

LEVANTAMIENTO DE IDEMPOTENTES Y TRANSFORMACIONES LINEALES
CLEAN

JENNYFER JULIANA CALDERÓN MORENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

LEVANTAMIENTO DE IDEMPOTENTES Y TRANSFORMACIONES LINEALES
CLEAN

JENNYFER JULIANA CALDERÓN MORENO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Ciencias

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

DEDICATORIA

A mi familia.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. PRELIMINARES	11
1.1. ANILLOS E IDEALES	11
1.2. TRANSFORMACIONES LINEALES	17
1.2.1. La matriz de una transformación lineal	18
1.2.2. Suma directa interna de subespacios	20
2. SOBRE ELEMENTOS IDEMPOTENTES	23
3. SOBRE TRANSFORMACIONES LINEALES CLEAN	39
4. OBSERVACIONES	48
BIBLIOGRAFÍA	49

RESUMEN

TÍTULO: LEVANTAMIENTO DE IDEMPOTENTES Y TRANSFORMACIONES LINEALES CLEAN *

AUTOR: JENNYFER JULIANA CALDERÓN MORENO **

PALABRAS CLAVE: LEVANTAMIENTO DE IDEMPOTENTES, ANILLOS CLEAN, ANILLO DE ENDOMORFISMOS.

DESCRIPCIÓN: Los idempotentes de un anillo R pueden ser levantados módulo un ideal L si, dado $x \in R$ con $x - x^2 \in L$, existe un idempotente $e \in R$ tal que $e - x \in L$. Uno de los resultados clásicos en el levantamiento de idempotentes es que si todos los elementos del ideal son nilpotentes, entonces los idempotentes pueden ser levantados. Nicholson en ¹ llama a un anillo adecuado si, y solo si, los idempotentes pueden ser levantados módulo cada ideal. En este trabajo se estudiarán anillos en los cuales los idempotentes puedan ser levantados y mostraremos que un anillo adecuado levanta idempotentes ortogonales.

Un anillo R es clean si cada elemento es la suma de una unidad y un idempotente. Mostraremos que todo anillo clean levanta idempotentes y, si R tiene idempotentes centrales, R levanta idempotentes si, y solo si, es clean. Por otro lado, dado un espacio vectorial V sobre un anillo de división D de dimensión enumerable, denotamos por $\text{end}(V_D)$ el anillo de endomorfismos de V_D . Mostraremos que el operador shift es clean, y que si un operador restringido a un subespacio invariante de V_D es clean, entonces el operador es clean. Teniendo en cuenta estos resultados se demostrará que el anillo $\text{end}(V_D)$ es clean. Finalmente, Camillo y Khurana ² probaron que todo anillo unit-regular es clean, utilizando los resultados obtenidos en el trabajo mostraremos que la recíproca no es verdadera.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en ciencias.

¹ W. K. NICHOLSON. "Lifting idempotents and exchange rings". En: *Trans. A.M.S* 229 (1977), págs. 269-278.

² V. P. CAMILLO y D. KHURANA. "A characterization of unit regular rings". En: *Comm. Algebra* 29.5 (2001), págs. 2293-2295.

ABSTRACT

TITLE: LIFTING IDEMPOTENTS AND LINEAR TRANSFORMATIONS CLEAN *

AUTHOR: JENNYFER JULIANA CALDERÓN MORENO **

KEYWORDS: LIFTING IDEMPOTENTS, CLEAN RING, ENDOMORPHISM RINGS.

DESCRIPTION: Idempotents can be lifted modulo an ideal L of a ring R if, given $x \in R$ with $x - x^2 \in L$, there exists an idempotent $e \in R$ such that $e - x \in L$. One of the classical results about lifting idempotents is that if all the elements of ideal are nilpotent, then the idempotents can be lifted. Nicholson in ¹ says that a ring is suitable if and only if the idempotents can be lifted. In this paper, we study rings in which idempotents can be lifted and we show that a suitable ring lift orthogonal idempotents.

A ring R is clean if every element it is the sum of a unit and an idempotent. We show that a every clean ring lifts idempotents and, if R has central idempotents, R lifts idempotents if and only if it is clean. On the other hand, given a vector space V over a division ring D with countably infinite dimension, we denoted $\text{end}(V_D)$ the endomorphism ring of V_D . We show that the shift operator is clean, and if a restricted operator to an invariant subspace of V_D is clean, then the operator is clean. Keeping in mind these results, we show that the ring $\text{end}(V_D)$ es clean. Finally, Camillo and Khurana ² prove that every unit-regular ring is clean, using the results at work we show that its reciprocal is not true.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Ph.D.

INTRODUCCIÓN

Para entender la estructura de un anillo, es importante muchas veces estudiar el comportamiento de sus idempotentes. El primer resultado trascendente sobre los idempotentes en un anillo se conoce como la descomposición de Peirce, la cual fue descubierta por el algebrista americano Benjamin Peirce ¹. Un concepto importante sobre estos elementos es el levantamiento de idempotentes. Esta técnica se considera como una herramienta fundamental en la teoría clásica de los anillos artinianos no semiprimitivos ². Una noción de anillo que está relacionada con el levantamiento de idempotentes y que será objeto de estudio en este trabajo son los anillos adecuados.

Un elemento en un anillo R es llamado *clean* en R si es la suma de una unidad y un idempotente, R es llamado *clean* si cada elemento es *clean*. Estos anillos fueron introducidos por Nicholson ¹ en 1977 cuando estudiaba el levantamiento de idempotentes y los llamados anillos de intercambio. Es fácil probar que las unidades y los idempotentes son *clean*, por lo tanto un anillo donde todos sus elementos son unidades o idempotentes es *clean*.

Gracias al estudio de estos anillos en los últimos años se ha permitido relacionarlos y caracterizarlos con algunas nociones importantes de la teoría de anillos. Por

¹ B. PEIRCE. "Linear associative algebra". En: *Amer. J. Math.* 4.1 (1881), págs. 97-229.

² J. LAMBEK. *Lectures on rings and modules*. Vol. 283. Blaisdell Pub. Co, 1966.

ejemplo, la clase de anillos clean es cerrada bajo el producto y homomorfismos ³. Han y Nicholson en ⁴ prueban que $M_n(R)$ el anillo de matrices $n \times n$ es clean si R es un anillo clean.

El presente documento está estructurado como sigue. En el primer capítulo se presentan conceptos básicos de la teoría de anillos y algunas nociones del álgebra lineal. El segundo capítulo está dedicado a los elementos idempotentes, se estudia la clase de los anillos adecuados y clean, basado en los resultados obtenidos por Nicholson en ¹. Finalmente, en el capítulo tres, se estudian los operadores lineales en V_D , donde V_D denotará un espacio vectorial de dimensión enumerable sobre un anillo de división D .

³ D. D. ANDERSON y V. P. CAMILLO. "Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent". En: *Comm. Algebra* 30 (2002), págs. 3327-3336.

⁴ J. HAN y W. K. NICHOLSON. "Extensions of clean rings". En: *Comm. Algebra* 29.6 (2001), págs. 2589-2595.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se enunciarán algunas definiciones y resultados elementales de la teoría de anillos y del álgebra lineal que nos permitirán seguir adecuadamente los siguientes capítulos, tomando como referencia los libros ⁵, ⁶ y ⁷.

1.1. ANILLOS E IDEALES

Definición 1.1.

1. Un anillo es un conjunto no vacío R con dos operaciones binarias $+$ y \times (llamadas adición y multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

(I) $(R, +)$ es un grupo *abeliano*,

(II) (R, \times) es un semigrupo,

(III) *Ley distributiva*: para todo $a, b, c \in R$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \text{ y } a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

2. R es un *anillo conmutativo* si la operación \times es conmutativa. En adelante, escribiremos ab en lugar de $a \times b$ para $a, b \in R$.
3. Si en el anillo existe un elemento identidad para la operación \times , usualmente representado por $1 = 1_R$, se dice que R es un *anillo con unidad*.

⁵ D. S. DUMMIT y R. M. FOOTE. *Abstract algebra*. Vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.

⁶ T. Y LAM. *A first course in noncommutative rings*. Vol. 131. Springer-Verlag, 1991.

⁷ S. ROMAN. *Advanced linear algebra*. Vol. 3. Springer, 2008.

En este trabajo R denotará un anillo asociativo con identidad.

Ejemplo 1.2.

- Sea \mathbb{H} una colección de elementos de la forma $a + bi + cj + dk$ donde i, j, k son símbolos y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La adición de los elementos de \mathbb{H} está definida por

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

y la multiplicación se define expandiendo $(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$, utilizando la ley distributiva y las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

El anillo \mathbb{H} se conoce como el anillo de los Cuaterniones reales.

Definición 1.3. Sea R un anillo,

- Si R tiene elemento identidad y para $u \in R$, existe $v \in R$ tal que $uv = vu = 1$, se dice que u es una *unidad* o *invertible*. Decimos que u es *invertible a izquierda* (*derecha*) si existe $v \in R$ tal que $vu = 1$ ($uv = 1$).
- Se dice que $e \in R$ es *idempotente* si $e^2 = e$.
- Se dice que $a \in R$ es *nilpotente* si existe $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$.

Definición 1.4. Un anillo R se dice que es *anillo de división*, si cada elemento no nulo tiene inverso.

Ejemplo 1.5.

- Veamos que el anillo \mathbb{H} es un anillo de división. En efecto, si $\alpha = a + bi + cj + dk$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$, y notemos que $\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha =$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$. Así, si $\alpha \neq 0$, entonces α es una unidad con

$$\alpha^{-1} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}\bar{\alpha}.$$

- ⁶ [Ejemplo 1.8] Sea A un anillo y σ un automorfismo de A . Podemos definir el anillo de series formales de Laurent sesgadas sobre A en un variable x , denotado por $A((x; \sigma))$, con elementos de la forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i$, donde $a_i \in A$ (con una cantidad finita de exponentes negativos). En lugar de suponer que $xb = bx$ para $b \in A$, determinaremos que $x^i b = \sigma^i(b)x^i$, entonces la multiplicación se define así:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}.$$

Una característica particular de $R = A((x; \sigma))$ es que, si A es un anillo de división, entonces R lo es. Para ver esto, sea $F = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i \in R$, elegimos una potencia adecuada x^i con $i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$F \cdot x^i = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

con $g_0 \neq 0$, veamos que $g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$ es una unidad en R . Para encontrar $H = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots$ tal que $(F \cdot x^i)H = 1$, tenemos que resolver las siguientes ecuaciones,

$$1 = g_0 h_0, \quad 0 = g_0 h_1 + g_1 \sigma(h_0), \quad 0 = g_0 h_2 + g_1 \sigma(h_1) + g_2 \sigma^2(h_0), \quad \dots$$

ya que g_0 es una unidad, podemos resolver inductivamente para h_0, h_1, h_2, \dots . Esto muestra que $g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$ es invertible a derecha en R , de manera análoga podemos mostrar que es invertible a izquierda. Claramente, x^i es una unidad en R , entonces F es una unidad. Por lo tanto, R es un anillo de división. Notemos que si A es un cuerpo y σ es un automorfismo no trivial entonces R

es un anillo de división.

Definición 1.6. Un subconjunto I de un anillo R es un *ideal a izquierda* de R si

- (i) I es un subanillo de R ,
- (ii) I es cerrado bajo la multiplicación a izquierda con elementos de R , ie, $rI \subseteq I$ para todo $r \in R$.

Análogamente podemos definir un *ideal a derecha*.

Definición 1.7. Sea I un subconjunto del anillo R , $\langle I \rangle = \{r_1a_1 + r_2a_2 + \dots + r_na_n \mid r_i \in R, a_i \in I, n \in \mathbb{Z}^+\}$ denota el ideal más pequeño de R que contiene I , llamado el *ideal generado por I* .

Observación 1.8. Si $a \notin I$, $\langle I, a \rangle$ denota el ideal generado por $I \cup a$.

Definición 1.9. Sea R un anillo e I un ideal propio a izquierda de R . Se dice que I es un *ideal maximal a izquierda* de R si para cada ideal izquierdo J de R se tiene que

$$I \subseteq J \Leftrightarrow J = I, \text{ ó, } J = R.$$

Es decir, el único ideal que contiene un ideal maximal es el propio anillo.

Lema 1.10. Si I es un ideal maximal entonces $\langle I, a \rangle = R$ para cualquier $a \notin I$.

Demostración. Notemos que $I \subset \langle I, a \rangle \subseteq R$, esto implica que si I es un ideal maximal entonces $\langle I, a \rangle = R$. ■

Proposición 1.11. ⁸ Sean R un anillo e I un ideal bilateral no trivial de A . I es ideal maximal si, y solo si, los únicos ideales bilaterales de A/I son los triviales.

⁸ O. LEZAMA. *Cuadernos de Álgebra, No.2: Anillos. SAC*².

Definición 1.12. Sea I un ideal a izquierda en R . Para $a, b \in R$, decimos que a es congruente con b módulo I , y escribimos $a \equiv b \pmod{I}$, si $a + I = b + I$.

Note que la congruencia módulo un ideal, es una extensión natural de la noción de congruencia vista en el curso de Teoría de Números.

Definición 1.13 (Radical de Jacobson). El radical de Jacobson de un anillo R , denotado por $\mathcal{J}(R)$, se define como la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de R .

Notemos que si $R \neq 0$ y con unidad, el radical de Jacobson siempre existe por el Lema de Zorn. A partir de la definición, podemos decir que $\mathcal{J}(R)$ es un ideal a izquierda de R , sin embargo $\mathcal{J}(R)$ es un ideal bilateral (ver ⁶, Corolario (4.2)).

En la definición de $\mathcal{J}(R)$ utilizamos los ideales maximales a izquierda, entonces $\mathcal{J}(R)$ debería llamarse radical de Jacobson a izquierda y poder definir similarmente el radical de Jacobson a derecha (intersección de todos los ideales maximales a derecha), como veremos más adelante esta distinción no es necesaria (ver Corolario 1.17).

Ejemplo 1.14. Los ideales maximales del anillo \mathbb{Z} son los ideales principales generados por los números primos. Así

$$\mathcal{J}(\mathbb{Z}) = \bigcap \{ \langle p \rangle \mid p \text{ es un número primo} \}$$

Como consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética, ningún entero no nulo es divisible por cada número primo, por lo tanto $\mathcal{J}(\mathbb{Z}) = 0$.

La última parte de la sección estará dedicada a estudiar algunas propiedades del radical de Jacobson.

Proposición 1.15. En un anillo R , un elemento $a \in \mathcal{J}(R)$ si, y solo si, $1 - xa$ es invertible a izquierda para cada $x \in R$.

Demostración. Asumamos $a \in \mathcal{J}(R)$. Si para algún $x \in R$, $1 - xa$ no es invertible a izquierda, entonces $R(1 - xa) \subsetneq R$ está contenido en un ideal maximal izquierdo M de R , es decir, $1 - xa \in M$ y $a \in M$, esto implica que $1 \in M$, una contradicción.

Por otra parte, definamos $C := \{a \in R \mid 1 - xa \text{ es invertible a izquierda para cada } x \in R\}$. Sea $a \in C$, supongamos que existe M maximal izquierdo de R tal que $a \notin M$, por el Lema 1.10, $\langle M, a \rangle = R$ y existen $b \in M$, $x \in R$ tales que $b + xa = 1$, luego $b = 1 - xa$ es invertible a izquierda, esto contradice la condición de M . En consecuencia, $a \in \mathcal{J}(R)$. ■

Proposición 1.16. En un anillo R y $a \in R$, las siguientes condiciones son equivalentes,

- (i) $a \in \mathcal{J}(R)$;
- (ii) $1 - xay$ es una unidad en R para cada $x, y \in R$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Sean $a \in \mathcal{J}(R)$ y $x, y \in R$. Entonces $xay \in \mathcal{J}(R)$ un ideal bilateral. Por la Proposición 1.15, existe $u \in R$ tal que $u(1 - xay) = 1$, $u = 1 - u(xay)$, como $uxay \in \mathcal{J}(R)$ entonces u es invertible a izquierda, luego u es una unidad y por lo tanto $1 - xay$ también lo es.

(ii) \Rightarrow (i) Se tiene por la Proposición 1.15. ■

Corolario 1.17. El radical de Jacobson a izquierda coincide con el radical de Jacobson a derecha.

Demostración. Sigue de la Proposición 1.16. ■

Observación 1.18. Notemos que si $r \in \mathcal{J}(R)$ y a es una unidad de R , entonces $1 - a^{-1}r$ es una unidad, si definimos $(r + a)^{-1} = (1 + a^{-1}r)^{-1}a^{-1}$, tenemos que $(r + a)^{-1}(r + a) = (1 + a^{-1}r)^{-1}a^{-1}(r + a) = (1 + a^{-1}r)^{-1}(1 + a^{-1}r) = 1$, como $(r + a)^{-1}$ es una unidad, entonces $r + a$ también es una unidad de R .

Proposición 1.19. El único idempotente en $\mathcal{J}(R)$ es el cero del anillo.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{J}(R)$ tal que $a^2 = a$, como a está en el radical, $1 - a$ es invertible a izquierda en R , luego existe $b \in R$ tal que $b(1 - a) = 1$, así

$$b(1 - a)a = a,$$

$$b(a - a^2) = a \text{ como } a \text{ es idempotente,}$$

$$0 = a.$$

■

1.2. TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición 1.20. Sean V y W espacios vectoriales sobre un anillo con división D . Una función $\alpha : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si

$$\alpha(ru + sv) = r\alpha(u) + s\alpha(v),$$

para los escalares $r, s \in D$ y los vectores $u, v \in V$.

- Una transformación lineal de V en V es llamada un *operador lineal* en V o un *endomorfismo*. El conjunto de todos los endomorfismos en V se denotará por $\text{end}(V)$, este conjunto es un anillo con $1 = I_{dV}$, bajo la suma usual y el producto dado por la composición.

Ejemplo 1.21. Sea A una matriz $m \times n$ sobre D . La función $\tau_A : D^n \rightarrow D^m$ definida por $\tau_A(v) = Av$, donde todos los vectores se escriben como vectores columna, es una transformación lineal de D^n a D^m .

Definición 1.22. Sea V un espacio vectorial y sea $\{v_i\}_{i \in I}$ una colección de V , decimos que $x \in V$ es una combinación lineal de $\{v_i\}_{i \in I}$, si existe $I_0 \subseteq I$ finito y

$\{a_i\}_{i \in I_0}$ escalares tal que

$$x = \sum_{i \in I_0} a_i v_i.$$

Teorema 1.23. ⁷ Sea V un espacio vectorial y sea L un conjunto de linealmente independiente de V , entonces existe una base \mathcal{B} para V tal que $L \subseteq \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.24. Sea \mathbb{R}^∞ el espacio vectorial de las sucesiones infinitas (x_1, x_2, \dots) de números reales, el conjunto $\mathcal{X} = \{e_1, e_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^\infty$, donde $e_n = (0, 0, \dots, 1, \dots)$ es una sucesión infinita cuyo n -ésimo término es 1 y los demás son 0, es un conjunto linealmente independiente pero no es una base de \mathbb{R}^∞ , ya que la sucesión infinita de unos no es una combinación lineal de este conjunto. Por el Teorema 1.23, \mathcal{X} está contenido en una base de \mathbb{R}^∞ , entonces podemos afirmar que \mathbb{R}^∞ tiene dimensión infinita. Sea $T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, T es una transformación lineal que es sobreyectiva, ya que dado $y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, existe $x = (0, y_1, y_2, \dots)$ tal que $T(x) = y$. Pero T no es inyectiva, ya que $T(0, 1, 1, 1, \dots) = T(1, 1, 1, \dots)$.

El siguiente teorema nos dice que para definir una transformación lineal $\alpha : V \rightarrow W$, es suficiente definir α en alguna base \mathcal{B} de V .

Teorema 1.25. ⁷ Sean V y W espacios vectoriales y sea $\mathcal{B} = \{v_i \mid i \in I\}$ una base para V . Entonces podemos definir una única transformación lineal $\alpha : V \rightarrow W$ especificando los valores de $\alpha(v_i)$ para todo $v_i \in \mathcal{B}$ y extendiendo α a V por linealidad, es decir,

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} a_i v_i \right) = \sum_{i \in I} a_i \alpha(v_i).$$

Notemos que los $\{a_i\}_{i \in I}$ son diferentes de cero para una cantidad finita de i 's. ■

1.2.1. La matriz de una transformación lineal Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ordenada para V , entonces para cada $v \in V$ existen escalares r_1, \dots, r_n en D tal

que

$$v = r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n.$$

Por consiguiente, podemos definir la función coordenada $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow D^n$ por

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

donde la matriz columna $[v]_{\mathcal{B}}$ es conocida como la *matriz coordenada* de v respecto a la base \mathcal{B} . Claramente, conociendo $[v]_{\mathcal{B}}$ es equivalente a conocer v (asumiendo que conocemos \mathcal{B}). Además, $\phi_{\mathcal{B}}$ es una transformación lineal biyectiva.

Sea $\tau : V \rightarrow W$ una transformación lineal, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ una base para V y $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ una base para W . Luego la función

$$\theta : [v]_{\mathcal{B}} \rightarrow [\tau v]_{\mathcal{C}}$$

es una representación de τ como una transformación lineal de D^n a D^m , en el sentido que conociendo θ es equivalente a conocer τ . Por supuesto, esta representación depende de la elección de las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .

Ya que θ es una transformación lineal de D^n en D^m , es solo la multiplicación por una matriz A $n \times m$, esto es

$$[\tau v]_{\mathcal{C}} = A[v]_{\mathcal{B}}.$$

En efecto, ya que $[b_i]_{\mathcal{B}} = e_i$, entonces la columna i de A es:

$$Ae_i = A[b_i]_{\mathcal{B}} = [\tau b_i]_{\mathcal{C}}.$$

Escribiendo esto formalmente:

Teorema 1.26. ⁷ Sea $\tau : V \rightarrow W$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ y $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ bases para V y W respectivamente. Entonces τ puede ser representado respecto a \mathcal{B} y \mathcal{C} como una multiplicación de matrices, que es,

$$[\tau v]_{\mathcal{C}} = [\tau]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}},$$

donde

$$[\tau]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = ([\tau b_1]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\tau b_n]_{\mathcal{C}}),$$

es llamada la matriz de τ respecto a las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} . Cuando $V = W$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, denotamos $[\tau]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ por $[\tau]_{\mathcal{B}}$, entonces

$$[\tau v]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

■

Ejemplo 1.27. Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios de \mathbb{R} en \mathbb{R} de grado menor o igual a 2. Sea $\mathcal{D} : V \rightarrow V$ la función derivada y $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

Luego

$$[\mathcal{D}(1)]_{\mathcal{C}} = [0]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{D}(x)]_{\mathcal{C}} = [1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{D}(x^2)]_{\mathcal{C}} = [2x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$[\mathcal{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Suma directa interna de subespacios

Definición 1.28. Un espacio vectorial V es la *suma directa interna* de una familia $\mathcal{F} = \{S_i | i \in I\}$ de subespacios de V , escribiendo

$$V = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

si cumple las siguientes condiciones:

(I) V es la suma de la familia \mathcal{F} :

$$V = \sum_{i \in I} S_i.$$

(II) Para cada $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{i \neq j} S_j \right) = 0.$$

En este caso, cada S_i es llamado un *sumando directo* de V . Si \mathcal{F} es una familia finita, la suma directa se escribe

$$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

Finalmente, si $V = S \oplus T$, entonces T es llamado el *complemento* de S en V .

Teorema 1.29. ⁷ Sea V un espacio vectorial.

1. Si \mathcal{B} es una base para V y, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, entonces

$$V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle.$$

2. Sea $V = S \oplus T$. Si \mathcal{B}_1 es una base para S y \mathcal{B}_2 es una base para T , entonces $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base para V .

Teorema 1.30. Cualquier subespacio de un espacio vectorial tiene un complemento, es decir, si S es un subespacio de V , entonces existe un subespacio T tal que $V = S \oplus T$.

Demostración. Sean S un subespacio de V y \mathcal{B}_0 una base para S , por el Teorema 1.23, existe una base \mathcal{B} para V tal que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, definimos $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$, luego $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, por lo tanto

$$V = W \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle.$$

■

El concepto de suma directa de un operador lineal juega un rol importante en el estudio de su estructura.

Definición 1.31. Sea $V = S \oplus T$. El operador lineal $\rho_{S,T} : V \rightarrow V$ definido por

$$\rho_{S,T}(s + t) = s$$

donde $s \in S$ y $t \in T$ es llamado *proyección sobre S* .

Teorema 1.32. ⁷ Sea $V = S \oplus T$ y $\rho = \rho_{S,T}$, entonces $\text{im}(\rho) = S$ y $\text{ker}(\rho) = T$, y por lo tanto $V = \text{im}(\rho) \oplus \text{ker}(\rho)$.

El siguiente teorema relaciona el operador proyección con el operador idempotente.

Teorema 1.33. ⁷ Un operador lineal $\rho \in \text{end}(V)$ es un proyección si, y solo si, $\rho^2 = \rho$.

2. SOBRE ELEMENTOS IDEMPOTENTES

En este capítulo se estudian los anillos adecuados y el levantamiento de idempotentes. Se definirán algunas nociones estructurales de anillos que nos permitirán caracterizar los anillos adecuados, y para finalizar mostraremos el levantamiento de idempotentes ortogonales.

Proposición 2.1. Si R es un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes para un elemento x de R .

- (1) Existe e idempotente en R con $e - x \in R(x - x^2)$.
- (2) Existen e idempotente en Rx y $c \in R$ tal que $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.
- (3) Existe $e \in Rx$ idempotente tal que $R = Re + R(1 - x)$.
- (4) Existe $e \in Rx$ idempotente tal que $1 - e \in R(1 - x)$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Existe $r \in R$ tal que

$$\begin{aligned} e - x &= r(x - x^2), \\ e &= r(x - x^2) + x, \\ e &= rx - rx^2 + x, \\ e &= (r - rx + x)x \in Rx, \end{aligned}$$

observemos que $1 - e = 1 - rx + rx^2 - x = (1 - rx)(1 - x)$. Definamos $c = 1 - rx$ y sea $k \in R$, entonces $1 - k((1 - e) - c(1 - x)) = 1 - k((1 - rx)(1 - x) - (1 - rx)(1 - x)) = 1$, luego $(1 - e) - c(1 - x) \in \mathcal{J}(R)$.

(2) \Rightarrow (3) Como $(1 - e) - c(1 - x) \in \mathcal{J}(R)$, por la Proposición 1.15, $1 - ((1 - e) - c(1 - x)) = e + c(1 - x)$ es invertible a izquierda, y $e + c(1 - x) \in Re + R(1 - x)$. Ya que $Re + R(1 - x)$

es un ideal a izquierda, $1 \in Re + R(1 - x)$, luego $Re + R(1 - x) = R$.

(3) \Rightarrow (4) Dado (3) existen s y t en R tales que $1 = te + s(1 - x)$ y sea $f = e + (1 - e)te$.

Notemos que $f = (1 + (1 - e)t)e \in Rx$ y

$$f^2 = [1 + (1 - e)t]e[1 + (1 - e)t]e = [1 + (1 - e)t][e - (e - e^2)t]e = f.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 - f &= te + s(1 - x) - (e + (1 - e)te) \\ &= -e(1 - te) + s(1 - x) \\ &= -e(s(1 - x)) + s(1 - x) \\ &= (1 - e)s(1 - x) \in R(1 - x). \end{aligned}$$

(4) \Rightarrow (1) Si $e = rx$ entonces $e - x = e(1 - x) - (1 - e)x = rx(1 - x) - k(1 - x)x = (r - k)(x - x^2) \in R(x - x^2)$. ■

Nicholson en ¹ da el siguiente concepto de anillo adecuado.

Definición 2.2. Un anillo es llamado *adecuado* si cada elemento satisface una y por tanto todas las condiciones de la Proposición 2.1.

Definición 2.3. Si L es un subgrupo aditivo de un anillo R , decimos que los idempotentes pueden ser levantados módulo L si, dado $x \in R$ con $x - x^2 \in L$, existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in L$.

Observemos que esta definición está relacionada con la definición de congruencia módulo un ideal. Decir que dado $x \in R$ con $x - x^2 \in L$ es equivalente a tomar x tal que $x \equiv x^2 \pmod{L}$, luego existe un idempotente e en R tal que $e \equiv x \pmod{L}$. De otra manera, los idempotentes pueden ser levantados módulo L , si todo idempotente de R/L es de la forma $e + L$ donde e es un idempotente de R .

Ejemplo 2.4. Consideremos el anillo \mathbb{Z} y el ideal $2\mathbb{Z}$. Los únicos elementos del anillo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que además son idempotentes son $0 + 2\mathbb{Z}$ y $1 + 2\mathbb{Z}$. Claramente 0 y 1 son idempotentes de \mathbb{Z} . Por lo tanto, los idempotentes pueden ser levantados módulo $2\mathbb{Z}$.

Ahora veamos que \mathbb{Z} no levanta idempotentes para todo ideal. En efecto, sea $L = 6\mathbb{Z}$ un ideal de \mathbb{Z} , $3 \in \mathbb{Z}$ con $3 - 3^2 \in L$, entonces existe $e^2 = e \in \mathbb{Z}$ tal que $e - x \in L$. Como los únicos idempotentes de \mathbb{Z} son 0 y 1, tenemos que $-3 \in L$ o $-2 \in L$, esto es absurdo.

Corolario 2.5. Un anillo es adecuado si, y solo si, los idempotentes pueden ser levantadas módulo cada ideal a izquierda.

Demostración. Sea $x \in R$ y L un ideal a izquierda tal que $x - x^2 \in L$, existe $e^2 = e \in R$ con $e - x \in R(x - x^2)$, como $x - x^2 \in L$, $R(x - x^2) \subseteq L$, tenemos que $e - x \in L$.

Recíprocamente, sea $x \in R$ y $L = R(x - x^2)$ un ideal a izquierda, como $x - x^2 \in L$ y los idempotentes pueden ser levantados, existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in L = R(x - x^2)$. ■

Proposición 2.6. Cada imagen bajo homomorfismo de un anillo adecuado es adecuado.

Demostración. Sea R un anillo adecuado y f un homomorfismo, si $x \in R$ entonces $f(x) \in f(R)$, como R es adecuado existe $e^2 = e \in R$ con $e - x \in R(x - x^2)$, luego

$e - x = k(x - x^2)$ con $k \in R$. Observemos que $f(e)^2 = f(e)f(e) = f(ee) = f(e)$ y

$$\begin{aligned}
 f(e) - f(x) &= f(e - x), \\
 &= f(k(x - x^2)), \\
 &= f(k)f(x - x^2), \\
 &= f(k)[f(x) - f(x^2)], \\
 &= f(k)[f(x) - f(x)^2] \in f(R)[f(x) - f(x)^2].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(R)$ es un anillo adecuado. ■

El próximo resultado nos da una caracterización de anillos adecuados usando el radical de Jacobson.

Proposición 2.7. Un anillo R es adecuado si, y solo si, $R/\mathcal{J}(R)$ es adecuado y los idempotentes pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$.

Demostración. Como $R/\mathcal{J}(R)$ es la imagen de R bajo el homomorfismo canónico, entonces $R/\mathcal{J}(R)$ es adecuado. Como $\mathcal{J}(R)$ es un ideal y por el Corolario 2.5, los idempotentes pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$. Por otro lado, sea $x \in R$, definamos $\bar{x} = x + \mathcal{J}(R)$ y $\bar{R} = R/\mathcal{J}(R)$. Supongamos que \bar{R} es adecuado, por (4) la Proposición 2.1, existen $\bar{a}^2 = \bar{a} \in \bar{R}\bar{x}$ y $\bar{c} \in \bar{R}$ tales que

$$\bar{1} - \bar{a} = \bar{c}(\bar{1} - \bar{x}),$$

como $\bar{a} \in \bar{R}\bar{x}$, existe $\bar{k} \in \bar{R}$ tal que $\bar{a} = \bar{k}\bar{x}$, luego $a - kx = \lambda$, con $\lambda \in \mathcal{J}(R)$, por tanto $a - \lambda \in Rx$ y $\overline{a - \lambda^2} = (a - \lambda)^2 + \mathcal{J}(R) = a^2 - a\lambda + \lambda a + \lambda^2 + \mathcal{J}(R)$, como $\mathcal{J}(R)$ es un ideal bilateral, $\overline{a - \lambda^2} = \overline{a - \lambda}$. Ya que los idempotentes puede ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$, existe $f^2 = f \in R$ tal que $\bar{f} = \overline{a - \lambda}$. Luego $f - (a - \lambda) \in \mathcal{J}(R)$, entonces $u = 1 - (f - (a - \lambda)) = 1 - f + (a - \lambda)$ es una unidad y $e = u^{-1}fu =$

$u^{-1}f(a - \lambda) \in Rx$ satisface $e^2 = (u^{-1}fu)(u^{-1}fu) = u^{-1}fu = e$. Notemos que $\bar{u} = \bar{1}$, entonces $\bar{e} = \bar{f} = \bar{a}$, así

$$\begin{aligned} -\bar{e} &= -\bar{a}, \\ \bar{1} - \bar{e} &= \bar{1} - \bar{a}, \\ \bar{1} - \bar{e} &= \bar{c}(\bar{1} - \bar{x}). \end{aligned}$$

Sigue que $(1 - e) - c(1 - x) \in \mathcal{J}(R)$, y por (2) de la Proposición 2.1, R es adecuado. ■

Observación 2.8. La Proposición 2.7 se sigue cumpliendo si $\mathcal{J}(R)$ es reemplazado por cualquier ideal $I \subseteq \mathcal{J}(R)$.

Definición 2.9. Se dice que un anillo R es *regular o von Neumann regular* si para cada $x \in R$, existe $a \in R$ tal que $axa = x$. Si a es una unidad, se dice que R es *unit-regular*.

Observación 2.10. Decir que R es unit-regular, es equivalente a decir que para todo $x \in R$, $x = ae$ donde a es una unidad en R y $e \in R$ un idempotente. En efecto, sea $x \in R$ entonces existe una unidad a en R tal que $axa = x$, si definimos $e = ax$, claramente $e^2 = e$, luego $x = a^{-1}e$.

Ejemplo 2.11. Si V es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre un cuerpo K , entonces $\text{end}(V_K)$ es von Neumann regular.

Demostración. Dada una transformación lineal $\varphi : V \rightarrow V$, tenemos que $V = \ker \varphi \oplus W$, como consecuencia del Teorema 1.30 cada subespacio de un espacio vectorial es un sumando directo. Sea X una base del $\ker \varphi$ y Y una base de W , entonces $X \cup Y$ es una base de V . Ahora veamos que $\varphi(Y)$ es linealmente independiente, supongamos lo contrario, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ y $y_1, \dots, y_n \in Y$, no todos

nulos, tal que

$$\alpha_1\varphi(y_1) + \alpha_2\varphi(y_2) + \cdots + \alpha_n\varphi(y_n) = 0,$$

$$\varphi(\alpha_1y_1) + \varphi(\alpha_2y_2) + \cdots + \varphi(\alpha_ny_n) = 0,$$

$$\varphi(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \cdots + \alpha_ny_n) = 0,$$

luego $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \cdots + \alpha_ny_n \in \ker \varphi$, esto es una contradicción. Por lo tanto podemos extender una base $\varphi(Y) \cup Z$ de V . Si definimos $\varphi' : V \rightarrow V$ en la base $\varphi(Y) \cup Z$ por $\varphi'(\varphi(y)) = y$ para todo $y \in Y$ y $\varphi'(z) = 0$ para todo $z \in Z$, entonces $\varphi\varphi'\varphi = \varphi$. ■

Ejemplo 2.12. El anillo R de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión infinita sobre un anillo de división no es unit-regular.

Demostración. Sea $T \in R$ una transformación lineal la cuál es sobreyectiva pero no inyectiva (ver Ejemplo 1.24), es decir, T tiene inversa a derecha pero no a izquierda, sea T' esta función. Si R es unit-regular, por la Observación 2.10 existe τ una unidad y $\pi^2 = \pi$ en R tal que $\tau\pi = T$, de modo que $\pi \neq I_d$ ya que T no es una unidad. Pero $\pi = \tau^{-1}T$ y $\pi T' = \tau^{-1}$. Esto es imposible ya que π no es sobreyectiva. Por lo tanto, R no es unit-regular. ■

Proposición 2.13. Todo anillo regular es adecuado.

Demostración. Si $x \in R$, existe a tal que $xax = x$, tomemos $y = ax$, entonces $y^2 = y$

y $xy = x$. Si $e = y + (1 - y)xy = (a + 1 - a)x \in Rx$, veamos que $e^2 = e$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 e^2 &= [y + (1 - y)xy][y + (1 - y)xy], \\
 &= [y + xy - yxy][y + xy - yxy], \\
 &= (y + x - yx)(y + x - yx), \\
 &= y^2 + yx - yxy + xy + x^2 - xyx - yxy - yx^2 + yxyx, \\
 &= y + yx - yx + x + x^2 - x^2 - yx - yx^2 + yx^2, \\
 &= y + x - yx, \\
 &= y + (1 - y)xy, \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

Sigue que $1 - e$ es un idempotente y $1 - e = 1 - [y + (1 - y)xy] = 1 - y - x + yx^2 = (1 - y)(1 - x) \in R(1 - x)$. Por lo tanto, R es adecuado. ■

El radical de Jacobson caracteriza la estructura del siguiente anillo.

Definición 2.14. Un anillo R es semiregular si $R/\mathcal{J}(R)$ es regular y los idempotentes pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$.

Por la Proposición purple 2.7 y la definición anterior, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.15. Cada anillo semiregular es adecuado.

Ejemplo 2.16. Sea D un anillo de división y S un subanillo de D que contiene al 1. Definamos

$$R(D, S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots) \mid n \geq 1, x_i \in D, s \in S\}.$$

R es un anillo con la operación componente a componente. R es un anillo adecuado si, y solo si, S lo es. En efecto, S es la imagen de R bajo un homomorfismo.

Por otro lado, sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, s, s, \dots)$ tal que $x_i \in D \setminus S$ para $1 \leq i \leq k$, como S es adecuado existe $e_s^2 = e_s \in S$ tal que $e_s - s = s'(s - s^2)$, definamos $e = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, e_s, e_s, \dots)$, luego

$$\begin{aligned} e - x &= (1 - x_1, \dots, 1 - x_k, e_s - s, e_s - s, \dots), \\ &= (x_1^{-1}(x_1 - x_1^2), \dots, x_k^{-1}(x_k - x_k^2), s'(s - s^2), s'(s - s^2), \dots) \\ &= (x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}, s', s', \dots)(x_1 - x_1^2, \dots, x_k - x_k^2, \dots, (s - s^2), (s - s^2), \dots). \end{aligned}$$

Por lo tanto, R es adecuado. Además, veamos que todo ideal a izquierda no nulo de R tiene un idempotente diferente de cero. Sea I un ideal a izquierda no nulo de R y sea $(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots)$ un elemento no nulo de I , entonces tiene alguna entrada no nula. En efecto, si uno de los x_i 's es diferente de cero, supongamos x_j , entonces

$$(0, \dots, x_j^{-1}, 0, 0, 0, \dots)(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots) = (0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots),$$

es un idempotente no nulo de I , con 1 en la posición j . Por otro lado, si los x_i son cero entonces $s \neq 0$. Luego

$$(0, \dots, s^{-1}, 0, 0, 0, \dots)(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots) = (0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots),$$

es un idempotente no nulo de I , donde s^{-1} y 1 están en la posición $n + 1$. Como el radical de Jacobson es un ideal a izquierda y por la Proposición 1.19 su único idempotente es el cero, entonces $\mathcal{J}(R) = 0$

Definición 2.17. Un anillo R es llamado *local* si $R/\mathcal{J}(R)$ es un anillo de división.

Observación 2.18. Como consecuencia de la Proposición 1.11, $R/\mathcal{J}(R)$ es un anillo de división si, y solo si, $\mathcal{J}(R)$ es maximal. Cualquier ideal maximal a izquierda M de R contiene al $\mathcal{J}(R)$, entonces $M = \mathcal{J}(R)$. Por lo tanto, un anillo es local si, y solo

si, su único ideal maximal es $M = \mathcal{J}(R)$.

Proposición 2.19. Todo anillo local es adecuado.

Demostración. Sea M su único ideal maximal, si $x \in R \setminus M$, entonces x es una unidad, tomando $e = 1$, x satisface (4) de la Proposición 2.1. Ahora si $x \in M$, entonces $1 - x$ es invertible a izquierda. Sea $e = 0 \in R$, luego $0 - x = -x = -(1 - x)^{-1}(1 - x)x \in R(x - x^2)$. Así, R es adecuado. ■

Ejemplo 2.20. El anillo L de todas las fracciones racionales con denominador impar es local.

Demostración. Sea

$$L = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \notin 2\mathbb{Z} \right\}.$$

L es un anillo conmutativo, entonces L es un anillo local si, y solo si, $L \setminus L^*$ es un ideal, donde L^* es el conjunto de los elementos invertibles de L (ver ⁶). Las unidades de L son todas las fracciones con numerador impar, luego si escribimos $J = L \setminus L^*$, entonces

$$J = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in 2\mathbb{Z}, b \notin 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Claramente, J es un ideal de L , de hecho es su único ideal maximal. ■

Ejemplo 2.21. Gracias al Ejemplo 2.20 $R(\mathbb{Q}, L)$ es un anillo conmutativo adecuado con $\mathcal{J}(R) = 0$, el cuál no es regular. En efecto, como L es un anillo local, por el Ejemplo 2.16, $R(\mathbb{Q}, L)$ es adecuado. Para ver que R no es regular, basta tomar $x = (x_1, \dots, x_n, l, l, \dots) \in R(\mathbb{Q}, L)$ tal que $l \in L$ tenga numerador par. Ya que $R/\mathcal{J}(R(\mathbb{Q}, L)) = R(\mathbb{Q}, L)$, entonces $R(\mathbb{Q}, L)$ es un anillo adecuado pero no semiregular.

A continuación, definimos otra noción estructural relacionada con los idempotentes de un anillo.

Definición 2.22. Un anillo R es *clean* si cada elemento es la suma de una unidad y un idempotente.

Ejemplo 2.23. Algunos ejemplos de anillos clean son

- El anillo \mathbb{Z}_4 con las operaciones usuales, sus elementos idempotentes son $\{0, 1\}$ y sus unidades son $3, 1$. Observemos que,

$$0 = 3 + 1,$$

$$1 = 1 + 0,$$

$$2 = 1 + 1,$$

$$3 = 3 + 0.$$

Por tanto, todos los elementos de \mathbb{Z}_4 son clean.

- Todo anillo de división.

Proposición 2.24. Sean R y S dos anillos isomorfos y $f : R \rightarrow S$ un isomorfismo, entonces $x \in R$ es clean si, y solo si, $f(x)$ es clean.

Demostración. Sea $x \in R$, como x es clean, $x = e + u$ donde $e^2 = e \in R$ y u invertible en R , entonces $f(x) = f(e + u) = f(u) + f(e)$, $f(e)^2 = f(e)$ y $f(u^{-1})f(u) = f(u^{-1}u) = f(1_R) = 1_S$. Así, $f(x)$ es clean.

Por otro lado, como f es un isomorfismo, sea $x \in R$, existe $y \in S$ tal que $x = f^{-1}(y)$, por hipótesis existe $e^2 = e$ y u invertible tal que $y = e + u$, luego $f^{-1}(e)$ es idempotente en R y $f^{-1}(u^{-1})f^{-1}(u) = f^{-1}(u^{-1}u) = f^{-1}(1_S) = 1_R$, así $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(e + u) = f^{-1}(e) + f^{-1}(u)$ es clean. ■

Definición 2.25. Un idempotente e de un anillo R es un *idempotente central* si $er = re$ para todo $r \in R$.

Proposición 2.26. (i) Cada anillo clean es adecuado.

(ii) Un anillo con idempotentes centrales es clean si, y solo si, es adecuado.

Demostración. (i) Como R es clean, si $x \in R$ entonces $x = f + u$ donde $f^2 = f$ y u es una unidad, luego $e = u^{-1}(1 - f)u$ es un idempotente de R y

$$\begin{aligned}
 u(e - x) &= u[u^{-1}(1 - f)u - x], \\
 &= (1 - f)u - ux, \\
 &= u - fu - uf - u^2, \\
 &= u - fu - uf - u^2 + f - f, \\
 &= f + u - (f + fu + uf + u^2), \\
 &= (f + u) - (f + u)(f + u), \\
 &= x - x^2.
 \end{aligned}$$

Sigue de la Proposición 2.1 (1) que R es adecuado.

(ii) Sea R un anillo adecuado y $x \in R$, por tanto existe $e^2 = e \in Rx$ con $1 - e \in R(1 - x)$, notemos que $e \in eRx$, entonces existe a en eR , tal que $e = ax$, luego $ea = a$, de modo que $axa = a$ y $(xa)^2 = xa$. Como los idempotentes son centrales, entonces $xa = xaxa = x(ax)a = xa(ax) = (xa)ax = a(xa)x = axax = ax$. De manera análoga, $1 - e \in (1 - e)R(1 - x)$, entonces existe $b \in (1 - e)R$, tal que $1 - e = b(1 - x)$ luego $(1 - e)b = b$ y $(1 - x)b$ es un idempotente, por tanto $(1 - x)b = b(1 - x)$. Ahora

veamos que $a - b$ es el inverso de $x - (1 - e)$,

$$\begin{aligned}
 [x - (1 - e)](a - b) &= xa - (1 - e)a - xb + (1 - e)b, \\
 &= xa - a + ea - xb + b, \\
 &= ax - a + a - xb + b, \\
 &= ax - xb + b, \\
 &= ax + (1 - x)b, \\
 &= e + b(1 - x) = 1.
 \end{aligned}$$

Así, $x = [x - (1 - e)] + (1 - e)$. ■

Definición 2.27. Un anillo R es llamado *reducido* si no tiene elementos nilpotentes (no nulos).

Observación 2.28. En un anillo reducido todo idempotente es central. En efecto, sea $e^2 = e \in R$ y $x \in R$, notemos que

$$(ex - exe)^2 = (ex - exe)(ex - exe) = exex - exexe - exexx + exexx = 0,$$

como R no tiene elementos nilpotentes no nulos, entonces $ex = exe$. De manera análoga podemos ver que $xe = exe$, luego igualando las dos últimas ecuaciones tenemos que $ex = xe$.

Por lo tanto, si un anillo es conmutativo o reducido, es adecuado si, y solo si, es clean. Luego, todo anillo fuertemente regular (regular y reducido) es clean. Pero la recíproca no es verdadera, ya que $R(\mathbb{Q}, L)$ es un anillo conmutativo, reducido y clean el cuál no es fuertemente regular.

Ejemplo 2.29. Cada anillo local es clean.

Demostración. Si $x \in R \setminus M$, con $M = \mathcal{J}(R)$ su único ideal maximal, x es una unidad y por lo tanto es clean. Si $x \in M$, entonces por la Proposición 1.16 $1 - x$ es una unidad, luego $x - 1$ también lo es. Así, $x = (x - 1) + 1$ es clean. ■

A continuación, mostraremos un análogo de la Proposición 2.7 para los anillos clean.

Proposición 2.30. Un anillo R es clean si, y solo si, $R/\mathcal{J}(R)$ es clean y los idempotentes pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$.

Demostración. Dado que toda imagen homomorfa de un anillo clean es clean (ver³), entonces $R/\mathcal{J}(R)$ es clean. Como R es adecuado se tiene que los idempotente pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$. Por otro lado, sea $x \in R$, escribamos $\bar{R} = R/\mathcal{J}(R)$ y $\bar{x} = x + \mathcal{J}(R)$, como \bar{R} es clean, existe $\bar{e}^2 = \bar{e} \in \bar{R}$ y u unidad en \bar{R} , tal que $\bar{x} = \bar{e} + \bar{u}$. Ya que los idempotentes pueden ser levantados, existe $f^2 = f$ tal que $\bar{f} = \bar{e}$. Además, $\bar{uv} = \bar{vu} = \bar{1}$ para algún $v \in R$, entonces $1 - (1 - uv) = uv$ es una unidad y vu también, de modo que podemos asumir que u es una unidad en R . Luego, $x - (e + u) = r$, $x = e + u + r$ con $r \in \mathcal{J}(R)$, por la Observación 1.18, x es clean. ■

Definición 2.31. Se dice que R es *potent* si los idempotentes pueden ser levantados módulo $\mathcal{J}(R)$ y cada ideal a izquierda (equivalente a derecha) no contenido en $\mathcal{J}(R)$ contiene un idempotente no nulo.

Proposición 2.32. Cada anillo adecuado es potent.

Demostración. Mostraremos que si todo idempotente en Rx es nulo entonces $x \in \mathcal{J}(R)$. Supongamos que si $x \in R$ tal que $e^2 = e \in Rx$, implica que $e = 0$. Dado $a \in R$, existe $e^2 = e \in Rax$ con $1 - e \in R(1 - ax)$. Como $e = 0$, entonces $1 \in R(1 - ax)$, luego $1 - ax$ es una unidad. Por lo tanto, $x \in \mathcal{J}(R)$. ■

Ejemplo 2.33. Utilizando la misma notación del Ejemplo 2.16, el anillo $R(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ es un anillo conmutativo potent con $\mathcal{J}(R) = 0$ que no es adecuado. Como vimos en el

Ejemplo 2.4, \mathbb{Z} no levanta idempotentes para todo ideal, por lo tanto no es adecuado. Luego $R(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ no es adecuado.

Proposición 2.34. Si R es adecuado y $e^2 = e \in R$, el anillo eRe es adecuado.

Demostración. Sea $x \in eRe$, como R es adecuado, existe $f^2 = f \in Rx$ con $1 - f \in R(1 - x)$. Si $x = eke$ y $f = ax$, entonces $fe = axe = ax = f$, luego $(ef)^2 = (ef) \in eRex$ y $e - ef = e(1 - f)e = e\lambda(1 - x)e = e\lambda(1 - ex)e = e\lambda e(e - xe) = e\lambda e(e - x) \in eRe(e - x)$, sigue de la Proposición 2.1 (4), que eRe es adecuado. ■

Definición 2.35. Los elementos $e_1, \dots, e_n \in R$ son llamados *idempotentes ortogonales* si, $e_i e_i = e_i$ y $e_i e_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo 2.36. Si R es el anillo de matrices triangulares inferiores 2×2 con entradas en los reales, los idempotentes de este anillo son $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, pero $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son los únicos idempotentes ortogonales de R .

Proposición 2.37. Sea R un anillo adecuado y suponga que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ en R . Entonces existen idempotentes ortogonales e_1, \dots, e_n tal que $e_i \in Rx_i$ para cada i y $e_1 + \dots + e_n = 1$.

Demostración. Tomemos $n \geq 2$ y procedamos por inducción fuerte sobre n . Dados $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1$, entonces $x_{n+1} = 1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, por (4) de la Proposición 2.1, existe un idempotente $f \in R(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ con $1 - f \in Rx_{n+1}$. Escribamos $f = r(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $r \in R$. Como fRf es adecuado y su unidad es f , por hipótesis de inducción existen idempotentes ortogonales f_1, f_2, \dots, f_n en fRf tal que $f_i \in fRfrx_i f$ para cada i y

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f \tag{1}$$

Para cada i escribamos $f_i = fr_i frx_i f$ y definamos $e_i = f_i r_i frx_i$, ahora veamos que e_i es idempotente,

$$\begin{aligned}
e_i^2 &= (f_i r_i frx_i)(f_i r_i frx_i), \\
&= f_i r_i frx_i (fr_i frx_i f) r_i frx_i, \\
&= (fr_i frx_i f) \underbrace{r_i frx_i (fr_i frx_i f)}_{f_i} r_i frx_i, \\
&= \underbrace{fr_i frx_i f_i r_i frx_i fr_i frx_i}_{f_i}, \\
&= \underbrace{f_i r_i f x_i f r_i frx_i}_{e_i}, \\
&= \underbrace{e_i f}_{f_i} r_i frx_i, \\
&= f_i r_i frx_i = e_i.
\end{aligned}$$

De manera análoga podemos mostrar que $e_i e_j = 0$ para cada i y j , entonces estos e_i son idempotentes ortogonales. Definamos $e = e_1 + \dots + e_n$ idempotente, ya que $e_i \in Rx_i$ con $1 \leq i \leq n$, falta probar que $1 - e \in Rx_{n+1}$, claramente $1 - e$ es un idempotente ortogonal. Como $e_i f = f_i$, entonces $ef = e_1 f + \dots + e_n f = f_1 + \dots + f_n = f$. Luego, $1 - e = (1 - e)(1 - f) \in Rx_{n+1}$. ■

Definición 2.38. Sea L un ideal a izquierda de R , x_1, \dots, x_n son *idempotentes ortogonales módulo L* , si $x_i \equiv x_i^2$ (mód L) para cada i y $x_i x_j \equiv 0$ (mód L) para todo $i \neq j$.

A continuación demostraremos uno de los teoremas principales en el levantamiento de idempotentes.

Teorema 2.39. Sea R adecuado y sea L un ideal a izquierda de R y sean x_1, \dots, x_n idempotentes ortogonales módulo L . Entonces existen idempotentes ortogonales e_1, \dots, e_n tal que $e_i \in Rx_i$ y $e_i \equiv x_i$ (mód L) para cada i .

Demostración. Definamos $x = x_1 + \cdots + x_n$, y por la Proposición 2.37, existen idempotentes ortogonales e_1, \dots, e_n tal que $e_i \in Rx_i$ para cada i y

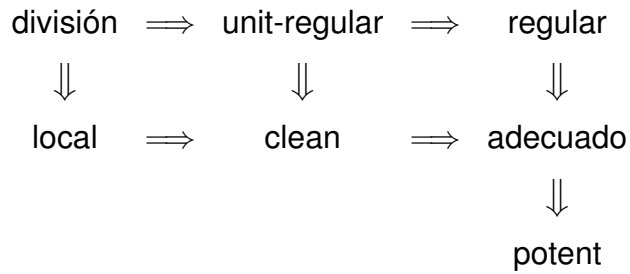
$$1 - e \in R(1 - x),$$

donde $e = e_1 + \cdots + e_n$ es un idempotente ortogonal. Para cada i , por hipótesis $x_i \equiv x_i^2 \pmod{L}$ y $x_i x_j \equiv 0 \pmod{L}$, de modo que $xx_i \equiv x_i \pmod{L}$. Como $e_i \in Rx_i$, entonces $ex_i \equiv e_i \pmod{L}$. Si $1 - e = r(1 - x)$, sigue que

$$x_i - e_i \equiv x_i - ex_i \equiv (1 - e)x_i \equiv r(1 - x)x_i \equiv 0 \pmod{L} \text{ para cada } i.$$

Esto completa la prueba. ■

Para finalizar, el siguiente diagrama nos permite tener una vista general de como están relacionados las clases de anillos definidos en este capítulo.



3. SOBRE TRANSFORMACIONES LINEALES CLEAN

En este capítulo mostraremos un poco cómo se comportan los anillos clean en el álgebra lineal especialmente bajo transformaciones lineales, por último mostremos un resultado que nos da una condición suficiente para saber cuando el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo con división es clean. Este estudio está basado en el artículo de Nicholson y Varadarajan ⁹.

Definición 3.1. Si $\{x_1, x_2, \dots\}$ es una base de V_D , la transformación lineal $\sigma : V \rightarrow V$ dada por $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ para cada i es llamada un *operador shift* en V .

Definición 3.2. Sea $\alpha \in \text{end}(V)$. Un subespacio U de V se dice que es *invariante bajo α* o *α -invariante* si $\alpha(U) \subseteq U$. Es decir, U es invariante bajo α si la restricción $\alpha|_U$ es un endomorfismo en U .

Proposición 3.3. Cada operador shift es clean en $\text{end}(V_D)$.

Demostración. Sea $\sigma : V \rightarrow V$ el operador shift de la base $\{x_1, x_2, \dots\}$ de V_D . Definamos $\pi : V \rightarrow V$ como sigue:

$$\begin{aligned}\pi(x_1) &= x_1 + x_2, \\ \pi(x_2) &= 0, \\ \pi(x_{2k+1}) &= x_{2k} + x_{2k+2} \quad \text{para } k \geq 1, \\ \pi(x_{4k}) &= x_{4k} + x_2 \quad \text{para } k \geq 1, \\ \pi(x_{4k+2}) &= x_{4k+2} - x_2 \quad \text{para } k \geq 1.\end{aligned}$$

⁹ W. K. NICHOLSON y K. VARADARAJAN. "Countable linear transformations are clean". En: *Proc. A.M.S* 126 (1998), págs. 61-64.

Veamos ahora que $\pi^2(x_i) = \pi(x_i)$ para cada i , claramente para $i = 1, 2$ se cumple,

- $\pi^2(x_{2k+1}) = \pi(\pi(x_{2k+1})) = \pi(x_{2k} + x_{2k+2}) = \pi(x_{2k}) + \pi(x_{2k+2}),$
 - Si k es par, $\pi(x_{2k}) = x_{2k} + x_2$ y $\pi(x_{2k+2}) = x_{2k+2} - x_2$, luego $\pi^2(x_{2k+1}) = x_{2k} + x_{2k+2} = \pi(x_{2k+1}).$
 - Si k es impar, $\pi(x_{2k}) = x_{2k} - x_2$ y $\pi(x_{2k+2}) = x_{2k+2} + x_2$, luego $\pi^2(x_{2k+1}) = x_{2k} + x_{2k+2} = \pi(x_{2k+1}).$
- $\pi^2(x_{4k}) = \pi(x_{4k} + x_2) = \pi(x_{4k}).$
- $\pi^2(x_{4k+2}) = \pi(x_{4k+2} - x_2) = \pi(x_{4k+2}).$

De modo que π es un idempotente en $\text{end}(V_D)$. La acción de $\sigma - \pi$ en la base $\{x_1, x_2, \dots\}$ es

$$\begin{aligned} (\sigma - \pi)(x_1) &= -x_1, \\ (\sigma - \pi)(x_2) &= x_3, \\ (\sigma - \pi)(x_{2k+1}) &= x_{2k+2} - (x_{2k} + x_{2k+2}) = -x_{2k} && \text{para } k \geq 1, \\ (\sigma - \pi)(x_{4k}) &= x_{4k+1} - x_{4k} - x_2 && \text{para } k \geq 1, \\ (\sigma - \pi)(x_{4k+2}) &= x_{4k+3} - x_{4k+2} + x_2 && \text{para } k \geq 1. \end{aligned}$$

Se sigue que x_{2k} está en $\text{im}(\sigma - \pi)$ para cada $k \geq 1$, además $(\sigma - \pi)(x_{4k} - x_{4k+1} - x_3) = x_{4k+1}$ y $(\sigma - \pi)(x_{4k+2} - x_{4k+3} + x_3) = x_{4k+3}$. Por lo tanto, $\sigma - \pi$ es sobre. Finalmente, si $(\sigma - \pi)(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots) = 0$, donde $a_i \in D$, encontramos que por como está

definida $\sigma - \pi$,

Coeficiente de $x_1 : -a_1$,

Coeficiente de $x_2 : -a_3 - a_4 + a_6 - a_8 + a_{10} - a_{12} + \dots$,

Coeficiente de $x_{2k+1} : a_{2k}$ para $k \geq 1$,

Coeficiente de $x_{2k+2} : -a_{2k+2} - a_{2k+3}$ para $k \geq 1$.

como el conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ es linealmente independiente, estos coeficientes son cero, sigue que $a_k = 0$ para cada k . Así, $\sigma - \pi$ es uno a uno, luego σ es clean. ■

Definición 3.4. La *matriz compañera* de un polinomio mónico $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Proposición 3.5. Si R es un anillo clean, entonces cualquier matriz compañera $n \times n$ sobre R es clean en $M_n(R)$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{bmatrix},$$

donde $a_1 = e + u$ con $e^2 = e$ y u invertible, y $b_k = a_k - e$ para $k \geq 2$. La primera de estas matrices es idempotente en el anillo de matrices $M_n(R)$. Observemos que la segunda matriz es invertible, ya que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_2u^{-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_3u^{-1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_4u^{-1} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_nu^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ u^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_{n \times n}$$

Por lo tanto, la matriz compañera es clean en $M_n(R)$. ■

Proposición 3.6. Si $\alpha \in \text{end}(V_D)$ es tal que V es generado por $\{y, \alpha(y), \alpha^2(y), \dots\}$ para algún $y \in V$. Entonces α es clean en $\text{end}(V_D)$.

Demostración. Podemos asumir que $V \neq 0$, ya que V_D tiene dimensión infinita enumerable. Si $\alpha^n(y) \notin yD + \alpha(y)D + \dots + \alpha^{n-1}(y)D$ para todo $n \geq 1$, entonces $\{y, \alpha(y), \alpha^2(y), \dots\}$ es linealmente independiente y enumerable, por lo tanto es una base de V . Como $\alpha(\alpha^n(y)) = \alpha^{n+1}(y)$ para todo $n \geq 1$, entonces α es el operador shift con respecto a esta base. Luego, por la Proposición 3.3 α es clean.

Por otro lado, si $\alpha^n(y) \in yD + \alpha(y)D + \dots + \alpha^{n-1}(y)D$ para algún $n \geq 1$. Si n es minimal con esta propiedad, entonces $\mathcal{B} = \{y, \alpha(y), \alpha^2(y), \dots, \alpha^{n-1}(y)\}$ es una base de V_D . Veamos que la matriz de α respecto a \mathcal{B} es una matriz compañera. Siguiendo la notación utilizada en el Teorema 1.26,

$$\begin{aligned} [\alpha]_{\mathcal{B}} &= ([\alpha(y)]_{\mathcal{B}} \mid [\alpha(\alpha(y))]_{\mathcal{B}} \mid \dots \mid [\alpha(\alpha^{n-1}(y))]_{\mathcal{B}}), \\ [\alpha]_{\mathcal{B}} &= ([\alpha(y)]_{\mathcal{B}} \mid [\alpha^2(y)]_{\mathcal{B}} \mid \dots \mid [\alpha^n(y)]_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha^n(y) = ya_0 + \alpha(y)a_1 + \dots + \alpha^{n-1}(y)a_{n-1}$, entonces

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

y por la Proposición 3.5 $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ es clean. Sabemos que $\text{end}(V_D) \simeq M_n(D)$, luego por la Proposición 2.24, α es clean en $\text{end}(V_D)$. ■

Lema 3.7. Sea $\alpha \in \text{end}(V)$ y sea U un α – subespacio invariante de V . Entonces podemos definir $\tilde{\alpha} : V/U \rightarrow V/U$ por $\tilde{\alpha}(\bar{v}) = \overline{\alpha(v)}$ con $\bar{v} = v + U$ para cada $v \in V$, y además

$$\overline{\alpha^n(v)} = \tilde{\alpha}^n(\bar{v}) \text{ para todo } v \in V \text{ y todo } n \geq 1. \quad (2)$$

Demostración. Sean $\bar{v} = \bar{w}$ entonces $v - w \in U$. Sigue que $\tilde{\alpha}(\bar{v}) - \tilde{\alpha}(\bar{w}) = \tilde{\alpha}(\overline{v - w}) = \tilde{\alpha}(\bar{0}) = \overline{\alpha(0)} = \bar{0}$. Por lo tanto, $\tilde{\alpha}$ está bien definida. Ahora veamos por inducción sobre n que $\overline{\alpha^n(v)} = \tilde{\alpha}^n(\bar{v})$ para todo $v \in V$ y todo $n \geq 1$. En efecto, para $n = 1$, se tiene por definición. Asumamos que se cumple para n , entonces $\overline{\alpha^{n+1}(v)} = \overline{\alpha^n(\alpha(v))} = \tilde{\alpha}^n(\overline{\alpha(v)}) = \tilde{\alpha}^n(\tilde{\alpha}(\bar{v})) = \tilde{\alpha}^{n+1}(\bar{v})$. ■

Proposición 3.8. Sea $\alpha \in \text{end}(V)$ y sea U un α – subespacio invariante de V . Asuma que un vector $y \in V \setminus U$ existe tal que $V = U + K$ donde $K = yD + \alpha(y)D + \dots$. Si la restricción $\alpha|_U$ es clean en $\text{end}(U)$, entonces α es clean en $\text{end}(V)$. Más precisamente, si $\alpha|_U = \pi + \sigma$ en $\text{end}(U)$, $\pi^2 = \pi$, σ es invertible, luego $\alpha = \varphi + \tau$ en $\text{end}(V)$, $\varphi^2 = \varphi$, τ invertible, donde $\varphi|_U = \pi$ y $\tau|_U = \sigma$.

Demostración. Escribamos $V = M \oplus U$ donde M es un subespacio que contiene a y . Por conveniencia escribamos $\bar{v} = v + U$ para cada $v \in V$. Como U es α – subespacio invariante, definimos $\tilde{\alpha} : V/U \rightarrow V/U$ como en el Lema 3.7.

Ahora, sea $\theta^2 = \theta \in \text{end}(V)$ que satisface $\theta(V) = M$ y $\ker(\theta) = U$ (ver Teorema 1.33). Luego θ induce un D -isomorfismo $\theta_0 : V/U \rightarrow M$ dado por $\theta_0(\bar{v}) = \theta(v)$ para todo $v \in V$. Por lo tanto, tenemos

$$M \xrightarrow{\theta_0^{-1}} V/U \xrightarrow{\tilde{\alpha}} V/U \xrightarrow{\theta_0} M$$

y escribamos $\beta = \theta_0 \tilde{\alpha} \theta_0^{-1} \in \text{end}(M)$. Así, $\beta \theta_0 = \theta_0 \tilde{\alpha}$ y

$$\beta[\theta(v)] = \beta[\theta_0(\bar{v})] = \theta_0[\tilde{\alpha}(\bar{v})] = \theta_0[\overline{\alpha(v)}] = \theta[\alpha(v)] \text{ para todo } v \in V. \quad (3)$$

Si $m \in M$, entonces $\theta[\alpha(m)] = \beta[\theta(m)] = \beta(m)$, ya que $\theta(m) = m$. Así, $\theta[\beta(m)] = \theta^2[\alpha(m)] = \theta[\alpha(m)]$. Como $\ker(\theta) = U$, entonces

$$\alpha(m) - \beta(m) \in U \text{ para } m \in M. \quad (4)$$

Nuestra hipótesis garantiza que $\{\bar{y}, \overline{\alpha(y)}, \overline{\alpha^2(y)}, \dots\}$ genera V/U , entonces por (2) $\{\bar{y}, \tilde{\alpha}(\bar{y}), \tilde{\alpha}^2(\bar{y}), \dots\}$ genera V/U . Si aplicamos θ_0 encontramos que $\{\theta_0[\bar{y}], \theta_0[\tilde{\alpha}(\bar{y})], \theta_0[\tilde{\alpha}^2(\bar{y})], \dots\}$ genera M , por como está definido β tenemos que $\theta_0[\tilde{\alpha}(\bar{y})] = \beta[\theta_0(\bar{y})]$, procediendo por inducción sobre n se puede verificar que $\theta_0[\tilde{\alpha}^n(\bar{y})] = \beta^n[\theta_0(\bar{y})]$ para todo $n \geq 1$, entonces $\{\theta_0[\bar{y}], \beta[\theta_0(\bar{y})], \beta^2[\theta_0(\bar{y})], \dots\}$ es una base para M . Sigue de la Proposición 3.6 que

$$\beta = \sigma_0 + \pi_0 \text{ donde } \pi_0^2 = \pi_0 \in \text{end}(M) \text{ y } \sigma_0 \in \text{end}(M) \text{ es una unidad.}$$

Como $\alpha|_U$ es clean en $\text{end}(U)$ por hipótesis, escribamos

$$\alpha|_U = \sigma + \pi \text{ donde } \pi^2 = \pi \in \text{end}(U) \text{ y } \sigma \in \text{end}(U) \text{ es una unidad.}$$

Por último, ya que $V = M \oplus U$, definamos φ y τ en $\text{end}(V)$ por,

$$\varphi(m + u) = \pi_0(m) + \pi(u),$$

$$\tau(m + u) = \sigma_0(m) + [\alpha(m) - \beta(m) + \sigma(u)].$$

Claramente, $\varphi|_U = \pi$ y $\tau|_U = \sigma$. Dado que $\sigma_0 + \pi_0 = \beta$ y $\sigma + \pi = \alpha|_U$, vemos que $\alpha = \varphi + \tau$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\varphi + \tau)(m + u) &= \varphi(m + u) + \tau(m + u), \\ &= \pi_0(m) + \pi(u) + \sigma_0(m) + [\alpha(m) - \beta(m) + \sigma(u)], \\ &= [\pi_0(m) + \sigma_0(m)] + [\pi(u) + \sigma(u)] + [\alpha(m) - \beta(m)], \\ &= \beta(m) + \alpha(u) + [\alpha(m) - \beta(m)], \\ &= \alpha(u) + \alpha(m), \\ &= \alpha(u + m). \end{aligned}$$

Tenemos que $\varphi^2 = \varphi$, ya que $\pi_0^2 = \pi_0$ y $\pi^2 = \pi$. Queda por demostrar que τ es un automorfismo. Es un monomorfismo porque si $\tau(m + u) = 0$ implica $\sigma_0(m) = 0$ y $\alpha(m) - \beta(m) + \sigma(u) = 0$, como σ_0 y σ son unidades, entonces $m = 0 = u$. Para mostrar que τ es un epimorfismo, observemos primero que $U \subseteq \text{im}(\tau)$, pues si $u \in U$, $u = \sigma(u_0) = \tau(0 + u_0)$ para algún $u_0 \in U$. Ahora mostraremos que $M \subseteq \text{im}(\tau)$, si $m \in M$, $m = \sigma_0(m_1)$, donde $m_1 \in M$, por (4) existe $u_1 \in U$, tal que $\alpha(m_1) - \beta(m_1) = -\sigma(u_1)$. Luego,

$$\tau(m_1 + u_1) = \sigma_0(m_1) + [\alpha(m_1) - \beta(m_1) + \sigma(u_1)] = m.$$

Así $M \subseteq \text{im}(\tau)$, completando nuestra prueba. ■

Lema 3.9. Sea V un espacio vectorial sobre D y supongamos que $\{U_i | i \in I\}$ son subespacios de V . Si para todo $n, m \in I$, $U_n \subseteq U_m$ o $U_m \subseteq U_n$ entonces $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un subespacio de V .

Demostración. Claramente, $U \neq \emptyset$. Sea $x, y \in U$ y $\beta \in D$, entonces existen $n, m \in I$ tal que $x \in U_n$ y $y \in U_m$, supongamos que $U_n \subseteq U_m$, luego $x \in U_m$, por definición de U_m , $x + y \in U_m \subseteq U$ y $\beta x \in U_m \subseteq U$. Así, U es un subespacio de V . ■

Lema 3.10. Sea X un conjunto y $\{X_i | i \in I\}$ una cadena de X . Para cada $i \in I$, sea $f_i : X_i \rightarrow Y$ tal que $f_i = f_j|_{X_i}$ si, $X_i \subseteq X_j$ para cada $j \in I$. Entonces $f = \bigcup_{i \in I} f_i$ es una función de $\bigcup_{i \in I} X_i$ en Y .

Demostración. Veamos que f está bien definida. Sea $u = v \in \bigcup_{i \in I} X_i$, entonces existen X_j y X_k , tal que $u \in X_j, v \in X_k$, supongamos que $X_j \subseteq X_k$, entonces $u \in X_k$ y $f_j = f_k|_{X_j}$. Luego $f(u) = f_j(u) = f_k(u) = f_k(v) = f(v)$. Así, f es una función de $\bigcup_{i \in I} X_i$ en Y . ■

Teorema 3.11. Si V_D es un espacio vectorial de dimensión enumerable sobre un anillo de división D , entonces $\text{end}(V_D)$ es clean.

Demostración. Fijemos α en $\text{end}(V_D)$ y definamos

$\mathcal{S} = \{(U, \sigma, \pi) | U_D \subseteq V \text{ es } \alpha - \text{invariante},$

$$\alpha|_U = \sigma + \pi, \sigma \in \text{end}(U) \text{ es una unidad y } \pi^2 = \pi \in \text{end}(U)\}.$$

Como $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación de orden $(U, \sigma, \pi) \leq (U', \sigma', \pi')$, si $U \subseteq U', \sigma = \sigma'|_U$ y $\tau = \tau'|_U$. Veamos ahora que \mathcal{S} es inductivo. Sea $\mathcal{K} = \{(U_i, \sigma_i, \pi_i) | i \in I\}$ una cadena de \mathcal{S} . Definamos (U, σ, π) como sigue, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un subespacio de V por el Lema 3.9, además U es α -invariante, ya que $\alpha(U) = \alpha(\bigcup U_i) = \bigcup \alpha(U_i) \subset \bigcup U_i = U$. Ahora, $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ y $\pi = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, por el Lema 3.10 σ y $\pi \in \text{end}(U)$. Como consecuencia de este Lema σ es un automorfismo y $\pi^2 = \pi$. Por lo tanto, (U, σ, π) es una cota superior de \mathcal{K} . Luego por el Lema de Zorn, existe (U', σ', π') el elemento maximal de \mathcal{S} . Es suficiente mostrar que $U' = V$, supongamos que existe $y \in V \setminus U'$, sea $K = yD + \alpha(y)D + \alpha^2(y)D \cdots$ y escribamos

$V_0 = U' + K$. Entonces V_0 y K son α -invariante, y respecto a $\alpha \in \text{end}(V_0)$, $\alpha|_{U'}$ es clean en $\text{end}(U')$ porque $(U', \sigma', \pi') \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, α es clean en $\text{end}(V_0)$ por la Proposición 3.8. Contradiciendo así la maximalidad de $(U', \sigma', \pi') \in \mathcal{S}$. ■

Corolario 3.12. Existe un anillo regular clean, el cuál no es unit regular.

Demostración. El anillo $\text{end}(V_D)$ es regular y clean, pero como vimos en el Ejemplo 2.12 no es unit-regular. ■

4. OBSERVACIONES

En el Capítulo "Sobre transformaciones lineales clean" nos basamos en el artículo ⁹. En el cual los autores plantearon las siguientes preguntas.

Pregunta 1. ¿Son clean los anillos de matrices con filas finitas y columnas infinitas enumerables? Esta pregunta sigue abierta.

Pregunta 2. ¿El teorema sigue siendo verdadero para el espacio vectorial de dimensión infinita sobre un anillo de división? Esta pregunta fue solucionada afirmativamente en ¹⁰[Lema 1].

¹⁰ W. K. NICHOLSON, K. VARADARAJAN e Y. ZHOU. "Clean endomorphism rings". En: *Arch. Math* 83.4 (2004), págs. 340-343.

BIBLIOGRAFÍA

- ANDERSON, D. D. y V. P. CAMILLO. "Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent". En: *Comm. Algebra* 30 (2002), págs. 3327-3336 (vid. págs. 10, 35).
- CAMILLO, V. P. y D. KHURANA. "A characterization of unit regular rings". En: *Comm. Algebra* 29.5 (2001), págs. 2293-2295 (vid. págs. 7, 8).
- DUMMIT, D. S. y R. M. FOOTE. *Abstract algebra*. Vol. 3. Wiley Hoboken, 2004 (vid. pág. 11).
- HAN, J. y W. K. NICHOLSON. "Extensions of clean rings". En: *Comm. Algebra* 29.6 (2001), págs. 2589-2595 (vid. pág. 10).
- LAM, T. Y. *A first course in noncommutative rings*. Vol. 131. Springer-Verlag, 1991 (vid. págs. 11, 13, 15, 31).
- LAMBEK, J. *Lectures on rings and modules*. Vol. 283. Blaisdell Pub. Co, 1966 (vid. pág. 9).
- LEZAMA, O. *Cuadernos de Álgebra, No.2: Anillos*. SAC² (vid. pág. 14).
- NICHOLSON, W. K. "Lifting idempotents and exchange rings". En: *Trans. A.M.S* 229 (1977), págs. 269-278 (vid. págs. 7-10, 24).
- NICHOLSON, W. K. y K. VARADARAJAN. "Countable linear transformations are clean". En: *Proc. A.M.S* 126 (1998), págs. 61-64 (vid. págs. 39, 48).

NICHOLSON, W. K., K. VARADARAJAN e Y. ZHOU. "Clean endomorphism rings".

En: *Arch. Math* 83.4 (2004), págs. 340-343 (vid. pág. 48).

PEIRCE, B. "Linear associative algebra". En: *Amer. J. Math.* 4.1 (1881), págs. 97-229

(vid. pág. 9).

ROMAN, S. *Advanced linear algebra*. Vol. 3. Springer, 2008 (vid. págs. 11, 18,

20-22).