Conocimiento especializado de los futuros profesores de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de las fracciones

Tifanni Julieth Sarmiento-Afanador

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciada en Educación Básica Primaria

Directora

Dra. Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Doctora en Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mi *mamá,* por estar en cada momento que necesité, por ser un gran apoyo y compañía durante cada paso que di en este proceso y, enseñarme qué es la resiliencia.

A mi *papá,* por ser mi voz de apoyo y aliento cuando más lo requería, por creer en mí y, sobre todo, por inculcarme su amor por las matemáticas.

A mi *hermano,* por ser mi fiel confidente, escucharme en cada crisis, darme consejos y estar siempre.

A *Sergio*, *amor vitae meae*, por ser la persona incondicional en este proceso, por motivarme y apoyarme cuando más lo necesitaba, pero más que nada por ser la luz que precisaba en los momentos más obscuros.

Este logro es tan de ustedes como mío, *gracias*.

Agradecimientos

A *Dios*, por ser mi guía en el camino.

A mi *familia*, por su apoyo incondicional, paciencia y amor constante en este proceso.

A mi directora, *Jenny Patricia Acevedo Rincón*, por creer en mí y darme su confianza, por orientarme en cada paso de esta investigación y brindarme su conocimiento, el cual me ha permitido crecer como persona y futura profesional.

A los *futuros profesores* que hicieron posible este trabajo investigativo, por concederme su tiempo, conocimientos y estar abiertos a procesos que contribuyen a su formación.

A mis amigos, por sus palabras de aliento, conocimientos y ayuda para concluir esta investigación. A *Laura y Camilo*, por su apoyo incondicional, por disipar mis dudas en los momentos más confusos y darme ánimo cuando más lo requería, en serio, gracias.

A mi bola de pelos naranja, *Simba*, por acompañarme en las madrugadas que creía eternas con su ronroneo y darme sonrisas con sus travesuras cuando todo parecía desalentador.

Al semillero STEAM+H, por ser un gran espacio de enriquecimiento en mi formación, por apoyarme en este proceso y darme sus valiosos aportes.

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Tabla de figuras

Tabla de apéndices

Resumen

Título: Conocimiento especializado de los futuros profesores de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de las fracciones*.

Autora: Tifanni Julieth Sarmiento-Afanador**.

Palabras claves: MTSK, Educación primaria, Formación de Profesores, Fracciones, Creencias y Concepciones.

Descripción: Este proyecto surge de la necesidad de entender cuáles los conocimientos que tiene el futuro profesor (FP) en formación desde un contexto y contenido específico. Es por lo que propuso caracterizar el conocimiento especializado de los futuros profesores de primaria sobre la enseñanza de las fracciones heterogéneas. Para lograr este objetivo, se enmarca la investigación dentro de un enfoque cualitativo y paradigma interpretativo, ya que esta permite una visión detallada de la realidad. Se realiza, por tanto, un análisis de contenido de una tarea matemática escolar correlacionada con el MTSK y, se aplica a 31 estudiantes que cursan la licenciatura para ser profesores de primaria. Los hallazgos son presentados bajo la estructura de los subdominios del modelo contrastando la teoría del concepto y los conocimientos de los FP, mostrando como resultado que los saberes que poseen (en su mayoría) corresponden a aquellos que traen de su propia experiencia en la escuela y replican las estrategias que fueron aplicadas en ellos; lo cual implica, que se están omitiendo conocimientos en la formación de los FP desde su plan de estudios y que no se orienta concretamente para desarrollar maestros investigadores. Finalmente, se concluye que el modelo MTSK delimita los conocimientos que tiene un profesor, tanto que permite conocer sus potencialidad y limitaciones, lo cual, funciona como pauta para evolucionar los procesos de enseñanza y aprendizaje respecto a las matemáticas.

---

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Licenciatura en Educación Básica Primaria. Directora: Jenny Patricia Acevedo-Rincón. Doctora en Educación.

Abstract

Title: Specialized knowledge of prospective Primary Basic Education teachers about teaching fractions[*].

Author: Tifanni Julieth Sarmiento-Afanador[**].

Keywords: MTSK, Primary education, Teachers of Training, Fractions, Beliefs and Conceptions.

Description: This project arises from the need to understand what knowledge the future teacher (FP) in training has from a specific context and content. That is why it proposed to characterize the specialized knowledge that future elementary school teachers have about the teaching of heterogeneous fractions. To achieve this objective, the research is framed within a qualitative approach and interpretative paradigm, since this allows a detailed view of reality; therefore, a content analysis of a school mathematical task correlated with the MTSK is performed and applied to 31 students pursuing bachelor's degrees to become elementary school teachers. The findings are presented under the structure of the subdomains of the model contrasting the theory of the concept and the knowledge of the PFs, showing as a result that the knowledge they possess (mostly) correspond to those that they bring from their own experience in school and replicate the strategies that were applied to them; which implies that knowledge is being omitted in the training of the PFs from their curriculum and that it is not concretely oriented to develop teacher researchers. Finally, it is concluded that the MTSK model delimits the knowledge that a teacher has, so much so that it allows knowing his or her potentiality and limitations, which works as a guideline to evolve the teaching and learning processes regarding mathematics.

[*]Degree work.

[**]Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Licenciatura en Educación Básica Primaria. Directora: Jenny Patricia Acevedo-Rincón. Doctora en Educación.

Introducción

La formación de profesores es un aspecto elemental en el desarrollo de cualquier sociedad, ya que estos son los encargados de educar y formar a las nuevas generaciones. En Colombia, los profesores y su formación adquieren una importancia aún mayor, dado el papel crucial que la educación juega para la edificación de una sociedad integra y equitativa según el último Plan Decenal de Educación propuesto por el gobierno colombiano (2016-2026). Es así, como Colombia ha avanzado en los últimas décadas, en materia de formación de profesores, a través de la renovación curricular, las nuevas leyes, y la reforma del país con el objetivo de alcanzar una educación de calidad, y tener educadores altamente competentes en su labor. A pesar de estos avances, aún existen desafíos por enfrentar, pues al momento de ir a un salón de clase se evidencia una falta considerable de materiales concretos y tecnológicos; además, la necesidad de fortalecer la formación en áreas específicas, como la educación inclusiva y la enseñanza de las ciencias y las tecnologías; lo anterior, ya que dentro de la formación del profesorado se evidencia que solo el 53,46 % tiene una formación posgradual (MEN, 2022). Lo cual, implica que casi la mitad de los profesores en Colombia cuentan únicamente con formación inicial.

En este contexto, es importante que se destaque como una necesidad para seguir invirtiendo en la formación de los profesores en Colombia, fortaleciendo los programas de formación inicial y continua, para así fortalecer en los educadores investigación e innovación educativa; y con ello, garantizar que los profesores cuenten con las herramientas y recursos necesarios para que la educación que se brinde a los estudiantes, sea de calidad.

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) planteado por Carillo et al., (2018) permite estudiar el conocimiento profesional que necesita el profesor para poner en práctica durante su proceso de enseñanza, lo anterior desde la comprensión inicial de las matemáticas, la relación con otras disciplinas, las estrategias de enseñanza, hasta la forma en la que está aprendiendo el alumno y sus dificultades. Es decir, el MTSK surge como un modelo metodológico y teórico para analizar la práctica pedagógica del profesor de matemáticas. Por lo que se considera el MTSK como pertinente para este estudio, ya que se ha establecido como un modelo que proporciona conocimiento necesario sobre los requerimientos que debe tener el profesor de matemáticas para lograr un proceso de enseñanza favorable (Muñoz et al., 2015) y así mismo, permite identificar la forma en que los estudiantes aplican el conocimiento matemático adquirido, lo cual es fundamental para comprender su razonamiento y mejorar los procesos de enseñanza por parte de los profesores y, de aprendizaje en los alumnos; lo anterior, permitirá comprender cómo se están formando los profesores de educación básica primaria, específicamente en el área de matemáticas y, la relevancia de ello en su proceso de enseñanza. Además, permite establecer relaciones de coherencia y pertinencia al momento de definir planes de asignatura y programas académicos, para así comprender su implicación en la formación docente, es decir, cómo la especialización del profesor en cada concepto a enseñar desencadena ciertos tipos de acciones, estrategias, recursos y reflexiones en el estudiante y, así mismo, en la aplicación que le da este al conocimiento aprendido.

Capítulo 1. El problema

En este capítulo se desarrolla el problema de investigación, el cual está enmarcado en una de las problemáticas que comprende la educación en Colombia, como lo es la formación de los profesores y los conocimientos para abordar sus clases y, en conjunto a ello la pregunta problematizadora; seguido, se plantea la justificación evidenciando las necesidades e importancia del trabajo a través de argumentos y, finalmente, se presentan los objetivos planteados para esta investigación con el fin de expresar los alcances de la investigación.

1.1. Descripción y planteamiento del problema

La educación colombiana ha sido foco de investigación en el marco del desarrollo, mejoramiento y calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que se entiende como la forma en la que se logre prosperidad social y económica. Y aunque muchas de las acciones que se realizan sean consecuencia de los hallazgos, no se ha logrado solventar las necesidades, lo cual se refleja cada año en las pruebas estandarizadas como la PISA, donde incluso hay un desfase y muestra en los resultados del 2018 una disminución de desempeño en las distintas áreas con respecto al rendimiento del año 2015 (Forero, 2022).

Es importante por ello, replantear cómo se están desarrollando las mejoras para lograr la calidad educativa, es decir, establecer cuáles son los objetivos, estrategias, momentos y, además quiénes son las personas implicadas para que este proceso cumpla el objetivo. En ese sentido, enfocar el interés en uno de los factores más influyentes en la educación, como lo es el profesor, puede ser parte de la solución. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2021) pone énfasis político e investigativo en la formación inicial, ya que es allí donde el futuro profesor tiene sus primeras experiencias con la realidad profesional, social y global.

De acuerdo con el Decreto 1278 de 2002 se establece el Estatuto de Profesionalización Docente, el cual expresa que los futuros profesionales en educación son formados por las Escuelas Normales Superiores (ENS) y las Instituciones en Educación Superior (IES) y que, además, los responsables de abordar la enseñanza deben ser *educadores competentes*. La dificultad con este esquema, es que tanto las ENS como las IES poseen la facultad de tomar decisiones de manera autónoma en lo que respecta al diseño de sus planes y programas de estudio y, aunque las propuestas curriculares están sometidas a regulaciones que aseguran la calidad de los programas a través de un sistema de garantía, es posible que el sistema no sea suficiente y la educación de los futuros profesores se vea inmersa en modelos obsoletos que no proyecten lo establecido por diferentes causas (formadores, creencias de los profesores, visión de los programas, formación de los profesores, entre otros).

En consonancia, Colombia comienza a trabajar rigurosamente en el diseño curricular con el fin de mejorar la calidad educativa. En un inicio, en 1994 se aprobó la Ley General de Educación, que estableció el marco normativo definiendo los objetivos, principios y fines de la educación, además, de los derechos y deberes de los estudiantes, profesores y padres de familia; dos años después el MEN elaboró los Lineamientos Curriculares, un documento que dispone las directrices para el diseño de los planes de estudio en los niveles preescolar, básica y media. Hacia 2006 en un trabajo colaborativo entre el MEN, la comunidad educativa y expertos en educación estructuran los Estándares Básicos de Competencia (EBC) que resalta las habilidades que deben adquirir los estudiantes en áreas como matemáticas, lenguaje, ciencias naturales y ciencias sociales a lo largo de su formación básica; por último, en 2016 se crearon los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en función de los EBC para orientar los indicadores de aprendizaje de los niños y, en consecuencia, permitir dar una guía a los profesores para diseñar las clases y la evaluación.

En resumen, el diseño curricular que se ha desarrollado en los últimos años en la educación colombiana impacta con importantes reformas, actualizaciones en los planes de estudio y nuevos enfoques pedagógicos; así como en los parámetros para la formación inicial y continua de profesores en la educación primaria. Sin embargo, todavía existen desafíos pendientes, como la renovación para lograr una educación de calidad, la reducción de la brecha entre zonas urbanas y rurales, la promoción de la equidad educativa, pero sobre todo con respecto a cómo implementar estos documentos en el aula de clase.

Por otra parte, el Gobierno de Colombia y el MEN, en función del desarrollo y la vinculación con la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) en 2017, publican el Plan Decenal de Educación 2016-2026, el cual plantea que se debe consolidar una política enfocada en la formación de educadores, donde estos mediante procesos de profesionalización y educación permanente desarrollen en los estudiantes un aprendizaje integro. La introducción de estos nuevos enfoques, modelos pedagógicos, contenidos curriculares y, sobre todo, la atención a la formación docente es lo que promueve la consolidación de una educación de calidad; específicamente en matemáticas, esta evolución ha permitido que haya una nueva perspectiva en cuanto a la enseñanza de esta área, remplazando la memorización sistemática y modelos tradicionalistas, por el desarrollo de competencias, habilidades, integración de la tecnología y la aplicación de las matemáticas en las diferentes áreas del conocimiento (interdisciplinariedad).

Respecto a la relación entre la educación matemática y la formación docente, aunque han sido varios los avances en estos elementos, los resultados no son los esperados. Pues al estudiar el informe nacional de resultados de la prueba Saber Pro-2020, la cual comprende la evaluación de procesos matemáticos de los futuros profesionales en el módulo de Razonamiento Cuantitativo, evidencia que en los últimos 5 años no hay un cambio relevante en los niveles de desempeño y, en correspondencia con el Núcleo Básico de Competencia (NBC) de educación, es decir, los futuros profesores, estos obtuvieron en este módulo el puntaje más bajo en el año 2020. Con ello, es importante reflexionar que estos profesionales son los que tendrán bajo su cuidado y enseñanza las futuras generaciones, y cabe cuestionarse sobre cómo se están desarrollando las clases, si los conocimientos del profesor en su formación no son suficientes.

Finalmente, dentro de la educación matemática resalta la línea de investigación del pensamiento numérico y los números racionales, puesto que, además de que se establece dentro del mismo currículo colombiano como un conjunto numérico que permite desarrollar competencias frente a datos representados como fracciones, también es relevante por su importancia en el desarrollo de entender, procesar y utilizar información numérica en la vida diaria. Sin embargo, no se cumple el objetivo de los EBC para que los estudiantes sean *matemáticamente competentes*, ya que la forma en la que se maneja la matemática en el aula es desligada del quehacer cotidiano, anulando la relación que tiene con la realidad y el día a día, reflejando así, la necesidad de cumplir un currículo, pero no de desarrollar aprendizajes.

Y aunque ha sido considerado por diferentes investigadores y expertos, fundamentalmente, para analizar la forma en la que se aprenden y enseñan las matemáticas, es notorio que las investigaciones no son utilizadas para potenciar los procesos. Lo anterior, puesto que no se evidencian cambios en la forma en la que se está enseñando y, por ende, en los resultados de las pruebas estandarizadas. Las Pruebas Saber de 3º y 5º en el área de matemáticas están estructuradas por tres (3) competencias y tres (3) componentes, específicamente para la competencia *comunicación, modelación y representación* se establece el componente *numérico-variacional,* el cual comprende las fracciones desde el reconocimiento, el uso, la equivalencia, las propiedades, la representación, las operaciones, las relaciones en distintos contextos y las conexiones auxiliares que se establecen a partir de la operacionalización, como por ejemplo la equivalencia con porcentajes.

En el año 2022 se evidencia en los resultados de estas pruebas que solo el 54% de las respuestas en este componente son correctas y que, además, es la competencia que presenta mayor reto para los estudiantes, por tanto, será necesario evidenciar las estrategias de enseñanza, las concepciones que tienen los profesores sobre la enseñanza, las formas en las que aprenden los estudiantes, e incluso la relación entre estas. Es por lo anterior y por la influencia que tiene la formación del profesor sobre el proceso educativo que se pretende responder a la pregunta de investigación: ¿qué conocimiento especializado en matemática escolar tiene el futuro profesor respecto a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en educación básica primaria?

1.2. Justificación

Reconociendo la relación entre el desarrollo de las competencias matemáticas de los (futuros) profesores y las prácticas de aula en Educación Básica Primaria (Escudero et al., 2015; Rojas, et al., 2015b; Lima-Díaz, 2017), se hace necesario entender las condiciones a las que están sujetas estas, las relaciones y los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que se presentan en el desarrollo profesional del profesor, los cuales siguen vigentes después de distintas, reformas, investigaciones y regulaciones ante la educación matemática y la formación docente.

Las investigaciones que intentan lograr un fundamento para cambiar la forma en la que se aprenden y enseñan las matemáticas no son utilizadas (cabalmente) para potenciar los procesos, ya que, aunque se estudia la problemática de las aulas de clase, falta articulación entre la práctica educativa y los resultados investigativos. Lo anterior, se debe (en gran medida) a una desconfianza por parte de los profesores hacia las investigaciones, ya que las contemplan como generalizadas y no específicas para su quehacer docente a diario (Ebbutt y Elliott, 1990).

Por ello, es importante dar solución a cómo llegar a desarrollar esos cambios, necesarios para la formación docente y la visión global de la matemática escolar, se considera que no se puede establecer reglas exactas que permitan llevar a cabo estos cambios en los modelos educativos, ya que se limitaría el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, aun así se puede plantear una forma para generar conciencia y crítica a la formalización de competencias matemáticas y profesionales (del profesor de matemáticas) a partir del análisis profundo y reflexión constante sobre el currículo con los avances investigativos.

Son diferentes autores los que destacan y evidencian la relación que existe entre los conocimientos del profesor y su práctica educativa (Aguilar et al., 2015; Cayo y Contreras, 2020; Muñoz et al., 2015) sin embargo, existe una desconexión de la realidad de las escuelas y, por tanto, los conocimientos se ven alejados de las prácticas reales, frente a esto Carreño (2012) expresa que "Existe, pues, un divorcio entre el discurso pedagógico, por lo general creativo e innovador, y la acción docente anclada en una repetición constante con muy pocos cambios sustantivos" (p.59). En ese sentido, el desconocimiento que existe de la praxis del profesor en las aulas de clase crea un vacío epistemológico de la educación.

De igual manera se hace énfasis en ampliar y profundizar la comprensión del conocimiento que es esencial para la enseñanza, como práctica docente (Shulman, 1986; 1987) donde se establece la importancia de enfocar el objeto de investigación en el conocimiento del contenido de los profesores. Y aunque, esta perspectiva no está sujeta a ningún contexto, sí fue tomada posteriormente por autores como: Bromme (1994), Fennema y Frake (1992), Ball et al. (2008) y Carillo et al. (2018), quienes crean modelos para estudiar el conocimiento profesional específicamente del profesor de matemáticas como forma de articular con sus prácticas de enseñanza. En respuesta a estas problemáticas y para realizar una mayor cobertura teórica en la presente investigación se utiliza el modelo planteado por Carrillo et al. (2018) denominado *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, por sus siglas en inglés).

Es preciso señalar que, aunque la formación docente no es un problema reciente, actualmente estudiar el conocimiento profesional del profesor sí es uno de los desafíos principales en la línea de la formación de profesores de matemáticas (Cardeñoso, et al., 2001; Godino et al., 2012). Donde, a partir del análisis de la naturaleza de las matemáticas, las cualidades del conocimiento y, el nivel de competencia que deben poseer los profesores se logrará que su tarea de enseñanza se dé de manera efectiva.

Con ello, también es importante recalcar que existe una necesidad específica en los conocimientos relacionados con cómo se enseñan y aprenden los números racionales, específicamente en las fracciones. Donde estas son entendidas como un tema difícil ya que posee diversos significados (Ávila, 2001; González, 2005; Llinares y Sánchez, 1997 en Reyes y Sosa, 2016), lo cual, se presenta entonces como uno de los contenidos de mayor complejidad tanto para estudiantes como para profesores (Rodríguez y Navarrete, 2020).

Por lo anterior, es necesario desarrollar la presente investigación, ya que contribuye en la construcción de saberes necesarios para potenciar la primera formación (inicial) de los futuros profesores de Educación Básica Primaria, y también, el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en lo referente a los números racionales, sus propiedades y operaciones.

De igual manera, una lectura de la relación entre las dificultades y fortalezas en la formalización de los conocimientos matemáticos de los futuros profesores, el análisis frente a la propuesta curricular colombiana para la Educación Básica Primaria y, las tareas formativas realizadas por los futuros profesores en la presente investigación, permitirá una articulación adecuada y pertinente con la formación docente en competencias matemáticas desde la realidad emergente en la escuela. En consecuencia, lograr sentar las bases para formular una propuesta de educación de calidad, desde la perspectiva de educación matemática de los profesores, que redundará en diferenciadas experiencias de aprendizaje de sus estudiantes.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Caracterizar el conocimiento especializado que tienen los futuros profesores de primaria sobre la enseñanza de las fracciones heterogéneas.

1.3.2. Objetivos Específicos

Reconocer los conocimientos especializados que evidencian los futuros profesores de Educación Básica Primaria en el planteamiento de una tarea matemática sobre fracciones heterogéneas.

Identificar los conocimientos especializados que presentan los futuros profesores de primaria sobre la enseñanza de fracciones desde los subdominios del modelo MTSK.

Establecer los conocimientos básicos para la enseñanza de las fracciones en la formación inicial de futuros profesores.

Capítulo 2. Aproximación teórica

Este capítulo está comprendido por estudios relacionados con el tema de investigación (antecedentes), es decir, los estudios previos sobre los conocimientos de (futuros) profesores de educación básica primaria sobre las fracciones y cómo influyen estos en sus prácticas educativas; y, también, comprende los fundamentos conceptuales y teóricos que sustentan este trabajo bajo la perspectiva del modelo MTSK.

2.1. Antecedentes

Para el desarrollo de esta investigación fue necesario realizar una revisión de bibliografía, tales investigaciones son antecedentes que dan soporte al presente estudio permitiendo recolectar y analizar información sobre la problemática planteada. Estas investigaciones están enfocadas en el uso del modelo MTSK para analizar los conocimientos sobre fracciones que tienen los profesores y futuros profesores de Educación Básica Primaria; con base en ello, se estructura el apartado de los antecedentes en dos categorías: (i) investigaciones sobre la caracterización del conocimiento especializado de fracciones de los profesores de Educación Básica Primaria; y, (ii) investigaciones sobre la caracterización del conocimiento especializado de fracciones de futuros profesores de Educación Básica Primaria.

Estas investigaciones están enfocadas en analizar o caracterizar el conocimiento especializado de profesores (futuros) de matemáticas de Educación Básica Primaria en relación con la enseñanza de los números racionales. Lo cual, parte de la necesidad de entender por medio del estudio, el conocimiento del profesor en sus actividades de enseñanza, para así interpretar el trabajo que se está realizando y, ayudar por medio del análisis de información la práctica docente (Rojas et al., 2012).

Por otra parte, las investigaciones relacionadas con los racionales (entendiendo el término *racional* como fracción o parte de un todo) han sido de interés recurrente a través de los años, puesto que presenta una gran dificultad de aprendizaje para los alumnos, específicamente en lo referente a las fracciones (Kieran, 1976). Y de la misma manera, se establecen dentro del currículo colombiano, como parte del pensamiento numérico, el cual permite la construcción de sistemas conceptuales para el buen desarrollo del estudiante en su formación académica (MEN, 2006).

En cuanto a la primera categoría, los objetivos están enfocados en analizar ese conocimiento matemático especializado que el profesor de Educación Básica Primaria pone en juego para enseñar números racionales (Carillo et al., 2013; Peña Aguayo, 2018; Rojas et al., 2015). Y, además, cómo puede aplicarse la Ingeniería Didáctica y la resolución de problemas para potenciar y facilitar este aprendizaje (Esparza y Lizarde, 2021).

En cuanto a metodologías utilizadas, se establece que las investigaciones halladas están enmarcadas en el enfoque cualitativo asociado al paradigma interpretativo (Carillo et al., 2013; Esparza y Lizarde, 2021; Peña Aguayo, 2018; Rojas et al., 2015), ya que permiten indagar y comprender la realidad. En conjunto, los autores utilizan el método de análisis de contenido, como forma ideal para interpretar los conocimientos del profesor, a partir de las categorías establecidas para el análisis (vinculadas al modelo MTSK) y, además, por los datos recogidos representados en notas de campo, entrevistas y observación de la práctica docente.

Así mismo, las investigaciones evidencian temáticas específicas asociadas al enfoque de estudio; en primer lugar, los autores reflexionan sobre el avance que ha tenido el interés investigativo sobre el conocimiento profesional de los profesores desde Shulman (1986; 1987) y cómo lo han relacionado específicamente en el área de las matemáticas (Ball et al., 2008; Bromme, 1994; Carillo et al., 2013). Además, plantean la definición y problemática escolar referente a la enseñanza y aprendizaje de los racionales desde un enfoque transversal (Zakaryan y Ribeiro, 2016).

Por otra parte, se relaciona la necesidad de la investigación con la problemática que existe sobre la formación de profesores en matemáticas (Rojas, et al., 2015) haciendo alusión al análisis del conocimiento profesional del profesor para caracterizar qué tienen y qué falta para desarrollar su práctica docente. Además, Esparza y Lizarde (2021) exponen las diferentes dificultades que existen en el campo de la enseñanza de las matemáticas (Lizarde et al., 2015) para reflexionar sobre el cuál es el avance que se ha realizado y por qué al ser un tema recurrente no se evidencian cambios significativos en el quehacer educativo.

Finalmente, estas investigaciones concluyen que en cada caso las fracciones se están enseñando y entendiendo como parte-todo y cociente (Carillo et al., 2013 Peña Aguayo, 2018; Rojas et al., 2015) y que, además, la expresión simbólica forma parte fundamental en la comprensión de este significado. Por otra parte, se evidenció que la enseñanza de los racionales se está entendiendo únicamente como la enseñanza de números fraccionarios (Rojas et al., 2015), lo cual sesga la amplitud y relaciones de los racionales con otros conjuntos numéricos.

Se deriva también de las conclusiones, que el profesor es quien direcciona la forma en la que está aprendiendo el estudiante según cómo se aborda e introduce el tema de fracciones (Carillo et al., 2013; Esparza y Lizarde, 2021; Peña Aguayo, 2018; Rojas et al., 2015) puesto que debe contemplar las necesidades, recursos, ejemplos y estrategias asertivamente para lograr un aprendizaje funcional.

En cuanto a la segunda categoría, vinculada particularmente a aquellas investigaciones que relacionan el conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas con la enseñanza de los números racionales; algunas tienen como objetivo analizar cuáles son los conocimientos especializados que tienen los futuros profesores de Educación Básica primaria con respecto a lo necesario para enseñar fracciones con aspectos relacionados a la representación, las operaciones y comprensión de las mismas (Arteaga y Arnal, 2022; Liñán et al., 2014; Lizarde et al., 2017; Montes et al., 2015; Reyes y Sosa, 2016; Rodríguez, 2015).

Además, Flores et al. (2022) pretenden analizar, por medio del diseño e implementación de una tarea formativa, la comprensión que tienen los futuros profesores sobre las fracciones y sus operaciones; y, por otra parte, cómo a partir de la formulación y rediseño de estas tareas se puede transformar el conocimiento que tienen los futuros profesores para potenciar en los estudiantes sus procesos de aprendizaje (Valenzuela et al., 2019). Cada investigación mencionada anteriormente, se enfoca en entender cómo fortalecer el conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde la formación de profesores, para identificar las fortalezas y debilidades relativos a las fracciones.

Respecto a la metodología, las investigaciones se enmarcan en dentro del paradigma interpretativo de tipo descriptivo en el enfoque cualitativo, ya que permite comprender por medio de la indagación el porqué de los fenómenos que se presentan en el aula y su relación con la realidad (Pérez, 1996). Así mismo, las investigaciones se contemplan dentro del marco de referencia del MTSK, haciendo énfasis en los subdominios para el análisis de categorías.

Además, dentro de las investigaciones se hace uso del cuestionario (Flores et al., 2022; Liñán et al., 2014; Montes et al, 2015; Rodríguez, 2015) de la entrevista semiestructurada (Reyes y Sosa, 2016) y el diseño de tareas formativas (Arteaga y Arnal, 2022; Lizarde et al., 2017; Valenzuela et al., 2019), como instrumentos para recolectar la información pertinente sobre cómo son entendidas las fracciones por los futuros profesores y cuál es el uso que le dan al conocimientos que tienen; lo anterior, con el fin de reflexionar sobre las prácticas, definir cuáles son las falencias y con ello, reestructurar la forma en la que se está enseñando.

Las investigaciones están enmarcadas en referentes teóricos que hacen alusión al modelo MTSK, la formación docente y las fracciones, específicamente en cuanto a su enseñanza y aprendizaje. Para entender mejor esta relación algunas investigaciones (Flores et al., 2022; Liñán et al., 2014; Rodríguez, 2015; Valenzuela et al., 2019) usan la resolución de problemas como un procedimiento que puede potenciar la forma en la que se aprenden las fracciones (Carillo 1996; Lambdin, 2003; NCTM, 2000; Xie et al., 2017). Otros referentes teóricos que tienen en cuenta las investigaciones de Arteaga y Arnal (2022), Flores et al. (2022) y Reyes y Sosa (2016) para comprender la problemática planteada, es reconocer la importancia de las representaciones gráficas en la construcción de conocimiento matemático en los estudiantes, ya que poder identificar un concepto en diversas representaciones contribuye a la comprensión de este (Goldin, 2003; Lesh et al., 1987).

Para las conclusiones, las investigaciones establecen que existe un déficit en el conocimiento matemático de los fututos profesores de Educación Básica Primaria con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones (Arteaga y Arnal, 2022; Flores et al., 2022; Liñán et al., 2014; Reyes y Sosa, 2016; Rodríguez, 2015; Valenzuela et al., 2019) lo cual se evidencia en las tareas propuestas y desarrolladas por ellos mismos, donde el conocimiento es incompleto. Además, se plante al modelo MTSK como un orientador en la acción docente (Flores et al., 2022; Lizarde et al., 2017) ya que este puede denominarse como: una guía para formar a los profesores.

Además, reiteran en la necesidad de que los futuros profesores tengan un conocimiento especializado para enseñar fracciones (Liñán et al., 2014; Reyes y Sosa, 2016; Rodríguez, 2015; Valenzuela et al., 2019) ya que así el profesor puede enseñar, darle un sentido a su conocimiento y "jugar" con este para favorecer el aprendizaje en sus estudiantes por medio de diferentes tareas, ejemplos, recursos y estrategias.

Cabe recalcar que, dentro de la búsqueda de antecedentes en Colombia ninguna cumplió con los criterios de búsqueda enfocados a esta problemática en específico. Sin embargo, es importante resaltar las recientes investigaciones que se han realizado entre los años 2021 y 2023 por Jenny Patricia Acevedo-Rincón e Iván Andrés Padilla Escorcia y, que tiene como enfoque el modelo MTSK y su relevancia en la educación matemática. Inicialmente, se encuentra la investigación que vincula el modelo con la enseñanza de la función trigonométrica seno mediando su enseñanza con las TIC (2021) la cual caracteriza el conocimiento que tiene un profesor para orientar este tema en la educación secundaria.

También, se evidencia el estudio sobre la enseñanza de la modelación de la elipse enfocada en el MTSK y el uso de recursos tecnológicos (2022), en la cual establecen que para que el aprendizaje sea de manera efectiva, el profesor debe tener saberes disciplinares, didácticos, pedagógicos y de las TIC. Por otra parte, en otro estudio, realizan una caracterización del conocimiento especializado utilizando el MTSK, donde se evidencia que este permite entender cuáles son esos saberes que necesita el profesor para enseñar matemáticas en cualquier nivel escolar (2022).

Finalmente, en el presente año, se han realizado dos investigaciones, la primera, además, de los dos autores mencionados anteriormente también participa Miguel Ángel Montes, allí exponen la caracterización del conocimiento del profesor utilizando la modelización y las TIC para enseñar matemáticas (2023), el análisis es comprendido desde tres subdominios del modelo, lo cual, concluye evidenciando la existencia de una relación entre estas y, la necesidad de comprender estos conocimientos como base fundamental para la enseñanza. Y, por otra parte, la segunda investigación tiene como objetivo determinar cuál es el conocimiento especializado que tiene un profesor de decimo grado de secundaria sobre la hipérbole utilizando las TIC (2023); este estudio determinó que saber a profundidad sobre los recursos tecnológicos a emplear en el aula puede potenciar los procesos de enseñanza en los estudiantes y, además, resaltan la importancia de los conocimientos didácticos y pedagógicos que debe tener el profesor sobre el contenido que pretende enseñar, ya que estos orientan su práctica.

Estos artículos permiten evidenciar dos asuntos: i) el rezago que existe respecto a el uso del modelo y su relación con la formación de profesores en Colombia comparado con otros países en Latinoamérica; y, ii) el avance actual que ha tomado, el MTSK en la educación matemática, ya que se están dando nuevas miradas a este enfoque implicando así un desarrollo en los procesos de enseñanza y aprendizaje del país.

En síntesis, de acuerdo con las investigaciones revisadas se encuentra que la formación de los profesores en lo que respecta a los racionales (fracciones) es bastante reducida, no hay una enseñanza u aprendizaje profundo de este concepto matemático, lo cual, influye directamente en su futuro quehacer docente al momento de abordar esta temática. Por otra parte, se establece que esta problemática puede relacionarse con las múltiples definiciones que tiene el concepto de fracciones, pues se vuelve confuso al momento de aprenderlos y, por tanto, genera dificultades al momento de aprenderlo.

Así mismo, se concreta que el modelo MTSK se puede conformar como un esquema dentro de la formación de los futuros profesores de matemáticas, para que este tenga las herramientas y conocimientos necesarios para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje en cualquier contenido matemático y no solo lo referente a las fracciones. Finalmente, es importante resaltar la información encontrada en cuanto a la aplicación de este modelo en Colombia, ya que, aunque es un modelo reciente (10 años), en comparación con algunos países latinoamericanos, estos ya tienen una investigación más amplia en este campo.

2.2. Planteamientos conceptuales y teóricos

En este apartado se contempla los planteamientos teóricos y conceptuales que fundamentan esta investigación; en un primer momento se establece una línea de evolución de los modelos enfocados al estudio del conocimiento del profesor de matemáticas (Figura 1) y cómo estos determinan el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) planteado por Carrillo y otros en el año 2013; y, también, la perspectiva curricular y teórica de los racionales (fracciones).

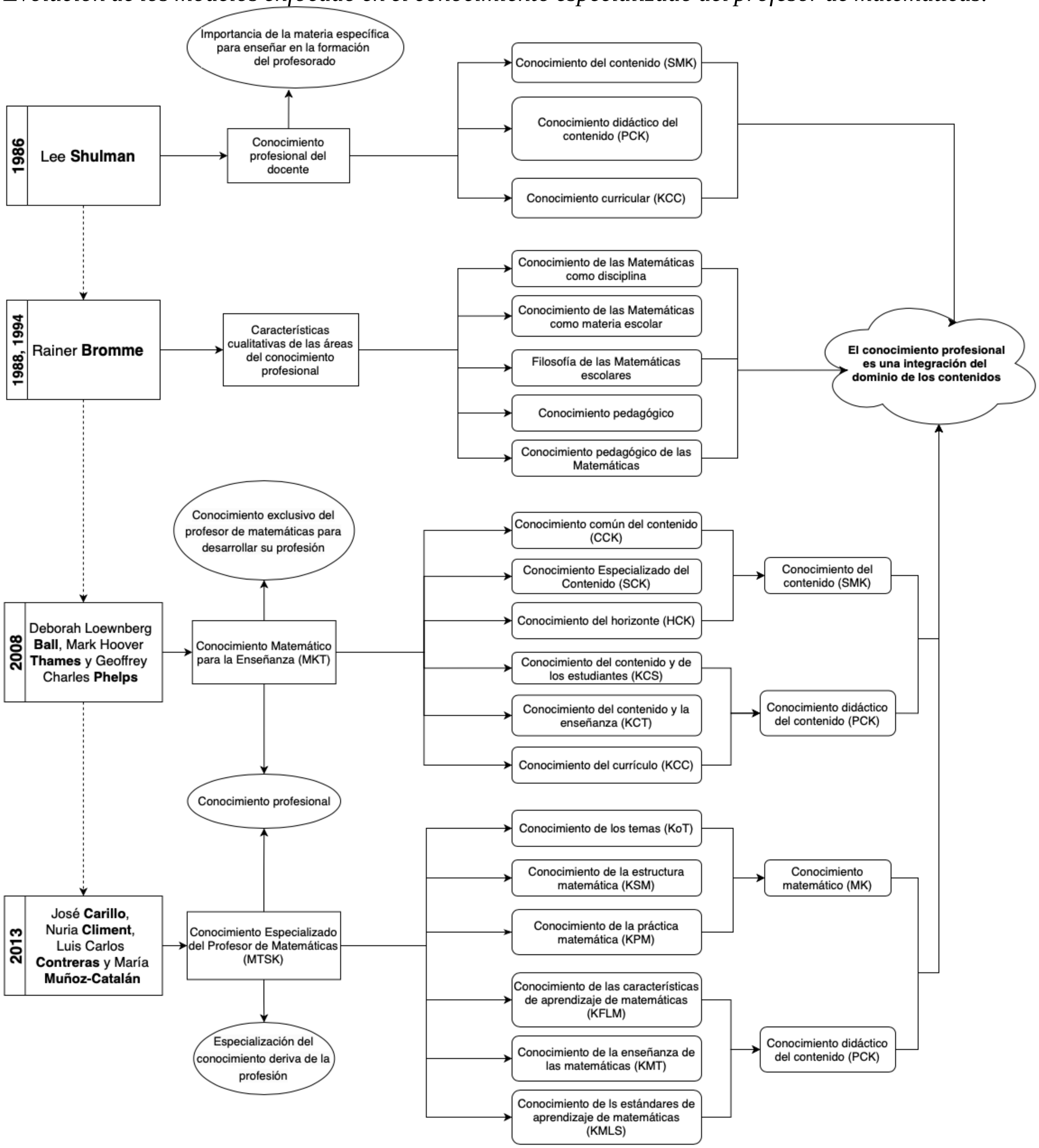
2.2.1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El profesor, al tener un papel fundamental en la educación, se convierte en foco de estudio con el fin de identificar los elementos necesarios para desempeñarse en su labor de forma efectiva y que promueva el desarrollo cognitivo, personal e integral de los estudiantes. Es por ello, que diferentes autores a lo largo de los años han estudiado este fenómeno, planteando: ¿cuáles habilidades y conocimientos debe saber un profesor para tener éxito en la enseñanza?

Lee Shulman (1986,1987) introduce el término “conocimiento profesional del docente”, el cual, está conformado por tres dominios: conocimiento del contenido (SMK), conocimiento didáctico del contenido (PCK) y conocimiento del contenido curricular (KCC). Allí plantea la importancia que tienen los saberes del profesor sobre la materia específica que va a enseñar, ya que esto es lo que permite que se puedan tomar decisiones en función de los estudiantes y la forma en la que desarrollan su aprendizaje y, además, ubica como eje de desarrollo la profesionalización docente.

Figura 1.

Evolución de los modelos enfocado en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.



Nota. La figura es una síntesis del avance histórico que se ha realizado respecto al conocimiento específico que deben tener los profesores de matemáticas.

Posteriormente, Bromme (1994) tomando como referencia a las ideas expresadas por Shulman (1986), reconoce que el conocimiento de la materia (matemáticas) no es suficiente, sino que el profesor también debe tener unas competencias pedagógicas, lo cual, permite la integración de capacidades para enseñar teniendo en cuenta las necesidades, las estrategias y teorías de enseñanza. Específicamente para las matemáticas, establece un modelo que expone las características cualitativas (dominios) del conocimiento de esta área, los cuales serían: matemáticas como disciplina, matemáticas como materia escolar, la filosofía de las matemáticas escolares, el conocimiento pedagógico y el conocimiento pedagógico de las matemáticas; haciendo énfasis en la diferencia entre las dos últimas, estableciendo la importancia de reconocer que la disciplina tiene un enfoque particular.

Más adelante, con una propuesta más concreta, respecto a la de Shulman en 1986, y para establecer una diferencia entre los conocimientos de un profesional y los del profesor de matemáticas, Ball et al. (2008) plantean el modelo "Conocimiento matemático para la enseñanza" o conocido por sus siglas también "MKT". Este realiza énfasis en la exclusividad del conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas para desarrollar en su profesión, este conocimiento se divide en dos dominios: el conocimiento del contenido (SMK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK), los cuales, a su vez, se dividen en tres subdominios.

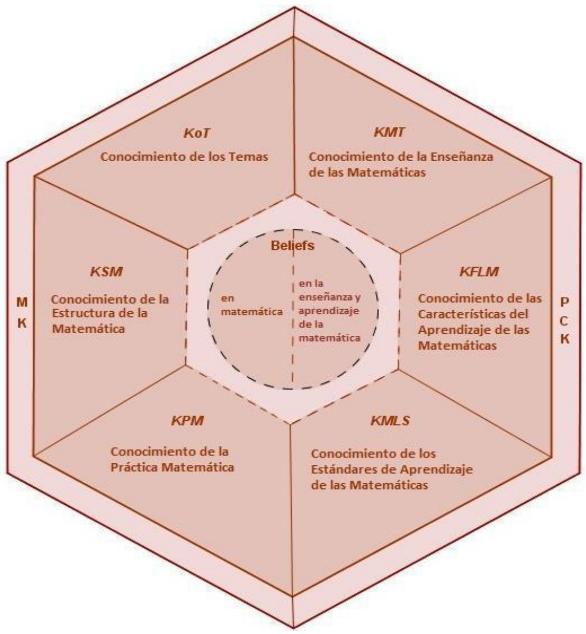
El primero, comprende el conocimiento común del contenido (CCK), el conocimiento especializado del contenido (SCK) y el conocimiento del horizonte matemático (HCK); los cuales hacen referencia a los saberes, destrezas, habilidades, entendimiento para resolver los problemas expuestos por los estudiantes y de su misma profesión y, además, entender la linealidad y conexiones que tiene cada contenido matemático en el trayecto educativo. Por otra parte, el segundo dominio, abarca los conocimientos relacionados a la reflexión que debe hacer el profesor respecto a su práctica para resolver las dificultades que se presenten, las estrategias y métodos más adecuados para enseñar un contenido y, las capacidades que debe tener el estudiante al culminar su etapa escolar; estos se enmarcan en los subdominios: (i) conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), (ii) conocimiento del contenido y la enseñanza y, (iii) conocimiento del contenido curricular (KCC).

Con base en estos enfoques mencionados anteriormente, que dieron una visión más amplia sobre el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas para abordar su proceso de enseñanza, el Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, expresa que aún se evidencian problemas con estos modelos, particularmente en términos de las delimitaciones entre los subdominios y las acciones frente a las dificultades del conocimiento (Flores et al., 2013).

Es por lo anterior, que Carrillo et al. (2013) plantean el “Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK), el cual “pretende conformar una herramienta útil para analizar y comprender qué conocimiento posee y/o moviliza un profesor de matemáticas en su actividad profesional” (Climent y Montes, 2022, p. 28). Es por ello, que se rige desde dos características: el valor pedagógico de la disciplina y su relación con el contenido matemático; lo cual se ve reflejado en su esquema (Figura 2), el cual se divide en dos dominios: el conocimiento del contenido matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK); y, del mismo modo, cada uno en tres subdominios (seis en total), respectivamente para el MK, por tanto se establecen el conocimiento de: los temas, la estructura de las matemáticas y la práctica de la matemática; y, en el PCK se configuran el conocimiento de: la enseñanza de las matemáticas, las características del aprendizaje de las matemáticas y, los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Figura 2.

Esquema del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK).



Fuente: Muñoz Catalán et al. (2015).

Ahora bien, el MK se estructura por: el conocimiento de los temas (KoT), el cual abarca los saberes específicos de cada contenido matemático teniendo en cuenta sus fundamentos como disciplina, desde la perspectiva escolar y, las conexiones intra-conceptuales de estos; por ello, se contempla para el KoT cuatro categorías: fenomenología y aplicaciones; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación y procedimientos.

El segundo, el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), contempla los saberes del profesor de respecto las conexiones de la matemática y sus elementos, estableciendo así cuatro categorías: conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares. Por último, el tercer subdominio, el conocimiento de la práctica matemática (KPM), abarca toda actividad matemática que realiza el profesor para crear matemática en sus estudiantes; con relación a este subdominio, el modelo no establece unas categorías, sin embargo, se han definido algunas que están ligadas a este conocimiento. Delgado Rebolledo et al., (2022) establecen cuatro categorías para el KPM: (i) conocimiento de la práctica de demostrar, (ii) conocimiento de la práctica de definir, (iii) conocimiento de la práctica de resolver problemas y, (iv) conocimiento del papel del lenguaje matemático.

En cuanto al dominio del modelo referente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el PCK está conformado por: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que se define como aquellos saberes que tiene el profesor sobre el contenido matemático que aborda, el cual influye en los procesos de enseñanza, los conocimientos se conforman desde teorías, experiencias o reflexiones; por tanto, se establecen las categorías: (i) teorías de enseñanza de las matemáticas (personales e institucionales), (ii) recursos didácticos (físicos y digitales) y, (iii) estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Por otra parte, se establece el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM), el cual centra su atención en aquellas particularidades de los contenidos que puedan intervenir en los procesos de aprendizaje; los cuales ciertamente presentan una mayor claridad a través de la experiencia, sin embargo, se contemplan cuatro categorías que aportan aspectos influyentes en este subdominio: (i) teorías de aprendizaje matemático, (ii) fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas, (iii) formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático y, (iv) aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.

Por último, el subdominio que contempla los fundamentos del currículo y una revisión crítica de estos es el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), es decir, son los saberes que tiene el profesor sobre lo que está establecido para que el estudiante aprenda en cada nivel escolar (profundidad y linealidad). Para este conocimiento, con fines de organización y análisis se consideran tres categorías: (i) resultados de aprendizaje esperados, (ii) conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y, (iii) secuenciación de temas.

En esta investigación, el modelo MTSK permite indagar los saberes que tienen los futuros profesores respecto al significado de los racionales y su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de estos, específicamente en lo referente a las fracciones heterogéneas y las operaciones sumas y restas. Ya que si bien, es necesario este análisis por su trascendencia en la configuración académica del profesor, también se es necesario determinar cómo se están dando los procesos de formación y la presencia de este concepto.

2.2.2. Concepciones y creencias sobre las matemáticas y su enseñanza

Como punto de referencia al hablar sobre el profesor de matemáticas, se debe considerar también, las creencias y concepciones que están arraigados a este, ya que ambos elementos son fundamentales en la construcción del conocimiento. Se entiende por tanto, que las concepciones son estructuras que abarcan aspectos cognitivos como las creencias, conceptos, normas, o significados, que afectan la percepción y el razonamiento (Moreno y Azcárate, 2003). Sin embargo, la subjetividad disminuye cuando se fundamenta en una base filosófica que explica la esencia de los elementos propios de la disciplina. Por otra parte, las creencias son conceptos simples que abarcan el conocimiento que tiene una persona y que afecta directamente en el trabajo que ejerce (Mora y Barrantes, 2008); es por ello, que estas ejercen una influencia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación.

En los profesores de matemáticas, el conocimiento que tienen es el producto de las experiencias que tuvo en su mismo proceso de formación (escuela y universidad) e incluso experiencias personales, concluyendo en la creación de un sistema repetitivo de modelos formativos. Las concepciones sobre las matemáticas tienen un impacto significativo en las creencias relacionadas con diversos aspectos de esta área. En lo que respecta a la esencia de las matemáticas, es relevante destacar las tres visiones principales que permiten descubrir las estructuras y sistemas de creencias que influyen en la enseñanza (Ernest, 1988), como lo son la concepción instrumentalista, la concepción platónica y, la concepción de resolución de problemas.

Es por tanto, que las creencias desempeñan un papel adaptativo al permitir que los docentes se ajusten a diversas situaciones de la mejor manera posible (Pajares, 1992 y Thompson, 1992). Cuando el profesor se encuentra a situaciones de poca claridad enfrenta esfuerzos cognitivos que pretendan responder a la necesidad está viviendo, y si los conocimientos no solventan la problemática, terminará recurriendo a sus propias concepciones y creencias, que en cuestión, son inconsistentes, limitados y sin fundamento teórico.

2.2.3. Los números fraccionarios

La educación en Colombia está comprendida bajo ciertos documentos que fijan metas y competencias que permiten (en supuesto) a los estudiantes formarse a lo largo de su etapa escolar. En lo referente a la educación matemática, la formación responde a las necesidades globales que se debaten desde los diferentes sujetos implicados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (profesores, investigadores, estudiantes y expertos). Así mismo, responde a la expresión *ser matemáticamente competente* (MEN, 2006), es decir, un aprendizaje significativo y comprensivo, donde se de en ambientes enriquecidos por la actividad matemática que allí se promueva y que posibilite desarrollar competencias más avanzadas a lo largo de su ciclo escolar.

Por su parte, el quehacer matemático está regido bajo tres aspectos (MEN, 1998): (i) los procesos generales: haciendo referencia los procedimientos vinculados al aprendizaje de las matemáticas como lo son: el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (ii) los conocimientos básicos, referidos a los procesos específicos del pensamiento matemático que se desarrollan; estos son: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional en conjunto con sus respectivos sistemas. Y, (iii) el contexto, entendido como el entorno en el que el estudiante convive y puede darle un sentido a las construcciones mentales que crea respecto a los contenidos matemáticos que aprende, lo anterior, por medio de situaciones problemáticas.

Estos aspectos están estructurados en un cubo (Figura 3) que considera una visión completa en todo momento de los tres elementos, dando a entender que en el quehacer matemático están presentes cualquiera de estos rasgos, y que se pueden interrelacionar y dinamizar según sea necesario; es decir, son cuestiones que no se dan asiladas ni en un orden específico, sino que puede darse una correlación entre cualquiera de sus elementos.

Figura 3.

Estructura curricular del quehacer matemático en la escuela.

Nota. Fuente: MEN (1998).

Centrados en el enfoque investigativo, se profundizará el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el cual se presenta como uno de los conocimientos más estudiados por su amplia constitución matemática. Se entiende entonces como:

> […] actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación (MEN, 2006, p. 58).

Es decir, un conocimiento que es adquirido a medida que el estudiante piense los números y los use en su entorno. Además, dentro de este pensamiento se comprende la enseñanza de la aritmética y, por tanto, el conocimiento de los conjuntos numéricos. Particularmente, en lo referente a los números racionales positivos, también llamados "fraccionarios", se definen como "[…] la expresión de una cantidad dividida entre otra; es decir que representa un cociente no efectuado de números enteros" (Esteban, 2015, p. 2) los cuales están conformados por un numerador (porción de una cantidad) y un denominador (partes en las que se divide la cantidad total), siendo a y b números naturales ($\mathbb{N}$).

Desde los Lineamientos curriculares, ellos fraccionarios son entendidos no solo como un contenido que se desarrolla a lo largo de los niveles escolares, sino que también, tiene conexiones con otros saberes, ayudando a simplificar un contenido o siendo un conocimiento necesario para avanzar en un procedimiento más complejo.

En la Educación Básica Primaria, los estudiantes deben entender las fracciones como una forma de representar partes de un todo y aprender a reconocer fracciones simples y comunes, sumar y restar fracciones con el mismo denominador y representar fracciones como decimales y porcentajes. En síntesis, la comprensión de las fracciones es un tema fundamental dentro del currículo colombiano de matemáticas, que busca desarrollar habilidades matemáticas esenciales en los estudiantes con el fin de utilizar estas competencias en situaciones cotidianas y laborales que se requieran.

Capítulo 3. Aproximación metodológica

En este apartado se detalla cómo se llevará a cabo el proceso y metodología de la presente investigación. Se define inicialmente la perspectiva del enfoque cualitativo, en relación con el paradigma interpretativo y la investigación de tipo descriptivo; posteriormente, se presenta la estrategia analítica de los datos, la cual corresponde a análisis de contenido. También, se abordan las fases de la investigación: preparatoria, de campo, analítica e informativa y, por último, la recolección de información, específicamente las técnicas e instrumentos.

Enmarcados en la investigación educativa, el enfoque definido es el cualitativo, ya que comprende las interacciones y relaciones que se dan el proceso escolar teniendo un contacto directo con los entes involucrados. Y, así mismo, lograr explicar y dar sentido a los sucesos que ocurren en el ámbito social y educativo., haciendo énfasis en entender el significado de las conductas humanas desde el punto de vista de sus propios actores (Gómez, 2007).

Mediante la investigación cualitativa es posible construir una visión detallada de la realidad de los informantes en su entorno; en este caso el contexto a estudiar es los conocimientos de los futuros profesores con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, lo cual, se asocia en cómo se desarrollará su práctica desde una situación ideal propuesta como una tarea matemática escolar. Es por ello, que se realiza una interpretación a profundidad sobre esos conocimientos especializados de fracciones para lograr la transformación de la praxis (futura) y, por ende, el desarrollo de conocimiento matemático y formación docente (Sandín, 2003).

En ese sentido, respondiendo a la exploración y comprensión de la realidad, la investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo, ya que en busca de entender cómo se dan los proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros profesores, también interpreta la forma en la que se está dando su formación docente, es decir “trata de comprender la realidad circundante en su carácter específico (de la Educación Básica Primaria); se trata de develar por qué un fenómeno (escolar) ha llegado a ser así y no de otro modo" (González, 2003, p. 130). Se refiere, por tanto, a una metodología que da prioridad a la transformación de la realidad a partir de una contextualización adecuada.

Siguiendo la línea mencionada previamente, la investigación está enmarcada en la diversidad investigativa, la cual muestra distintos tipos de estudios según ciertas características y de la acción a desarrollar. Esta investigación, es de tipo descriptivo, ya que se centra en describir el hecho a estudiar, en "caracterizar un fenómeno (escolar-universitarios) o situación concreta, indicando sus rasgos peculiares o diferenciadores" (Egg, 2011). Es, además, situada en esta metodología descriptiva porque permite mediante el detalle e interpretación del conocimiento sobre fracciones de los futuros maestros, elaborar un que explique los datos recolectados.

3.1. Participantes

El escenario en el cual se desarrolla la investigación está establecido por estudiantes (futuros profesores) de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander en Bucaramanga. Para la unidad de estudio, se estableció que la muestra de la población se rige según los tres criterios: (i) estudiantes de licenciatura en Educación Básica Primaria, (ii) estudiantes que matriculados en el curso Pensamiento Matemático II, y (iii) estudiantes que tuvieran un vínculo con el modelo MTSK desde la aprobación del curso Pensamiento Matemático I.

En ese sentido, la tarea matemática escolar se realiza a una población de 28 estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander, los cuales cumplen con los criterios establecidos.

3.2. Técnicas e instrumentos.

En esta investigación se hace uso de uso de técnicas e instrumentos que corresponden a la investigación cualitativa y responden a los intereses del estudio. Estos se establecen según las fases de investigación planteadas para el desarrollo del análisis como se muestra en la Tabla 1; para la primera fase se utiliza la técnica análisis de documentos con el material: EBC, Lineamientos curriculares, el programa de asignatura de Pensamiento Matemático II, entre otros artículos de interés.

Posteriormente, en la segunda fase, se realiza una tarea matemática escolar tomando por referencia lo enunciado en el trabajo realizado por Muñiz et al. (2022)[1], los futuros profesores de tipo cuestionario (Apéndice B) que permitirá observar los conocimientos implementados en la enseñanza de las fracciones.

Por último, en la fase tres, se realiza un análisis de contenido a las tareas resueltas por los sujetos de estudio con ayuda de un esquema en Excel como forma de clasificación de la información y concretar categorías y, finalmente, si es necesario se realizan entrevistas semiestructuradas para ampliar o aclarar los datos recolectados.

[1] Esta tarea ha sido previamente implementada por la directora de la propuesta, bajo el proyecto de investigación VIE-2845 titulado: “Tareas para el desarrollo del pensamiento matemático. Un estudio teórico desde el modelo del conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas en Educación Básica Primaria”, con otra población de estudiantes de Licenciatura en Educación Básica Primaria, de la cual los resultados aún no han sido publicados.

Tabla 1.

Técnicas e instrumentos utilizados en relación con las fases de investigación.

Fases	Técnica	Instrumento
Primera fase	Análisis de documentos	➢ Estándares Básicos de Competencias (EBC) ➢ Lineamientos Curriculares ➢ Programa de la asignatura Pensamiento Matemático II
Segunda fase	Tarea matemática escolar. Tipo cuestionario	➢ Taller con orientaciones de preguntas abiertas (Adaptación Muñiz et al, 2022)
Tercera fase	➢ Análisis de contenido ➢ Entrevista	➢ Formato Excel, clasificación de información ➢ Semiestructurada

La Tabla 1 evidencia la relación entre las técnicas e instrumentos a utilizar en cada fase de la investigación; la primera fase corresponde a la *preparatoria*, la segunda fase a la *de campo*, y la tercera fase a la *analítica*. En cada una, se hace uso de técnicas en específico que permiten dar solución al objetivo planteado para cada fase, como lo es: (i) análisis de documentos, (ii) tarea matemática escolar y (iii) análisis de contenido y entrevista; y, así mismo, para cada técnica su instrumento correspondiente: (i) documentos implicados en la investigación, (ii) la tarea en forma de cuestionario con preguntas abiertas y, (iii) esquema de Excel y entrevista de tipo semiestructurada.

3.2.1. Análisis de documentos

Dentro de los datos a analizar en la investigación cualitativa, se encuentran los documentos[2], los cuales se establecen como un material de registro y fuente de provechosa información. El análisis de documentos se utiliza para comprender el contexto del entorno y las

[2] La investigadora posee la información completa de este estudio y de ser necesario los documentos analizados, se proporcionaran por medio de una solicitud.

experiencias o situaciones que se dan en él, así como sus funciones cotidianas y extraordinarias (LeCompte y Schensul, 2013; Masón, 2018 y Zemliansky, 2008 en Sampieri, 2018). Es decir, son documentos que ayudan a comprender el fenómeno de la investigación.

Cabe resaltar, que a estos documentos se les debe verificar su autenticad para la legitimidad del estudio. Además, se hace uso de este instrumento ya que se establece como principal ventaja:

> Permiten al investigador estudiar el lenguaje escrito y gráfico de los participantes. Es una forma no invasiva cuando no se les pide elaborarlos, y en este caso, pueden ser consultados en cualquier momento y ser analizados cuantas veces sea preciso. No es necesario dedicar tiempo a transcribirlos. (Sampieri, 2018, p. 464).

Esto indica que es un análisis que permite conocer los precedentes y el entorno en el que se desarrollan los participantes del estudio y, así mismo, elaborar conexiones con los demás instrumentos e información recolectada.

3.2.2. Entrevista

La entrevista es una técnica de investigación utilizada para obtener información directa de las personas sobre un tema específico, implica una interacción entre el interrogador y el encuestado, quien es el que proporciona la respuesta. Sampieri (2018) la definen como “una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)” (p.449). Este tipo de interacción está dirigido bajo un propósito definido en función del estudio, es por ello, que el investigador debe realizar una preparación previa para llevarla a cabo (Cerda, 1993). El plan comprende: el contacto inicial, los principios directivos de la entrevista, las primeras versiones de las preguntas, la población entrevistada, la validación del instrumento, y los entrevistadores (capacidad, preparación y reflexión).

En un primer momento, se realiza el primer contacto entre el entrevistador y el entrevistado, se debe procurar establecer una relación amena y empática para crear una atmósfera de confianza, lo cual influye en el desarrollo de la entrevista. Posteriormente, se debe evaluar rigurosamente los tipos de preguntas que se realizan para adjuntar en el instrumento, pues de esto depende la claridad y el éxito del acto investigativo; además, antes de implementar las preguntas, el entrevistador debe determinar la selección de la muestra, donde ya esté caracterizada bajo unos criterios que respondan a las necesidades investigativas.

Como parte del proceso, se debe también validar el instrumento, esta validación debe realizarse por expertos en el campo, con el propósito de resolver cuestiones técnicas y detonar posibles fallos en la entrevista. Finalmente, parte crítica del proceso, es el entrevistador, quien es el que debe promover la suficiente creatividad para crear preguntas que respondan a los objetivos y así obtener el mayor rango de información para la investigación.

Cabe resaltar que, debido a la naturaleza y diversidad investigativa, existe una variedad específica de entrevistas, que se armonizan según el tipo estudio, los objetivos y el investigador. En el caso de las entrevistas semiestructuradas, se establecen desde un modelo de entrevista, a la cual pueden adicionarse preguntas, si el entrevistado lo ve necesario, para obtener más información (Sampieri, 2018). Es entonces, que este tipo de entrevista está dirigido bajo unas preguntas específicas, pero también da la posibilidad para que la interacción entre el entrevistado y el entrevistado pueda ser más amplia, si se es necesario, permitiendo así una libertad de información que enriquece la investigación.

3.3. Descripción del proceso metodológico

El diseño de investigación orienta al investigador en el universo de la experiencia y describe las acciones que será necesario tomar para lograr el objetivo previsto. Por un lado, la investigación cualitativa parte de observadores capacitados para ofrecer interpretaciones imparciales, comprensibles y detalladas del entorno social al que realizó su reconocimiento, así como de las vivencias de otras personas y, además, se trata de investigaciones próximas a individuos y sujetos reales, que existen en el mundo y pueden brindar información sobre sus vivencias, percepciones y valoraciones (Rodríguez et al.,1996). Es, por tanto, que la investigación cualitativa permite profundizar, en esencia, el conocimiento sobre fracciones desde los propios actores, es decir, futuros profesores de matemáticas.

Según Rodríguez et al. (1996) existen cuatro etapas o fases principales en que contemplan el desarrollo de la investigación cualitativa: la fase preparatoria, la fase de trabajo de campo, la fase analítica y la fase informativa.

3.3.1. Fase preparatoria

Consta de dos etapas: reflexión y diseño. En cuanto a la etapa de *reflexión,* se es necesario identificar el tema de estudio, el investigador busca toda la información posible sobre él. Es decir, se configuran las cosas, pero se miran desde una perspectiva amplia sin entrar en demasiados detalles. En la etapa de *diseño* se realizan las siguientes preguntas: ¿Qué diseño se ajusta mejor al conocimiento, la experiencia y las preferencias éticas y políticas del investigador? ¿Quién será investigado? ¿Qué métodos de investigación se utilizan? ¿Qué métodos de investigación se utilizarán para la recopilación y el análisis de datos? ¿Desde qué perspectiva o marco conceptual se obtendrán los resultados?, estas preguntas describen los métodos y técnicas que se utilizan en la investigación.

En este punto, se considera en primera instancia la revisión de información (análisis de documentos), en artículos, libros, normativas curriculares y programas académicos correspondientes; posteriormente, de acuerdo con la información recolectada se concreta el plan de acción, que será la guía para lograr resolver la problemática planteada, es decir, establecer los objetivos de investigación, el tema de estudio y la perspectiva teórica que enmarca el proceso investigativo.

3.3.2. Fase de campo

Se tiene en cuenta que la investigación se hace paso a paso, los datos se comparan muchas veces, se analizan, surgen dudas y se debe superar la confusión. Esta fase se divide en dos etapas: acceso al campo y recogida productiva de datos. La etapa de *acceso al campo* se entiende como un proceso mediante el cual se accede paulatinamente a información relevante para la investigación y, se determina con la población a estudiar, es decir, estudiantes de Licenciatura en Educación Básica Primaria (fututos profesores de primaria) y realizando un reconocimiento del escenario y las oportunidades para llevar a cabo el estudio.

Para la etapa de *recogida productiva de datos* se debe asegurar la precisión del estudio, para lo cual es necesario considerar la consistencia de los datos y los criterios suficiencia. La suficiencia se refiere a la cantidad de datos recopilados, no al número de sujetos. Se determina, por tanto, una línea de estudiantes que cursan el tercer semestre del programa académico a los cuales se realiza una tarea matemática y una entrevista; la elección se realiza de acuerdo con la proximidad que tienen con el modelo MTSK y la aplicación del programa de asignatura (reestructurado) que contempla la formación en fracciones.

3.3.3. Fase analítica

Se consideran tareas prioritarias: *la reducción de datos*, la cual consiste en la simplificación, comparación, selección de información para poder hacerla accesible; *la disposición y transformación de datos*, se adhiere a la tarea de organizar y presentar la información de manera ordenada, comprensible y conveniente para abordar las preguntas de investigación, teniendo en cuenta la transformación de los datos al cambiar el lenguaje utilizado. Se realiza por medio de una categorización de la información en un cuadro de Excel, según los criterios de estudio y el modelo MTSK. Todo esto le permite notar conexiones y contradicciones entre datos dispares, sacar conclusiones y confirmarlas frente a otros escenarios, esto llevará a la obtención y verificación de conclusiones. Para este análisis se utilizará un esquema (Tabla 2) en Excel que permitirá clasificar la información en relación con el participante, la tarea y las categorías de análisis.

La Tabla 2 parte de los dominios y subdominios del modelo MTSK, su relaciona con cada pregunta de la tarea matemática y las categorías asociadas a estas. Además, se establece el espacio para el análisis y, también, para exponer información adicional, de ser necesario. Los colores que se observan en la tabla corresponden a una clasificación por bloques o subdominios y funcionan como guía de análisis y comprensión de las categorías de información a lo largo del documento.

Finalmente, para la estrategia analítica se determina utilizar el *análisis de contenido*, ya que permite evidenciar el significado derivado del texto. Berelson (1952) definen esta estrategia como "una técnica de investigación para la descripción objetiva, sistemática cualitativa y cuantitativa del contenido manifiesto de la comunicación" (p.18). Esto implica, que se deben seguir ciertos lineamientos para validar tal información, por tanto el análisis debe ser objetivo, lo cual implica un procedimiento ya verificado por otros estudios; sistemático, es decir, que se realicen consideraciones determinadas para el análisis; cuantitativo, para medir la incidencia o repetición de características similares de contenido; cualitativo, en el poder determinar la recurrencia o ausencia de peculiaridades del fenómeno a estudiar; representativo, por la suficiencia de datos para la presencia y formación de categorías; exhaustivo, ya que debe cumplir con los objetivos y acuerdos planteados en el inicio del estudio; y, general, siguiendo las preguntas problematizadoras para concretar conclusiones de la investigación.

Es, además, el análisis de contenido, una técnica para interpretar textos ya sean escritos, grabados o pintados, es decir, de cualquier registro de datos, lo cual permite evidenciar características específicas del fenómeno y la población de estudio. A partir de lo anterior, se trata entonces de revelar a partir de las características que se evidencien en el contenido, los conocimientos de los futuros profesores sobre el aprendizaje y enseñanza de las fracciones, las cuales repercutirán en su labor docente; y, así mismo, interpretar y dar un sentido a las tareas planteadas por estos.

3.3.4. Fase informativa

Se presenta y comunica un informe cualitativo, es decir, un documento confiable que presente sistemáticamente datos que respalden la opinión del investigador y descarte explicaciones alternativas. Este informe se presenta de forma específica: se exponen los hallazgos principales y, posteriormente, se presentan los resultados que respaldan las conclusiones. Lo cual permite contextualizar al lector sobre las relaciones e interacciones que se realizan durante el estudio y, así mismo, el investigador presenta a la comunidad el fenómeno de investigación justificado en la necesidad de una realidad situada.

Tabla 2.

Tabla de clasificación para el análisis de la información.

DOMINIOS	SUBDOMINIOS	PREGUNTA	CATEGORÍAS ASOCIADAS AL SUBDOMINIO		EL/LA PROFESOR (A) DE MATEMÁTICAS CONOCE...	INFORMACIÓN ADICIONAL
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KOT	I.a	Fenomenología y aplicaciones			
		I.b	Definiciones, propiedades y fundamentos			
		I.c	Registros de representación			
		I.d	Procedimientos	¿Cómo se hace?		
				¿cuándo puede hacerse?		
				¿por qué se hace así?		
				Características del resultado		
	KSM	II.a II.b II.d	Complejización			
			Simplificación			
		II.c	Contenidos trasversales			
			Conexiones auxiliares			
	KPM	III.a	Jerarquización y argumentación para la resolución de problemas			
		III.a	Argumentación lógica			
		III.a	Lógica proposicional			
		III.a	Las formas de proceder			
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KMT	IV.a	Teorías personales o institucionales de enseñanza			
		IV.b	Recursos materiales o virtuales de enseñanza			
		IV.c	Actividades, tareas, ejemplos, ejercicios, etc., para la instrucción			
	KFLM	V.a	Teorías personales o institucionales de aprendizaje			
		V.b	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, inherentes a la matemática en general, un contenido particular o un contexto específico de aprendizaje (grupo o escenario particular)			
		V.c	Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, referentes a los procesos y estrategias de los estudiantes (habituales y no habituales), o al lenguaje o vocabulario usado comúmente al abordar un contenido			
		V.d	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico			
	KMLS	VI.a	Contenidos de nivel que se atiende			
		VI.b	Nivel de desarrollo conceptual			
		VI.c	Secuenciación con temas previos y posteriores			

Nota. Elaboración propia relacionando la tarea matemática escolar y la estructura del modelo MTSK.

Capítulo 4. Resultados

Teniendo como base el modelo MTSK, el cual permite entender a través de niveles los conocimientos que tienen los profesores de matemáticas, se establece que las preguntas de los bloques en la tarea matemática corresponden específicamente a los subdominios del modelo y, por ende, sus categorías. En la Tabla 3 se observa la relación MTSK – tarea.

Tabla 3.

Relación bloques-subdominios de la tarea matemática.

BLOQUE	PREGUNTA	SUBDOMINIO	CATEGORIA
I	I.a	KOT	Fenomenología y aplicaciones
	I.b	KOT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	I.c	KOT	Registros de representación
	I.d	KOT	Procedimientos
II	II.a	KSM	Conexiones de complejización
	II.b	KSM	Conexiones de complejización
	II.c	KSM	Conexiones transversales
	II.d	KSM	Conexiones de complejización
III	III.a	KPM	Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas
IV	IV.a	KMT	Teorías personales o institucionales de enseñanza
	IV.b	KMT	Recursos materiales o virtuales de enseñanza
	IV.c	KMT	Actividades, tareas, ejemplos, ejercicios, etcétera, para la instrucción
V	V.a	KFML	Teorías personales o institucionales de aprendizaje
	V.b	KFML	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas
	V.c	KFML	Formas de interacción de los alumnos con el contenido
	V.d	KFML	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico
VI	VI.a	KMLS	Contenidos de nivel que se atiende
	VI.b	KMLS	Resultados de aprendizaje esperado
	VI.c	KMLS	Secuenciación con temas previos y posteriores

Nota. Los colores propuestos en esta tabla corresponden con las etapas del análisis.

Los resultados del estudio fueron analizados con base en la estructura presentada. Inicialmente, la tarea fue propuesta para 31 estudiantes matriculados (total del curso) de la asignatura “Pensamiento Matemático II” de LEBP, de los cuales se obtuvo 28 respuestas. Sin embargo, 26 de ellos son los elegidos para el análisis ya que siguieron correctamente las instrucciones y completaron la tarea a satisfacción, correspondiendo así al 83,8 % de la población.

La tarea matemática (Apéndice B) constó de cuatro instrucciones generales orientados hacia: la búsqueda de un recurso que permitiera trabajar el concepto de fracción para a partir de allí generar y resolver un problema matemático que tuviera como principal contenido la suma y/o resta de fracciones heterogéneas y, a partir de ello, responder a unas cuestiones organizadas en bloques referentes a los distintos saberes que tenían sobre el conocimiento matemático y su enseñanza. A continuación, presentaré los resultados obtenidos en cada una de las cuatro indicaciones; el primer punto establecía:

Busca en medios de comunicación escritos (periódicos, revistas o folletos comerciales) una situación en la que aparezca el concepto de fracción. Realiza una foto o captura de la situación e inclúyela en la tarea.

Respecto a los recursos empleados por los futuros profesores (FP), un 30,7% corresponde al uso del texto periodístico, el cual se caracteriza por informar sobre cuestiones de interés público, como lo son las noticias; un 23 % al uso del texto instructivo, el cual da indicaciones organizadas que influyen a realizar acciones concretas al lector en función de un objetivo (por ejemplo, las recetas); un 19,2% al texto publicitario, que tiene como finalidad promover un servicio o producto (por ejemplo, promociones de comida y/o viajes); abarca también, un 15,3 % que corresponde al uso de textos expositivos, los cuales organizan, aclaran y dan significado a conceptos (por ejemplo, artículos de divulgación); un 3,8% utilizó un recurso educativo el cual es una herramienta que tiene como objetivo mediar el proceso de enseñanza y aprendizaje (i. e. la sopa de letras); y, finalmente, un 7,6% no utilizó ningún tipo de recurso y planteó una situación matemática hipotética sin datos que respalden, es decir, sin seguir la instrucción de búsqueda de información en medios.

Para el segundo punto, los FP tenían la instrucción de:

A partir de la situación anterior, diseña un problema que permita trabajar la suma o la resta de fracciones heterogéneas con alumnado de Educación Primaria.

Se observó que 21 de los 26 FP eligieron trabajar la suma para el problema, donde piden en la situación matemática encontrar la porción total con términos como: "añadir", "unir" o "reunir". Tres plantearon problemas con la resta, indicando encontrar "la porción que falta/queda" o "necesita para llegar" a la solución de la situación y, finalmente, dos de ellos realizaron la composición de operaciones aritméticas, aplicando la suma de datos (calcular el total) encontrar la diferencia entre estos datos.

En cuanto al tercero punto, se solicitó a los FP:

Resuelve el problema, explicando paso a paso el razonamiento seguido para llegar a la solución.

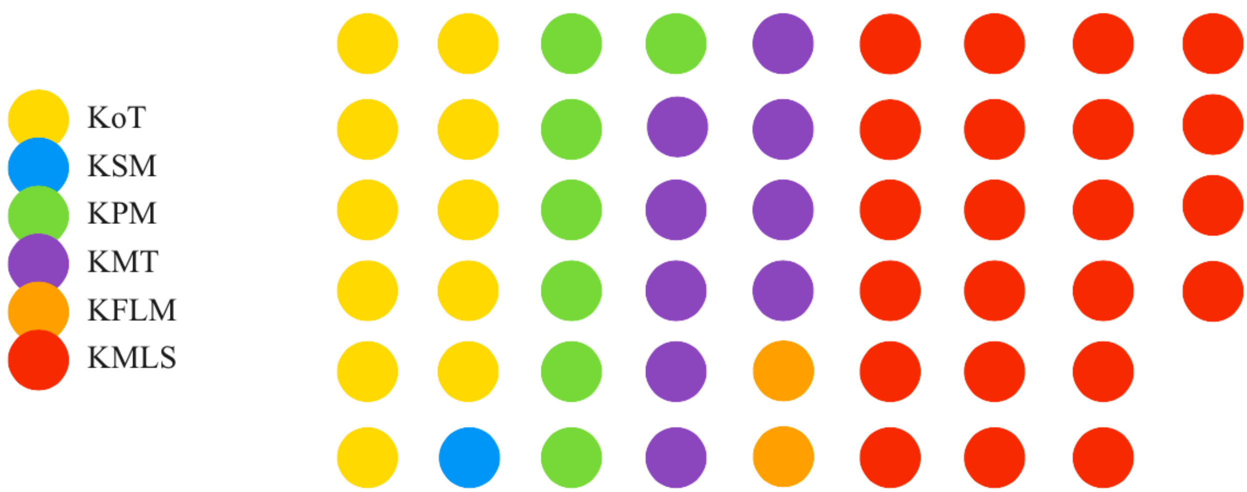
Sin embargo, este punto será retomado en el apartado del KoT, ya que hace parte de los conocimientos relacionados con la categoría *procedimientos*, específicamente el *cómo* se hace y permite realizar un análisis completo del apartado en cuestión. Finalmente, para el punto cuatro de la tarea, se pidió:

Elige dos de estos bloques y responde a todas las cuestiones que se plantean en ambos bloques teniendo en cuenta el problema que has diseñado.

De acuerdo con ello, en los resultados (Figura 4) se determinó que predomina la elección del bloque VI (22 de 26), le secunda los bloques I y IV (11 y 9 de 26, respectivamente) y, finalmente, se observa que los bloques con casi nula elección corresponden a los bloques II y V (1 y 2 de 26, respectivamente).

Figura 4

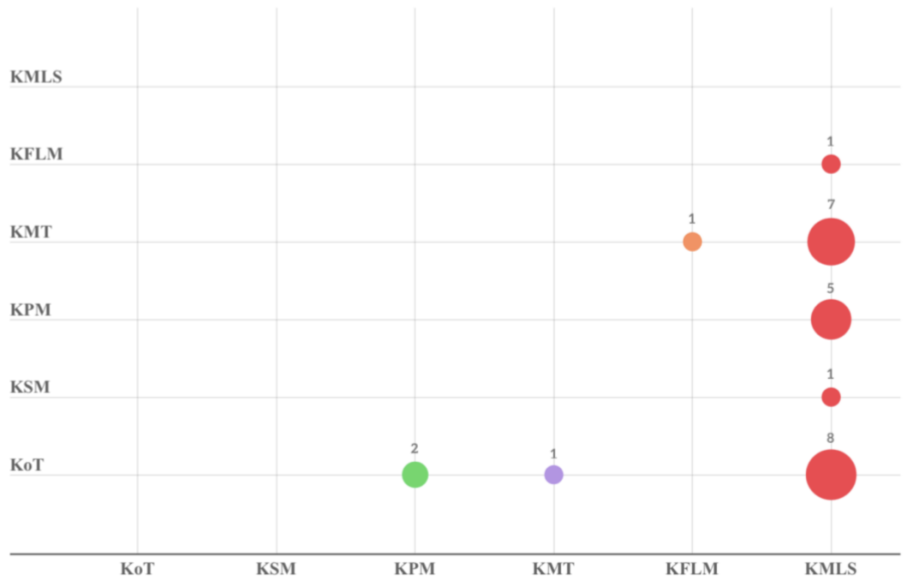
Número de FP que eligieron cada subdominio del MTSK.



Al observar la elección de pares que realizan los FP (Figura 5), se determinó que las relaciones KoT – KMLS y KMT – KMLS predominan y corresponden a los más elegidos con un 30,7% y 26,9% respectivamente, seguidos por el par KPM – KMLS con un 19,2%. Por otra parte, se observó que los pares menos elegidos corresponden a las relaciones KoT – KPM con un 7,6% y un 3,8% en los pares KSM – KMLS, KoT – KMT, KMT – KFML y KFLM – KMLS.

Figura 5

Distribución de los pares de los subdominios elegidos por los FP.



Nota. En la gráfica se puede observar el predominio por la elección del KoT y el KMLS como subdominios que persisten en la elección de los FP.

4.1. Conocimiento de los temas (KoT) – Bloque I

Con respecto al KoT se establecen cuatro apartados, los cuales corresponden a las categorías de este subdominio. En cuanto al primer apartado de este bloque (I.a) que abarca la categoría: *fenomenología y aplicaciones*, está divido en tres preguntas:

I.a	**1).** ¿De qué tipo son las fracciones que aparecen en el problema diseñado?	**KoT**	Fenomenología y aplicaciones
	2). ¿Qué situación de uso de fracciones (i.e., reparto, medida, trueque, transformación...) se refleja?		
	3). ¿Qué técnica has utilizado para reducir a común denominador? Justifica tus respuestas.		

En la primera cuestión, los FP plantean dos tipos de respuestas, las cuales se relacionan a distintos tipos de clasificaciones de las fracciones: consigo misma y con otras. Dentro de las primeras, se determina que las fracciones pueden ser propias, impropias e iguales a la unidad, lo cual se establece según el denominador de la fracción; y, la segunda, en cuanto a la operación entre fracciones (homogéneas y heterogéneas). Fijando esta base de referencia, se determinó que los 11 FP que eligieron este bloque catalogan el tipo de fracción entre estas dos clasificaciones en sus respuestas, donde cuatro (EFP08, EFP09, EFP12 y EFP16) expresaron que las fracciones planteadas eran "propias"; otros cuatro FP (EFP01, EFP10, EFP18, y EFP26) aseguraron que sus fracciones únicamente correspondían a "heterogéneas" y, finalmente, tres FP (EFP05, EFP22 y EFP24) contestaron utilizando ambas clasificaciones donde las fracciones eran "heterogéneas y propias o impropias".

En relación con la segunda cuestión, se debe aclarar que la situación de uso corresponde a la forma en la que se aproxima la vida cotidiana al concepto de fracciones y estas pueden clasificarse como: de reparto, de medida, de trueque o de transformación. Dentro de las respuestas de los FP se observa que las situaciones propuestas corresponden a medida (EFP09, EFP16, EFP24 y EFP26) y reparto (EFP01 y EFP10); sin embargo, se observa también que hay un desconocimiento de lo que significa *situaciones de uso* en fracciones ya que hay respuestas como: "situación de suma y resta", "situación: divide algo en partes" o "situación de selección", relacionando ello a un enunciado descontextualizado; donde además, se determina que puede haber una situación de comprensión lectora ya que dentro del enunciado se coloca la ejemplificación de los tipos de situación de uso.

Por último, para la tercera cuestión, se tiene en cuenta que cuando se habla de fracciones y sus operaciones, también se habla de transformarlas a fracciones equivalentes para su mejor comprensión y solución. Es por eso que se plantean para las fracciones algunos métodos para reducir a común denominador: 1) productos cruzados y, 2) mínimo común múltiplo (m.c.m). Las respuestas por parte de los FP son diversas (ver en Tabla 4), seis (EFP10, EFP12, EFP16, EFP18, EFP22 y EFP24) utilizan el método del m.c.m; uno (EFP26), responde a esta pregunta expresando: “multiplicación entre ambos números” lo cual observando el material hace referencia a la solución de la operación y no a la reducción de común denominador; y, otros dos no respondieron la pregunta (EFP08 y EFP09). Finalmente, se determinó también que dos FP confunden la reducción a común denominador con la simplificación de la fracción (EFP01 y EFP05), y al contrastar su respuesta en la tarea con la entrevista posterior, los FP confirman esta confusión y son conscientes del error.

Tabla 4

Tipos de respuesta en la tercera cuestión de la pregunta I.a.

FP	Tipos de respuesta
	Uso del m.c.m
EFP16	¿Qué técnica has utilizado para reducir a común denominador? Justifica tus respuestas. -Para reducir las fracciones a un denominador común en el problema, se ha utilizado la técnica de encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones. En este caso, como los denominadores eran 2, 4 y 8, se ha identificado que el mcm es 8 y se han convertido las fracciones a fracciones equivalentes con denominador 8 mediante la multiplicación de los numeradores y denominadores por los factores necesarios para obtener dicho denominador común. De esta forma, se han podido sumar las fracciones de manera más sencilla.
	Multiplicación de ambos números
EFP26	**- ¿Qué técnica has utilizado para reducir al mínimo común denominador?** He aplicado la multiplicación entre ambos números entonces, si tengo como denominado al 10 y como otro denominador al 8 multiplico 8 * 10 = 80 y el 80 seria em común denominador.
	Confusión de reducción a común denominador con la simplificación
EFP01	**1.a. ¿De qué tipo son las fracciones que aparecen en el problema diseñado? Qué situación de uso de fracciones (i.e., reparto, medida, trueque, transformación.) se refleja? ¿Qué técnica has utilizado para reducir a común denominador? Justifica tus respuestas.** Son fracciones de tipo heterogéneas, la que aparece para el desarrollo del problema, ya que los denominadores son distintos; el reparto de la porción es la que se refleja, y la técnica que he usado para reducir la fracción es la simplificación de fracción en la que se divide tanto el numerador como el denominador por el mismo número.

Nota. La información planteada corresponde a una muestra del tipo de respuestas obtenidas en el apartado mencionado.

En cuanto al segundo apartado de este bloque (I.b) que corresponde la categoría: *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, está divido en dos preguntas.

I.b	**1).** ¿Cómo definirías formalmente la suma/resta de fracciones? Escribe tu propia definición.	**KOT**	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	2). ¿Qué propiedades aritméticas se reflejan en el problema diseñado? Justifica tu respuesta.		

Para la primera cuestión, se tiene en cuenta que el concepto de fracción tiene varias formas de entenderse y esto se debe a las múltiples interpretaciones que tiene: “[...] como parte de una unidad-todo, como cociente, como relación, como operador, cono número racional, como medida” (Pinilla, 2009, p. 25). Por tanto, es relevante mencionar que las definiciones propuestas por los FP para suma y/o resta de fracciones, dependieron de la interpretación que tienen de la misma.

Así pues, se observó que los FP definieron este concepto como: "partes" que se suman o restan para calcular una "cantidad total" o una "diferencia" (Ver figura 6).

Figura 6

Definición de suma y resta de fracciones del FP EFP05.

¿Cómo definirías formalmente la suma/resta de fracciones? ¿Qué propiedades aritméticas se reflejan en el problema diseñado?

Suma de fracciones: operación que permite agrupar uno más grupos de fracciones en un número equivalente
Resta de fracciones: operación que permite quitar una fracción de otra para calcular la diferencia

Nota. La imagen corresponde a una muestra seleccionada para dar claridad sobre las respuestas obtenidas en este apartado.

Además, junto con la definición se tiende a explicar el procedimiento para realizar esta operación (Figura 7). Finalmente, existen casos donde se observa que la definición es tomada de algún sitio de internet y al pedir justificación de estas definiciones durante las entrevistas, argumentan que la definición es realizada por ellos mismos.

Figura 7

Definición de suma de fracciones que incluye procedimiento del FP EFP16.

1.b. ¿Cómo definirías formalmente la suma/resta de fracciones? Escribe tu propia definición. ¿Qué propiedades aritméticas se reflejan en el problema diseñado? Justifica tu respuesta.

-Para mí. una definición propia de la suma de fracciones es que, Dadas dos o más fracciones, la suma de dichas fracciones es otra fracción que representa la cantidad total de las fracciones sumadas. Para obtener la suma, se deben encontrar fracciones equivalentes con un denominador común y sumar los numeradores. El resultado final se simplifica, si es posible.

Nota. La imagen corresponde a una muestra seleccionada para dar claridad sobre las respuestas obtenidas en este apartado.

En cuanto a la segunda cuestión de este apartado, se toma como base que existen cuatro propiedades aritméticas básicas de los números: conmutativa, asociativa, distributiva y de identidad. Respecto a ello, nueve de los FP (EFP01, EFP05, EFP08, EFP09, EFP10, EFP16, EFP22, EFP24, EFP26), enmarcan su problema diseñado en la propiedad conmutativa uno no responde a esta pregunta (EFP12) y, finalmente, uno de ellos responde: “suma, resta, multiplicación y división” (EFP18), lo cual evidenció que existe una confusión entre *propiedades y operaciones* aritméticas.

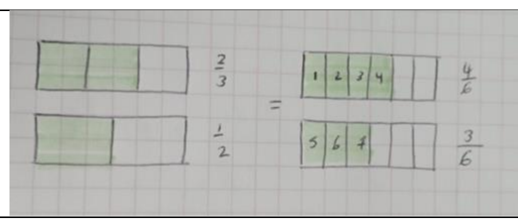
En relación con el tercer apartado de este bloque (I.c) el cual comprende la categoría: *registros de representación*, contempla dos preguntas:

I.c	**1).** ¿Qué modelo gráfico utilizarías para resolver el problema? Justifica tu respuesta. **2).** ¿Cómo resolverías el problema utilizando dicho modelo? Justifica tu respuesta.	**KOT**	Registros de representación

En cuanto a la primera cuestión, se observó que las respuestas correspondieron al uso de las representación de gráfica de barras (41,6%), de áreas (33,3%) y de pastel o circulares (25%). Por último, se generó confusión con respecto a la respuesta de un FP ya que expresa “bolsa con capacidad para 1kg” (EFP10), por lo cual explicó cuando se le interrogó y expresó: “Sí, tuve una confusión en cuanto a los tipos de representaciones, tal vez no comprendí bien la pregunta”. Ahora bien, en la cuestión número dos, se determinó que hay tres tipos de respuestas (Tabla 5): i) lenguaje común y representación, ii) lenguaje común y, iii) representación.

Tabla 5

Comparación entre los tipos de respuesta para la segunda cuestión del inciso I.c.

<table>
<tr><th>Tipo de respuesta</th><th>FP</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Lenguaje común y representación</td><td>EFP16</td><td>-Para resolver este problema matemático, el modelo gráfico que utilizaría es un diagrama de barras
La razón por la que utilizaría un diagrama de barras es porque es una forma visualmente clara de representar cantidades y proporciones. Los diagramas de barras pueden ayudar a comparar las cantidades de azúcar y harina que se tienen y las que se necesitan para completar la receta.
Para utilizar un diagrama de barras, dibujaría dos barras de diferente color. La primera barra representaría la cantidad de azúcar moreno disponible, mientras que la segunda barra representaría la cantidad necesaria para la receta. Lo mismo haría con la harina, dibujando dos barras de diferente color para representar la cantidad disponible y la necesaria para la receta. Luego, se puede comparar visualmente las barras para determinar cuánto más se necesita de cada ingrediente.<table><tr><th></th><th>Azúcar moreno</th><th>Harina</th></tr><tr><td>Disponible</td><td>■□□□</td><td>■■□□</td></tr><tr><td>Necesario</td><td>■■□□</td><td>■■■□</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Lenguaje común</td><td>EFP22</td><td>1.c. ¿Qué modelo gráfico utilizarías para resolver el problema? Justifica tu respuesta. ¿Cómo resolverías el problema utilizando dicho modelo? Justifica tu respuesta.
En cuanto al modelo gráfico que más se ajusta al problema planteado es un diagrama de barras en el cual se puede graficar las vueltas completas que da en total cada grupo, tomando como base del gráfilos los números mixtos resultantes de las sumatorias por instituciones para, así, encontrar las vueltas completas que resultan de los relevos por equipos y dividir, en el caso de la vuelta incompleta que resulta, la unidad de medida para dar como resultado un gráfico exacto y determinar a partir de otra estrategia, el ganador del campeonato.</td></tr>
<tr><td>Representación</td><td>EFP05</td><td></td></tr>
</table>

Nota. Las imágenes corresponde a una muestra seleccionada para dar claridad sobre los tipos de respuestas obtenidas en este apartado.

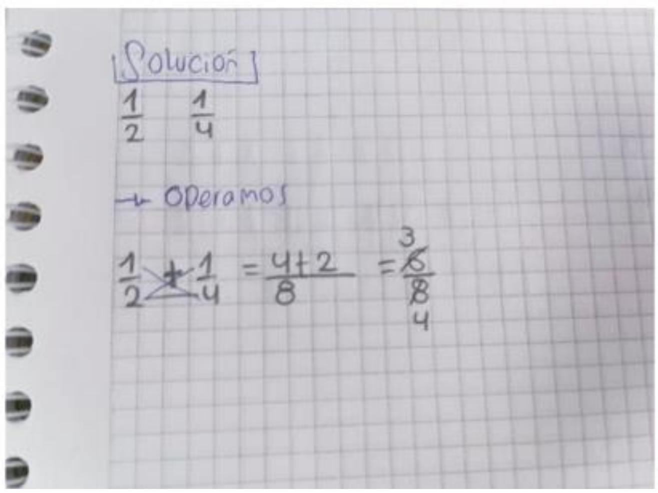
Por último, en cuanto al cuarto apartado (I.d) se establece la categoría: *procedimientos* y consta de tres preguntas:

I.d	**1).** ¿Qué tipo de problema aritmético (i.e., cambio, combinación, comparación...) se refleja?	KOT	Procedimientos
	2). ¿A qué estructura pertenece el problema diseñado?		
	3). ¿Qué tipo de contexto (i.e., personal, profesional, social, científico...) se pone en juego? Justifica tu respuesta.		

Sin embargo, también se toma en cuenta la instrucción tres de la tarea que corresponde al razonamiento (ver Tabla 6).

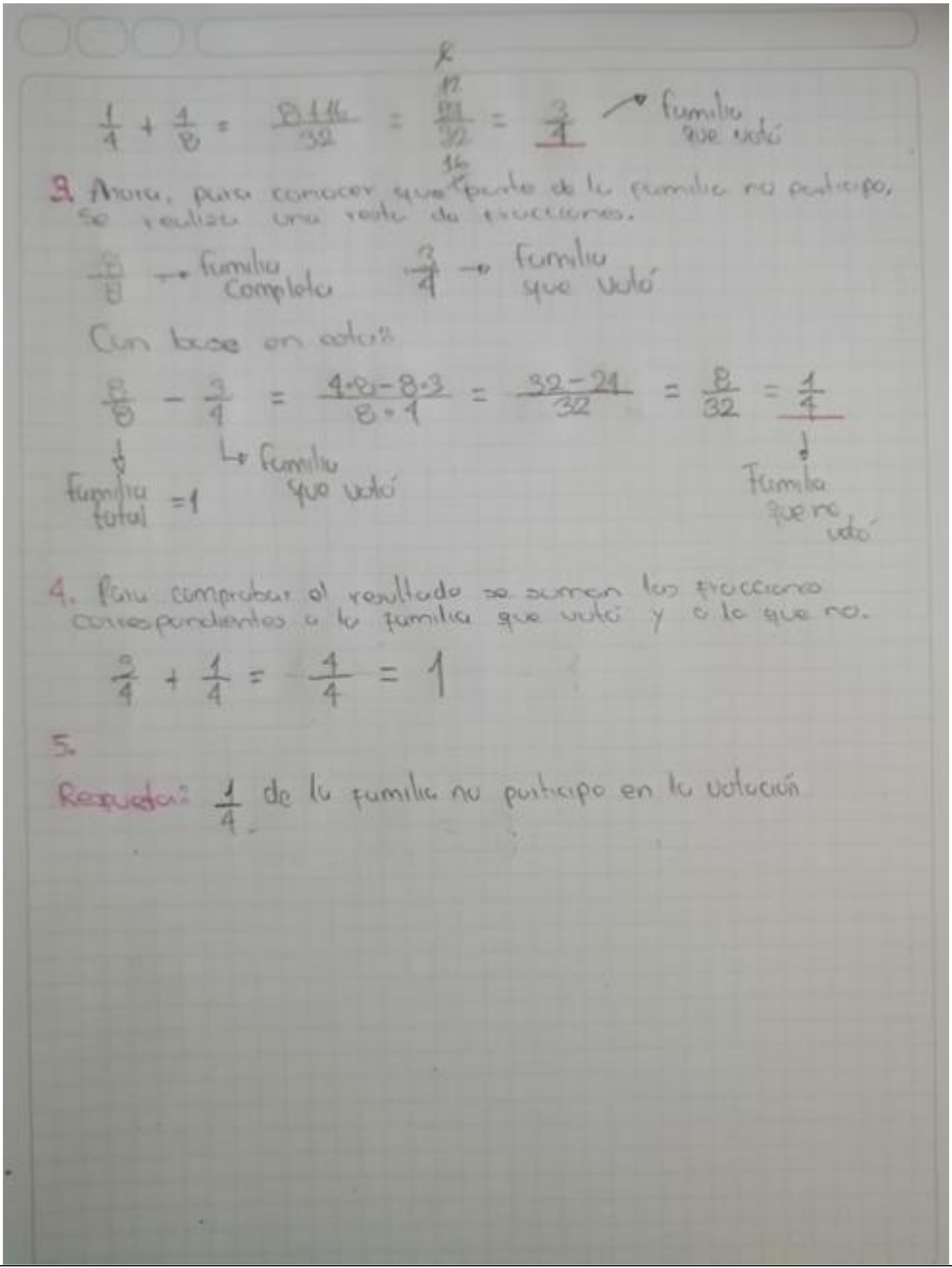
Tabla 6

Comparación de respuestas sobre los tipos de razonamiento de los FP.

FP	Respuesta
	Corta
EFP01	 **Pasos:** 1. Se encuentra el mínimo común múltiplo multiplicando los dos numeradores de las fracciones. 2. Luego se multiplica en equis el numerador por el denominador de la otra fracción. 3. Después sumamos los numeradores. 4. Y finalmente simplificamos.

Extensa

EFP08



Nota. Estas respuestas corresponden a una muestra para ejemplificar los dos tipos de razonamiento observado en los FP.

El razonamiento responde a: ¿cómo se hace? Con ello, se pretendía determinar el razonamiento que tienen los FP sobre el paso a paso para dar solución a un problema. Se observaron dos tipos de respuestas en las cuales algunos expusieron detalladamente el paso a paso del procedimiento que hicieron y otros respondieron brevemente en tres o cuatro pasos lo realizado para dar solución al problema.

En lo que respecta a la primera pregunta, es necesario resaltar que estos problemas son comprendidos como la clasificación de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) aditivos (Heller y Greeno, 1978; Orrantia et al., 2005 y Cañadas y Castro, 2011), los cuales, están sujetos a los diferentes significados (semántica) y estructuras que se pueden dar, estableciendo así problemas: de cambio, de combinación, de comparación e igualdad. Con base en ello, se observó una variabilidad de respuestas donde clasifican en diferentes términos los problemas aritméticos incluso cuando dentro del mismo enunciado se ejemplifica los correspondientes tipos.

Se encontró que cuatro FP (EFP01, EFP05, EFP16 y EFP26) expresaron su problema dentro del tipo de combinación, uno (EFP10) lo clasificó del tipo de comparación y combinación, y otros dos (EFP8 y EFP24) hicieron referencia a que es un problema de *segundo nivel,* lo cual se cuestionó en la entrevista con la intención de aclarar la referencia de ello y expresaron: “Es de un documento[3] que habíamos revisado anteriormente en otra asignatura”, al hacer una revisión se encontró que corresponde a un trabajo donde la autora plantea la clasificación de los problemas aritméticos desde otro referente como forma de exponer la información de forma más concreta. Finalmente, los FP restantes respondieron “división de repartición de medidas”, “traducción simple” y “suma de fracciones”. Para comprender aquellas respuestas se entrevistó a los FP donde

[3]Muñoz, C. C. (2011). Tipos de problemas matemáticos. *Pedagogía Magna*, (11), 265-274.

justificaron ello algún material revisado con anterioridad o con una búsqueda en internet que les planteaba una definición y creían que correspondía lo cuestionado.

Por otro parte, en cuanto a la segunda cuestión de este apartado, se obtuvo un total de 6 de 12 FP (EFP09, EFP10, EFP12, EFP21, EFP22 y EFP24) que no respondieron a esta pregunta, y respecto a esto expresaron que había confusión o falta de claridad y por ello, no hubo respuesta al ítem; lo cual evidenció un vacío de conocimientos sobre las estructuras matemáticas.

Finalmente, para la tercera cuestión se determinó que mayormente el contexto al que los FP apuntan en las situaciones planteadas es "la vida cotidiana" con un total de seis respuestas (EFP05, EFP08, EFP09, EFP10, EFP12 y EFP16); seguido por el contexto social con tres respuestas (EFP18 y EFP26); y, el contexto personal con 2 respuestas (EFP01 y EFP24), concluyendo con un FP (EFP22) que no responde a esta pregunta.

4.2. Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) – Bloque II

En cuanto al KSM, se debe aclarar que este bloque se considera como respuesta atípica ya que solo un FP (EFP03) eligió el bloque II. Este se conforma de cuatro apartados en los cuales se configuran dos categorías: *conexiones de complejización y conexiones transversales.* Teniendo en cuenta lo anterior, en el primer apartado (II.a) se le pide al FP:

II.a	Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que aumente la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta.	**KSM**	Conexiones de complejización

El FP responde a esta pregunta con dos variables, aumentar los valores en los números y además, recrear físicamente la situación con un recurso o material concreto.

En el segundo apartado (II.b), se pide al FP que:

II.b	Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que disminuya la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta.	**KSM**	Conexiones de complejización

El FP expresó que podría ser *didácticamente* llevando material concreto como: cubos, carros o cualquier objeto que sea *fácil* y permita identificar *fraccionariamente la operación* para que así el estudiante, por medio de la visualización, comprenda el problema. Para el tercer apartado (II.c) se tienen dos cuestiones:

II.c	**1).** ¿Qué otros contenidos matemáticos comparten características comunes con la suma/resta de fracciones?	**KSM**	Conexiones transversales
	2). ¿Cómo se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta.		

En esta cuestión, el FP (EFP03) plantea los contenidos: operaciones básicas, conjuntos y un "poco" de geometría (simetría), lo cual ejemplificó (ver Figura 8) de manera superficial y al momento de la entrevista, duda en la argumentación de su respuesta y expresa que no consideró ningún referente para sustentar los datos proporcionados.

Figura 8

Respuesta de la pregunta II.c de la EPF03.

C) ¿Que otros contenidos matemáticos comparten características comunes con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo se pueden trabajar a partir del problema diseñado?

Considero que los conjuntos, las operaciones básicas, considero que un poco de geometría ya que hay temas como simetría que siento que comparten algo en común.

Considero que las operaciones se podrían manejar bien, los conjuntos se podrían trabajar a partir de tomar conjuntos ya sea de vehículos, o minutos, la simetría no creo que se podría trabar con el problema, pero se podría graficar haciendo el uso de la geometría y utilizando figuras.

Nota. Esta respuestas corresponden a una muestra para ejemplificar la respuesta del FP.

Finalmente, el cuarto apartado (II.d) está conformado por dos preguntas:

II.d	**1).** ¿En la enseñanza y el aprendizaje de qué otros contenidos matemáticos se requiere la suma/resta de fracciones? **2).** ¿Se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta.	**KSM**	Conexiones de complejización

Respecto a ello, el FP expresó: “Se podría requerir para aprender a simplificar, el común denominador. Si se pueden trabajar a partir del problema ya que se pueden emplear estos contenidos”. Lo cual evidencia que hay una falta de comprensión sobre qué contenidos matemáticos y cómo se conforman, ya que los expuestos siguen siendo parte del contenido de fracciones.

4.3. Conocimiento de la práctica matemática (KPM) – Bloque III

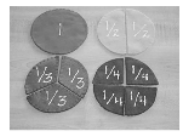
Con respecto al KPM se establece un solo apartado (III.a), la cual corresponde a la categoría: *procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas* y, tiene como cuestión:

III.a	¿Qué heurísticos (i.e., estrategias) aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.	**KPM**	Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas

Los siete FP que eligieron este bloque exponen estrategias (EFP07, EFP11, EFP16, EFP17, EFP19, EFP23 y EFP26), de forma que se observa características de una clasificación: por una parte abarcaron el uso de las representaciones gráficas para abordar los problemas planteados; por otra parte, expusieron la implementación de las diferentes propiedades de las fracciones para resolver operaciones entre fracciones; y, por último, la importancia del uso del razonamiento o el paso a paso para llegar a la solución de la situación (Tabla 7). Los FP realizan una combinación entre estos tres tipos de heurísticos.

Tabla 7

Clasificación de respuestas del apartado III.a

Uso de representaciones gráficas	EFP11	**1. Hacer una representación o esquema:** Al realizar esquemas o representaciones concretas, es más fácil hacer la representación mental de lo que se debe realizar para llegar a la solución y entender qué datos da el problema. Para estas representaciones los niños pueden realizar los dibujos sobre los datos que se presentan, o también se pueden tener materiales en el aula que ellos puedan usar. Un material didáctico que se puede usar para estas representaciones son las regletas de cuis naire, donde se le asigna valores a las regletas según su tamaño.  Otro material didáctico que puede ser empleado para estas representaciones pueden ser materiales concretos como:   **2. Relacionar el problema con otros conocidos:** Al ver los números fraccionarios en los problemas los niños aun no relacionan las representaciones que tienen estos, entonces una estrategia heurística para la solución del problema desde la lógica, sería como luciría el problema con números naturales y de esta manera los niños logren entender qué deben realizar y comprender que los números fraccionarios también son números con una representación correspondiente.
Implementación de propiedades de las fracciones	EFP07	Existen varias estrategias heurísticas que se pueden aplicar en la resolución de problemas que involucren la suma o resta de fracciones heterogéneas. Algunas de ellas son: - Encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores y convertir las fracciones a fracciones equivalentes con ese denominador común. Luego, se suman o restan los numeradores y se simplifica la fracción resultante si es necesario. - Si los denominadores son números cercanos, se puede aproximar el resultado sumando o restando los numeradores y dejando el denominador sin cambiar. - Si una fracción es mayor que la otra, se puede restar la fracción menor de la mayor y simplificar el resultado. - Si las fracciones tienen un denominador común parcial, es decir, un factor común, se puede simplificar la fracción y luego sumar o restar los numeradores. - Si los denominadores tienen un factor común, se puede dividir ambos denominadores por ese factor común y luego sumar o restar los numeradores correspondientes. - Si las fracciones tienen un denominador común elevado a un exponente, se puede convertir cada fracción en una fracción con el denominador elevado al exponente común y luego sumar o restar los numeradores correspondientes. - Es importante recordar que estas estrategias son solo algunas de las posibles y que la elección de la estrategia adecuada dependerá de la situación específica y de las habilidades y preferencias del estudiante.
	EFP19	**Bloque 3** ¿Qué heurísticos (estrategias) aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? **Solución:** Para resolver operaciones de fracciones heterogéneas, es decir de diferente denominador, se pueden tener en cuenta los siguientes procedimientos • Método de carita feliz o mariposa • Por mínimo común múltiplo (mcm)

	EFP16	**BLOQUE # 3** III. a. ¿Qué heurísticos (i.e., estrategias) aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta. -Hay varias estrategias que se pueden aplicar para la suma y resta de fracciones heterogéneas. Algunas de estas estrategias incluyen: Encontrar un denominador común: Como se hizo en el problema diseñado, encontrar un denominador común es una estrategia útil para sumar o restar fracciones con diferentes denominadores. Al encontrar un denominador común, se pueden convertir las fracciones a fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego sumar o restar los numeradores. Convertir a números mixtos: Otra estrategia útil es convertir las fracciones a números mixtos. Al hacer esto, se puede sumar o restar fácilmente la parte entera de cada número mixto y luego sumar o restar las fracciones restantes. Luego, se puede convertir la respuesta de regreso a una fracción impropia, si es necesario. Usar la regla del producto cruzado: La regla del producto cruzado es una estrategia útil para restar fracciones. Esta regla dice que, para restar dos fracciones, se deben multiplicar los numeradores de cada fracción por el denominador de la otra fracción. Luego, se pueden restar los productos y poner el resultado sobre el denominador común. Usar la regla de mínimo común múltiplo: Esta estrategia implica encontrar el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las fracciones y luego convertir cada fracción a una fracción con el MCM como denominador. Luego, se pueden sumar o restar los numeradores de las fracciones y simplificar, si es necesario.
Uso del razonamiento y representación	EFP17	**Bloque 3** • ¿Qué heurísticos (i.e., estrategias) aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta **Representación, esquema o diagrama:** para resolver el problema diseñado de una manera más fácil, se puede graficar por medio de un cuadrado o cualquier figura geométrica, y de esta manera representar las fracciones proporcionadas para tener una visión más amplia, por otro lado, también se podría construir el material de manera que lo puedan manipular para su mejor comprensión. **Hacer una lista sistemática:** para resolver el problema de manera correcta hay ciertos pasos que se deben seguir, por lo que el estudiante puede hacer una lista del paso a paso que el recuerde y pueda relacionar, de esta manera dar solución al problema.
	EFP26	Bloque #3 **1. ¿Qué heurísticos utilizaría a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la solución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.** la heurística de autoridad: se seguiría unas indicaciones, pasos o reglas para poder llegar a la solución en este caso, el procedimiento para poder resolver la suma de fracciones. la heurística de representatividad: para poder resolver la suma de fracciones primero, se debe fijar en el denominador. una vez que se identifica los denominadores diferentes se clasifica como una suma de fracciones heterogéneas sin necesidad de hacer ninguna operación. La heurística de ensayo y error: porque se puede utilizar varias formas de encontrar en denominador en común, pero puede que algunos se les facilite más de una forma y que con la otra manera no lleguen al resultado correcto.
Uso de razonamiento y propiedades de las fracciones	EFP23	Bloque número 3: 1. ¿Qué heurísticos (estrategias) aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? A partir de mi problema diseñado yo misma tuve una confusión entre fracciones debido a que a simple vista 1/8 es mayor que 1/2 por simplemente tener el número 8, sin embargo, para lograr saciar esta confusión mi estrategia utilizada en primer lugar es convertir el fraccionario en números decimales e identificar cual es menor. Otro método que me parece adecuado implementar en el tema de fracciones son las representaciones gráficas, así, de una forma más visual el estudiante se queda con una representación más "real" de la fracción y no en solo números.

4.4. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) – Bloque IV

Con respecto al KMT se establecen tres apartados, los cuales corresponden a las categorías de este subdominio. En cuanto al primer apartado de este bloque (IV.a) abarca: *teorías personales o institucionales de enseñanza*, se divide en dos preguntas:

IV.a	**1).** ¿Qué teorías de enseñanza de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? **2).** ¿Cómo las implementarías en el aula? Justifica tu respuesta.	**KMT**	Teorías personales o institucionales de enseñanza

Respecto a ello, los nueve fututos profesores) que eligieron este bloque (EFP04, EFP06, EFP10, EFP13, EFP14, EFP15, EFP20, EFP25 y EFP28) respondieron con información variada, es decir, expusieron diversos tipos de teorías de enseñanza y no solo expusieron una o repitieron la misma. Inicialmente, los EFP04 y EFP06, plantearon la *teoría de enseñanza por descubrimiento* (ver Tabla 8), la cual ambos definieron desde una misma idea: “un proceso de construcción de nuevas ideas” (EFP04) que “toma en cuenta los presaberes de los estudiantes para integrar a su esquema mental” (EFP06).

Sin embargo, se observó una diferencia entre los dos futuros profesores al momento de responder la segunda pregunta, ya que el EFP04 no transciende ese conocimiento de la teoría a la implementación en el aula como se pide en la pregunta y únicamente define la teoría de enseñanza; pero el EFP06 sí, además de explicarla, expone cómo se puede integrar por medio de actividades concretas en el momento de una orientación de clase y, además, ejemplifica el paso a paso en una situación real cómo podría colocarla en práctica.

Tabla 8

Respuestas que explicitan la teoría de enseñanza por descubrimiento.

FP	**Respuesta**
	Explicación de la teoría
EFP04	a. La teoría de enseñanza que se puede utilizar para la suma/resta de fracciones sería la de descubrimiento; esta teoría es un proceso de construcción de nuevas ideas basadas en el conocimiento previo. En esta teoría el aprendiz es activo construyendo nuevas ideas sobre la base de un conocimiento previo, el aprendiz selecciona y trasforma la información, construye hipótesis y toma decisiones apoyándose en una estructura cognitiva.
	Explicación y aplicación de la teoría
EFP06	**A)** ¿Qué teorías de enseñanza de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo las implementarías en el aula? **Respuesta:** La teoría de enseñanza por descubrimiento se relaciona con la temática, ya que esta toma en cuenta, los presaberes del estudiante para integrar a su esquema mental la nueva tarea, esta teoría indica que los estudiantes deben ser los personajes activos en su proceso de aprendizaje, el educando debe estar motivado a aprender construyendo nuevas ideas o adquiriendo nuevo conocimiento teniendo como base lo que ya saben, el estudiante debe seleccionar y organizar la información, formular hipótesis, definir una camino de resolución al problema y llegar a una solución/conclusión, mientras que el docente es un acompañante en este proceso, traza el camino guía para los estudiantes. En el aula esto se puede implementar haciendo actividades previas que le permitan al docente saber o conocer que presaberes tienen los estudiantes y si son suficientes para abordar la nueva temática. Al entrar a trabajar la suma y resta de fracciones proponer una situación a trabajar, permitir que los alumnos busquen soluciones a dicho problema, los alumnos presentan sus resultados, se socializa, se corrige, se formaliza el contenido matemático, finalmente se plantean mas ejercicios o problemas de suma y resta de fracciones para la ejercitación y consolidación.

Nota. La información corresponde a la comparación entre los tipos de respuesta para explicar la teoría de enseñanza por descubrimiento.

Otra de las teorías de enseñanza planteadas por los FP es la *teoría de Van Hiele,* la cual planteó como aquella que permite “modelar, reconocer dificultades y diseñar estrategias con base a lo observado” (EFP15), además, expuso la aplicación de esta teoría paso a paso, con las fases, niveles y, además, las actividades que realizaría en cada una de ellas. Además, el EFP25 planteó la teoría de enseñanza *visualización,* sin embargo, no explicó en qué consiste, y expuso brevemente que lo implementaría por medio del uso de fichas.

Por último, el EFP28 expuso dos teorías de enseñanza como lo son: la *visualización* y la *modelación,* explicando su respuesta de la siguiente manera como se observa en la Figura 9. Sin embargo, también se observó que plantea la *teoría cognitiva de Piaget*, la cual es de aprendizaje y no se enseñanza, determinando así una confusión en el funcionamiento y desarrollo de estas teorías.

Figura 9

Respuesta de la pregunta IV.a de la EPF28

a.¿Qué teorías de enseñanza de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo las implementarías en el aula? Justifica tu respuesta.

En la enseñanza de la suma y la resta de fracciones interviene el concepto de la **visualización,** la visualización es un proceso necesario para crear representaciones mentales de lo que simboliza una fracción, asimismo, las representaciones en coordinación ojo mano, son apropiadas para comprender el concepto de fracción.

La enseñanza de este tema requiere de **modelación,** proceso en el cual el docente simula situaciones de la vida real, que el estudiante busca resolver aplicando diversas estrategias.

Según la **Teoría cognitiva de Piaget,** para el niño preoperacional entender que 1/4 < 1/2 genera un conflicto, porque el niño que aprendió a contar esta viendo los números de una fracción de manera separada.Teniendo en cuenta estos obstáculos propios del desarrollo cognitivo de un niño o niña, iniciaría mi clase desde lo más básico hacia lo más concreto.Las acciones que haría para el desarrollo de la clase son:

1.Indagar los conocimientos previos de los alumnos en las operaciones básicas, ya que son importantes para resolver los problemas con fracciones.

2.Demostrar junto con los estudiantes situaciones de la vida cotidiana en donde se utilizan las fracciones cómo en las recetas, el tiempo, las reparticiones, etc.

3.Explicar qué es una fracción aritmética y cuáles son los significados que puede tener una fracción según Pantziara & Philippou (2012) en distintos contextos, como parte de un todo,como reparto equitativo,como una razón, cómo una división y cómo un punto en la recta númerica **(modelo de los subconstructos)**

4. Explicar con material didáctico los tipos de fracciones y sus representaciones, también de la forma contraria, empleando material didáctico.

5. Asignar ejercicios de práctica de representación de fracciones, que favorezcan el desequilibrio cognitivo.

6. Analizar la suma y resta de fracciones y los diferentes métodos de resolución.

Nota. La información corresponde una muestra de la confusión que tienen los FP sobre las teorías de enseñanza y las teorías de aprendizaje.

Por otra parte, se observó que los futuros profesores (EFP10, EFP13, EFP14 y EFP20) plantearon varías teorías como lo son: teoría de aprendizaje de Robert Gagné, el aprendizaje significativo de Ausubel, la teoría social del conocimiento de Lev Vygotsky y la teoría psicogenética de Jean Piaget. Respecto a ello, se determinó que existe una fuerte confusión entre los FP ya que cinco de los nueve que respondieron este bloque revelan poca claridad al identificar la diferencia de teoría de enseñanza y teoría de aprendizaje.

En relación con el segundo apartado de este bloque (V.d) el cual comprende la categoría: *recursos materiales o virtuales de enseñanza*, contempla dos preguntas:

IV.b	**1).** ¿Qué recursos didácticos se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? **2).** ¿Qué características matemáticas tienen estos recursos que justifican la idoneidad de estos para el contenido matemático a enseñar? Justifica tu respuesta.	**KMT**	Recursos materiales o virtuales de enseñanza

Respecto a la primera cuestión, se observó que cuatro FP (EFP04, EFP13, EFP15 y EFP28) plantearon como recurso didáctico la implementación de bloques de lego o de construcción, otros de los recursos fueron: *puzzle* de fracciones (EFP06), el cual explicó que se encuentra en una página del gobierno de Canarias; los paquetes de alimentos y personajes en miniatura (EFP10), ya que son fáciles de manipular; plastilina y fichas de dominó (EFP13); pistas de carreras, ruleta con los signos de operaciones básicas y cartón de huevos (EFP14); tangram y tablero sombreado (EFP15), explicando este último como un tablero tipo ajedrez donde se posicionan cuadros de tres colores y así identificar que fracción corresponde; textos de recetas, figuras tridimensionales y gráficas (EFP20); línea numérica y maqueta de fracciones (EFP28); y, por último, el EFP25, expresó “objetos que permitan la manipulación”, sin ningún tipo de explicación o aplicación.

En cuanto a la segunda cuestión, para justificar el recurso didáctico y las características matemáticas que este posee se observaron menos respuestas . Lo anterior, se expone brevemente en la Tabla 9, donde se plantean las respuestas obtenidas por parte de los FP sobre la idoneidad de estos recursos; cabe resaltar también que algunas de las respuestas no corresponden a características matemáticas, como por ejemplo: “es un recuso que ya conocen” (EFP04), “son fáciles de conseguir” (EFP28) y “presentan atracción al estudiante” (EFPB14).

Tabla 9

Características matemáticas de los recursos didácticos planteados por los FP (IV.b).

FP	**Recurso didáctico**	**Características matemáticas del recurso**
EFP04, EFP13, EFP15 y EFP28	Bloques de lego o de construcción	Permite crear diferentes situaciones por medio de la diferencia de colores, son manipulables, los puntos que sobresalen representan números y representación kinestésica
EFP06	Puzzle de fracciones	Permite identificar, comparar y sumar o restar fracciones.
EFP10	Paquete de alimentos	Contiene información de pesos e informacional nutricional que sirve para hacer relaciones.
EFP13	Plastilina	Por medio de la creación de diferente figuras que puedan dividir en partes
	Fichas de dominó	Por su composición de diferentes puntos divididos por una línea puede representar una fracción
EFP15	Tablero sombreado y tangram	Son manipulables
EFP20	Texto de recetas	Se encuentra la representación de fracción en las instrucciones
EFP20	Figuras tridimensionales y gráficas	No responde
EFP25	Objetos que permiten la manipulación	Permite la visualización de fracciones y observar sus representaciones

Nota. La información planteada está sujeta a parafraseo y delimitación por parte de la investigadora para claridad.

Para el último apartado de este bloque (IV.c) que corresponde a la categoría: *actividades, tareas, ejemplos, ejercicios, etcétera, para la instrucción*, está comprendido por dos preguntas:

IV.c	**1).** ¿Qué estrategias, técnicas y tareas se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? **2).** ¿Qué potencialidad matemática, limitaciones u obstáculos presentan? Justifica tu respuesta.	**KMT**	Actividades, tareas, ejemplos, ejercicios, etcétera, para la instrucción

En cuanto a este apartado, se presenta una Tabla 10, en donde se exponen las respuestas obtenida por los FP sobre la estrategia, técnica o tarea que puede emplear en la enseñanza de suma o resta de fracción con su respectiva potencialidad, limitación u obstáculo. Por una parte, se podrá observar que existe una tendencia en los FP a evidenciar las limitaciones u obstáculos, omitiendo por completo las potencialidades matemáticas de estos; y, por otra parte, se determinó que la mayoría de obstáculos que plantearon son con respecto al tema o el estudiante, no de la estrategia en sí.

Tabla 10

Estrategias, técnicas y actividades con sus respectivas potencialidades, limitaciones u obstáculos planteados por los FP (IV.c).

FP	Estrategia, técnica o actividad	Potencialidad, limitación u obstáculo matemático
EFP04	Secuencias de enseñanza y la técnica de la “carita feliz”	Una limitación que puede presentarse es que los niños no conozcan que los números decimales son también fraccionarios
EFP06	Técnica de la carita feliz	Esta técnica podría representar una dificultad de comprensión para algunos estudiantes, sobre todo, a los estudiantes con TDAH, ya que al ver tantas líneas puede que se saturen o confundan.
EFP10	Recolección de datos en forma de tablas	Una dificultad sería que los niños no puedan asimilar la información que nos presentan las fracciones o a la hora de refrentarlas en gráficas.

EFP13	Uso de objetos manipulables	Como limitación u obstáculo podemos encontrar la falta de dominio del estudiante con los contenidos que se presentan al momento de utilizar la estrategia con la suma de fracciones
EFP14	Actividades de grupo y resolución de problemas	Se pueden presentar obstáculos como no reconocimiento de los signos, no saber contar, no tienen claridad en el concepto o error en el procedimiento.
EFP15	Gamificación	Permite el reconocimiento de las partes de una fracción
	Elaboración de esquemas	Permite la jerarquización de términos y trazar relaciones con los conceptos previos
	Cuadro comparativo	Buscar la interdisciplinariedad con las demás asignaturas
EFP20	Gráficas	Un obstáculo puede ser la interpretaciones de las gráficos o las instrucciones para hacerlas
	Trabajo en equipo	Puede haber problemas de comportamiento y relaciones entre los niños y que esto ocasione desorden e incomodidad
EFP25	Juegos	Los problemas que pueden llevar a cabo son que se pierda el sentido de la enseñanza y no permita potenciar los saberes
EFP28	Actividades de repartición	Su limitación es que no es tan útil para representar sumas y restas con fracciones y fracciones impropias, ya que el uso de los colores en las representaciones es necesario para visualizar de mejor manera las representaciones.
	Fracciones son números con magnitud	No responde
	Fracciones como unidades de medida	No responde
	Priorizar nociones y conceptos de fracciones antes de procedimientos	No responde

Nota. La información planteada está citada textualmente desde las mismas respuestas de los FP y corresponde cada una de las estrategias planteadas con su respectivo obstáculo o potencialidad planteada por cada FP.

4.5. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) – Bloque V

El bloque correspondiente a KFLM está conformado por cuatro apartados; en cuanto al primer apartado de este bloque (V.a) que corresponde a la categoría: *teorías personales o institucionales de aprendizaje,* se divide en dos preguntas:

V.a	**1).** ¿Qué teorías de aprendizaje de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones?	**KFML**	Teorías personales o institucionales de aprendizaje
	2). ¿Cómo? Justifica tu respuesta.		

Se debe aclarar principalmente que este bloque solo fue seleccionado por dos de los FP (EFP13 y EFP27). Como se puede observar en la Tabla 11, el primero expuso que para la suma de fracciones se puede utilizar el aprendizaje asociacionista, el cual define como: "aprender es provocar un cambio de conducta del que aprende" donde explicó que el estudiante aprenderá sumas de fracciones si realiza correctamente las tareas relacionadas con este tema.

Por otra parte, el segundo FP expresó que una teoría que se relacione con las fracciones es el aprendizaje significativo de Bruner, ya que permite experiencias concretas al ejemplificar situaciones que comprenden la naturaleza de las fracciones por medio del uso del material concreto, llevando al aprendizaje desde lo concreto a lo abstracto y, además, en palabras del FP permite que los estudiantes "relacionen las situaciones matemáticas planteadas con su contexto, generando un interrogante que debe ser resuelto", lo cual, coloca en perspectiva su reiteración por comprender este concepto desde la realidad del estudiante.

Tabla 11

Respuestas a la pregunta V.a sobre las teorías de aprendizaje.

FP	Respuesta
EFP13	V.a. ¿Qué teorías de aprendizaje de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones ¿Cómo? En la suma de fracciones podemos encontrar el aprendizaje asociacionista, en el cual aprender es provocar un cambio de conducta del que aprende. Es decir, en este caso en la suma de fracciones, el alumno aprende si realiza correctamente tareas relacionadas con los conceptos matemáticos que trabaja (suma, multiplicación y simplificación). En esta teoría, también se promueve que se ejercite la realización de operaciones más simples (una sola cifra), en el tema tratado, con el fin de descomponer una idea mas compleja en otra más simple.
EFP27	**V. a.** ¿Qué **teorías de aprendizaje** de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo? Justifica tu respuesta. ➢ Aprendizaje significativo (Bruner) Se dan experiencias concretas al ejemplificar diversas situaciones que permitan evidenciar el concepto y la naturaleza de las fracciones, como procesos anteriores se realizan actividades simples que posibiliten el uso de material concreto para que los alumnos como primer acercamiento puedan manipular y observar a que hacen referencia las fracciones, así el aprendizaje va de lo concreto a lo abstracto y se manipulan los objetos antes de pasar a la resolución de ejercicios y problemas. También es posible que los estudiantes relacionen las situaciones matemáticas planteadas con su contexto, generando un interrogante que debe ser resuelto.

Nota. Estas respuestas son muestra de las dos únicas respuestas obtenidas en este apartado.

En cuanto al segundo apartado de este bloque (V.b) que corresponde a la categoría: *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, inherentes a la matemática en general, inherentes a la matemática en general, un contenido particular o un contexto específico de aprendizaje (grupo o escenario particular)*, está divido en dos preguntas:

V.b	**1).** ¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para comprender la suma/resta de fracciones? Justifica tu respuesta. **2).** ¿Qué errores o dificultades se pueden presentar en la resolución del problema diseñado? Propón algunos ejemplos.	**KFML**	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, inherentes a la matemática en general, un contenido particular o un contexto específico de aprendizaje (grupo o escenario particular)

Respecto a ello, los FP presentaron un listado cada uno, sin embargo, se observaron ciertas diferencias (ver Tabla 12), por una parte el EFP13 expuso brevemente los conocimientos: organización de números, conocimiento de signos, de suma, multiplicación y la simplificación. Y, por otra parte, el segundo FP (EFP27) expresó un listado más detallado respecto a estos conocimientos: saber sumar y restar fracciones, lectura e interpretación de la situación planteada, saber hacer representaciones gráficas de fracciones, reconocer los significados del número en diferente contextos, reconocer propiedades de los números y relaciones entre ellos es diferentes contextos, e identificar regularidades y propiedades de los números; lo particular en esto, es que son conocimientos que expresa con su respectivo ejemplo de aplicación de la siguiente manera: "Reconocer propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. Por ejemplo, en el ejercicio se debe reconocer que se abordan números pares que se pueden simplificar, en este caso son divisibles por dos, llegando a la respuesta 4/15." Con esto se evidencia, que no solo tiene el conocimiento teórico sino que sabe cómo aplicarlo a situaciones particulares.

Tabla 12

Respuestas a la pregunta V.b sobre los conocimientos previos que necesita el alumno para comprender suma/resta de fracciones.

FP	Respuesta
EFP13	V.b ¿Que conocimientos previos necesita el alumnado para comprender la suma/ resta de fracciones? ¿Qué errores o dificultades se pueden presentar en la resolución del problema diseñado? Propón algunos ejemplos. Como conocimiento previo el estudiante debe entender la organización de números y el conocimiento de los signos (mas, menos) además de ello conocer la suma, la multiplicación y la simplificación. Como dificultad que podemos encontrar en el
EFP27	**V. b.** ¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para comprender la suma/resta de fracciones? Justifica tu respuesta. ¿Qué errores o dificultades se pueden presentar en la resolución del problema diseñado? Propón algunos ejemplos. Los conocimientos previos que necesita el estudiante para comprender la suma/resta de fracciones son: • Saber sumar y restar fracciones heterogéneas. Para poder resolver el ejercicio. • Lectura e interpretación de la situación matemática planteada. Para comprender la situación que ha sido planteada y sacar sus datos. • Saber hacer representaciones graficas de fracciones. Para graficar la información suministrada. • Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). Por ejemplo, en la situación matemática se reconoce que los numeradores de cada fracción son menores que sus denominadores, por ello, se trata de fracciones propias. • Reconocer propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. Por ejemplo, en el ejercicio se debe reconocer que se abordan números pares que se pueden simplificar, en este caso son divisibles por dos, llegando a la respuesta 4/15. • Identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). En este caso hacer representaciones graficas de la información que aporta el problema, para mayor comprensión del mismo.

Nota. Esta tabla muestra las respuestas textuales obtenidas por los dos FP que respondieron este bloque.

En cuanto a la segunda cuestión, se observó que el primer FP (EFP13) expresa confusamente las dificultades (claridad) sobre entender las fracciones en el enunciado. Para el segundo FP (EFP27) expone puntualmente tres dificultades y errores con ejemplificación: 1) no comprender la situación y saber qué operación debe realizar, 2) no simplificar la fracción y 3) operar erróneamente las fracciones.

En relación con el tercer apartado de este bloque (V.c) el cual comprende la categoría: *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, referentes a los procesos y estrategias de los estudiantes (habituales y no habituales), o al lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un contenido*, contempla dos preguntas:

V.c	**1).** ¿Qué preguntas plantearías para guiar la enseñanza y el aprendizaje de la suma/resta de fracciones? Especifica en tu resolución paso a paso (como respuesta al punto 3.) **2).** ¿Qué respuestas esperas para cada una de ellas? Justifica tu respuesta.	**KFML**	Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, referentes a los procesos y estrategias de los estudiantes (habituales o no habituales), o al lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un contenido

Los FP plantearon preguntas estructuradas que corresponden a cómo se solucionaría la situación matemática que se propuso y, las respuestas esperadas correspondieron a una idealización del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que no dejan la posibilidad de respuestas atípicas por parte de los estudiantes (ver Tabla 13), cerrando así las posibles oportunidades de aprendizaje que se puedan desarrollar.

Tabla 13

Comparación entre los tipos de preguntas y respuestas planteadas por los FP en la pregunta V.c.

Respuestas	
EFP13	**EFP27**
1. ¿Entiendes el ejercicio? Respuesta: Si, tenemos que averiguar cuanta pintura se necesitó para cubrir las habitaciones. 2. ¿Conoces cómo se les dice a las fracciones que nos dice en el ejercicio? Respuesta: Si, este es un cuarto y un medio. 3. ¿Sabes cómo podemos solucionar la primera parte del problema? Respuesta: Creo que tenemos que primero tenemos que multiplicar cada número. 4. ¿Qué números debemos multiplicar primero? ¿Cómo lo hacemos? Respuesta: Primero multiplicamos los números de abajo y luego utilizamos una x para multiplicar los de arriba con los de abajo. 5. ¿Luego de organizar las respuestas de las multiplicaciones, que debemos hacer? Respuesta: Tenemos que sumar el resultado y dejar el de abajo quieto. 6. ¿Cuándo terminemos de realizar la suma, que sigue? Respuesta: Podemos volver más pequeño el resultado, buscando la mitad de cada uno de los números que nos quedaron. 7. ¿Cuál fue el resultado final? Respuesta: El resultado final fue tres cuartos.	1. ¿Quiénes tienen mascota en casa? (Para iniciar la conversación y despertar interés en lo que se relizará) 2. ¿Qué animal es? 3. Presentación y lectura de la situación matemática. 4. ¿De qué trata la situación planteada? - Trata de una encuesta que se hizo a las familias sobre las mascotas. 5. ¿Qué debemos encontrar para resolver el problema? - La fracción de hogares que tiene mascota diferente a gato. 6. Qué información tenemos? - La encuesta se realizó en 8 ciudades - 6/10 de los hogares tienen mascota - 2/6 tienen gato 7. ¿Qué operación debemos hacer para obtener la respuesta a la pregunta? - Una resta 8. ¿Qué debemos restar? - Al número de familias que tiene mascota le debemos restar el número de familias que tienen gato, para que queden los que no tienen. 9. ¿Cómo lo hacemos? 10. ¿Podemos simplificar? 11. ¿Cuánto nos quedó? - 4/15 12. ¿Qué significa esto? - Que 4/15 tienen mascota que no es gato.

Nota. Respuestas tomadas textualmente del material entregado por los FP.

Finalmente, el cuarto apartado (V.d) que corresponde a la categoría: *los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico*, se conforma por dos preguntas.

V.d	**1).** ¿Planeta el problema diseñado una situación de interés para el alumnado? **2).** Si tuvieras que cambiar el problema diseñado, ¿con qué intereses del alumnado lo relacionarías? Justifica una situación particular.	**KFML**	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico

En cuanto a la primera, se evidenció que para los FP los problemas diseñados generan interés ya que son situaciones o temas que son cercanos a los estudiantes y por tanto, los motiva a participar. Y en la segunda cuestión, los FP expresaron esto de dos maneras, el primero (EFP13) argumenta que el cambio sería diseñar un problema “atractivo” donde el “elemento principal” ser la plastilina, ya que es algo que ellos utilizan cotidianamente y se puede partir por fracciones.

Ya en cuanto al segundo FP (EFP27), expuso detalladamente cómo haría el cambio de la situación (Ver en Figura 10), comenzó con la interacción con los estudiantes haciendo preguntas sobre su realidad; posteriormente, utilizando la información sobre sus intereses y, finalmente, cómo realizaría la aplicación en el aula y la resolución del problema.

Figura 10

Respuesta del EFP27 sobre cómo cambiaría el diseño del problema (apartado V.d)

V. d. ¿Plantea el problema diseñado una situación de interés para el alumnado? Si tuvieras que cambiar el problema diseñado, ¿con qué intereses del alumnado lo relacionarías? Justifica una situación particular.

El problema planteado genera interés en el alumno, pues aborda lo referente a las mascotas que suele ser un tema de gran interés y cercanía para los estudiantes, pudiendo así permitir la participación y como complemento de la actividad descubrir la fracción de estudiantes del salón que tienen mascota.

Si cambiara el problema lo relacionaría con una votación de una clase (o que se haga en clase), respecto a la elección de algo, por ejemplo, una película.

Ejemplo:

Se presentaron dos opciones de película y mediante votación se obtuvo que:

- 6/15 prefiere *Un mundo extraño*
- 8/30 prefiere *Red*

Luego se elabora la situación matemática:

Se realizó una votación para la elección de la película que se verá en una fecha especial, de los 30 estudiantes del salón de clase, 6/15 partes votaron por la película *Un mundo extraño* y 9/30 por *Red* ¿Qué parte de los estudiantes prefiere ver una película diferente a las dos opciones?

Nota. Estas respuesta es tomada textualmente de la respuesta obtenida en este apartado.

4.6. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) – Bloque VI

Con respecto al KMLS se establecen tres apartados, los cuales corresponden a las categorías de este subdominio. En cuanto al primer apartado de este bloque (VI.a) que corresponde a: *contenidos de nivel que se atiende*, y está comprendido por una pregunta:

VI.a	¿En qué nivel de aprendizaje es adecuado trabajar este tipo de situaciones? Indica la edad y el curso y justifica tu respuesta.	**KMLS**	Contenidos de nivel que se atiende

Teniendo en cuenta que es el bloque más elegido por los FP con un total de 22, se evidenció una variedad significativa entre las respuestas. En este apartado, se observó que 10 FP (EFP07, EFP11, EFP12, EFP17, EFP18, EFP19, EFP20, EFP22, EFP25 y EFP27) establecen que para la situación que plantearon los estudiantes deben estar entre cuarto y quinto grado de primaria (9 a 11 años); tres FP (EFP03, EFP05 y EFP14) expresaron que su problema está delimitado entre tercero y quinto de primaria (8 a 11 años); y, otros tres FP (EFP01, EFP09 y EFP23) que su problema es solo para quinto grado de primaria.

Por otra parte, dos FP (EFP15 y EFP24) expresaron que su problema está planteado solo para cuarto grado de primaria (8 a 10 años); otros dos FP (EFP08 y EFP28) respondieron que la situación solo era para estudiantes de tercer grado de primaria (7 a 8 años); y por último, dos FP (EFP04 y EFP06) establecieron que su problema funciona tanto para tercero como para cuarto grado de primaria (7 a 9 años). Lo anterior, es justificado por los FP desde los Estándares Básicos de Competencias.

En el segundo apartado de este bloque (VI.b) que corresponde a la categoría: *resultados de aprendizaje esperados*, está conformado por una indicación:

VI.b	Propón un objetivo de aprendizaje para la clase en la cual se trabajaría el problema diseñado con sus respectivos indicadores de evaluación.	**KMLS**	Resultados de aprendizaje esperado

Con respecto a ello, se evidenció una falencia en el conocimiento y estructura que comprende un objetivo de aprendizaje, además, no contemplan del todo su relación con el planteamiento de sus respectivos indicadores de evaluación. A continuación en la Tabla 14, se exponen algunos ejemplos de los tipos de respuestas planteadas por los FP.

Tabla 14

Objetivos de aprendizaje con sus respectivos indicadores de evaluación planteados por los FP sobre el problema propuesto (VI.b)

<table>
<tr><th>FP</th><th>Objetivo de aprendizaje</th><th>Indicadores de evaluación</th></tr>
<tr><td>EFP01</td><td>Desarrollar en el niño la capacidad de trabajar resta y suma de fracciones, siendo capaz de representar los problemas planteados en modelos grafico que faciliten su comprensión para efectuar operaciones con fracciones y sea capaz de dar la respuesta correcta.</td><td>No responde</td></tr>
<tr><td>EFP05</td><td>Interpretar fracciones en diferentes contextos y se utilizaran para nombrar distintas partes de una unidad</td><td>
</td></tr>
<tr><td>EFP07</td><td>El objetivo de la didáctica para la clase debe ser aprender a utilizar la suma de fracciones en contextos la vida real,</td><td>los indicadores de evaluación van a ser:
1. Traducir problemas de la vida real a fracciones.
2. Diferenciar de forma correcta las fracciones homogéneas y heterogéneas.
3. Resolver de forma correcta las sumas de fracciones heterogéneas.</td></tr>
</table>

EFP09	El objetivo de aprendizaje para la clase se va a basar en el reconocimiento de fracciones heterogéneas y el correcto procedimiento al momento de sumar estas;	Así mismo se va a evaluar primeramente el reconocimiento de ¿Qué operación debe realizar al momento de leer la pregunta? Que pueda analizarlo y finalmente justificar ¿Por qué es una suma? O al contrario ¿Por qué sería una resta? Al conocer esto se evaluarán las estrategias que utilice el estudiante para llegar a una posible respuesta, ya sea por medio de gráficos o por la simple escritura de estas formalmente, se harán diversos ejercicios para el refuerzo del tema y para finalizar se les pedirá que ellos creen un problema para solucionar en casa
EFP14	Respuesta: Entender los diferentes problemas que se puedan presentar, posteriormente elegir una estrategia de trabajo favorable, para así emplear distintos procedimientos que nos lleven a una solución de dicho problema.	No responde
EFP19	**Objetivo de aprendizaje:** Resolver operaciones de fracciones heterogéneas usando una estrategia específica, a partir de una situación.	**Indicadores de aprendizaje:** Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
EFP21	El objetivo es la suma y resta de fraccionarios a partir de la vida marina y los mares, seguido se presenta que a partir de la problemática se busca llevar los datos reales de lo que sucede en el mundo y que hallarlos y comprenderlos podrán ayudar para buscar soluciones que todos puedan realizar para ayudar al planeta.	Evaluación: Comprobar los resultados, socializar como hallaron las respuestas y proponer los compromisos del grupo para ayudar a salvar las especies marinas.
EFP28	Objetivo de aprendizaje: Interpretar las fracciones en diferentes contextos (situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones) y graficarlas.	Indicadores de evaluación: • Explican con ejemplos situaciones similares en las que se perciba la fracción. • Comparan información presente en la situación matemática. • Grafican las fracciones de forma adecuada comprendiendo su significado respecto a lo numérico. • Identifican operaciones de suma/resta en situaciones matemáticas de fracciones heterogéneas. • Realizan operaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas.

Nota. La tabla muestra las respuestas obtenidas a los objetivos planteados con sus respectivos indicadores o la omisión de estos, como forma para evidenciar la diversidad de planteamiento y estructuras expuestas por los FP

Finalmente, en el apartado número tres de este bloque (VI.c) que corresponde a la categoría: *secuenciación con temas previos y posteriores*, está conformado por dos preguntas:

VI.c	**1).** ¿Qué contenidos matemáticos se deben trabajar con anterioridad a la resolución del problema diseñado?	**KMLS**	Secuenciación con temas previos y posteriores
	2). ¿Qué contenidos matemáticos se pueden trabajar con posterioridad a la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta		

Respecto a este apartado, se evidenció una variedad de respuestas (ver Figura 11) las cuales, algunas, son reiterativas en los FP; sin embargo, se evidenció que hay confusión en lo que significa a un contenido matemático, ya que al pedir que nombraran los temas que puede trabajar posteriormente con la suma y/o resta de fracciones, quedan igualmente inmersos en este contenido, lo cual se puede evidenciar más en concreto en la parte superior derecha de la figura.

Figura 11

Contenidos matemáticos para trabajar con suma y/o resta de fracciones expuestos por los FP.

Nota. El esquema muestra los contenidos matemáticos que se deben y pueden trabajar con anterioridad y posterioridad en el tema suma y/o resta de fracciones.

Capítulo 5. Discusión y conclusiones

Esta investigación permitió reconocer el conocimiento especializado que tienen los futuros profesores de Educación Básica Primaria en el planteamiento de una tarea matemática sobre la enseñanza de fracciones heterogéneas desde los subdominios del modelo MTSK, y, así mismo, posibilitó establecer los conocimientos básicos para la enseñanza de las fracciones heterogéneas en la formación inicial de futuros profesores.

Ahora bien, a partir de los resultados obtenidos en la investigación se realiza un análisis con el fin de entender su significado y relevancia en el contexto del estudio (conocimiento del futuro profesor de matemáticas), lo cual se contempla a partir de la fundamentación teórica que sustenta este proyecto. Es por ello, que es necesario retomar la estructura del modelo MTSK, la cual está planteada desde el núcleo matemático y didáctico del contenido, esto envuelto en el marco de las creencias y concepciones que se tienen sobre las matemáticas en sí; es, a partir de ello, que se establecen dos dominios: el conocimiento matemático (MK) y, el conocimiento didáctico del contenido (PCK); los cuales serán los ejes de esta análisis y que están directamente relacionados con lo expuesto anteriormente en el apartado de resultados.

Inicialmente, se observó de manera global que los subdominios más seleccionados por los FP corresponden al KoT, el KMLS y el KPM; esto se respalda incluso con lo sucede conforme se ha encontrado en la revisión bibliográfica previamente citada y, desde los análisis de los investigadores propios del modelo. Son estos subdominios, precisamente, los que resaltan en los enfoques de los estudios, demostrando consistencia con los hallazgos de esta investigación.

En relación con el MK, se evidenció que los FP tienen una tendencia a actuar de acuerdo con las aplicaciones prototípicas de los saberes con números fracciones, es decir, aquellos que traen de su propia educación y experiencia en la escuela. Por ejemplo, en la elección de los bloques de este dominio el que más predominó fueron los conocimientos referentes a los fundamentos teóricos del contenido matemático (KoT) donde las respuestas fueron contempladas desde su referente como estudiantes en educación primaria. Por ello, al momento de confrontarse con denominaciones específicas como: problemas aritméticos, propiedades aritméticas, estructura matemática y definiciones del contenido, no comprenden a qué hace referencia, lo cual tiene relación con las tendencias educativas ya que están relacionadas con las concepciones propias de los FP en su paso por el proceso educativo sobre la enseñanza de la matemática y, limitada específicamente, con la problemática y confusión sobre este contenido y su relación con el pensamiento numérico. Lo anterior implica que existe una preferencia implícita en la forma en la que los FP delimitan sus saberes por sus creencias sobre la enseñanza y conocimiento matemático que deben seleccionar para la enseñanza.

De igual forma, esto se evidencia en los conocimientos de los FP relacionados con los procesos que conducen a la resolución de problemas (KPM), como lo son las estrategias aplicables a un contenido y actividades específicas que se plantean para que el estudiante aprenda y cree su propio conocimiento. Los FP comprenden estos heurísticos desde estos conocimientos prototípicos y aquellos métodos que les fueron enseñados para sintetizar los procesos. Específicamente se hace referencia al método de la 'carita feliz' y el m.c.m, y el uso de la representación gráfica de barras y circular. Cabe aclarar el juicio que se expone aquí no es sobre el método per se, sino en el desconocimiento de las propiedades que engloban estos, es decir, aquí alarma es que no hay una profundidad en los saberes que debe tener el FP para garantizar el proceso de enseñanza. Lo cual, se justifica desde una formación en la educación primaria que limita a la aplicación de métodos tradicionales y no al conocimiento a profundidad de los conceptos y, también, se restringen a los saberes dentro del pensamiento numérico, pero no a los procesos que involucran este y su contexto;

tal y como es expuesto en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) desde la estructura curricular del quehacer matemático. Entonces, si el profesor no domina las matemáticas ¿cómo va a poder proponer algo diferente a lo que ya cree debe enseñarse y no repetirá las mismas prácticas prototipadas?

Por otra parte, también es importante mencionar que dentro de este apartado la elección casi nula del KSM llama la atención, ya que los bloques que no fueron seleccionados están justificados en palabras de los FP como: “no es un tema que haya visto antes” o “no sabía sobre ello”, y se trata precisamente de los saberes que el profesor tiene sobre las relaciones que pueden establecerse entre varios contenidos matemáticos, las cuales pueden complejizar o simplificar la temática. Lo anterior, implica entonces que existen conocimientos que se están omitiendo en la formación de los FP, donde además, se cuestiona sobre qué habilidades de investigación se están enseñando, ya que son muy selectivos en las búsquedas que realizan, lo cual no es congruente con el perfil de egresado que plantea la licenciatura, pues este exponen que deben ser maestros investigadores, que se cuestionen sobre su propio conocimientos y los recursos que surgen para mediar los procesos de enseñanza y aprendizaje; y, en la práctica o confrontación de saberes los FP se justifiquen bajo la noción “no sé” y no busquen más allá del conocimiento que reciben en su formación.

En lo relacionado con el PCK, se denota principalmente el conflicto que existe en los FP sobre los conocimientos relacionados con las teorías de enseñanza (KMT) y de las teorías de aprendizaje (KFML). Principalmente se observó al analizar el apartado KMT, que algunas de las teorías de enseñanza que se plantearon son realmente de aprendizaje. Lo anterior se debe a que existe una confusión en el acto de enseñar, es decir, donde hay dos actores que participan y que hasta cierto punto están interrelacionados, donde el profesor debe tener claro cuáles son los objetivos de su clase y, a partir de ello, debe establecer qué es lo que quiere que el estudiante aprenda; siendo así una en consecuencia de la otra. Es esta relación la que los FP no tienen clara, e implica que debe establecerse dentro de la formación una rigurosidad en estos conocimientos, ya que implica directamente la forma en la que el profesor idea las estrategias de sus clases para un orientar un aprendizaje concreto en los estudiantes.

Respecto al conocimiento relacionado con los contenidos matemáticos que se exigen en cada nivel educativo y su secuenciación a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje (KMLS), se determinó que el sustento teórico en el cual se basan los FP para determinar estos tópicos son los Estándares Básicos de Competencias (EBC) establecidos por el MEN, lo cual es congruente y pertinente para la formación disciplinar el profesor que aplicará en el contexto colombiano; sin embargo, lo anterior no debe privar el reconocimiento de otros referentes nacionales e internacionales que puedan ampliar una comprensión integral de las fracciones.

Se infiere que los conocimientos que poseen los FP están sometidos a las diversas creencias que tienen los estudiantes, profesores, investigadores e incluso la misma sociedad, sobre las matemáticas y, cómo se enseñan y aprenden; porque tal y como lo exponen Montes et al. (2013) estas son los que "[…] permean y definen el uso del conocimiento" (pág. 1807). Es decir, determinar que las creencias son el componente que permite entender los conocimientos de los profesores, ya que son en suma fruto de sus experiencias personales y académicas, esto permitirá establecer cómo influirá posiblemente en la práctica del profesor y, así reestructurar las acciones y estrategias pedagógicas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, mi propia experiencia en la formación como futura profesora por medio del curso de esta licenciatura y los resultados obtenidos en esta investigación permite concretar ciertos puntos relacionados con los conocimientos básicos en la enseñanza de los fraccionarios.

Inicialmente, es un concepto que, aunque se contempla en los EBC, no existe una profunda comprensión de su propio conocimiento, donde solo enfoca la resolución de problemas que implican fracciones y no los procesos o el contexto en el que pueden darse para potenciar su enseñanza, lo cual se debe a que no hay evidente transposición didáctica, en este caso, hacia la matemática escolar para la enseñanza de los fraccionarios. Así mismo, es pertinente mencionar el uso de tareas matemáticas que incluyan que el futuro profesor tenga contacto con la realidad para este simule y ponga en práctica los conocimientos que tiene y pueda realizar una reflexión crítica sobre las fortalezas que tiene y los aspectos por mejor.

En definitiva, el MTSK es un modelo analítico que como profesores e investigadores debemos aplicar, ya que permite estudiar los conocimientos que influyen en la enseñanza de las matemáticas desde los diferentes aspectos que la comprenden, realizando así un análisis íntegro: que da paso a evidenciar los aspectos más fuertes que posee el profesor, pero también, los cambios que debe realizar para desde allí reestructurar la formación, la enseñanza y sus propias creencias y concepciones que envuelven esta área de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Aguilar, Á., Montes, M., Carrillo, J. & Ribeiro, M. (2015). Explorando el conocimiento especializado de una maestra investigativa y su relación con la práctica.

Arteaga-Martínez, B., y Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento espe- cializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la repre- sentación de fracciones. Educatio Siglo XXI, 40(1), 107–130.

Ball, D; Thames, M; & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Berelson, B. (1952). *Content Analysis in Comunication Research*, Free Press, Glencoe.

Bromme, R. (1994). Beyond Subject Matter: A Psychological Topology of Teachers Professional Knowledge. In R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer, & B. Winkelman (Eds.), D*idactics of Mathematics as a Scientific Discipline (*pp. 73-88).

Cañadas, M. C., y Castro, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En Segovia y Rico (Coord.). Matemáticas para maestros en Educación Primaria (pp. 75-98). Madrid: Pirámide.

Cardeñoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, 233-244.

Carreño, J. S. (2012). La formación docente. Temas, debates y escenarios de prioridades. *Acción Pedagógica*, *21*(1), 58–63

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones.* Universidad de Sevilla. Sevilla: Tesis doctoral.

Carrillo, J., Rojas, N., y Flores, P. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. Avances de investigación en Educación Matemática, (4), 47-64.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Cayo Maturana, H. C. y Contreras González, L. C. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática, 32(2), 39-68.*

Cerda Gutiérrez, H. (1993). Los elementos de la Investigación. *Como reconocerlos, diseñarlos y construirlos.* Editorial El Buho, Bogotá.

Climent, N., & Montes, M. (2022). El modelo MTSK: antecedentes y estructura. *El modelo MTSK: antecedentes y estructura, 27-34.*

Delgado Rebolledo, R., Zakaryan, D., & Alfaro Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. *El conocimiento de la práctica matemática, 57-69.*

Ebbutt, D. y Elliott, J. (1990). *¿Por qué deben investigar los profesores?* En J. Elliott, La investigación-acción en educación (pp. 176-190). Madrid: Morata.

Egg, E. A. (2011). Aprender a investigar: nociones básicas para la investigación social.

Ernest, P. (1988). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En Mathematics Teaching: The State of the Art, pp. 249 – 254. London: Falmer Press.

Escudero Ávila, D. I., Carrillo Yáñez, J., Flores Medrano, E., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., & Montes Navarro, M. Á. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA.

Esparza-Rodríguez, E. y Lizarde-Flores, E. (2021). MTSK en la apropiación de una ingeniería didáctica aplicada sobre problemas multiplicativos de fracciones.

Esteban Duarte, P. V. (2015). Fracciones aritméticas y algebraicas. Universidad EAFIT

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' Knowledge and its impact. In D.A. Grows (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.147 – 164).

Flores Medrano, E., Escudero, D. I., & Carrillo Yáñez, J. (2013). A Theoretical Review of Specialised Content Knowledge.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., & Coca, M. M. (2022). El uso de representaciones y de problemas para la adquisición del conocimiento didáctico matemático de fraccciones en la formación de maestros. APEduC Revista- Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia, 3(2), 98-113.

Forero, D. (2022). *¿Qué hacer en educación?*, pp. 24-29. En Mejía, L. F. (Coord. y Ed.). ¿Qué hacer en políticas públicas? Bogotá: Fedesarrollo.

Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C., & Wilhelmi, M. R. (2012). Métodos de investigación en las ponencias y comunicaciones presentadas en los simposios de la SEIEM. Avances de investigación en Educación Matemática, 1(2), 29-52.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–285). The National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez, M. J. (2007). La investigación educativa: claves teóricas. McGraw-Hill Interamericana de España, S. A. U.

González, M. A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. Islas, (138), 125-135.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978) Semantic processing in arithmetic word problem solving. Paper presented at the Midwestern Psychological Association Convention, Chicago.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2021). Informe nacional de resultados del examen Saber Pro-2020 (vol. I).

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2022). Herramientas de análisis para docentes sobre las competencias de los estudiantes en los grados 3º, 5º y 9º 2022: Aprendizajes en el área Matemáticas de grado 3º.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2022). Herramientas de análisis para docentes sobre las competencias de los estudiantes en los grados 3º, 5º y 9º 2022: Aprendizajes en el área Matemáticas de grado 5º.

Kieran, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: papers from a research workshop (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC

Lambdin, D. (2003). Benefits of teaching through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 3–13). NCTM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates

Lima Díaz, I. (2017). Perspectivas del conocimiento especializado del profesor de matemáticas como elemento de su desarrollo profesional. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (42), 175-191.

Liñán García, M. M., Barrera Castarnado, V., & Infante Infante, J. M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. Escuela Abierta, 17(1), 41–63.

Lizarde, E.; Hernández, F y Loera, S. (2015). “Problemas de enseñanza”: una alternativa para la construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En *Memoria electrónica del congreso nacional de investigación educativa.* Vol 2, No. 1

Lizarde, F. E., Hernández, G. F. J., y Zúñiga, Z. J. L. (2017). “Maestro devolviente”: La gestión en la construcción del MTSK de los docentes en formación.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (8 de febrero de 1994). Ley General de Educación 115. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares. *Magisterio, Bogotá.*

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2002). *Estatuto de Profesionalización Docente. Decreto 1278 de 2002.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86102_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias Ciudadanas en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. *Bogotá, DC.*

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. *Bogotá, DC.*

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017). *Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2016. El camino hacia la calidad y la equidad.* UNESCO. https://siteal.iiep.unesco.org/sites/default/files/sit_accion_files/siteal_colombia_0404.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2021). *Adelante maestros. Formación inicial.* https://www.mineducacion.gov.co/portal/adelante-maestros/Formacion/Formacion-Inicial/

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2022). *La formación docente en Colombia*. Nota técnica. Bogotá, DC. https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-363488_recurso_18.pdf

Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK.

Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñán García, M. D. M., Muñoz Catalán, M. C., Climent, N., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. Revista de Educación, 367, 36-62.

Mora, F., & Barrantes, H. (2008). ¿ Qué es matemática? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos, 4*, 71-81.

Moreno Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2003, vol. 21, núm. 2, p. 265-280*

Muñiz-Rodríguez, L., Valenzuela-Molina, M., Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). ¿Qué aprendemos sobre el conocimiento de los estudiantes para maestro a partir de su autoconcepto? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 391-399). SEIEM.

Muñoz, C. C. (2011). Tipos de problemas matemáticos. *Pedagogía Magna*, (11), 265-274.

Muñoz Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.Á. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18 (3), 1801-1817.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Orrantia, J., González, L. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto en educación primaria. Infancia y aprendizaje, 28(4), 429-451.

Padilla, I. A., & Acevedo-Rincón, J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: mediaciones con TIC. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*, *12*(1), 93-106.

Padilla-Escorcia, I. A., & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Conhecimento especializado do professor de matemática no ensino da modelagem da elipse por meio de recursos tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, *19*(1), 67-83.

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Sophia, 18(2).

Padilla-Escorcia, I., Acevedo-Rincón, J. P., & Montes, M. A. (2023). Specialised Knowledge of the Mathematics Teacher to Teach through Modelling using ICTs. *Acta Scientiae*, *25*(1), 160-195.

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. P. (2023). Caracterización del conocimiento especializado del profesor que enseña la hipérbola a través de las TIC. *Encuentros*, *21*(02-Julio-Dic.), 1-14.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Peña Aguayo, J. M. (2018). Conocimiento de un profesor en enseñar los números racionales. idUS - Depósito de Investigación Universidad de Sevilla

Pérez, A. (1996). Comprender la enseñanza en la escuela. Modelos metodológicos de investigación educativa.

Pinilla, M. I. F. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. *Volumen*, 25.

Reyes, A., & Sosa, L. (2016). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en formación inicial para enseñar la razón como un significado de la fracción. Investigación e Innovación En Matemática Educativa, 1, 442-449.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Ediciones Aljibe. Granada (España).

Rodríguez, E. C. (2015). Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros (Doctoral dissertation, Universidad de Granada

Rodríguez, P. y Navarrete, C.A. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profe sor sobre fracciones en el aprendizaje de alumnos de 4o. grado. R*evista Electrónica de Investigación Educativa*, *22*, *e*10, 1-18.

Rojas, N., Carrillo, J., & Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29, 143-166.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015b). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29, 143-166.

Sampieri, R. H. (2018). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. *McGraw Hill México.*

Sandín, E. (2003). Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones. España: Mc Graw Hill.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. Educational Review, 57(1), 1-22.

Thompson. A. G. (1992). *Teachers' Beliefs and Conceptions: A synthesis of the Research.* In D. A. Grouws (Ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, (pp.127-146). New York: Macmillan Publishing Company.

Törner, G., Rolka, K., Rösken, B., & Sriraman, B. (2010). Understanding a teacher's actions in the classroom by applying Schoenfeld's theory teaching-in-context: Reflecting on goals and beliefs. Theories of mathematics education: Seeking new frontiers, 401-420.

Valenzuela-Molina, M., Ramos-Rodríguez, E., & Flores, P. (2019). Transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de primaria sobre división de fracciones. In Actas del IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 228-238).

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining Interactions between Problem Posing and Problem Solving with Prospective Primary Teachers: A Case of Using Fractions. Educ Stud Math 96, 101–118. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016) Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. Zetetiké, Campinas, SP, v.24, n.3, set./dez. p.301-321

Apéndices

Apéndice A. Consentimiento informado

Consentimiento informado para participantes con uso de tarea matemática y entrevista para la investigación

Título de la investigación: Conocimiento especializado de los futuros profesores de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de las fracciones

Investigadora principal: Tifanni Julieth Sarmiento Afanador

Directora: Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Línea de investigación: Investigación Educativa

Por medio de este documento le invitamos a participar en el desarrollo de la investigación titulada: **Conocimiento especializado de los futuros profesores de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de las fracciones** cuyo objetivo es "*caracterizar el conocimiento especializado que tienen los futuros profesores de primaria sobre la enseñanza de las fracciones heterogéneas*". La participación consiste en realizar unas tareas matemáticas planteadas en las asignaturas Pensamiento Matemático II y Didáctica , la cual consiste en responder a situaciones usando conocimiento sobre las fracciones heterogéneas; y, con base en ello, de ser necesario, contestar una entrevista.

La recolección de datos está respaldada por la ley 1377 de 2017, capítulo II, artículo 4; en el que se expresa que mediante la autorización del participante se pueden recolectar datos personales con un fin específico. Asimismo, su participación es totalmente voluntaria. Por lo tanto, usted elige sí desea hacer parte o no del proceso investigativo propuesto. En caso de que decida participar de la investigación, su rol como informante se encuentra amparado bajo el Decreto Reglamentario 1377 del 2013 dentro del Capítulo II, donde se aborda la autorización de datos específicamente el artículo 9, el cual estipula que usted podrá solicitar (en caso de que desee hacerlo) a la investigadora el retiro de su participación dentro del proyecto y de la presentación de la información ha sido suministrada por usted.

Los resultados de la investigación serán presentados sin dar a conocer su identidad ni la de ningún participante. Los datos serán compartidos con fines académicos en el Trabajo de Investigación y su difusión académica en grupos de investigación y congresos nacionales e internacionales. Una vez completada la investigación todas las fuentes de datos serán resguardadas con protección de privacidad, para uso en posteriores investigaciones que requieran el material en beneficio del mejoramiento de la enseñanza y formación de futuros profesores de Educación Básica Primaria.

Manifestación del participante

- He leído y comentado el documento titulado "Consentimiento informado para participantes con uso de tarea matemática y entrevista para la investigación" con la investigadora.

- He tenido la oportunidad de realizar preguntas respecto al propósito, procedimiento y uso de datos del estudio.
- Mi participación es el estudio es voluntaria y puedo decidir retirarme en cualquier momento.
- La investigadora puede retirarme del estudio de acuerdo a su discreción profesional.
- Con mi firma expreso mi decisión de participar en el proyecto.

Si usted tiene alguna pregunta o duda respecto a este trabajo en el que se le está invitando a participar puede contactarse con la investigadora de la Universidad Industrial de Santander: Tifanni Julieth Sarmiento Afanador, al correo

Con las firmas a continuación se expresa la voluntad de participación, de acuerdo con los términos descritos anteriormente.

____

Participante

Nombre completo:

Identificación:

Fecha:

____

Testigo

Jenny Patricia Acevedo-Rincón
CC.

Fecha:

____

Investigadora principal

Tifanni Julieth Sarmiento Afanador
CC.

Fecha:

Apéndice B. Tarea matemática escolar

Instrucciones para la tarea sobre decimales

1. **Busca** en medios de comunicación escritos (periódicos, revistas o folletos comerciales) **una situación** en la que aparezca el concepto de fracción. Realiza una foto o captura de la situación e inclúyela en la tarea.
2. A partir de la situación anterior, **diseña un problema** que permita trabajar la **suma o la resta de fracciones heterogéneas** con alumnado de Educación Primaria.
3. **Resuelve el problema**, explicando paso a paso el razonamiento seguido para llegar a la solución.
4. A continuación, se presentan seis bloques de preguntas. **Elige dos de estos bloques** y **responde** a **todas** las cuestiones que se plantean en **ambos bloques** teniendo en cuenta el problema que has diseñado:

Bloque I	**I.a.** ¿De qué tipo son las fracciones que aparecen en el problema diseñado? ¿Qué situación de uso de fracciones (i.e., reparto, medida, trueque, transformación…) se refleja? ¿Qué técnica has utilizado para reducir a común denominador? Justifica tus respuestas. **I.b.** ¿Cómo definirías formalmente la suma/resta de fracciones? Escribe tu propia definición. ¿Qué propiedades aritméticas se reflejan en el problema diseñado? Justifica tu respuesta. **I.c.** ¿Qué modelo gráfico utilizarías para resolver el problema? Justifica tu respuesta. ¿Cómo resolverías el problema utilizando dicho modelo? Justifica tu respuesta. **I.d.** ¿Qué tipo de problema aritmético (i.e., cambio, combinación, comparación…) se refleja? ¿A qué estructura pertenece el problema diseñado? ¿Qué tipo de contexto (i.e., personal, profesional, social, científico…) se pone en juego? Justifica tu respuesta.
Bloque II	**II.a.** Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que aumente la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta. **II.b.** Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que disminuya la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta. **II.c.** ¿Qué otros contenidos matemáticos comparten características comunes con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta. **II.d.** ¿En la enseñanza y el aprendizaje de qué otros contenidos matemáticos se requiere la suma/resta de fracciones? ¿Se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta.
Bloque III	**III.a.** ¿Qué heurísticos (i.e., estrategias) aplicables a la **resolución de situaciones** de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.
Bloque IV	**IV.a.** ¿Qué **teorías de enseñanza** de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo las implementarías en el aula? Justifica tu respuesta. **IV.b.** ¿Qué recursos didácticos se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? ¿Qué características matemáticas tienen estos recursos que justifican la idoneidad de estos para el contenido matemático a enseñar? Justifica tu respuesta. **IV.c.** ¿Qué estrategias, técnicas y tareas se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? ¿Qué potencialidad matemática, limitaciones u obstáculos presentan? Justifica tu respuesta.

Bloque V	**V.a.** ¿Qué **teorías de aprendiz**aje de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo? Justifica tu respuesta. **V.b.** ¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para comprender la suma/resta de fracciones? Justifica tu respuesta. ¿Qué errores o dificultades se pueden presentar en la resolución del problema diseñado? Propón algunos ejemplos. **V.c.** ¿Qué preguntas plantearías para guiar la enseñanza y el aprendizaje de la suma/resta de fracciones? Especifica en tu resolución paso a paso (como respuesta al punto 3.) dichas preguntas. ¿Qué respuestas esperas para cada una de ellas? Justifica tu respuesta. **V.d.** ¿Planeta el problema diseñado una situación de interés para el alumnado? Si tuvieras que cambiar el problema diseñado, ¿con qué intereses del alumnado lo relacionarías? Justifica una situación particular.
Bloque VI	**VI.a.** ¿En qué nivel de aprendizaje es adecuado trabajar este tipo de situaciones? Indica la edad y el curso y justifica tu respuesta. **VI.b.** Propón un objetivo de aprendizaje para la clase en la cual se trabajaría el problema diseñado con sus respectivos indicadores de evaluación. **VI.c.** ¿Qué contenidos matemáticos se deben trabajar con anterioridad a la resolución del problema diseñado? ¿Qué contenidos matemáticos se pueden trabajar con posterioridad a la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.

Nota. Tabla tomada y adaptada de Muñiz et al. (2022).