherencia de segundo y cuarto orden los haces vectoriales y los haces con momento angular orbital.

Capítulo 3

El fenómeno de la despolarización de la luz

3.1. Despolarización temporal de la luz a través de medios birrefringentes

Una fuente de luz incoherente emite una radiación que posee una polarización parcial, esto es, tiene una dinámica de polarización aleatoria en el tiempo. Sin embargo, este tipo de fuentes puede ser polarizada mediante el uso de un polarizador lineal diseñado para el ancho espectral de la fuente. Comúnmente, los polarizadores lineales consisten de un material dicróico que absorbe una de las componentes vectoriales lineales del campo eléctrico y solo permite la propagación de la otra componente ortogonal. Para la luz visible, esta tasa de extinción entre las componentes del campo eléctrico llega a ser del orden de 1000 : 1 para películas polarizadoras dicróicas y hasta del orden de 100000 : 1 para polarizadores de cristal como el polarizador de Glan-Thompson. Por lo tanto, se puede decir, con muy buena aproximación, que el campo eléctrico del haz emergente estará vibrando en una sola dirección y está polarizado linealmente, asumiendo la menor tasa de extinción de un polarizador, con un grado de polarización de primer orden $P = 0,999 \approx 1$. No obstante, aunque el estado de polarización esté casi completamente definido, como un estado lineal, no significa que el haz de luz haya perdido su aleatoriedad. El campo eléctrico sigue teniendo fluctuaciones aleatorias que dependen de los procesos que ocurren en la fuente durante la emisión.

En general, una fuente de luz incoherente puede ser polarizada, con un grado de polarización de primer orden muy cercano a la unidad, en cualquier estado elíptico. Para ello se necesita usar un retardador con estados propios lineales (retardador lineal) de cuarto de onda rotante de orden cero, es decir, que el retardo sea del mismo orden que la longitud de onda central de la fuente de luz y mucho menor que su ancho espectral (exactamente $\lambda/4$). La

combinación de la rotación del polarizador lineal y la rotación del retardador lineal generan todos los posibles estados $|\alpha, \chi\rangle$. Pero de nuevo, a pesar de que el estado de polarización llegue a ser definido, el campo eléctrico aún conserva su aleatoriedad. El efecto del polarizador lineal y el retardador cuarto de onda es el de generar condiciones en las fases $\phi_i(t)$ y las amplitudes $\varepsilon_i(t)$ tal que las señales aleatorias $E_1(t)$ y $E_2(t)$, que definen las componentes del campo eléctrico, se correlacionen para que el vector campo eléctrico describa una elipse y de esta manera, un estado de polarización bien definido. En otras palabras, con un grado de polarización de primer orden aproximadamente igual a la unidad $P \approx 1$.

Sin embargo, como se ha dicho ya, polarizar (aproximadamente) una fuente incoherente solo es posible si el retardador lineal que se utiliza cumple con la condición de ser de orden cero. Pero en general, las láminas retardadoras son de orden múltiple, esto es que el retardo introducido es un múltiplo entero de la longitud de onda (en el caso de un retardador cuarto de onda, el retardo introducido es de $(n + 1/4)\lambda$), y por tanto, es comparable con el ancho espectral de la fuente o, con el ancho de su función de coherencia temporal asociada. En este caso, el haz de luz, previamente polarizado linealmente, ya no se transformará en otro estado elíptico totalmente polarizado sino sufrirá un proceso de despolarización, en el que el haz emergente al retardador tiene un estado parcialmente polarizado con un grado de polarización menor que la unidad. Inicialmente, se tratará el problema de describir el proceso de despolarización de un haz de luz incoherente cuando es transformado por una o múltiples láminas retardadoras usando el formalismo algebraico para el primer momento estadístico del estado de polarización.

3.1.1. Despolarización de luz elípticamente polarizada a través de un retardador con estados propios elípticos

Examinemos el caso de la despolarización que sufre un haz de luz, inicialmente elípticamente polarizado (grado de polarización de primer orden $P = 1$), cuando se propaga por una lámina retardadora cuyos estados propios de polarización son en general elípticos. Parte de la solución a este problema fue planteado en el capítulo anterior. Inicialmente se debe tomar la matriz de coherencia Γ asociada con un estado totalmente polarizado, en la base de estados elípticos que corresponden con los estados propios del retardador. El paso siguiente es realizar la transformación de esta matriz con la del retardador de estados propios elípticos \hat{R}_δ . Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Gamma'_{ij} &= \Gamma_{ij}(0)e^{i\varepsilon_{ijk}\delta} = \Gamma_{ij}(\varepsilon_{ijk}\tau) \\ &= \langle E_i \rangle \overline{\langle E_j \rangle} \gamma(\varepsilon_{ijk}\tau),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\tau = \Delta nl/c$ es el retardo que introduce el retardador y $\langle E_i \rangle$ y $\langle E_j \rangle$ son números complejos que serán igual a la representación de las componentes del vector de Jones en la

base de estados elípticos seleccionado. Estos se pueden hallar de acuerdo al cambio de base descrito en la sección 1.2.1. A modo de ejemplo, si los estados bases son lineales entonces $\langle E_i \rangle$ y $\langle E_j \rangle$ serán igual a las componentes del vector de Jones dadas por la ecuación 1.17, y si los estados base son circulares entonces serán igual a las componentes del vector de Jones dado por la ecuación 1.28. De esta manera, solo basta con saber la base de estados de polarización con la que se está trabajando, los parámetros físicos de la lámina retardadora y la coherencia de la fuente para, a partir de la matriz de coherencia final $\mathbf{\Gamma}'$, se obtengan los observables que se esperan medir en el laboratorio como los parámetros de Stokes o el grado de polarización.

3.1.1.1. Grado de polarización

Empecemos por encontrar el grado de polarización P del haz emergente, para ello se usa la expresión dada en la ecuación 2.7 con los elementos de la matriz $\mathbf{\Gamma}'$ transformada dados por la ecuación 3.1. El grado de polarización será:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{1 - \frac{4(\Gamma'_{11}\Gamma'_{22} - \Gamma'_{12}\Gamma'_{21})}{(\Gamma'_{11} + \Gamma'_{22})^2}}, \\ &= \sqrt{1 - \frac{4(\langle E_1 \rangle^2 \langle E_2 \rangle^2 - \langle E_1 \rangle^2 \langle E_2 \rangle^2 \gamma(\tau)^2)}{(\langle E_1 \rangle^2 + \langle E_2 \rangle^2)^2}}, \end{aligned}$$

se puede simplificar la expresión usando la condición de normalización de la intensidad $\langle E_1 \rangle^2 + \langle E_2 \rangle^2 = 1$. Así, la manera como cambia el grado de polarización de un haz de luz, elípticamente polarizado y con coherencia $\gamma(\tau)$, en función del retardo introducido por un retardador con estados propios elípticos, será:

$$P(\tau) = \sqrt{1 - 4\langle E_1 \rangle^2 \langle E_2 \rangle^2 (1 - |\gamma(\tau)|^2)}. \quad (3.2)$$

Esta función entonces representa la despolarización temporal de un haz de luz incoherente debido a su propagación por un retardador con estados propios elípticos.

Un caso particular es cuando se considera un retardador con estados propios lineales. En este ejemplo las expresiones para $\langle E_1 \rangle$ y $\langle E_2 \rangle$ vienen dadas por la ecuación 1.17. Reemplazando estas expresiones en la ecuación 3.2 se puede cómo varía el grado de polarización de un haz de luz, elípticamente polarizado, que se propaga en un retardador con estados propios lineales:

$$P_{lineal}(\tau) = \sqrt{1 - [(2 \cos^2 \chi - 1)^2 \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\chi] (1 - |\gamma(\tau)|^2)}. \quad (3.3)$$

En la figura 9 se muestra el gráfico de $P_{lineal}(\tau)$ en función del ángulo de orientación α para distintos valores del ángulo de elipticidad χ . En el caso cuando $\chi = 45^\circ$ el grado de polarización $P_{lineal}(\tau) = |\gamma(\tau)|$ es una constante que iguala al valor absoluto del grado de

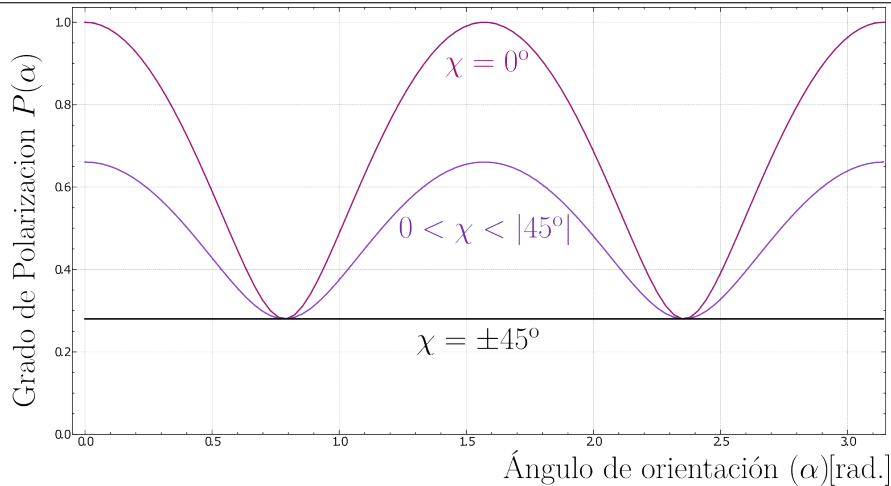


Figura 9: Gráfico del grado de polarización de un haz de luz incoherente, elípticamente polarizado, que pasa por un retardador con estados propios lineales como función del ángulo de orientación α de la elipse de polarización. Las curvas corresponden con una fuente de luz con grado de coherencia $\gamma(\tau)$ Gaussiano, con longitud de coherencia de $20\mu m$ y el retardador lineal introduce una diferencia de camino óptico de $18\mu m$.

coherencia de la fuente evaluado en el retardo τ . Para otros valores de elipticidad el grado de polarización varía en función de α alcanzando su valor mínimo cuando los ejes mayor y menor de la elipse de polarización son ortogonales a los ejes principales del retardador, y alcanzando el valor máximo cuando los ejes mayor y menor son paralelos a los ejes principales del retardador.

Para el caso de un retardador con estados propios circulares, se usan las expresiones para $\langle E_1 \rangle$ y $\langle E_2 \rangle$ dadas por la ecuación 1.28. Se reemplazan estas expresiones en la ecuación 3.2 y se obtiene cómo varía el grado de polarización de un haz de luz, elípticamente polarizado, que interactúa con un retardador con estados propios circulares:

$$P_{circ}(\tau) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} [\cos 4\chi + 1] (1 - |\gamma(\tau)|^2)}. \quad (3.4)$$

Para este ejemplo el grado de polarización no depende del ángulo de orientación sino solamente de la elipticidad. Cuando $\chi = 0^\circ$ entonces $P_{circ}(\tau) = |\gamma(\tau)|$, alcanzando su valor mínimo. Por el contrario, $P_{circ}(\tau) = 1$ cuando $\chi = \pm 45^\circ$, ya que se está incidiendo con los estados propios de polarización del retardador y por lo tanto, no hay despolarización.

3.1.1.2. Parámetros de Stokes promedio

Ahora se pueden encontrar los parámetros de Stokes promedio asociados con la matriz $\mathbf{\Gamma}'$ obtenida luego de la transformación con el retardador. Usando la ecuación 2.5 se encuentran

las expresiones para cada uno de los $\langle s'_i(t) \rangle$. En el caso de $\langle s'_0(t) \rangle$ y $\langle s'_1(t) \rangle$ permanecen igual:

$$\langle s'_0(t) \rangle = \Gamma_{12}(0) + \Gamma_{21}(0) = \langle s_0(t) \rangle, \quad (3.5)$$

$$\langle s'_1(t) \rangle = \Gamma_{11}(0) - \Gamma_{22}(0) = \langle s_1(t) \rangle. \quad (3.6)$$

Por otro lado, en el caso de los otros dos parámetros de Stokes promedio podemos usar el resultado obtenido en la sección 1.6.3 (en las ecuaciones 1.96 y 1.98) con la diferencia de que ahora se realiza el promedio temporal, de esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle s'_2(t) \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\Gamma_{12}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{12}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right], \\ \langle s'_3(t) \rangle &= \frac{i}{2} \left[\Gamma_{12}(0)\gamma(-\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{12}(0)\gamma(-\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(-\tau) + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, usando la propiedad de la función de correlación de segundo orden $\gamma(-\tau) = \overline{\gamma(\tau)}$ las anteriores expresiones para los parámetros de Stokes $\langle s'_2(t) \rangle$ y $\langle s'_3(t) \rangle$ se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle s'_2(t) \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\Gamma_{12}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{21}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{12}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{21}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right], \\ \langle s'_3(t) \rangle &= \frac{i}{2} \left[\Gamma_{12}(0)\overline{\gamma(\tau)} - \Gamma_{21}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) - \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{12}(0)\overline{\gamma(\tau)} - \Gamma_{21}(0)\overline{\gamma(\tau)} + \Gamma_{12}(0)\gamma(\tau) + \Gamma_{21}(0)\gamma(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Si se agrupan los términos con factor común y se reducen las expresiones con la parte real e imaginaria en cada caso, o sea, $2 \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} = \gamma(\tau) + \overline{\gamma(\tau)}$ y $2i \operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\} = \gamma(\tau) - \overline{\gamma(\tau)}$ se obtienen las expresiones buscadas:

$$\begin{aligned} \langle s'_2(t) \rangle &= [\Gamma_{12}(0) - \Gamma_{21}(0)] \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} + i[\Gamma_{12}(0) - \Gamma_{21}(0)] \operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}, \\ &= \langle s_2(t) \rangle \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} + \langle s_3(t) \rangle \operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \langle s'_3(t) \rangle &= [\Gamma_{12}(0) - \Gamma_{21}(0)] \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} + i[\Gamma_{12}(0) - \Gamma_{21}(0)] \operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}, \\ &= \langle s_2(t) \rangle \operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\} + \langle s_3(t) \rangle \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente, ahora que se han obtenido los parámetros de Stokes promedio de la matriz final $\mathbf{\Gamma}'$ en términos de los parámetros de Stokes de la matriz inicial $\mathbf{\Gamma}$, se puede encontrar una regla de transformación para el vector de Stokes promedio $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$, al menos solo para el caso del birrefringente. La solución a esto se obtiene analizando las expresiones ya encontradas

para los $\langle s'_i(t) \rangle$ y se encuentra que la transformación asociada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \langle s'_0(t) \rangle \\ \langle s'_1(t) \rangle \\ \langle s'_2(t) \rangle \\ \langle s'_3(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}\{\gamma(\tau)\} & \text{Im}\{\gamma(\tau)\} \\ 0 & 0 & -\text{Im}\{\gamma(\tau)\} & \text{Re}\{\gamma(\tau)\} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \langle s_0(t) \rangle \\ \langle s_1(t) \rangle \\ \langle s_2(t) \rangle \\ \langle s_3(t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde la matriz de transformación corresponde con la matriz de Mueller equivalente que tiene en cuenta los efectos de un retardador sobre la coherencia de una fuente de luz, lo que significa que también incluye el efecto de despolarización. Esta es la misma matriz de despolarización de un retardador (no dispersivo) que se propone en el artículo (Dlugnikov, 1984), deducida por otros medios diferentes al de este texto. En ese artículo se usa una integración sobre la matriz de Mueller para estudiar la despolarización.

Sin embargo, esta matriz tiene un problema y es que no cumple las mismas propiedades que las matrices de Mueller regulares en el sentido que el producto de estas matrices no representa el efecto de múltiples retardadores sobre una fuente incoherente. A modo ejemplo, podríamos considerar el efecto producido por dos retardadores idénticos consecutivos, cuyos ejes principales de propagación están alineados, sobre una fuente incoherente. El producto de las matrices de Mueller equivalentes asociadas con cada retardador no es igual a la matriz de Mueller equivalente del sistema compuesto por los retardadores, ya que en general, para cualquier función $\gamma(\tau)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}\{\gamma(\tau_1 + \tau_2)\} & \text{Im}\{\gamma(\tau_1 + \tau_2)\} \\ 0 & 0 & -\text{Im}\{\gamma(\tau_1 + \tau_2)\} & \text{Re}\{\gamma(\tau_1 + \tau_2)\} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}\{\gamma(\tau_1)\} & \text{Im}\{\gamma(\tau_1)\} \\ 0 & 0 & -\text{Im}\{\gamma(\tau_1)\} & \text{Re}\{\gamma(\tau_1)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}\{\gamma(\tau_2)\} & \text{Im}\{\gamma(\tau_2)\} \\ 0 & 0 & -\text{Im}\{\gamma(\tau_2)\} & \text{Re}\{\gamma(\tau_2)\} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Esto implica que hay que encontrar de manera independiente la matriz de Mueller equivalente para cada sistema de elementos ópticos que producen despolarización. Para encontrarla se puede usar el método de integración propuesto en (Dlugnikov, 1984) o el método propuesto en este texto. Más adelante se tratará el caso de la despolarización en una placa de onda compuesta por dos retardadores usando el método que se ha explicado aquí. No obstante, no será de interés intentar hallar esa matriz de Mueller equivalente. Resulta más directo y simple realizar la transformación dada por la ecuación 2.13 y a partir de ahí extraer los parámetros de Stokes promedio y el grado de polarización.

3.1.2. Despolarización a través de un retardador lineal rotante

Consideremos ahora el ejemplo de la despolarización de un haz de luz incoherente, linealmente polarizado, que incide sobre un retardador lineal que tiene la libertad de rotar

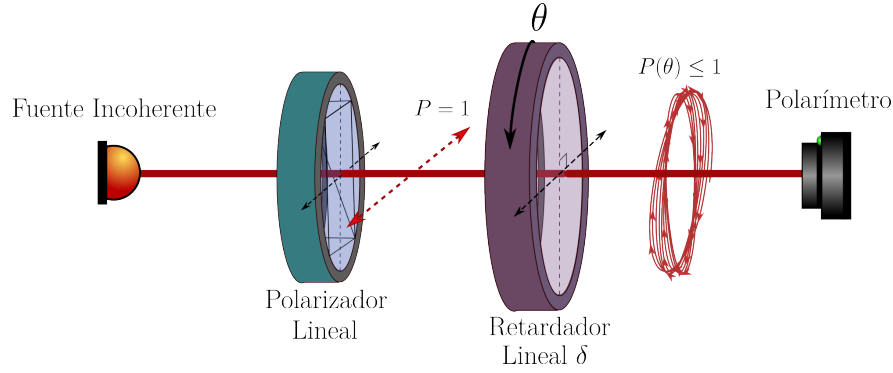


Figura 10: Gráfico del esquema experimental para medir la despolarización de un haz de luz incoherente linealmente polarizado incidiendo sobre un retardador (que introduce un retardo de $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$) con estados propios lineales que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El grado de polarización $P(\theta)$ depende del ángulo de rotación y de la coherencia de la fuente.

con un ángulo θ como se observa en la figura 10. Para realizar el cálculo primero se debe tomar el operador del retardador lineal \hat{R}_δ y transformarlo a un sistema de coordenadas rotado usando la matriz de rotación $\hat{R}(\theta)$, esto es:

$$\hat{W} = \hat{R}(\theta)^{-1} \hat{R}_\delta \hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta + e^{i\delta} \cos^2 \theta & (e^{i\delta} - 1) \cos \theta \sin \theta \\ (e^{i\delta} - 1) \cos \theta \sin \theta & e^{i\delta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Ahora se opera con la matriz \hat{W} sobre la matriz de coherencia asociada con un haz de luz linealmente polarizado:

$$\mathbf{\Gamma}' = \hat{W} \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{W}^\dagger. \quad (3.12)$$

Luego de realizar la operación matricial, reducir su trigonometría y simplificar (estos cálculos simbólicos fueron realizados con *Maxima*) obtenemos la siguiente matriz:

$$\mathbf{\Gamma}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\Gamma_{xx}(0) [(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \cos 4\theta - e^{i\delta} - e^{-i\delta} - 6] & -\Gamma_{xx}(0) [(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \sin 4\theta + 2(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \sin 2\theta] \\ -\Gamma_{xx}(0) [(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \sin 4\theta - 2(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \sin 2\theta] & \Gamma_{xx}(0) [(e^{i\delta} + e^{-i\delta} - 2) \cos 4\theta - e^{i\delta} - e^{-i\delta} + 2] \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

y al aplicar las traslaciones temporales a la función de coherencia y reducir las expresiones con la parte real e imaginaria se obtiene:

$$\mathbf{\Gamma}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\Gamma_{xx}(0) [2(\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) \cos 4\theta - 2\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 6] & -\Gamma_{xx}(0) [2(\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) \sin 4\theta + 4i \text{Im}\{\gamma(\tau)\} \sin 2\theta] \\ -\Gamma_{xx}(0) [2(\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) \sin 4\theta - 4i \text{Im}\{\gamma(\tau)\} \sin 2\theta] & \Gamma_{xx}(0) [2(\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) \cos 4\theta - 2\text{Re}\{\gamma(\tau)\} + 2] \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde hay que recordar que $\Gamma_{xx}(0) = \langle E_x \rangle^2$, el cual en este caso se puede tomar $\langle E_x \rangle^2 = 1$ debido a la condición de normalización.

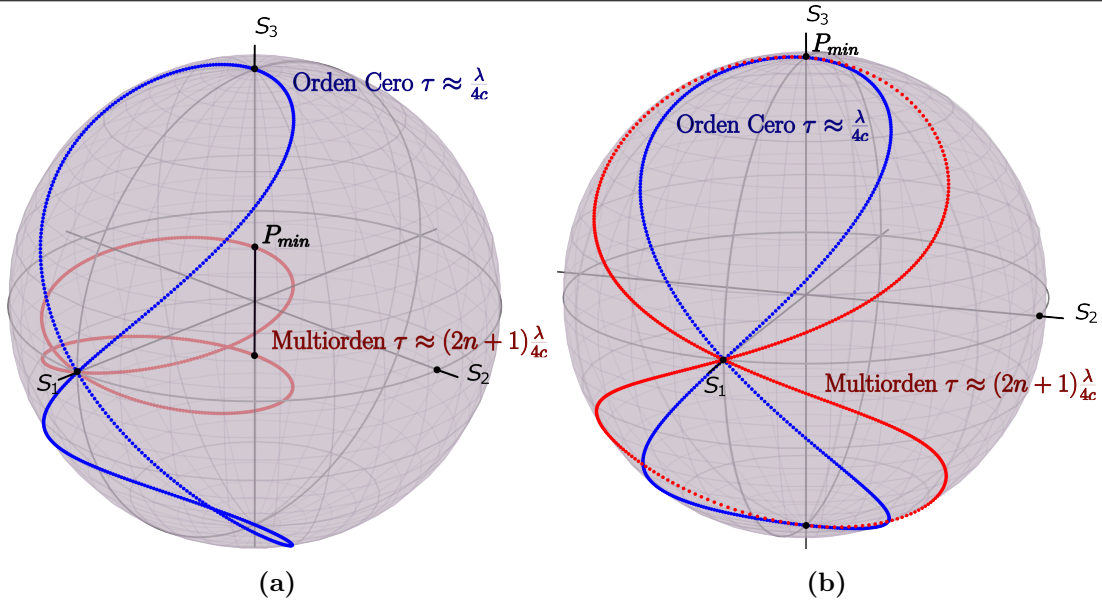


Figura 11: Gráfico del vector medio $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ asociado al estado de polarización del haz emergente a un retardador lineal que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El estado inicial corresponde con un haz linealmente polarizado con coherencia Gaussiana y un tiempo de coherencia de $\tau_c \approx 20\mu\text{m}/c$. La curva azul corresponde a un retardador lineal de orden cero, el cual no despolariza, y la curva roja a un retardador de orden múltiple el cual sí logra despolarizar el haz de luz. a) El vector $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ para un haz despolarizado se encuentra dentro de la esfera ya su magnitud es menor que la unidad. b) Se grafica el vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ normalizado con respecto a su magnitud o grado de polarización, esto permite tener una mejor visualización en la esfera de Poincaré.

Se ha dejado de lado la generalidad de tomar cualquier estado elíptico incidente por simplicidad. El único efecto que se quiere mostrar aquí es la curva en la esfera de Poincaré en función del ángulo θ de rotación del retardador. Para ello es necesario hallar los parámetros de Stokes asociados con $\mathbf{\Gamma}'$ usando la ecuación 2.5:

$$\langle \mathbf{S}' \rangle = \begin{pmatrix} \langle s'_0(t) \rangle \\ \langle s'_1(t) \rangle \\ \langle s'_2(t) \rangle \\ \langle s'_3(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} (\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) (\cos 4\theta - 1) + 1 \\ -\frac{1}{2} (\text{Re}\{\gamma(\tau)\} - 1) \sin 4\theta \\ \text{Im}\{\gamma(\tau)\} \sin 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Donde el vector promedio $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle = (\langle s'_1(t) \rangle, \langle s'_2(t) \rangle, \langle s'_3(t) \rangle)^T$ que representa el estado de polarización sobre la esfera de Poincaré ya no es un vector unitario sino que su módulo $|\langle \mathbf{s}'(t) \rangle| = P \leq 1$ es el grado de polarización, que en general para $\tau \neq 0$, es menor que la unidad.

A modo de ejemplo, pensemos en el caso de un haz de luz que tiene un grado complejo

de coherencia Gaussiano, es decir,

$$\gamma(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2},$$

y que se transforma a través de un retardador de orden cero y uno de orden múltiple a medida que estos rotan. La trayectoria que describe el vector medio $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ en cada caso se puede visualizar en la figura 11a. El retardador de orden cero introduce descorrelaciones mínimas, lo que hace que $\Gamma(\tau) \approx 1$ y así, el haz transforme como un haz completamente coherente como se aprecia en el comportamiento de la curva azul. Por otro lado, cuando el retardador es de orden múltiple se introducen descorrelaciones tal que $\gamma(\tau) < 1$ es apreciablemente menor que la unidad y por lo tanto, se observa una despolarización en la que el vector $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ tiene una magnitud menor que la unidad y que varía en función del ángulo θ , como se aprecia en la curva roja. Vale la pena remarcar que el grado de polarización alcanza su valor mínimo en los puntos extremos de la curva, es decir, cuando es paralelo o antiparalelo al eje S_3 . Esto ocurre cuando $\theta = 45^\circ$, y es máximo cuando coincide con el estado de polarización propio del retardador, independientemente si es de orden cero o de orden múltiple.

Otra manera alternativa de analizar gráficamente el comportamiento sobre la esfera de Poincaré del proceso de despolarización consiste en graficar el vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}}' \rangle$, es decir, dividir el vector promedio $\langle \mathbf{s}'(t) \rangle$ por su magnitud o grado de polarización $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$. El resultado gráfico se puede visualizar en la figura 11b. Hay dos razones para hacer esto, la primera es que se puede visualizar fácilmente como cambia la dirección del estado de polarización medio. Esto es importante porque permite intuir como está cambiando el centro de masa de la función de densidad de probabilidad sobre la esfera de Poincaré en función de θ . La segunda razón es que el polarímetro utilizado en el laboratorio, el *PAX5710VIS-T* de *Thorlabs Inc.*, está configurado para medir los parámetros de Stokes $\langle \mathbf{s}_1(t) \rangle$, $\langle \mathbf{s}_2(t) \rangle$ y $\langle \mathbf{s}_3(t) \rangle$ normalizados respecto al grado de polarización y también sus coordenadas esféricas $(1, 2\alpha, 2\chi)$. Por lo tanto, hacer lo mismo teóricamente permite comparar y contrastar más fácilmente con los datos experimentales.

Se realizó un experimento con una fuente LED *M625L4-C1 - 625 nm* de *Thorlabs Inc.* El haz de luz de la fuente de colimó, se polarizó horizontalmente y posteriormente se hizo incidir sobre un retardador lineal multiorden de cuarto de onda para $\lambda = 633 [nm]$; el retardador utilizado fue el *WPMQ05M-633* de *Thorlabs Inc.* Posteriormente se midió el estado de polarización del haz emergente usando el polarímetro *PAX5710VIS-T*. La fuente LED está conectada a un sistema electrónico que permite variar la potencia y se varió de tal manera que su longitud de onda central fuese de aproximadamente $\lambda_0 = 633 [nm]$, esto para que el retardador utilizado se comportara lo más cercano posible a un $\lambda/4$ para esa fuente.

Se midieron los parámetros de Stokes en función del ángulo de rotación θ , en particular se varió en el rango de $\theta = [0, 180^\circ]$ con pasos de $5^\circ \pm 2^\circ$. Finalmente, se graficaron junto con la curva teórica como se observa en la figura 12. En el cálculo teórico se usó un grado de

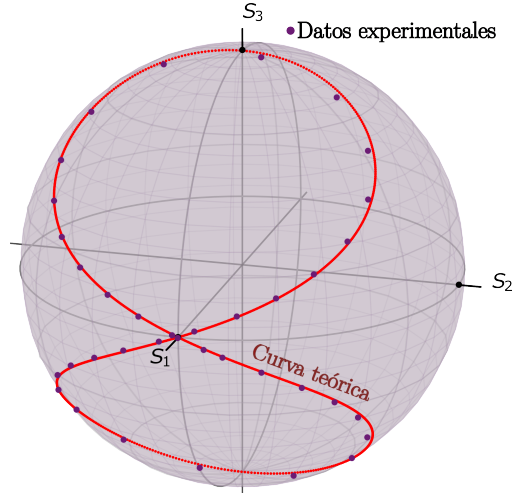


Figura 12: Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{s} \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ experimental y teórico. Los puntos representan el la dirección media del estado de polarización $\langle \hat{s} \rangle$ medido con el polarímetro *PAX5710VIS-T* para el haz emergente al retardador rotante. La curva roja es el vector dirección media $\langle \hat{s} \rangle$ teórico calculado usando las expresiones teóricas dadas por la ecuación 3.15 . La coherencia $\gamma(\tau)$ tomada fue Gaussiana con $\tau_c = 20\mu m/c$ y un retardo $\tau = 97 \frac{\lambda_0}{4c}$.

coherencia $\gamma(\tau)$ de tipo Gaussiano ya que se ajusta aproximadamente bien con fuentes de tipo LED como la que se estaba utilizando. Se escogió como tiempo de coherencia $\tau_c = 20\mu m/c$ ya que, según el manual de la fuente LED *M625L4-C1 - 625 nm*, esta tiene un ancho espectral $\Delta\lambda \approx 17nm$ lo que significa que tiene una longitud de coherencia $l_c \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 20\mu m$. El retardo τ utilizado para calcular la curva teórica fue ajustado usando el algoritmo *curve fit* de la librería de Python *scipy.optimize*. El valor ajustado fue de $\tau \approx 97 \frac{\lambda_0}{4c}$ siendo $\lambda_0 = 0,633[\mu m]$, esto significa que la diferencia de camino óptico que introduciría el retardador es de aproximadamente $\Delta L \approx 15\mu m$. El retardador *M625L4-C1 - 625 nm* utilizado es, según el fabricante, de cuarzo cristalino, el cual tiene una birrefringencia $\Delta n \approx 0,0091$ para una $\lambda = 633nm$. Esto implica que el grosor del retardador debe ser de aproximadamente $l \approx 1,6[mm]$ lo que resulta razonable. De esta manera, se puede concluir que los cálculos teóricos se ajustan muy bien a los puntos experimentales. En la figura 12 se observa que la curva teórica no se ajusta perfectamente a los puntos experimentales, esto puede ser debido a no tener conocimiento de los parámetros exactos de la fuente, como su función de coherencia exacta, ni los parámetros del retardador, y en pequeña medida también a los efectos de dispersión del cuarzo que no son considerados dentro del modelo planteado en este trabajo.

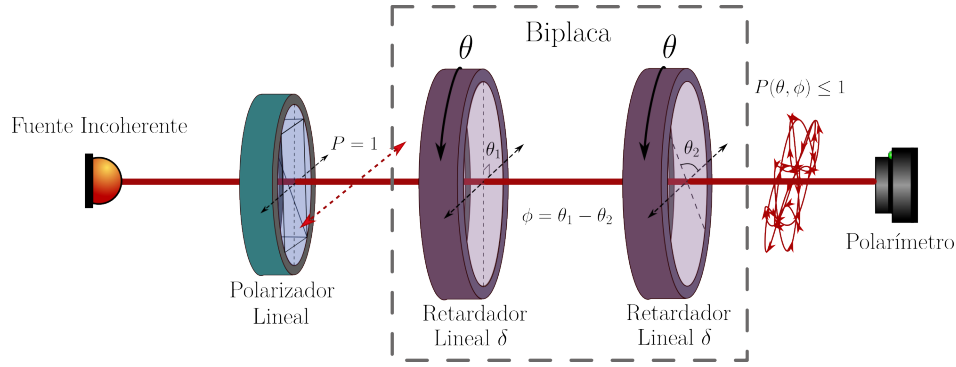


Figura 13: Gráfico del esquema experimental para medir la despolarización de un haz de luz incoherente linealmente polarizado incidiendo sobre una biplaca compuesta por dos retardadores lineales idénticos (que introduce un retardo de $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$) de estados propios lineales. La biplaca tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El grado de polarización $P(\theta, \phi)$ depende del ángulo de rotación, del ángulo entre los ejes principales de los retardadores y de la coherencia de la fuente.

3.1.3. Despolarización a través de una placa de onda compuesta

Ahora consideremos el caso de un haz de luz elípticamente polarizado que incide sobre una biplaca, esto es, dos retardadores lineales cuyos ejes principales en general forman un ángulo $\phi = \theta_1 - \theta_2$ como se muestra en la figura 13. La biplaca puede rotar con un ángulo θ , lo que significa que los dos retardadores lineales rotan simultáneamente manteniendo la orientación entre sus ejes principales. En este ejemplo se quiere estudiar como varía el grado de polarización y los parámetros de Stokes del haz emergente en función del ángulo θ .

Para realizar el calculo teórico de la transformación, tomamos un caso particular en el que los dos retardadores lineales que componen la biplaca tienen el mismo desfase δ . El primer retardador está orientado horizontalmente, por lo tanto tiene asociado un operador \hat{R}_δ . El segundo retardador está rotado con respecto al primero un ángulo ϕ , por lo tanto su operador asociado será $\hat{R}^{-1}(\phi) \hat{R}_\delta \hat{R}(\phi)$, por lo tanto, el operador que representa el sistema óptico, o sea, la biplaca que puede rotar será:

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \hat{R}^{-1}(\theta) \left[\hat{R}_\delta \left(\hat{R}^{-1}(\phi) \hat{R}_\delta \hat{R}(\phi) \right) \right] \hat{R}(\theta) \\ &= \hat{R}^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} e^{i2\delta} \cos^2 \phi + e^{i\delta} \sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi (e^{i2\delta} - e^{i\delta}) \\ \cos \phi \sin \phi (e^{i\delta} - 1) & \cos^2 \phi + e^{i\delta} \sin^2 \phi \end{pmatrix} \hat{R}(\theta), \end{aligned} \quad (3.16)$$

posteriormente hay que transformar la matriz de coherencia $\mathbf{\Gamma}$ asociada con un estado de polarización elíptico con el operador \hat{W} que representa la biplaca rotante:

$$\mathbf{\Gamma}' = \hat{W} \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(0) & \Gamma_{xy}(0) \\ \Gamma_{yx}(0) & \Gamma_{yy}(0) \end{pmatrix} \hat{W}^\dagger. \quad (3.17)$$

La operación es algo extensa algebraicamente por lo que los cálculos simbólicos fueron hechos con el software *Maxima*. Una vez realizado el cálculo, aplicado la traslación temporal al grado de coherencia y reducido las ecuaciones con la parte real e imaginaria obtenemos el siguiente resultado para las componentes de Γ' :

$$\begin{aligned}
 \Gamma'_{xx} = & -\left\{2(\operatorname{Re}\{\gamma(2\tau)\}) - 1\right\} \left[2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}(\sin(4\theta + 4\phi) + \sin 4\theta + 2\sin(4\theta + 2\phi))\right. \\
 & + (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(\cos(4\theta + 2\phi) + \cos 4\theta + 2\cos(4\theta + 4\phi)) \left. \right] \\
 & + 4i(\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\} + 2\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\})(2i\operatorname{Im}\{\Gamma_{xy}\}\sin(2\theta + 2\phi)) \\
 & - 16\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\}\operatorname{Im}\{\Gamma_{xy}\}\sin 2\theta - 8(\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\} - 2\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\})\operatorname{Im}\{\Gamma_{xy}\}\sin(2\theta - 2\phi) \\
 & + 2\operatorname{Re}\{\gamma(2\tau)\} \left[-2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}(\sin 4\phi + 2\sin 2\phi) - (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(\cos 4\phi + 2\cos 2\phi + 1)\right] \\
 & + 8\operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} \left[2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}\sin 4\phi + (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(\cos 4\phi - 1)\right] - 10\Gamma_{yy} - 22\Gamma_{xx} \\
 & + 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}(4\sin 2\phi - 6\sin 4\phi) + (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(4\cos 2\phi - 6\cos 4\phi) \left. \right\} / 32, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

y la otra componente diagonal Γ'_{yy} se puede determinar usando el hecho de que la transformación \hat{W} no altera la intensidad total del haz, por lo que su traza se mantiene invariante. Así, recordando que la intensidad está normalizada, la componente Γ'_{yy} se puede determinar de la siguiente manera:

$$\Gamma'_{yy} = 1 - \Gamma'_{xx}. \quad (3.19)$$

Ahora, para la componente Γ'_{xy} , realizando los cálculos se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 \Gamma'_{xy} = & \left\{2(\operatorname{Re}\{\gamma(2\tau)\}) - 1\right\} \left[-(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(\sin(4\theta + 4\phi) + \sin 4\theta + 2\sin(4\theta + 2\phi))\right. \\
 & + 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}(\cos(4\theta + 4\phi) + \cos 4\theta + 2\cos(4\theta + 2\phi)) \left. \right] \\
 & + 4i(\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\} - 2\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}) \left[-(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})\sin(2\theta + 4\phi) + 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}\cos(2\theta + 4\phi)\right. \\
 & + 2i\operatorname{Im}\{\Gamma_{xy}\}\cos(2\theta - 2\phi) \left. \right] + 4i(\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\} + 2\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\})(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})\sin 2\theta \\
 & + 4i[\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\}(3\Gamma_{xy} + \Gamma_{yx}) + 4i\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}\operatorname{Im}\{\Gamma_{xy}\}]\cos(2\theta + 2\phi) \\
 & + 4i[\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\}(3\Gamma_{xy} - \Gamma_{yx}) + 4\operatorname{Im}\{\gamma(\tau)\}\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}]\cos 2\theta \\
 & - 8i\operatorname{Im}\{\gamma(2\tau)\}(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})\sin(2\theta + 2\phi) \\
 & + 2\operatorname{Re}\{\gamma(2\tau)\} \left[-(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(\sin 4\phi + 2\sin 2\phi) + 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}\cos 4\phi\right. \\
 & + (6\Gamma_{xy} - 2\Gamma_{yx})\cos 2\phi + 5\Gamma_{xy} - 3\Gamma_{yx} \left. \right] + (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})(4\sin 2\phi - 6\sin 4\phi) \\
 & + 8\operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\} \left[(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})\sin 4\phi - 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}\cos 4\phi + 4\right] + 12\operatorname{Re}\{\Gamma_{xy}\}\cos 4\phi \\
 & - (12\Gamma_{xy} - 4\Gamma_{yx})\cos 2\phi + 14\Gamma_{xy} - 2\Gamma_{yx} \left. \right\} / 32, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

finalmente, para hallar la componente Γ'_{yx} se usa la propiedad hermitica de la matriz de

coherencia, esto es:

$$\Gamma'_{yx} = \overline{\Gamma'_{xy}}. \quad (3.21)$$

Ahora examinemos algunos casos experimentales y su respectiva comparación con el cálculo teórico.

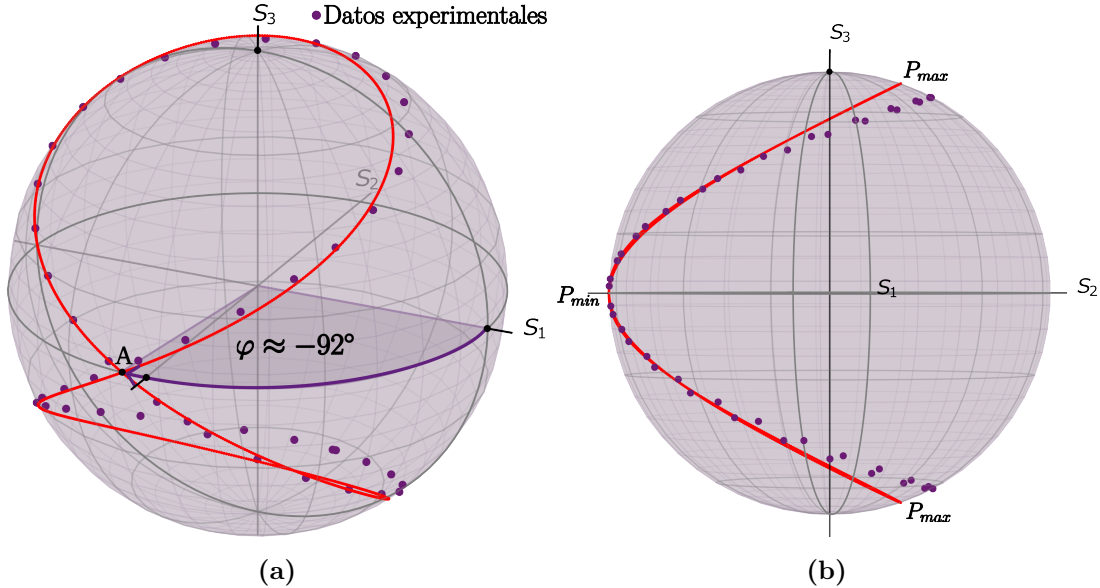


Figura 14: Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{s}' \rangle = \langle s'(t) \rangle / P$ asociado al estado de polarización del haz emergente a una biplaca compuesta de dos retardadores lineales $\lambda/4$ con un ángulo $\phi \approx -44^\circ$ que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . El estado inicial corresponde con un haz linealmente polarizado con coherencia Gaussiana y un tiempo de coherencia de $\tau_c \approx 25 \mu m / c$ y un retardo de $\tau \approx 105 \frac{\lambda_0}{4c}$. a) La actividad óptica dada por el ángulo φ desde el eje S_1 hasta el punto A cumple la condición $\varphi' = 2\phi - \pi$. b) Vista lateral de la gráfica, para este caso se cumple que el grado de polarización máximo P_{max} está en el punto extremo de la curva, y el mínimo P_{min} en el punto A ; en el vértice de la curva.

La despolarización a través de una biplaca se realizó experimentalmente. El esquema experimental consiste de la misma fuente LED *M625L4-C1 - 625 nm* utilizada en el experimento anterior, dos retardadores $\lambda/4$ *WPMQ05M-633*, los cuales conforman la biplaca, y el polarímetro *PAX5710VIS-T* con el que se miden los parámetros de Stokes promedio y el grado de polarización del haz emergente. Inicialmente se escogió un ángulo $\phi \approx 45^\circ$ entre los dos retardadores lineales, se colimó y se polarizó horizontalmente el haz de luz de la fuente LED y se incidió sobre la biplaca, para luego poder medir el estado de polarización del haz emergente para distintos valores de θ , en particular para el rango de $\theta = [0^\circ, 180^\circ]$ con pasos de $4^\circ \pm 2^\circ$. Posteriormente, se midió el estado de polarización emergente para el mismo rango

del ángulos θ cuando el estado de polarización incidente es circular derecho y elíptico. Este último no es cualquier estado elíptico de polarización, sino que es el estado propio de polarización de la biplaca cuando no hay despolarización, es decir, cuando se usa una fuente de luz cuya longitud de coherencia es muy grande comparada con el retardo total de la biplaca. Este último caso se analizará con el objetivo de comprobar que, para luz incoherente, los sistemas de placas compuestas no tienen asociado un estado propio de polarización.

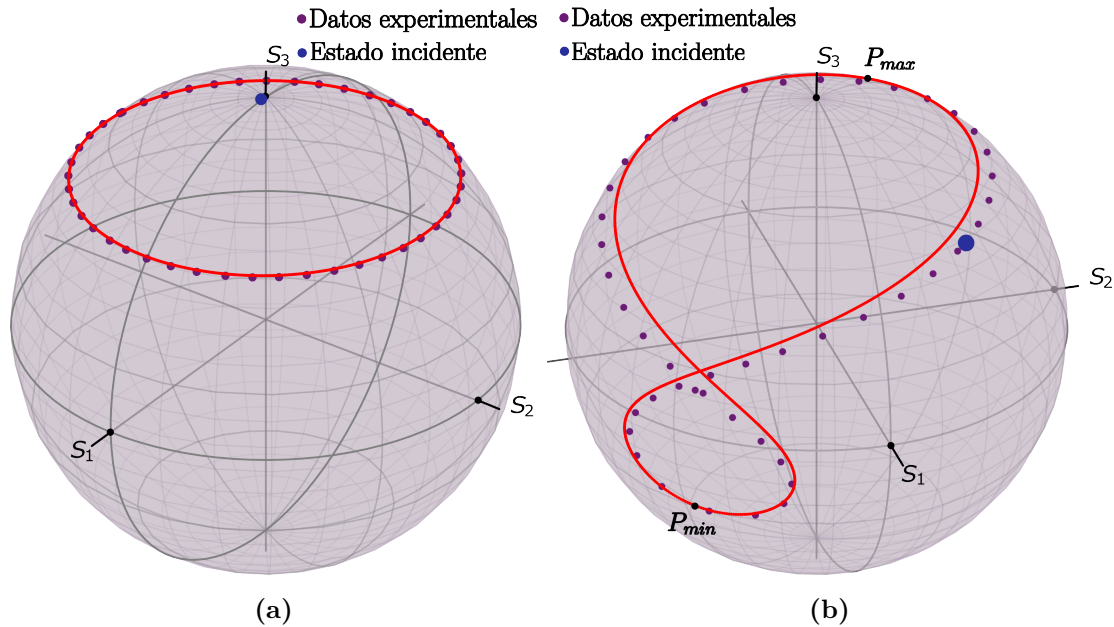


Figura 15: Gráfico del vector dirección media $\langle \hat{s}' \rangle = \langle \mathbf{s}'(t) \rangle / P$ asociado al estado de polarización del haz emergente a una biplaca compuesta de dos retardadores lineales $\lambda/4$ con un ángulo $\phi \approx -44^\circ$ que tiene la libertad de rotar con un ángulo θ . a) El gráfico corresponde con un estado de polarización incidente circular derecho $\chi_0 \approx 44,5^\circ$, la curva teórica se calculó usando una coherencia de tipo Gaussiana con $\tau_c \approx 27\mu m/c$ con un retardo en cada placa de $\tau \approx 101\frac{\lambda_0}{4c}$. b) El gráfico corresponde con estado de polarización incidente elíptico $\chi_0 \approx 20^\circ$ y $\alpha_0 \approx 22^\circ$, la curva teórica se calculó usando una coherencia de tipo Gaussiana con $\tau_c \approx 26\mu m/c$ con un retardo en cada retardador lineal de $\tau \approx 99\frac{\lambda_0}{4c}$.

Examinemos primero el caso cuando el estado de polarización incidente es horizontal. La gráfica en la esfera de Poincaré para este caso se muestra en la figura 14a. Algo a notar inicialmente es que la curva teórica no ajusta completamente a los puntos experimentales como se nota en la figura 14b, esto debido a que en el cálculo no se está tomando la función de coherencia exacta de la fuente y tampoco se conocen completamente los parámetros físicos de los retardadores lineales utilizados. Aun así, es verdad que estas incertidumbres también se tenían en el experimento de la sección anterior y no se apreciaban grandes diferencias. Sin embargo, para este caso los efectos de no tener los parámetros físicos ni la función de

coherencia exacta tienen más relevancia. Esto es debido al efecto de los dos retardadores lineales en el sistema, ya que según las expresiones encontradas para los elementos Γ'_{ij} , se tiene ahora la función de coherencia $\gamma(\tau)$ evaluada en τ y 2τ . La segunda cosa interesante a destacar es un resultado tanto experimental como teórico, los estados de polarización con el menor grado de polarización P_{min} son los que coinciden con el punto A (el vértice de la curva roja). Por otro lado, los estados con mayor grado de polarización P_{max} son los que coinciden con los puntos extremos de la curva roja como es de notar en la figura 14b. Estos puntos extremos son los valores máximos y mínimos de la curva de grado de polarización mostrada en la figura 16, la curva negra para el caso de un estado de polarización horizontal incidente.

Finalmente, debemos notar que el ángulo φ mostrado en la figura 14a corresponde con la actividad óptica asociada con la biplaca. Recordando que una placa compuesta se puede separar con una actividad óptica y un retardo lineal según el primer teorema de Jones (Hurwitz y Jones, 1941). Aquí se cumple la misma relación de ligadura que para las fuentes coherentes mostrado en (Pabón y cols., 2023), es decir, se cumple que $\varphi = 2\phi - \pi$, a pesar de exhibir despolarización. Experimentalmente el ángulo de la biplaca fue de $\phi \approx 44^\circ$, por lo tanto, la actividad óptica es de $\varphi \approx -92^\circ$ que coincide con los resultados experimentales mostrados en la figura 14a. No obstante, el desfase del retardo lineal equivalente δ' es diferente y no cumple con la misma regla que para las biplacas para fuentes coherentes.

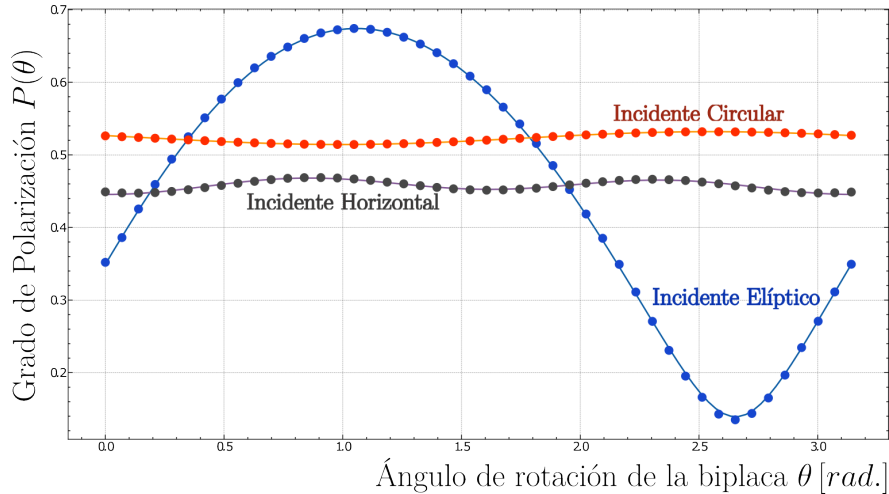


Figura 16: Gráfico del grado de polarización en función del ángulo de rotación de la biplaca. Los puntos son los datos experimentales y las curvas corresponden con la curva teórica en cada caso calculada con los mismos parámetros usados para determinar los parámetros de Stokes. El color azul representa el caso donde el estado de polarización del haz incidente es el elíptico dado por $\chi_0 \approx 20^\circ$ y $\alpha_0 \approx 22^\circ$. El negro representa el caso cuando el estado de polarización del haz incidente es Horizontal. El naranja representa el caso cuando el estado de polarización incidente es circular derecho $\chi_0 \approx 44,5^\circ$.

Examinemos ahora cuando el estado de polarización del haz incidente es circular derecho. Experimentalmente se polarizó circularmente el haz incidente usando un retardador acromático de orden zero *AHWP05M-600* de *Thorlabs Inc.*, el cual como ya se explicó no despolariza. Para este caso la trayectoria sobre la esfera de Poincaré en función del ángulo de rotación θ se puede observar en la figura 15b, la curva roja fue calculada escogiendo los parámetros óptimos que mejor se ajustaran con los datos experimentales, la función de coherencia escogida fue Gaussiana y el tiempo de coherencia fue de $\tau_c \approx 27\mu\text{m}/c$ y el retardo que introduce cada retardador lineal fue de $\tau \approx 101\frac{\lambda_0}{4c}$. Algo interesante a notar en este caso es que cuando el estado de entrada es circular el grado de polarización de cada estado de polarización emergente es el mismo como se puede apreciar en la figura 16, el grado de polarización P en función de θ es aproximadamente una constante.

El último caso de interés es cuando se hace incidir un estado elíptico. El estado elíptico escogido no fue cualquiera, sino que experimentalmente se escogió un estado totalmente polarizado dado por el vector $\langle \mathbf{s} \rangle$ tal que, al incidir sobre la biplaca, el estado emergente caracterizado por el vector $\langle \mathbf{s}' \rangle$ mantenga la misma dirección que el incidente. Es decir, es un estado que se despolariza al pasar la biplaca pero que su dirección en la representación de la esfera de Poincaré es la misma. Esto se logró usando la metodología experimental propuesta en (Pellat-Finet, 2012). De esta manera, como se observa en la figura 15a, el estado incidente coincide con la curva que describe el vector del estado de polarización emergente $\langle \mathbf{s}'(\theta) \rangle$ normalizado respecto al grado de polarización $P(\theta)$ (ver figura 16). Para el experimento realizado la orientación y elipticidad del estado elíptico escogido fue de $(\alpha_0, \chi_0) \approx (22^\circ, 20^\circ)$.

Debido a estos resultados, es importante definir un concepto asociado con este estado de polarización particular. Se define entonces como **estado de polarización direccional** de un sistema óptico despolarizante, a aquel estado de polarización $\langle \mathbf{s}(t) \rangle$, total o parcialmente polarizado, cuyo vector dirección media $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ se mantiene invariante cuando se transforma a través de dicho sistema. Sin embargo, algo importante a tener en cuenta es que para este sistema no existe un autentico estado propio tal que el haz emergente no se despolarice, como sí sucede con los estados lineales en el caso de un solo retardador. Esto implica que, cuando el retardo introducido por un sistema de placas compuestas es lo suficientemente grande como para que despolarice una fuente de luz, el sistema ya no se puede entender como un retardador con estados propios elípticos, ya que no existe ningún estado de polarización incidente que no se despolarice al transformarse a través de la biplaca. Además, se puede pensar en la posible existencia de un estado parcialmente polarizado que cumpla con ser un estado de polarización direccional de la biplaca, pero que además, su grado de polarización también permanezca invariante. Es posible explorar esta posibilidad analizando los vectores propios de la matriz de Mueller equivalente del sistema despolarizante, pero este problema se deja para una investigación futura.

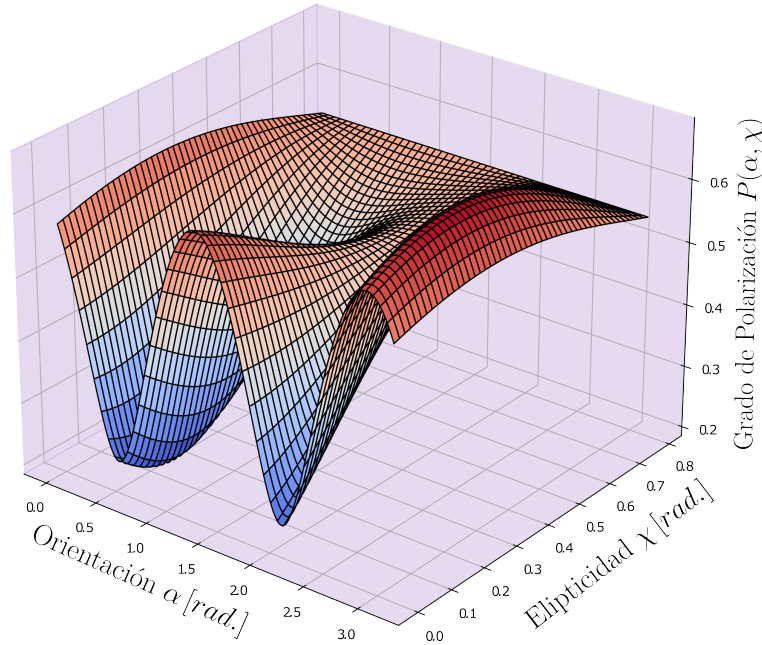


Figura 17: Gráfico del grado de polarización en función del estado de polarización incidente caracterizado por los ángulos (α, χ) en el rango de $\alpha = [0, \pi]$ y $\chi = [0, \pi/4]$.

Para el ángulo entre los dos retardadores $\phi = 45^\circ$

no existe ningún estado de polarización incidente que no se despolarice, es decir, nunca se alcanza el valor $P(\alpha, \chi) = 1$.

Otro aspecto a tener en cuenta es que, para el estado elíptico incidente (ver figura 15a), los extremos de la curva coinciden con los estados emergentes que tienen el valor máximo de grado de polarización P_{max} y mínimo P_{min} . Estos valores extremos del grado de polarización coinciden con el valor máximo y mínimo de la curva de grado de polarización en función del ángulo de rotación que se muestra en la figura 16. Además, un resultado experimental interesante (que además es otra de las razones por las cuales se decidió realizar el experimento con ese estado elíptico en particular) es que, de todos los estados elípticos que se pueden escoger, el valor de la diferencia $P_{max} - P_{min}$ es el más grande.

Viendo que el modelo teórico se ajusta bien a los experimentos realizados, podemos ahora explorar casos más generales de la biplaca usando solamente la teoría. Para confirmar que no existe ningún estado de polarización incidente que no se despolarice al propagarse por la biplaca podemos realizar un gráfico del grado de polarización $P(\alpha, \theta)$ para algún $\phi = cte$. La gráfica de $P(\alpha, \theta)$ que se observa en la figura 17 confirma este resultado experimental. Para realizar la gráfica se usó una coherencia de tipo Gaussiana con $\tau_c = 25\mu m/c$ y un retardo de $\tau = 20\mu m/c$, y un ángulo de $\phi = 45^\circ$. Por otro lado, se puede notar que únicamente para el caso cuando $\chi = \pi/4$, es decir, cuando el estado incidente es circular, el grado de polarización se comporta como una función constante con respecto a la orientación α , y por tanto, también

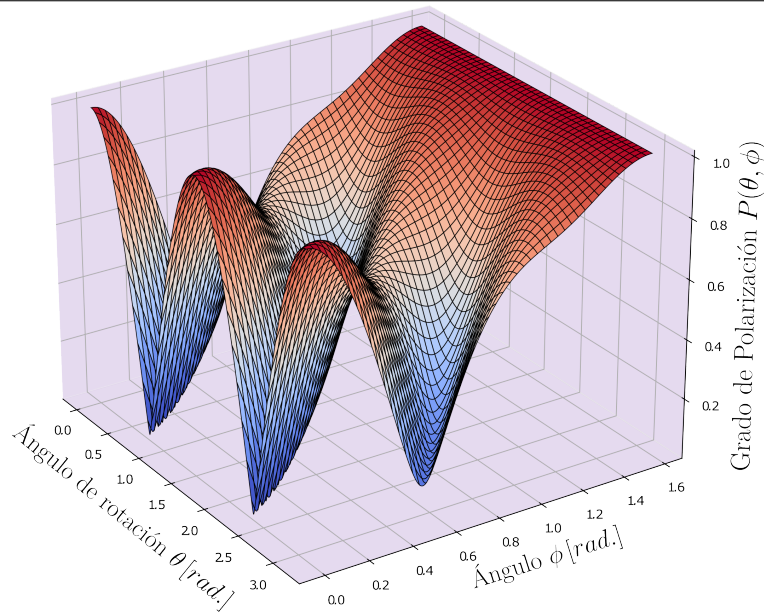


Figura 18: Gráfico del grado de polarización en función del ángulo de rotación θ de la biplaca y el ángulo entre los ejes principales ϕ . La gráfica cubre los rangos de $\theta = [0, \pi]$ y $\phi = [0, \pi/2]$. El ángulo entre los dos retardadores es $\phi = 45^\circ$ y un estado de polarización incidente horizontal.

respecto a θ . Esto es de esperar ya que el estado de polarización circular es el único que es invariante bajo rotaciones del sistema de coordenadas.

Estos resultados tienen una implicación directa sobre metodologías donde se intenta modelar medios continuos que presentan birrefringencia como una composición discreta de placas de ondas. Un ejemplo de esto es el trabajo (Chartier, Hideur, Özkul, Sanchez, y Stéphan, 2001), donde se modela la birrefringencia con estados propios elípticos que presenta una fibra óptica unimodal como un sistema de placas de onda compuestas. El resultado mostrado en este capítulo indica que el modelo de placas de ondas compuestas usado para un medio continuo no será válido cuando se usa una fuente lo suficientemente incoherente como para que se genere despolarización. Esto debido a que los sistemas de placas de onda compuestas no tienen un estado propio de polarización como ya se mostró.

También se puede analizar la dependencia del grado de polarización P respecto al ángulo ϕ entre los ejes principales de los retardadores lineales y el ángulo de rotación θ de la biplaca. La gráfica de $P(\theta, \phi)$ se representa en la figura 18 para un estado de polarización incidente horizontal. Se puede notar que solamente cuando el ángulo $\phi = 0^\circ$, y por tanto, los ejes principales de los retardadores lineales se encuentran alineados es que existen dos estados de polarización para los cuales no hay despolarización, particularmente con los estados lineales alineados con los ejes principales de los retardadores. Esto es debido a que la biplaca con $\phi = 0$ sí se comporta como un retardador lineal con el doble del retardo que una sola.

El otro caso extremo ocurre cuando el ángulo $\phi = 90^\circ$, para este no hay ningún estado de polarización incidente que se despolarice. De hecho, el estado de polarización incidente permanece completamente invariante en este caso. Esto se debe a que el biplaca con $\phi = 90^\circ$ se comporta como un medio isótropo (el operador identidad) ya que en este caso el eje rápido de uno de los retardadores está alineado con el eje lento del otro, esto provoca que se compensen los retardos de tal manera que el retardo total es nulo.

Podrían realizarse muchos más ejemplos relacionados con la despolarización de placas de ondas compuesta, sin embargo, las expresiones algebraicas obtenidas para más de dos retardadores pueden ser muy extensas. Sin embargo, para cualquier caso de placas compuestas la transformación puede ser computada con un algoritmo de cálculo simbólico que realice la operación de traslación sobre la función de coherencia y así se puede obtener la transformación de la matriz de polarización para cualquier sistema de placas de onda compuestas.

3.2. Conclusiones

El modelo estadístico propuesto en el segundo capítulo permitía la descripción de las transformaciones de luz, en general parcialmente polarizada, a través de placas de onda compuestas. En este capítulo se desarrollaron casos particulares de estos sistemas. Inicialmente se propuso la descripción teórica de la despolarización de la luz, en general elípticamente polarizada, cuando interactúa con un retardador con estados propios elípticos y se comparó con datos experimentales. En general, los medios que presentan birrefringencia como cristales líquidos y materiales termoformados como los polímeros y fibras ópticas tienen estados propios de polarización elípticos. Su despolarización puede ser un factor importante a tener en cuenta cuando estos elementos se usan en aplicaciones de comunicación óptica o en instrumentos de caracterización y espectropolarimetría.

Por otro lado, para comprender mejor la metodología a seguir con el modelo de la despolarización en sistemas de placas compuestas, se desarrolló teóricamente el caso particular de la despolarización través de una biplaca. La comparación con los datos experimentales indica que es necesario conocer la función de coherencia de segundo orden exacta de la fuente y los parámetros físicos de las láminas retardadoras, sin embargo, bajo ciertas aproximaciones teóricas el modelo describe muy bien la variación del grado de polarización y los parámetros de Stokes aún si no se conocen con completa certeza dichos parámetros físicos. Un resultado curioso de este análisis es que estos sistemas compuestos, en general, ya no tienen asociado un estado propio de polarización, al menos no uno totalmente polarizado. Sin embargo, esto es una duda que queda como pregunta abierta para que en un posterior trabajo se pueda realizar el estudio de encontrar la existencia (o inexistencia) de estados propios que sean, en general, parcialmente polarizados, es decir, aquellos donde su grado de polarización de primer orden y su dirección media permanezcan invariantes.

Algo importante a recalcar con este resultado es que existen algunos trabajos en los que se modelan medios continuos (como las fibras ópticas) con sistemas de placas compuestas. Por ello, vale la pena aclarar que, según los resultados de este trabajo, una conclusión importante es que modelar medios continuos, que tienen birrefringencia (en general con estados propios elípticos), con sistemas discretos como las placas de onda compuestas no es válido en la totalidad de los casos ya que estos sistemas no presentan estados propios de polarización.

Los sistemas de placas compuestas cobran bastante importancia en la actualidad debido a su uso en sistemas de distribución de clave cuántica donde es necesario conocer sus efectos de despolarización, los cuales pueden ser tanto útiles como no deseados. Por ello, el modelo teórico planteado en este capítulo puede ser utilizado para estudiar estos efectos cuando se tienen múltiples láminas retardadoras. Además, se pueden encontrar nuevas formas de distribución de clave cuántica y de comunicación aprovechando la variación de la despolarización en función de los parámetros del sistema de retardadores.

Una de las complejidades, al momento de realizar los cálculos de despolarización en placas de onda compuestas con el formalismo matricial, son los cálculos algebraicos a realizar sobretodo cuando se tiene un gran número de retardadores. Usando el formalismo de matrices de Jones se reduce el número de elementos y de operaciones de manera considerable comparado con las matrices de Mueller, sin embargo, otra opción a tener en cuenta sería usar el formalismo de los cuaterniones para tratar estos problemas. Aunque esta tarea se deja para un próximo trabajo el paso a seguir para solucionarla es claro. Se puede hacer aplicando la metodología descrita en el primer capítulo. Para ello se debe encontrar la regla de transformación de un retardador sobre un cuaternión que representa un estado de polarización dinámico y luego usar la teoría de la coherencia.

Finalmente, una de las cuestiones que se deben tratar posteriormente es pensar en un experimento que permita realizar mediciones de la matriz de coherencia de cuarto orden, o en su defecto, mediciones de la matriz de covarianza Σ . Esto con el objetivo de comprobar experimentalmente el modelo propuesto en el segundo capítulo para describir las transformaciones de la matriz de coherencia de cuarto orden a través de sistemas de placas compuestas y a su vez, el grado de polarización de segundo orden. La idea es poder analizar los efectos de despolarización asociados con esta matriz y pensar en sus posibles aplicaciones en el área de comunicación óptica, distribución de clave cuántica y todo lo relacionado con elipsometría para caracterización de materiales y sustancias.

Referencias

- Al-Qasimi, A., Korotkova, O., James, D., y Wolf, E. (2007, May). Definitions of the degree of polarization of a light beam. *Opt. Lett.*, *32*(9), 1015–1016. Descargado de <http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-32-9-1015> doi: 10.1364/OL.32.001015
- Azzam, R. M. A., y Bashara, N. M. (1977). *Ellipsometry and polarized light, r. m. a. azzam and n. m. bashara* [Book]. North-Holland Pub. Co. ; sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland Amsterdam ; New York : New York.
- Barakat, R. (1987). Statistics of the stokes parameters. *JOSA A*, *4*(7), 1256–1263.
- Baylis, W. E., Bonenfant, J., Derbyshire, J., y Huschilt, J. (1993). Light polarization: A geometric-algebra approach. *American journal of physics*, *61*(6), 534–545.
- Bohm, K., Petermann, K., y Weidel, E. (1983). Performance of lyot depolarizers with birefringent single-mode fibers. *Journal of Lightwave Technology*, *1*(1), 71–74.
- Born, M., y Wolf, E. (2013). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- Brosseau, C. (1998). *Fundamentals of polarized light: a statistical optics approach*. Wiley-Interscience.
- Brosseau, C., Barakat, R., y Rockower, E. (1991). Statistics of the stokes parameters for gaussian distributed fields. *Optics communications*, *82*(3-4), 204–208.
- Bueno, J. M. (2001). Depolarization effects in the human eye. *Vision Research*, *41*(21), 2687–2696.
- Bueno, J. M. (2004). The influence of depolarization and corneal birefringence on ocular polarization. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, *6*(3), S91.

- Chakraborty, B. (1986). Depolarizing effect of propagation of a polarized polychromatic beam through an optically active medium: a generalized study. *JOSA A*, 3(9), 1422–1427.
- Chartier, T., Hideur, A., Özkul, C., Sanchez, F., y Stéphan, G. M. (2001). Measurement of the elliptical birefringence of single-mode optical fibers. *Applied Optics*, 40(30), 5343–5353.
- Chekhova, M., y Banzer, P. (2021). *Polarization of light: In classical, quantum, and nonlinear optics*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- Chipman, R. A. (1999). Depolarization. En *Polarization: Measurement, analysis, and remote sensing ii* (Vol. 3754, pp. 14–20).
- Cieslak, R., y Domanski, A. (2008). Lyot depolarizer as an optical temporal coherence measurement system. En *Photonics applications in astronomy, communications, industry, and high-energy physics experiments 2008* (Vol. 7124, p. 71240B).
- de Sande, J. C. G., Piquero, G., y Teijeiro, C. (2012). Dependence of the polarization degree at the output of a lyot depolarizer on the input beam type. *OPTICA PURA Y APLICADA*, 45(2), 189–199.
- Dlugnikov, L. (1984). Changes in polarization of a light beam with arbitrary autocorrelation propagating in a birefringent crystal. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 31(7), 803–811.
- Fisher, R. A. (1953). Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 217(1130), 295–305.
- Gil, J. J., y Ossikovski, R. (2022). *Polarized light and the mueller matrix approach*. CRC press.
- Goldstein, D. H. (2017). *Polarized light*. CRC press.
- Goodman, J. W. (2015). *Statistical optics*. John Wiley & Sons.
- Gori, F., Vicalvi, S., Santarsiero, M., Frezza, F., Schettini, G., Ambrosini, S., y Borghi, R. (1997). An elementary approach to spinors. *European Journal of Physics*, 18(4), 256.
- Hernandez-Cely, C., Salazar-Ariza, K., y Torres, R. (2023). Definition of a second-order

- degree of polarization in terms of the complex degree of coherence. *JOSA A*, 40(4), C53–C62.
- Hurwitz, H., y Jones, R. C. (1941). A new calculus for the treatment of optical systemsii. proof of three general equivalence theorems. *JOSA*, 31(7), 493–499.
- Kent, J. T. (1982). The fisher-bingham distribution on the sphere. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 44(1), 71–80.
- Kuntman, E., Kuntman, M. A., Canillas, A., y Arteaga, O. (2019). Quaternion algebra for stokes–mueller formalism. *JOSA A*, 36(4), 492–497.
- Lorentz, H. A. (1899). The elementary theory of the zeeman-effect. reply to an objection of poincaré. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences, vol. 2, pp. 52-69, 2, 52–69*.
- Luis, A. (2002). Degree of polarization in quantum optics. *Physical review A*, 66(1), 013806.
- Luis, A. (2007). Degree of polarization of type-ii unpolarized light. *Physical Review A*, 75(5), 053806.
- Makowski, P. L., y Domański, A. W. (2010). Degree of polarization fading of light passing through birefringent medium with optical axis variation. En *Photonics applications in astronomy, communications, industry, and high-energy physics experiments 2010* (Vol. 7745, pp. 186–197).
- Makowski, P. L., Szymanski, M. Z., y Domanski, A. W. (2012). Lyot depolarizer in terms of the theory of coherence—description for light of any spectrum. *Applied optics*, 51(5), 626–634.
- Mandel, L., y Wolf, E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press.
- Mardia, K. V., Jupp, P. E., y Mardia, K. (2000). *Directional statistics* (Vol. 2). Wiley Online Library.
- Mochizuki, K. (1984). Degree of polarization in jointed fibers: the lyot depolarizer. *Applied optics*, 23(19), 3284–3288.

- Pabón, J., Hernandez, C., y Torres, R. (2023). Tunable birefringence and elliptical polarization eigenmodes in a biplate of two quarter-wave plates. *JOSA A*, 40(10), 1959–1968.
- Pellat-Finet, P. (1984). Représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 31(4), 415–434.
- Pellat-Finet, P. (2012). Iterative experimental method for generating eigenstates and principal states of polarization. *Applied Optics*, 51(19), 4403–4408.
- Pellat-Finet, P., y Bausset, M. (1992). What is common to both polarization optics and relativistic kinematics? *Optik (Stuttgart)*, 90(3), 101–106.
- Poincaré, H. (1892). Théorie mathématique de la lumière, vol. 2 (georges carré, paris). *MISHCHENKO AND LD TRAVIS*, 44.
- Rao, K. S. (1988). *The rotation and lorentz groups and their representations for physicists*. John Wiley & Sons.
- Saito, S. (2023). Dirac equation for photons: Origin of polarisation. *arXiv preprint arXiv:2303.18196*.
- Salazar-Ariza, K., y Torres, R. (2019). Statistical theory of the polarization on the poincaré sphere. *Optics letters*, 44(13), 3318–3321.
- Shaham, A., y Eisenberg, H. (2011). Realizing controllable depolarization in photonic quantum-information channels. *Physical Review A*, 83(2), 022303.
- Tudor, T. (2010). Vectorial pauli algebraic approach in polarization optics. i. device and state operators. *Optik*, 121(13), 1226–1235.
- Wolf, E. (1959). Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 13, 1165–1181.
- Wolf, E., y cols. (2007). *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*. Cambridge University Press.
- Zangwill, A. (2013). *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press.

ZEEMAN, P. (s.f.). On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance (parts i and ii and appendix)[zeeman]; with: Radiation in a magnetic field [michelson].