

**DISCOS DELGADOS COMO FUENTES DE CAMPOS
DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS**

GONZALO GARCÍA REYES

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2004

**DISCOS DELGADOS COMO FUENTES DE CAMPOS
DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS**

GONZALO GARCÍA REYES

Trabajo de Tesis para optar al título de Doctor en Física

Director:

GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., Ph. D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2004

A mi esposa

Marqueza

y a mis hijos

Silvia Juliana y Sebastián

Agradecimientos

Al profesor Guillermo Alfonso González Villegas

A la Vicerrectoría Académica, Universidad Industrial de Santander, por apoyo financiero

Al Centro de Astrofísica Teórica, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela

A COLCIENCIAS, por apoyo financiero en la etapa final de este trabajo

A la Universidad Industrial de Santander

Resumen

TÍTULO: DISCOS DELGADOS COMO FUENTES DE CAMPOS DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS ¹

Autor (es): Gonzalo García Reyes ²

Palabras Claves: Relatividad General, Discos Relativistas, Modelo de Contra-rotación

Descripción:

Presentamos la interpretación de algunos campos de Einstein-Maxwell estacionarios en el electrovacío en términos de discos de fluido perfecto cargados. La interpretación es hecha por medio de un enfoque tipo “problema inverso” usado para obtener fuentes discoidales de soluciones conocidas de las ecuaciones de Einstein o Einstein-Maxwell.

Con el fin de hacer tal interpretación, se presenta un estudio detallado del Modelo de Contra-Rotación (CRM) para discos delgados relativistas, axialmente simétricos, estáticos, generales en el electrovacío con presión radial igual y diferente de cero. Se encuentra una restricción general sobre las velocidades tangenciales contra-rotantes necesaria para expresar el tensor de momentum-energía

¹Trabajo de Tesis

²Facultad de Ciencias, Doctorado en Física, Director: Guillermo A. González

superficial del disco como la superposición de dos fluidos perfectos cargados contrarotantes. Los modelos se basan en las métricas estáticas tipo Chazy-Curzon, tipo Zipoy-Voorhees, tipo Bonnor-Sackfield, y una métrica de Darmois cargada y magnetizada, donde se obtienen algunos discos con presión radial igual y diferente de cero con un CRM bien comportado.

Luego, una familia de campos tipo Taub-NUT estacionarios se interpreta en términos de discos de fluido perfecto cargados finitos. La diagonalización del tensor de momentum-energía se facilita en este caso por el hecho que éste se puede escribir como una matriz triangular superior derecha. Encontramos que la inclusión de campo electromagnético cambia significativamente las diferentes propiedades materiales de los discos lo cual permite, para algunos valores de los parámetros, construir discos que satisfacen todas las condiciones de energía.

Abstract

TITLE: DISCOS DELGADOS COMO FUENTES DE CAMPOS DE EINSTEIN-MAXWELL ESTACIONARIOS ³

Author (s): Gonzalo García Reyes ⁴

Key Words: Relatividad General, Discos Relativistas, Modelo de Contra-rotación

Contents:

The interpretation of some electrovacuum spacetimes in terms of charged perfect fluid disks is presented. The interpretation is made by means of an “inverse problem” approach used to obtain disk sources of known solutions of the Einstein or Einstein-Maxwell equations.

In order to do such interpretation, a detailed study is presented of the counterrotating model (CRM) for generic electrovacuum static axially symmetric relativistic thin disks with nonzero radial pressure. We find a general constraint over the counterrotating tangential velocities needed to cast the surface energy-momentum tensor of the disc as the superposition of two counterrotating charged perfect fluids. The models are based on Chazy-Curzon-type, Zipoy-Voorhees-type,

³Doctoral Thesis

⁴Facultad de Ciencias, Doctorado en Física, Supervisor: Guillermo A. González

Bonnor-Sackfield-type, and charged and magnetised Darmois electrovacuum metrics, where we obtain some disks with a CRM well behaved.

Then, a family of electrovacuum stationary Taub-NUT-type fields in terms of finite charged perfect fluid disks is interpreted. The diagonalization of the energy-momentum tensor of the disks is facilitated in this case by the fact that it can be written as an upper right triangular matrix. We find that the inclusion of electromagnetic fields changes significantly the different material properties of the disks and so we can obtain, for some values of the parameters, charged perfect fluid disks that are in agreement with all the energy conditions.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Modelos Relativistas de Discos Delgados en el Electrovacío	5
1.1. Introducción	5
1.2. Distribuciones tensoriales	6
1.3. Ecuaciones de Einstein-Maxwell para cascarones de materia . . .	9
1.4. Discos delgados axialmente simétricos	14
1.5. Solución de las ecuaciones de campo	19
2. El Modelo de Contra-Rotación	24
2.1. Introducción	24
2.2. Proyecciones sobre la tétrada	25
2.3. Discos de fluido perfecto cargados contra-rotantes	27
2.3.1. Tensor de momentum-energía y densidad de carga	27
2.3.2. Velocidades tangenciales de contra-rotación	29
2.4. Discos de polvo cargados contra-rotantes	32
2.4.1. Tensor de momentum-energía y densidad de carga	32
2.4.2. Velocidades tangenciales de contra-rotación	33
3. Algunos modelos de discos de polvo cargados contra-rotantes	35
3.1. Introducción	35

3.2. Discos tipo Chazy-Curzon	36
3.3. Discos tipo Zipoy-Voorhees	45
3.4. Discos tipo Bonnor-Sackfield	55
3.5. Discos para una solución de Darmois cargada y magnetizada . . .	63
4. Algunos modelos de discos de fluido perfecto cargados	72
4.1. Introducción	72
4.2. Discos tipo Chazy-Curzon	73
4.3. Discos tipo Zipoy-Voorhees	79
4.4. Discos tipo Bonnor-Sackfield	84
4.5. Discos para una solución de Darmois cargada y magnetizada . . .	89
4.6. Discos tipo Taub-NUT	94
5. Discusión de resultados	98
Bibliografía	101

Lista de Figuras

3.1.	ϵ y p_φ para discos de polvo tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	40
3.2.	σ y j para discos de polvo tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	41
3.3.	v_+ , v_- , y v^2 para discos de polvo tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	42
3.4.	h_+^2 , h_-^2 , y h^2 para discos de polvo tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	43
3.5.	ϵ_+ , ϵ_- , ϵ_\pm , σ_- , σ_+ , $\sigma_{e\pm}$, y $\sigma_{m\pm}$ para discos de polvo tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	44
3.6.	σ_+ y σ_- para discos de polvo tipo Chazy-Curzon no electro-geodésicos con $\gamma = 1$ y $z_0 = 1,5$	45
3.7.	$\tilde{\epsilon}$ y \tilde{p}_φ para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	50
3.8.	$\tilde{\sigma}$ y \tilde{j} para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	51
3.9.	v_+ , v_- , y v^2 para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	52
3.10.	\tilde{h}_+^2 , \tilde{h}_-^2 , y \tilde{h}^2 para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	53
3.11.	$\tilde{\epsilon}_+$, $\tilde{\epsilon}_-$, $\tilde{\epsilon}_\pm$, $\tilde{\sigma}_-$, $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$, y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	54
3.12.	$\tilde{\sigma}_+$ y $\tilde{\sigma}_-$ para discos de polvo tipo Zipoy-Voorhees no electro-geodésicos con $\gamma = 2$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	55

3.13.	$\tilde{\epsilon}$ y \tilde{p}_φ para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 1,5$	58
3.14.	$\tilde{\sigma}$ y \tilde{j} para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 1,5$	59
3.15.	v_+ , v_- y v^2 para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	60
3.16.	\tilde{h}_+^2 , \tilde{h}_-^2 , y \tilde{h}^2 para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 2,5$	61
3.17.	$\tilde{\epsilon}_+$, $\tilde{\epsilon}_-$, $\tilde{\epsilon}_\pm$, $\tilde{\sigma}_-$, $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$, y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 1,5$	62
3.18.	$\tilde{\sigma}_+$ y $\tilde{\sigma}_-$ para discos de polvo tipo Bonnor-Sackfield no electro-geodésicos con $\gamma = 1$ y $\tilde{z}_0 = 1,5$	63
3.19.	$\tilde{\epsilon}$ y \tilde{p}_φ para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	66
3.20.	$\tilde{\sigma}$ y \tilde{j} para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	67
3.21.	v_+ , v_- , y v^2 para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	68
3.22.	\tilde{h}_+^2 , \tilde{h}_-^2 , y \tilde{h}^2 para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	69
3.23.	$\tilde{\epsilon}_+$, $\tilde{\epsilon}_-$, $\tilde{\epsilon}_\pm$, $\tilde{\sigma}_-$, $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$, y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	70
3.24.	$\tilde{\sigma}_+$ y $\tilde{\sigma}_-$ para discos de polvo no electro-geodésicos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$	71
4.1.	ϵ , p_φ , y p_r para discos de fluido perfecto tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 2$	76
4.2.	σ y v^2 para discos de fluido perfecto tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 2$ y $\gamma = 0,7$, respectivamente	77

4.3.	h^2 , ϵ_{\pm} , y σ_{\pm} para discos de fluido perfecto tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 0,7$	78
4.4.	ϵ , p_{φ} , y p_r para discos de fluido perfecto tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$ y $\gamma = 1,2$	81
4.5.	σ y v^2 para discos de fluido perfecto tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$ y $\gamma = 1,2$	82
4.6.	h^2 , ϵ_{\pm} , y σ_{\pm} para discos de fluido perfecto tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$ y $\gamma = 1,2$	83
4.7.	ϵ , p_{φ} , y p_r para discos de fluido perfecto tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,5$ y $\gamma = 1,3$	86
4.8.	σ para discos de fluido perfecto tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,5$ y $\gamma = 1,3$, y v^2 para $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 1$	87
4.9.	h^2 , ϵ_{\pm} , y σ_{\pm} para discos de fluido perfecto tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 1$	88
4.10.	ϵ , p_{φ} , y p_r para discos de fluido perfecto asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$	91
4.11.	σ , j , y v^2 para discos de fluido perfecto asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$	92
4.12.	h^2 , ϵ_{\pm} , σ_+ , y σ_- para discos de fluido perfecto asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$	93

Introducción

Existen diferentes métodos para encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein y Einstein-Maxwell, o para generar nuevas soluciones exactas a partir de soluciones simples conocidas. Sin embargo, los métodos anteriores en general conducen a soluciones sin una interpretación física clara o a soluciones que dependen de muchos parámetros sin un significado físico claro. Por lo tanto, es importante tener algunos procedimientos apropiados para obtener algunas interpretaciones de estas soluciones exactas. Así, en los últimos años se han desarrollado tales procedimientos para soluciones axialmente simétricas estáticas y estacionarias en términos de modelos de discos delgados y, recientemente, de discos gruesos.

Soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein axialmente simétricas que describen discos delgados relativistas son de gran importancia astrofísica puesto que pueden ser usadas como modelos de ciertas estrellas, galaxias y discos de acreción. Estas soluciones pueden ser estáticas o estacionarias y con o sin presión radial. Soluciones para discos delgados estáticos sin presión radial fueron primero estudiadas por Bonnor and Sackfield [1] y Morgan and Morgan [2], y con presión radial por Morgan and Morgan [3]. En conexión con el colapso gravitacional, discos fueron primero estudiados por Chamorro, Gregory, and Stewart [4]. Discos con tensión radial han sido también estudiados [5]. Diferentes clases

de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a discos delgados estáticos y estacionarios han sido obtenidos por diferentes autores en los últimos tiempos [6 - 16], con y sin presión radial.

En el caso de discos estáticos sin presión radial, hay dos interpretaciones comunes: se puede suponer la existencia de esfuerzos tangenciales o suponer que las partículas sobre el disco se mueven bajo la acción de su propio campo gravitacional de tal manera que algunas partículas se muevan en el sentido de las manecillas del reloj y otras en sentido contrario. Esta última interpretación, el “Modelo de Contra-Rotación” (CRM), se emplea frecuentemente dado que puede ser utilizado para simular efectos rotacionales reales. Aunque esta interpretación puede considerarse como un artificio teórico, existen evidencias observacionales de discos constituidos por corrientes de materia rotante y contra-rotante [17, 18].

Fuentes discoidales para un espaciotiempo axialmente simétrico estacionario con campo magnético son también de importancia astrofísica principalmente en el estudio de estrellas de neutrones, enanas blancas y en la formación de galaxias. Aunque discos con campo eléctrico no tienen importancia astrofísica clara, su estudio puede ser de interés teórico en el contexto de las soluciones exactas. Discos delgados han sido discutidos como fuentes para campos de Kerr-Newman [19], campos axialmente simétricos magnetostáticos [20], métricas conforme-estacionarias [21], y recientemente como discos de polvo contra-rotantes estáticos en el electrovacío [22]. Siguiendo la Ref. [19] los discos resultantes pueden ser interpretados como anillos con presión interna y corriente o como dos corrientes de partículas cargadas contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas (solución de la ecuación de la geodésica en presencia de la fuerza de Lorentz).

En todos los casos anteriores, los discos son obtenidos usando un método tipo “problema inverso”, llamado por Synge el “*método - g*” [23]. El método funciona como sigue: se supone la métrica que representa el disco y luego se usa para

calcular el tensor de momentum-energía (la fuente). Las propiedades físicas de la distribución de materia son luego estudiadas mediante un análisis del tensor de momentum-energía superficial obtenido. Seguiremos este mismo esquema en este trabajo. Por otro lado, un método tipo “problema directo”, llamado por Synge el “*método -T*”, también es usado por otros autores [24 - 30] suponiendo un tensor de momentum-energía superficial y luego resolviendo las ecuaciones de campo en la región material. La solución interna es luego usada para obtener condiciones de frontera sobre las ecuaciones de campo en el vacío en la región exterior. El “*método -T*”, es usado en la Ref. [24] para obtener la solución al problema de un disco de polvo que rota uniformemente (1-componente), y en las Refs. [25 - 30] para generar discos de polvo contra-rotantes, pero ninguna condición se impone allí acerca del movimiento (electro-)geodésico de las dos corrientes de materia contra-rotantes.

El propósito de este trabajo es interpretar algunos espaciotiempos en el electrovacío en términos de discos de fluido perfecto cargados. El trabajo se basa en las referencias [22, 31, 32], y está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presenta un resumen del procedimiento para construir modelos de discos delgados y se obtienen las expresiones del tensor de momentum-energía superficial y de la densidad de corriente del disco. También se analiza el método para introducir la presión radial mediante el uso de transformaciones conformes [5, 33] extendido a las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío.

En el capítulo 2, los discos son interpretados en términos del CRM. Se encuentra una restricción general sobre las velocidades tangenciales contra-rotantes necesaria para expresar el tensor de momentum-energía superficial del disco como la superposición de dos fluidos cargados contra-rotantes. Cuando no hay presión radial los discos son interpretados como dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes. En este caso, se muestra que esta restricción se puede satisfacer si to-

mamos los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas. Por otro lado, cuando tenemos presión radial diferente de cero los discos son interpretados como dos fluidos perfectos cargados contra-rotantes. En este caso se muestra que esta suposición sólo es válida si la presión radial tiene una forma determinada. Luego mostramos que, en general, en ambos casos no es posible tomar los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas ni tampoco tomar las dos velocidades tangenciales contra-rotantes como iguales y opuestas. Igualmente, encontramos expresiones para las densidades de energía, las presiones (en el caso de discos con presión radial), las densidades de corriente y las velocidades tangenciales de contra-rotación de los dos fluidos.

En el capítulo 3, se presentan cuatro familias simples de modelos de discos de polvo cargados contra-rotantes basados en las métricas estáticas tipo Chazy-Curzon, tipo Zipoy-Voorhees, tipo Bonnor-Sackfield, y una métrica de Darmois cargada y magnetizada, donde se obtienen algunos discos con un CRM bien comportado. Los modelos son construidos usando el método bien conocido de “desplazamiento, corte y reflexión” extendido a las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío. En particular, se estudian las velocidades tangenciales, las densidades de energía y las densidades de carga eléctrica de ambos fluidos en el caso general estático y en el caso electrostático (o magnetostático). También se analiza la estabilidad contra perturbaciones radiales.

En el capítulo 4, se presentan también cuatro familias simples de modelos de discos de fluido perfecto cargados contra-rotantes basados en las soluciones anteriores donde se obtienen algunos discos con un CRM bien comportado. Luego, una familia de campos tipo Taub-NUT estacionarios se interpreta en términos de discos finitos hechos de un fluido perfecto cargado. Finalmente, en el capítulo 5, se resumen los resultados principales.

Capítulo 1

Modelos Relativistas de Discos Delgados en el Electrovacío

1.1. Introducción

La construcción de modelos de discos delgados en relatividad general se puede llevar a cabo a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein o Einstein-Maxwell en el vacío e introduciendo posteriormente una discontinuidad finita en las primeras derivadas del tensor métrico a través del plano $z=0$. Dicha discontinuidad puede obtenerse reflejando la solución dada a través del plano. La discontinuidad en las primeras derivadas del tensor métrico puede representarse mediante una función de Heaviside de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, el tensor de curvatura contendrá términos proporcionales a la función delta de Dirac con soporte en el plano $z=0$.

En este capítulo se presenta, con base en la referencia [34], un breve resumen del tratamiento de modelos de discos delgados en relatividad general. El formalismo necesario para el tratamiento de campos tensoriales como distribuciones se

presenta brevemente en la sección 1.2. En la sección 1.3 dicho formalismo es utilizado en la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell en el caso en que existe un cascarón delgado de materia en el espaciotiempo M , de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético poseen una discontinuidad finita a través de una hipersuperficie Σ . Restringiendo el formalismo anterior al caso de un disco delgado axialmente simétrico, en la sección 1.4 se obtiene la expresión general para el tensor de momentum-energía superficial del disco y de la densidad de corriente del disco. Luego, en la sección 1.5, se analiza el método para introducir la presión radial mediante el uso de transformaciones conformes [5, 33] extendido a las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío.

1.2. Distribuciones tensoriales

Sean T, U dos campos tensoriales definidos sobre un espaciotiempo M , y (T, U) su producto escalar en el punto $x \in M$. Sea $D(M)$ el espacio de campos tensoriales con soporte compacto y de una clase de diferenciabilidad determinada. Una distribución tensorial T es una función lineal sobre $D(M)$ definida como [35]

$$\langle T, U \rangle = \int_M (T, U) \sqrt{-g} d^4x \quad (1.1)$$

donde $U \in D(M)$ y T es un campo tensorial localmente integrable.

Sea Σ una hipersuperficie en M descrita por la ecuación

$$\phi(x^a) = 0, \quad (1.2)$$

donde ϕ es una función suave de las coordenadas x^a , y por el vector normal

$$\eta_a = \phi_{,a} \quad (1.3)$$

donde $(\)_{,a} = \partial/\partial x^a$. La hipersuperficie Σ divide el espaciotiempo M en dos partes $M^+ = \{x^a : \phi > 0\}$ y $M^- = \{x^a : \phi < 0\}$, de tal forma que se puede introducir la

función θ de Heaviside, definida como

$$\theta(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \phi = 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

y tal que

$$\theta_{,a} = n_a \delta(\phi), \quad (1.5)$$

donde $\delta(\phi)$ es la función delta de Dirac con soporte sobre la hipersuperficie Σ .

Así, para toda función F con soporte compacto

$$\int_M F \delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x = \int_\Sigma F dV, \quad (1.6)$$

donde dV es un elemento de volumen invariante introducido sobre la hipersuperficie Σ .

De la definición de θ se tiene que, para todo campo tensorial $U(x)$ definido sobre M [36, 37],

$$\begin{aligned} \langle \theta(1 - \theta), U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) (1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \theta^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta^2 \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) \theta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (1 - \theta)^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x)(1 - \theta)^2 \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{M^-} U(x)(1 - \theta) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{M^-} U(x) \sqrt{-g} \, d^4x, \\
\langle \theta \delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta \delta(\phi) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= U(x) \theta|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma}, \\
\langle (1 - \theta) \delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x) (1 - \theta) \delta(\phi) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= U(x) (1 - \theta)|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma},
\end{aligned}$$

lo que prueba las identidades

$$\begin{aligned}
\theta(1 - \theta) &= 0, \\
\theta^2 &= \theta, \\
(1 - \theta)^2 &= (1 - \theta),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(1 - \theta) \delta(\phi) = \theta \delta(\phi) = \frac{1}{2} \delta(\phi),$$

en el sentido de las distribuciones.

Si T es un campo tensorial definido en M tal que T y sus derivadas tienen discontinuidades finitas a través de Σ , se pueden definir distribuciones en términos

de T en la forma:

$$(T)^D = T^+\theta + T^-(1-\theta), \quad (1.8)$$

$$(T_{,a})^D = T_{,a}^+\theta + T_{,a}^-(1-\theta), \quad (1.9)$$

donde los índices \pm sobre el campo tensorial lo restringen a las regiones M^\pm , respectivamente. De esta forma, $T = T^+$ en M^+ , $T = T^-$ en M^- y $T = T_\Sigma = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$ en Σ . Usando las identidades (1.7) se puede probar fácilmente que

$$(T)^D_{,a} = (T_{,a})^D + [T] n_a \delta(\phi), \quad (1.10)$$

$$(TU)^D = (T)^D(U)^D, \quad (1.11)$$

$$[TU] = U_\Sigma[T] + [U]T_\Sigma, \quad (1.12)$$

donde $[T]$ es el salto de T a través de Σ , definido como

$$[T] = T^+|_\Sigma - T^-|_\Sigma, \quad (1.13)$$

el cual mide la discontinuidad de T a través de Σ .

1.3. Ecuaciones de Einstein-Maxwell para cascarones de materia

Las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, en unidades geometrizadas tales que $8\pi G = c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, están dadas por

$$G_{ab} = T_{ab}, \quad (1.14a)$$

$$F^{ab}{}_{;b} = J^a, \quad (1.14b)$$

con

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}, \quad (1.15a)$$

$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}, \quad (1.15b)$$

donde todos los símbolos tienen el significado usual. Vamos a formular las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell (1.14) para el caso en que existe un cascarón de materia en el espaciotiempo M , de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético poseen una discontinuidad finita a través de una hipersuperficie Σ . El tensor métrico g_{ab} y el potencial electromagnético se suponen continuos a través de Σ , es decir

$$[g_{ab}] = g_{ab}^+|_{\Sigma} - g_{ab}^-|_{\Sigma} = 0, \quad (1.16a)$$

$$[A_a] = A_a^+|_{\Sigma} - A_a^-|_{\Sigma} = 0. \quad (1.16b)$$

Nótese que en la la vecindad de Σ , podemos escribir

$$g_{ab}^{\pm} = g_{ab}^0 + \phi g_{ab}'^{\pm} + \frac{1}{2}\phi^2 g_{ab}''^{\pm} + \dots, \quad (1.17)$$

donde prima denota la derivada con respecto a ϕ .

Usando la continuidad de g_{ab} , podemos escribir

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \quad (1.18a)$$

$$g_{ab,c} = (g_{ab,c})^D, \quad (1.18b)$$

$$\Gamma_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)^D, \quad (1.18c)$$

$$\Gamma_{bc,d}^a = (\Gamma_{bc,d}^a)^D + [\Gamma_{bc}^a] n_d \delta(\phi), \quad (1.18d)$$

donde

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ae}(g_{eb,c} + g_{ce,b} - g_{bc,e}), \quad (1.19)$$

son los símbolos de Christoffel.

Usando los resultados anteriores en la definición del tensor de curvatura de Riemann,

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}, \quad (1.20)$$

y suponiendo que el tensor métrico g_{ab} es, por lo menos, de clase C^3 en las regiones M^\pm , se obtiene para el tensor de Riemann la expresión [38]

$$R^a_{bcd} = (R^a_{bcd})^D + H^a_{bcd} \delta(\phi), \quad (1.21)$$

donde

$$H^a_{bcd} = [\Gamma^a_{bd}] n_c - [\Gamma^a_{bc}] n_d, \quad (1.22)$$

y los $(R^a_{bcd})^\pm$ son los tensores de Riemann usuales definidos en M^\pm .

Las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico pueden ser obtenidas de (1.17) y están caracterizadas por el tensor b_{ab} , definido a través de las relaciones

$$[g_{ab,c}] = b_{ab} n_c, \quad (1.23)$$

de tal forma que

$$[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2} (b^a_b n_c + b^a_c n_b - g^{ae} b_{bc} n_e), \quad (1.24a)$$

$$H^a_{bcd} = \frac{1}{2} (b^a_d n_b n_c - b^a_c n_b n_d + b_{bc} n^a n_d - b_{bd} n^a n_c), \quad (1.24b)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie Σ .

Similarmente, usando la continuidad de A_a , podemos escribir

$$A_a = (A_a)^D, \quad (1.25a)$$

$$A_{a,b} = (A_{a,b})^D, \quad (1.25b)$$

$$F^{ab} = (F^{ab})^D, \quad (1.25c)$$

$$F^{ab}{}_{,b} = (F^{ab}{}_{,b})^D + [F^{ab}] n_b \delta(\phi). \quad (1.25d)$$

Las ecuaciones de Maxwell (1.14b) se pueden escribir como

$$\hat{F}^{ab}{}_{,b} = \hat{J}^a, \quad (1.26)$$

donde “ $\hat{}$ ” significa multiplicación por $\sqrt{-g}$. Usando los resultados anteriores obtenemos

$$\hat{F}^{ab}{}_{,b} = (\hat{F}^{ab}{}_{,b})^D + [\hat{F}^{ab}] n_b \delta(\phi). \quad (1.27)$$

Suponiendo que el tensor de momentum-energía T_{ab} y la densidad de corriente \hat{J}^a se pueden expresar en la forma

$$T_{ab} = (T_{ab})^D + Q_{ab} \delta(\phi), \quad (1.28a)$$

$$\hat{J}^a = (\hat{J}^a)^D + \hat{j}^a \delta(\phi), \quad (1.28b)$$

donde Q_{ab} y \hat{j}^a son el tensor de momentum-energía y la densidad de corriente asociados con la hipersuperficie Σ y los T_{ab}^\pm y \hat{J}_\pm^a son los tensores de momentum-energía y la densidad de corriente usuales definidos en M^\pm , se puede probar fácilmente que las ecuaciones de Einstein-Maxwell (1.14) son equivalentes al sistema

de ecuaciones

$$G_{ab}^{\pm} = T_{ab}^{\pm}, \quad (1.29a)$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H = Q_{ab}, \quad (1.29b)$$

$$\hat{F}_{\pm}^{ab}{}_{;b} = \hat{J}_{\pm}^a, \quad (1.29c)$$

$$[\hat{F}^{ab}] n_b = \hat{j}^a, \quad (1.29d)$$

donde $H_{ab} = H^c{}_{acb}$ y $H = g_{\Sigma}^{ab}H_{ab}$.

Cuando el cascarón de materia es la única fuente de los campos gravitacional y electromagnético, de tal forma que el resto del espaciotiempo es vacío (o electrovacío), $J_{\pm}^a \equiv 0$ y las ecuaciones (1.29a) y (1.29c) se reducen a las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío (1.53) en M^{\pm} ,

$$G_{ab}^{\pm} = T_{ab}^{\pm}, \quad (1.30a)$$

$$F_{\pm}^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (1.30b)$$

De esta forma, habiendo resuelto el sistema anterior, las ecuaciones (1.29b) y (1.29d) pueden ser usadas para obtener las expresiones del tensor de momentum-energía y la densidad de corriente para un cascarón de materia,

$$Q_b^a = \frac{1}{2}\{(b_c^a n_b - b_b^a n_c)n^c + (b_b^c n_c - b_c^c n_b)n^a - \delta_b^a(b_c^e n_e - b_e^c n_c)n^c\}, \quad (1.31a)$$

$$j^a = [F^{ab}] n_b, \quad (1.31b)$$

donde todas las cantidades son evaluadas en la hipersuperficie Σ .

1.4. Discos delgados axialmente simétricos

Vamos a restringir el formalismo anterior al caso de un disco delgado axialmente simétrico introduciendo en el espaciotiempo M las coordenadas cuasi-cilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$ y considerando la hipersuperficie Σ definida por la función $\phi(x^a) = z$, con vector normal $n_a = \phi_{,a} = \delta_a^z$. La métrica para un espaciotiempo estacionario con simetría axial se puede escribir como

$$ds^2 = - e^{2\Psi}(dt + \mathcal{W}d\varphi)^2 + e^{-2\Psi}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \quad (1.32)$$

donde las funciones R , \mathcal{W} , Ψ , y Λ dependen sólo de las coordenadas r y z . La naturaleza cuasi-cilíndrica de las coordenadas, ver referencia [2], significa que $r = 0$ sobre el eje de simetría y, para z fijo, r crece monótonamente al infinito, mientras que z , para r fijo, crece monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$.

Dada una solución de la forma (1.32) para las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío (1.53) el tensor métrico g_{ab}^+ , definido para $z \geq 0$, se obtiene de la relación

$$ds^2|_{M^+} = g_{ab}^+ dx^a dx^b, \quad (1.33)$$

y el tensor métrico g_{ab}^- , definido para $z \leq 0$, se obtiene a través de la relación

$$g_{ab}^-(r, z) = g_{ab}^+(r, -z), \quad (1.34)$$

de tal forma que $[g_{ab}] = 0$. Similarmente,

$$A_a^-(r, z) = A_a^+(r, -z), \quad (1.35)$$

de tal forma que $[A_a] = 0$. Esto significa construir modelos con simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$.

La relaciones anteriores implican que, cuando $z \neq 0$,

$$g_{ab,z}^-(r, z) = -g_{ab,z}^+(r, -z), \quad (1.36a)$$

$$A_{a,z}^-(r, z) = -A_{a,z}^+(r, -z). \quad (1.36b)$$

Así, las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético se pueden escribir como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2g_{ab,z}^+|_{z=0^+}, \quad (1.37a)$$

$$a_a = [A_{a,z}] = 2A_{a,z}^+|_{z=0^+}. \quad (1.37b)$$

Para la métrica (1.32), las componentes no nulas del tensor b_{ab} son

$$b_{tt} = -4e^{2\Psi}\Psi_{,z}, \quad (1.38a)$$

$$b_{t\varphi} = -2e^{2\Psi}(\mathcal{W}_{,z} + 2\mathcal{W}\Psi_{,z}), \quad (1.38b)$$

$$b_{\varphi\varphi} = 4e^{-2\Psi}\{R(R_{,z} - R\Psi_{,z}) - \mathcal{W}(\mathcal{W}_{,z} + \mathcal{W}\Psi_{,z})e^{4\Psi}\}, \quad (1.38c)$$

$$b_{rr} = 4e^{2(\Lambda-\Psi)}(\Lambda_{,z} - \Psi_{,z}), \quad (1.38d)$$

$$b_{zz} = 4e^{2(\Lambda-\Psi)}(\Lambda_{,z} - \Psi_{,z}), \quad (1.38e)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

Usando los resultados anteriores en la expresión (1.31a), se obtiene para el

tensor de momentum-energía del disco las componentes no nulas

$$Q_0^0 = \frac{e^{2(\Psi-\Lambda)}}{R^2} \{ 2R^2(\Lambda_{,z} - 2\Psi_{,z}) + 2RR_{,z} - e^{4\Psi}\mathcal{W}\mathcal{W}_{,z} \}, \quad (1.39a)$$

$$Q_1^0 = \frac{e^{2(\Psi-\Lambda)}}{R^2} \{ 2R\mathcal{W}(R_{,z} - 2R\Psi_{,z}) - (R^2 + \mathcal{W}^2 e^{4\Psi})\mathcal{W}_{,z} \}, \quad (1.39b)$$

$$Q_0^1 = \frac{e^{2(\Psi-\Lambda)}}{R^2} (e^{4\Psi}\mathcal{W}_{,z}), \quad (1.39c)$$

$$Q_1^1 = \frac{e^{2(\Psi-\Lambda)}}{R^2} (2R^2\Lambda_{,z} + e^{4\Psi}\mathcal{W}\mathcal{W}_{,z}), \quad (1.39d)$$

$$Q_2^2 = \frac{e^{2(\Psi-\Lambda)}}{R^2} (2RR_{,z}), \quad (1.39e)$$

donde, nuevamente, todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

El tipo de simetría considerada permite que podamos escoger el 4-potencial electromagnético como

$$A_a = (\psi, A, 0, 0), \quad (1.40)$$

donde ψ y A son los potenciales eléctrico y magnético, respectivamente, los cuales son también funciones sólo de r y z . Usando la continuidad del tensor métrico y la expresión (1.37b), la densidad de corriente en el disco se puede escribir como

$$j^a = [F^{ab}]\delta_b^z = [F^{az}] = -g^{zz}g^{ab}a_b = -2g^{zz}g^{ab}A_{b,z}. \quad (1.41)$$

Así, la densidad de corriente en el disco es

$$j_a = -2e^{2(\Psi-\Lambda)}A_{a,z}. \quad (1.42)$$

El “verdadero” tensor de momentum-energía superficial (SEMT) del disco, S_{ab} , y la “verdadera” densidad de corriente superficial, j_a , se pueden obtener a través de

las relaciones

$$S_{ab} = \int Q_{ab} \delta(z) ds_n = e^{\Lambda-\Psi} Q_{ab} , \quad (1.43a)$$

$$j_a = \int j_a \delta(z) ds_n = e^{\Lambda-\Psi} j_a , \quad (1.43b)$$

donde $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ es la medida física de longitud en la dirección normal al disco.

Así, las componentes no nulas de S_b^a son

$$S_0^0 = \frac{e^{\Psi-\Lambda}}{R^2} \{ 2R^2(\Lambda_{,z} - 2\Psi_{,z}) + 2RR_{,z} - e^{4\Psi} \mathcal{W} \mathcal{W}_{,z} \} , \quad (1.44a)$$

$$S_1^0 = \frac{e^{\Psi-\Lambda}}{R^2} \{ 2R\mathcal{W}(R_{,z} - 2R\Psi_{,z}) - (R^2 + \mathcal{W}^2 e^{4\Psi}) \mathcal{W}_{,z} \} , \quad (1.44b)$$

$$S_0^1 = \frac{e^{\Psi-\Lambda}}{R^2} (e^{4\Psi} \mathcal{W}_{,z}) , \quad (1.44c)$$

$$S_1^1 = \frac{e^{\Psi-\Lambda}}{R^2} (2R^2 \Lambda_{,z} + e^{4\Psi} \mathcal{W} \mathcal{W}_{,z}) , \quad (1.44d)$$

$$S_2^2 = \frac{e^{\Psi-\Lambda}}{R^2} (2RR_{,z}) , \quad (1.44e)$$

y la densidad de corriente superficial es

$$j_t = -2e^{\Psi-\Lambda} \psi_{,z} , \quad (1.45a)$$

$$j_\varphi = -2e^{\Psi-\Lambda} A_{,z} , \quad (1.45b)$$

donde, como en las expresiones anteriores, todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

Un caso simple es cuando $\mathcal{W}_{,z} = 0$ en el disco, de modo que $S_0^1 = 0$ y $S_1^0 = (S_0^0 - S_1^1) \mathcal{W}$. Es decir, el SEMT se puede escribir como una matriz triangular

superior derecha y por lo tanto éste se puede diagonalizar de manera directa en términos de una tétrada ortonormal (u observador) $e_{\hat{a}}{}^b = \{V^b, W^b, X^b, Y^b\}$, donde

$$V^a = e^{-\Psi}(1, 0, 0, 0), \quad X^a = e^{\Psi-\Lambda}(0, 0, 1, 0), \quad (1.46)$$

$$W^a = \frac{e^{\Psi}}{R}(-\mathcal{W}, 1, 0, 0), \quad Y^a = e^{\Psi-\Lambda}(0, 0, 0, 1).$$

Puesto que los vectores $e_{\hat{a}}{}^b$ son los vectores propios del SEMT, el vector temporal V^a se puede interpretar como el vector velocidad de los discos y por lo tanto la tétrada ortonormal es cómovil. Esta es también la tétrada ortonormal usada por un observador quien está en reposo con respecto al infinito, u “observador localmente estático” (LSO) [21]. En términos de esta tétrada la métrica, el SEMT y la densidad de corriente superficial se pueden descomponer como

$$g_{ab} = -V_a V_b + W_a W_b + X_a X_b + Y_a Y_b, \quad (1.47a)$$

$$S_{ab} = \epsilon V_a V_b + p_{\varphi} W_a W_b + p_r X_a X_b, \quad (1.47b)$$

$$j_a = \sigma V_a + j W_a, \quad (1.47c)$$

donde

$$\epsilon = -S_0^0, \quad p_{\varphi} = S_1^1, \quad p_r = S_2^2, \quad (1.48)$$

son, respectivamente, la densidad de energía superficial, la presión acimutal, y la presión radial medida por este observador, y

$$\sigma = -V^0 j_0, \quad j = W^0 j_0 + W^1 j_1, \quad (1.49)$$

son la densidad de carga eléctrica superficial y la densidad de corriente acimutal del disco también medida por este observador. También consideramos la “densidad

Newtoniana efectiva” definida como

$$\varrho = \epsilon + p_\varphi + p_r. \quad (1.50)$$

Otro caso simple es cuando $\mathcal{W} = 0$ de modo que el espaciotiempo es estático. En tal caso, la tétrada (1.46) toma la forma

$$\begin{aligned} V^a &= e^{-\Psi}(1, 0, 0, 0), & X^a &= e^{\Psi-\Lambda}(0, 0, 1, 0), \\ W^a &= \frac{e^\Psi}{R}(0, 1, 0, 0), & Y^a &= e^{\Psi-\Lambda}(0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (1.51)$$

la expresión (1.49) para la corriente se puede escribir como

$$\sigma = j^0/V^0, \quad j = j^1/W^1, \quad (1.52)$$

y las demás expresiones permanecen iguales. Podemos llamar esta clase de observador “globalmente estático”(GSO).

1.5. Solución de las ecuaciones de campo

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío, en unidades geometrizadas tales que $8\pi G = c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, están dadas por

$$G_{ab} = T_{ab}, \quad (1.53a)$$

$$F^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.53b)$$

con T_{ab} y F_{ab} dados por (1.15a) y (1.15b).

Para la métrica (1.32), las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío implican que R satisface la ecuación de Laplace

$$R_{,rr} + R_{,zz} = 0, \quad (1.54)$$

de modo que R se puede considerar como la parte real de una función analítica $F(\nu) = R(r, z) + iZ(r, z)$, donde $\nu = r + iz$. Así, la función $F(\nu)$ define una transformación conforme

$$r \rightarrow R(r, z), \quad (1.55)$$

$$z \rightarrow Z(r, z),$$

de tal manera que la métrica (1.32) toma la forma usual de Weyl-Lewis-Papapetrou

$$ds^2 = -e^{2\mu}(dt + \mathcal{M}d\varphi)^2 + e^{-2\mu}[R^2d\varphi^2 + e^{2\lambda}(dR^2 + dZ^2)], \quad (1.56)$$

donde R y Z son las coordenadas canónicas de Weyl.

En estas coordenadas, las ecuaciones de campo (1.53) son equivalentes a las ecuaciones de Ernst usuales [39]

$$f\Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E}, \quad (1.57a)$$

$$f\Delta\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi, \quad (1.57b)$$

donde Δ y ∇ son los operadores diferenciales estándar en coordenadas cilíndricas y $f = e^{2\mu}$. Las funciones métricas se obtienen a través de

$$f = \text{Re}\mathcal{E} + \Phi\Phi^*, \quad (1.58a)$$

$$\lambda_{,\zeta} = \sqrt{2}\frac{R}{f} \left[\frac{1}{4f}(\mathcal{E}_{,\zeta} + 2\Phi^*\Phi_{,\zeta})(\mathcal{E}_{,\zeta}^* + 2\Phi\Phi_{,\zeta}^*) - \Phi_{,\zeta}\Phi_{,\zeta}^* \right], \quad (1.58b)$$

$$\mathcal{M}_{,\zeta} = \frac{R}{f^2}[i(\text{Im}\mathcal{E})_{,\zeta} + \Phi^*\Phi_{,\zeta} - \Phi\Phi_{,\zeta}^*], \quad (1.58c)$$

donde $\sqrt{2}\zeta = R + iZ$, de modo que $\sqrt{2}\partial_{,\zeta} = \partial_{,R} - i\partial_{,Z}$. Los potenciales electromagnéticos están relacionados con Φ a través de $A_t = \sqrt{2}\text{Re}\Phi$ y

$$A_{\varphi,\zeta} = \sqrt{2}\left[i\frac{R}{f}(\text{Im}\Phi)_{,\zeta} + \mathcal{M}A_{t,\zeta}\right]. \quad (1.59)$$

Sabemos que para campos electromagnéticos estáticos existe una relación lineal entre el potencial electrostático y el potencial magnético [40, 41]. Por lo tanto algunos autores sólo estudian campos eléctricos. Para campos estáticos, $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$, en este trabajo consideraremos las ecuaciones de campo en presencia de campo eléctrico y campo magnético, puesto que el potencial magnético verdadero es diferente y por lo tanto también sus propiedades físicas.

Una vez que se conoce una solución del sistema de ecuaciones (1.57), podemos obtener una solución de las ecuaciones de campo (1.53) en las coordenadas originales haciendo

$$R(r, z) = \operatorname{Re}F(\nu), \quad (1.60a)$$

$$\Psi(r, z) = \mu(R, Z), \quad (1.60b)$$

$$\Lambda(r, z) = \lambda(R, Z) + \ln |F'(\nu)|, \quad (1.60c)$$

$$\mathcal{W}(r, z) = \mathcal{M}(R, Z), \quad (1.60d)$$

$$\psi(r, z) = A_t(R, Z), \quad (1.60e)$$

$$A(r, z) = A_\varphi(R, Z), \quad (1.60f)$$

donde $F' = dF/d\nu$. Con esta transformación p_r se puede escribir como

$$p_r = \frac{2e^{\mu-\lambda}}{\sqrt{R_{,r}^2 + R_{,z}^2}} \frac{R_{,z}}{R}. \quad (1.61)$$

Así, la construcción de modelos de discos delgados con presión radial diferente de cero depende fuertemente de la función analítica $F(\nu)$, debido a que esta

función determina el comportamiento de la presión radial y también define la transformación conforme que conduce las ecuaciones de campo a la forma dada por Ernst (1.57). Una elección común para $F(\nu)$ es

$$F(\nu) = \nu + iz_0, \quad (1.62)$$

donde z_0 es una constante. Esto equivale a tomar $R = r$ y $Z = z + z_0$. Este es el método bien conocido de “desplazamiento, corte y reflexión” usado en casi todos los trabajos acerca de modelos de discos para generar discos delgados usando soluciones de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell. En este caso se obtienen discos infinitos con presión radial igual a cero.

Otra posible elección para $F(\nu)$ fue presentada en la referencia [5] y está dada por

$$F(\nu) = \nu + \alpha\sqrt{\nu^2 - 1}, \quad (1.63)$$

donde $\alpha \geq 0$. Con esta elección para $F(\nu)$ la expresión general para la presión radial está dada por

$$p_r = \frac{2\alpha e^{\mu-\lambda}}{[1 + (\alpha^2 - 1)r^2]^{1/2}}. \quad (1.64)$$

de modo que obtenemos discos delgados con presión radial diferente de cero y de radio finito, localizados en $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$. Para obtener discos con radios no unitarios, necesitamos sólo hacer la transformación $r \rightarrow ar$, donde a es el radio del disco. Tomaremos también $F(\nu)$ como dada por (1.63).

Con esta elección para $F(\nu)$ la imagen del disco por la transformación conforme (1.55) es la superficie

$$\alpha^2 R^2 + Z^2 = \alpha^2 \quad (1.65)$$

de modo que los discos se transforman en cascarones esferoidales de materia y su exterior se transforma en el exterior de los cascarones. Tenemos tres valores posibles para α : $\alpha = 1$, un cascarón esférico, $\alpha > 1$, un cascarón esferoidal prolato,

y $0 < \alpha < 1$, un cascarón esferoidal oblato. Por lo tanto, las coordenadas naturalmente adaptadas a la simetría de los cascarones son, respectivamente, esféricas, esferoidales prolatas y esferoidales oblatas. Considerando los cascarones anteriores como fuentes, luego buscamos soluciones exteriores de las ecuaciones de campo (1.57) adaptadas a la simetría de los cascarones y, usando (1.60), obtenemos las soluciones discoidales correspondientes en las coordenadas originales.

Capítulo 2

El Modelo de Contra-Rotación

2.1. Introducción

Vamos a considerar ahora, en el caso de un espaciotiempo estático [33, 31], la posibilidad de que el tensor de momentum-energía superficial S^{ab} (SEMT) y la densidad de corriente j^a se puedan escribir como la superposición de dos fluidos cargados contra-rotantes que circulan en direcciones opuestas; es decir, suponemos que

$$S^{ab} = S_+^{ab} + S_-^{ab}, \quad (2.1a)$$

$$j^a = j_+^a + j_-^a, \quad (2.1b)$$

donde las cantidades en el lado derecho son, respectivamente, el SEMT y la densidad de corriente de los fluidos contra-rotantes prógrados y retrógrados.

Con el fin de hacer la descomposición anterior, en la sección 2.2 se presenta el procedimiento para proyectar las cantidades físicas importantes sobre la tétrada e_a^b (1.51). Luego, en la sección 2.3, los discos son interpretados en términos de dos fluidos perfectos cargados contra-rotantes. En particular, se realiza la des-

composición del SEMT y se obtienen las expresiones correspondientes para las densidades de energía, las presiones isotropas y las densidades de carga de los fluidos contra-rotantes. También se analizan dos posibilidades comúnmente empleadas para determinar explícitamente las velocidades tangenciales de contra-rotación. Finalmente, en la sección 2.4, los discos son interpretados en términos de dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes.

2.2. Proyecciones sobre la tétrada

Sea $U_{\pm}^a = (U_{\pm}^0, U_{\pm}^1, 0, 0)$ los vectores velocidad de los dos fluidos contra-rotantes. Con el fin de obtener la descomposición (2.1a), proyectamos los vectores velocidad de los dos fluidos contra-rotantes sobre la tétrada $e_{\hat{a}}{}^b$ (1.51), usando las relaciones (ver [44])

$$U_{\pm}^{\hat{a}} = e_{\hat{b}}{}^a U_{\pm}^b \quad , \quad U_{\pm}^a = e_{\hat{b}}{}^a U_{\pm}^{\hat{b}}. \quad (2.2)$$

Se sigue que

$$U_{\pm}^a = e_{\hat{0}}{}^a U_{\pm}^{\hat{0}} + e_{\hat{1}}{}^a U_{\pm}^{\hat{1}}, \quad (2.3)$$

$$-(U_{\pm}^{\hat{0}})^2 + (U_{\pm}^{\hat{1}})^2 = -1, \quad (2.4)$$

donde la última expresión es la condición de normalización del vector velocidad U_{\pm}^a . La velocidad tangencial de los fluidos con respecto a la tétrada $e_{\hat{a}}{}^b$ se define como

$$v_{\pm} = \frac{U_{\pm}^{\hat{1}}}{U_{\pm}^{\hat{0}}}. \quad (2.5)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.4), se obtiene

$$U_{\pm}^{\hat{0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2}}, \quad (2.6)$$

de modo que podemos expresar las componentes de la velocidad de los fluidos contra-rotantes en términos de la tétrada (1.51) y de la velocidad tangencial (2.5)

como

$$U_{\pm}^a = \frac{V^a + v_{\pm} W^a}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2}}, \quad (2.7)$$

De igual manera, se pueden expresar V^a y W^a en términos de U_{\pm}^a y de v_{\pm} . De (2.7) tenemos que

$$\sqrt{1 - v_+^2} U_+^a = V^a + W^a v_+, \quad (2.8a)$$

$$\sqrt{1 - v_-^2} U_-^a = V^a + W^a v_-, \quad (2.8b)$$

y luego de un álgebra simple, se obtiene

$$V^a = \frac{\sqrt{1 - v_-^2} v_+ U_-^a - \sqrt{1 - v_+^2} v_- U_+^a}{v_+ - v_-}, \quad (2.9a)$$

$$W^a = \frac{\sqrt{1 - v_+^2} U_+^a - \sqrt{1 - v_-^2} U_-^a}{v_+ - v_-}. \quad (2.9b)$$

Otra cantidad relacionada con el movimiento de contra-rotación es el momento angular específico de una partícula en una órbita circular de radio r , definido como $h_{\pm} = g_{\varphi\varphi} U_{\pm}^{\varphi}$. Mediante las relaciones (2.5) y (2.6), se puede ver que

$$h_{\pm} = \frac{R e^{-\Psi} U_{\pm}}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}. \quad (2.10)$$

Esta cantidad se puede usar para analizar la estabilidad de los discos con respecto a perturbaciones radiales. La condición de estabilidad,

$$\frac{d(h^2)}{dr} > 0, \quad (2.11)$$

es una extensión del criterio de estabilidad de Rayleigh de un fluido en reposo en un campo gravitacional [45].

2.3. Discos de fluido perfecto cargados contra-rotantes

2.3.1. Tensor de momentum-energía y densidad de carga

En términos de la métrica $h_{ab} = g_{ab} - Y_a Y_b$ de la hipersuperficie $z = 0$, podemos escribir el SEMT como

$$S^{ab} = (\epsilon + p_r) V^a V^b + (p_\varphi - p_r) W^a W^b + p_r h^{ab}, \quad (2.12)$$

y luego, usando (2.9), obtenemos

$$\begin{aligned} S^{ab} &= \frac{f(v_-, v_-)(1 - v_+^2) U_+^a U_+^b}{(v_+ - v_-)^2} \\ &+ \frac{f(v_+, v_+)(1 - v_-^2) U_-^a U_-^b}{(v_+ - v_-)^2} \\ &- \frac{f(v_+, v_-)(1 - v_+^2)^{\frac{1}{2}}(1 - v_-^2)^{\frac{1}{2}}(U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(v_+ - v_-)^2} \\ &+ p_r h^{ab}, \end{aligned}$$

donde

$$f(v_1, v_2) = (\epsilon + p_r) v_1 v_2 + p_\varphi - p_r. \quad (2.13)$$

Claramente, con el fin de escribir el SEMT en la forma (2.1a), es necesario que el término mixto sea igual a cero y por lo tanto las velocidades tangenciales de contra-rotación deben estar relacionadas mediante la condición de ligadura

$$f(v_+, v_-) = 0, \quad (2.14)$$

donde asumimos que $|v_\pm| \neq 1$.

Luego, asumiendo las velocidades tangenciales en concordancia con la relación anterior, podemos escribir el SEMT como (2.1a) con

$$S_{\pm}^{ab} = (\epsilon_{\pm} + p_{\pm}) U_{\pm}^a U_{\pm}^b + p_{\pm} h^{ab}, \quad (2.15)$$

de modo que tenemos dos fluidos perfectos contra-rotantes con densidades de energía ϵ_{\pm} y presiones p_{\pm} , medidas por un observador comóvil con los fluidos, dadas por

$$\epsilon_{\pm} + p_{\pm} = \left[\frac{1 - v_{\pm}^2}{v_{\mp} - v_{\pm}} \right] (\epsilon + p_r) v_{\mp}, \quad (2.16a)$$

$$p_+ + p_- = p_r. \quad (2.16b)$$

Se sigue también que

$$\epsilon_+ + \epsilon_- = \epsilon + p_r - p_{\varphi}. \quad (2.17)$$

Así, el SEMT se puede escribir como la superposición de dos fluidos perfectos contra-rotantes si, y sólo si, la restricción (2.14) admite una solución tal que $v_+ \neq v_-$. Este último resultado es completamente equivalente a la condición necesaria y suficiente obtenida en la referencia [43].

Similarmente, sustituyendo (2.9) en (1.47c) podemos escribir la densidad de corriente como (2.1b) con

$$j_{\pm}^a = \sigma_{\pm} U_{\pm}^a, \quad (2.18)$$

donde σ_{\pm} son las densidades de carga eléctrica contra-rotantes, medidas por un observador comóvil con los fluidos, las cuales están dadas por

$$\sigma_{\pm} = \left[\frac{\sqrt{1 - v_{\pm}^2}}{v_{\pm} - v_{\mp}} \right] (j - \sigma v_{\mp}). \quad (2.19)$$

Así, tenemos un disco formado por dos fluidos perfectos cargados contra-rotantes con densidades de energía y presiones dadas por (2.16), y densidades de carga eléctrica dadas por (2.19).

2.3.2. Velocidades tangenciales de contra-rotación

Todas las cantidades importantes asociadas al CRM dependen de las velocidades tangenciales de contra-rotación v_{\pm} . Sin embargo, aun para valores conocidos de v_{\pm} , el sistema de ecuaciones (2.16) es subdeterminado de modo que sólo podemos tener información acerca de las cantidades físicas correspondientes a ambos fluidos en algunas situaciones particulares. Examinaremos dos casos simples en este trabajo, cuando los dos fluidos tienen igual presión y cuando tienen densidad de energía igual. Por otro lado, la ecuación de la ligadura (2.14) no determina v_{\pm} unívocamente de modo que necesitamos exigir alguna condición adicional sobre las velocidades tangenciales de contra-rotación que conduzcan a un CRM bien definido.

Una posibilidad, comúnmente asumida, es considerar los fluidos circulando a lo largo de electro-geodésicas

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\pm}g_{ab,r}U_{\pm}^aU_{\pm}^b = -\sigma_{\pm}F_{ra}U_{\pm}^a. \quad (2.20)$$

Sea $\omega_{\pm} = U_{\pm}^1/U_{\pm}^0$ la velocidad angular de las partículas. En términos de ω_{\pm} la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\pm}(g_{11,r}\omega_{\pm}^2 + g_{00,r}) = -\sigma_{\pm}\frac{1}{U_{\pm}^0}(\psi_{,r} + A_{,r}\omega_{\pm}), \quad (2.21)$$

y v_{\pm} se puede escribir como

$$v_{\pm} = \left[\frac{V^0}{W^1} \right] \omega_{\pm}. \quad (2.22)$$

Como un ejemplo, vamos a considerar el movimiento electro-geodésico de las partículas cuando tenemos densidad de energía igual. Por simplicidad, analizaremos los casos electrostático y magnetostático separadamente. La velocidad angular ω_{\pm} se puede obtener de la ecuación de la electro-geodésica (2.21), y en el caso electrostático obtenemos $\omega_{\pm} = \pm\omega$ con

$$\omega^2 = \frac{e^{4\Psi}}{R} \left[\frac{-2\Psi_{,r}(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z}) + \psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}}{-2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})(R_{,r} - R\Psi_{,r}) + R\psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}} \right], \quad (2.23)$$

de modo que los dos fluidos circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas, y por consiguiente

$$f(v_+, v_-) = -R \left[\frac{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})dp_r/dr + p_r\psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}}{-2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})(R_{,r} - R\Psi_{,r}) + R\psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}} \right], \quad (2.24)$$

donde hemos usado las ecuaciones de Einstein-Maxwell (1.53). Se sigue inmediatamente que $f(v_+, v_-)$ se anula si

$$\frac{1}{p_r} \frac{dp_r}{dr} = -\frac{\psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}}{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})}, \quad (2.25)$$

y por lo tanto

$$p_r = c_1 e^{f_1(r)}, \quad (2.26)$$

donde c_1 es una constante y

$$f_1(r) = -\int \frac{\psi_{,r}\psi_{,z}e^{-2\Psi}}{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})} dr. \quad (2.27)$$

Similarmente, para campos magnetostáticos obtenemos $\omega_{\pm} = \pm\omega$ con

$$\omega^2 = e^{4\Psi} \left[\frac{2\Psi_{,r}(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z}) + A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}/R^2}{2R(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})(R_{,r} - R\Psi_{,r}) + A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}} \right], \quad (2.28)$$

de modo que los dos fluidos circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas, y por lo tanto

$$f(v_+, v_-) = R \left[\frac{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})dp_r/dr - p_r A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}}{-2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})(R_{,r} - R\Psi_{,r}) + A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}/R} \right]. \quad (2.29)$$

Es decir, $f(v_+, v_-)$ se anula si

$$\frac{1}{p_r} \frac{dp_r}{dr} = \frac{A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}}{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})}, \quad (2.30)$$

y por lo tanto

$$p_r = c_2 e^{f_2(r)}, \quad (2.31)$$

donde de nuevo c_2 es una constante y

$$f_2(r) = \int \frac{A_{,r}A_{,z}e^{2\Psi}}{2(\Psi_{,z} - \Lambda_{,z})} dr. \quad (2.32)$$

Es decir, para campos electrostáticos o magnetostáticos y densidad de energía igual los fluidos circulan a lo largo de electro-geodésicas sólo si la presión radial satisface (2.26) y (2.31), respectivamente. Cuando tenemos presiones iguales o en situaciones más generales, por ejemplo en presencia de campo eléctrico y campo magnético, p_r es una función complicada de r que se puede obtener por un procedimiento similar. Además, en general los fluidos se moverían con velocidades diferentes.

Como podemos ver, con el fin de tener los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodesicas, la presión radial debe satisfacer una condición muy fuerte que, en general, no es satisfecha por las soluciones discoidales. Por consiguiente, necesitamos considerar una condición adicional diferente del movimiento electro-geodésico con el fin de determinar exactamente las velocidades de contra-rotación. Otra posibilidad es tomar las partículas no circulando a lo largo de electro-geodésicas sino con velocidades tangenciales iguales y opuestas, es decir

$$v_{\pm} = \pm v, \quad (2.33)$$

de modo que (2.14) es equivalente a

$$v^2 = \left[\frac{p_{\varphi} - p_r}{\epsilon + p_r} \right]. \quad (2.34)$$

Esta elección, comúnmente considerada, conduce a una determinación completa de los vectores velocidad. Sin embargo, esto sólo puede hacerse cuando la expresión anterior es positiva y menor que la velocidad de la luz. En particular, cuando los dos fluidos tienen presión igual o densidad de energía igual tenemos $p_{\pm} = \frac{1}{2}p_r$ y $\epsilon_{\pm} = \frac{1}{2}(\epsilon + p_r - p_{\varphi})$.

En el caso general, cuando (2.34) no es positiva y menor que uno, los dos fluidos circulan con velocidades diferentes y podemos escribir (2.14) como

$$v_+ v_- = \left[\frac{p_r - p_{\varphi}}{\epsilon + p_r} \right], \quad (2.35)$$

y por lo tanto obtenemos un CRM sólo si

$$| p_r - p_\varphi | < | \epsilon + p_r |. \quad (2.36)$$

Sin embargo, esta relación no determina completamente las velocidades de contra-rotación, y en consecuencia el CRM es indefinido.

2.4. Discos de polvo cargados contra-rotantes

2.4.1. Tensor de momentum-energía y densidad de carga

Un caso especial importante es cuando no hay presión radial, $p_r = 0$, de modo que podemos escribir el SEMT como

$$\begin{aligned} S^{ab} = & \frac{f(v_-, v_-)(1 - v_+^2) U_+^a U_+^b}{(v_+ - v_-)^2} + \frac{f(v_+, v_+)(1 - v_-^2) U_-^a U_-^b}{(v_+ - v_-)^2} \\ & - \frac{f(v_+, v_-)[(1 - v_+^2)(1 - v_-^2)]^{1/2}(U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(v_+ - v_-)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$f(v_1, v_2) = \epsilon v_1 v_2 + p_\varphi. \quad (2.37)$$

De nuevo, a fin de escribir el SEMT en la forma (2.1a), es necesario que el término mixto sea igual a cero y por consiguiente las velocidades tangenciales de contra-rotación deben estar relacionadas mediante la condición de ligadura (2.14) con $f(v_+, v_-)$ dada por (2.37). Luego, suponiendo que las velocidades tangenciales satisfacen la restricción anterior, podemos escribir el SEMT como (2.1a) con

$$S_\pm^{ab} = \epsilon_\pm U_\pm^a U_\pm^b, \quad (2.38)$$

de modo que tenemos un disco formado por dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes con densidad de energía

$$\epsilon_\pm = \left[\frac{1 - v_\pm^2}{v_\mp - v_\pm} \right] v_\mp \epsilon. \quad (2.39)$$

y densidad de carga eléctrica dada por (2.19).

2.4.2. Velocidades tangenciales de contra-rotación

Consideremos primero los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas. Usando (2.7), (2.39), y (2.19), la ecuación de la electro-geodésica (2.20) toma la forma

$$\omega_{\mp}(g_{11,r}\omega_{\pm}^2 + g_{00,r}) = -\frac{2V_0^2}{\epsilon}(j^0\omega_{\mp} - j^1)(\psi_{,r} + A_{,r}\omega_{\pm}),$$

de modo que

$$\omega_+ + \omega_- = \frac{2}{\epsilon} \left[\frac{W^1}{V^0} \right]^2 \left[\frac{\epsilon j_1 \psi_{,r} + p_{\varphi} j_0 A_{,r}}{\epsilon g_{00,r} + 2j_0 \psi_{,r}} \right], \quad (2.40a)$$

$$\omega_+ \omega_- = - \left[\frac{W^1}{V^0} \right]^2 \frac{p_{\varphi}}{\epsilon}, \quad (2.40b)$$

donde hemos usado las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío (1.53). De la última expresión se sigue directamente que $f(v_+, v_-)$ se anula y por lo tanto las velocidades electro-geodésicas satisfacen (2.14) y tenemos un CRM bien definido.

Nótese que en general los dos fluidos circulan con velocidades diferentes. Sin embargo, cuando el espaciotiempo es electrostático (o magnetostático) los dos fluidos electro-geodésicos circulan con velocidades iguales y opuestas, de modo que la condición de ligadura (2.14) es equivalente a

$$v^2 = \frac{p_{\varphi}}{\epsilon}, \quad (2.41)$$

como es comúnmente asumido en trabajos relacionados con discos contra-rotantes. Ahora tenemos dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes con densidad de energía

$$\epsilon_{\pm} = \frac{\epsilon - p_{\varphi}}{2}, \quad (2.42)$$

momentum angular específico

$$h_{\pm} = \pm r e^{-\nu} \sqrt{\frac{p_{\varphi}}{\epsilon - p_{\varphi}}}, \quad (2.43)$$

y densidad de carga eléctrica

$$\sigma_{e\pm} = -\frac{1}{2}e^{-\nu}j_0\sqrt{1 - \frac{p_\varphi}{\epsilon}}, \quad (2.44a)$$

$$\sigma_{m\pm} = \pm\frac{1}{2r}e^\nu j_1\sqrt{\frac{\epsilon}{p_\varphi} - 1}, \quad (2.44b)$$

donde $\sigma_{e\pm}$ y $\sigma_{m\pm}$ son las densidades de carga eléctrica en los casos electrostáticos y magnetostáticos, respectivamente. La velocidad está dada por (2.41).

Aunque la elección electro-geodésica conduce a un CRM bien definido, algunas veces las cantidades físicas correspondientes pueden tener un comportamiento no físico. Por ejemplo, las expresiones (2.19) y (2.10) pueden tomar valores imaginarios. Por lo tanto, necesitamos considerar otras soluciones de la Ec. (2.14) diferentes de las velocidades electro-geodésicas. La otra posibilidad es tomar los dos fluidos contra-rotantes no circulando a lo largo de electro-geodésicas pero con velocidades tangenciales iguales y opuestas,

$$v_\pm = \pm v. \quad (2.45)$$

Esta elección, que implica la existencia de interacciones diferentes de las gravitacionales y electromagnéticas entre ambos fluidos (por ejemplo, colisiones), conduce a una completa determinación de los vectores velocidad de tal manera que las expresiones para la velocidad, la densidad de energía, y el momentum angular específico de ambos fluidos coinciden con el caso electrostático (magnetostático), pero las densidades de carga son diferentes. Sin embargo, esto puede sólo hacerse cuando $0 \leq |p_\varphi/\sigma| \leq 1$. En el caso general, los dos fluidos contra-rotantes circulan con velocidades diferentes y podemos escribir (2.14) como

$$v_+v_- = -\frac{p_\varphi}{\epsilon}. \quad (2.46)$$

Sin embargo, esta relación no determina completamente las velocidades tangenciales, y así el CRM es indefinido, al igual que en el caso con presión radial diferente de cero.

Capítulo 3

Algunos modelos de discos de polvo cargados contra-rotantes

3.1. Introducción

Como una primera aplicación de lo presentado en los capítulos anteriores, consideramos en este capítulo algunos modelos simples de discos con presión radial igual a cero que se pueden interpretar apropiadamente mediante el Modelo de Contra-Rotación [22]. Tales discos se obtienen tomando $F(\nu)$ como dada por (1.62).

Los modelos se basan en las métricas estáticas tipo Chazy-Curzon, tipo Zipoy-Voorhees, tipo Bonnor-Sackfield, y una métrica de Darmois cargada y magnetizada. En particular, se obtienen expresiones explícitas para la densidad de energía, la presión acimutal, la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente acimutal del disco. También se analizan las diferentes cantidades físicas asociadas con el CRM correspondiente a los discos anteriores.

3.2. Discos tipo Chazy-Curzon

La primera familia de soluciones a considerar es una solución tipo Chazy-Curzon la cual está dada por

$$e^\Psi = \frac{2}{(a+1)e^{\gamma/\rho} - (a-1)e^{-\gamma/\rho}}, \quad (3.1a)$$

$$\Lambda = -\frac{\gamma^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2}, \quad (3.1b)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{2}q_1[e^{\gamma/\rho} - e^{-\gamma/\rho}]}{(a+1)e^{\gamma/\rho} - (a-1)e^{-\gamma/\rho}}, \quad (3.1c)$$

$$A = \sqrt{2}\gamma q_2 \cos \theta, \quad (3.1d)$$

donde $a^2 = 1 + b^2$, con $b^2 = q_1^2 + q_2^2$, y γ es una constante real. q_1 y q_2 son los parámetros que regulan los campos eléctrico y magnético, respectivamente. ρ y θ son coordenadas cuasi-esféricas, las cuales están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$r = \rho \sin \theta, \quad z + z_0 = \rho \cos \theta. \quad (3.2)$$

Nótese que hemos desplazado el origen del eje z en z_0 . Esta solución se puede generar, en estas coordenadas, usando el formalismo del potencial complejo propuesto por Ernst [39] a partir de la solución en el vacío de Chazy-Curzon [46, 47], escogiendo el parámetro q en la Ref. [39] como complejo. Para $q_2 = 0$ tenemos una solución electrostática y para $q_1 = 0$ se obtiene su análoga magnetostática [48].

De las expresiones anteriores podemos calcular las cantidades físicas asociadas

con los discos. Luego de algunos cálculos directos, obtenemos

$$\epsilon = \frac{8\gamma \cos \theta e^{-\lambda} [(\rho - \gamma \sin^2 \theta)(a + 1)e^{\gamma/\rho} + (\rho + \gamma \sin^2 \theta)(a - 1)e^{-\gamma/\rho}]}{\rho^3 [(a + 1)e^{\gamma/\rho} - (a - 1)e^{-\gamma/\rho}]^2}, \quad (3.3a)$$

$$p_\varphi = \frac{8\gamma^2 \sin^2 \theta \cos \theta e^{-\lambda}}{\rho^2 [(a + 1)e^{\gamma/\rho} - (a - 1)e^{-\gamma/\rho}]}, \quad (3.3b)$$

$$\sigma = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_1 \cos \theta e^{-\lambda}}{(1 + a)\rho^2 [(a + 1)e^{\gamma/\rho} - (a - 1)e^{-\gamma/\rho}]^2}, \quad (3.3c)$$

$$j = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_2 \sin \theta e^{-\lambda}}{\rho^2 [(a + 1)e^{\gamma/\rho} - (a - 1)e^{-\gamma/\rho}]^2}. \quad (3.3d)$$

Con el fin de estudiar el comportamiento de estas cantidades llevaremos a cabo un análisis gráfico de ellas para discos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$, $0,5$, $0,1$, $1,5$. En la Fig. 3.1 se muestran la densidad de energía ϵ y la presión acimutal p_φ , como funciones de r . Vemos que la densidad de energía presenta un máximo en $r = 0$ y luego disminuye rápidamente con r . También vemos que la presencia de campo electromagnético disminuye la densidad de energía en la región central del disco y luego la incrementa. Podemos observar que la presión crece rápidamente cerca al centro del disco, alcanza un máximo y luego disminuye rápidamente. También observamos que el campo electromagnético disminuye la presión en todas las regiones del disco. Luego, la densidad de carga eléctrica σ y la densidad de corriente acimutal j se muestran en la Fig. 3.2. σ tiene un máximo en el centro del disco y luego cae a cero en el infinito mientras que j presenta un comportamiento similar a la presión. También graficamos las funciones anteriores para otros valores de los parámetros y, en todos los casos, encontramos el mismo comportamiento.

Consideremos ahora el CRM para el mismo valor de los parámetros. Todas las cantidades importantes también se pueden expresar en forma analítica a partir de las expresiones anteriores pero los resultados son tan engorrosos que resulta

mejor sólo analizarlos gráficamente. Consideremos primero los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas. En la Fig. 3.3(a) se grafican las curvas de velocidad tangencial de los fluidos contra-rotantes v_+ , v_- , para discos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5, 1,0, 1,5$, y v^2 para $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $b = 0,5, 1,0$, y $1,5$. Vemos que v_+ y v_- crecen inicialmente y luego v_+ cae a cero en el infinito y siempre es menor que la velocidad de la luz, mientras que v_- crece monótonamente. Por lo tanto estos discos sólo se comportan bien en la región central. Sin embargo, cuando el espaciotiempo es electrostático (o magnetostático) se encuentra que la velocidad v^2 (Fig. 3.3(b)) para estos discos es siempre menor que la velocidad de la luz, sin embargo los discos con $b = 0,5$ y $z_0 < 0,76$ no se pueden construir a partir del CRM ya que $v^2 > 1$ (no se muestra en la figura). También se observa que la inclusión de campo eléctrico (o magnético) y el incremento de z_0 pueden hacer menos relativistas estos discos.

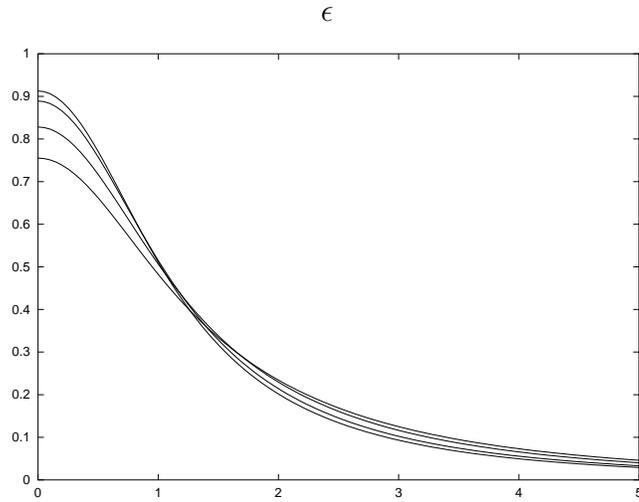
En la Fig. 3.4(a) se grafica el momentum angular específico de los fluidos contra-rotantes h_+^2 , h_-^2 para discos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5, 1,0$, y $1,5$, y h^2 para $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$, $b = 0,5, 1,0, 1,5$, y 4 . Vemos que hay un cambio fuerte en la pendiente en cierto valor de r , lo cual significa que hay una inestabilidad fuerte allí. Igualmente encontramos regiones con pendiente negativa donde el CRM es inestable. h_+^2 también presenta inestabilidad después de cierto valor de r . Por lo tanto estos discos son estables sólo en la región central. Para campos electrostáticos (o magnetostáticos) el momentum angular específico h^2 (Fig. 3.4(b)) es una función monótona creciente de r que corresponde a un CRM estable para los discos. Sin embargo, el CRM no puede ser aplicado para $b = 4,0$ (curva inferior). Así, la inclusión de campo eléctrico (magnético) puede hacer inestables estos discos contra perturbaciones radiales.

En la Fig. 3.5(a) se muestran las gráficas de las densidades de energía ϵ_+ , ϵ_- para discos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5, 1,0$, y $1,5$, y ϵ_{\pm} para $\gamma = 1$,

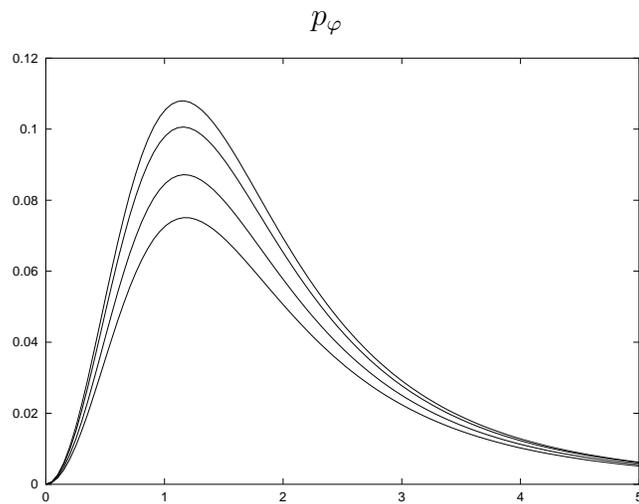
$z_0 = 1,5$, $b = 0,5$, $1,0$, y $1,5$, como funciones de r . La densidad de energía ϵ_+ es siempre una cantidad positiva, que cae a cero en el infinito, mientras que ϵ_- se vuelve negativa después de cierto valor de r y luego cae a cero en el infinito. La densidad de energía ϵ_{\pm} para campos electrostáticos (o magnetostáticos) es una cantidad positiva en todas partes del disco, cayendo a cero en el infinito. Vemos también que la presencia de campo electromagnético disminuye las densidades de energía de los fluidos en la región central de los discos y luego la incrementa.

En la Fig. 3.5(b) se muestran las gráficas de las densidades de carga eléctrica σ_+ , σ_- para discos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$, $1,0$, y $1,5$, y $\sigma_{e\pm}$ y $\sigma_{m\pm}$ para $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$, $b = 0,5$, $1,0$, y $1,5$, como funciones de r . Vemos que σ_+ cae a cero en el infinito, mientras que σ_- se vuelve luego imaginaria. Las densidades $\sigma_{e\pm}$ y $\sigma_{m\pm}$ presentan un máximo en el centro del disco, luego disminuyen monótonamente, cayendo a cero en el infinito, y son siempre cantidades reales.

Como con los fluidos electro-geodésicos se obtienen expresiones que se vuelven imaginarias en porciones del disco, necesitamos considerar el CRM para discos no electro-geodésicos. Así, cuando los dos fluidos no se mueven sobre electro-geodésicas pero tienen velocidades tangenciales iguales y opuestas, las gráficas para la velocidad, la densidad de energía y el momentum angular específico de ambos fluidos tendrán el mismo comportamiento que en el caso electrostático (o magnetostático). Sin embargo, las expresiones para las densidades de carga eléctrica son diferentes y se muestran en la Fig. 3.6, siendo siempre cantidades reales. Por lo tanto, para campos tipo Chazy-Curzon podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes electro-geodésicos con una región central bien comportada, mientras que cuando los dos fluidos no circulan a lo largo de electro-geodésicas o para campos electrostáticos (o magnetostáticos) se obtienen discos contra-rotantes con un comportamiento físicamente razonable para muchos valores de los parámetros.

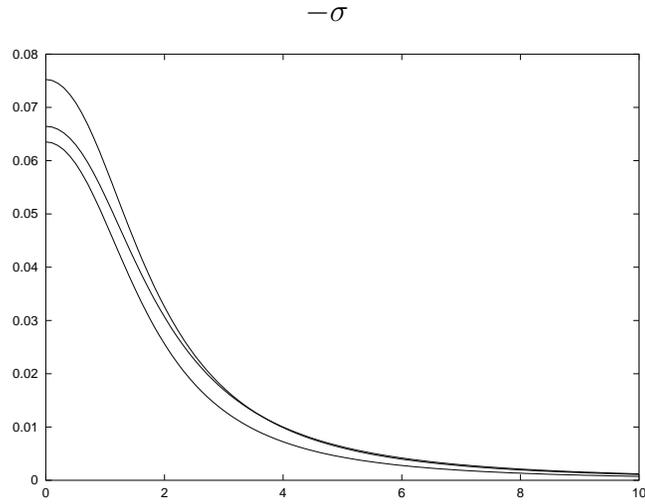


r
(a)

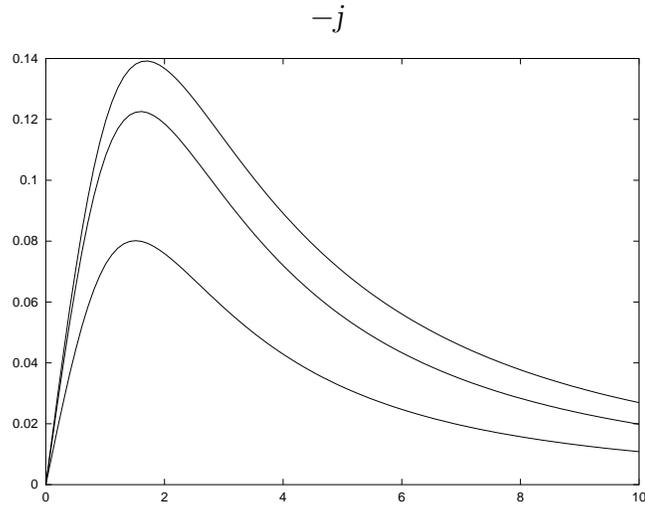


r
(b)

Figura 3.1: (a) ϵ y (b) p_φ para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas inferiores).

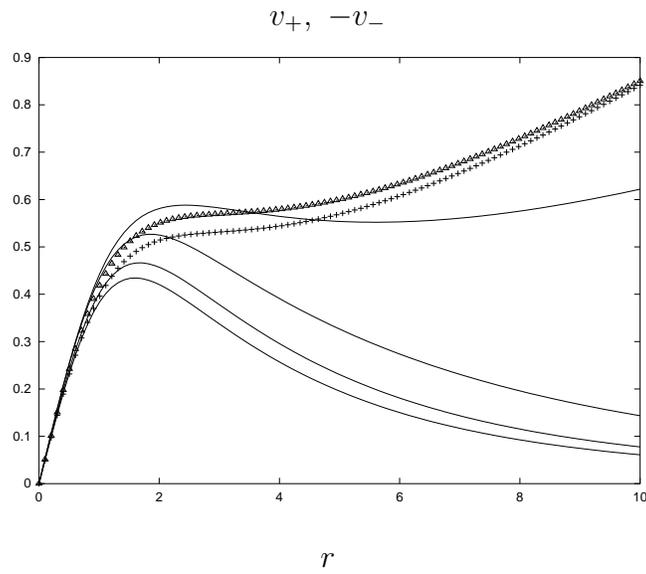


r
(a)



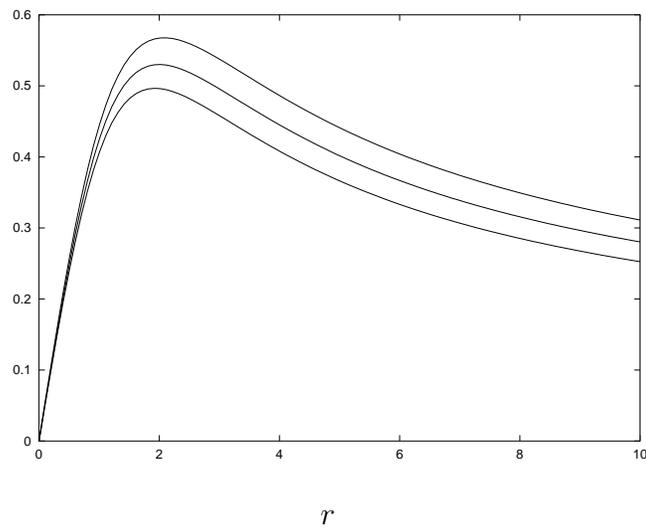
r
(b)

Figura 3.2: (a) σ para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5 (curva inferior), 1,0 (curva superior), y 1,5. (b) j para $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5 (curva inferior), 1,0, y 1,5 (curva superior) y el mismo valor de γ y z_0 .



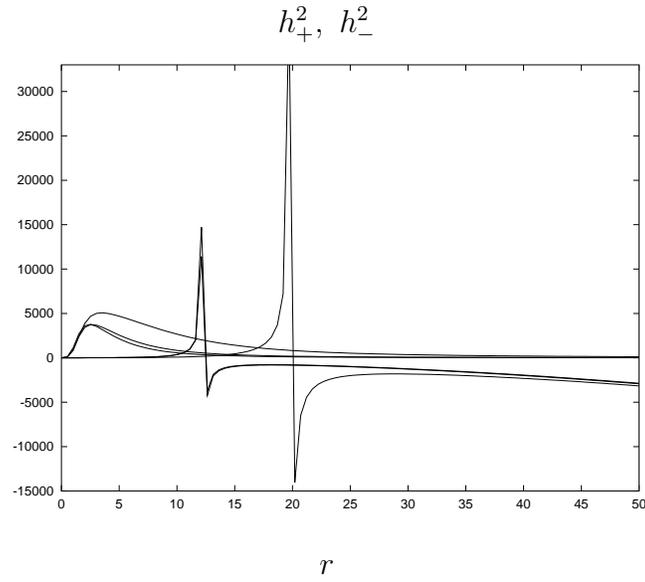
(a)

v^2



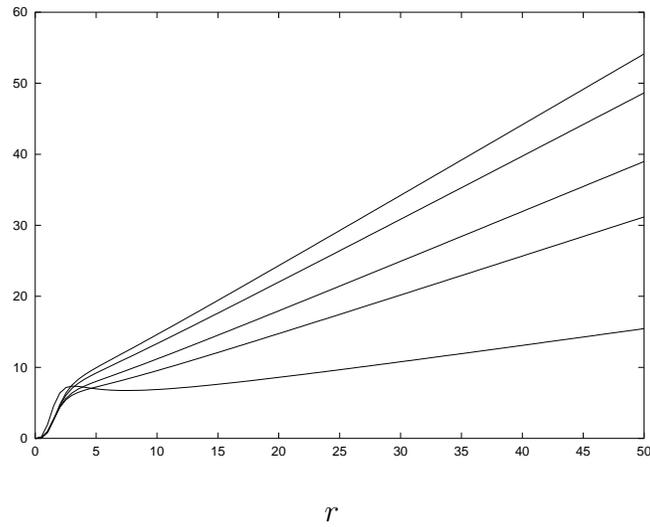
(b)

Figura 3.3: (a) v_+ (curvas inferiores) para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva superior), $1,0$, y $1,5$ (curva inferior), v_- para $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva s3lida), $1,0$ (curva con cruces), y $1,5$, y (b) v^2 para $b = 0,5$ (curva superior), $1,0$, y $1,5$ (curva inferior), y el mismo valor de γ y z_0 .



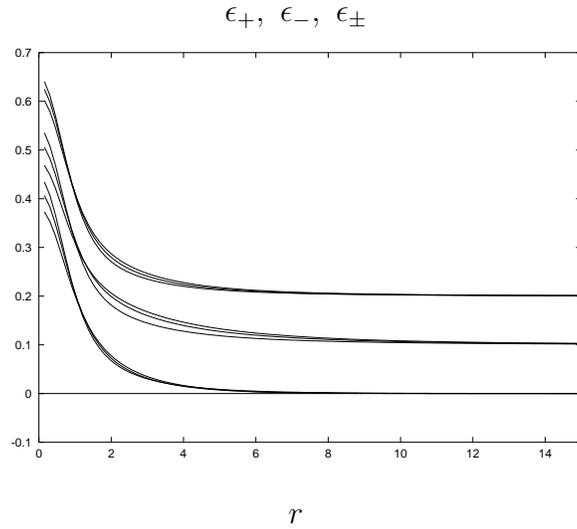
(a)

h^2

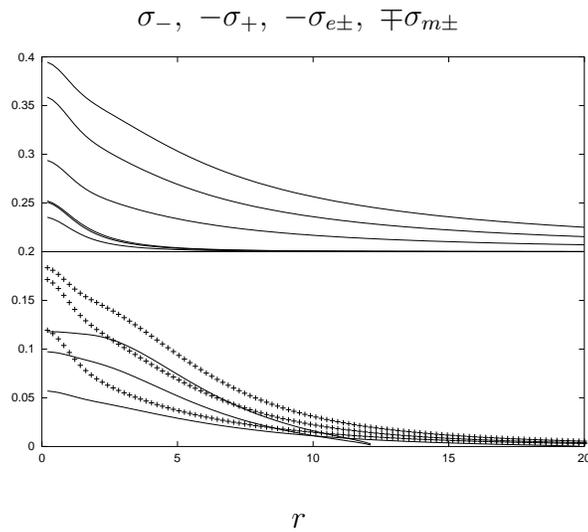


(b)

Figura 3.4: (a) h_+^2 (escaladas por un factor de 1000), h_-^2 (curvas agudas) para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curvas superiores), 1,0, y 1,5 (curvas inferiores), y (b) h^2 para $b = 0,5$ (curva superior), 1,0, 1,5, y 4 (curva inferior), y el mismo valor de γ y z_0 .



(a)



(b)

Figura 3.5: (a) ϵ_- (curvas inferiores), ϵ_+ (desplazadas un factor de 0.1) para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5, 1,0$, y $1,5$ y ϵ_{\pm} (curvas superiores desplazadas un factor de 0.2) para $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $b = 0,5, 1,0$ y $1,5$. (b) σ_-, σ_+ (curvas con cruces), $\sigma_{e\pm}$ (desplazadas un factor de 0.2) y $\sigma_{m\pm}$ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.2) para el mismo valor de los parámetros.

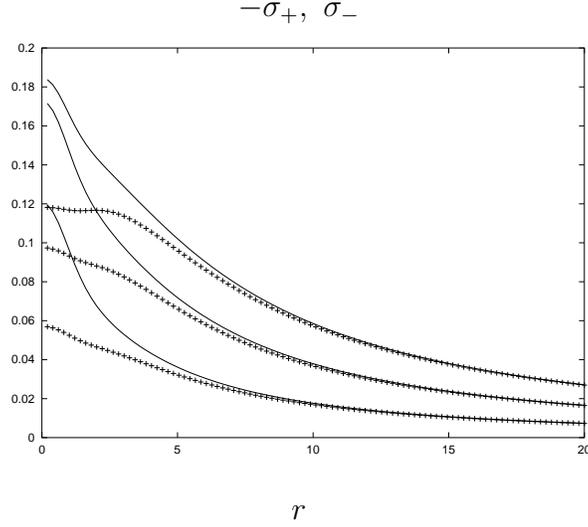


Figura 3.6: σ_+ (curvas sólidas) y σ_- para discos tipo Chazy-Curzon no electrogeodésicos con $\gamma = 1$, $z_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curvas inferiores), 1,0, y 1,5 (curvas superiores).

3.3. Discos tipo Zipoy-Voorhees

La segunda familia de soluciones considerada es una solución tipo Zipoy-Voorhees la cual se puede escribir como

$$e^\Psi = \frac{2(x^2 - 1)^{\gamma/2}}{(a + 1)(x + 1)^\gamma - (a - 1)(x - 1)^\gamma}, \quad (3.4a)$$

$$\Lambda = \frac{\gamma^2}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \quad (3.4b)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{2}q_1[(x + 1)^\gamma - (x - 1)^\gamma]}{(a + 1)(x + 1)^\gamma - (a - 1)(x - 1)^\gamma}, \quad (3.4c)$$

$$A = \sqrt{2}k\gamma q_2 y, \quad (3.4d)$$

donde $a^2 = 1 + b^2$, con $b^2 = q_1^2 + q_2^2$, y γ es una constante real. q_1 y q_2 son de nuevo los parámetros que regulan los campos eléctrico y magnético, respectivamente. x e y son las coordenadas esferoidales prolatas, las cuales están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$r^2 = k^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad z + z_0 = kxy. \quad (3.5)$$

Esta solución también se puede generar, en estas coordenadas, usando el formalismo del potencial complejo propuesto por Ernst [39] a partir de la solución en el vacío de Zipoy-Voorhees [49, 50], también conocida como la solución γ de Weyl [51, 52], escogiendo el parámetro q de la Ref. [39] como complejo. Para $q_2 = 0$ también tenemos una solución electrostática y para $q_1 = 0$ se obtiene su equivalente magnetostático [48]. El caso $q_2 = 0$ y $\gamma = 1$ corresponde a la solución de Reissner-Nordström [54], en cuyo caso $a = m/k$, $q_1 = e/k$, con $k^2 = m^2 - e^2$, de modo que $a^2 = 1 + q_1^2$, siendo m y e los parámetros de masa y carga, respectivamente. Cuando $q_1 = 0$ y $\gamma = 2$ se obtiene una solución magnetostática tipo Taub-NUT. Dicha solución también se puede generar, en estas coordenadas, usando un teorema bien conocido propuesto por Bonnor (ver Ref. [55]) a partir de la solución en el vacío Taub-NUT. Nótese que para $b = 0$, esta solución se reduce a la métrica de Darmois [54].

De las expresiones anteriores podemos calcular las cantidades físicas asociadas con los discos, obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= \frac{8\gamma\bar{y}(\bar{x}^2 - 1)^{\frac{\gamma}{2}(1-\gamma)}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{\frac{1}{2}(\gamma^2-4)}}{[(a+1)(\bar{x}+1)^\gamma - (a-1)(\bar{x}-1)^\gamma]^2} \\ &\times \left\{ \bar{x}[(a+1)(\bar{x}+1)^\gamma - (a-1)(\bar{x}-1)^\gamma][\bar{x}^2 + (\gamma-1)\bar{y}^2 - \gamma] \right. \\ &\quad \left. - (\bar{x}^2 - 1)(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)[(a+1)(\bar{x}+1)^{\gamma-1} - (a-1)(\bar{x}-1)^{\gamma-1}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{8\gamma^2\bar{x}\bar{y}(1-\bar{y}^2)(\bar{x}^2 - 1)^{\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{\frac{1}{2}(\gamma^2-4)}}{[(a+1)(\bar{x}+1)^\gamma - (a-1)(\bar{x}-1)^\gamma]}, \quad (3.6b)$$

$$\tilde{\sigma} = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_1\bar{y}(\bar{x}^2 - 1)^{\frac{1}{2}\gamma(2-\gamma)}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{\frac{1}{2}(\gamma^2-2)}}{[(a+1)(\bar{x}+1)^\gamma - (a-1)(\bar{x}-1)^\gamma]^2}, \quad (3.6c)$$

$$\tilde{j} = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_2\bar{x}(1-\bar{y}^2)^{1/2}(\bar{x}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}(\gamma^2-2\gamma+1)}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{\frac{1}{2}(\gamma^2-2)}}{[(a+1)(\bar{x}+1)^\gamma - (a-1)(\bar{x}-1)^\gamma]^2}, \quad (3.6d)$$

donde $\tilde{\epsilon} = k\epsilon$, $\tilde{p}_\varphi = kp_\varphi$, $\tilde{\sigma} = k\sigma$, y $\tilde{j} = kj$. \bar{x} y \bar{y} están dados por

$$2\bar{x} = \sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}_0 + 1)^2} + \sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}_0 - 1)^2}, \quad (3.7a)$$

$$2\bar{y} = \sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}_0 + 1)^2} - \sqrt{\tilde{r}^2 + (\tilde{z}_0 - 1)^2}, \quad (3.7b)$$

donde $\tilde{r} = r/k$ y $\tilde{z}_0 = z_0/k$, con $\tilde{z}_0 > 1$.

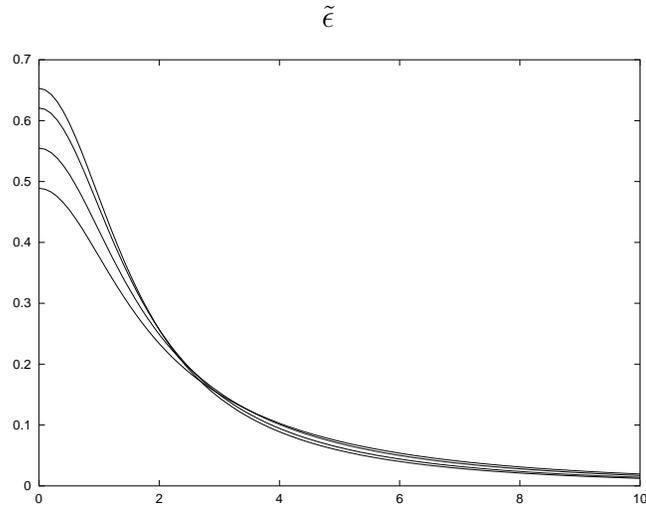
Consideremos como un ejemplo un caso particular, cuando $\gamma = 2$. También estudiamos discos tipo Zipoy-Voorhees para otros valores de γ , pero en todos los casos encontramos un comportamiento similar. En las Figs. 3.7 y 3.8 se presentan las gráficas de las cantidades anteriores para discos con $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 1,0$, y $1,5$, como funciones de \tilde{r} . Vemos que estas funciones tienen un

comportamiento similar al caso anterior. Igualmente, las cantidades importantes del CRM se muestran en las siguientes figuras para el mismo valor de los parámetros, también como funciones de \tilde{r} . También primero consideramos los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas.

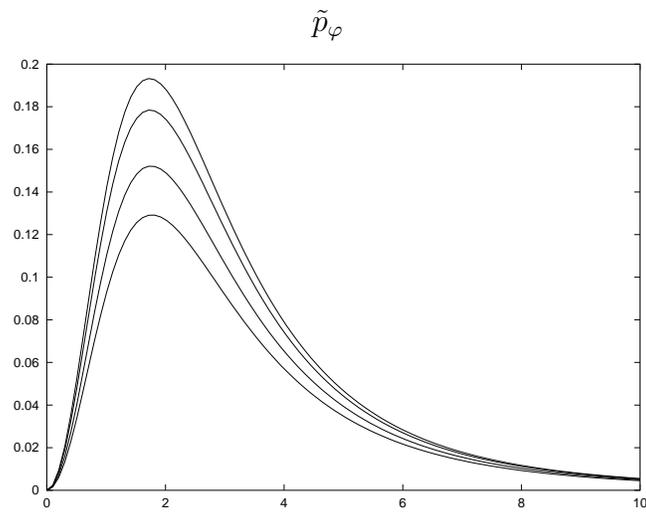
Aquí la velocidad tangencial v_+ (Fig. 3.9 (a)) es también siempre menor que la velocidad de la luz, y cae a cero en el infinito, mientras que v_- es una función monótona creciente. Así estos modelos de discos sólo se comportan bien en la región central. En el caso electrostático (o magnetostático), también se encuentra que la velocidad v^2 (Fig. 3.9(b)) para estos discos es siempre menor que la velocidad de la luz, pero para los discos con $b = 0,5$ y $\tilde{z}_0 < 1,58$ no se puede obtener el CRM ya que $v^2 > 1$. También se encuentra que la inclusión de campo eléctrico (o magnético) y el incremento de \tilde{z}_0 hace menos relativistas estos discos. Además, vemos que \tilde{h}_+^2 y \tilde{h}_-^2 (Fig. 3.10(a)) presentan inestabilidad de la misma manera que el caso precedente, y que para campos electrostáticos (o magnetostáticos) (curvas superiores) la presencia de campo eléctrico (magnético) puede hacer inestable el CRM contra perturbaciones radiales (Fig. 3.10(b)). Por ejemplo, el CRM no puede aplicarse para $b = 4$ (curva inferior).

La densidad de masa $\tilde{\epsilon}_+$ (Fig. 3.11 (a)) es también siempre una cantidad positiva, y cae a cero en el infinito, mientras que $\tilde{\epsilon}_-$ se vuelve negativa después de algún valor de \tilde{r} y luego cae a cero en el infinito. También vemos que la presencia de campo electromagnético disminuye las densidades de energía de los fluidos en la región central del disco y luego la incrementa. Para campos electrostáticos (o magnetostáticos) $\tilde{\epsilon}_\pm$ es una cantidad positiva en todas partes del disco, cayendo a cero en el infinito. También encontramos que $\tilde{\sigma}_+$ (Fig. 3.11(b)) cae a cero en el infinito, mientras que $\tilde{\sigma}_-$ se vuelve después imaginaria. Las densidades de carga eléctrica en el caso electrostático y magnetostático, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$ y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$, son siempre cantidades reales, cayendo a cero en el infinito.

Luego, cuando consideramos los dos fluidos contra-rotantes no circulando sobre electro-geodésicas pero con velocidades tangenciales iguales y opuestas, también se encuentra que las cantidades v^2 , $\tilde{\epsilon}_{\pm}$, y \tilde{h}^2 tienen el mismo comportamiento que en el caso electrostático (magnetostático). Las densidades de carga eléctrica se muestra en la Fig. 3.12, siendo siempre cantidades reales. Por lo tanto, para campos tipo Zipoy-Voorhees podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes electro-geodésicos con una región central bien comportada, mientras que cuando los dos fluidos no circulan a lo largo de electro-geodésicas o para campos electrostáticos (o magnetostáticos) se obtienen discos contra-rotantes con un comportamiento físicamente razonable para muchos valores de los parámetros.

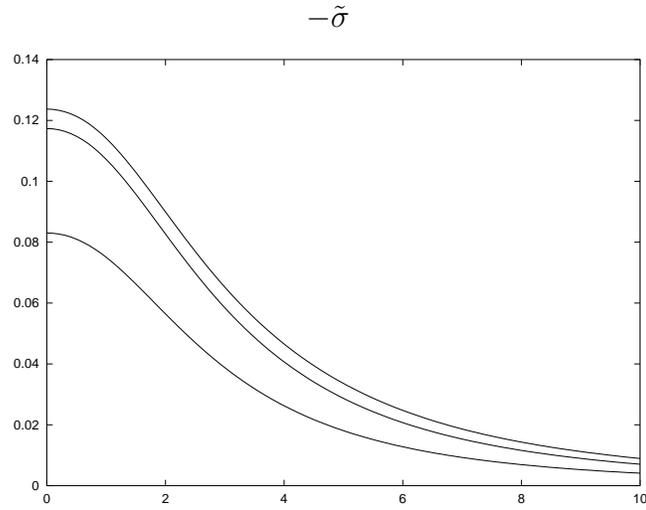


\tilde{r}
(a)

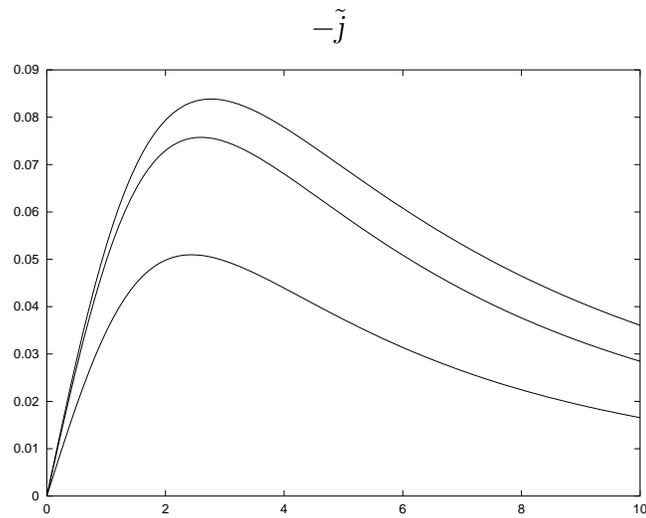


\tilde{r}
(b)

Figura 3.7: (a) $\tilde{\epsilon}$ y (b) \tilde{p}_φ para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas inferiores).

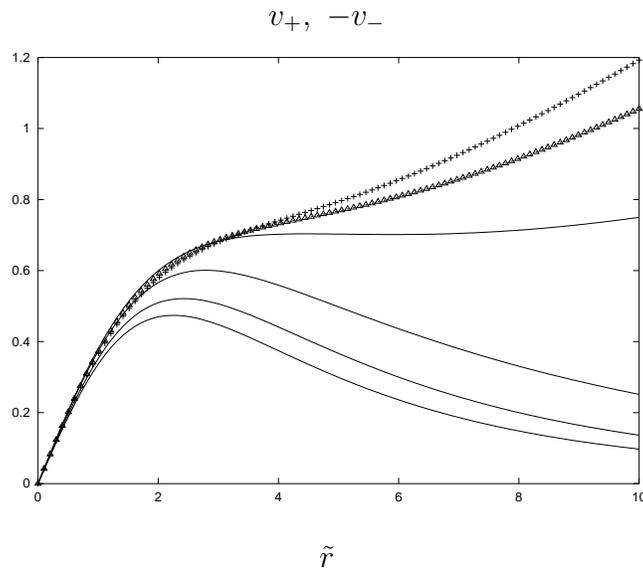


(a)



(b)

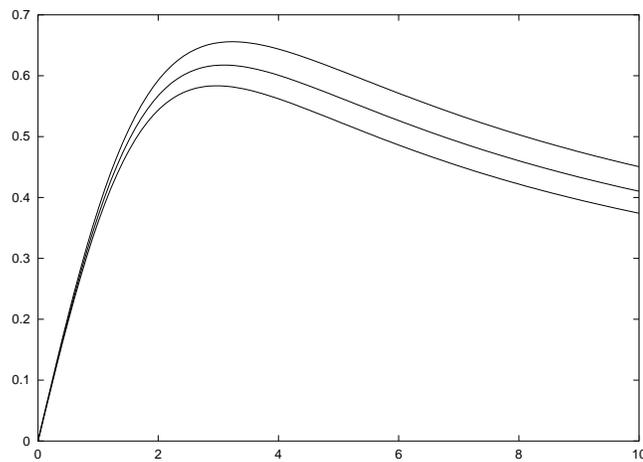
Figura 3.8: (a) $\tilde{\sigma}$ y (b) \tilde{j} para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje \tilde{r}), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas superiores).



\tilde{r}

(a)

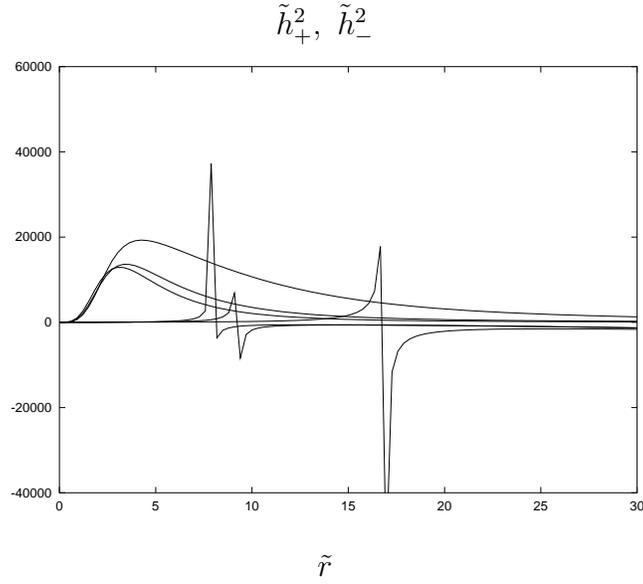
v^2



\tilde{r}

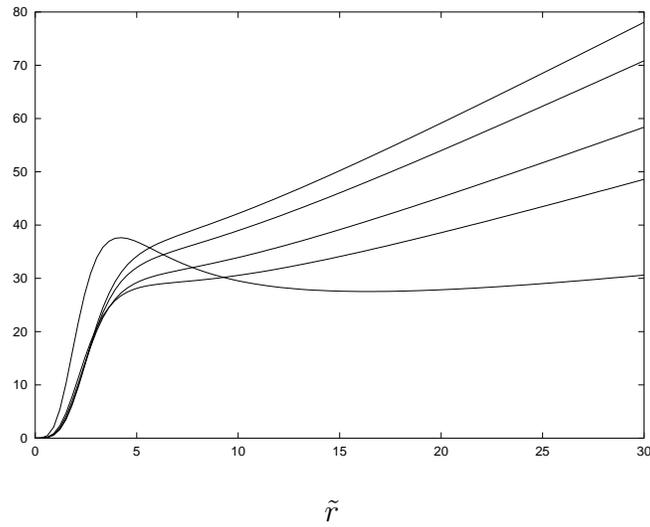
(b)

Figura 3.9: (a) v_+ (curvas inferiores) para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), v_- para $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva sólida), 1,0, y 1,5 (curva con cruces), y (b) v^2 para $b = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), y el mismo valor de γ y \tilde{z}_0 .



(a)

\tilde{h}^2



(b)

Figura 3.10: (a) \tilde{h}_+^2 (escalada por un factor de 1000) para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), \tilde{h}_-^2 (curvas agudas) para el mismo valor de los parámetros, y (b) \tilde{h}^2 para $b = 0,5$ (curva superior), 1,0, 1,5 y 4,0 (curva inferior), y el mismo valor de γ y \tilde{z}_0 .

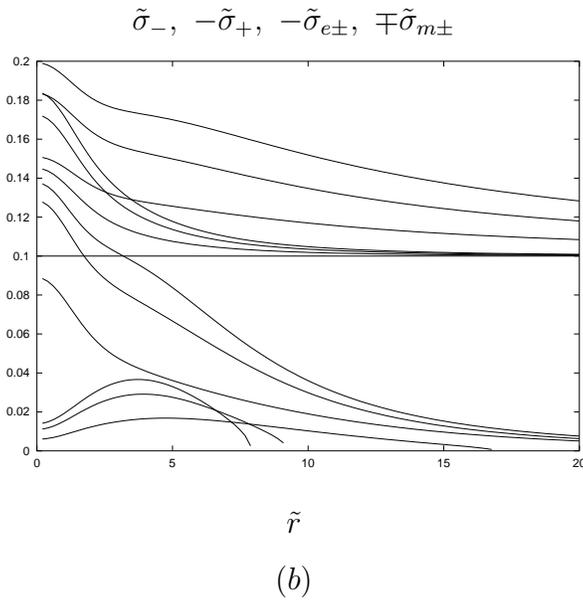
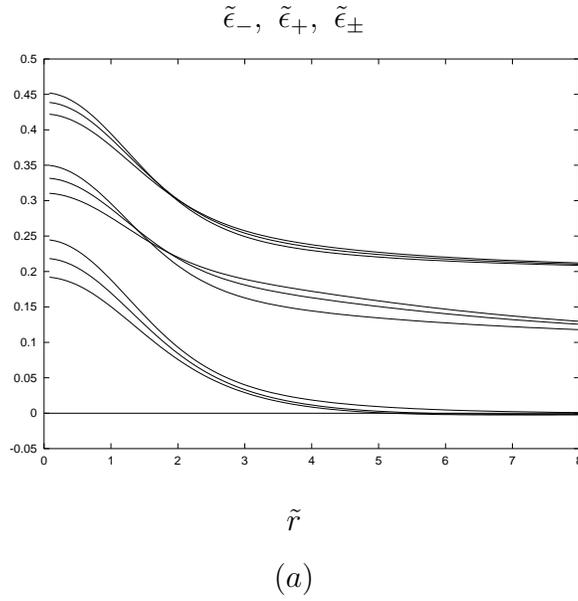


Figura 3.11: (a) $\tilde{\epsilon}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\epsilon}_+$ (desplazadas un factor de 0.1) para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5, 1,0$, y $1,5$ y $\tilde{\epsilon}_\pm$ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.2) para $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $b = 0,5, 1,0$ y $1,5$. (b) $\tilde{\sigma}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$ (desplazadas un factor de 0.1) y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ (curvas superiores desplazadas también un factor de 0.1) para el mismo valor de los parámetros.

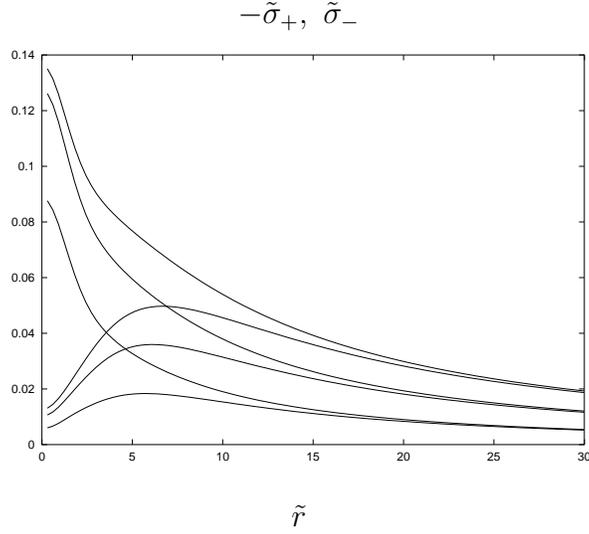


Figura 3.12: $\tilde{\sigma}_+$ (curvas superiores) y $\tilde{\sigma}_-$ para discos tipo Zipoy-Voorhees no electro-geodésicos con $\gamma = 2$, $\tilde{z}_0 = 2,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curvas inferiores), 1,0, y 1,5 (curvas superiores).

3.4. Discos tipo Bonnor-Sackfield

La tercera familia de soluciones considerada es una solución tipo Bonnor-Sackfield la cual está dada por

$$e^\mu = \frac{2}{(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} u} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} u}}, \quad (3.8a)$$

$$\lambda = -\frac{\gamma^2}{2} \ln \left[\frac{u^2 + 1}{u^2 + w^2} \right], \quad (3.8b)$$

$$A_t = \frac{\sqrt{2}q_1[e^{\gamma \cot^{-1} u} - e^{-\gamma \cot^{-1} u}]}{(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} u} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} u}}, \quad (3.8c)$$

$$A_\varphi = \sqrt{2}k\gamma q_2 w, \quad (3.8d)$$

donde $a^2 = 1 + b^2$, con $b^2 = q_1^2 + q_2^2$, y γ es una constante real. q_1 y q_2 son también los parámetros que regulan los campos eléctrico y magnético, respectivamente. u y w son las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$r^2 = k^2(u^2 + 1)(1 - w^2), \quad z + z_0 = kuw. \quad (3.9)$$

Como en los casos anteriores esta solución se puede generar, en estas coordenadas, siguiendo el método de Ernst [39] a partir de la solución en el vacío de Bonnor-Sackfield [1].

De las expresiones anteriores podemos calcular las cantidades físicas asociadas con los discos. Obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= \frac{8\gamma\bar{w}(\bar{u}^2 + 1)^{\gamma^2/2}}{(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)^{(\gamma^2/2)+2}[(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} \bar{u}} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} \bar{u}}]^2} \\ &\times \{[\bar{u}^2 + \bar{w}^2 - \gamma\bar{u}(1 - \bar{w}^2)](a+1)e^{\gamma \cot^{-1} \bar{u}} \\ &+ [\bar{u}^2 + \bar{w}^2 + \gamma\bar{u}(1 - \bar{w}^2)](a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} \bar{u}}\}, \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{8\gamma^2\bar{u}\bar{w}(1 - \bar{w}^2)(\bar{u}^2 + 1)^{\gamma^2/2}}{(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)^{(\gamma^2/2)+2}[(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} \bar{u}} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} \bar{u}}]}, \quad (3.10b)$$

$$\tilde{\sigma} = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_1\bar{w}(\bar{u}^2 + 1)^{\gamma^2/2}}{(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)^{(\gamma^2/2)+1}[(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} \bar{u}} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} \bar{u}}]^2}, \quad (3.10c)$$

$$\tilde{j} = -\frac{8\sqrt{2}\gamma q_2\bar{u}(1 - \bar{w}^2)^{1/2}(\bar{u}^2 + 1)^{1/2(\gamma^2-1)}}{(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)^{(\gamma^2/2)+1}[(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} \bar{u}} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} \bar{u}}]^2}, \quad (3.10d)$$

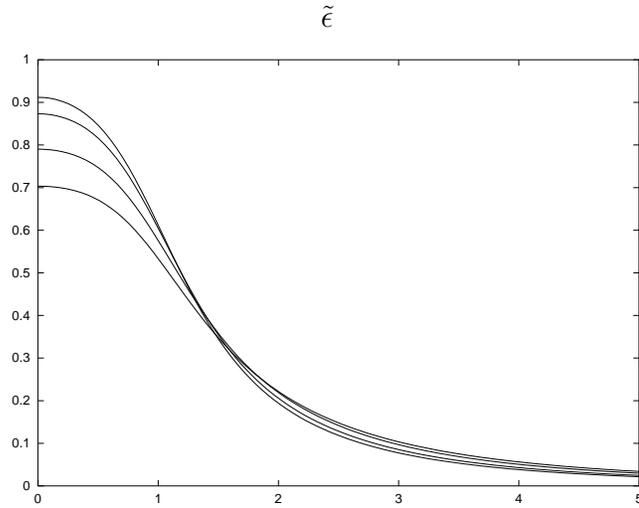
donde $\tilde{\epsilon} = k\epsilon$, $\tilde{p}_\varphi = kp_\varphi$, $\tilde{\sigma} = k\sigma$, y $\tilde{j} = kj$. \bar{u} y \bar{w} están dadas por

$$\sqrt{2}\bar{u} = \sqrt{[(\tilde{r}^2 + \tilde{z}_0^2 - 1)^2 + 4\tilde{z}_0^2]^{1/2} + (\tilde{r}^2 + \tilde{z}_0^2 - 1)}, \quad (3.11a)$$

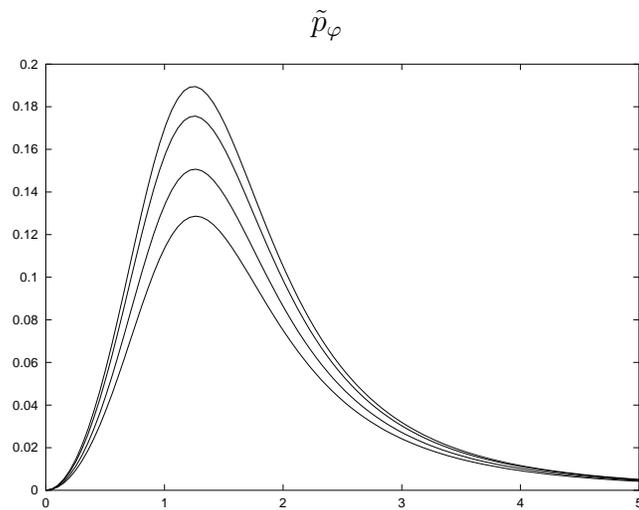
$$\sqrt{2}\bar{w} = \sqrt{[(\tilde{r}^2 + \tilde{z}_0^2 - 1)^2 + 4\tilde{z}_0^2]^{1/2} - (\tilde{r}^2 + \tilde{z}_0^2 - 1)}, \quad (3.11b)$$

donde $\tilde{r} = r/k$ y $\tilde{z}_0 = z_0/k$.

En las Figs. 3.13-3.18 se presentan las gráficas de las cantidades físicas relacionadas con los discos para $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 1,0$, y $1,5$, también como funciones de \tilde{r} . Vemos que estas funciones tienen el mismo comportamiento que en los casos anteriores. Por lo tanto, para campos tipo Bonnor-Sackfield podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes electro-geodésicos con una región central bien comportada, mientras que cuando los dos fluidos no circulan a lo largo de electro-geodésicas o para campos electrostáticos (o magnetostáticos) se obtienen discos contra-rotantes con un comportamiento físicamente razonable para muchos valores de los parámetros.

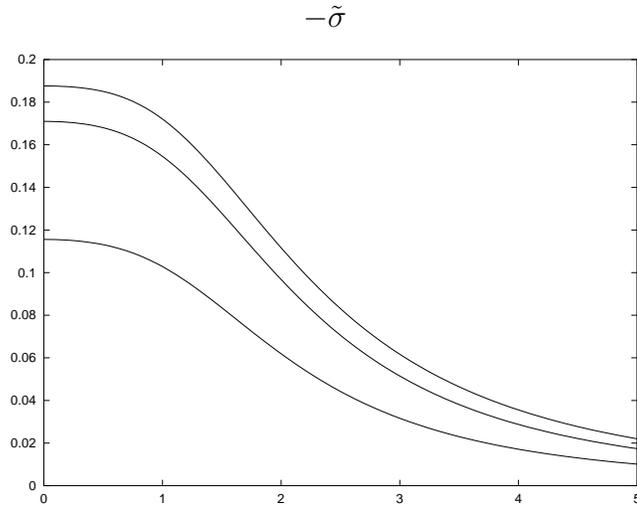


\tilde{r}
(a)

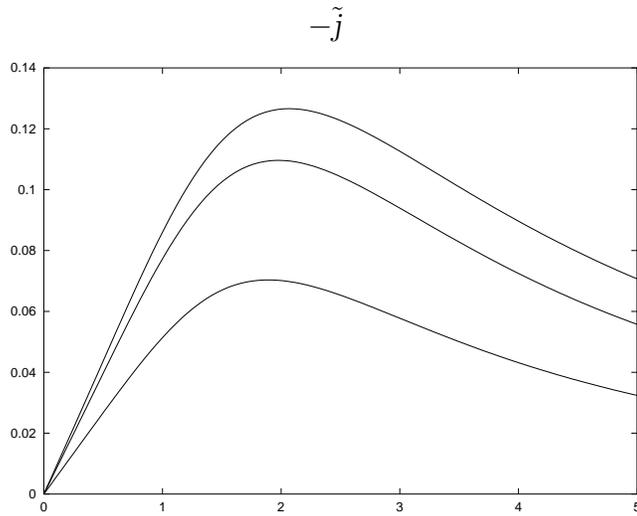


\tilde{r}
(b)

Figura 3.13: (a) $\tilde{\epsilon}$ y (b) \tilde{p}_φ para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas inferiores).

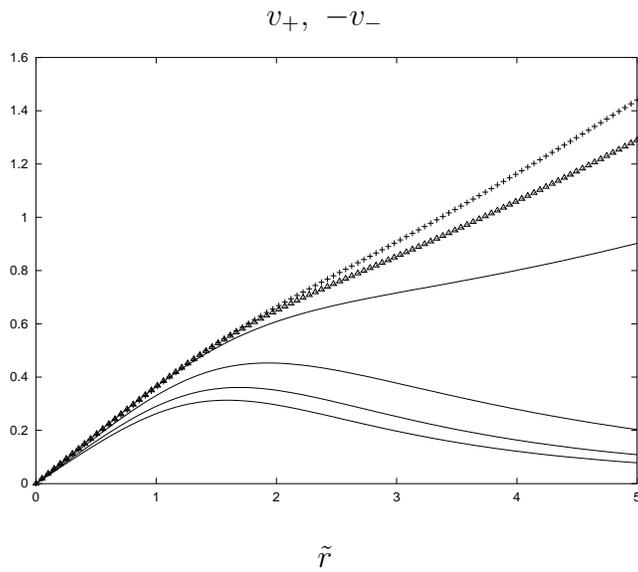


(a)



(b)

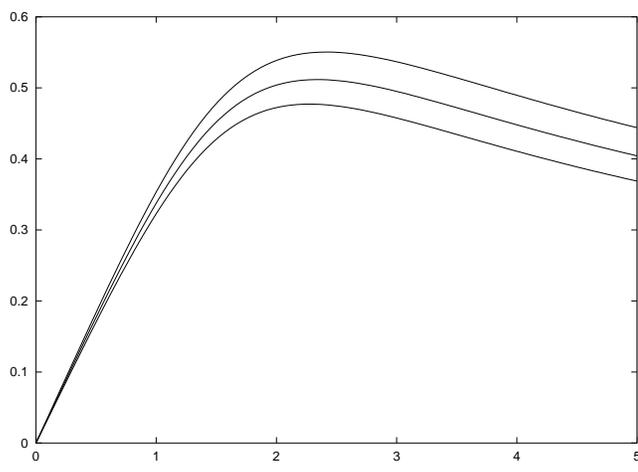
Figura 3.14: (a) $\tilde{\sigma}$ y (b) \tilde{j} para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje \tilde{r}), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas superiores).



\tilde{r}

(a)

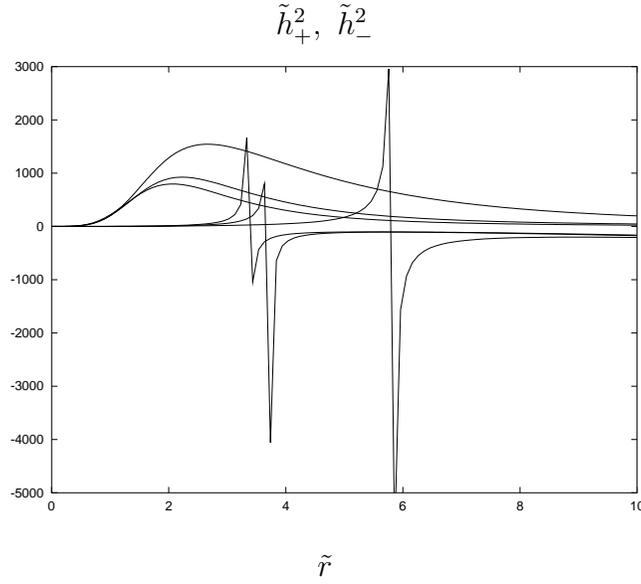
v^2



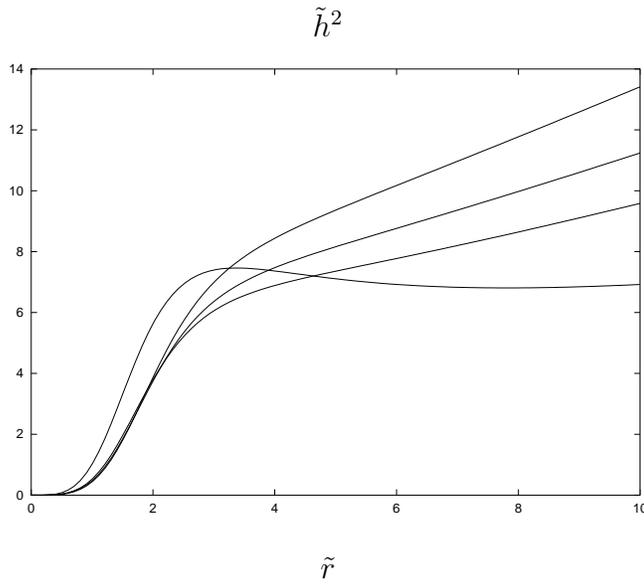
\tilde{r}

(b)

Figura 3.15: (a) v_+ (curvas inferiores) para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), v_- para $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva s30lida), 1,0, y 1,5 (curva con cruces), y (b) v^2 para $b = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), y el mismo valor de γ y \tilde{z}_0 .



(a)



(b)

Figura 3.16: (a) \tilde{h}_+^2 (escalada por un factor de 500) para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curva superior), 1,0, y 1,5 (curva inferior), \tilde{h}_-^2 (curvas agudas) para el mismo valor de los parámetros, y (b) \tilde{h}^2 para $b = 0,5$ (curva superior), 1,0, 1,5 y 4,0 (curva inferior), y el mismo valor de γ y \tilde{z}_0 .

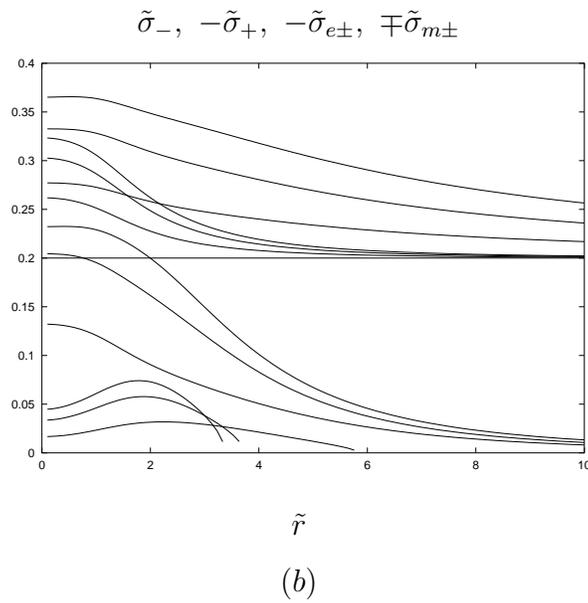
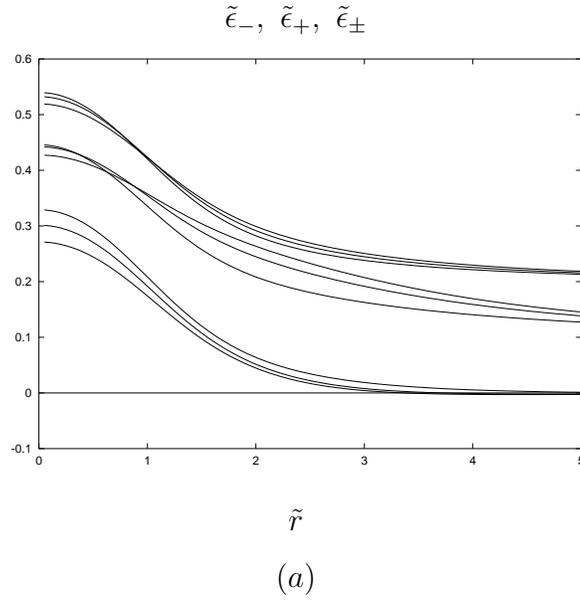


Figura 3.17: (a) $\tilde{\epsilon}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\epsilon}_+$ (desplazadas un factor de 0.1) para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$, $1,0$, y $1,5$ y $\tilde{\epsilon}_\pm$ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.2) para $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $b = 0,5$, $1,0$ y $1,5$. (b) $\tilde{\sigma}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$ (desplazadas un factor de 0.2) y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.2) para el mismo valor de los parámetros.

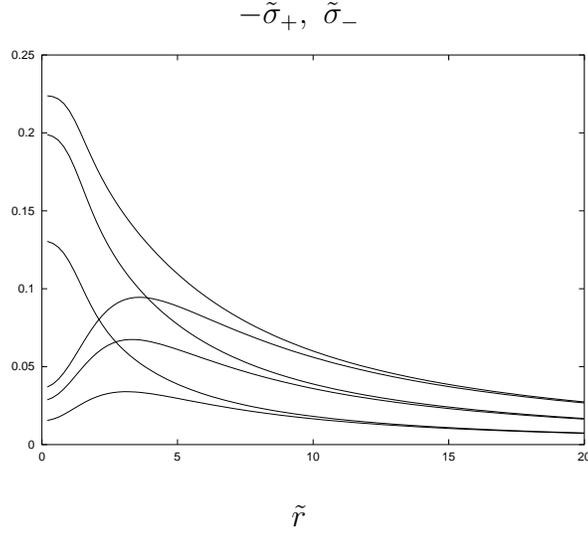


Figura 3.18: $\tilde{\sigma}_+$ (curvas superiores) y $\tilde{\sigma}_-$ para discos tipo Bonnor-Sackfield no electro-geodésicos con $\gamma = 1$, $\tilde{z}_0 = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,5$ (curvas inferiores), 1,0, y 1,5 (curvas superiores).

3.5. Discos para una solución de Darmois cargada y magnetizada

Finalmente, otra familia de soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, es una solución de Darmois cargada y magnetizada la cual está dada por

$$e^\Psi = \frac{a^2x^2 - b^2y^2 - 1}{(ax + 1)^2 - b^2y^2}, \quad (3.12a)$$

$$\Lambda = 2 \ln \left[\frac{a^2x^2 - b^2y^2 - 1}{a^2(x^2 - y^2)} \right], \quad (3.12b)$$

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}q_1y}{(ax + 1)^2 - b^2y^2}, \quad (3.12c)$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}kq_2(1 - y^2)(ax + 1)}{a(a^2x^2 - b^2y^2 - 1)}, \quad (3.12d)$$

donde $a^2 = 1 + b^2$, con $b^2 = q_1^2 + q_2^2$, y γ es una constante real. Aquí q_1 y q_2 son también los parámetros que regulan los campos eléctrico y magnético, respectivamente. x e y son las coordenadas esferoidales prolatas, dadas por (3.5). Para $b = 0$ esta solución también se reduce a la métrica de Darmois. Además, para $q_2 = 0$ tenemos una solución electrostática tipo Kerr. Esta solución se puede generar, en estas coordenadas, usando un teorema bien conocido propuesto por Bonnor (ver Ref. [55]) a partir de la solución en el vacío de Kerr. Y para $q_1 = 0$ obtenemos su equivalente magnetostático. Esta solución es asintóticamente plana y fue primero estudiada por Bonnor [56] en un sistema diferente de coordenadas y describe el campo de un dipolo magnético masivo.

Usando las expresiones anteriores podemos calcular las cantidades físicas asociadas con los discos

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= \frac{8a^4\bar{y}}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x} + 1)^2 - b^2\bar{y}^2]^2} \\ &\times \left\{ (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)[a(\bar{x}^2 - 1)[(a\bar{x} + 1)^2 + b^2\bar{y}^2] - 2b^2\bar{x}(a\bar{x} + 1)(1 - \bar{y}^2)] \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{x}(\bar{x}^2 - 1)(1 - \bar{y}^2)[(a\bar{x} + 1)^2 - b^2\bar{y}^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{16a^4\bar{x}\bar{y}(\bar{x}^2 - 1)(1 - \bar{y}^2)}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x} + 1)^2 - b^2\bar{y}^2]^2}, \quad (3.13b)$$

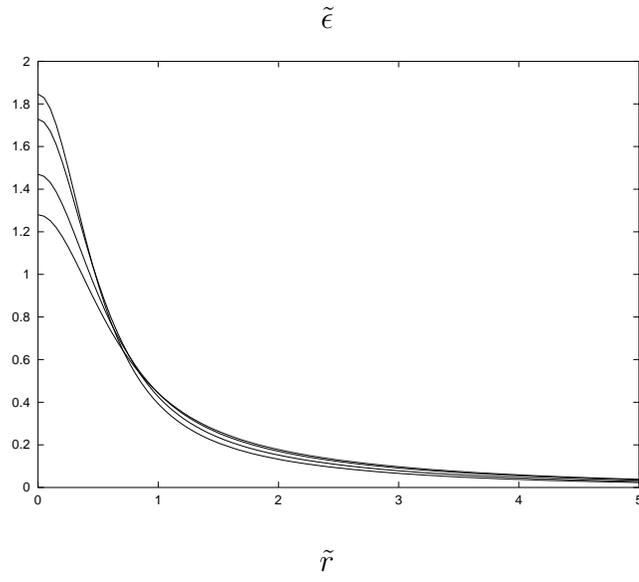
$$\tilde{\sigma} = \frac{4\sqrt{2}a^4q_1(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\{\bar{x}(1 - \bar{y}^2)[(a\bar{x} + 1)^2 + b^2\bar{y}^2] - 2a\bar{y}^2(a\bar{x} + 1)(\bar{x}^2 - 1)\}}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x} + 1)^2 - b^2\bar{y}^2]^2}, \quad (3.13c)$$

$$\tilde{j} = -\frac{2\sqrt{2}a^4q_2\bar{y}(\bar{x}^2 - 1)^{1/2}(1 - \bar{y}^2)^{1/2}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)[(a\bar{x} + 1)(3a\bar{x} + 1) + b^2\bar{y}^2]}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x} + 1)^2 - b^2\bar{y}^2]^2}, \quad (3.13d)$$

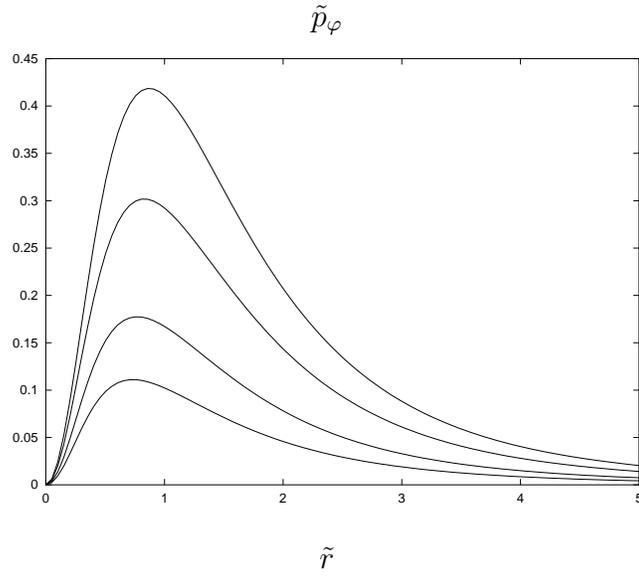
donde \bar{x} y \bar{y} están dadas por las Ecs. (3.7a) y (3.7b).

En las Figs. 3.19-3.20 se muestran las gráficas de las cantidades físicas que describen los discos para $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0, 0,4, 0,7,$ y $1,5$, como funciones de \tilde{r} . La densidad de energía se comporta de manera opuesta a los casos anteriores. Es decir, crece cerca al centro del disco cuando se aplica un campo electromagnético y luego disminuye. Las otras cantidades tienen un comportamiento similar a los casos anteriores. Sin embargo, la densidad de carga eléctrica $\tilde{\sigma}$ después de algún \tilde{r} puede tomar valores negativos. Igualmente, las cantidades correspondientes al CRM se muestran en las siguientes figuras para el mismo valor de los parámetros, también como funciones de \tilde{r} . De nuevo, consideramos primero los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas. Ahora las velocidades tangenciales v_+ y v_- son siempre menores que la velocidad de la luz, cayendo a cero en el infinito (Fig. 3.21(a)). Nótese que los dos fluidos inicialmente circulan con velocidades diferentes y luego éstas se vuelven iguales y opuestas. En consecuencia, estos modelos de discos se comportan bien en todas las regiones del disco. Sin embargo, encontramos que para algunos valores de los parámetros no se pueden construir discos a partir del CRM debido a que $v^2 > 1$. También se observa que la presencia de campo electromagnético puede estabilizar el CRM contra perturbaciones radiales (Fig. 3.22). Por otro lado, las densidades de energía $\tilde{\epsilon}_+$, $\tilde{\epsilon}_-$ y $\tilde{\epsilon}_\pm$ (Fig. 3.23(a)) son siempre cantidades positivas y luego caen a cero en el infinito.

En la Fig. 3.23(b) se grafican las densidades de carga eléctrica σ_+ , $\tilde{\sigma}_-$, $\sigma_{e\pm}$ y $\sigma_{m\pm}$. Vemos que $\tilde{\sigma}_+$ y $\sigma_{m\pm}$ son siempre cantidades positivas, que caen a cero en el infinito, mientras que $\tilde{\sigma}_-$ puede tomar inicialmente valores negativos y $\sigma_{e\pm}$ se vuelve negativa después de cierto valor de \tilde{r} y luego cae a cero en el infinito. Por lo tanto, los discos con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 1,5$ se pueden construir a partir de dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas.

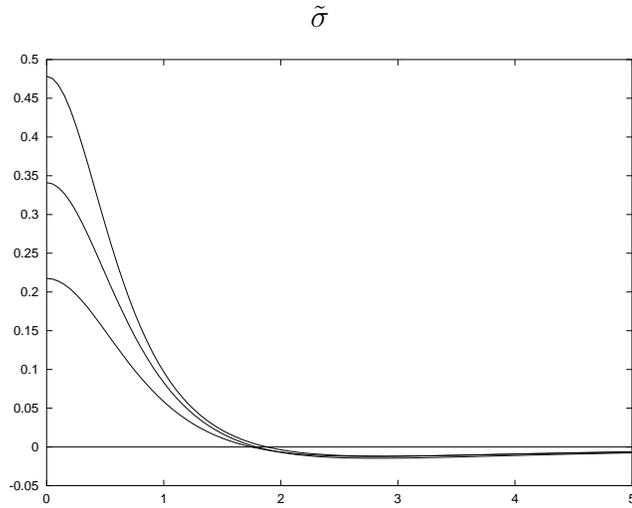


(a)

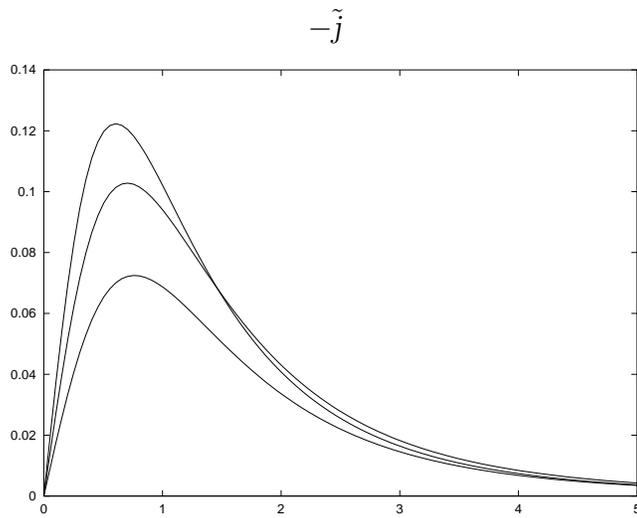


(b)

Figura 3.19: (a) $\tilde{\epsilon}$ y (b) \tilde{p}_φ para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas inferior y superior, respectivamente), 0,4, 0,7, y 1,5 (curvas superior e inferior, respectivamente), como funciones de \tilde{r} .

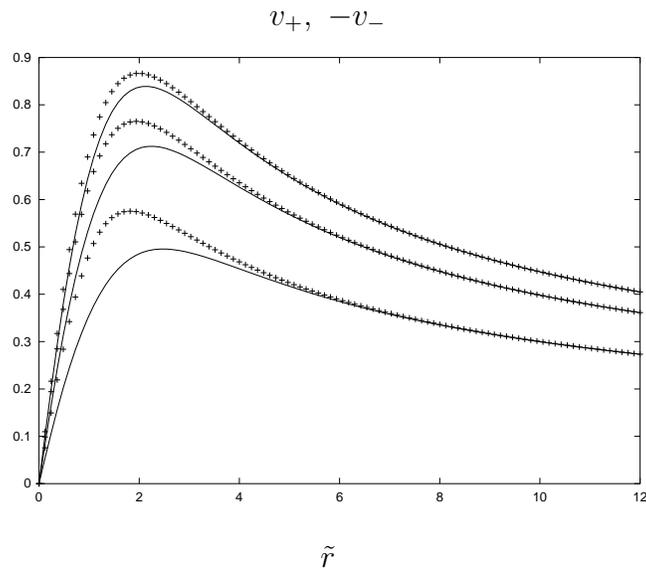


(a)



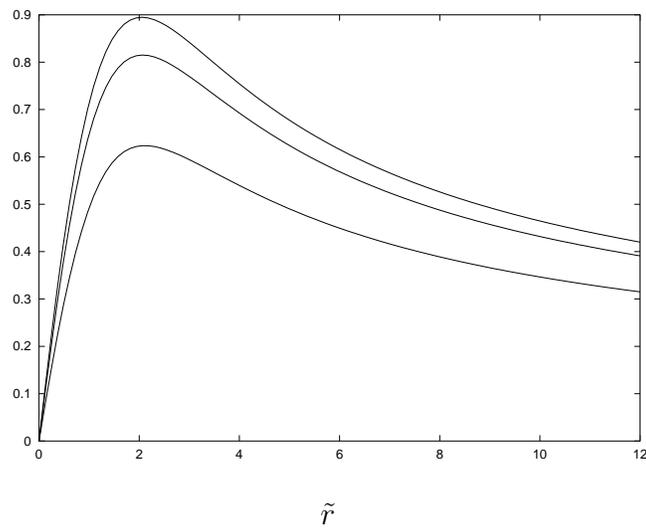
(b)

Figura 3.20: (a) $\tilde{\sigma}$ y (b) \tilde{j} para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje \tilde{r}), 0,4, 0,7, 1,5 (curvas superiores).



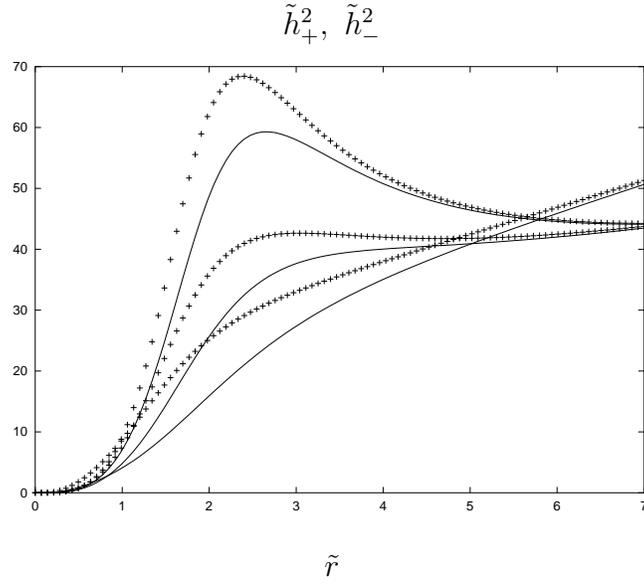
(a)

v^2

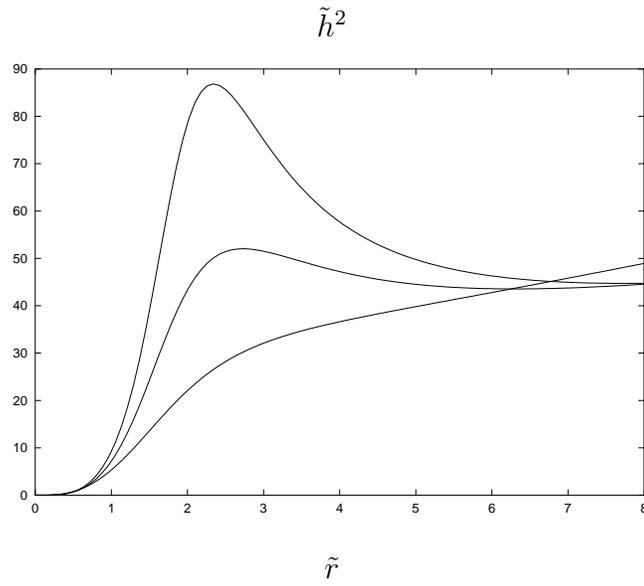


(b)

Figura 3.21: (a) v_+ (curvas sólidas), v_- para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0,4$ (curvas superiores), 0,7, y 1,5 (curvas inferiores), y (b) v^2 para $b = 0,4$ (curva superior), 0,7, 1,5 (curva inferior), y el mismo valor de \tilde{z}_0 .



(a)



(b)

Figura 3.22: (a) \tilde{h}_+^2 (curvas sólidas), \tilde{h}_-^2 para discos de polvo asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0,4$ (curvas superiores), $0,7$, y $1,5$ (curvas inferiores), y (b) \tilde{h}^2 para $b = 0,4$ (curva superior), $0,7$, $1,5$ (curva inferior), y el mismo valor de \tilde{z}_0 .

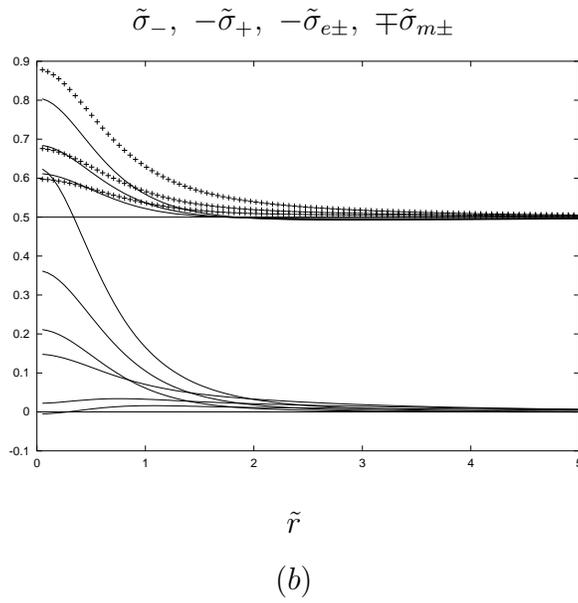
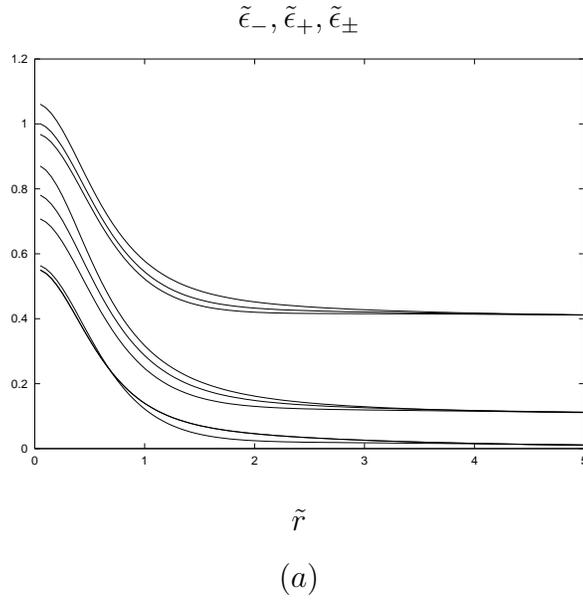


Figura 3.23: (a) $\tilde{\epsilon}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\epsilon}_+$ (desplazadas un factor de 0.1) para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0,4, 0,7, \text{ y } 1,5$ y $\tilde{\epsilon}_\pm$ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.4) para $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $b = 0,4, 0,7 \text{ y } 1,5$. (b) $\tilde{\sigma}_-$ (curvas inferiores), $\tilde{\sigma}_+$, $\tilde{\sigma}_{e\pm}$ (desplazadas un factor de 0.5) y $\tilde{\sigma}_{m\pm}$ (curvas con cruces desplazadas también un factor de 0.5) para el mismo valor de los parámetros.

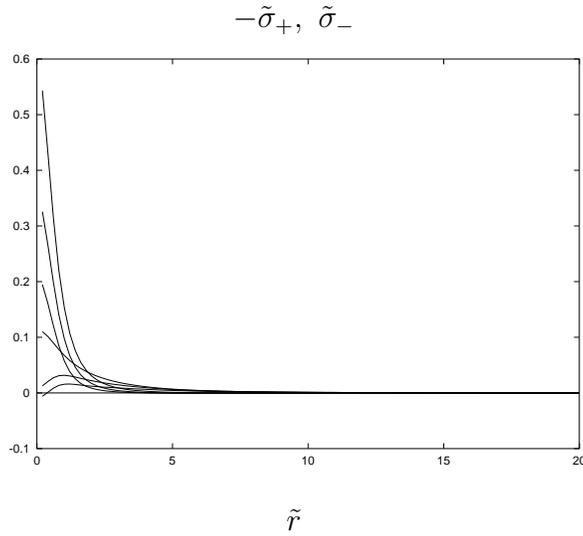


Figura 3.24: $\tilde{\sigma}_+$ (curvas superiores) y $\tilde{\sigma}_-$ para discos no electro-geodésicos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\tilde{z}_0 = 1,7$ y $q_1 = q_2 = 0,4$ (curvas inferiores), 0,7, y 1,5 (curvas superiores).

Finalmente, las densidades de carga eléctrica cuando los dos fluidos no se mueven sobre electro-geodésicas se muestran en la Fig. 3.24, siendo siempre cantidades reales. Por consiguiente, en todos los casos considerados podemos construir para esta solución discos con un CRM físicamente razonable para muchos valores de los parámetros.

Capítulo 4

Algunos modelos de discos de fluido perfecto cargados

4.1. Introducción

Como una segunda aplicación de lo presentado en los capítulos anteriores consideramos en este capítulo algunos modelos simples de discos con presión radial diferente de cero [31]. Tales modelos se obtienen tomando $F(\nu)$ como dada por (1.63). En el caso estático los discos se pueden interpretar apropiadamente mediante el Modelo de Contra-Rotación. Estos modelos son construidos considerando las soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell presentadas en el capítulo anterior. Luego, una familia de campos tipo Taub-NUT estacionarios se interpreta en términos de discos de fluido perfecto cargados [32].

En particular, se obtienen expresiones para la densidad de energía, la presión radial y acimutal, la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente acimutal del disco. En el caso estático también se analizan las cantidades físicas importantes correspondientes al CRM de los discos.

4.2. Discos tipo Chazy-Curzon

Consideremos primero una solución tipo Chazy-Curzon donde μ , λ , A_t , y A_φ están dadas por (3.1), y las coordenadas cuasi-esféricas ρ y θ están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$R = \rho \sin \theta, \quad Z = \rho \cos \theta, \quad (4.1)$$

donde $0 \leq \rho \leq \infty$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. En estas coordenadas debemos escoger $\alpha = 1$ y el cascarón (1.65) está localizado en $\rho = 1$.

Las cantidades físicas asociadas con los discos se pueden escribir como

$$\epsilon = \varrho - p_r - p_\varphi, \quad (4.2a)$$

$$p_\varphi = p_r(1 + \gamma^2 r^2), \quad (4.2b)$$

$$p_r = p_0 e^{\gamma^2 r^2/2}, \quad (4.2c)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2} \sqrt{2} q_1 p_0 p_r \quad (4.2d)$$

donde

$$p_0 = \frac{4}{(a+1)e^\gamma - (a-1)e^{-\gamma}} \quad (4.3)$$

es una constante y

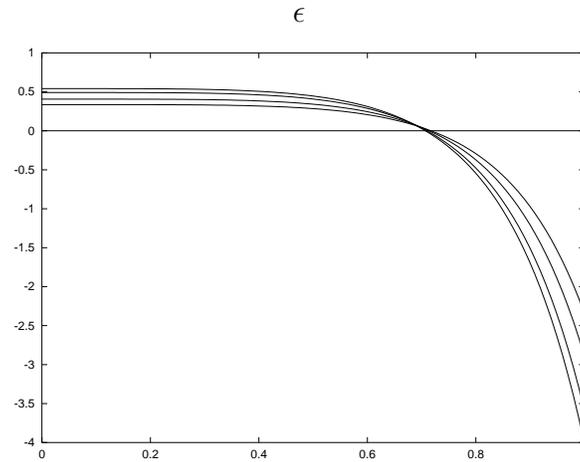
$$\varrho = p_r \frac{1}{2} \gamma p_0 [(a+1)e^\gamma + (a-1)e^{-\gamma}]. \quad (4.4)$$

La condición de energía fuerte requiere que $\varrho \geq 0$, de modo que debemos escoger $\gamma > 0$. Vemos que p_0 es una constante positiva para estos valores de γ .

Para estudiar el comportamiento de estas cantidades se llevara a cabo un análisis gráfico de ellas para discos con $\gamma = 2$ y diferentes valores de q_1 y q_2 , como funciones de r . En la Fig. 4.1 se muestran la densidad de energía ϵ y las presiones p_r y p_φ para $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 1,0,$ and $1,5$. Vemos que la densidad de energía inicialmente es una cantidad positiva y luego se vuelve negativa en violación de la condición de energía débil. Por lo tanto, sólo la región central de estos discos tiene un comportamiento físicamente razonable. Podemos observar que las presiones p_r y p_φ son siempre cantidades positivas en todas partes sobre los discos. Vemos también que la presencia de campo electromagnético disminuye la densidad de energía cerca al centro del disco y luego la incrementa, y disminuye las presiones en todas partes sobre el disco. Luego, la densidad de carga σ se representa en la Fig. 4.2(a) para $q_1 = q_2 = 0, 0,2, 0,3, 0,5,$ y $1,5$. Vemos que exhibe un comportamiento similar a la presión radial. Nótese que la densidad de corriente acimutal j es cero para estos discos. También se estudiaron estas funciones para otros valores de los parámetros (con $\gamma > 0$) pero en todos los casos se encontró el mismo comportamiento.

Consideremos ahora el CRM correspondiente. Todas las cantidades significativas también se pueden expresar en forma analítica a partir de las expresiones anteriores, pero los resultados son tan engorrosos que resulta mejor sólo analizarlos gráficamente. Consideremos el caso cuando los dos fluidos se mueven con velocidades tangenciales iguales y opuestos. En la Fig. 4.2 (b) se grafican las curvas de velocidad tangencial de los fluidos contra-rotantes v^2 para discos con $\gamma = 0,7$ y $q_1 = q_2 = 2, 3, 5,$ y 10 . Vemos que la inclusión de campo electromagnético puede hacer la velocidad de las partículas menor que la velocidad de la luz. En la Fig. 4.3(a) se grafica el momentum angular específico h^2 para el mismo valor de los parámetros. En algunos casos encontramos cambios fuertes en la pendiente para ciertos valores de r , lo cual significa que hay una fuerte inestabilidad allí. Para

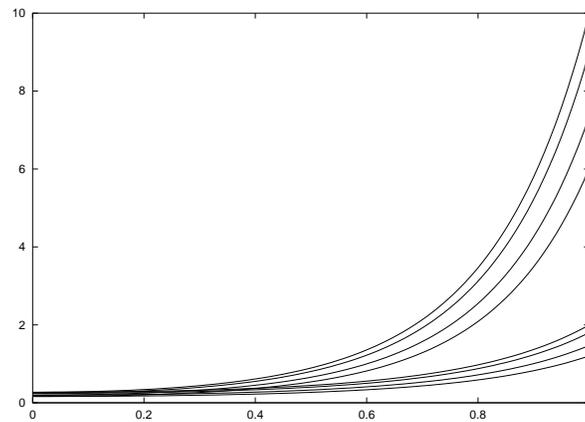
otros valores de los parámetros h^2 es una función monótona creciente de r que corresponde a un CRM estable para los discos. Finalmente, en la Fig. 4.3(b) se muestra la densidad de energía ϵ_{\pm} y la densidad de carga eléctrica σ_{\pm} en el caso particular cuando los dos fluidos tienen igual presión o densidad de energía igual, para valores de los parámetros para los cuales $v^2 < 1$. Vemos que σ_{\pm} se comporta de manera opuesta a σ , mientras que ϵ_{\pm} tiene un comportamiento similar a la densidad de energía ϵ . Por lo tanto, para campos tipo Chazy-Curzon podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes sólo con una región central bien comportada.



r

(a)

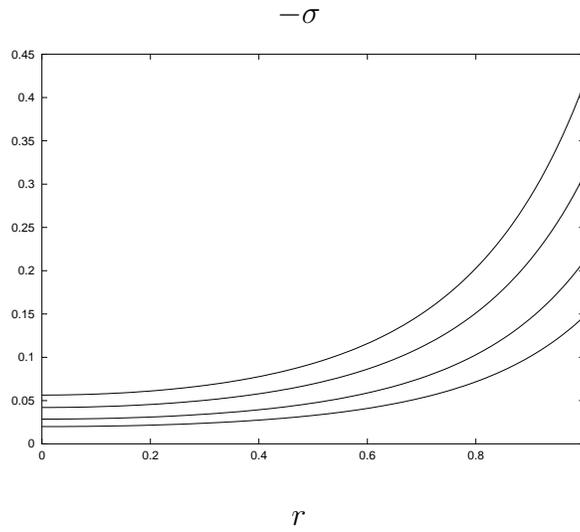
p_φ, p_r



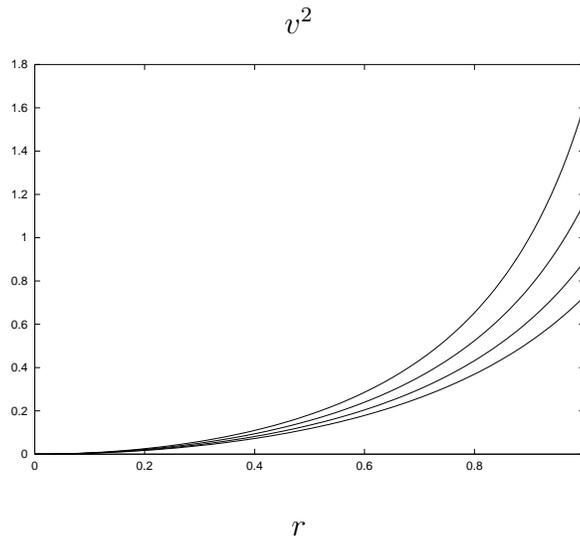
r

(b)

Figura 4.1: (a) Densidad de energía ϵ y (b) presiones p_φ (curvas superiores) y p_r para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 2$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas inferiores), como funciones de r .

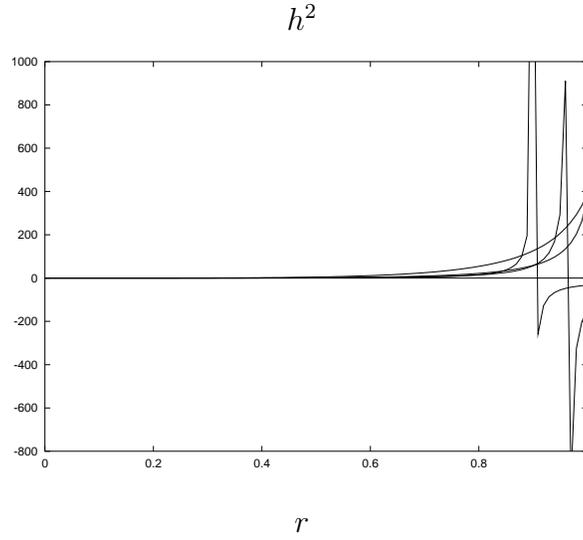


(a)

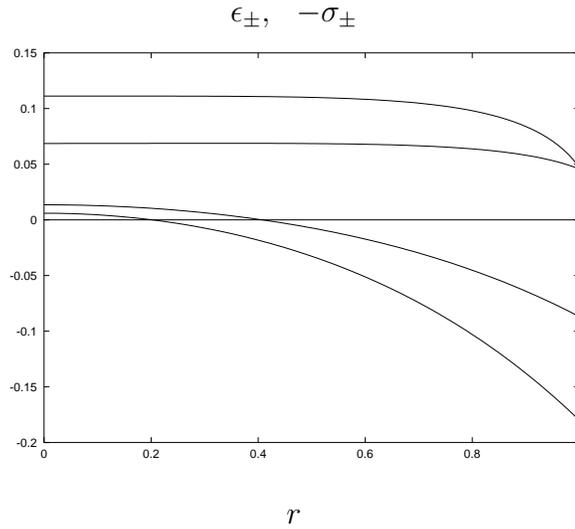


(b)

Figura 4.2: (a) densidad de carga eléctrica σ para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 2$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,2, 0,3, 0,5, y 1,5 (curva superior). (b) v^2 para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 0,7$ y $q_1 = q_2 = 2$ (curva superior), 3, 5, y 10 (curva inferior).



(a)



(b)

Figura 4.3: (a) Momentum angular h^2 para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 0,7$ y $q_1 = q_2 = 2, 3$ (curvas agudas), 5, y 10 (curva superior). (b) ϵ_{\pm} (curvas inferiores) y σ_{\pm} para discos tipo Chazy-Curzon con $\gamma = 0,7$ y $q_1 = q_2 = 5$ y 10 (curvas superior e inferior, respectivamente).

4.3. Discos tipo Zipoy-Voorhees

Consideremos ahora una solución tipo Zipoy-Voorhees donde μ , λ , A_t , y A_φ están dadas por (3.4), y las coordenadas esferoidales prolatas x y y están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$R^2 = k^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad Z = kxy, \quad (4.5)$$

donde $1 \leq x \leq \infty$ y $0 \leq y \leq 1$. En este caso debemos escoger $\alpha > 1$ y el cascarón (1.65) está localizado en $x = \alpha/k > 1$ y $y = \sqrt{1 - r^2}$, con $k = \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

Las cantidades físicas asociadas con los discos se pueden escribir como

$$\epsilon = \varrho - p_r - p_\varphi, \quad (4.6a)$$

$$p_\varphi = p_r \left[\frac{1 + k^2 \gamma^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (4.6b)$$

$$p_r = p_0 [1 + k^2 r^2]^{\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)}, \quad (4.6c)$$

$$\sigma = -\frac{\sqrt{2} \gamma k q_1 p_0}{2\alpha^2} p_r, \quad (4.6d)$$

donde

$$p_0 = \frac{4\alpha}{(a+1)(\alpha+k)^\gamma - (a-1)(\alpha-k)^\gamma} \quad (4.7)$$

es una constante y

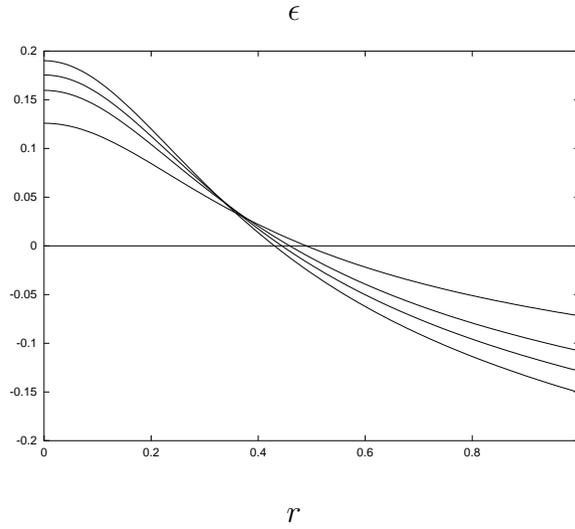
$$\varrho = p_r \frac{1}{2} \frac{\gamma k p_0}{\alpha^2} [(a+1)(\alpha+k)^\gamma + (a-1)(\alpha-k)^\gamma]. \quad (4.8)$$

De nuevo debemos escoger $\gamma > 0$ de modo que $\varrho \geq 0$ y la solución satisface la condición de energía fuerte. p_0 es también una constante positiva para estos valores de γ .

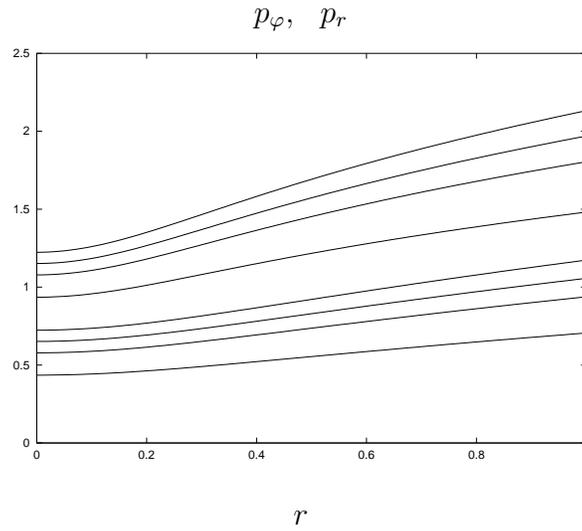
En las Figs. 4.4-4.5(a) se presentan las gráficas de las cantidades ϵ , p_φ , p_r , y σ para discos con $\alpha = 3$, $\gamma = 1, 2$, y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 0,8$, y $1,5$, como funciones

de r . Como en el caso anterior, vemos que la densidad de energía inicialmente es una cantidad positiva y luego se vuelve negativa en violación de la condición de energía débil. Por lo tanto, sólo la región central de estos discos tiene un comportamiento físicamente razonable. Las otras funciones también tienen un comportamiento similar al caso precedente. También se estudiaron discos tipo Zipoy-Voorhees para otros valores de los parámetros, pero en todos los casos se encontró un comportamiento similar.

Igualmente, las cantidades del CRM se muestran en las siguientes figuras para el mismo valor de los parámetros, también como funciones de r . También se consideró el caso cuando los dos fluidos se mueven con velocidades tangenciales iguales y opuestas. Aquí la velocidad tangencial v^2 (Fig. 4.5 (b)) es siempre menor que la velocidad de la luz. Vemos que la inclusión de campo electromagnético hace menos relativistas estos discos. También h^2 (Fig. 4.6(a)) es siempre una función creciente de r que corresponde a un CRM estable para los discos. Finalmente, en la Fig. 4.6(b) se grafica la densidad de energía ϵ_{\pm} y la densidad de carga eléctrica σ_{\pm} en el caso particular cuando los dos fluidos tienen igual presión o igual densidad de energía. Se observa que σ_{\pm} tiene un comportamiento similar a σ , y ϵ_{\pm} a la densidad de energía ϵ . Por lo tanto, para campos tipo Zipoy-Voorhees podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes sólo con una región central bien comportada.

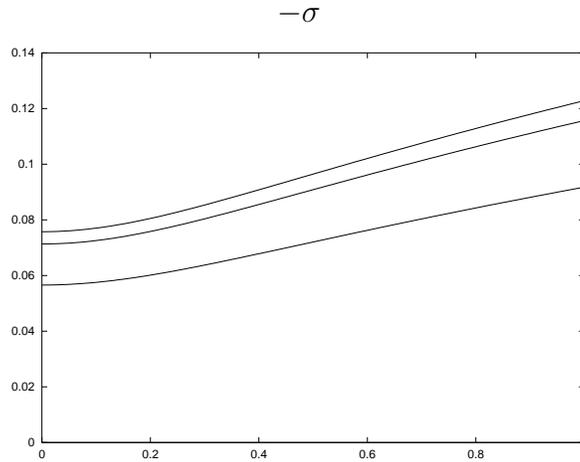


(a)



(b)

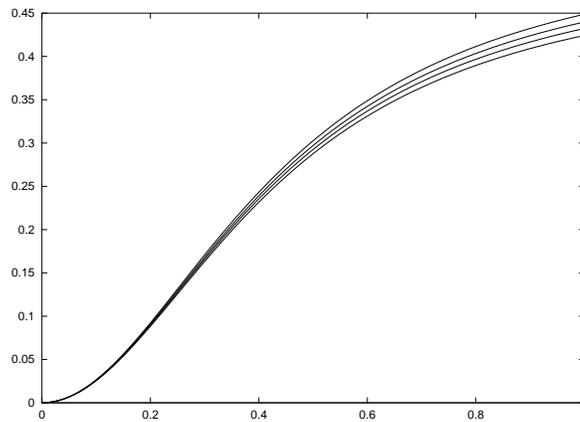
Figura 4.4: (a) densidad de energía ϵ y (b) presiones p_φ (curvas superiores desplazadas un factor de 0.5) y p_r para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$, $\gamma = 1,2$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 0,8, y 1,5 (curvas inferiores), como funciones de r .



r

(a)

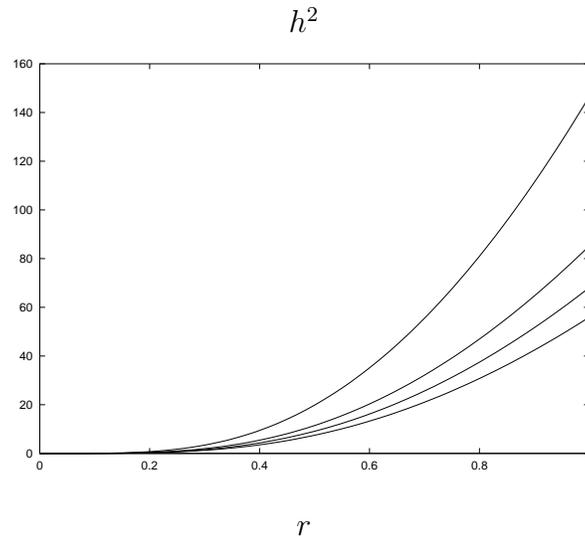
v^2



r

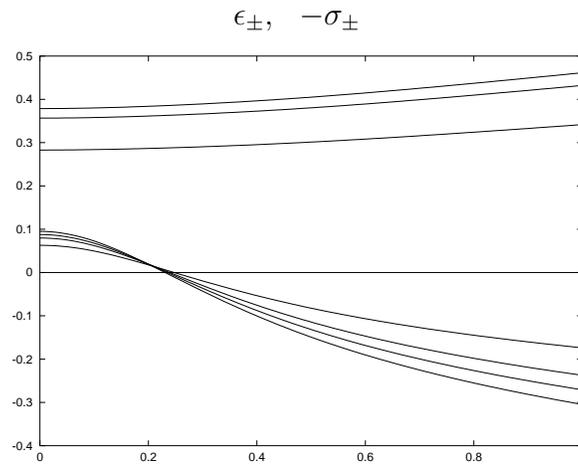
(b)

Figura 4.5: (a) Densidad de carga eléctrica σ para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$, $\gamma = 1,2$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5, 0,8, y 1,5 (curva superior). (b) v^2 para discos Zipoy-Voorhees con $q_1 = q_2 = 0$ (curva superior), 1, 2, y 5 (curva inferior).



r

(a)



r

(b)

Figura 4.6: (a) Momentum angular h^2 , (b) ϵ_{\pm} para discos tipo Zipoy-Voorhees con $\alpha = 3$, $\gamma = 1,2$, y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas inferiores), 0,5, 0,8, y 1,5 (curvas superiores), y σ_{\pm} (curvas superiores escaladas por un factor de 10) para $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5, 0,8, y 1,5 (curva superior) y los mismos valores de α y γ , como funciones de r .

4.4. Discos tipo Bonnor-Sackfield

Consideremos una solución tipo Bonnor-Sackfield donde μ , λ , A_t , y A_φ están dadas por (3.8), y las coordenadas esferoidales oblatas u y w están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$R^2 = k^2(u^2 + 1)(1 - w^2), \quad Z = kuw, \quad (4.9)$$

donde $0 \leq u \leq \infty$ y $0 \leq w \leq 1$. En este caso debemos escoger $0 < \alpha < 1$ y el cascarón (1.65) está localizado en $u = \alpha/k > 0$ y $w = \sqrt{1 - r^2}$, con $k = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Las cantidades físicas asociadas con los discos se pueden escribir como

$$\epsilon = \varrho - p_r - p_\varphi, \quad (4.10a)$$

$$p_r = p_0[1 - k^2r^2]^{-(\gamma^2+1)/2} \quad (4.10b)$$

$$p_\varphi = p_r \left[\frac{1 + k^2\gamma^2r^2}{1 - k^2r^2} \right], \quad (4.10c)$$

$$\sigma = -\frac{\sqrt{2}\gamma k q_1 p_0}{2\alpha^2} p_r, \quad (4.10d)$$

donde

$$p_0 = \frac{4\alpha}{(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} u} - (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} u}} \quad (4.11)$$

es una constante y

$$\varrho = p_r \frac{1}{2} \frac{\gamma k p_0}{\alpha^2} \left[(a+1)e^{\gamma \cot^{-1} u} + (a-1)e^{-\gamma \cot^{-1} u} \right] \quad (4.12)$$

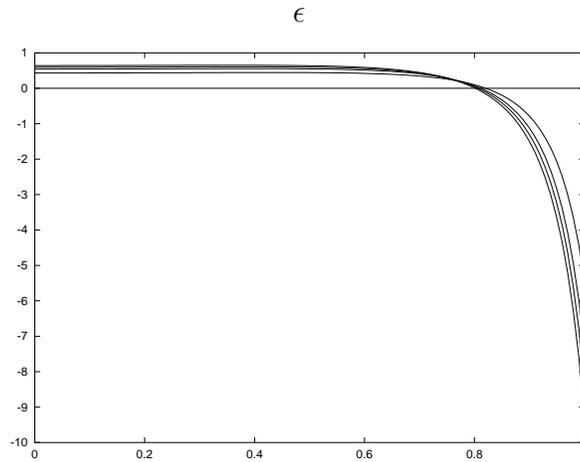
Aquí también debemos escoger $\gamma > 0$ de modo que $\varrho \geq 0$ y la solución satisface la condición de energía fuerte. p_0 es también una constante positiva para estos valores de γ .

En las Figs. 4.7-4.8(a) se presentan las gráficas de las funciones anteriores para discos con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 1,3$, y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 0,8$, y $1,5$, como funciones de

r . Como en los casos anteriores, vemos que la densidad de energía inicialmente es una cantidad positiva y luego se vuelve negativa en violación de la condición de energía débil. Por lo tanto, sólo la región central de estos discos tiene un comportamiento físicamente razonable. Las otras funciones también tienen un comportamiento similar a los casos precedentes. También se estudiaron discos tipo Bonnor-Sackfield para otros valores de los parámetros, pero en todos los casos se obtuvo un comportamiento similar.

Igualmente, las cantidades importantes del CRM se muestran en las siguientes figuras, también como funciones de r . Se consideró también el caso cuando los dos fluidos se mueven con velocidades tangenciales iguales y opuestas. Aquí la velocidad tangencial v^2 (Fig. 4.8 (b)) no es siempre menor que la velocidad de la luz. Sin embargo la inclusión de campo electromagnético puede hacer la velocidad de las partículas mas pequeña que la velocidad de la luz. En algunos casos h^2 (Fig. 4.9(a)) presenta cambios fuertes en la pendiente en cierto valor de r , lo cual significa que hay inestabilidad fuerte allí. Para otros valores de los parámetros h^2 es una función monótona creciente de r que corresponde a un CRM estable para los discos.

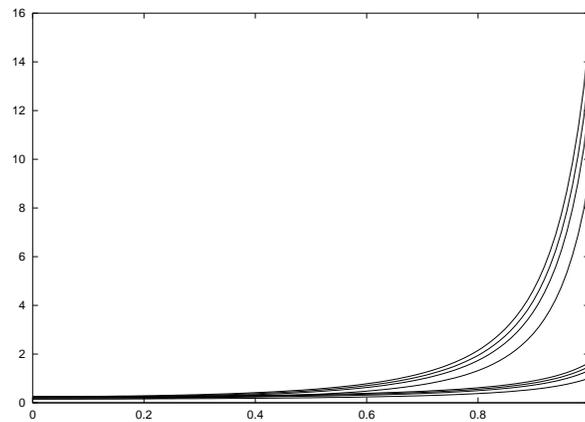
Finalmente, en la Fig. 4.9(b) se gráfica la densidad de energía ϵ_{\pm} y la densidad de carga eléctrica σ_{\pm} en el caso particular cuando los dos fluidos tienen igual presión o igual densidad de energía. Vemos que ϵ_{\pm} tiene un comportamiento similar a la densidad de energía ϵ . Por lo tanto, para campos tipo Bonnor-Sackfield podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes sólo con una región central bien comportada.



r

(a)

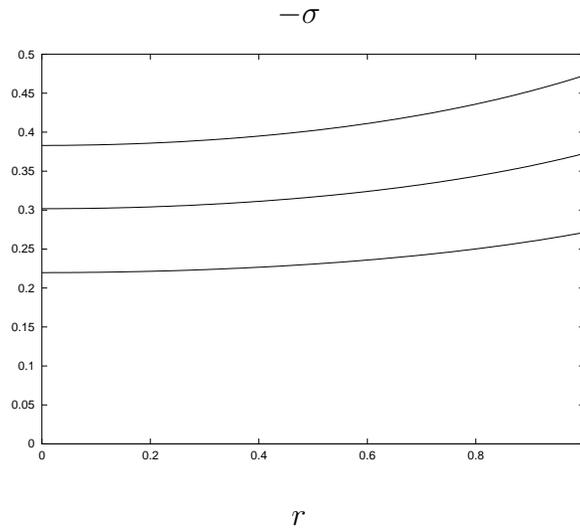
p_φ, p_r



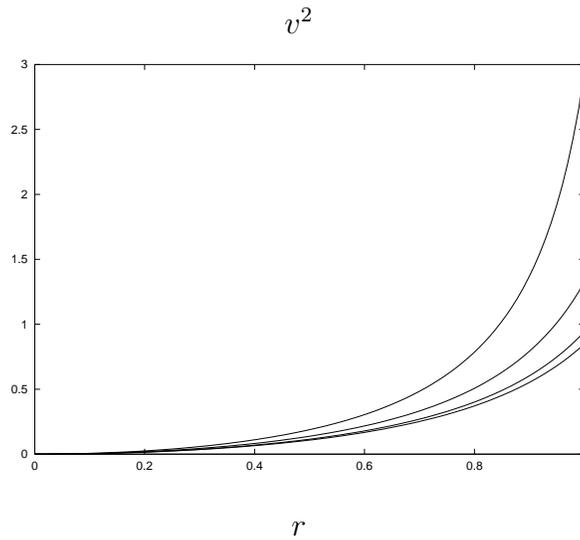
r

(b)

Figura 4.7: (a) densidad de energía ϵ y (b) presiones p_φ (curvas superiores) y p_r para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 1,3$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curvas superiores), 0,5, 0,8, y 1,5 (curvas inferiores), como funciones de r .

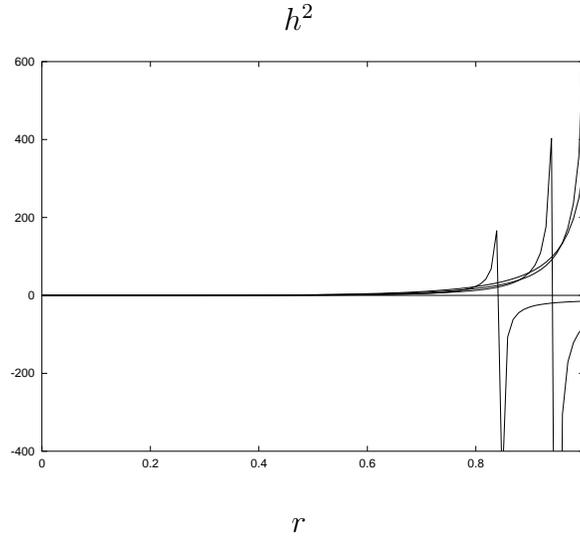


(a)

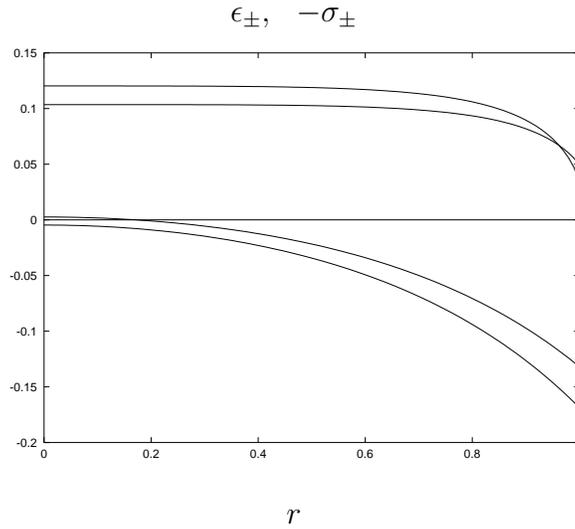


(b)

Figura 4.8: (a) Densidad de carga eléctrica σ para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 1,3$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5, 0,8, y 1,5 (curva superior). (b) v^2 para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,9$, $\gamma = 1$ y $q_1 = q_2 = 3$ (curva inferior), 5, 8, y 10 (curva superior).



(a)



(b)

Figura 4.9: (a) Momentum angular h^2 para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,9$, $\gamma = 1$, y $q_1 = q_2 = 3, 5$ (curvas agudas), 8 , y 10 (curva inferior). (b) ϵ_{\pm} (curvas inferiores) y σ_{\pm} para discos tipo Bonnor-Sackfield con $\alpha = 0,9$, $\gamma = 1$, y $q_1 = q_2 = 8$ y 10 (curvas superior e inferior, respectivamente).

4.5. Discos para una solución de Darmois cargada y magnetizada

Consideremos ahora una solución de Darmois cargada y magnetizada donde μ , λ , A_t , y A_φ están dadas por (3.12), y las coordenadas esferoidales prolatas x y y están dadas por (4.5). De nuevo debemos escoger $\alpha > 1$ y el cascarón (1.65) está localizado en $x = \alpha/k > 1$ y $y = \sqrt{1 - r^2}$, con $k = \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

Las cantidades físicas asociadas con los discos se pueden escribir como

$$\epsilon = \varrho - p_r - p_\varphi, \quad (4.13a)$$

$$p_\varphi = p_r \frac{[a^2 + k^2(4 + b^2)r^2]}{(1 + k^2r^2)(a^2 + k^2b^2r^2)}, \quad (4.13b)$$

$$p_r = \frac{2\alpha a^4(1 + k^2r^2)^{3/2}}{(a^2 + k^2b^2r^2)[(\alpha a + k)^2 - k^2b^2(1 - r^2)]}, \quad (4.13c)$$

$$\sigma = -p_r \frac{4\sqrt{2}aq_1(\alpha a + k)(1 - r^2)^{1/2}}{\alpha(a^2 + k^2b^2r^2)[(\alpha a + k)^2 - k^2b^2(1 - r^2)]}, \quad (4.13d)$$

$$j = -\varrho \frac{\sqrt{2}q_2kr^2}{4a}, \quad (4.13e)$$

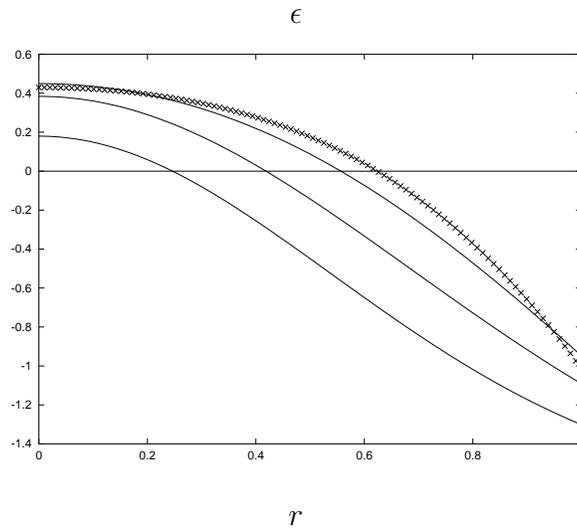
donde

$$\varrho = p_r \frac{4ak}{\alpha(a^2 + k^2b^2r^2)} \left[\frac{(\alpha a + k)^2 + k^2b^2(1 - r^2)}{(\alpha a + k)^2 - k^2b^2(1 - r^2)} \right]. \quad (4.14)$$

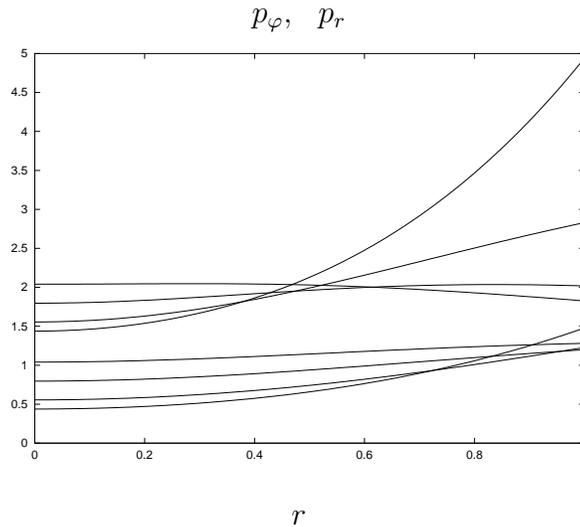
En las Figs. 4.10-4.11 (a) se muestran las gráficas de las funciones anteriores para discos con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 1,0$, y $1,5$, como funciones de r . Vemos que estos discos también tienen una región central bien comportada la cual satisface las condiciones de energía fuerte y débil, pero tienen una región periférica donde $\epsilon < 0$, en violación de la condición de energía débil. También calculamos estas funciones para otros valores de los parámetros, pero en todos los casos encontramos un comportamiento similar.

Igualmente, las cantidades importantes del CRM se muestran en las siguientes figuras para el mismo valor de los parámetros, también como funciones de r . También se consideró el caso cuando los dos fluidos se mueven con velocidades iguales y opuestas. Vemos que la inclusión de campo electromagnético puede hacer la velocidad de las partículas menor que la velocidad de la luz. Aquí v^2 (Fig. 4.11 (b)) puede también tomar valores negativos. En algunos casos h^2 (Fig. 4.12(a)) presenta cambios fuertes en la pendiente para cierto valor de r , lo cual significa que tenemos inestabilidad fuerte allí, y también encontramos regiones con pendiente negativa, que muestra que el CRM no se puede aplicar para estos valores de los parámetros. Sin embargo, para $q_1 = q_2 = 0,7$, h^2 es siempre una función monótona creciente de r que corresponde a un CRM estable para este disco.

Finalmente, en la Fig. 4.12(b) se grafica ϵ_{\pm} , σ_+ , and σ_- en el caso particular cuando los dos fluidos tienen igual presión o igual densidad de energía, para valores de los parámetros para los cuales $v^2 < 1$. Vemos que ϵ_{\pm} tiene un comportamiento similar a la densidad de energía ϵ . Por lo tanto, para esta solución podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes sólo con una región central bien comportada.

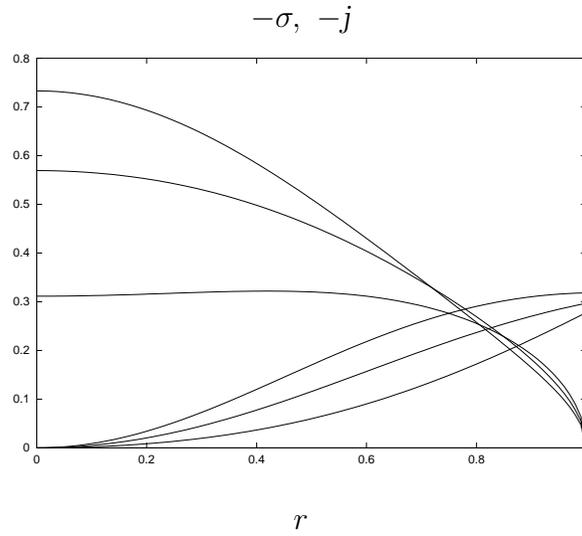


(a)



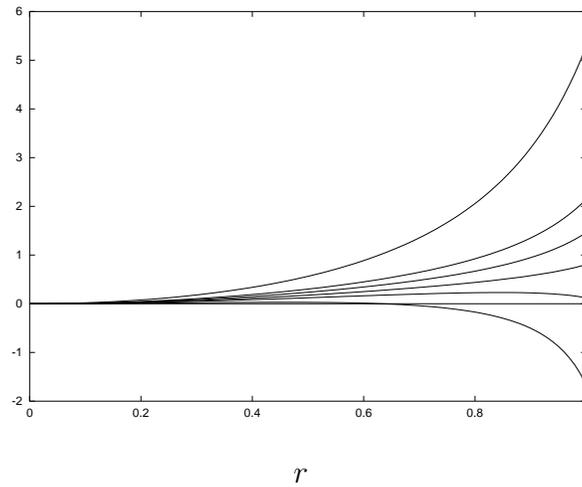
(b)

Figura 4.10: (a) ϵ para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curva con cruces), 0,5, 1,0, y 1,5 (curva inferior). (b) p_φ (curvas superiores) y p_r para discos con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$, 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas superiores).



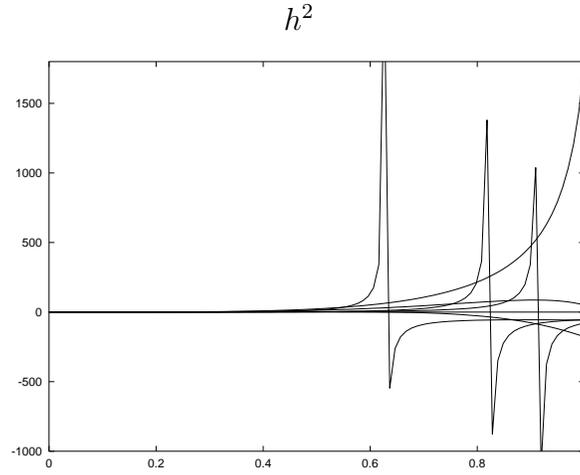
(a)

v^2

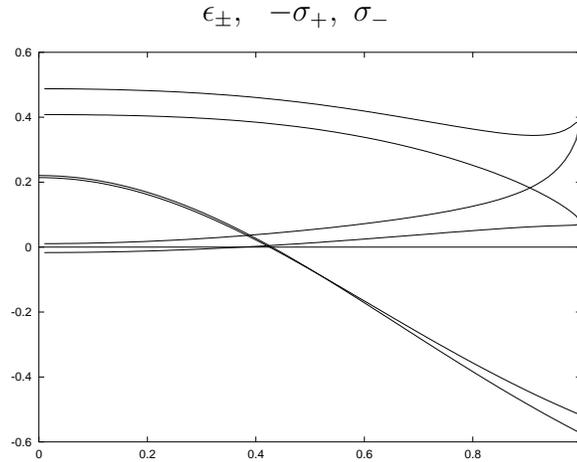


(b)

Figura 4.11: (a) σ (curvas superiores) y j para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (eje r), 0,5, 1,0, y 1,5 (curvas superiores). (b) v^2 para discos con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0$ (curva superior), 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, y 1,0 (curva inferior).



(a)



(b)

Figura 4.12: (a) h^2 para discos asociados a una solución de Darmois cargada y magnetizada con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0, 0,5, 0,6$ (curvas agudas), $0,7$ (curva superior), $0,8$, y $1,0$ (curva inferior), siendo las últimas curvas escaladas por un factor de 20. (b) ϵ_{\pm} , σ_+ (curvas superiores), y σ_- (curvas inferiores) para discos con $\alpha = 1,5$ y $q_1 = q_2 = 0,7$ y $0,8$ (curvas superior e inferiores, respectivamente).

4.6. Discos tipo Taub-NUT

Finalmente, una solución simple estacionaria a las ecuaciones de Einstein-Maxwell es una solución tipo Taub-NUT,

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2ax + 1 + c^2} \right], \quad (4.15a)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \quad (4.15b)$$

$$\mathcal{M} = 2kby, \quad (4.15c)$$

$$A_t = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{1+c^2}} \left[\frac{1+c^2+ax}{x^2+2ax+1+c^2} \right], \quad (4.15d)$$

$$A_\varphi = \frac{\sqrt{2}ckby}{\sqrt{1+c^2}} \left[\frac{1+c^2-x^2}{x^2+2ax+1+c^2} \right], \quad (4.15e)$$

donde $a^2 + b^2 = 1 + c^2$, siendo c el parámetro que controla el campo electromagnético. x e y son las coordenadas esferoidales prolatas definidas en (3.5). Esta solución se puede generar, en estas coordenadas, usando el método de Ernst a partir de la solución en el vacío de Taub-NUT. Nótese que cuando $c = 0$ esta solución se reduce a la solución en el vacío de Taub-NUT.

A partir de las expresiones anteriores es fácil ver que $p_\varphi = p_r = p$ de modo que el tensor de momentum-energía se puede escribir en la forma de un fluido perfecto

$$S_{ab} = (\epsilon + p)V_a V_b + p h_{ab}, \quad (4.16)$$

donde $h_{ab} = g_{ab} - Y_a Y_b$ es la métrica de la hipersuperficie $z = 0$,

$$\epsilon = - \left[\frac{\tilde{\alpha} + a}{2k^2} \right] \left(\frac{p}{\tilde{\alpha}} \right)^3, \quad (4.17a)$$

$$p = \frac{2\tilde{\alpha}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2a\tilde{\alpha} + 1 + c^2}}, \quad (4.17b)$$

donde $\tilde{\alpha} = \alpha/k > 1$. De (4.17a) se sigue que el fluido tiene una ecuación de estado barótropa. La densidad Newtoniana efectiva, definida como $\varrho = \epsilon + 2p$, es

$$\varrho = \left[\frac{a(\tilde{\alpha}^2 + 1) + (2 + c^2)\tilde{\alpha}}{2} \right] \left(\frac{p}{\tilde{\alpha}} \right)^3. \quad (4.18)$$

La densidad de corriente superficial en el marco de las coordenadas está dada por

$$j_t = c \left[\frac{a\tilde{\alpha}^2 + (1 + c^2)(2\tilde{\alpha} + a)}{8\sqrt{2}k^2(1 + c^2)^{1/2}} \right] \left(\frac{p}{\tilde{\alpha}} \right)^5, \quad (4.19a)$$

$$j_\varphi = 2kb(1 - r^2)^{1/2}j_t, \quad (4.19b)$$

mientras que la densidad de corriente eléctrica superficial medida en el marco comóvil es

$$\sigma = -c \left[\frac{a\tilde{\alpha}^2 + (1 + c^2)(2\tilde{\alpha} + a)}{4\sqrt{2}k(1 + c^2)^{1/2}} \right] \left(\frac{p}{\tilde{\alpha}} \right)^4, \quad (4.20)$$

y la densidad de corriente acimutal medida en ese marco es igual a cero. Por lo tanto, tenemos una familia de discos de fluido perfecto cargados finitos con densidad de energía superficial constante y presión dada por (4.17), y densidad de carga eléctrica superficial dada por (4.20).

Analizaremos ahora las propiedades físicas de los discos. Consideremos primero el caso cuando $c = 0$, de modo que $a^2 + b^2 = 1$. En este caso los potenciales electromagnéticos son cero y por lo tanto el disco está hecho de un fluido perfecto neutro. Además, es fácil ver que con $|a| \leq 1$ la densidad de energía es siempre una cantidad negativa y por lo tanto estos discos nunca satisfacen la condición de energía débil. Así, con el fin de obtener discos en concordancia con la condición de energía débil, necesitamos considerar soluciones con $c \neq 0$.

De la expresión (4.17a) es fácil ver que la densidad de energía es positiva si tomamos

$$a < -\tilde{\alpha} < -1. \quad (4.21)$$

Adicionalmente, con el fin de tener expresiones reales positivas para la presión p y la densidad Newtoniana efectiva ϱ , debemos imponer las condiciones

$$\tilde{\alpha}^2 + 2a\tilde{\alpha} + 1 + c^2 > 0, \quad (4.22a)$$

$$a(\tilde{\alpha}^2 + 1) + (2 + c^2)\tilde{\alpha} \geq 0. \quad (4.22b)$$

Por ejemplo, si tomamos $c = 3$, $a = -3$ y $\tilde{\alpha} = 2$, tenemos que

$$\epsilon = 3\sqrt{2}, \quad (4.23a)$$

$$p = 2\sqrt{2}, \quad (4.23b)$$

$$\varrho = 7\sqrt{2}, \quad (4.23c)$$

$$\sigma = 0,6\sqrt{15}, \quad (4.23d)$$

en concordancia con las condiciones de energía débil y fuerte. Además, $p < \epsilon$ y por lo tanto el disco también satisface la condición de energía dominante.

Con el fin de analizar el movimiento de los discos, vemos que las componentes espaciales del vector velocidad V^a son cero con respecto a las coordenadas y por consiguiente los discos son “localmente estáticos”. El movimiento de los discos también se puede analizar considerando un marco ortonormal diferente del marco comóvil. Un marco ortonormal comúnmente usado es el “marco localmente no rotante” (LNRF) u “observador de momentum angular cero” (ZAMO) [57, 44]. La velocidad tangencial de los discos medida por este observador está dada por

$$v_{LNRF} = \frac{g_{11}(\Omega - \omega)}{\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}, \quad (4.24)$$

donde $\omega = -g_{01}/g_{11}$ y $\Omega = V^1/V^0$, obteniendo

$$v_{LNRF} = -\frac{b}{2k} \left(\frac{p}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}. \quad (4.25)$$

Como se puede ver de las expresiones anteriores, las partículas de los discos, con respecto al LNRF, se mueven con velocidades superlumínicas para $r < r_0$, donde

$$r_0 = \frac{bp^2}{\sqrt{b^2p^4 + 4k^2\tilde{\alpha}^4}}. \quad (4.26)$$

Por ejemplo, con los valores usados en (4.23), se encuentra que $r_0 = \sqrt{12/13} \approx 0,96$, de modo que los discos tendrán velocidades menores que la velocidad de la luz sólo en una región muy pequeña cerca del borde del disco. Sin embargo, este comportamiento de la velocidad es en efecto debido al LNRF y no al movimiento del disco. Por lo tanto, para esta familia de soluciones el LNRF no es un observador bien comportado en el sentido que el marco en si mismo presenta velocidades superlumínicas.

Otra cantidad relacionada con el movimiento de los discos es el momentum angular específico de una partícula que rota en un radio r , definido como $h = g_{\varphi a}V^a$. Así tenemos

$$h^2 = \left(\frac{bp}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \sqrt{1-r^2}, \quad (4.27)$$

es decir, los discos no son estables bajo perturbaciones radiales.

Capítulo 5

Discusión de resultados

Se presentó la interpretación de algunos espaciotiempos en el electrovacío en términos de discos de fluido perfecto cargados. Con el fin de hacer tal interpretación, en el capítulo 2 se presentó un estudio detallado del Modelo de Contra-Rotación (CRM) para discos delgados relativistas, axialmente simétricos, estáticos, generales en el electrovacío, con presión radial igual y diferente de cero. Se encontró una restricción general sobre las velocidades tangenciales de contra-rotación necesaria para expresar el tensor de momentum-energía superficial del disco como la superposición de dos fluidos cargados contra-rotantes. Cuando no hay presión radial los discos fueron interpretados como dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes. En este caso se mostró que esta restricción se puede satisfacer si tomamos los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas. También encontramos que en general los dos fluidos circulan con velocidades diferentes. Sin embargo, cuando el espaciotiempo es electrostático (o magnetostático) los dos fluidos electro-geodésicos circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas. Por otro lado, cuando tenemos presión radial diferente de cero los discos fueron interpretados como dos fluidos perfectos cargados contra-rotantes. En este caso se mostró que esta suposición sólo es válida si la presión radial tiene una forma

determinada. También mostramos que, en general, en ambos casos no es posible tomar los dos fluidos contra-rotantes circulando a lo largo de electro-geodésicas ni tampoco tomar las dos velocidades tangenciales contra-rotantes como iguales y opuestas. Igualmente, encontramos expresiones para las densidades de energía, las presiones (en el caso de discos con presión radial), las densidades de corriente y las velocidades tangenciales de contra-rotación de los dos fluidos.

En el capítulo 3, se consideraron cuatro familias de modelos de discos de polvo cargados contra-rotantes basados en soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío en el caso axialmente simétrico, estático generadas por técnicas convencionales de generación de soluciones [54]. Vimos que para campos tipo Chazy-Curzon, tipo Zipoy-Voorhees y tipo Bonnor-Sackfield podemos construir modelos de discos delgados contra-rotantes electro-geodésicos sólo con una región central bien comportada, mientras que para una métrica de Darmois cargada y magnetizada encontramos para muchos valores de los parámetros discos con un CRM bien comportado en todas las regiones del disco. Por otro lado, cuando consideremos los dos fluidos contra-rotantes no circulando a lo largo de electro-geodésicos pero con velocidades iguales y opuestas, o para campos electrostáticos (o magnetostáticos), encontramos para muchos valores de los parámetros discos con un CRM bien comportado en todas las regiones. Vimos también que para campos tipo Chazy-Curzon, tipo Zipoy-Voorhees y tipo Bonnor-Sackfield, la presencia de un campo eléctrico (o magnético) puede hacer inestable el CRM contra perturbaciones radiales, y por el contrario, estabilizar el CRM en el caso de discos asociados a una métrica de Darmois cargada y magnetizada.

En el capítulo 4, fueron considerados también cuatro familias de modelos de discos de fluido perfecto cargados contra-rotantes basados en las soluciones anteriores. Vimos que la presencia de campo electromagnético puede hacer las velocidades tangenciales de contra-rotación menores que la velocidad de la luz, y puede

también estabilizar el CRM contra perturbaciones radiales. Los discos contruidos tienen una región central con un comportamiento físicamente razonable los cuales satisfacen las condiciones de energía débil y fuerte, y una región periférica donde la densidad de energía es negativa, en violación de la condición de energía débil.

Luego, una familia de campos tipo Taub-NUT estacionarios se interpretó en términos de discos finitos hechos de un fluido perfecto cargado. La diagonalización del tensor de momentum-energía se facilitó en este caso por el hecho que éste se puede escribir como una matriz triangular superior derecha. Encontramos que la inclusión de campo electromagnético cambia significativamente las diferentes propiedades materiales de los discos lo cual permitió, para algunos valores de los parámetros, construir discos que satisfacen todas las condiciones de energía.

Finalmente, está siendo considerada la generalización del modelo de contrarotación presentado aquí al caso de discos rotantes con y sin presión radial en presencia de campo electromagnético.

Bibliografía

- [1] W. A. Bonnor and A. Sackfield, *Commun. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).
- [2] T. Morgan and L. Morgan, *Phys. Rev.* **183**, 1097 (1969).
- [3] L. Morgan and T. Morgan, *Phys. Rev. D* **2**, 2756 (1970).
- [4] A. Chamorro, R. Gregory, and J. M. Stewart, *Proc. R. Soc. London* **A413**, 251 (1987).
- [5] G. A. González and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **16**, 479 (1999).
- [6] D. Lynden-Bell and S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185**, 679 (1987).
- [7] P.S. Letelier and S. R. Oliveira, *J. Math. Phys.* **28**, 165 (1987).
- [8] J. P. S. Lemos, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1219 (1989).
- [9] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **10**, L75 (1993).
- [10] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 4334 (1993).
- [11] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and C. Pichon, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265**, 126 (1993).
- [12] J. Bičák and T. Ledvinka, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1669 (1993).
- [13] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Phys. Rev D* **49**, 5135 (1994).

- [14] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 53 (1996).
- [15] C. Klein, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2267 (1997).
- [16] G. A. González and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **62**, 064025 (2000).
- [17] V. C. Rubin, J. A. Graham, and J. D. P Kenney, *Astrophys. J.* **394**, L9 (1992).
- [18] H. Rix, M. Franx, D. Fisher, and G. Illingworth, *Astrophys. J.* **400**, L5 (1992).
- [19] T. Ledvinka, J. Bičák, and M. Žofka, in *Proceeding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity*, edited by T. Piran (World Scientific, Singapore, 1999)
- [20] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **60**, 104042 (1999).
- [21] J. Katz, J. Bičák, and D. Lynden-Bell, *Class. Quantum Grav.* **16**, 4023 (1999).
- [22] G. García R. and G. A. González, *Phys. Rev. D* **69**, 124002 (2004).
- [23] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*. (North-Holland, Amsterdam, 1966).
- [24] G. Neugebauer and R. Meinel, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3046 (1995).
- [25] C. Klein, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2267 (1997).
- [26] C. Klein and O. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2884 (1999).
- [27] C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 064033 (2001).
- [28] J. Frauendiener and C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 084025 (2001).

- [29] C. Klein, Phys. Rev. D **65**, 084029 (2002).
- [30] C. Klein, Phys. Rev. D **68**, 027501 (2003).
- [31] G. García-Reyes and G. A. González, Class. Quantum Grav. **21**, 4845 (2004).
- [32] G. García-Reyes and G. A. González, Phys. Rev. D **70**, 104005 (2004).
- [33] G.A. González and O.A. Espitia, Phys. Rev. D **68**, 104028 (2003).
- [34] G. A. González, *Construção de Modelos Relativísticos de Discos com Suporte de Esforço na Direção Radial*. Tesis de Doctorado en Matemática Aplicada. (Universidade Estadual de Campinas, 1998).
- [35] A.H. Taub, J. Math. Phys. **21**, 1423 (1980).
- [36] A. Wang, J. Math. Phys. **32**, 2863 (1991).
- [37] A. Wang, Phys. Rev. D **45**, 3534 (1992).
- [38] P.S. Letelier and A. Wang, J. Math. Phys. **36**, 3023 (1995).
- [39] F.J. Ernst, Phys. Rev. D **168**, 1415 (1968).
- [40] Z. Perjés, Nuovo Cim. B **55**, 600 (1968).
- [41] A. Das, J. Math. Phys. **20**, 740 (1979).
- [42] P.S. Letelier, Phys. Rev. D **22**, 807 (1980).
- [43] J.J. Ferrando, J.A. Morales, and M. Portilla, Gen. Relativ. Gravit. **22**, 1021 (1990).
- [44] S. Chandrasekar, *The Mathematical Theory of Black Holes*. (Oxford University Press, New York, 1992).

- [45] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1989).
- [46] J. Chazy, Bull Soc. Math., France **52**, 17 (1924).
- [47] H.E.J Curzon, Proc. London Math. Soc. **23**, 477 (1924).
- [48] W.B. Bonnor, Proc. Phys. Soc., London, Sect. A **67**, 225 (1954).
- [49] D.M. Zipoy, J. Math. Phys. **7**, 1137 (1966).
- [50] B.H. Voorhees, Phys. Rev. D **2**, 2119 (1970).
- [51] H. Weyl, Ann. Phys. (Leipzig) **54**, 117 (1917).
- [52] H. Weyl, Ann. Phys. (Leipzig) **59**, 185 (1919).
- [53] K. Schwarzschild, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. 189 (1916).
- [54] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).
- [55] W.B. Bonnor, Z. Phys. **161**, 439 (1961).
- [56] W.B. Bonnor, Z. Phys. **190**, 444 (1966).
- [57] J.M. Bardeen, W.H Press, and S.A. Teukolsky, Astrophys. J. **178**, 347 (1972).