

LA DENSIDAD DE LOS PUNTOS PERIÓDICOS DE UNA FUNCIÓN f Y SU
FUNCIÓN INDUCIDA 2^f

JORGE NELSON DELGADO PEREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018

LA DENSIDAD DE LOS PUNTOS PERIÓDICOS DE UNA FUNCIÓN f Y SU
FUNCIÓN INDUCIDA 2^f

JORGE NELSON DELGADO PEREZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de matemático

Director:

JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios, quien ha sido la roca en este proyecto, y en todos los ámbitos de mi vida. En él he puesto mis oraciones y toda mi fe.

Gracias a mis padres, por su apoyo incondicional, por sus sabios consejos y por estar hay en los momentos más difíciles reconfortandome con su infinito amor, gracias a mis hermanos por compartir mis sueños.

Gracias al profesor Javier Camargo, por hacer posible este trabajo, por el tiempo y conocimiento que dedicó a este proyecto, gracias a todos los profesores que se cruzaron en mi camino durante la carrera edificando mi vida de una u otra manera.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1. PRELIMINARES	12
1.1. CONTINUOS	12
1.2. HIPERESPACIOS Y LA FUNCIÓN INDUCIDA	13
1.3. SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS	16
1.4. SISTEMA DINÁMICO INDUCIDO	23
2. SDD CAÓTICOS Y EL TEOREMA DE BANKS	25
2.1. LA TIENDA	25
2.2. SISTEMA DINÁMICO (S^1, f)	32
2.3. TEOREMA DE BANKS	35
3. RECÍPROCO DEL TEOREMA DE BANKS	37
3.1. DINÁMICA SOBRE EL CONTINUO $[0, 1]$	37
3.2. SISTEMA DINÁMICO $(\prod_{n=1}^{\infty} S_n^1, g)$	38
3.3. ODÓMETRO	41
3.4. ODÓMETRO Y EL CONO DE CANTOR	48
BIBLIOGRAFÍA	49

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Arco	12
1.2. Curva cerrada simple	12
1.3. Gráfica de la curva senoidal del topólogo.	13
1.4. Abanico armónico	13
1.5. Primeros elementos de la órbita de x_0 bajo una función f	17
1.6. Gráfica de la función f	17
1.7. Gráfica de la función h	18
1.8. Primeras iteraciones de un punto $e^{i\theta} \in S^1$ bajo la función g	18
1.9. Gráfica del punto fijo $\sqrt{\frac{1}{2}}$ bajo f	19
2.1. Función tienda	26
2.2. Puntos de periodo 2 bajo T	27
2.3. Gráfica de la iteración T^2	28
2.4. Puntos de periodo 3 bajo T	29
2.5. Gráfica de la iteración T^3	29
2.6. Transformación del intervalo $[\frac{l}{2^3}, \frac{l+1}{2^3}]$ en $[0, 1]$ con T^3	30
2.7. Puntos de periodo 2 bajo f	33
2.8. Puntos de periodo 3 bajo f	34
2.9. Puntos de periodo 1, 2 y 4 bajo f	34
2.10. Función f aplicada a un intervalo U	35
3.1. Iteraciones de las funciones g_3 y g_4 sobre el punto $z = e^{i\frac{4}{7}}$	39
3.2. Iteraciones de las funciones g_5 y g_6 sobre el punto $z = e^{i\frac{4}{7}}$	39
3.3. Ciclos	47
3.4. Cono de Cantor	48

RESUMEN

TITULO: LA DENSIDAD DE LOS PUNTOS PERIÓDICOS DE UNA FUNCIÓN f Y SU FUNCIÓN INDUCIDA 2^f ¹

AUTOR: JORGE NELSON DELGADO PEREZ²

PALABRA CLAVE: SISTEMAS DINÁMICOS, DENSIDAD, PUNTOS PERIÓDICOS.

Un sistema dinámico es una pareja (X, f) , donde X es un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ es una función continua. Todo sistema dinámico induce un nuevo sistema dinámico, conocido como sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$, donde 2^X es el hiperespacio asociado a X y $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$ es una función continua que envía compactos en compactos de la siguiente manera. Sea $A \in 2^X$, entonces $2^f(A) = f(A)$.

Dado un sistema dinámico (X, f) , $Per(f)$ es el conjunto de todos los puntos periódicos de X bajo f , es decir, para un $x \in Per(f)$ existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que, k es el menor entero que cumple que $f^k(x) = x$, donde f^k quiere decir f compuesta $k - veces$ consigo misma.

Dado un sistema dinámico (X, f) , si el conjunto $Per(f)$ es denso en X , el sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$, también tendrá dicha propiedad, esto quiere decir que $\overline{Per(2^f)} = 2^X$, este se conoce como el teorema de Banks el cual se analizará en este estudio.

El recíproco del teorema de Banks no es cierto en todos los casos, por lo tanto el objetivo de este trabajo es analizar detalladamente varios ejemplos de sistemas dinámicos donde la densidad de $Per(2^f)$ no implica la densidad de $Per(f)$, es decir sistemas dinámicos (X, f) que no tienen el conjunto $Per(f)$ denso, pero que el sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$ si tiene dicha propiedad.

¹Tesis

²Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo G.

ABSTRACT

TITLE: THE DENSITY OF THE PERIODIC POINTS OF A FUNCTION f AND ITS INDUCED FUNCTION 2^f ³

AUTHOR: JORGE NELSON DELGADO PEREZ ⁴

KEY WORD: DYNAMIC SYSTEMS, DENSITY, PERIODIC POINTS.

A dynamic system is a pair (X, f) , where X is a compact metric space and $f: X \rightarrow X$ is a continuous function. Every dynamic system induces a new dynamic system, known as an induced dynamic system $(2^f, 2^X)$, where 2^X is the hyperspace associated with X and $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$ is a continuous function that sends compacts in compact as follows. Let $A \in 2^X$ then $2^f(A) = f(A)$.

Given a dynamic system (X, f) , $Per(f)$ is the set of all periodic points of X under f , that is, for a $x \in Per(f)$ if there is a $k \in \mathbb{N}$, such that k is the smallest integer that satisfies that $f^k(x) = x$, where f^k means f composed k - times with itself.

Given a dynamic system (X, f) , if the set $Per(f)$ is dense in X , the dynamic system induced $(2^X, 2^f)$, will also have this property, this means that $\overline{Per(2^f)} = 2^X$, this is known as Banks' theorem which will be analyzed in this study.

The reciprocal of Banks's theorem is not true in all cases, therefore, the objective of this work is to analyze in detail several examples of dynamic systems where the density of $Per(2^f)$ does not imply the density of $Per(f)$, that is, dynamic systems (X, f) that do not have the dense set $Per(f)$, but that the induced dynamic system $(2^X, 2^f)$ does have this property.

³Bachelor Thesis

⁴Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo G.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia algunas de las mentes más brillantes de todos los tiempos, se enfrentaron directa o indirectamente a algún tipo de teoría que subyacía oculta en los problemas a los que afrontaban, para los cuales la maquinaria física y matemática de sus épocas, no era suficiente para su comprensión.

Tal es el caso de Isaac Newton y el problema de los tres cuerpos, que someramente explicado, lo que Newton pretendía era determinar la posición y velocidad de tres cuerpos que interactúan entre sí en cualquier instante de tiempo, sometidos a la fuerza de la gravedad. El problema de fondo era considerar que el sistema seguía algún tipo de patrón inalterable, este problema no tuvo buen término y fue abordado posteriormente por Pierre Simon de Laplace y Henri Poincaré, este último fue el primero en vislumbrar la posibilidad de *caos*, un ligero cambio en las condiciones iniciales podría generar grandes cambios en el resultado.

El avance más significativo entorno a algún tipo de formalización del concepto de caos, se dio en las décadas de los sesenta y ochenta del siglo pasado, mientras los profesores Smale y Devaney estudiaban sistemas dinámicos discretos. El profesor R. Devaney presentó una definición que logró la aceptación de la comunidad matemática y prevalece en la actualidad; ésta da las condiciones que debe cumplir un sistema dinámico para que sea caótico.

Lo que planteo Devaney en 1985 es lo siguiente: dada una función f continua definida sobre un espacio métrico X en si mismo, este sistema se dice caótico si f es transitiva, los puntos periódicos de f son densos y además f es sensible a las condiciones iniciales.¹ En 1992 se demuestra que si X es un espacio métrico sin puntos aislados, entonces el sistema dinámico se dice caótico si y solo si es transitivo y la familia de puntos periódicos es denso.²

Tomando como punto de partida un sistema dinámico caótico con una función continua f y un espacio métrico compacto X se puede definir a partir de éste, un nuevo sistema formado por la función inducida 2^f y el hiperespacio de los cerrados no vacíos 2^X , y hacer la pregunta si este nuevo sistema es caótico o qué propiedades de la definición de Devaney se mantienen; recíprocamente, se podría tener un sistema

¹DEVANEY, Robert. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, USA: Westview Press, 2003.

²BANKS, John, *et al.* On Devaneys Definition of Chaos. En: The American Mathematical Monthly. Abril, 1992, vol.99 no.4., p. 332-334.

dinámico caótico formado por la función inducida y su hiperespacio y realizar las mismas preguntas acerca de la función y el espacio base.

El eje principal de este trabajo es el estudio de la propiedad dos de la definición de Devaney, la densidad de los puntos periódicos. Nuestro interés es dejar de manifiesto la relación existente entre un sistema dinámico y su sistema dinámico inducido respecto de dicha propiedad.

En el capítulo uno presentaremos las nociones básicas para llevar a cabo este estudio como son; los continuos, los hiperespacios y los sistemas dinámicos discretos.

En el segundo capítulo estudiaremos el teorema de Banks que despeja la mitad del camino, ya que prueba que si un sistema dinámico tiene sus puntos periódicos densos, su sistema dinámico inducido también tiene dicha propiedad y presentaremos algunos ejemplos.

En el tercer capítulo estudiaremos el recíproco del teorema de Banks. Presentaremos algunos ejemplos con espacios y funciones particulares que evidencian que no se tiene como válido.

1. PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos los continuos. Dado un continuo X se definirá el hiperespacio 2^X y dada una función continua entre continuos $f: X \rightarrow Y$ se definirá la función inducida $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$. Además de dar una breve introducción a los sistemas dinámicos, se presentarán algunos resultados necesarios para el análisis de los capítulos posteriores.

1.1. CONTINUOS

Definición 1.1. *Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Un subcontinuo es un continuo contenido en un espacio métrico.*

Estos son algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 1.2. *Un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ es un continuo, un arco es un continuo.*

Si $h: [0, 1] \rightarrow X$ es un homeomorfismo, los puntos $h(0)$ y $h(1)$ en X son llamados puntos extremos o puntos de no corte del arco X .



Figura 1.1: Arco

Ejemplo 1.3. *Una curva cerrada simple, denotada por S^1 , es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Es claro que S^1 es un continuo.*



Figura 1.2: Curva cerrada simple

Ejemplo 1.4. *El continuo curva senoidal del topólogo es el subespacio del plano \overline{W} , donde*

$$W = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}.$$

$$\overline{W} = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

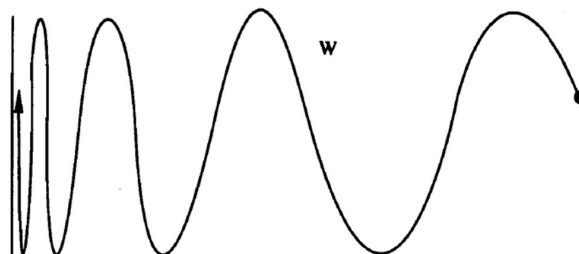


Figura 1.3: Gráfica de la curva senoidal del topólogo.

Ejemplo 1.5. Considere la sucesión armónica $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y formemos con ella la siguiente sucesión de puntos en \mathbb{R}^2 : definamos $a_{-1} = (0, 0)$, $a_0 = (1, 0)$ y para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (1, \frac{1}{n})$. Ahora, definamos el continuo

$$F_H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1-t)a_{n-1} + ta_n, t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\}.$$

Este continuo se conoce como **abanico armónico**.

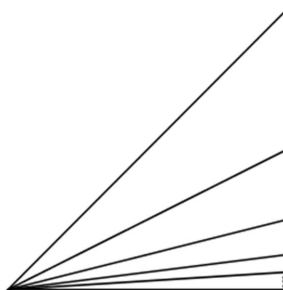


Figura 1.4: Abanico armónico

1.2. HIPERESPACIOS Y LA FUNCIÓN INDUCIDA

Sea X un espacio métrico compacto. Definimos el **hiperespacio** de X , que denotaremos por 2^X , por

$$2^X = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}.$$

Sean $A, B \in 2^X$ y $a \in A$, la distancia de a al conjunto B está dada por,

$$\hat{d}(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\},$$

donde d es la métrica en X . Además consideramos

$$\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\}.$$

Note que \tilde{d} no es una métrica, solo basta considerar $A, B \in 2^X$ con $A \subset B$ y $A \neq B$ para tener que $\tilde{d}(A, B) = 0$.

Definición 1.6. Sean $A, B \in 2^X$, se define $H(A, B)$ como,

$$H(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}.$$

Como vemos en la siguiente proposición H es una métrica y es conocida como la **métrica de Hausdorff**.³

Proposición 1.7. La función H es una métrica sobre 2^X .

El siguiente ejemplo ilustra como actúa la métrica H .

Ejemplo 1.8. Sean $X = [0, 1]$, $A = \{0\}$, $B = [0, \frac{1}{2}]$ y $C = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Entonces, $H(A, X) = 1$, $H(A, B) = \frac{1}{2}$, $H(B, X) = \frac{1}{2}$ y $H(B, C) = \frac{1}{3}$.

La métrica de Hausdorff puede ser definida por medio de la topología de Vietoris que definimos a continuación.

Definición 1.9. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. La **topología de Vietoris**, \mathcal{T}_V , es la topología más pequeña para 2^X que tiene las siguientes propiedades:

- i. $\{A \in 2^X \mid A \subset U\} \in \mathcal{T}_V$ para cada $U \in \mathcal{T}$.
- ii. $\{A \in 2^X \mid A \subset F\}$ es cerrado de \mathcal{T}_V para cada cerrado F de X .

El siguiente teorema nos permitirá definir una base para la topología de Vietoris.⁴

Teorema 1.10. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y

$$B_V = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \mid U_i \in \mathcal{T}, \text{ para cada } i \text{ y } n < \infty\}$$

con $\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X \mid A \subset \cup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$. Entonces B_V es una base para \mathcal{T}_V .

Demostración. Observemos que para cualquier abierto U y cualquier cerrado F en (X, \mathcal{T}) , los conjuntos definidos en 1.9, se pueden reescribir en términos de B_V de la siguiente manera; $\{A \in 2^X \mid A \subset U\} = \langle U \rangle$, además, $\langle X, X \setminus F \rangle = \{A \in 2^X \mid A \cap X \setminus F \neq \emptyset\}$, por lo tanto, $\{A \in 2^X \mid A \subset F\} = 2^X \setminus \langle X, X \setminus F \rangle$.

Por definición, \mathcal{T}_V , es la topología más pequeña para 2^X que contiene todos los conjuntos de la forma $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$, esto quiere decir que la familia de \mathcal{T}_V ,

³ARENAS, Gilberto y SABOGAL, Sonia. Una introducción a la geometría fractal. Colombia: Editorial UIS, 2011. p.80-86.

⁴ILLANES, Alejandro y NADLER, Sam. Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances. USA: Marcel Dekker, 1999. p.3-4.

$$S = \{\langle U \rangle \mid U \in \mathcal{T}\} \cup \{\langle X, U \rangle \mid U \in \mathcal{T}\},$$

es una subbase para \mathcal{T}_V . De esta manera la colección de intersecciones finitas S^* , de elementos de S , es una base para \mathcal{T}_V . Nuestro objetivo será probar que $S^* = B_V$.

Probemos primero que $B_V \subset S^*$.

Sea $\langle U_1, \dots, U_k \rangle \in B_V$ con $k \in \mathbb{N}$, para un $A \in \langle U_1, \dots, U_k \rangle$, $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$, esto quiere decir que $A \in \langle \bigcup_{i=1}^k U_i \rangle$, además, $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, por lo tanto $A \in \bigcap_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle$. Esto quiere decir que $\langle U_1, \dots, U_k \rangle \subset \langle \bigcup_{i=1}^k U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle)$, recíprocamente, sea $B \in \langle \bigcup_{i=1}^k U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle)$, entonces $B \in \langle \bigcup_{i=1}^k U_i \rangle$, es decir $B \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$, además $B \in \bigcap_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle$, entonces $B \in \langle X, U_i \rangle$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, es decir $B \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, por lo tanto, $\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^k U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle)$, lo que prueba que $B_V \subset S^*$.

Probemos ahora que $S^* \subset B_V$. Primero probemos que si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in B_V$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in B_V$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_k \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$, donde $U_i, V_i \in \mathcal{T}$ y $k, m < \infty$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ y sea $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$. Veamos ahora que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U_1 \cap V, \dots, U_k \cap V, V_1 \cap U, \dots, V_m \cap U \rangle.$$

Sea $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, entonces $A \in \langle U_1, \dots, U_k \rangle$ y $A \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle$, es decir, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$. Como $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq V$, entonces $(A \cap U_i) \cap V \neq \emptyset$, entonces, $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Análogamente $A \cap V_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq U$, entonces, $(A \cap V_i) \cap U \neq \emptyset$, entonces, $A \cap (V_i \cap U) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \langle U_1 \cap V, \dots, U_k \cap V, V_1 \cap U, \dots, V_m \cap U \rangle$, Recíprocamente, sea $B \in \langle U_1 \cap V, \dots, U_k \cap V, V_1 \cap U, \dots, V_m \cap U \rangle$, entonces $B \cap (U_i \cap U) \neq \emptyset$; en particular $B \cap U_i \neq \emptyset$. Por otro lado $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k (U_i \cap V) = \left(\bigcup_{i=1}^k U_i \right) \cap V$. Por lo tanto $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$. Así $B \in \mathcal{U}$, análogamente, $B \in \mathcal{V}$. Por lo tanto $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Hemos probado que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U_1 \cap V, \dots, U_k \cap V, V_1 \cap U, \dots, V_m \cap U \rangle.$$

Entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in B_V$.

Para probar que $S^* \subset B_V$, es suficiente probar que la intersección de dos elementos cualesquiera de S es un elemento de B_V . Los siguientes tres casos evidencian lo que requerimos:

1. $\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$;
2. $\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$;
3. $\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1 \cap U_2 \rangle$.

Esto completa la prueba, así $S^* \subset B_V$. □

Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. La **función inducida** por f , está definida del hiperespacio 2^X en si mismo, $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$ tal que para $A \in 2^X$, $2^f(A) = f(A)$. Como f es continua, $2^f(A) = f(A)$ es compacto por lo tanto 2^f está bien definida.

Proposición 1.11. *Sea X un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua entonces la función inducida $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$ es continua.*

Demostración. Dado que los abiertos de una subbase en 2^X son de la forma $\langle U \rangle$ ó $\langle X, V \rangle$, donde U y V son abiertos de X , es suficiente probar que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$ y $(2^f)^{-1}(\langle X, V \rangle)$ son abiertos en 2^X , para todos U y V abiertos en X . Probemos que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$, ya que por la continuidad de la función f , $f^{-1}(U)$ es un abierto en X , por lo tanto $\langle f^{-1}(U) \rangle$ será un abierto en 2^X . Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$, entonces, $f(A) \in \langle U \rangle$, es decir $f(A) \subseteq U$, así, $A \subseteq f^{-1}(U)$, por lo tanto $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$. Recíprocamente, sea $B \in \langle f^{-1}(U) \rangle$, entonces $B \subseteq f^{-1}(U)$, es decir $f(B) \subseteq U$, así $f(B) \in \langle U \rangle$. Por lo tanto $B \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$. Luego $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$. Por otro lado probemos que $(2^f)^{-1}(\langle X, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle X, V \rangle)$, entonces, $f(A) \in \langle X, V \rangle$, es decir, $f(A) \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto, $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, esto quiere decir que $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Recíprocamente, sea $B \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, entonces, $B \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, esto quiere decir, $f(B) \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto, $f(B) \in \langle X, V \rangle$, entonces, $B \in (2^f)^{-1}(\langle X, V \rangle)$. Por lo tanto, $(2^f)^{-1}(\langle X, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Así, tenemos que $\langle f^{-1}(U) \rangle$ y $\langle X, f^{-1}(V) \rangle$ son subconjuntos abiertos de 2^X , por lo tanto 2^f es una función continua. \square

1.3. SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Para hablar de un sistema dinámico discreto se necesita de dos componentes: un espacio métrico X y una función continua $f: X \rightarrow X$.

Sea $x_0 \in X$, al aplicar f , la imagen $f(x_0) \in X$, por lo tanto al aplicarle f nuevamente, $f(f(x_0)) = f^2(x_0) \in X$. Realizando este procedimiento inductivamente podemos considerar la sucesión $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$. Con esta sucesión podemos interpretar que, teniendo un objeto x_0 , a medida que pasa el tiempo $n = 0, 1, \dots$, el objeto x_0 se encuentra en la posición $f^n(x_0)$; y nuestro objetivo es determinar la posición del objeto en cualquier momento e incluso cuando la variable tiempo tienda a infinito. De esta manera, un **sistema dinámico discreto** es una pareja (X, f) , donde X es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una función continua; y diremos que el sistema dinámico está resuelto, si entendemos el comportamiento de estas sucesiones independientemente de la posición inicial. Para esto, estudiaremos la propiedad de la densidad de los puntos periódicos y la transitividad topológica de un sistema dinámico, nociones que nos permitirán definir más adelante un sistema dinámico caótico.

A continuación formalizaremos estas ideas.

Definición 1.12. *Dado un sistema dinámico discreto (X, f) y un punto $x \in X$, definimos la **órbita** de x bajo f , denotada por $o(x, f)$, por*

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\},$$

donde la función $f^1 = f(x)$, $f^2(x) = (f \circ f)(x)$, y así sucesivamente (ver figura 1.5).

Cuando se mencione f^0 la entenderemos como la función identidad.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. No es difícil probar que $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^m)^n = f^{mn}$.

Empezaremos presentando tres ejemplos de sistemas dinámicos.

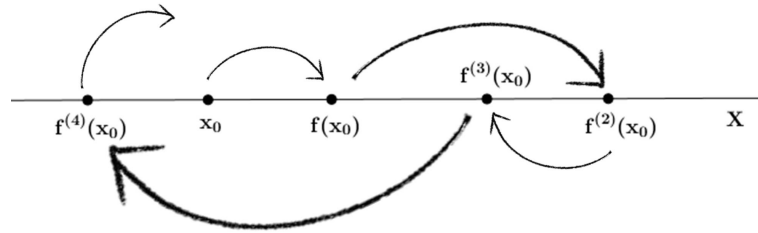


Figura 1.5: Primeros elementos de la órbita de x_0 bajo una función f

Ejemplo 1.13. Sea $X = [0, 1]$ y la función continua $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, para cada $x \in [0, 1]$.

La pareja $([0, 1], f)$ es un sistema dinámico discreto.

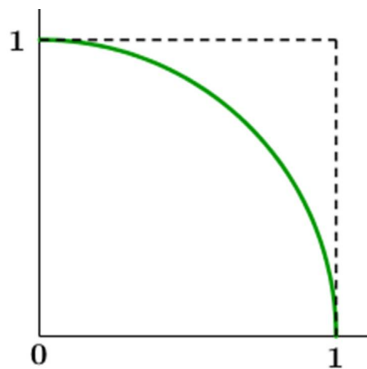


Figura 1.6: Gráfica de la función f

Ejemplo 1.14. Sea $X = [0, 1]$ y la función continua $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $h(x) = x^2$, para cada $x \in [0, 1]$.

La pareja $([0, 1], h)$ es un sistema dinámico discreto.

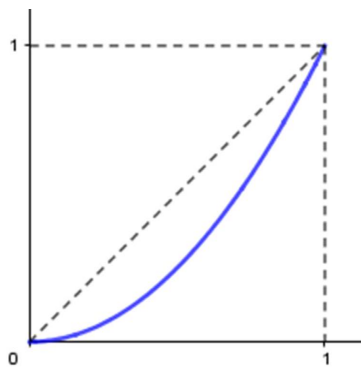


Figura 1.7: Gráfica de la función h

Ejemplo 1.15. Sea S^1 y la función continua $g: S^1 \rightarrow S^1$ dada por $g(z) = ze^i$, para cada $z \in S^1$.

La pareja (S^1, g) es un sistema dinámico discreto.

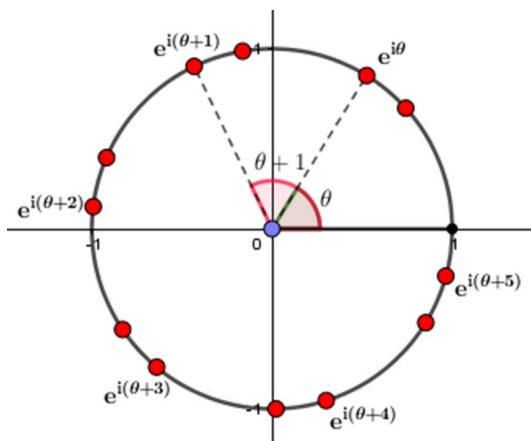


Figura 1.8: Primeras iteraciones de un punto $e^{i\theta} \in S^1$ bajo la función g

Antes de mencionar algunas órbitas en estos ejemplos, definamos una clase de puntos cuya órbita tiene un comportamiento particular.

Definición 1.16. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Decimos que $x_0 \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x_0) = x_0$. Esto es $o(x_0, f) = \{x_0, x_0, \dots\} = \{x_0\}$.

La siguiente es una propiedad de la recta real \mathbb{R} respecto de los puntos fijos⁵ que nos será de utilidad en los capítulos posteriores.

Proposición 1.17. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f: A \rightarrow A$ una función continua en A . Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en A .

⁵KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. Sistemas Dinámicos Discretos. Mexico: Editorial UNAM, 2014. p.12-13.

i. Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo.

ii. Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. *i.* Como $f([a, b]) \subset [a, b]$ entonces $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$. Sea $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h = f(x) - x$. Es claro que h es continua en $[a, b]$, además $h(a) \geq 0$ y $h(b) \leq 0$. Por lo tanto existe un $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$. Esto quiere decir que $f(c) = c$.

ii. Como $[a, b] \subset f([a, b])$, existen $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tal que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Notemos que $f(\alpha) \leq \alpha$ y $\beta \leq f(\beta)$. Como en el inciso *i*, definamos la función $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$ para cada $x \in [a, b]$. Se tiene que $h(\alpha) \leq 0$ y $h(\beta) \geq 0$. Por lo tanto existe un $c \in [\alpha, \beta]$ tal que $h(c) = 0$. Así $f(c) = c$.

□

En el ejemplo 1.13 se mostró un sistema dinámico sobre el espacio $[0, 1]$. La proposición 1.17 nos garantiza que $([0, 1], f)$ tiene un punto fijo, a éste lo hallamos resolviendo la ecuación $f(x) = x$.

Sea $x \in [0, 1]$ tal que x es un punto fijo, entonces

$$\sqrt{1 - x^2} = x$$

$$1 - x^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto $\sqrt{\frac{1}{2}}$ es un punto de periodo 1.

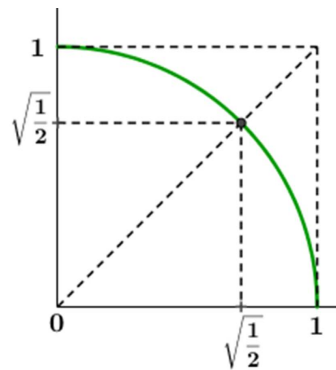


Figura 1.9: Gráfica del punto fijo $\sqrt{\frac{1}{2}}$ bajo f

Observando la figura 1.7, podemos notar que 0 y 1 son puntos fijos del sistema dinámico $([0, 1], h)$. Un punto fijo en el sistema dinámico (S^1, g) , debe cumplir que $ze^i = z$ con $z = e^{i\theta} \in S^1$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Pero $ze^i = e^{i(\theta+1)} \neq e^{i\theta}$, ya que $\theta + 1 \neq \theta$. Por lo tanto el sistema dinámico (S^1, g) no tiene ningún punto fijo.

Definición 1.18. Sea $f: X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un **punto periódico** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos por $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, decimos que $o(x, f)$ es una **órbita periódica**. Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene periodo k si $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$.

Dado $x_0 \in Per(f)$, si x_0 es un punto fijo bajo f , esto es $f(x_0) = x_0$, el periodo de x_0 es 1.

Las siguientes son dos propiedades que cumplen los puntos periódicos.⁶

Proposición 1.19. Sean $f: X \rightarrow X$ una función continua y $x_0 \in Per(f)$. Supongamos que el periodo de x_0 es n .

1. Cada punto en la órbita $o(x_0, f)$ es un punto periódico de f de periodo n .
2. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces, m es un múltiplo de n si y solo si $f^m(x_0) = x_0$.

Demostración. 1. Consideremos la órbita de x_0 ,

$$o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$$

Sea $f^i(x_0) \in o(x_0, f)$ con $1 \leq i \leq n - 1$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f^i(x_0) &= f^i(f^n(x_0)) \\ &= f^{i+n}(x_0) \\ &= f^{n+i}(x_0) \\ &= f^n(f^i(x_0)). \end{aligned}$$

Sólo resta probar que n es el mínimo natural tal que $f^n(f^i(x_0)) = f^i(x_0)$. Supongamos que existe un $k \in \mathbb{N}$, con $k < n$, tal que $f^i(x_0) = f^k(f^i(x_0))$, entonces, $f^k(f^i(x_0)) = f^{k+i}(x_0) = f^{i+k}(x_0) = f^i(f^k(x_0))$, es decir, $f^k(x_0) = x_0$, lo que contradice que n es el periodo de x_0 . Por lo tanto, hemos probado que cualquier elemento de $o(x_0, f)$ tiene periodo n .

2. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que m es múltiplo de n . Entonces existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = np$, así

$$f^m(x_0) = f^{np}(x_0) = \overbrace{f^n(f^n(\dots(f^n(x_0))))}^{p\text{-veces}} = x_0.$$

Supongamos que m no es múltiplo de n , entonces existen únicos $q, r \in \mathbb{N}$, tal que $m = nq + r$, con $0 \leq r < n$. Por hipótesis tenemos que $f^m(x_0) = x_0$ lo que es lo mismo que $f^{nq+r}(x_0) = f^r(f^{nq}(x_0)) = x_0$. Por el recíproco tenemos que, $f^{nq}(x_0) = x_0$. Así tenemos que $f^r(f^{nq}(x_0)) = f^r(x_0) = x_0$. Lo anterior contradice que n es el periodo de x_0 , por lo tanto $r = 0$. Esto quiere decir que m es un múltiplo de n . □

⁶KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. Sistemas Dinámicos Discretos. Mexico: Editorial UNAM, 2014. p.24-25.

A continuación presentaremos ejemplos donde se ilustran los puntos periódicos.

Ejemplo 1.20. 1. Consideremos el sistema dinámico $([0, 1], f)$ con $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Sea $x \in [0, 1]$, la primera iteración está dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, lo curioso de este sistema dinámico es la segunda iteración,

$$f^2(x) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2} = x.$$

Así la órbita de x está dada por $o(x, f) = \{x, f(x), x, f(x), x, \dots\}$, es decir, para cada $x \in [0, 1] \setminus \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$, x es un punto periódico de periodo 2. Además, anteriormente vimos que $\sqrt{\frac{1}{2}}$ es un punto fijo, por lo tanto,

$$\text{Per}(f) = [0, 1].$$

2. Para el sistema dinámico $([0, 1], h)$, con $h(x) = x^2$, tenemos que para cualquier $x \in (0, 1)$, la órbita $o(x, h) = \{x, h(x), h^2(x), \dots\}$ converge a cero. Por lo tanto los únicos puntos periódicos en $([0, 1], h)$ son 0 y 1, es decir $\text{Per}(h) = \{0, 1\}$. 3. Para el caso del sistema dinámico (S^1, g) con $g(z) = ze^i$. Cada $z \in S^1$, bajo la función g tiene órbita infinita. Sea $z \in S^1$, con $z = e^{i\theta}$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, supongamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $g^n(z) = g^m(z)$, es decir $e^{i(\theta+n)} = e^{i(\theta+m)}$, así, $e^{i(n-m)} = 1$, por lo tanto, $n - m = 2\pi k$, con $k = \{0, 1, \dots\}$, lo cual contradice que $n - m$ es un racional. Por lo tanto la órbita de cada punto es infinita, esto quiere decir que ningún punto es periódico en (S^1, g) . Así $\text{Per}(g) = \emptyset$.

Definición 1.21. Sea (X, \mathcal{T}) , un espacio topológico, $A \subset X$ se dice que es un conjunto denso en X si y solo si para todo $V \in \mathcal{T}$, $A \cap V \neq \emptyset$.

Definición 1.22. Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que (X, f) cumple con la propiedad de la densidad de los puntos periódicos, si el conjunto $\text{Per}(f)$ es denso en X .

Del anterior análisis podemos concluir que el sistema dinámico $([0, 1], f)$, con $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, tiene el conjunto $\text{Per}(f)$ denso en $[0, 1]$. A diferencia de los sistemas dinámicos $([0, 1], h)$, con $h(x) = x^2$ y (S^1, g) , con $g(z) = ze^{i\theta}$, que no tienen dicha propiedad.

Definición 1.23. Sea X un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$. Decimos que f es **topológicamente transitiva** en X , si para todo par de conjuntos U y V abiertos no vacíos de X , existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

La definición anterior nos dice que existe $x \in U$ tal que $f^n(x) \in V$. Es decir, al menos un punto de U llega hasta V bajo la acción de alguna iteración f^n .

De los ejemplos que hemos venido trabajando anteriormente, es inmediato concluir que los sistemas dinámicos $([0, 1], f)$, con $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $([0, 1], h)$, con $h(x) = x^2$, no tienen la propiedad de transitividad topológica. El sistema dinámico (S^1, g) , presentado en el ejemplo 1.15, con $g(z) = ze^{i\theta}$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, tiene la propiedad de transitividad topológica. A continuación presentaremos algunas ideas para convencer al lector de este hecho. Sean U y V dos abiertos en S^1 , diferentes del vacío, si tomamos un punto z_0 en U , la órbita $o(z_0, g)$ es infinita y va recorriendo a S^1 en sentido anti horario con cierta simetría y sin repeticiones, por lo tanto existirá un $n \in \mathbb{N}$, tal que $g^n(z_0) \in V$.

Definición 1.24. Sean X un espacio métrico, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es un **punto límite** de la órbita $o(x_0, f)$ si existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y$. La colección de todos los puntos límite de $o(x_0, f)$ es el **omega conjunto límite** de x_0 bajo f . A este conjunto lo denotamos $\omega(x_0, f)$. Es decir

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X \mid y \text{ es un punto límite de } o(x_0, f)\}.$$

El siguiente es ejemplo del omega conjunto límite.

Ejemplo 1.25. Continuando con el sistema dinámico $([0, 1], f)$, donde $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Sea $x = \frac{1}{2}$, la órbita de $\frac{1}{2}$ está dada por,

$$o\left(\frac{1}{2}, f\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}.$$

Considerando las siguientes sucesiones de números naturales $\{2i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{2i+1\}_{i=1}^{\infty}$, tenemos que $f^{2i}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $f^{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_{2i}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_{2i+1}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ por lo tanto $\omega\left(\frac{1}{2}, f\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Estas son algunas propiedades del omega conjunto límite.⁷

Proposición 1.26. Sea X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces para todo $x \in X$, se tiene que $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in X$, como X es compacto, la sucesión $o(x, f) = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, tiene una subsucesión convergente, digamos a $y_0 \in X$. Por lo tanto $y_0 \in \omega(x, f)$. \square

Proposición 1.27. Sea $f: X \rightarrow X$ una función continua. Para todo $x \in X$, $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Si $\omega(x, f) = \emptyset$, entonces la afirmación es cierta. Supongamos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$, probemos que toda sucesión convergente de $\omega(x, f)$, converge en el mismo conjunto. Sea $x_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\omega(x_0, f)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Probemos que $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_0 , para $\epsilon_1 = 1$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y_0) < \frac{\epsilon_1}{2}$. Como $y_{n_1} \in \omega(x_0, f)$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x_0) \in B\left(y_{n_1}, \frac{\epsilon_1}{2}\right) \subset B(y_0, \epsilon_1).$$

Para $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe un $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y_0) < \frac{\epsilon_2}{2}$. Como $y_{n_2} \in \omega(x_0, f)$, existe un $k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_2 > k_1$ tal que

$$f^{k_2}(x_0) \in B\left(y_{n_2}, \frac{\epsilon_2}{2}\right) \subset B(y_0, \epsilon_2).$$

⁷KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. Sistemas Dinámicos Discretos. Mexico: Editorial UNAM, 2014. p.169-175.

De esta manera encontramos una sucesión creciente de números naturales $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que para cada j

$$f^{k_j}(x_0) \in B(y_0, \epsilon_j), \quad \text{donde } \epsilon_j = \frac{1}{j}.$$

Por lo tanto, $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{k_j}(x_0) = y_0$ y y_0 pertenece al conjunto $\omega(x_0, f)$. Esto quiere decir que el conjunto $\omega(x_0, f)$ es cerrado. \square

Proposición 1.28. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Para todo $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. De esto se dice que $\omega(x, f)$ es un conjunto **estrictamente invariante** bajo f .

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Probemos que $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$. Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Entonces existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$. También podemos encontrar una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números naturales, tal que, $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = z_0$. Ahora, por la continuidad de la función f , $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0$. Así, $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Por lo tanto $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$.

Probemos ahora que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$. Sea $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Entonces existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ creciente de números naturales tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0.$$

Como X es compacto y la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ está contenida en X , entonces existe una subsucesión de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ y un punto $z_0 \in X$ tales que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = z_0.$$

Así $z_0 \in \omega(x_0, f)$ y $f(z_0) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = y_0$. De lo anterior, $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Por lo tanto, $\omega \subset f(\omega(x_0, f))$. \square

1.4. SISTEMA DINÁMICO INDUCIDO

Dado un sistema dinámico (X, f) a partir de éste podemos crear uno nuevo con el hiperespacio 2^X y la función inducida 2^f definida en 1.2, llamado sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$. Al sistema dinámico (X, f) lo llamamos sistema dinámico base. Nótese que para este nuevo sistema se tiene que $(2^f)^n(A) = f^n(A)$, para cualquiera $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.29. Consideremos el sistema dinámico $([0, 1], f)$, con $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Observemos cómo es la dinámica en el sistema dinámico inducido $(2^{[0,1]}, 2^f)$. Sea A un subconjunto finito de $2^{[0,1]}$, tal que, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$ y $x_i \in [0, 1]$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Note que $2^f(A) = f(A) = \{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$. Como los puntos de $[0, 1]$ tienen periodo 2 bajo f , esto quiere decir que $f^2(A) = A$.

Por lo tanto $o(A, 2^f) = \{A, f(A), A, f(A), \dots\}$. Así $\omega(A, 2^f) = \{A, f(A)\}$, siempre que $f(A) \neq A$.

Consideremos ahora un intervalo cerrado en $[0, 1]$. Sea $B = [a, b] \in 2^{[0,1]}$, con $a < b$. Entonces, $f([a, b]) = [\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-b^2}]$ y $f([\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-b^2}]) = [a, b]$. Por lo tanto, $o(B, 2^f) = \{B, f(B), B, f(B), \dots\}$. Como en el caso anterior.

Se podría pensar que todo los elementos en $2^{[0,1]}$ son de periodo 2, pero hay infinidad de puntos fijos. Veamos por ejemplo que si tomamos $x \in [0, 1]$, y definamos $C = \{x, f(x)\} \in 2^{[0,1]}$, entonces $f(C) = \{f(x), f(f(x))\} = \{f(x), x\} = C$.

Como se evidencio en el ejemplo 1.29, al sistema dinámico inducido se le puede dar el mismo tratamiento que a los demás sistemas dinámicos y preguntarnos cómo es el comportamiento de sus órbitas y de sus puntos periódicos.

En los siguientes capítulos estableceremos la relación entre un sistema dinámico y su sistema dinámico inducido respecto a la densidad del conjunto de los puntos periódicos.

2. SDD CAÓTICOS Y EL TEOREMA DE BANKS

En el capítulo 1 definimos los sistemas dinámicos discretos y algunas de sus propiedades. En este capítulo definiremos los sistemas dinámicos caóticos, estudiaremos detalladamente dos ejemplos de este tipo de sistemas, y enunciaremos y probaremos el teorema de Banks.

En 1985, R. L. Devaney define la noción de caos, aunque no es la única definición posible, es una de las que ha tenido mayor aceptación en la comunidad académica. Para el objetivo de este estudio la definición de caos que adoptaremos es la siguiente,

Definición 2.1. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Una función continua $f: X \rightarrow X$ se dice **caótica** sobre X , si*

1. *f es transitiva,*
2. *El conjunto $Per(f)$ es denso en X*

Esta noción de caos se deriva de la definición dada por Devaney.⁸

Las condiciones 1 y 2 de la definición de caos, las conocemos del capítulo 1, ver definiciones 1.21 y 1.23. Allí mostramos el sistema dinámico $([0, 1], f)$ con $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y evidenciamos que el conjunto $Per(f)$ es denso en $[0, 1]$, pero este sistema dinámico no es transitivo; también mostramos el sistema dinámico $([0, 1], h)$ con $h(x) = x^2$, el cual no cumple la propiedad de la densidad de los puntos periódicos, ni tampoco es transitivo y por último el sistema dinámico (S^1, g) con $g(z) = ze^{i\theta}$, el cual es transitivo pero el conjunto de sus puntos periódicos es vacío.

A continuación presentaremos dos sistemas dinámicos caóticos, es decir el conjunto de sus puntos periódicos es denso y además son transitivos.

2.1. LA TIENDA

En esta sección estudiaremos un ejemplo que a pesar de estar definido en el intervalo cerrado $[0, 1]$, tiene propiedades dinámicas interesantes.

Sea $X = [0, 1]$ con la métrica usual en \mathbb{R} y la función:

⁸BANKS, John, *et al.* On Devaneys Definition of Chaos. En: The American Mathematical Monthly. Abril, 1992, vol.99 no.4., p. 332-334.

$$T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

T es conocida como la función tienda.

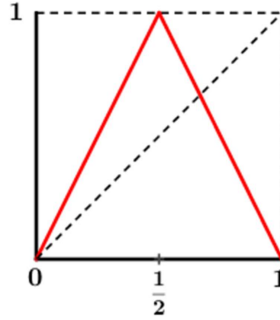


Figura 2.1: Función tienda

Es evidente la continuidad de la función T , además el espacio $[0, 1]$ es un continuo. Por lo tanto, $([0, 1], T)$ es un sistema dinámico discreto.

Analicemos cómo es el comportamiento de los elementos del conjunto $Per(T)$. Empecemos por mostrar algunos de sus representantes: puntos fijos, puntos de periodo 2 y de periodo 3.

Puntos fijos bajo T . Sea $x_0 \in [0, 1]$, x_0 tiene dos posibilidades, pertenecer a $[0, \frac{1}{2}]$ o a $[\frac{1}{2}, 1]$. Si $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ y x_0 es un punto fijo debe ocurrir que $2x_0 = x_0$ por lo tanto el único punto fijo en $[0, \frac{1}{2}]$ es 0, por otra parte si $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ y es un punto fijo se debe cumplir que $2 - 2x_0 = x_0$ de donde $x_0 = \frac{2}{3}$. Por lo tanto los únicos puntos fijos son $\{0, \frac{2}{3}\}$.

Otro hecho surge cuando nos fijamos en las órbitas de los puntos $\frac{1}{2}$ y 1. Nótese que $T(\frac{1}{2}) = 1$ y $T(1) = 0$ que sabemos es un punto fijo, para el caso de $T(x) = 2 - 2x$, $T(\frac{1}{2}) = 1$ y $T(1) = 0$, nuevamente un punto fijo, con estos argumentos concluimos que $\{\frac{1}{2}, 1\} \cap Per(T) = \emptyset$.

$$o\left(\frac{1}{2}, T\right) = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \dots \right\} \qquad o(1, T) = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$$

Observando la figura 2.1, podemos evidenciar que efectivamente el sistema dinámico $([0, 1], T)$, tiene exactamente dos puntos fijos, los cuales son la intersección de la gráfica de la función tienda con la recta $y = x$.

Puntos de periodo 2 bajo T . Un punto $x_1 \in [0, 1]$ de periodo 2, por el argumento anterior no puede pertenecer al conjunto $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$; si $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $T(x_1) = 2x_1$

debe ser mayor que $\frac{1}{2}$ de lo contrario $T^2(x_1) = 4x_1$ y se obtendría de nuevo el punto fijo 0, teniendo en cuenta esto,

$$\begin{aligned} T^2(x_1) &= 2 - 2(2x_1) = 2 - 4x_1 \\ 2 - 4x_1 &= x_1 \\ x_1 &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto $\frac{2}{5} \in Per(T)$ y su periodo es 2.

Observemos la órbita del punto $\frac{2}{5}$.

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

Por la proposición 1.19, el punto $\frac{4}{5}$ también es de periodo 2. En la siguiente gráfica podemos ver el recorrido del punto $\frac{2}{5}$ siguiendo la línea azul.

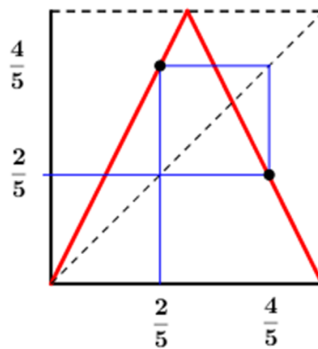


Figura 2.2: Puntos de periodo 2 bajo T

Podemos realizar el anterior análisis de manera gráfica y visualizar los puntos de periodo 2, solo debemos construir la función T^2 .

Observando la figura 2.1, evidenciamos que la gráfica de la función T está formada por dos segmentos de recta, uno sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ con pendiente 2 y el otro en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ con pendiente -2 .

La iteración $T^2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $T(T([0, 1]))$, divide el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ en dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$ y $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, y sobre cada uno de ellos dibuja un segmento de pendiente 2^2 y $-(2^2)$; en otras palabras dibuja la gráfica de la tienda pero sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, análogamente divide el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ en dos subintervalos $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$, y sobre cada uno de ellos dibuja un segmento de pendiente 2^2 y $-(2^2)$. Por lo tanto la función T^2 divide el intervalo $[0, 1]$ en 2^2 intervalos de igual longitud.

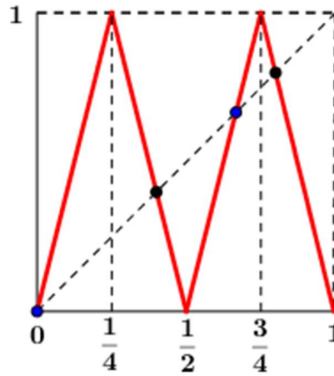


Figura 2.3: Gráfica de la iteración T^2

En esta figura podemos observar que la gráfica de T^2 se interseca con la función identidad en 4 puntos, los puntos azules son puntos fijos y los dos puntos negros son los puntos de periodo 2, hallados anteriormente de forma algebraica; es decir, los puntos negros representan $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$. Además, de esta manera podemos asegurar que no existen más puntos de periodo 2.

Puntos de periodo 3 bajo T . Realizando un análisis similar al anterior, un punto $x_2 \in X$ de periodo 3 tiene varias posibilidades de hallarse, una de ellas es que $x_2 \in (0, \frac{1}{2})$, $T(x_2) \in (0, \frac{1}{2})$, $T^2(x_2) \in (0, \frac{1}{2})$ y $T^3(x_2) \in (\frac{1}{2}, 1)$. Esto es,

$$\begin{aligned} T(x_2) &= 2x_2 \\ T^2(x_2) &= 4x_2 \\ T^{(3)}(x_2) &= 2 - 8x_2 \\ 2 - 8x_2 &= x_2 \\ x_2 &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{2}{9}$ es un punto de periodo 3. Observemos la órbita del punto $\frac{2}{9}$.

$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \dots \right\}$$

por la proposición 1.19, los puntos $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{9}$ también son de periodo 3.

A continuación se presenta la gráfica del punto $\frac{2}{9}$ al aplicarle T tres veces.

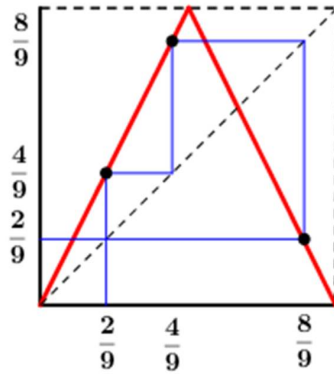


Figura 2.4: Puntos de periodo 3 bajo T

Para esbozar la gráfica de la iteración T^3 , vemos que $T^3 = T(T^2)$. Como T^2 tiene 4 intervalos al aplicarle T , divide cada intervalo en dos de igual longitud, por lo tanto T^3 divide el intervalo $[0, 1]$ en 2^3 intervalos de igual longitud y sobre cada uno de ellos dibuja un segmento de recta cuya pendiente toma el valor de 2^3 o $-(2^3)$.

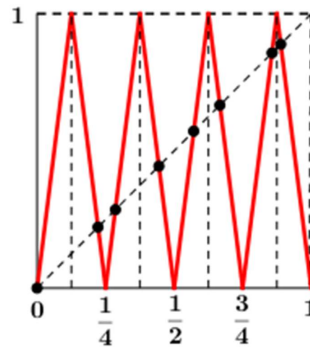


Figura 2.5: Gráfica de la iteración T^3

Observando la figura 2.5, podemos notar que aparecen 8 puntos, dos de ellos puntos fijos y 6 puntos de periodo 3. Tres de estos seis son los puntos $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{9}$. Los otros tres representan otro ciclo del mismo periodo. No es difícil ver que estos puntos son $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{6}{7}$.

Continuando con este proceso, es fácil concluir que encontrar puntos periódicos es equivalente a solucionar la ecuación $T^n(x) = x$.

Siguiendo el mismo razonamiento de las iteraciones T^2 y T^3 , podemos anticipar el comportamiento de la iteración T^n . Esta iteración divide el intervalo $[0, 1]$ en 2^n subintervalos de la forma $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ con $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ y dibuja un segmento con pendiente 2^n o $-(2^n)$ sobre cada uno de ellos.

La siguiente proposición permite formalizar las ideas intuitivas que esbozamos acerca de la iteración T^n , nos muestra que T^n transforma el intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ con $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, en el intervalo $[0, 1]$.

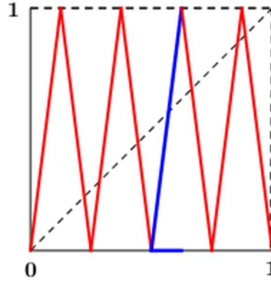


Figura 2.6: Transformación del intervalo $[\frac{l}{2^3}, \frac{l+1}{2^3}]$ en $[0, 1]$ con T^3

Proposición 2.2. Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente

- La función restricción $T^n \upharpoonright_{[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]}: [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo.
- La regla de correspondencia de T^n en $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ es

$$T^n(x) = \mu + (-1)^l 2^n x,$$

donde μ es un número entero. Por lo tanto, en cada intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ la gráfica de T^n es un segmento de recta cuya pendiente es 2^n , si l es par, y es $-(2^n)$, si l es impar.

Demostración. Veamos que la afirmación se cumple para $n = 1$.

Para este caso $l \in \{0, 1\}$. Si $l = 0$, entonces $T: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo ya que en este intervalo

$$T(x) = 2x = 0 + (-1)^0 2x$$

Si $l = 1$, entonces $T: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo ya que en este intervalo

$$T(x) = 2 - 2x = 2 + (-1)^1 2x$$

Supongamos que la afirmación se cumple para $n = k$. Es decir para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$

$$T^k \upharpoonright_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}: [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}] \rightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además en cada intervalo $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$ la regla de correspondencia de T^k está dada por

$$T^k(x) = \mu + (-1)^l 2^k x, \quad \text{para algún } \mu \in \mathbb{Z}.$$

Probemos que la afirmación se cumple para $n = k + 1$.

Notemos que si $l \leq 2^k - 1$, entonces

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \subset \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

y si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Si $l \leq 2^k - 1$, entonces podemos expresar la iteración T^{k+1} de la siguiente manera

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \xrightarrow{T} \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos, T^k lo es por hipótesis de inducción. Por lo tanto

$$T^{k+1} \upharpoonright_{\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right]}: \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \rightarrow [0, 1].$$

es un homeomorfismo. Por otro lado

$$x \xrightarrow{T} 2x \xrightarrow{T^k} \mu + (-1)^l 2^k 2x.$$

Por lo tanto

$$T^{k+1}(x) = \mu + (-1)^l 2^{k+1} 2x.$$

Supongamos ahora que $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces T^{k+1} es de la forma

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k} \right] \xrightarrow{T^k} [0, 1]$$

Es claro que la primera función es un homeomorfismo. Como $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces $-2^k \geq -l \geq 1 - 2^{k+1}$, $2^{k+1} - 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 \geq 0$, y $2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 \geq 0$. Así por la hipótesis de inducción la segunda función es un homeomorfismo.

Además si $x \in \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right]$, entonces

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x) &= T^k(T(x)) = T^k(2 - 2x) = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^k (2 - 2x) \\ &= \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1}-l} 2^{k+1} x. \end{aligned}$$

Sea $\mu' = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1}$. Como l y $2^{k+1} - l$ tienen la misma paridad, entonces $T^{k+1}(x) = \mu' + (-1)^l 2^{k+1} x$ con $\mu' \in \mathbb{Z}$. \square

$([0, 1], T)$ posee la propiedad de la densidad del conjunto de los puntos periódicos, antes de probar esto presentaremos dos resultados que nos serán de utilidad.

Proposición 2.3. *Sea $(a, b) \subset [0, 1]$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(a, b) = [0, 1]$*

Demostración. Como $a < b$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{b-a}{2}$. Luego existe un valor $l \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ tal que

$$\left[\frac{l}{2^m}, \frac{l+1}{2^m} \right] \subset (a, b).$$

Por la proposición 2.2 se tiene que $T^m(a, b) = [0, 1]$. \square

Ya tenemos los elementos necesarios para probar que el sistema dinámico $([0, 1], T)$ cumple con la propiedad de la densidad del conjunto $Per(T)$.

Proposición 2.4. *Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$.*

Demostración. Sea $(a, b) \subset [0, 1]$, $a < b$. Por la proposición 2.3, existe $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$ tales que el intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \subset (a, b)$. Como $T^n([\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]) = [0, 1]$, aplicando la proposición 1.17, T^n tiene un punto fijo en el intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ por lo tanto existe $x_0 \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \subset [0, 1]$ tal que $T^n(x_0) = x_0$. Por lo tanto $(a, b) \cap Per(T) \neq \emptyset$ y el conjunto de puntos periódicos $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$. \square

Además de tener el conjunto $Per(T)$ denso en $[0, 1]$, el sistema dinámico $([0, 1], T)$, cuenta con la propiedad de la transitividad, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *La función tienda $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es transitiva en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sea U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de $[0, 1]$. Entonces existe un intervalo abierto (a, b) , con $a < b$, contenido en U . Por la proposición 2.3, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$. De aquí se sigue que $T^N(U) = [0, 1]$ y, por lo tanto, $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Teorema 2.6. *La función tienda $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.*

Demostración. Se sigue de manera inmediata de las proposiciones 2.4 y 2.5. \square

2.2. SISTEMA DINÁMICO (S^1, f)

En esta sección estudiaremos un ejemplo de un sistema dinámico definido en S^1 .

Definamos la función. $f: S^1 \rightarrow S^1$, por $f(z) = z^2$, para cada $z \in S^1$. Por lo tanto

(S^1, f) es un sistema dinámico discreto.

Analicemos cómo es el comportamiento de los elementos del conjunto $Per(f)$, empecemos por mostrar algunos de sus representantes; puntos fijos, puntos de periodo 2, puntos de periodo 3 y 4.

Puntos fijos bajo f . Para que $z \in S^1$, sea un punto fijo, debe satisfacer la siguiente igualdad $f(z) = z$ esto es, $z^2 = z$, es decir, $z^2 - z = 0$, lo que es lo mismo que, $z(z - 1) = 0$, como $0 \notin S^1$, el único punto fijo es $z = 1$.

Puntos de periodo 2 bajo f . Para que $z \in S^1$, sea un punto de periodo 2, debe satisfacer la siguiente igualdad $f^2(z) = z$, es decir, $(z^2)^2 = z$, Todo se resume en resolver la ecuación $z^3 = 1$, utilizando el teorema de Moivre, se presentan las soluciones: $1, e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $e^{\frac{4\pi}{3}i}$. Como 1 es un punto fijo, existen dos puntos de periodo 2.

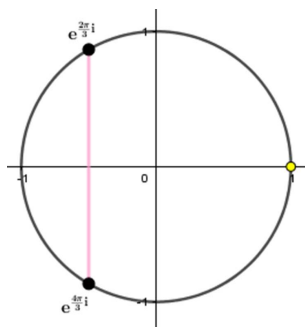


Figura 2.7: Puntos de periodo 2 bajo f

Puntos de periodo 3 y 4 bajo f . Para que $z \in S^1$ sea de periodo 3 debe satisfacer la siguiente igualdad $f^3(z) = z$ esto es:

$$\begin{aligned} \left((z^2)^2 \right)^2 &= z \\ z^8 &= z \\ z(z^7 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Una solución sería $z = 0$ pero ésta no tiene sentido ya que $0 \notin S^1$, entonces se reduce a resolver la ecuación $z^7 = 1$, análogamente los puntos $w \in S^1$ de periodo 4 deben satisfacer la igualdad $f^4(w) = w$, se reduce en resolver la ecuación $w^{15} = 1$; siguiendo el razonamiento de los puntos de periodo 2, tenemos que las soluciones de la ecuación $z^7 = 1$ son:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 & z_2 &= e^{\frac{2i\pi}{7}} \\ z_3 &= e^{\frac{4i\pi}{7}} & z_4 &= e^{\frac{6i\pi}{7}} \\ z_5 &= e^{\frac{8i\pi}{7}} & z_6 &= e^{\frac{10i\pi}{7}} \\ z_7 &= e^{\frac{12i\pi}{7}} \end{aligned}$$

Los anteriores puntos están distribuidos de la siguiente manera en sus respectivas órbitas.

$$\begin{aligned} o(1, f) &= \{1, 1, 1, \dots\} \\ o\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}, f\right) &= \left\{e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}, e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}, \dots\right\} \\ o\left(e^{\frac{6i\pi}{7}}, f\right) &= \left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}, e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}, \dots\right\} \end{aligned}$$

La siguiente es la gráfica de los puntos de periodo 3 bajo la función f al solucionar la ecuación $z^7 = 1$.

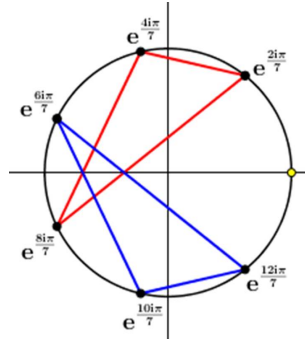


Figura 2.8: Puntos de periodo 3 bajo f

Soluciones de la ecuación $w^{15} = 1$.

$$\begin{array}{lll}
 w_1 & = & 1 \\
 w_2 & = & e^{\frac{2i\pi}{15}} \\
 w_3 & = & e^{\frac{4i\pi}{15}} \\
 w_4 & = & e^{\frac{2i\pi}{5}} \\
 w_5 & = & e^{\frac{8i\pi}{15}} \\
 w_6 & = & e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
 w_7 & = & e^{\frac{4i\pi}{5}} \\
 w_8 & = & e^{\frac{14i\pi}{15}} \\
 w_9 & = & e^{\frac{16i\pi}{15}} \\
 w_{10} & = & e^{\frac{6i\pi}{5}} \\
 w_{11} & = & e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
 w_{12} & = & e^{\frac{22i\pi}{15}} \\
 w_{13} & = & e^{\frac{8i\pi}{5}} \\
 w_{14} & = & e^{\frac{26i\pi}{15}} \\
 w_{15} & = & e^{\frac{28i\pi}{15}}
 \end{array}$$

Los anteriores puntos están distribuidos de la siguiente manera en sus respectivas órbitas.

$$\begin{array}{l}
 o(1, f) = \{1, 1, 1, \dots\} \\
 o\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}, f\right) = \left\{e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}, \dots\right\} \\
 o\left(e^{\frac{2\pi i}{15}}, f\right) = \left\{e^{\frac{2\pi i}{15}}, e^{\frac{4\pi i}{15}}, e^{\frac{8\pi i}{15}}, e^{\frac{16\pi i}{15}}, e^{\frac{2\pi i}{15}}, e^{\frac{4\pi i}{15}}, e^{\frac{8\pi i}{15}}, e^{\frac{16\pi i}{15}}, \dots\right\} \\
 o\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}, f\right) = \left\{e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, \dots\right\}
 \end{array}$$

Podemos notar que no todas las soluciones de la ecuación $w^{15} = 1$ son puntos de periodo 4, nos encontramos con puntos de periodo 1, 2 y 4.

La siguiente es la gráfica de los puntos de periodo 1, 2 y 4 bajo la función f al solucionar la ecuación $w^{15} = 1$.

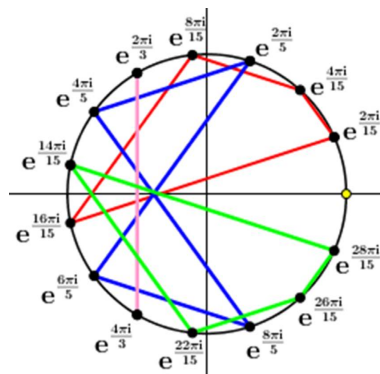


Figura 2.9: Puntos de periodo 1, 2 y 4 bajo f

Generalizando, dado $n \in \mathbb{N}$ si queremos hallar un punto de periodo n todo se reduce en resolver la ecuación $z^{2^n-1} = 1$. Utilizando el teorema de Moivre, tenemos que las soluciones están dadas por

$$z = e^{\frac{2\pi ki}{2^n-1}} \text{ con } k \in \{0, \dots, 2^n - 2\}.$$

La siguiente proposición nos dice que los puntos periódicos están repartidos por todo el conjunto S^1 .

Proposición 2.7. *Sea $f: S^1 \rightarrow S^1$, la función definida por $f(z) = z^2$, para cada $z \in S^1$. El conjunto de puntos periódicos $Per(f)$ es denso en S^1 .*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in S^1$ tales que $z_1 = e^{i\theta}$ y $z_2 = e^{i\phi}$, donde $0 \leq \theta \leq \phi \leq 2\pi$. Sea $A = \{e^{i\varphi} \in S^1 : \theta < \varphi < \phi\}$, abierto de S^1 . Probemos que existe un punto periódico en A . Utilizando la propiedad arquimediana tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < \left(\frac{\phi - \theta}{2\pi}\right) n \leq \left(\frac{\phi - \theta}{2\pi}\right) (2^n - 1).$$

Así, $1 < \left(\frac{\phi - \theta}{2\pi}\right) (2^n - 1)$, lo que es lo mismo, $\frac{2\pi}{2^n-1} < \phi - \theta$.

Por lo tanto el complejo $z_0 = e^{\frac{2\pi}{2^n-1}}$ pertenece al abierto A y $z_0 \in Per(f)$. \square

Daremos los aspectos generales para concluir que el sistema dinámico (S^1, f) es transitivo. Consideremos dos abiertos U, V en S^1 , estos abiertos son arcos en S^1 , (ver figura 2.10) la función f duplica la longitud del abierto U , por lo tanto existirá $n \in \mathbb{N}$, tal que $V \subset f^n(U)$. Por lo tanto el sistema dinámico (S^1, f) es transitivo y por la proposición 2.7, el sistema dinámico es caótico.

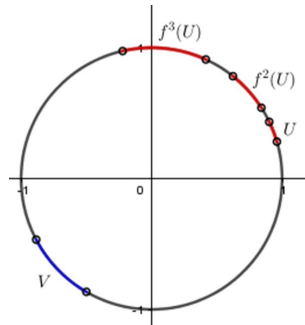


Figura 2.10: Función f aplicada a un intervalo U

2.3. TEOREMA DE BANKS

Hemos presentado dos sistemas dinámicos discretos con el conjunto de sus puntos periódicos denso en el espacio. Como vimos en el capítulo 1, cada sistema dinámico induce un nuevo sistema dinámico.

Observemos cómo es el sistema dinámico inducido por $([0, 1], T)$.

El hiperespacio asociado a $[0, 1]$, está dado por

$$2^{[0,1]} = \{A \subset [0, 1] \mid A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}.$$

y la función inducida $2^T: 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$, está dada por

$$2^T(A) = \{T(a) \mid a \in A\} = T(A).$$

Al sistema dinámico $(2^{[0,1]}, 2^T)$ le podríamos realizar un análisis similar al de la tienda, y estudiar cómo es el comportamiento de sus puntos periódicos e intentar averiguar si conserva la propiedad de la densidad del conjunto $Per(2^T)$. El teorema de Banks nos dice que si un sistema dinámico tiene el conjunto de sus puntos periódicos denso, el sistema dinámico inducido conserva dicha propiedad.

Teorema 2.8 (J. Banks). *Dado X un espacio métrico junto con una función continua $f: X \rightarrow X$ y 2^X el hiperespacio asociado a X junto con la función inducida $2^f: 2^X \rightarrow 2^X$. Si el conjunto $Per(f)$ es denso en X entonces el conjunto $Per(2^f)$ es denso en 2^X .*

Demostración. Sea \mathcal{V} un abierto en 2^X probemos que $\mathcal{V} \cap Per(2^f) \neq \emptyset$, como \mathcal{V} es abierto, existe una cantidad finita de abiertos U_1, U_2, \dots, U_n en X tal que $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$. Por hipótesis tenemos que el conjunto $Per(f)$ es denso en X . Así, para cada U_i con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $U_i \cap Per(f) \neq \emptyset$; esto quiere decir que existe $p_i \in U_i$ tal que p_i es punto periódico bajo f en X , luego para algún $m_i \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{m_i}(p_i) = p_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consideremos ahora como $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Es claro que este conjunto es cerrado por ser finito, por lo tanto $A \in 2^X$. Veamos que A es un elemento periódico bajo 2^f en 2^X . Sea $q = \text{mcm}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, por la proposición 1.19, se tiene que $f^q(p_i) = p_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, aplicando la función inducida a A se obtiene que:

$$(2^f)^q(A) = \{f^q(p_1), f^q(p_2), \dots, f^q(p_n)\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = A$$

De lo anterior A es un elemento periódico bajo 2^f . Nótese que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ luego $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$. Así $Per(2^f)$ es denso en 2^X . \square

Por el teorema anterior, los conjuntos $Per(2^T)$ y $Per(2^f)$ son densos en los hiperespacios $2^{[0,1]}$ y 2^{S^1} respectivamente.

Hemos llevado a buen término el objetivo de este capítulo, ahora conocemos en cierta medida la relación entre un sistema dinámico y su sistema dinámico inducido respecto a la densidad del conjunto de puntos periódicos, pero de este proceso surge una gran inquietud que será tratada en el siguiente capítulo.

3. RECÍPROCO DEL TEOREMA DE BANKS

En este capítulo mostramos que el recíproco del teorema de Banks en general, no es cierto. Empezaremos mostrando que si $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua entonces la densidad de $Per(2^f)$ implica la densidad del conjunto $Per(f)$. Seguidamente construimos ejemplos, donde esta implicación no se tiene.

3.1. DINÁMICA SOBRE EL CONTINUO $[0, 1]$

En el segundo capítulo, el primer ejemplo estaba definido sobre el intervalo $[0, 1]$ de la recta real \mathbb{R} ; empecemos por analizar qué sucede con el recíproco de Banks en este intervalo.

La siguiente proposición nos aclara cómo es la relación entre un sistema dinámico y su sistema dinámico inducido respecto a la densidad del conjunto de puntos periódicos en el intervalo $[0, 1]$.

Proposición 3.1. *Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Si el conjunto de los puntos periódicos de 2^f es denso en $2^{[0,1]}$, entonces el conjunto de puntos periódicos de f es denso en $[0, 1]$.*

Demostración. Sean $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. Así $(a, b) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Por hipótesis $2^f: 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ tiene densidad de puntos periódicos, por lo tanto existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$H(\{x_0\}, A) < \epsilon \quad \text{y} \quad f^m(A) = A;$$

por lo tanto $A \subset (a, b)$. Sean $\alpha = \min A$ y $\beta = \max A$. Como $A \subset (a, b)$ se tiene que $a < \alpha \leq \beta < b$, además $f(A) = A$, entonces

$$\alpha \geq f^m(\alpha) \quad \text{y} \quad f^m(\beta) \leq \beta.$$

Como f^m es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la proposición 1.17, tenemos que existe un $c \in [\alpha, \beta]$ tal que $f^m(c) = c$.

Por lo tanto $Per(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$. □

Parece que hemos empezado por buen camino, en el intervalo $[0, 1]$ el recíproco del teorema de Banks se cumple con rigurosidad gracias a la continuidad de la función, pero $[0, 1]$ no deja de ser un caso particular.

El siguiente sistema dinámico que presentaremos corta de un tajo cualquier posibilidad de que el recíproco de Banks se generalice a cualquier sistema dinámico con dicha propiedad. Este sistema dinámico no posee ningún punto periódico, pero en su sistema dinámico inducido el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio.

3.2. SISTEMA DINÁMICO $(\prod_{n=1}^{\infty} S_n^1, g)$

En el capítulo dos se presentó un sistema dinámico sobre el espacio S^1 con el conjunto de sus puntos periódicos densos, para este nuevo sistema dinámico el espacio es el producto numerable de S^1 .

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el nuevo espacio X , estará dado por $X = \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1$, donde $S_n^1 = S^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$X = \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots) \mid t_n \in S^1, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto X está dotado por la métrica

$$\mathbf{d}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(t_n, s_n)}{2^n} \text{ con } \mathbf{t}, \mathbf{s} \in X;$$

donde $d(t_n, s_n) = \|t_n - s_n\|$, es la métrica sobre el conjunto de los números complejos \mathbb{C} .

Solo resta definir la función g de X en sí mismo, para ello primero definamos la siguiente familia de funciones.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $g_n: S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$g_n(z) = g_n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})},$$

donde cada función g_n es una rotación en S^1 de ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

Proposición 3.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La función $g_n: S^1 \rightarrow S^1$ es continua.*

Demostración. Sea $z \in S^1$ con $z = e^{i\theta}$ y $\epsilon > 0$, para cada $w = e^{i\phi} \in S^1$ con $\|z - w\| < \delta = \epsilon$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|g_n(z) - g_n(w)\| &= \|e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})} - e^{i(\phi + \frac{2\pi}{n})}\| = \|e^{i\theta} e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\phi} e^{i\frac{2\pi}{n}}\| \\ &= \|(e^{i\theta} - e^{i\phi}) e^{i\frac{2\pi}{n}}\| \\ &= \|e^{i\theta} - e^{i\phi}\| \|e^{i\frac{2\pi}{n}}\| \\ &= \|e^{i\theta} - e^{i\phi}\| \\ &< \delta = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto g_n es una función continua. □

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ y $z \in S^1$ con $z = e^{i\theta}$, la iteración $g_n^m(z) = e^{i(\theta + \frac{2\pi m}{n})}$. Observemos la siguiente particularidad de las funciones g_n .

Sea $z \in S^1$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g_n^n(z) &= g_n^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{2\pi n}{n})} \\ &= e^{i\theta + 2\pi} \\ &= e^{i\theta}, \end{aligned}$$

esto quiere decir que todo punto $z \in S^1$ es periódico bajo g_n de periodo n , por lo tanto $Per(g_n) = S^1$.

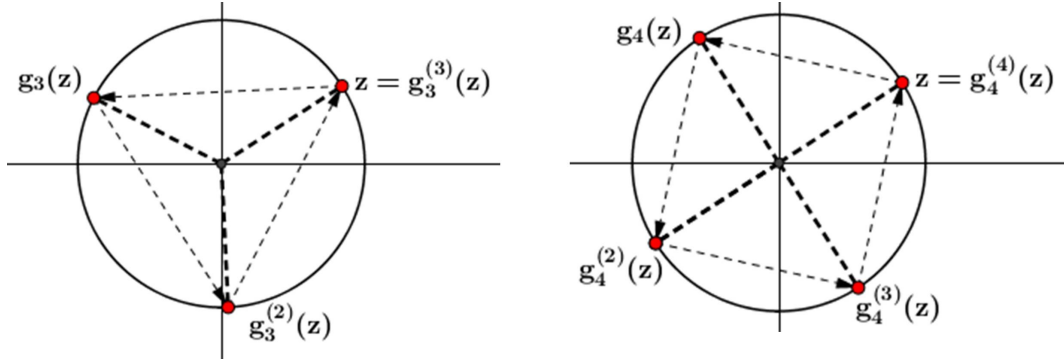


Figura 3.1: Iteraciones de las funciones g_3 y g_4 sobre el punto $z = e^{i\frac{4}{7}}$.

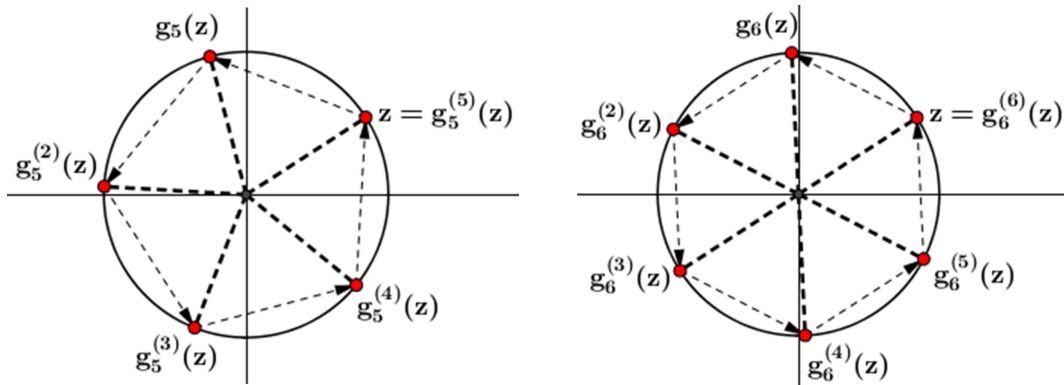


Figura 3.2: Iteraciones de las funciones g_5 y g_6 sobre el punto $z = e^{i\frac{4}{7}}$.

Teniendo en cuenta las funciones $g_n: S^1 \rightarrow S^1$, sea

$$g: \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1 \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1$$

dada por

$$g(\mathbf{t}) = g(t_1, t_2, t_3, \dots) = (g_1(t_1), g_2(t_2), g_3(t_3), \dots)$$

Por la proposición 3.2 cada componente de g es una función continua, por lo tanto g es continua.

Probemos que (X, g) no tiene puntos periódicos.

Proposición 3.3. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1$ y $g: X \rightarrow X$ con $g(t) = g(t_1, t_2, t_3, \dots) = (g_1(t_1), g_2(t_2), g_3(t_3), \dots)$. Entonces g no tiene puntos periódicos.

Demostración. Supongamos que existe un $\mathbf{s} \in X$ y un $m \in \mathbb{N}$ tales que $g^m(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_n^m(x_n) = (x_n)$. Como x_n es de periodo n bajo g_n , entonces por la proposición 1.19, n divide a m para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto claramente es una contradicción, pues, basta tomar $n > m$. Por lo tanto $Per(g) = \emptyset$. \square

Proposición 3.4. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1$ y $g: X \rightarrow X$ con $g(t) = g(t_1, t_2, t_3, \dots) = (g_1(t_1), g_2(t_2), g_3(t_3), \dots)$. El conjunto $Per(2^g)$ es denso en 2^X .

Demostración. Realizaremos esta prueba en dos partes

i. Sean $\mathbf{t} \in X$ con $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ y $\epsilon > 0$.

El conjunto $\{\mathbf{t}\}$ es un elemento de 2^X .

Probemos que existe un $E \in 2^X$ y $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$(2^g)^m(E) = E \quad \text{y} \quad H(\{\mathbf{t}\}, E) < \epsilon.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\text{diám}(S^1)}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, con $\text{diám}(S^1)$ el diámetro de S^1 .

Sea $m = \text{mcm}\{1, \dots, k\}$, para cada t_i , con $1 \leq i \leq k$, se tiene que $g_i^m(t_i) = t_i$, por la proposición 1.19.

Como las primeras k coordenadas de \mathbf{t} y $g^m(\mathbf{t})$ coinciden, se tiene que

$$\mathbf{d}(\mathbf{t}, g^m(\mathbf{t})) < \frac{\epsilon}{2}$$

Además, para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que \mathbf{t} y $g^{jm}(\mathbf{t})$ coinciden en las primeras k coordenadas. Así, $\mathbf{d}(\mathbf{t}, g^{jm}(\mathbf{t})) < \frac{\epsilon}{2}$. Esto implica que $o(\mathbf{t}, g^m)$ está contenida en la bola $B(\mathbf{t}, \frac{\epsilon}{2})$.

Sea $\omega(\{\mathbf{t}\}, g^m)$ el omega conjunto límite definido en 1.24. Por la proposición 1.26, $\omega(\{\mathbf{t}\}, g^m) \neq \emptyset$. Además, es claro que $w(\mathbf{t}, g^m) \subset \overline{B(\mathbf{t}, \frac{\epsilon}{2})}$.

Sea $E = w(\mathbf{t}, g^m)$. Tenemos que E es un subconjunto compacto de X . Por la proposición 1.27. Además $(2^g)^m(E) = g^m(E) = E$, por la proposición 1.28. De lo anterior, $H(\{\mathbf{t}\}, E) < \epsilon$ y $E \in Per(2^g)$.

ii. Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Como A es compacto, existen l puntos en A , $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$, tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^l B(\mathbf{a}_i, \frac{\epsilon}{2})$.

Por cada punto \mathbf{a}_i con $1 \leq i \leq l$ consideremos un conjunto compacto E_i como se realizó en el item i. y un número natural n_i tales que

$$H(\{\mathbf{a}_i\}, E_i) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad g^{n_i}(E_i) = E_i$$

Sea $E = \bigcup_{i=1}^l E_i$ y sea n igual al mínimo común múltiplo de los números n_1, \dots, n_l .

Entonces $(2^g)^n(E) = g^n(E) = E$ y $H(A, E) < \epsilon$.

Por lo tanto $Per(2^g)$ es denso en 2^X .

□

El sistema dinámico (S_n^1, g) nos dice que no siempre que tengamos un sistema dinámico inducido con su conjunto de puntos periódicos denso, el sistema dinámico base tendrá dicha propiedad.

3.3. ODÓMETRO

En esta sección presentamos un sistema dinámico con un espacio disconexo, analizaremos la relación con su sistema dinámico inducido respecto a la densidad del conjunto de puntos periódicos. Sea $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $x_n \in \{0, 1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto \mathcal{C} junto con la métrica:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \text{ con } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C},$$

es conocido como **el espacio de Cantor**. Sabemos que \mathcal{C} es compacto, totalmente disconexo y perfecto.⁹

Consideremos ahora la función $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ llamada **odómetro** definida del espacio de Cantor en sí mismo.

Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ con $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$

$$h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \begin{cases} (1, x_2, x_3, x_4, \dots) & \text{si } x_1 = 0; \\ (0, \dots, 0, 1, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) & \text{si } x_1 = \dots = x_{k-1} = 1 \text{ y } x_k = 0. \end{cases}$$

Observemos que al aplicarle h a la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$, obtenemos que $h(1, 1, 1, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$. Otra manera de comprender el funcionamiento del odómetro es conside-

rar la sucesión $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{C}$, la función h toma una sucesión de \mathcal{C} y le suma la sucesión $\mathbf{1}$ de la siguiente manera:

Dada la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ con $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$, observamos que $a_1 = 0$, así $h((a_n)_{n=1}^{\infty})$ está dada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \end{array}$$

■ $1 + 0 = 1$

■ $0 + 0 = 0$

⁹KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. Sistemas Dinámicos Discretos. Mexico: Editorial UNAM, 2014. p.91.

Consideremos ahora una sucesión de la forma $(b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ con $(b_n)_{n=1}^\infty = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, observamos que $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ y $b_4 = 0$ así $h((b_n)_{n=1}^\infty)$ está dada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc} + & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \end{array}$$

Consideremos como $(c_n)_{n=1}^\infty = (b_n)_{n=1}^\infty + \mathbf{1}$, de esta manera:

- $c_1 = 1 + 1 = 2$ aplicando módulo 2 obtenemos $2(\text{mod}2) = 0$ llevando una unidad a la siguiente posición.
- $c_2 = 1 + 1 + 0 = 2(\text{mod}2) = 0$.
- $c_3 = 1 + 1 + 0 = 2(\text{mod}2) = 0$.
- $c_4 = 1 + 0 + 0 = 1$ de ahí en adelante $c_n = b_n$.

Estas son algunas propiedades de la función odómetro.

Proposición 3.5. *La función h es un biyectiva.*

Demostración. Debemos probar que h es inyectiva y sobreyectiva.

1. La función h es inyectiva.

Sea $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ tal que $(a_n)_{n=1}^\infty \neq (b_n)_{n=1}^\infty$, sea $k \geq 1$, supongamos que la coordenada k -ésima es la primera en la que difiere $(a_n)_{n=1}^\infty$ de $(b_n)_{n=1}^\infty$, es decir, $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq k - 1$. Como $a_k \neq b_k$ alguna de estas dos coordenadas es 0 y la otra es 1, sin pérdida de generalidad supongamos que $a_k = 0$ y $b_k = 1$, así:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=1}^\infty &= (a_1, a_2, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots), \text{ y} \\ (b_n)_{n=1}^\infty &= (a_1, a_2, \dots, 1, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots). \end{aligned}$$

$h((a_n)_{n=1}^\infty)$ difiere de $h((b_n)_{n=1}^\infty)$ en la k -ésima coordenada por lo tanto

$$h((a_n)_{n=1}^\infty) \neq h((b_n)_{n=1}^\infty).$$

2. La función h es sobreyectiva. Sea $(b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ y consideremos dos casos:

Caso 1. si $b_1 = 1$ entonces consideremos la sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $a_1 = 0$ y $a_i = b_i$ para todo $i > 1$ con $i \in \mathbb{N}$, es claro que $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ y $h((a_n)_{n=1}^\infty) = (b_n)_{n=1}^\infty$.

caso 2. si $b_i = 0$ con $1 \leq i \leq k - 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $b_k = 1$, consideremos la sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $a_i = 1$ con $1 \leq i \leq k - 1$ y $a_k = 0$ además $a_{k+n} = b_{k+n}$ con $n \in \mathbb{N}$, claramente $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ y $h((a_n)_{n=1}^\infty) = (b_n)_{n=1}^\infty$; por lo tanto h es sobreyectiva

Por 1. y 2. la función h es biyectiva. □

Antes de probar que h es continua, se mostraran algunos resultados que se utilizarán en dicha prueba.

Lema 3.6. *Sea $k \leq 1$. Sean $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$. Si $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, entonces sus respectivas imágenes $h((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h((b_n)_{n=1}^\infty)$ también tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales.*

Demostración. Sean $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$, supongamos que $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, es decir

$$(a_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots),$$

$$(b_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3}, \dots).$$

Supongamos primero que $x_1 = 0$, así:

$$h((a_n)_{n=1}^\infty) = (1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots)$$

$$h((b_n)_{n=1}^\infty) = (1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3}, \dots)$$

Supongamos ahora que para algún l , $1 \leq l \leq k$, se tiene que $x_l = 0$ y $x_i = 1$ para cada $1 \leq i \leq l - 1$. Así

$$h((a_n)_{n=1}^\infty) = (0, 0, \dots, 0, 1, x_{l+1}, \dots, x_k, x_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots) \text{ y}$$

$$h((b_n)_{n=1}^\infty) = (0, 0, \dots, 0, 1, x_{l+1}, \dots, x_k, x_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3}, \dots).$$

Por último, si $x_i = 1$ para $1 \leq i \leq k + 1$, entonces para cada $1 \leq i \leq k$ la i -ésima coordenada de la sucesión $h((a_n)_{n=1}^\infty)$ es igual a la i -ésima coordenada de la sucesión $h((b_n)_{n=1}^\infty)$, ambas iguales a cero; por lo tanto hemos probado que si dos sucesiones tienen sus primeras $k + 1$ coordenadas iguales, sus imágenes también coincidirán en sus primeras $k + 1$ coordenadas. \square

Generalizando, el resultado del lema anterior, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *Sean $k \leq 1$ y $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$. Si $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $h^n((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h^n((b_n)_{n=1}^\infty)$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales.*

Demostración. Realizaremos una prueba por inducción:

$n = 1$. Se tiene por el lema 3.6.

Supongamos que para $n = k$, $h^{(k)}((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h^{(k)}((b_n)_{n=1}^\infty)$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales.

Probemos que $h^{k+1}((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h^{k+1}((b_n)_{n=1}^\infty)$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales.

Sabemos que,

$$h^{k+1}((a_n)_{n=1}^\infty) = h(h^k((a_n)_{n=1}^\infty))$$

$$h^{k+1}((b_n)_{n=1}^\infty) = h(h^k((a_n)_{n=1}^\infty)).$$

Por hipótesis de inducción $h^k((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h^k((b_n)_{n=1}^\infty)$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales y aplicando el paso básico la prueba queda terminada. \square

Un hecho importante que se deriva del lema anterior es el siguiente:

Dadas dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$. Supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$d((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty) < \frac{1}{2^k}$$

Entonces las sucesiones $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, entonces las sucesiones $h^n((a_n)_{n=1}^\infty)$ y $h^n((b_n)_{n=1}^\infty)$ tendrán sus primeras $k + 1$ coordenadas iguales por lo tanto

$$d(h^n((a_n)_{n=1}^\infty), h^n((b_n)_{n=1}^\infty)) \leq \frac{1}{2^k}$$

Con estos dos resultados que acabamos de enunciar ya podemos demostrar que la función h es continua.

Proposición 3.8. *La función odómetro h es continua.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$, $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Sea $(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$ tal que

$$d((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) < \frac{1}{2^k}.$$

Luego por la consecuencia del lema 3.6 tenemos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, por lo tanto $h((x_n)_{n=1}^\infty)$ y $h((y_n)_{n=1}^\infty)$ también. Por lo tanto,

$$d(h((x_n)_{n=1}^\infty), h((y_n)_{n=1}^\infty)) \leq \frac{1}{2^k} < \epsilon.$$

Así hemos probado que el odómetro es una función continua. \square

Por la proposición 3.5, h tiene inversa, además como \mathcal{C} es compacto h^{-1} es continua, por lo tanto la función h es un homeomorfismo.

Lo primero que haremos es probar que el conjunto $Per(h) = \emptyset$, antes analicemos el comportamiento de la sucesión $\mathbf{0}$, al aplicarle las iteraciones h^n .

Consideremos la sucesión $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots)$ y observemos cómo se desarrolla su órbita $o(\mathbf{0}, h)$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0} & = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^8(\mathbf{0}) & = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h(\mathbf{0}) & = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^9(\mathbf{0}) & = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^2(\mathbf{0}) & = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^{10}(\mathbf{0}) & = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^3(\mathbf{0}) & = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^{11}(\mathbf{0}) & = 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^4(\mathbf{0}) & = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^{12}(\mathbf{0}) & = 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^5(\mathbf{0}) & = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^{13}(\mathbf{0}) & = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^6(\mathbf{0}) & = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & h^{14}(\mathbf{0}) & = 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ . \ . \ . \\ h^7(\mathbf{0}) & = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ . \ . \ . & & \end{array}$$

Podemos observar que para $h(\mathbf{0})$ y $h^2(\mathbf{0})$, aparecen, respectivamente 1 y 0 en la primera coordenada, para las siguientes 4 iteraciones aparecen todos los bloques de 0's y 1's de longitud dos en las primeras coordenadas, luego en las siguientes ocho iteraciones, aparecen todos los bloques posibles de 0's y 1's de longitud tres en las primeras 3 coordenadas, y así sucesivamente. Es claro que, eventualmente cualquier bloque de 0's y 1's de longitud n va a aparecer en las primeras n coordenadas de alguna iteración. Esto nos hace pensar que la órbita de la sucesión $\mathbf{0}$ recorre todo el espacio \mathcal{C} , este hecho quedara plasmado en la siguiente proposición.

Proposición 3.9. *La órbita de $\mathbf{0}$ es densa en \mathcal{C} .*

Demostración. Sean

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in \mathcal{C}$$

y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Lo que se pretende es encontrar una iteración de la órbita de $\mathbf{0}$ que pertenezca a la bola de centro en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y radio ϵ . Para que la iteración pertenezca solo es necesario que coincidan las primeras $n + 1$ coordenadas de la iteración con la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Observando la lista de iteraciones de la órbita de $\mathbf{0}$ podemos deducir que los bloques de 0's y 1's de tamaño $n + 1$ aparecen a partir de la posición

$$P = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Es decir, a partir de la iteración $h^P(\mathbf{0})$.

Por lo tanto, entre

$$h^P(\mathbf{0}) \text{ y } h^{P+2^{n+1}}(\mathbf{0})$$

hay una iteración de $\mathbf{0}$, supongamos $h^q(\mathbf{0})$, con las primeras $n + 1$ coordenadas deseadas.

Por lo tanto

$$d((x_n)_{n=1}^{\infty}, h^q(\mathbf{0})) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Con lo cual queda demostrada la proposición. □

Ahora consideremos el siguiente resultado que nos ilustra acerca del comportamiento de las órbitas de los puntos de \mathcal{C} bajo la función h .

Teorema 3.10. *Bajo la función $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, la órbita de toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ forma un conjunto denso en \mathcal{C} .*

Demostración. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ y $\epsilon > 0$.

Debemos probar que existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(h^p(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \epsilon$.

Utilicemos la proposición 3.9 que nos dice que la órbita de la sucesión $\mathbf{0}$ es densa en \mathcal{C} , por este hecho existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(h^l(\mathbf{0}), (x_n)_{n=1}^{\infty}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (1)$$

De la misma manera existe un $m > l$ tal que

$$d(h^m(\mathbf{0}), (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2)$$

Partiendo de la desigualdad (1) y teniendo en cuenta el lema 3.6, obtenemos la siguiente desigualdad.

$$d(h^{l+(m-l)}(\mathbf{0}), h^{(m-l)}((x_n)_{n=1}^\infty)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Así

$$\begin{aligned} d(h^{m-l}((x_n)_{n=1}^\infty), (y_n)_{n=1}^\infty) &\leq \\ d(h^{m-l}((x_n)_{n=1}^\infty), h^{l+(m-l)}(\mathbf{0})) + d(h^{l+(m-l)}(\mathbf{0}), (y_n)_{n=1}^\infty) &< \\ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} &= \epsilon \end{aligned}$$

Luego el número natural que buscábamos es $p = m - l > 0$.

Por lo tanto hemos demostrado que la órbita de cualquier sucesión en \mathcal{C} forma un conjunto denso en el mismo. \square

Una consecuencia del teorema 3.10 es el siguiente corolario.

Corolario 3.11. *La función $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ no tiene órbitas periódicas.*

Demostración. Por el teorema 3.10 todas las órbitas bajo la función h son densas, así ninguna sucesión de \mathcal{C} tiene órbita finita. \square

Lo que nos dice este teorema es que el conjunto $Per(h) = \emptyset$

Probemos ahora que el sistema inducido $(2^{\mathcal{C}}, 2^h)$ posee el conjunto de sus puntos periódicos $Per(2^h)$ denso en $2^{\mathcal{C}}$.

Analicemos como son los elementos en $Per(2^h)$.

En los cursos de topología se prueba que la colección de conjuntos

$$\mathbf{C}[x_1, \dots, x_k] = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_i = x_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\} \quad (*)$$

donde $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ forman una base de abiertos-cerrados para \mathcal{C} .

Al ser $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_k]$ un conjunto cerrado, $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_k] \in 2^{\mathcal{C}}$.

Consideremos el siguiente conjunto en $2^{\mathcal{C}}$, $\mathbf{C}[0] = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 0\}$, observemos que al aplicarle la función 2^h obtenemos

$$2^h(\mathbf{C}[0]) = h(\mathbf{C}[0]) = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 1\} = \mathbf{C}[1]$$

Si ahora le aplicamos 2^h a $\mathbf{C}[1]$ obtenemos $\mathbf{C}[0]$ formandose un ciclo, ver **3.3**, esto quiere decir que

$$(2^h)^2(\mathbf{C}[0]) = \mathbf{C}[0]$$

Por lo tanto $\mathbf{C}[0] \in Per(2^h)$ y tiene periodo 2.

Si consideramos ahora los conjuntos $\mathbf{C}[x_1, x_2] \in 2^{\mathcal{C}}$ donde $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$, notamos que existen 2^2 posibles combinaciones. $\mathbf{C}[0, 0]$, $\mathbf{C}[0, 1]$, $\mathbf{C}[1, 0]$ y $\mathbf{C}[1, 1]$, tal que

$$2^h(\mathbf{C}[0, 0]) = h(\mathbf{C}[0, 0]) = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 1 \text{ y } y_2 = 0\} = \mathbf{C}[1, 0]$$

$$2^h(\mathbf{C}[1, 0]) = h(\mathbf{C}[1, 0]) = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 0 \text{ y } y_2 = 1\} = \mathbf{C}[0, 1]$$

$$2^h(\mathbf{C}[0, 1]) = h(\mathbf{C}[0, 1]) = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 1 \text{ y } y_2 = 1\} = \mathbf{C}[1, 1]$$

$$2^h(\mathbf{C}[1, 1]) = h(\mathbf{C}[1, 1]) = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C} \mid y_1 = 0 \text{ y } y_2 = 0\} = \mathbf{C}[0, 0]$$

Obteniéndose de esta forma un nuevo ciclo, ver 3.3 tal que

$$(2^h)^{2^2}(\mathbf{C}[0, 0]) = \mathbf{C}[0, 0]$$

Por lo tanto $\mathbf{C}[0, 0] \in \text{Per}(2^h)$ y tiene periodo 2^2 .

El ciclo de los conjuntos $\mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ puede observarse en 3.3.

Generalizando tenemos que para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(2^h)^{2^k}(\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_k]) = \mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_k]$$

Probemos que $\text{Per}(2^h)$ es denso en $2^{\mathcal{C}}$.

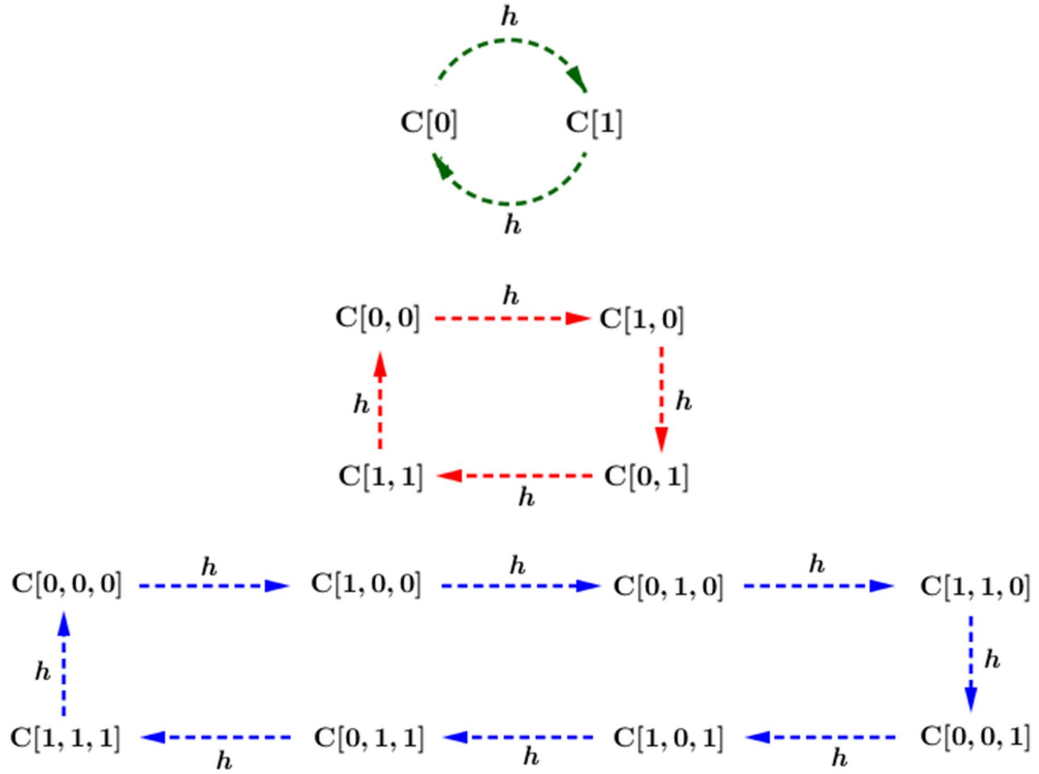


Figura 3.3: Ciclos

Proposición 3.12. *El conjunto $\text{Per}(2^h)$ es denso en $2^{\mathcal{C}}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = \langle W \rangle$ un abierto en $2^{\mathcal{C}}$, con V abierto en \mathcal{V} , como W es un abierto en \mathcal{C} , por (*), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_k] \subset W$ y como se dijo anteriormente $\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_k] \in 2^{\mathcal{C}}$, además $\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_k] \in \text{Per}(2^h)$, por lo tanto $\text{Per}(2^h)$ es denso en $2^{\mathcal{C}}$

□

3.4. ODÓMETRO Y EL CONO DE CANTOR

Sean $X = \mathcal{C} \times [0, 1] / \mathcal{C} \times \{1\}$. X se denota por $Cono(\mathcal{C})$ y es llamado el cono de Cantor. (Ver figura 3.4). El punto $\mathcal{C} \times \{1\}$ en X lo llamaremos vértice y lo denotaremos por $v = \mathcal{C} \times \{1\}$. Definamos $F: X \rightarrow X$, para cada $a \in X$, por

$$F(a) = \begin{cases} v & \text{si } a = v; \\ (h(x), t) & \text{si } a = (x, t), \end{cases}$$

donde $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es el odómetro definido en la sección 3,3,3.

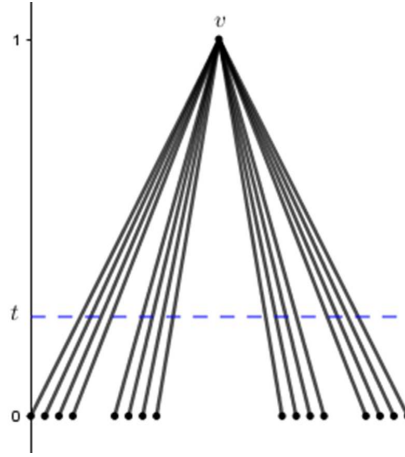


Figura 3.4: Cono de Cantor

Proposición 3.13. *El conjunto $Per(F) = \{v\}$, donde v es el vértice de X .*

Demostración. Sea $a \in X$, supongamos que $a = v$, el vértice, entonces, por definición $F(a) = v$, esto quiere decir que el vértice v es un punto fijo de F , por lo tanto $v \in Per(F)$. Supongamos ahora que $a \neq v$, y $a \in Per(F)$, entonces, $a = (x, t)$ con $x \in \mathcal{C}$ y $t \in [0, 1)$. Entonces existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que, $F^k(x, t) = (x, t)$. Pero $F^k(x, t) = (h^k(x), t)$, es decir $h^k(x) = x$, lo que contradice el corolario 3.11. Por lo tanto $Per(F) = \{v\}$. \square

Proposición 3.14. *El conjunto $Per(2^F)$ es denso en 2^X .*

Demostración. Sea $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ abierto de 2^X , donde U_1, \dots, U_n son abiertos no vacíos de X . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $(x_i, t_i) \in U_i$, con $t_i \neq 1$. Usando el argumento de la proposición 3.12, existe $A_i = \mathcal{C}[x_1^i, \dots, x_{k_i}^i]$ cerrado de \mathcal{C} tal que $A_i \times \{t_i\} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, existe $m_i \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $h^{m_i}(A_i) = A_i$. Así, $F^{m_i}(A_i \times \{t_i\}) = (h^{m_i}(A_i) \times \{t_i\})$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $B = \bigcup_{i=1}^n A_i \times \{t_i\}$. Es claro que $B \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Además si $m = \text{mcm}\{m_1, \dots, m_n\}$, entonces

$$F^m(B) = \bigcup_{i=1}^n F^m(A_i \times \{t_i\}) = \bigcup_{i=1}^n A_i \times \{t_i\} = B.$$

Así, $B \in Per(2^F)$ y $Per(2^F)$ es denso en 2^X . \square

3. BIBLIOGRAFÍA

ARENAS, Gilberto y SABOGAL, Sonia. Una introducción a la geometría fractal. Colombia: Editorial UIS, 2011. p.80-86.

BANKS, John. Chaos for induced hyperspaces maps. En: Chaos, Solitons & Fractals. Agosto, 2005, vol.25 no.3., p. 681-685.

BANKS, John, *et al.* On Devaneys Definition of Chaos. En: The American Mathematical Monthly. Abril, 1992, vol.99 no.4., p. 332-334.

BLOCK, Louis Stuart y COOPEL, William Andrew. Dynamics in One Dimension. Alemania: Springer-Verlag, 1992. ISBN 3-540-55309-6

BRUCKS, Karen y BRUIN, Henk. Topics from One-Dimensional Dynamics. USA: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-83896-7

DEVANEY, Robert. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, USA: Westview Press, 2003. ISBN 0-8133-4085-3

ILLANES, Alejandro y NADLER, Sam. Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances. USA: Marcel Dekker, 1999. ISBN 0-8247-1982-4

KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. Sistemas Dinámicos Discretos. Mexico: Editorial UNAM, 2014.

MUNKRES, James. Topología. Madrid: Pearson Educación, S.A., 2002. ISBN 84-205-3180-0

NADLER, Sam. Continuum theory: an introduction. USA: Marcel Dekker, 1992. ISBN 0-8247-8659-9

NAGHMOUCHI, Issam y ABOUDA, Haithem. A note on periodic points of dendrite maps and their induced maps. En: Journal of Mathematical Analysis and Applications. Abril, 2017, vol.448 issue.1., p. 722-725.

SPITALSKÝ, Vladimír. Transitive dendrite maps with infinite decomposition ideal. En: arXiv: 1401.2343v1. Enero, 2014.