

---

---

**DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS  
DENTRO DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE SUPERRESOLUCIÓN  
DE TOMOGRAFÍA COMPUTACIONAL DE RAYOS-X**

---

---

**Edson Fabián Mojica Rodríguez**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas  
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática  
Maestría en Ingeniería de Sistemas e Informática  
Bucaramanga  
2017**

---

---

**DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS  
DENTRO DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE SUPERRESOLUCIÓN  
DE TOMOGRAFÍA COMPUTACIONAL DE RAYOS-X**

---

---

**Edson Fabián Mojica Rodríguez**

**Trabajo de Investigación para optar al título de:  
Magíster en Ingeniería de Sistemas e Informática**

Director:  
**Ph.D. HENRY ARGUELLO FUENTES**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas  
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática  
Maestría en Ingeniería de Sistemas e Informática  
Bucaramanga  
2017**

# Dedicatoria

---

*A mi madre, Carmen Sofia Rodríguez.* No he conocido esfuerzo más grande para ver a sus hijos crecer, del mismo modo espero reflejar sus enseñanzas para brindar a los demás lo que me fue brindado hasta hoy.

*A mi padre, Enor Mojica.* Hombre grande de oscura mirada y cabellos enredados como las ideas que de él me heredan, su ausencia solo fortalece la motivación de crecer, gracias Papá.

*A mi director, Henry Arguello.* En la vida, las oportunidades son pocas, pero los riesgos muchos, líder y director cauteloso que me brindó la oportunidad de trabajar en su grupo de investigación. A quien le adeudo mi más sincera disculpa por toda preocupación.

*A mi hermana, Karen Mojica.*

Crecimos juntos, luchamos juntos y por más lejos que esté siempre tengo presente que su apoyo incondicional ha dado frutos en este trabajo de una u otra forma.

*A mis familiares.* Que aún en los más duros momentos, me brindan una sonrisa para no decaer.

*A Dios.*

Por haberme bendecido con los dones que me ha otorgado, por permitirme llegar al camino de la ciencia y la educación nuevamente. Por haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

## Reconocimiento

---

Agradezco a todos mis compañeros y profesores que creyeron en mi capacidad. Es grato contar con un grupo de trabajo fuerte y disciplinado como lo es HDSP, que realiza mucho con tan poco, los admiro, por inspirarme con su dedicación, paciencia y disciplina en el trabajo. En sus manos está la posibilidad de desarrollar el más alto potencial de nuestra nación. Agradezco a su director el profesor Henry por su formación, no fue nada fácil, sin embargo, ha dejado una gran huella de cambio.

A la Universidad Industrial de Santander y a cada profesor que entendió mis competencias, fortalecidas en el periodo de estudio de la Maestría de Ingeniería de Sistemas e Informática.

# CONTENIDO

	pág.
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Teoría de tomografía computarizada de rayos X</b>	<b>14</b>
1.1 Introducción a la tomografía . . . . .	14
1.2 Principios físicos . . . . .	14
1.3 Reconstrucción de la imagen . . . . .	16
<b>2 Sistema lineal</b>	<b>20</b>
2.1 Propiedades . . . . .	20
2.2 Criterios de evaluación . . . . .	22
<b>3 Teoría del muestreo compresivo</b>	<b>25</b>
3.1 Señal dispersa . . . . .	25
3.2 Incoherencia e incoherencia mutua . . . . .	26
3.3 Recuperación de una señal utilizando MC . . . . .	26
3.4 Matriz de preconditionamiento . . . . .	28
<b>4 Sistema compresivo de Superresolución de tomografía computacional de rayos X</b>	<b>31</b>
4.1 Sistema compresivo de tomografía computacional de rayos X . . . . .	31
4.2 Sistema compresivo de Superresolución . . . . .	35
<b>5 Preliminares a la metodología de optimización</b>	<b>37</b>
5.1 Perspectiva de diseño de aperturas codificadas basada en el vector de medidas . . . . .	38
5.2 Perspectiva de diseño de código de apertura basada en la matriz de medidas . . . . .	39
<b>6 Optimización de aperturas codificadas</b>	<b>40</b>
6.1 Condiciones ortogonales . . . . .	40
6.2 Condiciones de homogeneidad espacial . . . . .	41
6.3 Pseudocódigo de optimización propuesto . . . . .	42
<b>7 Pruebas y resultados</b>	<b>47</b>
7.1 Pruebas de submuestreo . . . . .	49
7.2 Búsqueda de transmitancia . . . . .	49
7.3 Pruebas para la transmitancia de 25% y 6.3% . . . . .	52
7.4 Pruebas para la transmitancia de 25% y 6.3% con ruido . . . . .	56
<b>8 Conclusiones, contribuciones y trabajos futuros</b>	<b>59</b>
8.1 Conclusiones . . . . .	59
8.2 Contribuciones . . . . .	59
8.3 Trabajo Futuro . . . . .	60
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
1	<i>Sistema de tomografía de haz de abanico que proyecta a un conjunto de detectores.</i> . . . . . 15
2	<i>Coefficientes de la matriz de pesos.</i> . . . . . 18
3	<i>Representación gráfica de las matrices del modelo lineal de un sistema compresivo.</i> . . . . . 32
4	<i>Representación gráfica de las matrices del modelo lineal de un sistema compresivo de tomografía.</i> . . . . . 32
5	<i>Sistema compresivo CAXI tradicional.</i> . . . . . 33
6	<i>Sistema compresivo CAXI para mayor resolución.</i> . . . . . 35
7	<i>Sistema compresivo de alta resolución propuesto.</i> . . . . . 36
8	<i>Áreas comunes entre proyecciones.</i> . . . . . 37
9	<i>Matrices con condiciones no invertibles.</i> . . . . . 44
10	<i>Gráfica de comparación de los valores propios de la matriz hessiana al aplicar preconditionadores.</i> . . . . . 45
11	<i>Imágenes de prueba para la transmitancia óptima.</i> . . . . . 48
12	<i>Diferencias de PSNR para cada valor de transmitancia.</i> . . . . . 51
13	<i>Resultados sin ruido para 4 capturas al 6.3 %.</i> . . . . . 54
14	<i>Diferencia absoluta para reconstrucciones sin ruido con 4 capturas al 6.3 %.</i> . . . . . 55

## LISTA DE TABLAS

	pág.
1	Comparativo de PSNR para diferentes valores de submuestreo $d$ . . . . . 49
2	PSNR promedio en la búsqueda de la transmitancia de compresión de la imagen “ <i>Phantom</i> ”. Utilizando una relación 1:4 para el tamaño entre la apertura codificada y el detector. 50
3	PSNR promedio en la búsqueda del máximo PSNR de reconstrucción de la imagen “ <i>Phantom</i> ”. Utilizando una relación 1:4 para el tamaño entre la apertura codificada y el detector. . . . . 50
4	Calidad de las imágenes reconstruidas del abdomen en dB. . . . . 53
5	Calidad de las imágenes reconstruidas del cráneo en dB. . . . . 53
6	Calidad de las imágenes reconstruidas del torax en dB. . . . . 53
7	Calidad de las imágenes sintéticas reconstruidas “Sheep-Logan Phantom” en dB . . . . . 53
8	PSNR de reconstrucciones con muestreo clásico, comparado con el modelo de TC de SR propuesto. . . . . 56
9	Resultados de la imagen Sheep-Logan Phantom con SNR de 20 dBs. . . . . 56
10	Resultados de la imagen cráneo con SNR de 20 dBs. . . . . 57
11	Resultados de la imagen torax con SNR de 20 dBs. . . . . 57
12	Resultados de la imagen abdomen agregando con SNR de 20 dBs. . . . . 57
13	Resultados con ruido de la imagen phantom . . . . . 57
14	Resultados con ruido de la imagen torax . . . . . 57
15	Resultados con ruido de la imagen abdomen . . . . . 58
16	Resultados con ruido de la imagen cráneo . . . . . 58

## Lista de Algoritmos

1 Optimización de código de apertura

46

# Resumen

---

TITULO: DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS DENTRO DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE SUPERRESOLUCIÓN DE TOMOGRAFÍA COMPUTACIONAL DE RAYOS-X <sup>1</sup>

AUTOR: Edson Fabián Mojica Rodríguez <sup>2</sup>

PALABRAS CLAVE: Tomografía computarizada, rayos X, muestreo compresivo, aperturas codificadas aleatorias, aperturas codificadas diseñadas, alta resolución y baja resolución.

La Tomografía Computarizada de rayos-X (TC) es una herramienta no destructiva para visualizar el interior de un objeto. Los sistemas de TC se usan en el control de calidad de forma industrial, la detección elementos explosivos, la investigación biomédica y el diagnóstico médico. Para mejorar el resultado de un diagnóstico o investigación, existe la necesidad de alta resolución en sistemas generadores de imágenes y la TC tiene limitaciones por la radiación excesiva de alta energía y el costo de los sensores. Recientemente, se ha investigado la implementación de Muestreo Compresivo (MC) en TC, y específicamente, el uso de aperturas codificadas que atenúan el haz de rayos X y disminuyen la radiación. Esto permite a los algoritmos basados en MC reconstruir una imagen a partir de muestras codificadas y comprimidas.

Por otro lado, la resolución espacial de la imagen está sujeta a las dimensiones de los detectores, por lo tanto, imágenes de alta resolución requieren detectores de alta resolución que demandan un alto costo en la adquisición. En este orden de ideas, en este trabajo se presenta la metodología para obtener imágenes de TC de alta resolución, utilizando detectores de baja resolución mientras se obtiene información a través de aperturas codificados de alta resolución, las cuales están diseñadas para obtener imágenes de alta calidad, en términos de PSNR, en comparación con métodos descritos en la literatura.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Investigación

<sup>2</sup>Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e informática. Director, PhD Henry Arguello Fuentes

# Abstract

---

TITLE: DESIGN AND OPTIMIZATION OF CODED APERTURES IN A COMPUTATIONAL COMPRESSIVE SUPERRESOLUTION SYSTEM OF X-RAY TOMOGRAPHY.<sup>3</sup>

AUTHOR:Edson Fabián Mojica Rodríguez <sup>4</sup>

KEYWORDS: Computed tomography, X-ray, compressive sensing, random coded apertures, designed coded apertures, high-resolution and low resolution.

The X-ray Computed Tomography (CT) is a non-destructive tool to visualize the interior of an object. CT systems are used in industrial quality control, security detection, biomedical research, and medical diagnostics. To improve the precision in a diagnosis or research exist a need for high-resolution imaging systems and CT have limitations due to the excessively high energy radiation and the cost of the sensors. Recently, the implementation of Compressive Sampling (CS) in CT has been investigated, and specifically, the use of coded apertures that attenuate X-ray beam and decrease radiation. This allows to CS-based algorithms reconstruct an image from encoded and compressed samples. However, the spatial resolution of the image is subject to the dimensions of the detectors, therefore, high-resolution images require high-resolution detectors that demand a high cost in the acquisition. In this context, this work presents the methodology for obtaining high-resolution CT images using low-resolution detectors, obtaining information through high resolution coded apertures that are designed to obtain high-quality images, in terms of PSNR, compared to methods described in the literature.

---

<sup>3</sup>Research Work

<sup>4</sup>School of Physical-Mechanical Engineering. Department of Systems Engineering and Informatics. Advisor, PhD Henry Arguello Fuentes

## Introducción

La Tomografía Computarizada (TC) es un método no invasivo que permite observar la estructura interna de un objeto Buzug (2008) usando rayos-X. Sus aplicaciones comprenden la detección de objetos Cozzini et al. (2012); Pani et al. (2009); Strecker (1998), control de calidad Smith (1999), diagnóstico médico Miller et al. (2008); Raff et al. (2005); Stein et al. (2006), entre otras. En el caso del diagnóstico médico, existen limitaciones debido a los riesgos presentes ante la exposición a la radiación de alta energía. En general, la exposición injustificada a los rayos-X puede generar efectos nocivos para la salud de seres vivos Sidky et al. (2011). Para mitigar estos efectos, se da paso a las alternativas de muestreo que permitan obtener imágenes de alta calidad sin poner en riesgo la condición del sujeto bajo estudio Sidky et al. (2009). Entre estas está la compresión de datos, que implica reducir la cantidad de muestras que se adquieren para recuperar una señal sin mayor distorsión.

Particularmente, la técnica de Muestreo Compresivo (MC) permite la adquisición de señales a tasas de muestreo menores al criterio de Nyquist, integrando la adquisición y compresión de una señal en un sólo proceso Candes et al. (2005). Un sistema de TC basado en muestreo compresivo incluye instalar aperturas codificadas entre la fuente de rayos-X y el objeto bajo estudio Brady et al. (2013); Kaganovsky et al. (2014); Brady et al. (2004), que cumplen la función de modular las proyecciones de las fuentes con patrones de materiales que atenúan la intensidad de los rayos-X. Este proceso está relacionado con la reducción de la radiación a la que está expuesto el sujeto en un escaneo tradicional MacCabe et al. (2013); Cuadros et al. (2015, 2014) y con la reducción de datos almacenados.

La reducción de datos en el proceso de muestreo puede tener efectos sobre la recuperación exitosa de imágenes de alta calidad. La forma de mitigar la baja resolución en imágenes digitales consiste en aplicar técnicas de procesamiento que aumenten la cantidad de información interpretable a partir de los datos disponibles, esto hace referencia específicamente a superresolución (SR). Esta técnica es prometedora en TC, debido a la independencia de los procesos físicos de muestreo. Una de las tareas más costosas y complejas en procesamiento de imágenes es el aumento del número de píxeles por unidad de área, comúnmente conocido como resolución de la imagen. La resolución de una imagen de TC es proporcional al tamaño y cantidad de los detectores, donde el costo de los detectores para los sistemas de rayos-X limita las posibilidades de incrementar el número de píxeles.

Teniendo en cuenta que las aperturas codificadas modulan la entrada de luz hacia cada pixel del detector, es posible modular la luz de forma aleatoria en un sistema tradicional, de tal manera que el área que cubre un pixel en el detector sea dividida. Este proceso puede considerarse como un aumento de píxeles por unidad de área, desde el punto de vista de SR de imágenes. De esta manera, bajo las limitaciones por el tamaño de los detectores Yan et al. (2015) y la radiación en un sistema de muestreo compresivo para TC, es posible simular detección de alta resolución con aperturas codificadas con píxeles de menor tamaño que los del detector y la reconstrucción de alta resolución puede abordarse desde algoritmos de SR.

En este documento se presentan los resultados de la técnica de SR en TC, a partir de las medidas de un sistema de muestreo compresivo basado en aperturas codificadas. Adicionalmente, algunos parámetros de diseño de los patrones de las aperturas son presentados y evaluados con el fin de optimizar el enfoque.

# 1. Teoría de tomografía computarizada de rayos X

## 1.1 Introducción a la tomografía

---

La tomografía computarizada (TC) se ha convertido en un método de diagnóstico indispensable para la visualización de la estructura interna de un objeto. Sus aplicaciones incluyen la detección de sustancias peligrosas Cozzini et al. (2012), explosivos Strecker (1998), control de calidad Smith (1999), detección de drogas Pani et al. (2009), diagnóstico médico Miller et al. (2008); Raff et al. (2005); Stein et al. (2006), ciencias forenses Thali et al. (2003a,b); Kellinghaus et al. (2010), entre otras. Esta tecnología desarrollada por Sir Godfrey Newbold Hounsfield entre 1960 y 1970, se dio a conocer en un artículo en la revista *British Journal of Radiology*, donde describía una técnica basada en rayos X, llamada tomografía computarizada de rayos X Hounsfield (1973). El método de Hounsfield, dividía matemáticamente la cabeza en cortes transversales, donde cada corte irradiaba por los bordes la energía conocida hoy como rayos X. A diferencia de otras técnicas ésta permitía representar distintos coeficientes de atenuación de los tejidos presentes en el plano transversal y reconstruirlas a partir de los datos obtenidos de la excitación de los detectores.

La gran ventaja de la TC es que permite caracterizar estructuras bidimensionales de un plano tridimensional, proporcionando información de la composición del objeto sin la necesidad de introducir ningún medio de contraste. Si bien la TC ha alcanzado un nivel de madurez, ésta sigue siendo un área atractiva de investigación en la que se pretende minimizar las limitaciones que representan los efectos secundarios de la radiación de alta energía Buzug (2008).

Esto se ve reflejado desde el EMI Mark I, el primer escáner comercializado en 1973 Buzug (2008), que a pesar de producir imágenes de baja resolución ( $80 \times 80$  píxeles) y tardar alrededor de 9 horas para cubrir el cerebro Beckmann (2006); Kalender (2005), representó una revolución.

En un principio los tomógrafos utilizaban rayos paralelos capturados por un único detector, basando su detección en la traslación de la fuente y el detector, parar la traslación, rotar, parar y repetir. Para mejorar la velocidad de adquisición, se incrementó el número de detectores Ramírez et al. (2008); Buzug (2008), pero era necesario el desplazamiento de la fuente. Para eliminar el movimiento de traslación se propone cubrir al paciente con un haz de rayos X en forma de abanico, mientras que la fuente y un número de detectores rotan simultáneamente, permitiendo disminuir los tiempos de adquisición a segundos esta configuración se muestra en la figura 1.

Esta geometría presenta el problema que al tener errores de calibración en algún detector, respecto a los demás, se forman artefactos en forma de anillo en las imágenes reconstruidas. Adicional a esto, se da una dispersión de rayos X producida por la forma en que se realizan las proyecciones por el sistema Goldman (2007).

Sin embargo, actualmente la teoría y las nuevas arquitecturas, se caracterizan principalmente, por tener arreglos multidimensionales de detectores que basan su geometría en la arquitectura de haz de abanico para recopilar información de varias regiones transversales al mismo tiempo Goldman (2008). Debido a esto, es de interés proponer cambios en la arquitectura de haz de abanico que permitan obtener datos con una menor cantidad de radiación.

## 1.2 Principios físicos

---

Un tubo de rayos X está compuesto por un cátodo, un ánodo y una fuente de poder. El cátodo, se calienta y libera la energía de los electrones del átomo, proporcionando que los electrones libres se aceleren hacia el ánodo. Gracias a la diferencia de potencial que existe entre el ánodo y el cátodo, los electrones libres adquieren una cantidad de energía cinética significativa. Cuando los electrones chocan con la placa de material del ánodo, estos pierden su energía cinética, bien sea mediante excitación,

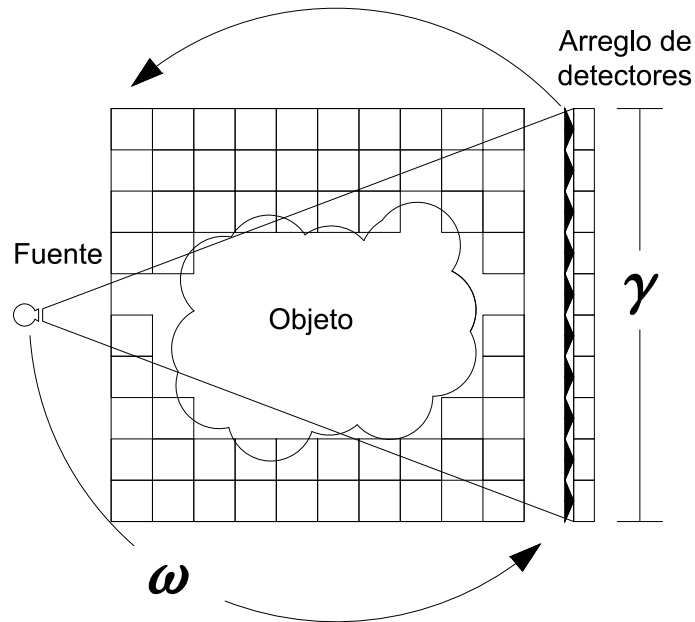


Figura 1: *Sistema de tomografía de haz de abanico que proyecta la energía de rayo X en un conjunto de detectores.*

ionización o radiación. Los rayos X son generados cuando se produce la emisión de un fotón, que llenan los espacios producidos por las interacciones descritas de los electrones Buzug (2008).

El coeficiente de atenuación  $\mu$  representa la capacidad de un material para detener dichos fotones, este coeficiente es directamente proporcional al número atómico del material ( $Z$ ) y su densidad, actuando de forma inversa con la energía que lo atraviesa. La descripción de las interacciones entre los fotones y el coeficiente de atenuación  $\mu$  están descritas por el efecto Compton y el efecto fotoeléctrico, de tal forma que se pueden describir las atenuaciones de la energía a través de la materia en comparación con otras interacciones que se pueden dar como los efectos de dispersión o reflexión de la energía que pueden ser asumidos como fuente de ruido.

El efecto Compton es atribuido a la interacción entre los rayos X y tejidos blandos, caracterizado por absorber parte de la energía del fotón incidente, donde la energía se utiliza para la expulsión de un electrón de alta energía y la dispersión de un fotón de menor energía.

El efecto fotoeléctrico predomina en los materiales de alto número atómico, y se caracteriza porque el fotón incidente causa la expulsión de un electrón y la producción de un fotón de baja energía. Se diferencia del efecto Compton en que el fotón se dispersa debido a un electrón de las capas exteriores que se desplaza hacia una capa más interior y no presenta absorción de energía. La probabilidad de estas interacciones decrece a medida que la energía del fotón se aleja de la energía de unión de la capa "K", la capa de electrones más cercana al núcleo. A medida que el coeficiente de atenuación lineal de un material aumenta, más blanco aparecerá éste en la imagen, y viceversa. Por otro lado, es importante tener en cuenta que los fotones dispersados contribuyen negativamente al contraste de la imagen, puesto que cambian la energía y dirección de los rayos incidentes. Estos se asumen como lecturas de ruido y no aportan información para la reconstrucción de la imagen Buzug (2008).

Una imagen es una representación bidimensional tomada de la distribución tridimensional del objeto. Dicho objeto puede ser dividido en voxeles con una resolución espacial  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Así cada voxel agrupa información de gran cantidad de atenuaciones. Las atenuaciones de una serie de elementos agrupados en un voxel son el producto entre la atenuación efectiva  $\mu$  y la interacción de los rayos X en el voxel. Si la intensidad del rayo X incidente en el objeto es  $I_0$ , una distribución no homogénea

de atenuaciones  $\mu(i)$  en cada punto a lo largo de una trayectoria en línea recta  $L$ , puede afectar la intensidad de  $I_0$ , generando una intensidad resultante  $I(i)$  del rayo X que depende de la distancia atravesada  $i$  y de la interacción con cada punto de atenuación, obedeciendo la ley de Beer-Lambert, dada por:

$$I(i) = I_0 e^{-\int_0^L \mu(i) di}. \quad (1.1)$$

Dada la intensidad de la energía emitida por la fuente  $I_0$  y la lectura de la intensidad en el detector  $I(i)$ , la ecuación (1.1) puede expresarse como:

$$p(i) = -\ln\left(\frac{I(i)}{I_0}\right) = \int_0^L \mu(i) dx \quad (1.2)$$

El resultado en (1.2) provee los datos de la proyección  $p(i)$ . Esto implica que el detector, registra la integral de línea de la trayectoria que depende de las atenuaciones en cada región del objeto. Adicionalmente, se tiene que aunque los rayos X interactúan con información volumétrica, el detector registra una proyección  $p(i)$ , que es una señal unidimensional para cada ángulo  $\theta$ . Dichas proyecciones usualmente se almacenan en una matriz de coeficientes  $p(i, \theta)$  que constituye el sinograma, una representación bidimensional de las medidas. Tras la reconstrucción de la imagen a partir del arreglo bidimensional del sinograma, se obtiene una imagen bidimensional, donde cada pixel tiene por intensidad el valor estimado de la atenuación  $\mu$  de su correspondiente voxel. Sin embargo, para esto se asume que cada voxel contiene una atenuación uniforme, lo cual no es necesariamente cierto, debido a que cada uno puede contener un volumen parcial de varias densidades.

La reconstrucción de una imagen de TC asigna en cada voxel una atenuación  $\mu$ , cuando el coeficiente de atenuación aumenta, la imagen toma para los pixeles tonos más blancos, caso contrario para la reducción del coeficiente de atenuación, esto a partir de las proyecciones  $p(i, \theta)$ . Para asignar los valores de las atenuaciones, pueden utilizarse métodos analíticos o iterativos. Entre los métodos analíticos se encuentra la retroproyección y la retroproyección filtrada FBP (del inglés Filtered Back Projection) Shepp and Logan (1974). Por otro lado, los métodos iterativos incluyen el método iterativo algebraico ART (del inglés Algebraic Reconstruction Technique) Gordon et al. (1970) y el método iterativo estadístico Rockmore and Macovski (1976), donde la solución del sistema es posible gracias a las  $M$  ecuaciones con  $N$  variables. Cuando se cuenta con una mayor cantidad de ecuaciones  $M$  que de incógnitas  $N$ , el problema está sobredimensionado haciendo posible encontrar una solución de la imagen. Los métodos iterativos, son computacionalmente costosos, a medida que  $M$  y  $N$  aumentan, las soluciones son susceptibles al ruido generando errores por parte del sistema de ecuaciones. Para aumentar la robustez al ruido, se utilizan métodos iterativos estadísticos, sin embargo, la constante del costo computacional perdura por lo que se aplica la teoría del Muestreo compresivo a la solución del problema.

## 1.3 Reconstrucción de la imagen

La tomografía desde su aparición al servicio de la medicina, hace frente a problemas como la radiación, la velocidad de adquisición de la información y la resolución espacial de las imágenes generadas. Pronto las soluciones existentes incrementaron la cantidad de información disponible, incrementando el costo computacional. Esto llevó a que la retroproyección y la retroproyección filtrada fueran adoptadas Shepp and Logan (1974). Para explicar estas técnicas, es necesario introducir la transformada Radon Buzug (2008) de una función espacial  $f(x, y)$ , definida como:

$$p(r, \theta) = R\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cdot \cos\theta - s \cdot \sin\theta, r \cdot \sin\theta + s \cdot \cos\theta) ds \quad (1.3)$$

donde  $r, s$  hacen parte de un nuevo sistema coordenado que es rotado un ángulo  $\theta$ , así:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Relacionando la posición  $(x, y)$  con  $(r, s)$  utilizando la ecuación (1.4), es posible identificar la intensidad en la ecuación (1.2) y relacionarla con su transformada Radon Ec. (1.3). Nótese que  $\mu(x)$ , para la distribución bidimensional de la imagen, es representado por la función  $f(x, y)$  en la ecuación (1.3). La reconstrucción busca asignar la distribución de atenuaciones en el objeto  $f(x, y)$ , dadas las proyecciones expresadas en (1.3), y aunque es posible retroproyectar el sinograma al espacio de la imagen, esto produce una imagen borrosa. Para dar una mejor respuesta al problema, se plantea la definición de la ecuación:

$$F(k_x, k_y) = F\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (1.5)$$

y

$$f(x, y) = F^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \cdot e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (1.6)$$

que describen la transformada de Fourier Ec. (1.5) y la transformada inversa de Fourier bidimensional Ec. 1.6. Estas transformadas permiten pasar del dominio espacial  $f(x, y)$  al dominio de la frecuencia espacial  $F(k_x, k_y)$ , mejor conocido como espacio-k Ramírez et al. (2008).

Para la reconstrucción de la imagen, el teorema de proyección establece que la transformada unidimensional de Fourier  $P(k, \theta)$  de la proyección  $p(r, \theta)$ , corresponde a una línea que cruza el origen del espacio-k. Como consecuencia, si dichas proyecciones son interpoladas para obtener una representación cartesiana de  $F(k_x, k_y)$ , es posible obtener una aproximación a la imagen  $f(x, y)$  que describe el objeto utilizando la transformada inversa de Fourier (Ec. 1.6), conocido como retroproyección, que se expresa como:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(k, \theta) \cdot g(k) \cdot e^{-j2\pi k r} dk d\theta. \quad (1.7)$$

Cuando el problema de la reconstrucción (Ec.1.6) se toma como una convolución, donde  $F(k_x, k_y)$  emplea un filtro  $g(k)$  en el dominio de la frecuencia, el proceso inicia con la transformada de Fourier de  $p(r, \theta)$  para obtener  $P(k, \theta)$  que se convoluciona con un filtro  $g(k)$ , para finalmente obtener al aplicar la transformada inversa de Fourier bidimensional la aproximación de la imagen filtrada en la ecuación (1.7). A esto se le conoce como retroproyección filtrada.

La retroproyección filtrada, provee mejoras significativas con respecto a la retroproyección simple. Algunos filtros suavizan las imágenes producidas, disminuyendo el ruido y reduciendo un poco los detalles de altas frecuencias, mientras que otros conservan mejor estos detalles permitiendo la presencia de ruido. La selección adecuada de estos filtros, es en ocasiones, subjetiva. Sin embargo, el proceso también es susceptible a la selección de parámetros y el número de muestras del espacio-k depende directamente del número de proyecciones. Para reconstruir una imagen, el total de proyecciones  $M$  debe ser mayor que el número de píxeles  $N$  a reconstruir de la imagen. Un número insuficiente de proyecciones resulta en una distorsión de la imagen obtenida, en tal caso, la reconstrucción de una imagen por el método de la retroproyección filtrada puede generar artefactos indeseados en la reconstrucción.

Para lograr reconstrucciones modificando el número de muestras se introduce la metodología aplicada en los algoritmos iterativos. Inicialmente un algoritmo iterativo propone ver el objeto  $f(x, y)$  como una distribución digital cuadrada con  $n$  elementos en filas y columnas, es así como un pixel contiene un grupo de atenuaciones.

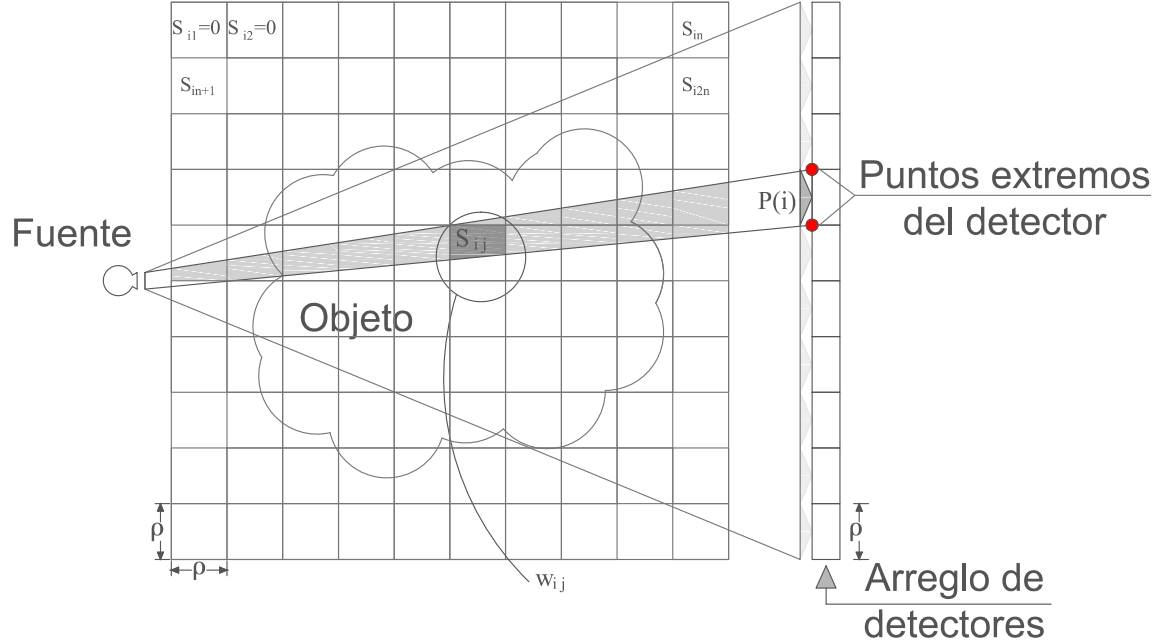


Figura 2: *Matriz de pesos*. Representación del área que constituye los pesos  $w_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{W}$  generada a partir de la intersección del área en cada pixel con la proyección  $p(i)$  entre la fuente y el detector.

El proceso de captura se simula con el operador  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , que está compuesto por un conjunto de coeficientes de pesos,  $w_{ij}$ , definidos por el tamaño del área de intersección entre el  $j$ -ésimo pixel con la  $i$ -ésima proyección que conecta geoméricamente la fuente con los dos puntos extremos del detector como se ilustra en la figura 2. De esta manera los pesos son descritos matemáticamente como

$$w_{ij} = \frac{S_{ij}}{\rho^2}, \quad (1.8)$$

donde  $S_{ij}$  representa la intersección del área el  $j$ -ésimo pixel con la  $i$ -ésima proyección y  $\rho^2$  representa el área del  $j$ -ésimo pixel ( $j = 0 \dots N, i = 0 \dots M$ ). Si la información de la imagen es tan rica como sus  $N = n^2$  datos, su versión vectorial  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  representada en el operador  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  la generación de la información de sus proyecciones en el total de los  $\gamma$  detectores, que captan la información final de las proyecciones alrededor del objeto un total  $\omega$  ángulos. Es decir, el número de proyecciones está definido por los  $M = \omega \times \gamma$  datos, que permiten simular una aproximación del modelo de captura de las proyecciones  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$  de un sistema de TC Buzug (2008). Matemáticamente, el proceso de adquisición puede ser expresado como

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f} + \mathbf{e}. \quad (1.9)$$

Siendo  $\mathbf{e}$  el vector que representa el ruido en las mediciones. Haciendo una comparación directa entre las ecuaciones (1.9) y (1.3). El sistema de ecuaciones representado por la ecuación (1.9) solo puede resolverse bajo condiciones físicas idealizadas, es decir, cuando la matriz  $\mathbf{W}$  es invertible. Sin embargo, incluso en los casos donde los tamaños  $M$  y  $N$  de la matriz coinciden, se puede ver el efecto del ruido, permitiendo solo encontrar una solución aproximada  $\hat{\mathbf{f}}$  de  $\mathbf{f}$ . Por otro lado, los escáneres de alta resolución realizan un número de proyecciones mayor al número de pixeles que contiene la imagen, es así como el sistema de ecuaciones se vuelve sobredeterminado reduciendo el ruido y permitiendo reconstrucciones de mejor calidad. Para encontrar una solución aproximada de  $\mathbf{f}$  se puede usar el método de

descomposición de valores singulares Strang (2003). Este método se basa en la descomposición de la matriz  $\mathbf{W}$ , que representa el sistema de ecuaciones (1.9), esto es:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{U}(\text{diag}(\sigma_j))\mathbf{V}^\top\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde  $\mathbf{U}$  es un conjunto ortonormal, así como  $\mathbf{V}^\top$  es una base ortonormal y  $\mathbf{\Sigma}$  es una matriz compuesta por sus valores diagonales  $\sigma_j$  que son los valores singulares de la matriz  $\mathbf{W}$ , por lo tanto la pseudoinversa  $\mathbf{W}$  está dada por:

$$\mathbf{W}^\dagger = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \sigma_j \end{pmatrix} \mathbf{U}^\top\tag{1.11}$$

y una solución aproximada de la imagen puede darse como:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \sigma_j \end{pmatrix} \mathbf{U}^\top \mathbf{p}\tag{1.12}$$

## 2. Sistema lineal

Dada la ecuación (1.9), cada proyección es producto de la combinación lineal entre las columnas de  $\mathbf{W}$  y los coeficientes de los píxeles  $f_j$  de la imagen  $\mathbf{f}$ , note que el vector  $\mathbf{w}_j = [w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{ij}, \dots, w_{Mj}]^\top$  es el  $j$ -ésimo vector columna de la matriz  $\mathbf{W}$ , así como  $\hat{\mathbf{w}}_i = [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ij}, \dots, w_{iN}]$  corresponde al  $i$ -ésimo vector fila de la matriz. Dado que las proyecciones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{w}_1 f_1 + \mathbf{w}_2 f_2 + \dots + \mathbf{w}_j f_j + \dots + \mathbf{w}_N f_N \\ \mathbf{p} &= [p(1), p(2), \dots, p(i), \dots, p(M)]^\top \\ p(i) &= \hat{\mathbf{w}}_i \hat{\mathbf{f}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es posible generar algunas condiciones deseables de la matriz de muestreo  $\mathbf{W}$  a partir de la teoría del álgebra lineal.

### 2.1 Propiedades

---

En el álgebra lineal, una de las ideas centrales es la dependencia o independencia lineal de los vectores. La dependencia lineal, se da cuando dos vectores de un espacio vectorial pueden ser escritos como el múltiplo escalar del otro. Otra forma de expresar la dependencia lineal, es la sumatoria de los  $N$  vectores  $\mathbf{w}_j$  del espacio vectorial  $C$ , donde es posible expresar cualquier vector del espacio, siempre y cuando los vectores  $\mathbf{w}_j$  formen una base de  $C$ . Teniendo en cuenta que todo conjunto linealmente independiente puede formar una base, cualquier vector puede ser descrito por la combinación lineal de  $\mathbf{w}_j$  multiplicado por los  $N$  coeficientes del vector  $\mathbf{f}$ . Así mismo, la combinación lineal que describe el espacio nulo, permite afirmar que los vectores no son linealmente dependientes si esta condición solo puede ser cumplida por la solución trivial  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Por lo que para describir un espacio vectorial, pueden existir infinitas bases, sin embargo, toda base que representa el espacio vectorial es linealmente independiente y el número de elementos para representarla está determinado por sus  $N$  vectores Strang (2003). Extendiendo este concepto, una base  $\mathbf{W}$  es ortogonal, si  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \alpha \mathbf{I}$ , donde  $\alpha \mathbf{I}$  representa la matriz identidad, escalada por una constante  $\alpha$ . Es así como, una matriz  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  compuesta por vectores ortogonales del espacio  $C$ , para  $M = N$  cumple con las siguientes afirmaciones Strang (2003):

- $\mathbf{W}$  es invertible.
- La única solución para  $\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , es cuando todo elemento en  $\mathbf{f}$  es igual a cero.
- El sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}$ , presenta una única solución de  $\mathbf{f}$  para cualquier vector  $\mathbf{p}$ .
- La matriz tiene un determinante diferente de cero  $\det\{\mathbf{W}\} \neq 0$ .
- Las columnas y renglones de  $\mathbf{W}$  son linealmente independientes.
- Dado que la independencia lineal puede ser encontrada tanto en filas como en columnas, se cumple que  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{W}^\top = \alpha \mathbf{I}$

Para el caso de la TC de rayos X, el sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}$  presenta una matriz de transformación  $\mathbf{W}$ , cuyos vectores  $\mathbf{w}_j$  solo tiene valores positivos, por esto las soluciones de  $\mathbf{f}$  para representar el espacio nulo  $\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , se da para valores de  $\mathbf{f}$  donde sus coeficientes no son todos cero, razón por la cual no se puede asegurar que  $\mathbf{W}$  no es un espacio de  $\mathbf{f}$ , lo que lleva a que  $\mathbf{W}$  sea difícilmente invertible Buzug (2008).

Sin embargo, el sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}$  describe una relación de  $N$  incógnitas para  $M$  ecuaciones, en tal caso, en TC es posible encontrar las constantes de  $\mathbf{f}$  diferentes de cero que satisfacen al sistema cuando se sobremuestra el objeto, es decir  $M \gg N$ . Por otro lado, si el número de incógnitas supera el número

de ecuaciones  $M \ll N$ , el sistema es subdeterminado y tiene infinitas soluciones. Particularmente, cuando la matriz  $\mathbf{W}$ , que describe el sistema es no cuadrada, se utiliza una aproximación a la solución mediante la pseudoinversa de Moore-Penrose Penrose and Todd (1955), que es una generalización de la matriz inversa. Es así como la solución formal al sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}$  puede deducirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{W}\mathbf{f} \\ \mathbf{W}^\top \mathbf{p} &= \mathbf{W}^\top \mathbf{W}\mathbf{f}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dado que el sistema puede ser representado de forma proporcional como se muestra en la ecuación 2.2, si bien  $\mathbf{W}$  no tiene inversa, la resultante del producto  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W}$  describe una matriz cuadrada simétrica positiva, tal que su inversa si pueda ser definida, en tal caso obtener una aproximación de  $\mathbf{f}$  puede definirse como

$$(\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \mathbf{p} = \hat{\mathbf{f}},\tag{2.3}$$

donde la pseudoinversa por izquierda es representada por  $\mathbf{W}^\dagger = (\mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top$  Golub and Van Loan (1996). Si el problema se define como un producto por derecha, el sistema se escribe como  $\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{W}}$  siendo  $\ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^\top$ ,  $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^\top$  y  $\ddot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^\top$ . En este caso la pseudoinversa por derecha se desprende de

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}} &= \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{W}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{W}}^\top &= \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{W}}^\top \\ \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{W}}^\top (\ddot{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{W}}^\top)^{-1} &= \ddot{\mathbf{f}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Note que la pseudoinversa por derecha  $\mathbf{W}^\dagger = \ddot{\mathbf{W}}^\top (\ddot{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{W}}^\top)^{-1}$  evalúa las filas de la matriz de transformación  $\mathbf{W}$  para generar una matriz cuadrada a través de  $(\ddot{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{W}}^\top)^{-1}$  Golub and Van Loan (1996). Conociendo las características de la matriz cuadrada, es posible construir matrices ortogonales para  $M = N$  dado que se busca una matriz cuya inversa es igual a una versión escalada de su transpuesta  $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{W}^\top$ , cumpliendo así que el producto  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \alpha \mathbf{I}$  genera una matriz identidad escalada por una constante  $\alpha$ . En tal caso, asumiendo una matriz  $\mathbf{S}$  cuyos coeficientes  $s_{uv}$  están determinados por el producto de los vectores  $\mathbf{w}_u^\top \cdot \mathbf{w}_v$ , es decir:

$$s_{uv} = \mathbf{w}_u^\top \cdot \mathbf{w}_v = w_{1u}w_{1v} + w_{2u}w_{2v} + \dots + w_{Mu}w_{Mv},\tag{2.5}$$

para  $u = 1 \dots N$  y  $v = 1 \dots N$ . En el caso ideal, si las columnas de  $\mathbf{W}$  son ortogonales entonces:

$$s_{uv} = \begin{cases} 0 & u \neq v. \\ \alpha & u = v. \end{cases}$$

Sin embargo, si los vectores columna de la matriz  $\mathbf{W}$  no son ortogonales, la matriz simétrica  $\mathbf{S}$  generada, se dice que es semi-definida positiva si y solo si:

- Existe un vector  $\mathbf{x}$  tal que

$$\forall \mathbf{x} \neq 0 : \mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0.$$

- Los valores propios  $\lambda_i$  de  $\mathbf{S}$  están para todo índice  $i$

$$\forall i : \lambda_i(\mathbf{S}) \geq 0.$$

Por otro lado, una matriz  $\mathbf{W}$  no cuadrada con  $M \neq N$  compuesta por  $N$  vectores columna  $\mathbf{w}_j$  o por  $M$  vectores fila  $\hat{\mathbf{w}}_i$ , aunque presente independencia lineal entre sus vectores columna  $\mathbf{w}_j$ , no necesariamente es linealmente independiente en sus vectores fila  $\hat{\mathbf{c}}$ , razón por la cual el diseño de una matriz no cuadrada es más complejo. Basándose en la definición dada para la pseudoinversa, es posible diseñar una matriz no cuadrada cuyos vectores que la componen son linealmente independientes entre sí, para los dos casos. Este tipo de diseños se puede plantear como una minimización, donde las matrices  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W}$  y  $\mathbf{W} \mathbf{W}^\top$  tienen cierta semejanza con una matriz identidad.

## 2.2 Criterios de evaluación

Establecer criterios para deducir que matriz es mejor que otra sin necesidad de realizar una reconstrucción en cada diseño requiere comprender el concepto de una norma matricial  $\| \cdot \|$ . Este desprende de la noción de norma vectorial, utilizado para referirse al tamaño de un vector. Una extensión de este concepto a las matrices, puede verse como el valor numérico con el cual una matriz controla el crecimiento de cualquier vector que se le proyecte. De esta forma si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  representan dos matrices, la desigualdad triangular para la norma define que

$$\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{A} \| + \| \mathbf{B} \| \quad (2.6)$$

y

$$\| c\mathbf{A} \| = |c| \| \mathbf{A} \| . \quad (2.7)$$

Existen diferentes normas, cada una de ellas es reconocida por el subíndice  $p$  de la norma  $l^p$  como se desprende de la norma vectorial. La norma  $\| \mathbf{A} \|_p$  de una matriz controla el factor de crecimiento de un vector  $\mathbf{x}$  cuando se aplica la transformación  $\mathbf{A}$  Strang (2003), esto debe cumplir con la desigualdad

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_p \leq \| \mathbf{A} \|_p \| \mathbf{x} \|_p \quad (2.8)$$

Observe que de forma natural  $\frac{\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p}$ , nunca será mayor que  $\| \mathbf{A} \|_p$ . Esto permite definir la norma de una matriz como Strang (2003)

$$\| \mathbf{A} \|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} \quad (2.9)$$

Así mismo, la norma de la matriz que controla el crecimiento de otra matriz también cumple que Strang (2003):

$$\| \mathbf{A}\mathbf{B} \|_p \leq \| \mathbf{A} \|_p \| \mathbf{B} \|_p . \quad (2.10)$$

En el álgebra, también se dispone de la definición de vectores y valores propios, tal que un vector propio es el vector no nulo, que cuando es transformado por el operador, da como resultado una versión escalada del vector, el valor  $\lambda$  por el que se escala el vector se le conoce como valor propio. Un espacio propio se asocia con los valores propios cuando los  $\lambda$  del conjunto de vectores propios del espacio tienen un valor propio común. Matemáticamente, un vector  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  es un vector propio de  $\mathbf{A}$  si la transformación  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  puede ser representada como Lay et al. (2016)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

De ser  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  el vector propio donde se expresa el máximo valor propio, la norma de la matriz es escrita como Strang (2003):

$$\| \mathbf{A} \|_p = \lambda_{max} \frac{\| \mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = \lambda_{max}(A) \quad (2.12)$$

Para el caso en que  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica semidefinida positiva, tal que  $\mathbf{A}$  es una matriz compuesta por vectores fila  $\hat{\mathbf{w}}_i$  ortonormales, sus vectores propios son los mismos vectores  $\hat{\mathbf{w}}_i$  de la matriz y sus valores propios son iguales  $\lambda_i = \lambda_{i-1} = \dots = \lambda_1$ . Una de las principales ventajas de este tipo de distribución es que el error de  $\mathbf{x}$  no crece cuando se proyecta en  $\mathbf{A}$  dado el valor de su norma. Por otro lado, si  $\mathbf{A}$  no es simétrica, sus valores propios no miden con precisión la norma de la matrix. A modo

de ejemplo, dada una matriz no simétrica  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , se tiene que la norma  $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$  corresponde a  $\|\mathbf{A}\|_p = 2$  cuando  $\mathbf{x} = [0, 1]^\top$ . Por otro lado, los valores propios de  $\mathbf{A}$  son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  por lo que  $\|\mathbf{A}\|_p > \lambda_{max}$ , incluso cuando  $\mathbf{x}$  no es un vector propio de  $\mathbf{A}$ . Por esto, se define la matriz simétrica  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  Strang (2003), para evitar los inconvenientes de la matriz  $\mathbf{A}$  no simétrica, este caso especial, se conoce como la norma euclidea para  $p = 2$  con  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  y  $M = N$  Lay et al. (2016). Cuando se evalúa la norma como el mayor valor propio del producto  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ , se tiene que:

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \lambda_{max}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}). \quad (2.13)$$

Entonces de la relación expresada en la ecuación (2.13), se dice que para que  $\mathbf{x}$  cumpla con la igualdad  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \lambda_{max} \mathbf{x}$ , el vector  $\mathbf{x}$  no necesariamente debe ser un vector propio. Entonces si  $\lambda_u$  son los valores propios de  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  para  $u = 1 \cdots N$ , y  $\mathbf{q}_u$  sus vectores propios,  $\mathbf{x}$  puede ser descrito como la combinación lineal de estos vectores  $\mathbf{q}_u$  Strang (2003). De tal forma que

$$\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \frac{(c_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + c_u \mathbf{q}_u + \cdots + c_N \mathbf{q}_N)^\top (c_1 \lambda_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + c_u \lambda_u \mathbf{q}_u + \cdots + c_N \lambda_N \mathbf{q}_N)}{(c_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + c_u \mathbf{q}_u + \cdots + c_N \mathbf{q}_N)^\top (c_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + c_u \mathbf{q}_u + \cdots + c_N \mathbf{q}_N)} \quad (2.14)$$

donde  $c_u \in \mathbb{R}$  es una constante. Dado que los vectores  $\mathbf{q}$  son ortogonales,  $\mathbf{q}_{u_1}^\top \mathbf{q}_{u_2} = 0$ , donde  $u_1$  y  $u_2$  representan el subíndice de cualquier par de vectores ortogonales diferentes entre si, permitiendo escribir la ecuación (2.14) como

$$\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \frac{(c_1^2 \lambda_1 + \cdots + c_u^2 \lambda_u + \cdots + c_N^2 \lambda_N)}{(c_1^2 + \cdots + c_u^2 + \cdots + c_N^2)}. \quad (2.15)$$

De esto se infiere que el máximo valor para  $\lambda$  se da cuando todo valor  $c_u$  es cero, excepto aquel que multiplica al valor máximo de  $\lambda_{max}$ . De la misma forma, el valor mínimo de  $\lambda$  se halla cuando el único valor  $c_u$  diferente de cero se encuentra multiplicando el  $\lambda_{min}$ . Esto asegura que cualquier vector  $\mathbf{x}$  que se utiliza en la distribución  $\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$  es afectado por un valor que está definido en el intervalo entre  $\lambda_{min}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$  y  $\lambda_{max}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$  Strang (2003). Definir las características de una matriz, teniendo en cuenta solo su máximo valor propio tiene como desventaja que al escalar la matriz por un cierto valor, su norma puede verse reducida y así mismo verse menos singular. Una matriz se dice es singular cuando no posee inversa, su determinante es cero o si su máximo número de columnas o filas linealmente independientes es menor que el número de incógnitas. Aunque matemáticamente esto afectará toda señal operada por la matriz  $\mathbf{A}$ , por lo que el error relativo respecto a la señal deseada seguirá siendo el mismo. Por lo que se propone el uso del número de condición  $cond(\mathbf{A})$ , que evalúa la relación entre el máximo y el mínimo valor singular de  $\mathbf{A}$  como

$$cond(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}{\lambda_{min}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}. \quad (2.16)$$

Se dice que una matriz está bien condicionada, si el número de condición está cerca de 1 Strang (2003). No obstante, el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz requieren un esfuerzo computacional elevado por lo que, para ciertos casos, el uso de la norma Frobenius se hace útil, ya que tiene una relación directa con los valores propios de la matriz y puede ser calculada mediante la traza de la matriz, operación que requiere solo la sumatoria de elementos de la matriz Dax (2013). La norma Frobenius se define como

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^M |a_{uv}|^2} = \sqrt{tr(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{u=1}^{\min\{M,N\}} \sigma_u^2}, \quad (2.17)$$

donde  $a_{uv}$  representa los coeficientes que componen la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $tr(\cdot)$  simboliza el operador de la traza de la matriz, así como  $\sigma_u$  son los valores singulares de la matriz, donde  $\sigma_u = \sqrt{\lambda_u}$ . Si se toman los

valores singulares de forma ordenada del valor máximo  $\sigma_1$  al valor mínimo  $\sigma_r$ , se tiene que la norma Frobenius cumple la desigualdad Golub and Van Loan (1996)

$$\| \mathbf{A} \|_2 \leq \| \mathbf{A} \|_F \leq \sqrt{r} \| \mathbf{A} \|_2, \quad (2.18)$$

siendo  $r$  el número máximo de columnas o filas que son linealmente independientes entre sí, o el rango de la matriz Golub and Van Loan (1996). Esto permite obtener una medida fiable entre el rango de valores de la norma  $l_2$ . No obstante, se puede atribuir la calidad de una matriz a parámetros distintos de la norma de una matriz, como lo es el concepto de covarianza Lay et al. (2016), en tal caso, una matriz  $\mathbf{A}$  compuesta por los vectores columna  $\mathbf{A} = [\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_N]$  presenta una media de observaciones

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{(\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_N)}{N}, \quad (2.19)$$

donde la media es el punto central de cualquier distribución de puntos, lo que permite definir el vector de desviación media para  $u = 1 \cdots N$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{b}_u = (\mathbf{w}_u - \bar{\mathbf{w}}). \quad (2.20)$$

Del arreglo matricial  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_N]$  se puede decir que tiene media cero respecto a las muestras, lo que se conoce como la matriz desviación media Lay et al. (2016). En tal caso la matriz de covarianza  $\hat{\mathbf{S}}$  se define como:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{N-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T, \quad (2.21)$$

donde la matriz  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , es una matriz simétrica cuadrada semidefinida positiva. Es así como la matriz  $\hat{\mathbf{S}}$  compuesta por los coeficientes  $s_{uv}$ , es conocida por tener en su diagonal cuando  $u = v$  la varianza de las observaciones del vector  $\mathbf{c}_u$  donde cada vector columna está compuesto por los elementos  $\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_j \cdots \mathbf{c}_m$  con  $j = 1 \cdots m$ , es decir  $s_{uu}$  de  $\hat{\mathbf{S}}$  es la varianza de  $\mathbf{c}_j$ . La varianza total es la suma de los términos de la diagonal de  $\hat{\mathbf{S}}$ , la varianza total puede ser representada por la traza como

$$varianza\ total = tr(\hat{\mathbf{S}}). \quad (2.22)$$

Por otro lado, los términos fuera de la diagonal representan la proporción de la correlación entre cualquier par de vectores  $\mathbf{w}_u$  y  $\mathbf{w}_v$  Lay et al. (2016). Por lo que, se puede utilizar la correlación como métrica, de tal forma que se tenga información de la correlación máxima entre vectores de la matriz para reducirla en lo posible.

### 3. Teoría del muestreo compresivo

Considerando un sistema lineal  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f}$  y sus limitaciones para ser resuelto bajo condiciones físicas idealizadas, es decir, si las dimensiones de la matriz de muestreo  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  corresponden con la desigualdad  $M \geq N$ . Para hacer frente al inconveniente de la cantidad de datos necesarios, se introduce la compresión de datos como un proceso de gran utilidad para el manejo de la información. Esta técnica se enfoca en reducir la cantidad de datos requeridos para representar una fuente de información, como puede ser texto, audio, imagen, o video. Es así como los desarrollos en esta área buscan superar el criterio propuesto por Shannon-Nyquist, el cual rige las comunicaciones, el procesamiento de señales, incluyendo la adquisición de imágenes médicas, la grabación, reproducción y transmisión de música actualmente, entre otras. El teorema de muestreo de Shannon-Nyquist, establece que la frecuencia mínima de muestreo necesaria para evitar el Aliasing debe ser mayor a dos veces la frecuencia máxima de la señal Oppenheim and Schaffer (1999). Por esto, un aumento en el ancho de banda de la señal aumenta la frecuencia máxima provocando que los dispositivos de muestreo presenten dificultades para la adquisición, debido a las limitaciones de velocidad, problemas de almacenamiento, restricciones de ancho de banda para la transmisión. Para solucionar estas dificultades, los estudios se enfocan en mejorar los componentes físicos de sistemas de compresión de señales y otros que basan su potencial en modelos matemáticos, siendo estos últimos los que han tenido mayor relevancia en el área por sus robustez teórica. Actualmente, sobresale notoriamente la teoría de Muestreo Compresivo MC mostrando resultados promisorios en el área debido a que permite la adquisición de señales a tasas menores a las establecidas en el criterio de Shannon-Nyquist Candès (2006). Para comprender este proceso aplicado al modelo lineal de una arquitectura de tomografía se deben tener en cuenta ciertas consideraciones.

#### 3.1 Señal dispersa

Una señal  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  puede ser representada en términos de una base  $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  conformada por los vectores columna  $\psi_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , denominados átomos, tal que  $\theta$  es el vector compuesto por los coeficientes  $\theta_i$  que representan a  $\mathbf{f}$ . La señal  $\mathbf{f}$  es  $k$ -dispersa en el dominio  $\Psi$ , cuando se puede representar por la combinación lineal de  $k$ -átomos de  $\Psi$  con  $k \ll N$ , donde solo  $k$  coeficientes  $\theta_i$  significativos contienen la información necesaria de la señal de interés para ser reconstruida Candès and Wakin (2008). Matemáticamente, el vector  $\mathbf{f}$  que se expande en una base ortonormal como la base Fourier, Coseno o Wavelet entre otras puede expresarse como Candès and Wakin (2008)

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \theta_i \psi_i, \quad (3.1)$$

tal que  $\theta_i = \langle \mathbf{f} | \psi_i \rangle$ . Con base en esta notación la señal  $\mathbf{f}$  se puede expresar como

$$\mathbf{f} = \Psi \theta. \quad (3.2)$$

La mayoría de las señales naturales tienen representaciones dispersas cuando son expresadas en una base conveniente  $\Psi$  Candès and Wakin (2008). Para  $k \ll N$  se puede establecer con alta probabilidad que la señal  $\mathbf{f}$  puede ser reconstruida con un número reducido de proyecciones, utilizando un proceso de optimización.

MC integra los pasos de adquisición y compresión de una señal en un solo proceso Arguello and Arce (2013); Arce et al. (2014); Arguello et al. (2013); Candès (2006). De esta manera, en MC no se adquiere directamente la señal  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ , sino  $M$  mediciones lineales para  $M < N$ , representadas por

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \theta, \quad (3.3)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la base de representación, y  $\theta$  es la representación dispersa de la señal. Para que la matriz de reconstrucción  $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ , pueda garantizar que se cumpla la Propiedad de Restricción Isométrica (RIP), de manera que, la matriz de medidas preserve la información importante de la señal. La RIP está definida sobre la constante isométrica  $\delta_s$  de una matriz tal que,

$$(1 - \delta_s) \|\theta\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\theta\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\theta\|_2^2. \quad (3.4)$$

Adicionalmente, dicha propiedad puede ser usada para determinar los límites en el número requerido de proyecciones para una correcta reconstrucción Candès (2006). Este principio, está relacionado con la incoherencia entre la base de muestreo  $\Phi$  y la base de representación  $\Psi$  de la imagen.

## 3.2 Incoherencia e incoherencia mutua

Una de las propiedades más importantes a tener en cuenta durante la selección de la matriz de muestreo  $\Phi$  y la base de representación  $\Psi$  se denomina incoherencia. La incoherencia se basa en el concepto de coherencia que es la medida de la mayor correlación existente entre dos elementos cualquiera de  $\phi_i$  y  $\psi_i$  Candès et al. (2005). Para medir la coherencia, se asume que las matrices a evaluar  $\Phi$  y  $\Psi$  son bases ortonormales. Esto permite definir matemáticamente el máximo valor absoluto del producto interno entre los elementos de las dos bases como Candès (2006)

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \cdot \max_{1 \leq i, 1 \leq j} |\langle \phi_i | \psi_j \rangle|. \quad (3.5)$$

Si  $\Phi$  y  $\Psi$  contienen elementos correlacionados, la coherencia será grande, de otra forma será pequeña. El mayor y menor valor de coherencia están dados por  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{N}]$ . En MC, es de gran interés que las bases tengan baja correlación. Buscar dos bases que sean poco coherentes entre sí es una tarea difícil considerada un problema NP-Complejo Candès and Wakin (2008). Como regla general, en MC cualquier matriz aleatoria  $\Psi$ , con entradas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), como lo son las matrices Gaussianas o las entradas binarias,  $\pm 1$ , exhiben baja coherencia con cualquier base de representación  $\Phi$ . Entonces, la incoherencia entre la matriz  $\Phi$  y  $\Psi$  se entiende como la relación entre los elementos de cada una de ellas, en donde los elementos de  $\Phi$  no se pueden obtener mediante alguna combinación lineal de los elementos de la matriz  $\Psi$ , limitando la coherencia de las matrices a su valor más bajo, es decir el más incoherente. Por otro lado, la autoincoherencia, o incoherencia mutua, se define como el valor máximo absoluto para la correlación cruzada entre las columnas de la matriz. Formalmente si se tienen los vectores columna  $\psi_1 \cdots \psi_N$  normalizados Donoho and Huo (2001), la coherencia mutua se expresa como

$$\mu(\Psi) = \max_{1 \leq i \neq 1 \leq j} |\langle \psi_i^T | \psi_j \rangle|. \quad (3.6)$$

Con esta definición de coherencia mutua, es posible explicar la incoherencia mutua como el valor máximo más pequeño posible fuera de la diagonal en la matriz de covarianza Donoho and Huo (2001).

## 3.3 Recuperación de una señal utilizando MC

La utilidad de la teoría de MC se hace evidente al encontrar una representación de la señal cuyos coeficientes satisfacen una norma mínima  $l_p$  del vector  $\theta$  expresada como

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_p^p = \sum_{i=1}^N |\theta_i|^p. \quad (3.7)$$

Una aproximación que permite hallar la solución de  $\boldsymbol{\theta}$  Candes and Wakin (2008) en este tipo de problemas puede ser encontrada utilizando la norma  $l_2$ , mediante

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{\text{mín}} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2, \text{ sujeto a } \mathbf{y} = \boldsymbol{\Theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.8)$$

donde  $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$ . Esta optimización es conveniente al encontrar una solución aproximada a  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Theta}^\top(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}^\top)^{-1}\mathbf{y}$ , sin embargo, la solución  $l_2$  no puede encontrar una señal  $k$ -dispersa, debido a que siempre retornará una respuesta  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  donde todos sus elementos son diferentes de cero. Debido a esto se han utilizado otras normas que permiten resolver el problema lineal, la opción más exacta es la norma  $l_0$ , sin embargo, resolver este problema se hace NP-complejo y requiere revisar todas las posibles opciones para las entradas diferentes de cero. Por otro lado, la solución basada en la norma  $l_1$  puede recuperar con gran precisión la señal  $k$ -dispersa, mediante la minimización:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{\text{mín}} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_1, \text{ sujeto a } \mathbf{y} = \boldsymbol{\Theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.9)$$

Dicha solución es encontrada mediante un problema de optimización convexa, que convenientemente puede ser resuelto empleando programación lineal (PL). La convexidad de los algoritmos es una propiedad utilizada en la matemática aplicada, sobre todo en optimización Chong and Zak (2008).

La optimización convexa es una de las ramas más desarrolladas hasta el momento en el campo de la optimización. Por definición se tiene que un problema de optimización es convexo si y solo si la función objetivo es convexa, y la región factible  $Q$  es un conjunto convexo. Si una función  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa, esta cumple la restricción de desigualdad tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (3.10)$$

Esto permite definir varias propiedades útiles derivadas de la definición de una función convexa:

- Sea  $f(x) \in C^1$  una función convexa, entonces
 
$$\forall x, y : f(y) \geq \alpha f(x) + \langle \nabla f(x), (y - x) \rangle$$
- Sea  $f(x) \in C^2$  una función convexa, entonces la matriz hessiana de  $f(x)$  es una matriz semidefinida positiva para todo  $x$ 

$$\forall x : \nabla^2 f(x) \geq 0$$
- Sea  $f(x), g(x)$  funciones convexas, entonces  $h(x) = f(x) + g(x)$  es una función convexa.
- Se dice que una función es estrictamente convexa si y solo si:
 
$$\forall x \neq y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in (0, 1) : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Gran cantidad de problemas pueden ser tratados desde la perspectiva de la optimización convexa, sujetos a ciertas restricciones que permitan obtener una aproximación de la señal deseada a través del sistema. Debido a esto, el problema de TC basado en MC para una señal  $\mathbf{f}$  desconocida genera las medidas  $\mathbf{y}$  cuando ingresa al sistema  $\boldsymbol{\Phi}$ , de tal forma que la aproximación de la señal  $\mathbf{f}$  puede encontrarse teniendo en cuenta que este problema puede ser formulado como un problema convexo de la forma:

$$\underset{\mathbf{f}}{\text{mín}} \phi(\mathbf{f}) \text{ sujeto a } \|\boldsymbol{\Phi}\mathbf{f} - \mathbf{y}\|_2 < \varepsilon, \quad (3.11)$$

donde  $\phi(\mathbf{f})$  es el término o función de regularización que puede representar una norma de un término regularizador no suave, tal es el caso de la norma  $\|\cdot\|_1$  o la norma de variaciones totales  $\|\cdot\|_{TV}$  ( $TV$  del inglés “Total Variation”) Candes and Wakin (2008). El problema en la ecuación (3.11), basado en la norma  $TV$  se puede replantear como un problema convexo sin restricciones de la forma

$$\min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2} \|\Phi\mathbf{f} - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau\phi(\mathbf{f}), \quad (3.12)$$

donde  $\tau$  es una constante de regularización. Para encontrar una solución a la ecuación (3.12), se utilizan algoritmos de reconstrucción de señales dispersas, la literatura de manera general identifica este tipo de algoritmos en seis grandes grupos Pilastrri and Tavares (2016):

- Relajación Convexa, estos algoritmos resuelven un problema de optimización convexa a través de programación lineal para obtener la reconstrucción, esto permite un número de muestras reducido para una solución precisa, sin embargo, son computacionalmente complejos.
- Algoritmos Iterativos Voraces (traducido del inglés “Greedy Iterative Algorithms”), buscan la solución de manera iterativa, tomando decisiones en función de la información disponible en cada momento, una vez tomada la decisión, ésta no vuelve a replantearse en el futuro por lo que suelen ser rápidos y fáciles de implementar.
- Algoritmos Iterativos de Umbralización (traducido del inglés “Iterative Thresholding Algorithms”), en este tipo de algoritmos las medidas correctas se recuperan mediante la umbralización suave o fuerte de la señal respecto a un conjunto de candidatos (elementos seleccionables).
- Algoritmos Combinatorios o Sublineales, recuperan la señal dispersa mediante pruebas de grupo, además, son extremadamente rápidos y eficientes comparados con relajación convexa o los algoritmos voraces.
- Algoritmos de Minimización No Convexa, intentan encontrar la solución probando todos los conjuntos de soporte posible.
- Algoritmos Iterativos Bregman, proveen una simple y eficiente manera de resolver ciertos problemas de minimización de la norma  $l_1$ , utilizando el esquema de regularización Bregman de tal forma que su velocidad computacional es comparable con otros algoritmos existente.

Con el desarrollo de la programación lineal, la idea de la relajación convexa se destaca notablemente por la posibilidad de reconstruir una señal a partir de un número escaso de muestras. Sin embargo, la programación lineal se ve limitada por la velocidad para obtener una solución, dando lugar a los algoritmos de encogimiento del umbral, donde se destaca el algoritmo SALS ( del inglés “split augmented Lagrangian shrinkage algorithm”). Los desarrollos alrededor de SALS están sujetos a que el problema lineal no debe tener restricciones, por lo que la solución de la señal se ve afectada. Debido a esto, se genera un algoritmo iterativo llamado C-SALS (siglas del inglés “constrained-SALS”) Afonso (2009), que permite agregar restricciones  $l_p$  de tal forma que se pueden hallar de forma rápida y eficientes las soluciones no suaves al problema de minimización.

## 3.4 Matriz de preconditionamiento

---

Debido a los avances en la optimización convexa, la solución al sistema lineal se aborda desde diferentes perspectivas a través de algoritmos iterativos, sin embargo, se debe reconocer que la falta de robustez es una de las debilidades a la hora de implementar estos métodos, dificultando encontrar de forma rápida una solución Saad (2001). Debido a esto, los problemas mal condicionados buscan plantear distintas estrategias que mejoran el condicionamiento de la matriz Hessiana de la función, ayudando a la convergencia del algoritmo. Algunos métodos iterativos buscan acelerar la solución numérica de un sistema lineal descrito por  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz no singular. La mejora en la convergencia de los algoritmos se consigue mediante la transformación del sistema original a uno equivalente  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ , tal que el número de operaciones no se incrementa en la solución del sistema

transformado, también se tiene en cuenta que  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  y  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$  tienen la misma solución Canaria (2010), es decir  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ .

La matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  y el vector  $\tilde{\mathbf{y}}$  se consiguen por la premultiplicación o posmultiplicación de una matriz  $\mathbf{M}$ , llamada preconditionador. Esta matriz es cuadrada y debe ser fácilmente invertible permitiendo transformar al sistema  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  en otro equivalente con condiciones más favorables. En general, la fiabilidad de los métodos iterativos depende más de la calidad del preconditionador que del método seleccionado. Encontrar un buen preconditionador para resolver un sistema lineal disperso es considerado, con frecuencia, como una combinación entre arte y ciencia Saad (2001). Algunos preconditionadores funcionan sorprendentemente bien a pesar de sus escasas expectativas teóricas, esto permite que no existan límites para elegir un preconditionador, sin embargo, un mal condicionamiento del sistema, afectaría negativamente a la convergencia Saad (2001). Un preconditionador  $\mathbf{M}$  permite reescribir el sistema como  $\mathbf{My} = \mathbf{MAx}$ , tal que  $\text{cond}(\mathbf{MA}) \ll \text{cond}(\mathbf{A})$ . En tal caso, el menor valor del número de condición para el sistema preconditionado  $\text{cond}(\mathbf{MA})$ , está dado por  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$ , dado que el número de condición estaría definido como  $\text{cond}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = 1$ , el cual sería el caso ideal y el sistema convergería en una sola iteración, pero el coste computacional del cálculo de  $\mathbf{A}^{-1}$  equivale a resolver el sistema. Esta circunstancia sugiere para  $\mathbf{M}$  una matriz que sea lo más similar posible a  $\mathbf{A}^{-1}$ , sin que su determinación suponga un coste elevado. Generalmente se opta por considerar como matriz de preconditionamiento a  $\mathbf{M}^{-1}$  para permitirse obtener  $\mathbf{M}$  como una aproximación de  $\mathbf{A}$ . En este caso, el sistema se escribe como  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax}$ , por ello, la matriz  $\mathbf{M}$  debe ser fácilmente invertible. El preconditionamiento del sistema depende del orden del producto entre el sistema y la matriz  $\mathbf{M}$ ; por esto, se distinguen las siguientes formas de preconditionamiento

- Precondicionamiento por la izquierda

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax}$$

donde la aproximación  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$  está dada por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$$

- Precondicionamiento por la derecha

$$\mathbf{y} = \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{Mx}$$

donde la aproximación  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$  está dada por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{AM}^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Mx}$$

- Precondicionamiento izquierda/derecha, puede ser expresando como

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{AM}_2^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{x}$$

donde  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$  cumple con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{AM}_2^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{y}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_2\mathbf{x}$$

En los sistemas donde la matriz  $\mathbf{A}$  no es cuadrada es complejo generalizar que el resultado de un sistema con preconditionamiento posea una mejora en la convergencia respecto al sistema original. Sin embargo, por analogía, se podría esperar un comportamiento similar para ciertos casos de preconditionamiento. Teniendo en cuenta que mediante una matriz de preconditionamiento adecuado se consigue mejorar la convergencia del proceso iterativo, la necesidad de implementar dicha estrategia se da cuando:

- Una función convexa presenta cambios rápidos en una dirección y lentos en otra.
- Se desea acelerar un proceso iterativo de optimización.
- Las variables tienen diferencias amplias en sus magnitudes.
- El análisis a través de la matriz Hessiana sugiere que el problema se encuentra mal condicionado.

El operador de preconditionamiento es usado en el método del gradiente, tal que al operar la matriz Hessiana, la matriz resultante esté mejor condicionada, lo que puede llevar a mejorar la respuesta del método de gradiente Butzer et al. (2013).

## 4. Sistema compresivo de Superresolución de tomografía computacional de rayos X

Si bien, un sistema de TC consiste en un arreglo de detectores en el lado opuesto de una fuente de energía de rayos X, las imágenes producidas dependen de las atenuaciones al haz de rayos X causadas por el objeto. Así, cuando una imagen se desea reconstruir, el número de proyecciones registradas en el detector debe ser proporcional o superior al número de píxeles en la imagen. En ese sentido, la cantidad de datos suficientes para una imagen de tomografía puede incrementarse proporcionalmente con el número de píxeles en la imagen.

La calidad de la imagen puede atribuirse a dos factores: la precisión en los valores de cada píxel de la imagen o la densidad en el número de píxeles por unidad área conocida como resolución. Cuando se utiliza un proceso que incrementa el número de píxeles por unidad de área se le reconoce como técnica de Superresolución (SR). El incremento de píxeles permite observar una mayor cantidad de detalles en las imágenes y pueden facilitar la identificación de anomalías como tumores o cáncer institutes of health (2016). En el caso de las imágenes de TC, las metodologías para la mejora o aumento de la resolución espacial de las imágenes se pueden agrupar en tres metodologías Park et al. (2003):

1. Incrementar el número de píxeles por unidad de área mediante la fabricación de detectores de menor tamaño, mientras se afecta su sensibilidad al ruido captado el cual puede ser generado por la difracción Robinson et al. (2008).
2. Incrementar el número de píxeles por unidad de área mientras se utiliza un detector de mayor tamaño. Esto es posible mediante múltiples proyecciones que incrementan la radiación, mientras que el incremento en el tamaño del detector aumenta las capacitancias parásitas afectando el registro de datos, al evitar las respuestas a las altas frecuencias de la señal Komatsu et al. (1993).
3. Utilizando técnicas de procesamiento de imágenes que permitan mejorar el cálculo de imágenes de mayor resolución utilizando secuencias de imágenes de baja resolución.

Enfocando el proceso de muestreo de TC como un sistema lineal, al intentar aplicar las metodologías de SR a la tomografía convencional, es importante reconocer que existe un riesgo de causar enfermedades cuando el tiempo de exposición a los rayos X se incrementa.

### 4.1 Sistema compresivo de tomografía computacional de rayos X

---

La compresión de datos permite obtener una imagen cuya precisión en los píxeles es aceptable mientras se reduce la cantidad de datos requeridos para representar la imagen de TC.

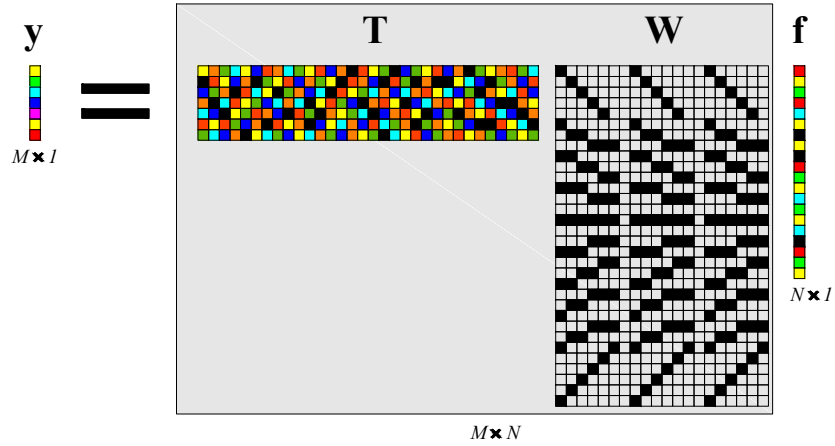


Figura 3: Representación gráfica de la compresión algebraica tradicional.

En diversos casos, la compresión puede darse a través de la proyección de las señales captadas en una matriz rectangular que genera un vector de salida de menor dimensión, tal como se presenta en la figura 3. Sin embargo, para la TC la compresión de datos se asume cuando el número de datos medidos diferentes de cero se reduce por debajo del número de píxeles que conforman la imagen. Para lograr la reducción del número de elementos diferentes de cero proyectados en el detector, se propuso la inclusión de aperturas codificadas con el fin de mejorar las tasas de compresión de las imágenes, sin comprometer la calidad de la reconstrucción Kaganovsky et al. (2014). Las aperturas codificadas se modelan como matrices con valores booleanos (uno y cero), los cuales permiten o bloquean el paso del haz de energía incidente, generando un patrón de codificación del objeto de interés Arguello et al. (2013).

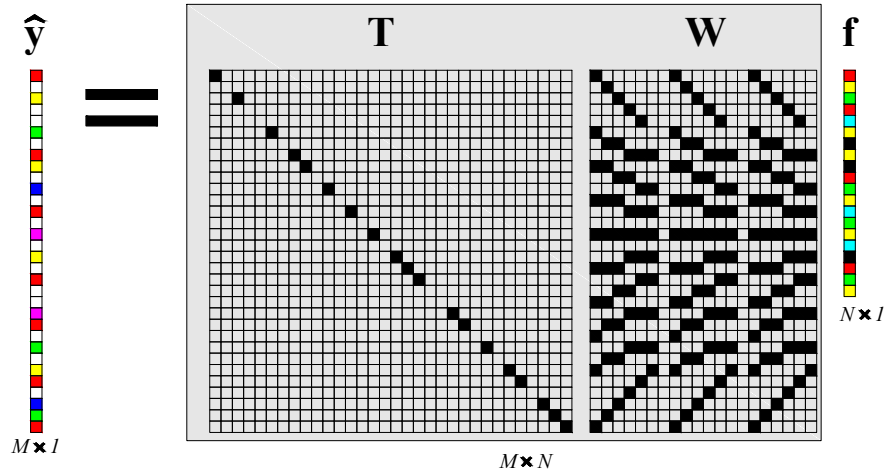


Figura 4: Representación gráfica de las matrices del modelo lineal de un sistema compresado en TC tipo CAXI.

Nótese que en el modelo tradicional de compresión se incluye una matriz  $T$ , tal que el modelo reduce matemáticamente el número de muestras debido a las dimensiones de dicha matriz, este tipo de compresión es el que se representa en la figura 3. Por el contrario, en TC la dimensión de la matriz  $T$ , es tan extensa como el número de proyecciones en el detector multiplicado por el número de ángulos, con la diferencia de que cada apertura codificada anula completamente una proyección, es por esto que

el detector registra una menor cantidad de información, de forma que la figura 4 representa el modelo de compresión de TC.

La inclusión de aperturas codificadas en un sistema de TC fue propuesta por K. Choi y D. Brady K. Choi and D. J. Brady (2009) como “Coded Aperture X-ray Imaging”(CAXI). Actualmente, se tienen resultados de investigaciones previas donde se han incluido aperturas codificadas en arquitecturas de medición de rayos X MacCabe et al. (2013); Cuadros et al. (2014); Arguello and Arce (2010); Abolghasemi et al. (2013); Choi and Brady (2009); Brady et al. (2015); Hou and Zhang (2014). Tal es el caso de MacCabe et al. MacCabe et al. (2013) que implementa un sistema de medición de rayos X en el que incluyen una apertura codificada que se fabrica con una impresora 3D, para utilizar las señales dispersas de forma apropiada para la reconstrucción.

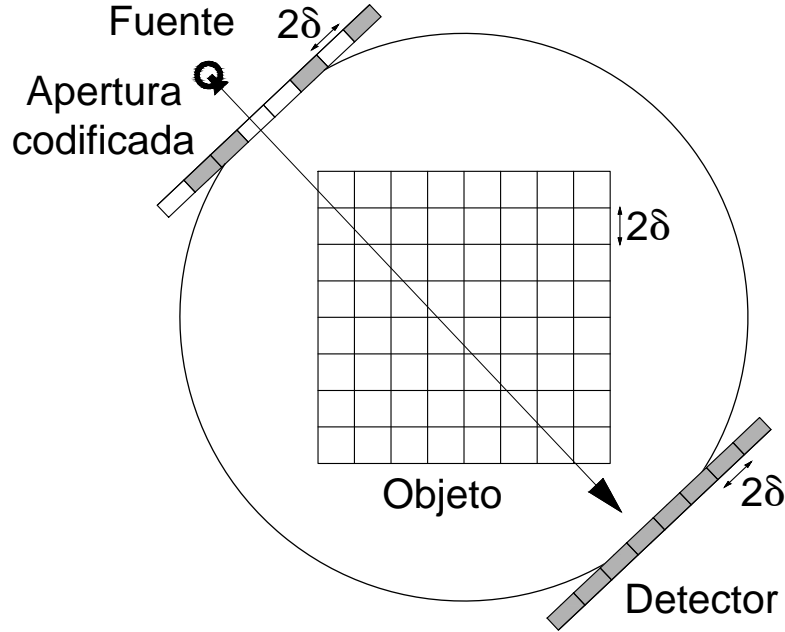


Figura 5: Sistema compresivo CAXI con una relación de tamaño 1:1 entre el detector y la apertura codificada.

MacCabe et al. MacCabe et al. (2013) introduce en el sistema CAXI las aperturas codificadas entre la fuente de rayos X y el objeto bajo estudio, de tal forma que las aperturas codificadas de tamaño  $2\delta$  modulan la energía producida por el haz de rayos X y codifican las proyecciones adquiridas por el plano de detectores Pani et al. (2009) para cada detector de tamaño  $2\delta$ , ver figura 5. Particularmente, los píxeles con mayor densidad de masa bloquean los rayos X y los píxeles con menor densidad de masa permiten el paso de los rayos X. Las mediciones en el detector pueden ser consideradas como la multiplexación de múltiples proyecciones de las aperturas codificadas, de tal forma que si se realizan  $r$  capturas del sistema CAXI, representado en la figura 5, matemáticamente las proyecciones del sistema están dadas por

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{f}, \quad (4.1)$$

para las  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{Mr}$  proyecciones del sistema CAXI. Para esto se define la operación “ $\mathit{bldiag}(\cdot)$ ” como

aquella que crea una matriz diagonal por bloques. Para  $\mathbf{T} = \text{bldiag}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_r)$  que se compone por cada bloque  $\mathbf{T}_r = \text{diag}(t_{11}^r, t_{22}^r, \dots, t_{MM}^r) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  de tamaño  $M \times M$  donde “ $\text{diag}(\cdot)$ ” es la diagonalización de los elementos  $[t_{11}^r, t_{22}^r, \dots, t_{MM}^r]$  para los coeficientes  $t_{MM}$  que representan los elementos que bloquean o permiten el paso de una proyección en sistema de adquisición. Es así que  $\mathbf{T}$  contiene la codificación para las  $M$  proyecciones de la fuente de rayos X en una adquisición específica  $r$ . De forma similar  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1^T, \mathbf{W}_2^T, \dots, \mathbf{W}_r^T]^T$  es una matriz rectangular cuyo  $r$ -ésimo bloque contiene la distribución de las atenuaciones de los pixeles del objeto respecto a cada fuente. Si bien el objeto es representado por el vector  $\mathbf{f}$ , este también puede ser descrito como la proyección de  $\boldsymbol{\theta}$  en una base  $\boldsymbol{\Psi}$ , permitiendo obtener la imagen a partir de un número escaso de medidas  $\boldsymbol{\theta}$ , tal que  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}$ . Aplicando la teoría del muestreo compresivo se puede escribir el problema de tomografía como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{TW}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}. \quad (4.2)$$

De esta forma es posible utilizar aperturas codificadas para aplicar la teoría del muestreo compresivo (MC) en TC, de tal forma que es posible reducir el número de muestras necesarias para recuperar la imagen. Sin embargo, la distribución de los elementos de paso o bloqueo en la apertura determinan la calidad de la reconstrucción en la imagen final. Kaganovsky et al. (2014) establece que las muestras aleatorias permiten obtener mejoras significativas con respecto a las muestras uniformes, en la reconstrucción del objeto debido a la variabilidad de la apertura codificada. Esto se infirió haciendo comparaciones para proyecciones de ángulos uniformes con un conjunto de detectores fijo, ángulos uniformes con un conjunto de detectores aleatorios y ángulos aleatorios con un conjunto de detectores aleatorios. La variabilidad de la apertura codificada se da por la diferencia que hay entre cada conjunto de proyecciones de los detectores, por lo que la variabilidad de la apertura codificada se puede medir a través de la covarianza, de tal forma que se espera una covarianza baja para que las proyecciones tengan cierta independencia lineal entre líneas de proyección Bao et al. (2013); Tony Cai and Tiefeng (2011).

A partir de esto, nace la necesidad de encontrar distribuciones de la apertura codificada que permitan encontrar mejor resultado en las reconstrucciones, en comparación con las medidas aleatorias Choi and Brady (2009). Brady et al (2015) presenta un diseño de apertura codificada que puede aprovechar de forma apropiada las características de la difracción para hacer uso de estas señales en la tomografía. Así mismo, surgen otras estructuras no periódicas conocidas como ángulos dorados, que se basan en la serie de Fibonacci propuestas por Hou et al. (2014). De forma similar el estado del arte refleja estructuras de códigos de apertura, que utilizan un gradiente para cambiar la distribución del código buscando una versión mejorada del mismo como las propuestas por Abolghasemi et al. (2013). Sin embargo, estos diseños se basan en bloquear cada detector utilizando una apertura con la misma resolución y tamaño de pixel del detector de TC. Esta relación 1:1 para el tamaño del detector en comparación a la apertura limita la posibilidad de mejorar la resolución de las imágenes por métodos de SR.

## 4.2 Sistema compresivo de Superresolución

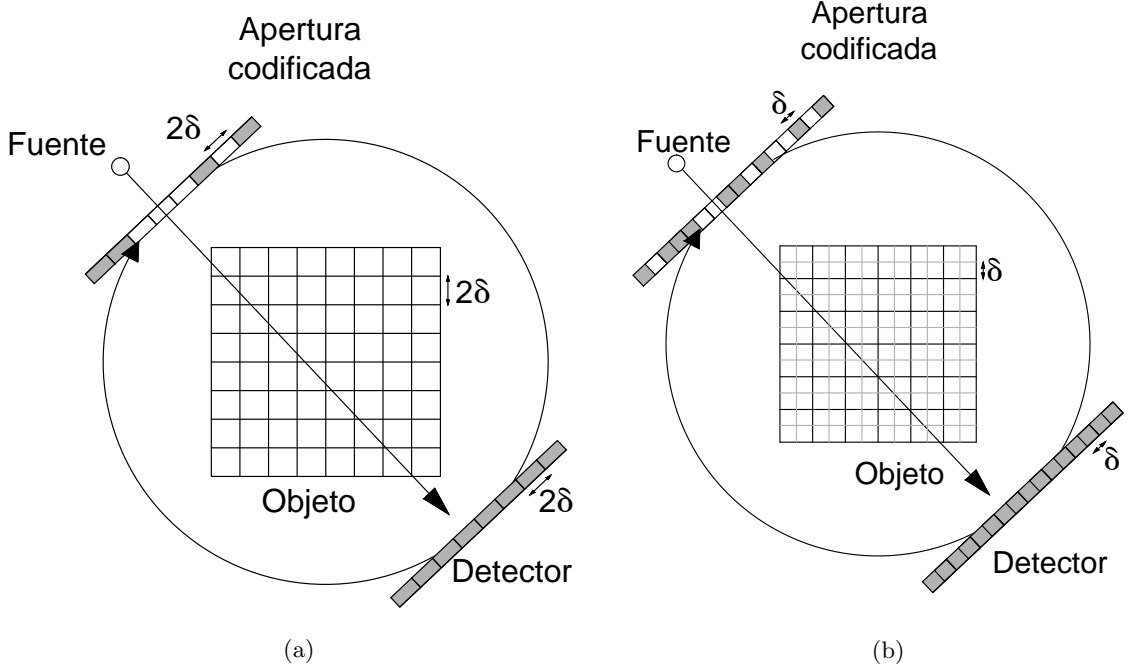


Figura 6: Sistema compresivo CAXI de resolución  $2\delta$  contrastado con un sistema de resolución  $\delta$ . (a) CAXI de resolución  $2\delta$ , (b) CAXI de resolución  $\delta$ .

La teoría del MC busca reducir la cantidad de muestras que se adquieren en el sistema CAXI, pero no aprovecha el concepto de SR para incrementar el número de píxeles por unidad de área, debido a la relación de tamaño 1:1 entre detectores y aperturas. De forma que cuando se desea aumentar la resolución de la imagen, se debe aumentar la resolución de la apertura codificada de forma proporcional.

Esto permite a las  $\hat{y}$  proyecciones de alta resolución reconstruir el objeto bajo estudio en una grilla de mayor resolución, como se puede observar en la figura 6b. Consecuentemente, cuando el detector utiliza píxeles de tamaño  $2\delta$ , la reconstrucción del objeto bajo estudio se realiza en una grilla de resolución  $2\delta$ , como se muestra en la figura 6a. Si se incrementa la resolución al doble, la reconstrucción puede realizarse sobre una grilla de tamaño  $\delta$  como se muestra en la figura 6b. Es importante resaltar, que el costo de una apertura codificada puede ser mucho menor que el costo de creación e implementación de detectores de alta resolución para TC, además de las limitaciones físicas en cuanto a la reducción de tamaño en relación al pixel de la imagen. Debido a esto, para mejorar la calidad de las imágenes se propone el uso de aperturas codificadas de alta resolución de tamaño  $\delta$  en frente del objeto, utilizando detectores de baja resolución de tamaño  $d\delta$  donde  $d \in \mathbb{Z}$ , es decir, es un número entero que define la relación entre el tamaño del detector y la apertura codificada 1: $d$ , para la reconstrucción de una imagen en una grilla de tamaño  $\delta$ , ver figura 7. Para representar este proceso matemáticamente, se modifica la ecuación (4.2), al incluir en el sistema de muestreo CAXI una matriz de submuestreo  $\mathbf{D}$  que se encarga de generar el vector de proyecciones  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\frac{M_r}{d} \times 1}$  de los detectores de baja resolución integrando la información que atraviesa la apertura codificada de alta resolución, tal que:

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}\Psi\boldsymbol{\theta}. \quad (4.3)$$

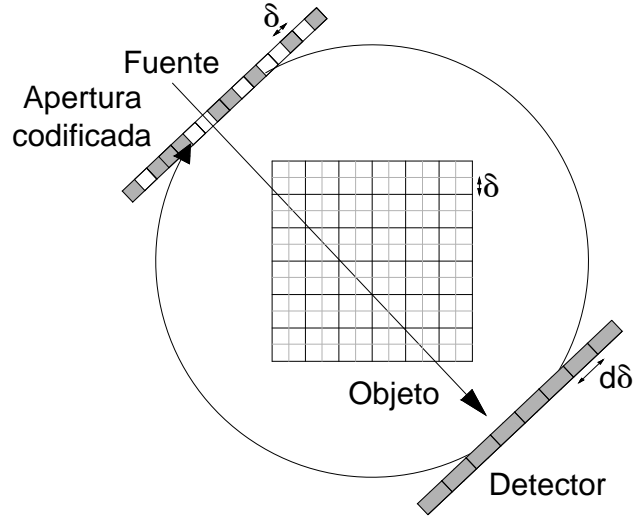


Figura 7: *Sistema compresivo de alta resolución propuesto.*

Donde las mediciones de baja resolución están determinadas por las columnas  $o = 1 \cdots M$  y las filas  $q = 1 \cdots M/d$  con  $d$  que representa el número de píxeles a integrar por el operador  $\mathbf{D}$  descritas como:

$$D_{q,o} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lceil \frac{o}{d} \rceil = q, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

De esta forma, definiendo a  $\Phi$  como  $\Phi = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}$ , es posible obtener una estimación del objeto  $\mathbf{f}$  de alta resolución, mediante el algoritmo de reconstrucción Afonso (2009), a través de la minimización de la ecuación (3.12). Sin embargo, una sola toma de datos puede no ser suficiente para la reconstrucción de una imagen por lo que las  $r$  fuentes representan cada una de las tomas a realizar. Para una arquitectura de múltiples adquisiciones, el diseño propuesto por Arguello et al. Arguello and Arce (2010) en imágenes espectrales, permite manejar distintos valores de transmitancia en cada banda para las múltiples adquisiciones. Así mismo, Cuadros et al. Cuadros et al. (2014) basa su diseño en un sistema de tomografía con un detector matricial, de su trabajo se resalta la necesidad de generar códigos de apertura homogéneos, de tal forma que el uso de los detectores sea similar a través de las múltiples adquisiciones.

## 5. Preliminares a la metodología de optimización

Aunque existen trabajos enfocados en aumentar la resolución de las imágenes de TC, teniendo en cuenta las metodologías para el aumento de la resolución Aarle et al. (2010); van Aarle et al. (2014), estos trabajos incluyen información extra del objeto sin tener en cuenta que incrementar la cantidad de datos para el aumento de la resolución puede generar mayor radiación de energía de rayos X al objeto bajo estudio. Para aprovechar de forma adecuada estas metodologías de aumento de la resolución, se incluye la teoría de CS y se propone incluir una apertura codificada de alta resolución. Sin embargo, tomar múltiples capturas hace resaltar la necesidad de diseñar una apertura codificada que permita adquirir la información de forma homogénea. Si bien,  $\hat{\mathbf{w}}_i = [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ij}, \dots, w_{iN}]$  corresponde al  $i$ -ésimo vector fila de la matriz  $\mathbf{W}$ , uno de los mayores inconvenientes que se da en la matriz de pesos  $\mathbf{W}$ , es la correlación entre los vectores fila  $\hat{\mathbf{w}}_i^T$  que la componen.

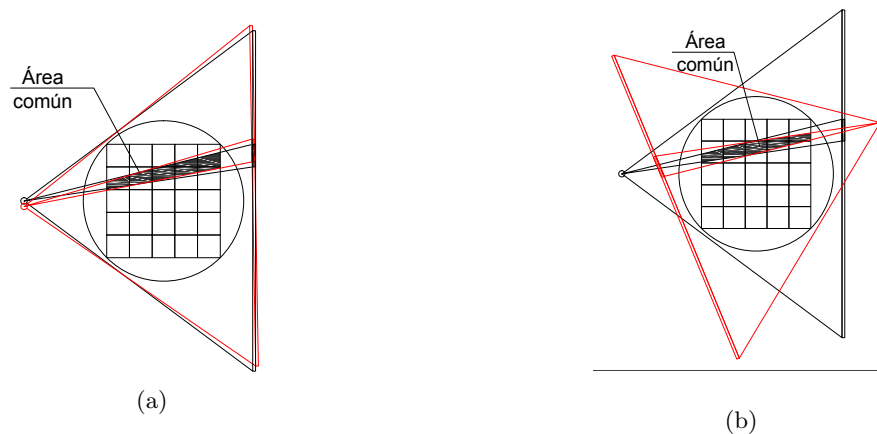


Figura 8: Áreas comunes entre proyecciones, (a) proyecciones con variación de ángulo pequeña, (b) proyecciones de coeficientes similares.

En general, el  $i$ -ésimo vector fila  $\hat{\mathbf{w}}_i^T$  de la matriz de pesos  $\mathbf{W}$ , que contiene los pesos  $w_{ij}$  de los pixeles que intercepta la  $i$ -ésima proyección de la imagen, presenta valores similares en los pesos respecto al  $\hat{i}$ -ésimo vector fila de  $\mathbf{W}$  cuando el ángulo entre  $i$  e  $\hat{i}$  no es significativo figura 8a, para  $i \neq \hat{i}$ . Estas aproximaciones de los pesos producen una alta correlación entre proyecciones adyacentes, de forma similar, sucede cuando un par de proyecciones coinciden sobre la imagen en dirección opuesta figura 8b, estos casos se ilustran en la figura 8, donde se resalta el área común involucrada en un par de proyecciones con la que se describirían los coeficientes  $w_{ij}$  que componen la matriz  $\mathbf{W}$ . Por otro lado, debido a que las proyecciones de la imagen son moduladas por la apertura codificada, los elementos de bloqueo anulan proyecciones completas lo que se traduce en la anulación del vector fila en la matriz de pesos  $\mathbf{W}$ . Al eliminar vectores fila de  $\mathbf{W}$  existe la posibilidad de eliminar aquellos que están mutuamente correlacionados. Excluir aquellos vectores que tienen una alta correlación permite generar un conjunto de vectores con baja correlación, de tal forma que, con un menor número de muestras la información sea suficiente para la reconstrucción del objeto. Por este motivo, es conveniente aumentar la variabilidad de la apertura codificada, reduciendo la matriz de covarianza que contiene la correlación de los vectores del conjunto de proyecciones.

## 5.1 Perspectiva de diseño de aperturas codificadas basada en el vector de medidas

Una metodología contemplada para el diseño de las aperturas codificadas consiste en incrementar la variabilidad. Para esto, se busca proponer una matriz de aperturas codificadas de tal forma que el sistema  $\Phi$  esté mejor condicionado. Dada la matriz de muestreo del sistema como  $\Phi = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}$ ; el sistema de SR propuesto busca diseñar una apertura codificada donde la matriz de muestreo cumple con la igualdad  $\Phi\Phi^\top = \alpha\mathbf{I}$ , siendo  $\alpha\mathbf{I}$  es una matriz identidad con valores  $\alpha$  en su diagonal.

Debido a que las filas de  $\mathbf{W}$  presentan dependencia lineal entre ellas, el diseño de la apertura codificada busca proponer una matriz  $\Phi$  que cumpla esta igualdad con respecto a la identidad, por lo que es necesario que el producto  $\mathbf{T}\mathbf{W}$  dé como resultado un sistema con proyecciones ortogonales entre sí. No obstante, de acuerdo a las características de la matriz de muestreo  $\mathbf{W}$ , las líneas de propagación de las señales de rayos X tienen en su mayoría pixeles en común y las áreas de los coeficientes que componen las proyecciones son siempre valores positivos. En tal caso, no es posible generar una apertura codificada tal que el producto cumpla con ser una identidad  $\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{W}^\top\mathbf{T}^\top = \mathbf{I}$ . Por lo tanto, los vectores fila no pueden ser linealmente independientes entre sí. Aun así, es posible aproximar el sistema a una matriz identidad resolviendo de forma iterativa el problema de minimización

$$\min_{\mathbf{T}} \|\Phi\Phi^\top - \alpha\mathbf{I}\|_F^2 \text{ sujeto a } \Phi = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}. \quad (5.1)$$

Las dimensiones en las matrices están sujetas a que  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{rM \times rM}$  y  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{rM \times N}$  donde  $N = n^2$  con  $n$  igual al número de pixeles columna o fila de la imagen,  $M = \gamma\omega$  para un número  $\gamma$  de detectores y  $\omega$  número de ángulos durante las  $r$  mediciones. Por otro lado, se debe resaltar que la geometría del haz de abanico generada entre la fuente y el conjunto de detectores para el sistema seleccionado requiere que en cada disparo de energía la rejilla de reconstrucción pueda ser cubierta por el haz de rayos X en su totalidad; debido a esto el número de detectores  $\gamma$  siempre es mayor que el número  $n$  de pixeles por fila o columna de la imagen a reconstruir.

El parámetro  $\omega$  permite, en un sistema clásico de TC, un número de medidas angulares de tal forma que se pueda asegurar un sistema lineal sobredimensionado para la reconstrucción de la imagen  $M \gg N$ . En consecuencia,  $\gamma$  y  $\omega$  generan una matriz  $\mathbf{T}_r \in \mathbb{R}^{M \times M}$  de la apertura codificada para reducir  $k$  veces el número de muestras  $M$ , donde  $k$  es una constante que cumple  $0 < k < 1$ . En consecuencia, la matriz total que contiene la apertura codificada  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{rM \times rM}$  es una matriz diagonal diseñada con la codificación para las  $r$  capturas, teniendo en cuenta que CS busca reducir el número de muestras por debajo de las muestras de la señal. Al incluir la reducción de datos en la proporción  $k$ , el sistema debe cumplir la desigualdad  $kMr \ll N$  para un nivel de compresión de  $\frac{kMr}{N}$ . Por otro lado, al utilizar un gradiente para solucionar la minimización propuesta en la ecuación (5.1), se debe tener en cuenta que las operaciones entre  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{D}$  generan un costo computacional elevado debido a las dimensiones de las matrices. Si bien  $\mathbf{T}$  es una matriz con muy pocos valores diferentes de cero, el producto  $\mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}$ , debe realizar una cantidad de operaciones tal que se puede exceder la capacidad de los equipos de cómputo.

Debido a esto, se propone ver las proyecciones  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{rM \times N}$  como una matriz de medidas  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{r\gamma \times \omega}$  conocida como sinograma, esto permite trabajar el diseño de la apertura codificada  $\mathbf{T}$  desde una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r\gamma \times \omega}$ , que contiene la información de los puntos que se dejan pasar (1) o se bloquean (0) en la matriz de medidas  $\mathbf{P}$ .

## 5.2 Perspectiva de diseño de código de apertura basada en la matriz de medidas

---

Dado que la apertura codificada para el sistema lineal de TC de SR propuesto se describe como una matriz diagonal  $\mathbf{T} = \text{bldiag}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_r) \in \mathbb{R}^{rM \times rM}$ . Sin embargo, los coeficientes bloqueados también pueden ser representados por una matriz con dimensiones iguales al sinograma de la señal, de forma que los coeficientes  $[t_{11}^r, t_{22}^r, \dots, t_{MM}^r]$  que componen la apertura codificada para la  $r$ -ésima medición pueden ser reordenados en una matriz  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{\gamma \times \omega}$ . En este proyecto se propone expresar la matriz total  $\mathbf{T}$  como una matriz  $\mathbf{A}$  que condensa la apertura codificada, para esto se utiliza el arreglo  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^\top, \mathbf{A}_2^\top, \dots, \mathbf{A}_l^\top, \dots, \mathbf{A}_r^\top]^\top \in \mathbb{R}^{r\gamma \times \omega}$  donde  $l = [1, 2, \dots, r]$ . Esto permite definir los coeficientes del código de apertura  $\mathbf{A}$  en relación con los coeficientes del código de apertura  $\mathbf{T}$  como  $a_{u+(l-1)\gamma, \varpi} = t_{(\gamma(\varpi-1)+(l-1)\gamma\omega+u), (\gamma(\varpi-1)+(l-1)\gamma\omega+u)}$  para  $u = [1, 2, \dots, \gamma]$  y  $\varpi = [1, 2, \dots, \omega]$ . En este caso la apertura codificada se expresa de forma independiente de la matriz de muestreo  $\mathbf{W}$ , haciendo posible proponer una distribución óptima de muestreo. Debido a que el código de apertura diseñado debe contener una alta variabilidad, debe ser representado a través de una matriz ortogonal binaria que cumpla con la igualdad propuesta  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \alpha\mathbf{I}$ . Sin embargo, este tipo de diseños solo son posibles cuando la matriz  $\mathbf{A}$  es cuadrada y sus coeficientes tanto en filas como en columnas, generan la matriz identidad. Teniendo en cuenta que la matriz  $\mathbf{A}$  puede tener un número elevado de elementos diferente de cero, la matriz  $\mathbf{A}$  contiene elementos extra a los necesarios para formar la identidad, una la apertura codificada aleatoria puede no contener ningún valor diferente de cero en uno o más vectores fila agrupando de forma excesiva dichos elementos en otro vector. De esta forma, el diseño propuesto para la optimización de la apertura codificada, se enfoca en evitar estas características dando homogeneidad en diversos criterios del diseño permitiendo una ganancia en la reconstrucción.

## 6. Optimización de aperturas codificadas

Actualmente, existen diversos algoritmos que permiten minimizar el rango de una matriz, en principio estos pueden ser vistos como variaciones de un gradiente descendente, aunque muchos de estos algoritmos optimizan recursos computacionales o la precisión de la respuesta como los presentados en la sección 3.1 Pilastrini and Tavares (2016). Algo para tener en cuenta es que la matriz  $\mathbf{A}$  que representa la apertura codificada puede ser diseñada utilizando un gradiente, pero la respuesta no es binaria. De existir una respuesta binaria, sus cambios abruptos en sus valores entre cero y uno proporcionan una medida del error tan variante que su respuesta puede oscilar alrededor de ciertas soluciones las cuales pueden proporcionar mejor respuesta que las matrices no diseñadas. Debido a esto, para el desarrollo y prueba de las condiciones propuestas, se utiliza un gradiente descendente que es binarizado haciendo uso de un operador  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ , donde el operador  $\mathbf{H}_1$  toma de cada fila  $k\omega$  elementos de mayor valor haciéndolos iguales a 1 mientras los demás valores los convierte en 0. De forma similar el operador  $\mathbf{H}_2$  toma de cada columna los  $k\gamma r$  elementos de mayor valor haciéndolos iguales a 1 y los valores restantes 0. Cada operador  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ , busca minimizar la norma Frobenius de la matriz  $\mathbf{A}$  para generar un diseño de código de apertura.

### 6.1 Condiciones ortogonales

La variabilidad de la apertura codificada en el dominio del sinograma, es una condición deseable en un diseño de apertura codificada, si se tiene en cuenta que al aumentar la variabilidad se reduce la correlación entre cada par de vectores fila. Esto genera un conjunto de vectores fila  $\hat{\mathbf{a}}_i$  linealmente independientes, lo que se traduce en que ningún vector pueda ser escrito como la combinación lineal de otro. Dicha distribución ideal, permite afirmar que el arreglo de vectores  $\hat{\mathbf{a}}_i$  que componen la matriz  $\mathbf{A}$  cumple la igualdad  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{A}^\top$  representa la matriz transpuesta de  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{I}$  una matriz identidad. Cuando el producto entre la matriz  $\mathbf{A}$  y la transpuesta de  $\mathbf{A}$  coincide exactamente con la matriz identidad, se dice que la transpuesta de  $\mathbf{A}$  corresponde a su inversa. Sin embargo, esto solo puede ser posible cuando la matriz es cuadrada y existe tan solo un elemento por cada columna. Cuando se proponen matrices binarias ortogonales, las posibles complicaciones crecen debido a que la correlación está directamente relacionada con el número de elementos diferentes de cero en cada fila. Para una distribución vectorial con  $k\omega$  elementos iguales a 1, el valor esperado  $E(\cdot)$  del número de elementos repetidos para dos vectores  $\hat{\mathbf{a}}_i$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_j$ , está entre

$$k^2\omega < E\left(\max_{i \neq j} (\hat{\mathbf{a}}_i \hat{\mathbf{a}}_j^\top)\right) < k\omega. \quad (6.1)$$

Donde  $k^2\omega$  es el valor máximo para el mínimo esperado de las posiciones diferentes de cero repetidas en dos distribuciones de  $k\omega$  elementos. En la TC la necesidad de adquirir un número elevado de muestras lleva a tener una matriz  $\mathbf{A}$  que contiene en cada fila un número elevado de elementos iguales a 1. Sin embargo, es posible aproximar el sistema a una matriz que reduzca los elementos repetidos tal que sus repeticiones se distribuyan alrededor de  $k^2\omega$  repeticiones por fila, esto a través de la minimización:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2, \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{I}_1$  es la matriz deseada generada por el producto entre una matriz identidad y la constante  $k\omega$ . Para resolver  $\mathbf{X}$  de la ecuación (6.2), se utiliza la igualdad conocida entre la norma Frobenius y su traza definida como:

$$J(\mathbf{X}) = \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2 = \text{Tr}\{(\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X})(\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X})^\top\}. \quad (6.3)$$

En tal caso el gradiente  $(\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = \frac{\partial J(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}})$  de  $J(\mathbf{X})$  respecto a  $\mathbf{X}$  cuando  $\mathbf{I}_1$  y la matriz  $\mathbf{A}$  se consideran constantes, se calcula como :

$$\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = 2\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{I}_1), \quad (6.4)$$

Haciendo uso del gradiente, si  $z$  corresponde al número de iteraciones a resolver, la solución del siguiente paso  $z + 1$  como parte de un problema iterativo es calculada utilizando la expresión  $\mathbf{X}_{z+1} = \mathbf{X}_z - \xi \nabla_{\mathbf{X}_z} J(\mathbf{X})$  donde  $\xi$  es el tamaño de paso en cada iteración. Sin embargo, como se expuso anteriormente el gradiente no necesariamente da una respuesta binaria, en tal caso es necesario aplicar el operador de umbralización ( $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ ) para conservar  $k$  elementos de la matriz, de forma que

$$\mathbf{X}_{z+1} = \mathbf{H}_e\{\mathbf{X}_z - \xi \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{X}_z - \mathbf{I}_1)\}. \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta que para la iteración  $z$ , la solución obtenida para  $\mathbf{X}_{z+1}$  es aproximadamente la pseudoinversa de  $\mathbf{A}$ . De tal forma que si  $\mathbf{X}$  es la solución del sistema  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}$  cuando  $z = \infty$ , la matriz resultante sería aproximadamente  $\mathbf{X}_{\infty+1} \simeq (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ . En consecuencia, cuando únicamente se tienen en cuenta las filas de la matriz, las columnas pueden presentar cualquier distribución, generando alta correlación entre columnas, aunque esta se reduzca en las filas. Note que para poder aproximarse a la solución de la pseudoinversa, la distribución de las columnas es utilizada en el producto  $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$ . Debido a esto, para restringir las columnas se propone el modelo lineal  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{X}\mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{I}_2$  es la matriz deseada, generada por el producto de una matriz identidad  $\mathbf{I}$  con la constante  $k\gamma r$ , esto permite expresar la minimización de las columnas como:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{I}_2 - \mathbf{X}\mathbf{A}\|_F^2. \quad (6.6)$$

La minimización del modelo lineal generado para reducir la correlación entre columnas se agrega como una segunda condición al problema, de forma que la suma de las dos condiciones reduzca al mismo tiempo la correlación para las filas y las columnas. Generando una función que permite al sistema tener menor correlación entre filas como entre columnas:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{I}_2 - \mathbf{X}\mathbf{A}\|_F^2 + \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2 \quad (6.7)$$

## 6.2 Condiciones de homogeneidad espacial

Una matriz binaria cuya distribución es aleatoria, puede contener en su dominio todo tipo de matrices existentes, es decir, al generarse una matriz aleatoria, existe la probabilidad de generar una matriz diagonal, Toeplitz o triangular. Aunque estas matrices cumplan los criterios de ortogonalidad, no necesariamente a través de las múltiples capturas se explota el uso de los elementos de detección de la arquitectura. Nótese que el operador  $\mathbf{H}$ , toma de la respuesta del gradiente y homogeniza la captura total de la información de los detectores o de ángulos. Este tipo de homogenización es conveniente debido a que no existe información acumulada o nula en un solo detector, o en su defecto no existe información acumulada o nula para un solo ángulo. Sin embargo, para homogenizar la estructura de la matriz  $\mathbf{A}$ , es necesario aplicar los dos operadores  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  como parte de dos pasos secuenciales. Asegurar la cantidad de información por detectores o por ángulos no implica que la información de las múltiples capturas o en los detectores de baja resolución esté distribuida de forma conveniente para el uso de los elementos de baja resolución, ya que un detector de baja resolución puede recibir en  $d$  cantidad de datos de alta resolución, mientras otro elemento puede recibir cero. Para mejorar esta característica, se contempla generar una versión reducida  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{\frac{r\gamma}{d} \times r\gamma}$  de la matriz de submuestreo  $\mathbf{D}$ . La matriz de submuestreo  $\mathbf{O}$ , definida por sus columnas  $i = 1 \cdots r\gamma$  y sus filas  $j = 1 \cdots (\frac{r\gamma}{d})$  se define como:

$$O_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lceil \frac{i}{d} \rceil = j, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Donde  $d$  es un múltiplo de  $(r\gamma)$  y representa el número de pixeles de alta resolución por cada detector de baja resolución. De esta forma, se puede tener el número de elementos de alta resolución en relación con el detector de baja resolución. Para homogenizar la información teniendo en cuenta el detector de baja resolución, se incluye la matriz  $\mathbf{U}$  que corresponde al valor deseado de la distribución de baja resolución respecto a la matriz de alta resolución. Se utiliza la matriz de unos  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{r\gamma \times \omega}$  con las mismas dimensiones de  $\mathbf{A}$  de tal forma que se pueda para generar la matriz deseada de homogenización como  $\mathbf{U} = \mathbf{O}\mathbf{1}/d$ . La relación lineal entre la matriz deseada y la matriz de submuestreo, permite encontrar una matriz  $\mathbf{X}$  que minimice la diferencia, dado que  $\mathbf{X}$  es la incógnita de  $\mathbf{A}^\top$ , la función lineal  $\mathbf{U} = \mathbf{O}\mathbf{X}^\top$  permite definir la minimización entre la matriz deseada y la matriz incógnita como:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{U} - \mathbf{O}\mathbf{X}^\top\|_F^2 \quad (6.8)$$

Esta minimización permite encontrar una matriz que distribuye equitativamente entre los detectores de baja resolución la información de alta resolución, sin embargo, la información a través de las diferentes tomas puede repetir datos de más de una proyección, debido a esto se propone la matriz  $\mathbf{\Xi}$  que evalúa la suma de las proyecciones a través de las diferentes capturas que realiza la matriz  $\mathbf{A}$ . La matriz  $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{\gamma \times r\gamma}$  se define como  $\mathbf{\Xi} = [\mathbf{I}^1, \mathbf{I}^2, \dots, \mathbf{I}^l, \dots, \mathbf{I}^r]$  con  $l = [1, 2, \dots, r]$ , tal que cada matriz  $\mathbf{I}^l$  que representa una matriz identidad, haciendo posible la suma de un elemento específico de una captura con respecto al mismo elemento de las demás. En este caso la matriz deseada  $\mathbf{V}$  se genera a partir del producto entre la matriz  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{r\gamma \times \omega}$  y la matriz de homogenización por capturas  $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{\gamma \times r\gamma}$  tal que  $\mathbf{V} = \mathbf{\Xi}\mathbf{1}/r$ . Haciendo uso de la matriz de homogenización por capturas, la matriz incógnita puede ser minimizada en el número de datos adquiridos de tal forma que cada dato se adquiriera equitativamente entre capturas, esto es posible a través de la minimización:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{V} - \mathbf{\Xi}\mathbf{X}^\top\|_F^2 \quad (6.9)$$

## 6.3 Pseudocódigo de optimización propuesto

Habiendo definido los parámetros que intervendrán la optimización, se propone la minimización:

$$J(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{I}_2 - \mathbf{X}\mathbf{A}\|_F^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{O}\mathbf{X}^\top\|_F^2 + \|\mathbf{V} - \mathbf{\Xi}\mathbf{X}^\top\|_F^2. \quad (6.10)$$

Esto implica que obtener el mínimo para la función  $J(\mathbf{X})$  permite encontrar una solución  $\mathbf{X}$  que cumple con más de un criterio, para una función con múltiples variables y diferenciable, se alcanza un valor mínimo en  $\mathbf{X}$  tal que su gradiente sea cero cuando las condiciones aportan el mínimo error.

Al utilizar el método del gradiente para probar estas condiciones, es necesario que las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{\Xi}$ , sean positivas semidefinidas, esto permitiría llegar a una solución del gradiente nulo que correspondería al mínimo error, proporcionando una solución exacta del problema. Debido a la dependencia lineal existente entre filas y columnas la solución que se obtiene del gradiente puede no ser la mejor. Para mejorar la característica de precisión en la solución, se propone resolver un sistema equivalente, donde cada sistema lineal posee un preconditionador que permite mejorar el condicionamiento de la función:

$$J(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X}} \left\| \hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{X} \right\|_F^2 + \left\| \hat{\mathbf{I}}_2 - \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}}_2 \right\|_F^2 + \left\| \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{O}}\mathbf{X}^\top \right\|_F^2 + \left\| \hat{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{\Xi}}\mathbf{X}^\top \right\|_F^2. \quad (6.11)$$

Cada matriz que define la diferencia de una norma posee un equivalente representado en la función (6.10):

- Para generar una matriz equivalente que permita al producto  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  generar una matriz cercana a una matriz identidad, se utiliza  $\hat{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{M}_1^\dagger \mathbf{I}_1$  y  $\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{M}_1^\dagger \mathbf{A}$ .
- Para generar una matriz equivalente que permita al producto  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  generar una matriz cercana a una identidad, se utiliza  $\hat{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{M}_2^\dagger$  y  $\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} \mathbf{M}_2^\dagger$ .
- Para generar una matriz equivalente para la homogenización de la cantidad de información capturada en los detectores de baja resolución, se utiliza  $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{M}_3^\dagger \mathbf{U}$  y  $\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{M}_3^\dagger \mathbf{O}$ .
- Para generar una matriz equivalente para la homogenización de la información a través de las múltiples tomas se utiliza  $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{M}_4^\dagger \mathbf{V}$  y  $\hat{\mathbf{\Xi}} = \mathbf{M}_4^\dagger \mathbf{\Xi}$ .

Donde  $\dagger$  representa la pseudoinversa de la matriz. A diferencia de lo expuesto en la sección 3.2, las matrices de preconditionamiento, aunque idealmente deberían ser equivalentes a la inversa de la respectiva matriz de proyección, ninguna de estas es una matriz cuadrada, por este motivo se utiliza la pseudoinversa de cada matriz de proyección. De esta forma se espera que al encontrar una solución a la minimización (6.11), esta también sea solución al problema (6.10). La ventaja de este planteamiento es su fácil implementación y su versatilidad intuitiva al proponer nuevas variables para la aplicación en diversas tareas que utilicen un sistema lineal. Inicialmente, se propone un valor cualquiera de  $\mathbf{X}_0$ , donde  $z$  define el número de iteraciones a resolver. Entonces, de las  $z + 1$  soluciones generadas, se espera encontrar una solución que satisface la minimización (6.11) tal que la igualdad  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\top$  se cumpla. Esto se consigue, utilizando la expresión:

$$\mathbf{X}_{z+1} = \mathbf{X}_z - \xi \nabla_{\mathbf{X}_z} J(\mathbf{X}_z), \quad (6.12)$$

donde el coeficiente  $\xi$  define el tamaño de paso en cada iteración. Si  $\nabla_{\mathbf{X}_z} J(\mathbf{X})$  representa la derivada de  $J(\mathbf{X})$ , este término define la dirección en donde la función presenta un incremento en sus valores, de allí que para minimizar la función se tome la dirección opuesta, es decir  $-\nabla_{\mathbf{X}_z} J(\mathbf{X})$ . Dado que la norma Frobenius puede ser escrita mediante la traza como se hizo con la minimización (6.2), gracias a esto es posible obtener la derivada de  $J(\mathbf{X})$  como:

$$\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = 2\hat{\mathbf{A}}_1^\top (\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X} - \hat{\mathbf{I}}_1) + 2(\mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_2) \hat{\mathbf{A}}_2^\top + (\mathbf{X} \hat{\mathbf{O}}^\top - \hat{\mathbf{U}}^\top) 2\hat{\mathbf{O}} + (\mathbf{X} \hat{\mathbf{\Xi}}^\top - \hat{\mathbf{V}}^\top) 2\hat{\mathbf{\Xi}}. \quad (6.13)$$

Al utilizar la expresión de la ecuación (6.12), la derivada de  $J(\mathbf{X})$  incluye los términos de la suma de todas las condiciones planteadas. De tal modo que el coeficiente  $\xi$ , se asume como una constante que acompaña cada una de las condiciones, teniendo en cuenta que cada condición refleja una prioridad diferente, los términos de la suma pueden contener constantes de control de paso diferentes. Teniendo en cuenta esto, el gradiente con las respectivas variables de control se escribe como:

$$\xi \nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = \phi_1 \hat{\mathbf{A}}_1^\top (\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X} - \hat{\mathbf{I}}_1) + \phi_2 (\mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_2) \hat{\mathbf{A}}_2^\top + \phi_3 (\mathbf{X} \hat{\mathbf{O}}^\top - \hat{\mathbf{U}}^\top) \hat{\mathbf{O}} + \phi_4 (\mathbf{X} \hat{\mathbf{\Xi}}^\top - \hat{\mathbf{V}}^\top) \hat{\mathbf{\Xi}}. \quad (6.14)$$

Si la función  $J(\mathbf{X})$  es una función convexa, las constantes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_4$  representan el tamaño de paso del gradiente. Así mismo se espera exista una matriz hessiana semidefinida positiva para todo  $\mathbf{X}$ . Desarrollando la segunda derivada para encontrar la correspondiente matriz hessiana, se obtiene como resultado:

$$\frac{\partial \xi \nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \phi_1 \hat{\mathbf{A}}_1^\top \hat{\mathbf{A}}_1 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \phi_2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{A}}_2^\top + \phi_3 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \hat{\mathbf{O}}^\top \hat{\mathbf{O}} + \phi_4 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \hat{\mathbf{\Xi}}^\top \hat{\mathbf{\Xi}}. \quad (6.15)$$

Si se utilizan las igualdades que hacen al sistema equivalente a minimizar la ecuación 6.10, de esta forma, el resultado de la ecuación 6.15 para la segunda derivada se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi \nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} &= \phi_1 \mathbf{A}^\top (\mathbf{M}_1^\dagger)^\top \mathbf{M}_1^\dagger \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \phi_2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{M}_2^\dagger (\mathbf{M}_2^\dagger)^\top \mathbf{A}^\top \dots \\ &+ \phi_3 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{O}^\top (\mathbf{M}_3^\dagger)^\top \mathbf{M}_3^\dagger \mathbf{O} + \phi_4 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \Xi^\top (\mathbf{M}_4^\dagger)^\top \mathbf{M}_4^\dagger \Xi. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dado que  $\mathbf{A}$  se supone es una matriz no cuadrada, cada condicion del sistema generado, se preconditiona con una matriz que representa su pseudoinversa, esto permite definir las matrices de preconditionamiento como:

- $\mathbf{M}_1^\dagger = \mathbf{A}_1^\dagger = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ , para generar la aproximación  $\phi_1 \mathbf{A}^\top (\mathbf{M}_1^\dagger)^\top \mathbf{M}_1^\dagger \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \approx \phi_1 \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}}$ , donde  $\mathbf{A}_1^\dagger$  es la pseudoinversa por izquierda de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- $\mathbf{M}_2^\dagger = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{A}^\top)^{-1}$ , para generar la aproximación  $\phi_2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{M}_2^\dagger (\mathbf{M}_2^\dagger)^\top \mathbf{A}^\top \approx \phi_2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{A}_2^\dagger$  es la pseudoinversa por derecha de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- $\mathbf{M}_3^\dagger = (\mathbf{O}^\top \mathbf{O})^{-1} \mathbf{O}^\top$ , para generar la aproximación  $\phi_3 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{O}^\top (\mathbf{M}_3^\dagger)^\top \mathbf{M}_3^\dagger \mathbf{O} \approx \phi_3 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{I}$ .
- $\mathbf{M}_4^\dagger = (\Xi^\top \Xi)^{-1} \Xi^\top$ , para generar la aproximación  $\phi_4 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \Xi^\top (\mathbf{M}_4^\dagger)^\top \mathbf{M}_4^\dagger \Xi \approx \phi_4 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{I}$ .

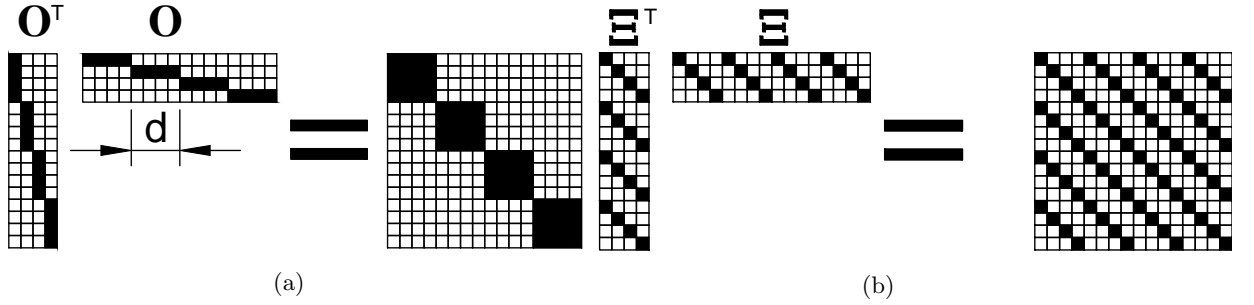


Figura 9: Representación del producto matricial, donde las matrices cuadradas resultantes, poseen algún tipo de dependencia lineal. (a) Producto matricial de  $\mathbf{O}^\top \mathbf{O}$ . (b) Producto matricial de  $\Xi^\top \Xi$ .

Sin embargo, la matriz de preconditionamiento para  $\mathbf{O}^\top \mathbf{O}$ , genera una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque está formado por una matriz de unos. De forma similar, la matriz resultante del producto  $\Xi^\top \Xi$ , presenta una matriz con filas y columnas linealmente dependientes entre si. Por este motivo, los preconditionadores  $\mathbf{M}_3$  y  $\mathbf{M}_4$  son generados como matrices identidad. Al aplicar los preconditionadores  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ , la matriz hessiana resultante presenta un mejor condicionamiento.

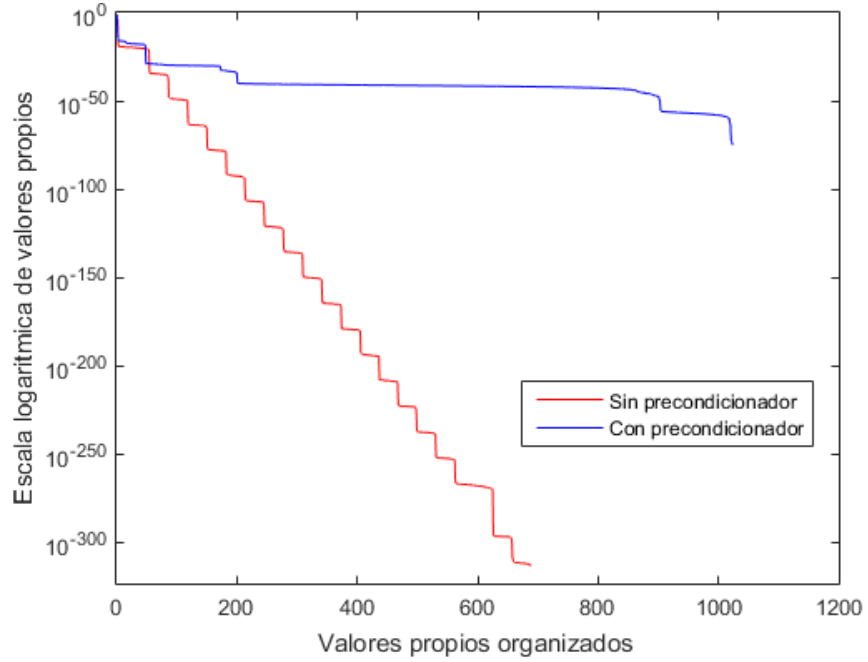


Figura 10: Gráfica de comparación de los valores propios de la matriz hessiana donde la curva en rojo muestra la distribución sin preconditionadores, y la curva azul la distribución al aplicar preconditionadores.

Para mostrar la mejora en el condicionamiento de la matriz hessiana, la distribución de los valores propios normalizados y organizados de mayor a menor, se compara para una matriz hessiana que no utiliza preconditionadores como se puede observar en la curva de color rojo de la figura 10, contrastada con la curva de color azul que representa los valores propios de matriz hessiana cuando se aplican los preconditionadores propuestos  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ . Esto permite escribir el gradiente de la forma:

$$\xi \nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = \phi_1 \mathbf{A}_1^\dagger (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{I}_1) + \phi_2 (\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \mathbf{A}_2^\dagger + \phi_3 (\mathbf{X}\mathbf{O}^\top - \mathbf{U}^\top) \mathbf{O} + \phi_4 (\mathbf{X}\mathbf{\Xi}^\top - \mathbf{V}^\top) \mathbf{\Xi}. \quad (6.17)$$

Para solucionar  $\mathbf{X}$  se tiene en cuenta que la ecuación (6.12) arrojará un valor no binario como solución al problema planteado. Para generar una solución binaria, se propone modificar la ecuación (6.12) utilizando el operador  $H_*(.)$ , permitiendo encontrar  $\mathbf{X}$  haciendo uso de:

$$\mathbf{X}_{z+1} = H_*(\mathbf{X}_z - \xi \nabla_{\mathbf{X}_z} J(\mathbf{X}_z)). \quad (6.18)$$

Para el diseño de la apertura codificada, se utiliza la solución encontrada con el operador  $\mathbf{H}_2$  como una solución temporal  $\dot{\mathbf{X}}$ .

Teniendo en cuenta que la matriz temporal,  $\mathbf{A}$  se actualiza como la transpuesta de  $\dot{\mathbf{X}}$ . La solución de  $\mathbf{X}$  es hallada utilizando el operador  $\mathbf{H}_1$  para homogeneizar la información por filas de detectores, permitiendo encontrar una solución que minimice también la distribución entre la información total de una fila de detectores o la información total de un ángulo específico a través de las diferentes capturas. Finalmente, esto se materializa en el pseudocódigo propuesto:

De esta forma es posible encontrar una matriz  $\mathbf{X}$  que sea una solución binaria, con la que se puede generar una matriz  $\mathbf{A}$ , con alta variabilidad que presente una buena respuesta a los criterios de homogeneidad propuestos, lo que permitirá una mejor reconstrucción.

---

**Algoritmo 1** Optimización de código de apertura

---

**Entrada:** detectores  $\gamma$ , ángulos  $\omega$ , factor de submuestreo  $d$ , capturas  $r$ , iteraciones  $z$ , constantes de control de paso  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ , nivel de transmitancia  $k$

**Salida:**  $\mathbf{X}$

Inicio

$\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^{(\gamma r) \times \omega}$  matriz binaria aleatoria

$\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(\gamma r/d) \times \gamma r}$  matriz de submuestreo

$\Xi \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma r}$  matriz para la suma por capturas

para  $s = 1$  to  $z$

$\dot{\mathbf{X}}_s \leftarrow \mathbf{A}^\top$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{s+1} \leftarrow \mathbf{H}_2 \left[ \dot{\mathbf{X}}_s + \phi_1 \mathbf{A}_1^\dagger (\mathbf{A} \dot{\mathbf{X}}_s - \mathbf{I}_1) + \phi_2 (\dot{\mathbf{X}}_s \mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \mathbf{A}_2^\dagger \cdots \right. \\ \left. + \phi_3 (\dot{\mathbf{X}}_s \mathbf{O}^\top - \mathbf{U}^\top) \mathbf{O} + \phi_4 (\dot{\mathbf{X}}_s \Xi^\top - \mathbf{V}^\top) \Xi \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \leftarrow \dot{\mathbf{X}}_{s+1}^\top$   
 $\mathbf{X}_s \leftarrow \mathbf{A}^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s+1} \leftarrow \mathbf{H}_1 \left[ \mathbf{X}_s + \phi_1 \mathbf{A}_1^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{X}_s - \mathbf{I}_1) + \phi_2 (\mathbf{X}_s \mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \mathbf{A}_2^\dagger \cdots \right. \\ \left. + \phi_3 (\mathbf{X}_s \mathbf{O}^\top - \mathbf{U}^\top) \mathbf{O} + \phi_4 (\mathbf{X}_s \Xi^\top - \mathbf{V}^\top) \Xi \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{X}_{s+1}^\top$

fin para

devolver  $\mathbf{A}$

---

## 7. Pruebas y resultados

Al hacer uso de aperturas codificadas ya sean aleatorias o diseñadas, utilizando el sistema lineal propuesto representado por la ecuación (4.3), es posible comprobar la mejora de la apertura codificada de SR propuesta comparando la reconstrucción de las imágenes de entrada  $\mathbf{f}$  para los dos casos. Las imágenes utilizadas en las pruebas son seleccionadas del banco de datos de TC obtenidos en estudios previos a este trabajo por el "Grupo de investigación ed diseño de algoritmos y procesamiento de datos multidimensionales" HDSP . Para esto se caracterizan las imágenes de TC de rayos-X como:

- Imágenes de inspección. Son imágenes generadas de las reconstrucciones realizadas a través del método de tomografía de rayos X del interior de un objeto, su mayor uso se da en la medicina para el diagnóstico de enfermedades. Sin embargo, sus aplicaciones pueden extenderse a otras áreas al realizar modificaciones de un tomógrafo médico, Figura 11b,11c,11d.
- Imágenes sintéticas. Desarrolladas a partir de la necesidad de controlar el objeto a reconstruir, lo que permite crear características que ayuden a caracterizar el sistema de medición. Dentro de estas se encuentra la imagen sintética "*Sheep-Logan Phantom*" Shepp and Logan (1974), implementada en Matlab como la función "*phantom*", figura 11a.

Con el fin de presentar los diseños de la apertura codificada como una optimización, se utiliza la minimización de la ecuación (6.10). De tal forma que al minimizar la ecuación (6.10), se restringe el dominio de la distribución de una matriz aleatoria de un conjunto infinito de distribuciones, de esta forma, la búsqueda de una apertura codificada que cumpla con los criterios propuestos en el problema de minimización 6.10 permite llegar a una mejora de los códigos de apertura. Sin embargo, la respuesta del problema de minimización oscila alrededor de un conjunto de soluciones, dichas soluciones evaluadas a través de distintos parámetros revelan los resultados presentados para permitir concluir acerca de este trabajo y del potencial de los códigos de apertura.

Es notable que en los diferentes ensayos cambian los coeficientes  $\hat{\mathbf{y}}$  de alta resolución generados a través de la apertura codificada, como consecuencia las proyecciones de baja resolución  $\mathbf{p}$  cambian. Incluso, cuando las proyecciones varían según la imagen  $\mathbf{f}$  seleccionada, la calidad de cada imagen depende del método de reconstrucción y de la apertura codificada. Utilizando el algoritmo C-SALSA Afonso (2009) para la reconstrucción de las imágenes, se evalúa la calidad de las reconstrucciones al variar la apertura codificada. De esta forma el método iterativo que soluciona el problema descrito en la ecuación (3.12) utiliza un número de iteraciones (*Iter*) igual a 1000 durante las pruebas propuestas, buscando evaluar otras variables para concluir acerca de la calidad de los resultados de la apertura codificada. Otra variable que se tiene en cuenta es la base de representación  $\Phi$ , donde esta depende de la apertura codificada implementada debido a que  $\Phi$  está definido como el producto matricial  $\Phi = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{W}\Psi$ . Para las pruebas,  $\mathbf{W}$  es generado a partir de la herramienta software ASTRA van Aarle et al. (2015), de forma que  $\mathbf{W}$  es calculado para generar las proyecciones de alta resolución para la configuración de los parámetros, es así como las proyecciones se calculan para un arreglo lineal igual a  $\gamma = 512$ . Esto permite dividir la grilla de reconstrucción de la imagen en la misma proporción que las dimensiones del haz de la proyección de alta resolución de tamaño  $\delta = 0,377mm$ , generando un total de  $193mm$  para el haz de las proyecciones sobre la línea de detectores. El arreglo de detectores es ubicado a  $290,2mm$  del centro espacial de la imagen y la fuente de rayos X es ubicada en dirección opuesta a los detectores una distancia de  $484,6mm$ .

El sistema detectores y fuente rotan alrededor del centro espacial de la rejilla de reconstrucción de la imagen  $\omega = 97$  ángulos, diferenciados de los  $360^\circ$  de visión alrededor del objeto. En este proyecto, la variación en el ángulo se mantendrá de  $3,71^\circ$  constante. Esto genera un total de  $M = 49664$  proyecciones posibles por captura, que son moduladas a través de una rejilla cartesiana con un tamaño de  $116mm \times 116mm$  donde están inscritos los pixeles de la imagen, restringidos a un círculo de radio  $\rho = 58mm$ , para cada pixel de tamaño  $\delta$ . Estos parámetros permiten recuperar una imagen de  $32 \times 32$  en un sistema sin apertura codificada con detectores de tamaño  $d\delta$ , sin embargo, al introducir la apertura codificada, es posible saber la dirección de las proyecciones en los detectores de baja resolución

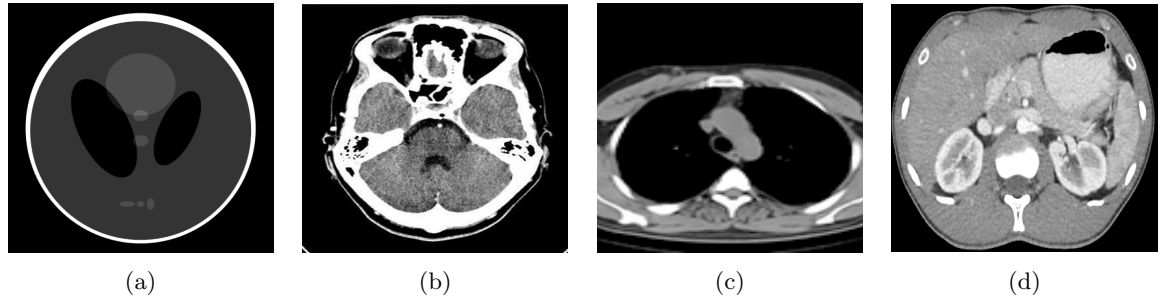


Figura 11: Imágenes de prueba para la transmitancia óptima. Para (a) *Sheep-Logan Phantom*, (b) *Cráneo*, (c) *Torax* y (d) *Abdomen*.

cuando la transmitancia  $0 < k < 1$  permite el paso de un porcentaje de  $k \times 100\%$  proyecciones a los detectores. Esto permite recuperar una imagen de alta resolución, teniendo en cuenta que el número de muestras necesarias para reconstruir la señal está determinado por las  $kMr$  proyecciones cuando se es estrictamente mayor a  $N$ , la compresión de la imagen se obtiene cuando  $kMr < N$ .

Por otro lado, para que el algoritmo C-SALSA converja, el valor de  $\tau$  de la ecuación (3.12) se configura según la transmitancia de las múltiples capturas para cada prueba. Dado que las imágenes de entrada son conocidas, cada reconstrucción puede variar según su relación de Pico señal a Ruido o PSNR (del inglés “*Peak Signal-to-Noise Ratio*”) debido a la transmitancia de la apertura codificada. Haciendo uso de los parámetros propuestos y teniendo en cuenta como afecta la transmitancia así cómo las imágenes de entrada  $\mathbf{f}$ , se propone:

- Identificar el valor  $d$  de submuestreo para las reconstrucciones, a través de 20 reconstrucciones de la imagen “*Sheep-Logan Phantom*”, variando en cada prueba la apertura codificada aleatoria inicial y reflejando este resultado respecto a su optimización.
- Hacer una búsqueda del valor de la transmitancia de la apertura codificada, haciendo uso de la imagen “*Sheep-Logan Phantom*”. Para evaluar las reconstrucciones, a través del PSNR de la imagen, este resultado es promediado a través de 10 pruebas para 2, 3 y 4 capturas, en cada valor de transmitancia. La información acerca del promedio de los resultados, en relación con la transmitancia de la apertura codificada aleatoria, se contrasta con los resultados de su respectiva apertura codificada optimizada. Lo que permite identificar la transmitancia donde se consigue la mejor reconstrucción.
- Haciendo uso de los resultados de la búsqueda del valor de transmitancia, es posible identificar un valor de reconstrucción de la imagen “*Phantom*” considerada como aceptable para un PSNR superior a 30 dBs, tal que la transmitancia para un número de datos menor a la cantidad de píxeles de la imagen permita definir el sistema como compresivo.
- Para cada apertura codificada aleatoria, se realiza una optimización. Entonces, para mostrar la mejora de la apertura codificada teniendo en cuenta los criterios de optimización, se utiliza el valor de transmitancia donde se tiene la mejor reconstrucción. Con este parámetro, se realiza el proceso de optimización 20 veces para 2, 3 y 4 capturas. Haciendo uso de las matrices de la apertura codificada, se compara el condicionamiento, así como la incoherencia por filas y la incoherencia por columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  aleatoria contra la optimizada.
- Finalmente, se generan 20 códigos de apertura con su respectiva optimización, utilizando el valor de transmitancia al que es considerado el sistema de TC de SR como compresivo. Con los códigos de apertura se utilizan como imágenes de prueba, la imagen sintética “*Sheep-Logan Phantom*” y como imágenes médicas se utiliza la base de datos propiedad del grupo de investigación, donde se seleccionan 2 imágenes de la cabeza, 2 imágenes de tórax y 2 imágenes de abdomen.

Las optimizaciones se generan a partir de una matriz  $\mathbf{A}$  aleatoria utilizando el algoritmo 1. Donde el número de ángulos corresponde a  $\omega = 97$ , con iteraciones  $z = 200$  utilizando las constantes de control de paso  $\phi_1 = 0,08$ ,  $\phi_2 = 0,08$ ,  $\phi_3 = 0,1$  y  $\phi_4 = 0,8$ . Teniendo en cuenta que la transmitancia está ligada a cada parámetro de prueba, ésta es una entrada que puede variar según sea el caso.

## 7.1 Pruebas de submuestreo

Al proponer el cambio en la resolución de la imagen a reconstruir utilizando una apertura codificada, éste debe dividir las proyecciones en un valor múltiplo del número de detectores, de tal forma que se realiza una búsqueda del valor de submuestreo para  $d = 2, 4, 8$  y  $16$ .

$\tau$	$2,02 \times 10^{-4}$	$1,68 \times 10^{-4}$	$1,44 \times 10^{-4}$	$1,44 \times 10^{-4}$
<b>Transmitancia</b>	<b>50 %</b>	<b>25 %</b>	<b>12,5 %</b>	<b>6,25 %</b>
<b>Factor de submuestreo</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>Aleatorias</b>	52,16	49,43	47,38	47,40
<b>Optimizadas</b>	55,47	53,44	51,98	52,01

Tabla 1: Comparativo de PSNR para diferentes valores de submuestreo  $d$

Habiendo definido los valores de búsqueda para  $d$ , de forma que para obtener el 100% de las proyecciones se utilizan valores de transmitancia iguales a  $k = \frac{1}{d}$  y un número de capturas igual al valor de submuestreo  $d$ . Nótese que los valores de  $\tau$  del algoritmo de reconstrucción mostrados en la tabla 1 varían en cada prueba según la transmitancia, por esto se compara la calidad de las imágenes de reconstrucción en la tabla 1 a través del PSNR de las reconstrucciones para cada valor  $d$  propuesto en cada columna con su respectivo valor tau para la convergencia del algoritmo de reconstrucción.

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla 1 para aperturas Aleatorias y aperturas Optimizadas, utilizando la configuración de una imagen de  $32 \times 32$  pixeles, para generar imágenes de mayor resolución. Aunque las pruebas arrojan resultados muy similares, se selecciona un submuestreo  $d = 4$  teniendo en cuenta que existen limitaciones para la fabricación de los elementos de bloqueo cuando el tamaño es reducido. Esto permite generar una imagen de  $128 \times 128$  pixeles  $N = 128^2$ , de tal forma que las proyecciones de alta resolución en la apertura codificada corresponderían a utilizar  $\gamma = 512$  detectores cuando solo se tiene un arreglo de 128 detectores, para el factor de submuestreo seleccionado  $d = 4$ .

## 7.2 Búsqueda de transmitancia

Con el número de muestras obtenidas a partir de las  $\frac{kMr}{d}$  proyecciones en relación con la cantidad de pixeles  $N$  de la imagen, para  $\frac{kMr}{d} > N$ , se tiene un sistema que no puede ser asumido como compresivo a causa de que se tiene un sobremuestreo de la imagen, cuando la información de cada proceso de captura se hace redundante. Al aumentar el número de datos a partir de la transmitancia no necesariamente se obtiene una mejor reconstrucción. De otra forma, si se cumple la desigualdad  $kMr < N$ , para un número de datos menor al número de los pixeles, es posible asumir que existe la compresión de la imagen. Sin embargo, la excesiva escasez de datos puede reducir la calidad de la imagen de tal forma que no sea útil.

Es así, que para identificar el valor de transmitancia donde el número de datos es menor a la cantidad de pixeles de la imagen y su reconstrucción arroja el valor de PSNR más alto, se generan 10 códigos de apertura en cada valor de transmitancia a su respectivo número de capturas. lo que permite adquirir el valor promedio del PSNR de las reconstrucciones para la modulación aleatoria y la diseñada utilizando el algoritmo 1.

Los valores de transmitancia  $k$  propuestos se seleccionan a partir del número de detectores de baja resolución igual a 128, de forma que si la relación  $\frac{kMr}{dN}$  revela la proporción de compresión de los datos, los valores para la transmitancia  $k$  son valores cuyos divisores son múltiplos de 128 como se muestra en la primera fila de la tabla 2. Por este motivo se selecciona una transmitancia  $k = \frac{1}{64}$  en pasos de  $\frac{1}{64}$  hasta  $\frac{7}{64}$ , esto permite encontrar un valor de PSNR donde se da la mejor reconstrucción cuando el sistema es compresivo. El análisis de la transmitancia es realizado utilizando como referencia la imagen “*Sheep-Logan Phantom*” ver figura 11a, cuyos valores de  $\tau$  del algoritmo de reconstrucción presentados en la segunda fila de la tabla 2, varían en cada prueba para su respectivo valor de transmitancia, arrojando como los resultados presentados en la tabla 2:

Parámetros de prueba							
Transmitancia $k$	1/64	2/64	3/64	4/64	5/64	6/64	7/64
$\tau$	$1,8 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$8,0 \times 10^{-4}$	$6,7 \times 10^{-4}$	$5,7 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-3}$
Capturas	Promedio de PSNR para aperturas aleatorias						
4	25,32	31,17	35,73	39,83	42,73	45,14	46,29
3	23,23	28,34	32,16	35,18	37,73	40,17	41,50
2	21,10	24,93	27,53	30,29	32,32	34,29	35,63
Capturas	Promedio de PSNR para aperturas optimizadas						
4	25,99	32,06	39,63	42,50	47,56	48,84	50,87
3	24,20	28,78	34,51	36,97	41,84	43,31	45,77
2	21,15	24,41	29,07	31,24	34,79	36,35	38,89

Tabla 2: PSNR promedio en la búsqueda de la transmitancia de compresión de la imagen “*Phantom*”. Utilizando una relación 1:4 para el tamaño entre la apertura codificada y el detector.

Sin embargo, para ilustrar que la optimización propuesta también puede ser útil en TC no compresiva, se realizan las simulaciones a partir de  $\frac{8}{64}$  o  $\frac{1}{8}$  de transmitancia, en pasos de  $\frac{1}{8}$  hasta  $\frac{7}{8}$  de la transmitancia, como se presenta en la tabla 3.

Parámetros de prueba							
Transmitancia $k$	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
$\tau$	$2,9 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-4}$	$8,3 \times 10^{-5}$	$5,3 \times 10^{-5}$	$4,2 \times 10^{-5}$	$3,0 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-5}$
Capturas	Promedio de PSNR para aperturas aleatorias						
4	47,47	49,38	48,39	46,67	43,46	42,45	39,61
3	42,77	45,88	45,09	43,91	42,66	40,43	38,16
2	36,93	40,87	40,92	40,07	39,28	37,69	35,98
Capturas	Promedio de PSNR para aperturas optimizadas						
4	51,67	53,39	50,35	45,66	46,93	44,82	40,52
3	46,67	50,12	47,59	45,69	44,46	42,05	38,62
2	39,77	44,98	43,02	42,11	40,52	38,69	36,33

Tabla 3: PSNR promedio en la búsqueda del máximo PSNR de reconstrucción de la imagen “*Phantom*”. Utilizando una relación 1:4 para el tamaño entre la apertura codificada y el detector.

La relación del total de proyecciones dividido en el total de píxeles de la imagen a reconstruir da el nivel compresión de la imagen respecto a sus proyecciones, por esto se utiliza la fracción  $\frac{kMr}{dN}$  para calcular el radio de compresión, al multiplicar este resultado por el 100 % se obtiene el porcentaje de compresión de la información. Nótese que el punto máximo de PSNR se da bajo dos condiciones, una de ellas es cuando el sistema utiliza aperturas aleatorias o aperturas diseñadas con 25 % de transmitancia, es decir cuando la transmitancia es igual al inverso del valor de submuestreo y cuando se tiene un número de capturas igual al valor del submuestreo, en este caso la información obtenida corresponde a un sub-muestreo de la imagen. Los valores de transmitancia representan un porcentaje de sub-muestreo igual a:

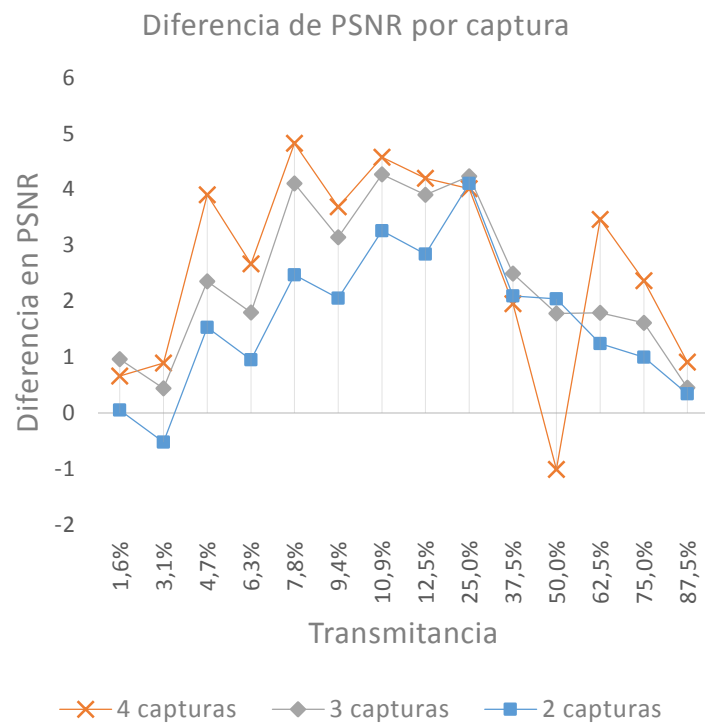


Figura 12: *Curvas de la diferencia en PSNR de los valores de transmitancia propuestos para 4 capturas (color naranja), 3 capturas (gris) y 2 capturas (azul).*

- Para 4 capturas

$$\frac{kMr}{N} = \frac{0,25 \times 512 \times 97 \times 4 \times 100 \%}{d \times 128 \times 128} \approx 75,78 \%$$

- Para 3 capturas

$$\frac{kMr}{N} = \frac{0,25 \times 512 \times 97 \times 3 \times 100 \%}{d \times 128 \times 128} \approx 56,83 \%$$

- Para 2 capturas

$$\frac{kMr}{N} = \frac{0,25 \times 512 \times 97 \times 2 \times 100 \%}{d \times 128 \times 128} \approx 37,8906 \%$$

Aunque el sistema se muestra compresivo en estos casos, se hace evidente que el uso del modelo de optimización propuesto para los códigos propuestos son útiles incluso en el modelo tradicional de TC, donde se sobremuestra el objeto. Por otro lado, utilizando la relación para el cálculo de la compresión, el porcentaje de información a obtener cuando la transmitancia es de 6,3 %, corresponde a:

- Para 4 capturas

$$\frac{kMr}{dN} = \frac{0,063 \times 512 \times 97 \times 4 \times 100 \%}{128 \times 128} \approx 19,09 \%$$

- Para 3 capturas

$$\frac{kMr}{dN} = \frac{0,063 \times 512 \times 97 \times 3 \times 100 \%}{128 \times 128} \approx 14,32 \%$$

- Para 2 capturas

$$\frac{kMr}{dN} = \frac{0,063 \times 512 \times 97 \times 2 \times 100 \%}{128 \times 128} \approx 9,5475 \%$$

debido a esto, se propone el uso del 6.3 % de transmitancia, como el valor donde se realizan las pruebas con múltiples imágenes.

## 7.3 Pruebas para la transmitancia de 25 % y 6.3 %

Un punto de interés, se da cuando la transmitancia  $k$  es igual a la inversa del factor de submuestreo  $d$ . Esto puede observarse en la tabla 3, de tal forma que al tener  $d = 4$ , se da el PSNR máximo de reconstrucción para la imagen sintética “Sheep-Logan Phantom”, alrededor del 25 % de la transmitancia, es decir  $k = \left(\frac{1}{d}\right) 100 \%$ .

Utilizando un valor de transmitancia del 25 %, se analiza el PSNR de las reconstrucciones para las imágenes “Sheep-Logan Phantom” figura 11a tabla 7, “Cráneo” figura 11b tabla 5, “Torax” figura 11c 6 y “Abdomen” figura 11d tabla 4 a través de un sistema ideal sin ruido.

Con un el valor de  $\tau = 1,4 \times 10^{-4}$  para el algoritmo C-SALSA. Cada imagen es reconstruida para 20 códigos de apertura generados de forma aleatoria y 20 códigos de apertura diseñados a través del algoritmo 1, en cada valor asignado del número de capturas. De forma similar, las 20 pruebas para cada valor del número de capturas con códigos aleatorios y diseñados, se realiza para la transmitancia de compresión de 6.3 %, con un valor de  $\tau = 8,0 \times 10^{-4}$  para el algoritmo C-SALSA. Donde se tiene una menor cantidad de medidas respecto al número de pixeles a reconstruir de la imagen. Los valores de las reconstrucciones representados a través del promedio de PSNR de las 20 pruebas. Esta información se presenta en las filas 3 a la 5 de las columnas 2 a la 7 para las tablas 7, 5, 6 y tabla 4 contrastando la información para la transmitancia de 25 % y 6.3 %, dando como resultado:

Abdomen Capturas	Transmitancia de 25 %			Transmitancia de 6.3 %		
	Aleatoria	Diseñada	Diferencia	Aleatoria	Diseñada	Diferencia
4	34,69	41,65	6,96	31,69	33,39	1,70
3	37,43	39,84	2,41	29,34	30,43	1,09
2	34,73	37,10	2,37	26,90	27,49	0,59

Tabla 4: Calidad de las imágenes reconstruidas del abdomen en dB.

Cráneo Capturas	Transmitancia de 25 %			Transmitancia de 6.3 %		
	Aleatoria	Diseñada	Diferencia	Aleatoria	Diseñada	Diferencia
4	37,84	40,01	2,17	33,59	35,41	1,81
3	36,97	38,74	1,77	30,07	31,75	1,69
2	34,47	36,41	1,93	26,15	27,17	1,02

Tabla 5: Calidad de las imágenes reconstruidas del cráneo en dB.

Torax Capturas	Transmitancia de 25 %			Transmitancia de 6.3 %		
	Aleatoria	Diseñada	Diferencia	Aleatoria	Diseñada	Diferencia
4	46,39	49,81	3,42	37,37	40,23	2,86
3	43,64	46,34	2,70	32,92	34,87	1,95
2	39,10	41,68	2,58	28,56	29,58	1,02

Tabla 6: Calidad de las imágenes reconstruidas del torax en dB.

Phantom Capturas	Transmitancia de 25 %			Transmitancia de 6.3 %		
	Aleatoria	Diseñada	Diferencia	Aleatoria	Diseñada	Diferencia
4	48,27	52,03	3,76	39,74	42,47	2,72
3	44,77	48,76	4,00	35,23	37,28	2,05
2	39,95	43,83	3,88	30,21	31,26	1,05

Tabla 7: Calidad de las imágenes sintéticas reconstruidas “Sheep-Logan Phantom” en dB .

El diseño propuesto tiene como referencia los parámetros del sistema para una imagen de  $32 \times 32$  pixeles, por lo tanto cada imagen de alta resolución tiene su versión de baja resolución como se puede apreciar la figura 13, en las imágenes 13b,13f,13j y 13n. Sin embargo, para ilustrar los resultados obtenidos a través de un sistema ideal (sin ruido), se tiene una imagen de referencia de  $128 \times 128$  pixeles para cada banco de datos figuras 13a,13e,13i y 13m. Si bien, es posible obtener una imagen de reconstrucción a partir de aperturas aleatorias figuras 13c,13g,13k y 13ñ. Estas reconstrucciones muestran una menor calidad en terminos de PSNR respecto a las obtenidas utilizando las aperturas codificadas propuestas como se puede observar en las figuras 13d, 13h, 13l y 13o .

Sin embargo, las imágenes que representan las reconstrucciones de la figura 13, para la transmitancia de compresión 6.3 %, presentan resultados difícilmente diferenciables por inspección visual. Debido a esto, se dispone de las imágenes de la diferencia absoluta de las reconstrucciones respecto a la imagen de referencia en la figura 14, donde las figuras 14a, 14c, 14e y 14g corresponden a la diferencia absoluta entre las reconstrucciones utilizando códigos de apertura aleatorios y la imagen de referencia. De manera similar, las figuras 14b, 14d, 14f y 14h corresponden a la diferencia absoluta entre las reconstrucciones con el código de apertura propuesto y la respectiva imagen de referencia. Esta información, permite concluir acerca de la calidad de las reconstrucciones en terminos de PSNR.

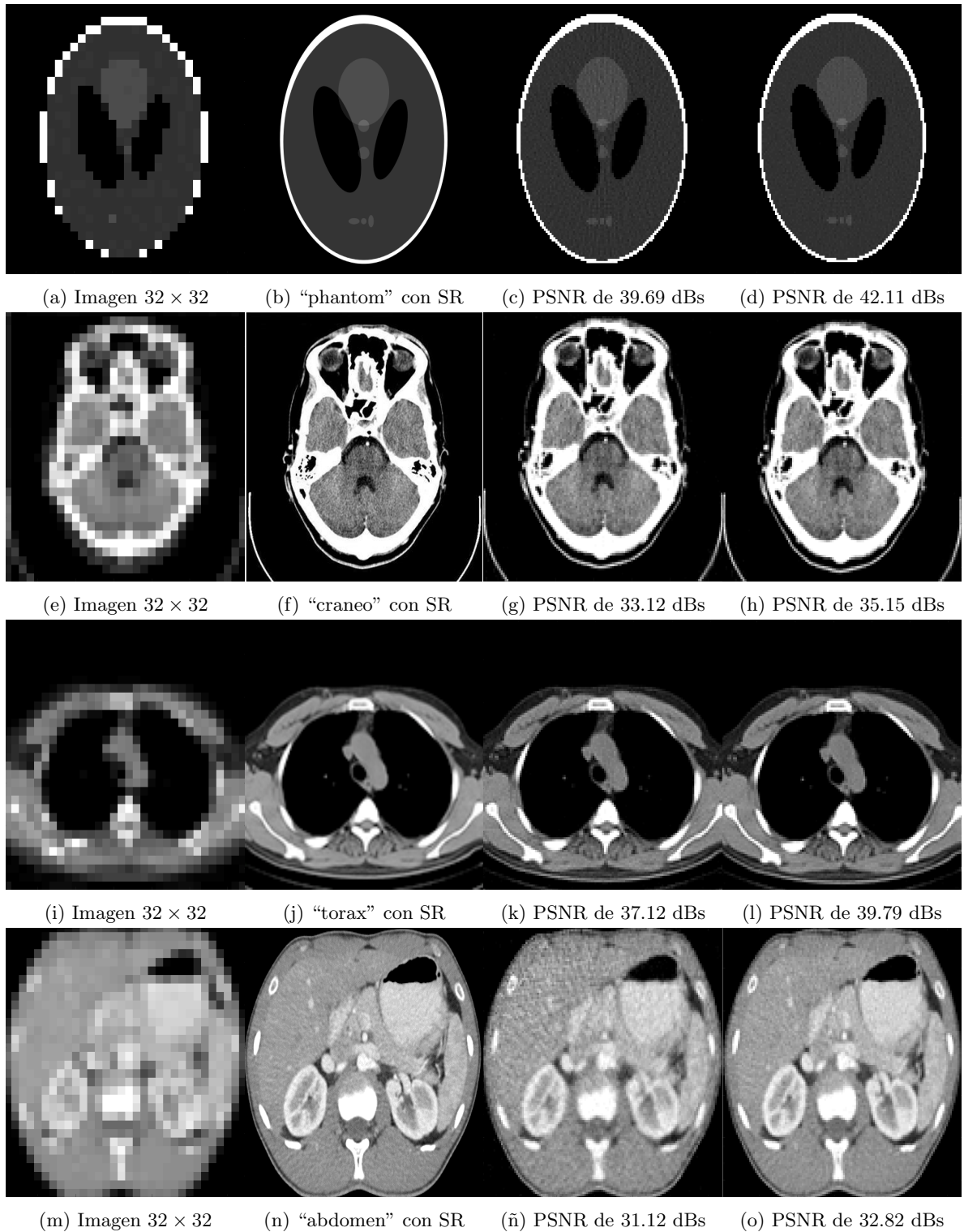


Figura 13: Resultados sin ruido para 4 capturas al 6.3% con un factor de submuestreo de 4. De izquierda a derecha, se encuentra la imagen de referencia de baja resolución ( $32 \times 32$ ), la imagen de referencia de alta resolución ( $128 \times 128$ ), las reconstrucciones de aperturas aleatorias y la reconstrucción con las aperturas diseñadas.

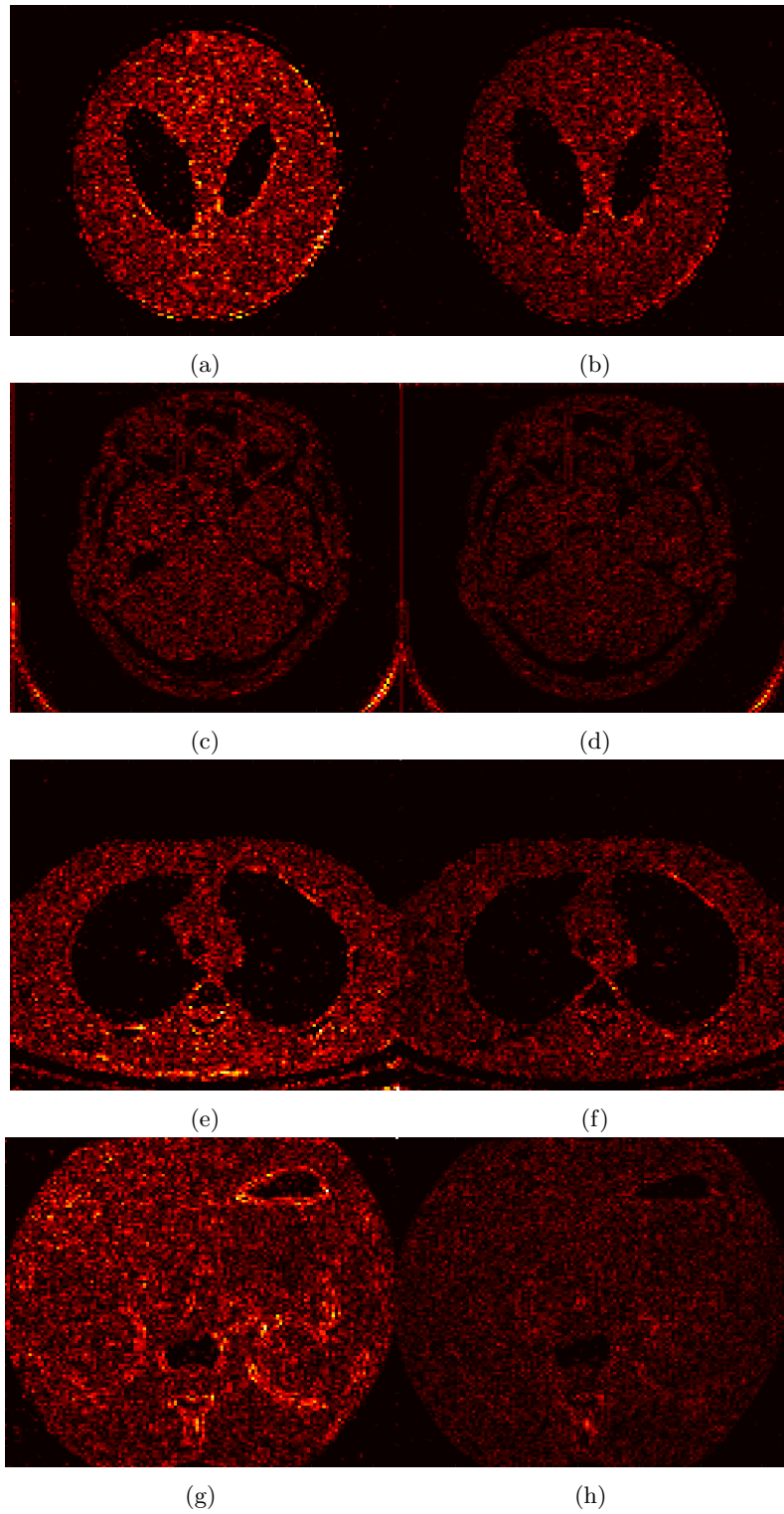


Figura 14: Imagen resultado de la diferencia absoluta para las reconstrucciones sin ruido de 4 capturas al 6.3%, de izquierda a derecha, se encuentra la diferencia absoluta de las reconstrucciones de aperturas aleatorias y la diferencia absoluta de las reconstrucciones con las aperturas diseñadas.

<b>Resolución</b>	<b>128 × 128 píxeles</b>	<b>128 × 128 píxeles</b>
<b>Transmitancia</b>	<b>100 %</b>	<b>25 %</b>
<b>Capturas</b>	<b>1</b>	<b>4</b>
<b>Phantom</b>	35,28	48,27
<b>Torax</b>	37,23	46,39
<b>Abdomen</b>	32,77	34,69
<b>Cráneo</b>	31,98	37,84

Tabla 8: PSNR de reconstrucciones con muestreo clásico, comparado con el modelo de TC de SR propuesto.

El promedio de las reconstrucciones para la transmitancia que permite el máximo PSNR de reconstrucción 25 %, también pueden ser contrastados respecto a una imagen de 128 × 128 píxeles, donde sus proyecciones son adquiridas por detectores de tamaño  $\delta$  de forma que no es necesario utilizar el código apertura de alta resolución. Los resultados obtenidos, para el sistema sin código de apertura, se presentan en la tabla 8 donde la segunda columna, corresponde al PSNR obtenido para cada imagen del banco de datos y se contrasta con el PSNR obtenido en la tercera columna que corresponde al sistema propuesto utilizando códigos de apertura aleatorios.

## 7.4 Pruebas para la transmitancia de 25 % y 6.3 % con ruido

Para el contexto de la TC, la relación señal a ruido SNR (del inglés Signal to noise ratio) es definida como la proporción entre el número de fotones incidentes en el detector, respecto al ruido ambiente capturado. Sin embargo, el modelo lineal utilizado, contempla una proyección como un grupo de fotones captados en el detector, esto lleva a definir la relación SNR como la proporción entre la potencia RMS (del inglés square root of the mean) de la señal  $P_{RMS} = RMS\{\mathbf{p}\}$  y la potencia del ruido que la compone.

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{P_{RMS}}{\text{Ruido RMS}} dB \quad (7.1)$$

donde el ruido RMS es la raíz cuadrática media de la varianza del ruido. Esto permite generar proyecciones afectadas por una señal de ruido de 20dBs. Con esto se busca repetir las pruebas para las imágenes seleccionadas, ver figura 11. Utilizando los mismos parámetros de  $\mu$  para el algoritmo C-SALSA, cuando se utiliza una transmitancia del 25 % estos datos se presentan en las tablas 9, 10, 11 y 12 . De tal forma que la respuesta del PSNR promedio de 20 pruebas para 4, 3 y 2 capturas se expresan en la columna 2 para códigos de apertura aleatorios y en la columna 3 para códigos de apertura diseñados, para resaltar su resultado, se presenta la diferencia de las aperturas diseñadas respecto a las aleatorias en la columna 4.

<b>Phantom</b>	<b>Transmitancia de 25 %</b>		
	<b>Aleatoria</b>	<b>Diseñada</b>	<b>Diferencia</b>
<b>4</b>	45,67	48,08	2,40
<b>3</b>	43,03	46,03	3,01
<b>2</b>	39,10	42,34	3,24

Tabla 9: Resultados de la imagen Sheep-Logan Phantom con SNR de 20 dBs.

Cráneo	Transmitancia de 25 %		
	Capturas	Aleatoria	Diseñada
4	36,66	34,93	1,93
3	35,27	33,93	2,11
2	33,11	32,48	2,11

Tabla 10: Resultados de la imagen cráneo con SNR de 20 dBs.

Torax	Transmitancia de 25 %		
	Capturas	Aleatoria	Diseñada
4	43,07	45,54	2,47
3	40,79	43,50	2,71
2	37,44	40,14	2,70

Tabla 11: Resultados de la imagen torax con SNR de 20 dBs.

Abdomen	Transmitancia de 25 %		
	Capturas	Aleatoria	Diseñada
4	33,38	34,93	1,55
3	32,43	33,93	1,50
2	31,11	32,48	1,37

Tabla 12: Resultados de la imagen abdomen agregando con SNR de 20 dBs.

Por otro lado, es de interés evaluar el comportamiento de las reconstrucciones en presencia de ruido para el sistema propuesto cuando se aplica el concepto de CS. Debido a esto, se evalúa el promedio de PSNR para 20 reconstrucciones utilizando aperturas aleatorias y aperturas diseñadas, teniendo un SNR de 5,10,15 y 20 dBs para las imágenes propuestas (ver figura 11 ) donde en la columna 1 se tiene la variación del SNR, las columnas 3 a 5 presentan el PSNR con códigos de apertura aleatorios de las reconstrucciones para 4, 3 y 2 capturas respectivamente. Y las columnas 6 a 8 se presentan los valores de PSNR para las reconstrucciones códigos de apertura diseñados para 4, 3 y 2 capturas como se muestra en las tablas 13, 14, 15 y 16.

Imagen Phantom	Transmitancia de 6.3 %					
	Aleatorios			Diseñados		
	SNR	4 capturas	3 capturas	2 capturas	4 capturas	3 capturas
5	27,19	26,29	24,98	27,54	26,65	25,26
10	33,36	31,39	28,69	34,47	32,43	29,40
15	38,08	34,43	29,91	40,15	36,20	30,89
20	39,69	35,20	30,23	42,03	37,08	31,18

Tabla 13: Resultados con ruido de la imagen phantom

Imagen Torax	Transmitancia de 6.3 %					
	Aleatorios			Diseñados		
	SNR	4 capturas	3 capturas	2 capturas	4 capturas	3 capturas
5	25,79	25,31	24,31	26,07	25,39	24,39
10	31,19	29,49	27,15	32,19	30,28	27,74
15	35,79	32,25	28,31	37,82	33,85	29,24
20	37,14	32,85	28,52	39,77	34,71	29,49

Tabla 14: Resultados con ruido de la imagen torax

Imagen Abdomen	Transmitancia de 6.3 %					
	Aleatorios			Diseñados		
	SNR	4 capturas	3 capturas	2 capturas	4 capturas	3 capturas
<b>5</b>	20,12	20,35	19,68	21,00	20,73	20,13
<b>10</b>	24,69	24,49	23,91	24,76	24,31	23,81
<b>15</b>	29,18	27,92	26,29	29,91	28,49	26,72
<b>20</b>	31,15	29,06	26,82	32,60	30,05	27,38

Tabla 15: Resultados con ruido de la imagen abdomen

Imagen Cráneo	Transmitancia de 6.3 %					
	Aleatorios			Diseñados		
	SNR	4 capturas	3 capturas	2 capturas	4 capturas	3 capturas
<b>5</b>	21,95	21,56	20,80	22,16	21,65	20,86
<b>10</b>	27,62	26,11	24,20	28,28	26,82	24,75
<b>15</b>	31,95	29,20	25,81	33,37	30,55	26,70
<b>20</b>	33,39	29,98	26,12	35,16	31,62	27,09

Tabla 16: Resultados con ruido de la imagen cráneo

## 8. Conclusiones, contribuciones y trabajos futuros

### 8.1 Conclusiones

---

- En este trabajo, se muestra el diseño de una arquitectura de SR de TC a través de un problema lineal de tal forma que sea posible simular el proceso de adquisición de imágenes de TC de rayos X para obtener imágenes de alta calidad a partir de sensores de baja resolución.
- Haciendo uso de una imagen sintética es posible evaluar el desempeño del algoritmo de optimización propuesto para las aperturas codificadas con diferentes valores de transmitancia. Las evaluaciones muestran que el desempeño apropiado se dá para valores de transmitancia entre 1,6 % y el 37,5 %, lo que permite encontrar una transmitancia optima alrededor del 25 % y seleccionar una transmitancia igual al 6,3 %.
- Cualquier distribución de los diseños que tenga respuesta en la región factible para las restricciones propuestas en la ecuación 6.10, permiten mejorar las reconstrucciones de la arquitectura de TC de SR. Esto se reflejado a través de las distintas pruebas para 4 imágenes de diferentes, se encuentra que el contraste del PSNR de las reconstrucciones bajo condiciones ideales y agregando diferentes niveles de ruido ( $SNR = 10$  dB, 15 dB, 20 dB) permiten observar de las aperturas codificadas diseñadas, una ganancia de PSNR mayor a  $2dB$  respecto a las reconstrucciones de las aperturas no diseñadas en un sistema de TC que aplica el concepto de CS y SR cuando la relación señal a ruido  $SNR$  es superior a 20 dB.
- Las aperturas codificadas diseñadas bajo la metodología propuesta presentan homogeneidad en el uso de los detectores, en la cantidad de información de las proyecciones adquiridas por ángulos, en la cantidad de información de las proyecciones de alta resolución que se proyecta en los detectores de baja resolución y en las proyecciones adquiridas entre capturas, por ende generan un mejor desempeño que las aperturas codificadas no diseñados, a esta mejora en el desempeño es la que se reconoce como optimización.
- Con los resultados obtenidos para la transmitancia de 6,3 %. Se determina que es posible obtener una imagen de alta resolución utilizando un sistema de baja resolución de TC de rayos X que incluye un elemento adicional conocido como apertura codificada el cual permite reducir la información en el detector. De tal forma que la optimización propuesta para el código de la apertura codificada permite conservar una calidad de imagen superior a 30 dB cuando se realizan hasta 4 capturas con un submuestreo de 4.

### 8.2 Contribuciones

---

- Presentación de avances y resultados en una conferencia científica internacional mediante la modalidad de exposición de póster realizada en el Congreso “Anomaly Detection and Imaging with X-Rays (ADIX)”, en Baltimore, Maryland, Estados Unidos el 17 de Abril de 2016, bajo el título “Data sinogram sparse reconstruction based on steering kernel regression and filtering strategies”.
- Un artículo disponible en internet de la conferencia titulado “Data sinogram sparse reconstruction based on steering kernel regression and filtering strategies”.
- Participación en la creación, desarrollo y presentación de dos propuestas de investigación en temáticas relacionadas con SR, en convocatorias internas (VIE-UIS).
- Un artículo en fase de desarrollo para ser presentado a una revista de la IEEE.

## 8.3 Trabajo Futuro

---

- Para la arquitectura de SR propuesta, se propone el diseño de las aperturas codificadas, a través de la minimización representada en la ecuación (6.10). Sin embargo, la metodología de minimización empleada en el pseudocódigo propuesto (ver algoritmo 1), pese a que permite obtener resultados superiores a las reconstrucciones obtenidas con aperturas aleatorias, puede ser mejorada para determinar la respuesta que mejor cumpla con la ecuación (6.10).
- La TC de SR presenta el potencial de reducir costos en una arquitectura médica, sin embargo, la falta de pruebas reales limitan el uso de estas técnicas en la medicina. Para cubrir esta necesidad se contempla profundizar en la investigación y contactar con centros de desarrollo para la tomografía que permitan diseñar y realizar pruebas reales. Por otro lado, la optimización propuesta de códigos de apertura establece el punto de partida para aplicar los diseños en otros sistemas lineales, de forma que puedan ser optimizados realizando ciertas modificaciones según como se capturan los datos en el detector.

## Bibliografía

- Aarle, W. V., Gompel, G. V., Batenburg, K. J., Castele, E. V. D., and Sijbers, J. (2010). A 3-DIMENSIONAL DISCRETE TOMOGRAPHY APPROACH FOR SUPERRESOLUTION OF MICRO-CT IMAGES : APPLICATION TO FOAMS IBBT-Visionlab , University of Antwerp , Antwerp , Belgium Dept . of Radiology , UZ Brussels , Brussels , Belgium. *The first international conference on image formation in X-ray computed tomography*, 1(c):45–49.
- Abolghasemi, V., Ferdowsi, S., and Sanei, S. (2013). Fast and incoherent dictionary learning algorithms with application to fMRI. *Signal, Image and Video Processing*, pages 1–12.
- Afonso, M. V. (2009). An Augmented Lagrangian Approach to the Constrained Optimization Formulation of Imaging Inverse Problems. pages 1–13.
- Arce, G. R., Brady, D. J., Carin, L., Arguello, H., and Kittle, D. S. (2014). Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1):105–115.
- Arguello, H. and Arce, G. (2010). Code aperture design for compressive spectral imaging. *18th European Signal Processing Conference*, (1):1434–1438.
- Arguello, H. and Arce, G. R. (2013). Rank minimization code aperture design for spectrally selective compressive imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(3):941–954.
- Arguello, H., Rueda, H., Wu, Y., Prather, D. W., and Arce, G. R. (2013). Higher-order computational model for coded aperture spectral imaging. *Appl. Opt.*, 52(10):D12—D21.
- Bao, C., Cai, J. F., and Ji, H. (2013). Fast sparsity-based orthogonal dictionary learning for image restoration. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 3384–3391.
- Beckmann, E. C. (2006). CT scanning the early days. *British Journal of Radiology*, 79(937):5–8.
- Brady, D. J., Marks, D. L., MacCabe, K. P., and O’Sullivan, J. A. (2013). Coded apertures for x-ray scatter imaging. *Appl. Opt.*, 52(32):7745–7754.
- Brady, D. J., Mrozack, A., MacCabe, K., and Llull, P. (2015). Compressive tomography. *Advances in Optics and Photonics*, 7(4):756.
- Brady, D. J., Pitsianis, N. P., and Sun, X. (2004). Reference structure tomography. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision*, 21(7):1140–7.
- Butzer, S., Kurzmann, A., and Bohlen, T. (2013). Applying a Diagonal Hessian Approximation for Preconditioning in 3D Elastic Full Waveform Inversion. pages 193–204.
- Buzug, T. M. (2008). *Computed Tomography: From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT*. Springer.
- Canaria, D. E. G. (2010). MATRICES VARIABLES EN LA.
- Candes, E., Romberg, J., and Tao, T. (2005). Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. 40698:1–15.
- Candes, E. and Wakin, M. (2008). An Introduction To Compressive Sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30.
- Candès, E. J. (2006). Compressive sampling. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1433–1452.
- Choi, K. and Brady, D. J. (2009). Coded aperture computed tomography.

- Chong, E. K. P. and Zak, S. H. (2008). *An introduction to optimization*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley, New York.
- Cozzini, C., Olesinski, S., and Harding, G. (2012). Modeling scattering for security applications: A multiple beam X-Ray Diffraction Imaging system. *2012 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference Record (NSS/MIC)*, pages 74–77.
- Cuadros, A., Wang, K., Peitch, C., Arguello, H., and Arce, G. (2015). Coded Aperture Design for Compressive X-ray Tomosynthesis. In *Imaging and Applied Optics 2015*, page CW2F.2. Optical Society of America.
- Cuadros, A. P., Arce, G. R., and Arguello, H. (2014). Coded aperture design in compressive X-ray tomography. *2014 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, pages 656–659.
- Dax, A. (2013). From Eigenvalues to Singular Values: A Review. 2013(December):8–24.
- Donoho, D. L. and Huo, X. (2001). Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(7):2845–2862.
- Goldman, L. W. (2007). Principles of CT and CT technology. *Journal of nuclear medicine technology*, 35(3):115–28; quiz 129–30.
- Goldman, L. W. (2008). Principles of CT: multislice CT. *Journal of nuclear medicine technology*, 36(2):57–68; quiz 75–76.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations*.
- Gordon, R., Bender, R., and Herman, G. T. (1970). Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(3):471–481.
- Hou, W. and Zhang, C. (2014). Analysis of compressed sensing based CT reconstruction with low radiation. *2014 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, ISPACS 2014*, pages 291–296.
- Hounsfield, G. N. (1973). Computerized transverse axial scanning (tomography): I. Description of system. *British Journal of Radiology*, 46(552):1016–1022.
- institutes of health, N. (2016). *Computed Tomography (CT) Scans and Cancer*.
- K. Choi and D. J. Brady (2009). Coded aperture computed tomography. *Proc. SPIE, Adapt. Coded Aperture Imaging, Non-Imaging, Unconv. Imaging Sens. Syst.*
- Kaganovsky, Y., Li, D., Holmgren, A., Jeon, H., MacCabe, K. P., Politte, D. G., O’Sullivan, J. A., Carin, L., and Brady, D. J. (2014). Compressed sampling strategies for tomography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(7):1369–1394.
- Kalender, W. A. (2005). CT: The unexpected evolution of an imaging modality. *European Radiology, Supplement*, 15(4):21–24.
- Kellinghaus, M., Schulz, R., Vieth, V., Schmidt, S., Pfeiffer, H., and Schmeling, A. (2010). Enhanced possibilities to make statements on the ossification status of the medial clavicular epiphysis using an amplified staging scheme in evaluating thin-slice CT scans. *International Journal of Legal Medicine*, 124(4):321–325.
- Komatsu, T., Aizawa, K., Igarashi, T., and Saito, T. (1993). Signal-processing based method for acquiring very high resolution images with multiple cameras and its theoretical analysis. *IEE Proceedings I Communications, Speech and Vision*, 140:19.

- Lay, D. C., Lay, S. R., and McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and its Applications*.
- MacCabe, K. P., Holmgren, A. D., Tornai, M. P., and Brady, D. J. (2013). Snapshot 2D tomography via coded aperture x-ray scatter imaging. *Appl. Opt.*, 52(19):4582–4589.
- Miller, J. M., Rochitte, C. E., Dewey, M., Arbab-Zadeh, A., Niinuma, H., Gottlieb, I., Paul, N., Clouse, M. E., Shapiro, E. P., Hoe, J., Lardo, A. C., Bush, D. E., de Roos, A., Cox, C., Brinker, J., and Lima, J. A. C. (2008). Diagnostic Performance of Coronary Angiography by 64-Row CT. *New England Journal of Medicine*, 359(22):2324–2336.
- Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. (1999). *Discrete-time Signal Processing*.
- Pani, S., Cook, E., Horrocks, J., George, L., Hardwick, S., and Speller, R. (2009). Modelling an energy-dispersive x-ray diffraction system for drug detection. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 56(3):1238–1241.
- Park, S. C., Park, M. K., and Kang, M. G. (2003). Super-resolution image reconstruction: A technical overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 20(3):21–36.
- Penrose, R. and Todd, J. a. (1955). A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(03):406–413.
- Pilastri, A. L. and Tavares, J. M. R. (2016). Reconstruction algorithms in compressive sensing: An overview. *DSIE— 16*, page 127.
- Raff, G. L., Gallagher, M. J., O’Neill, W. W., and Goldstein, J. A. (2005). Diagnostic Accuracy of Noninvasive Coronary Angiography Using 64-Slice Spiral Computed Tomography. *Journal of the American College of Cardiology*, 46(3):552–557.
- Ramírez, J. C., Arboleda, C., and McCollough, C. (2008). Tomografía computarizada por rayos x: fundamentos y actualidad. *Revista Ingeniería Biomédica*, 2(4):54–72.
- Robinson, D., Farsiu, S., and Milanfar, P. (2008). Optimal Registration Of Aliased Images Using Variable Projection With Applications To Super-Resolution. *The Computer Journal*, 52(1):31–42.
- Rockmore, A. J. and Macovski, A. (1976). A maximum likelihood approach to emission image reconstruction from projections. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 23(4):1428–1432.
- Saad, Y. (2001). Parallel iterative methods for sparse linear systems. *Studies in Computational Mathematics*, 8(C):423–440.
- Shepp, L. A. and Logan, B. F. (1974). The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21(3):21–43.
- Sidky, E. Y., Duchin, Y., Pan, X., and Ullberg, C. (2011). A constrained, total-variation minimization algorithm for low-intensity x-ray CT. *Medical Physics*, 38(S1):S117.
- Sidky, E. Y., Kao, C.-M., and Pan, X. (2009). Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT. *Journal of X-ray Science and Technology*, 14:119–139.
- Smith, F. (1999). *Industrial Applications of X-Ray Diffraction*. CRC Press.
- Stein, P. D., Fowler, S. E., Goodman, L. R., Gottschalk, A., Hales, C. A., Hull, R. D., Leeper, K. V., Popovich, J., Quinn, D. A., Sos, T. A., Sostman, H. D., Tapson, V. F., Wakefield, T. W., Weg, J. G., and Woodard, P. K. (2006). Multidetector Computed Tomography for Acute Pulmonary Embolism. *New England Journal of Medicine*, 354(22):2317–2327.
- Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.

- Strecker, H. (1998). Automatic detection of explosives in airline baggage using elastic X-ray scatter. *MedicaMundi*, 42(2):30–33.
- Thali, M. J., Taubenreuther, U., Karolczak, M., Braun, M., Brueschweiler, W., Kalender, W. a., and Dirnhofer, R. (2003a). Forensic microradiology: micro-computed tomography (Micro-CT) and analysis of patterned injuries inside of bone. *Journal of forensic sciences*, 48(6):1336–1342.
- Thali, M. J., Yen, K., Schweitzer, W., Vock, P., Ozdoba, C., and Dirnhofer, R. (2003b). Into the decomposed body - Forensic digital autopsy using multislice-computed tomography. *Forensic Science International*, 134(2-3):109–114.
- Tony Cai, T. and Tiefeng, J. (2011). Limiting laws of coherence of random matrices with applications to testing covariance structure and construction of compressed sensing matrices. *Annals of Statistics*, 39(3):1496–1525.
- van Aarle, W., Batenburg, K. J., Van Gompel, G., Van de Casteele, E., and Sijbers, J. (2014). Super-resolution for computed tomography based on discrete tomography. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, 23(3):1181–93.
- van Aarle, W., Palenstijn, W. J., De Beenhouwer, J., Altantzis, T., Bals, S., Batenburg, K. J., and Sijbers, J. (2015). The ASTRA Toolbox: A platform for advanced algorithm development in electron tomography. *Ultramicroscopy*, 157:35–47.
- Yan, Z., Li, J., Lu, Y., Yan, H., and Zhao, Y. (2015). Super resolution in CT. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 25(1):92–101.