

Diseño de tareas autónomas en DGPAD para la división de un segmento en partes iguales usando el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad

Yani Natalia Gonzalez Cruz

Trabajo de Grado para optar por el Título de Licenciada en Matemáticas

Director

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Codirector

Dr. Martín Eduardo Acosta Gempeler

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2024

Agradecimientos

La culminación de este trabajo ha sido gracias al apoyo de muchas personas que me acompañaron en cada paso del camino. Especialmente mi madre Marilu Cruz, quien ha sido mi mayor inspiración y apoyo incondicional. Su amor, fortaleza y sacrificios me motivaron a no rendirme y a dar lo mejor de mí en cada momento. A Eduin Caicedo, por su constante apoyo, paciencia, palabras de aliento y por estar a mi lado en los momentos difíciles.

A mi director Luis Ángel Pérez Fernández, gracias por su comprensión y consejos, que fueron más allá de lo académico. Cada una de sus palabras me ayudó a crecer tanto personal como profesionalmente.

A mi codirector Martín Eduardo Acosta Gempeler, cuyo conocimiento y guía fueron fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

Quiero agradecer a mis amigos y compañeros, especialmente a Edwin, Karen, Andrés, Yesika y Julieth, por su apoyo, compañía y momentos compartidos durante este proceso. Gracias por las largas horas de estudio, los consejos, y las risas que hicieron más llevadero el camino.

A mis evaluadores Jorge Fiallo y Jurgen Julio, por su tiempo, dedicación y observaciones que enriquecieron este trabajo.

A los profesores de la escuela de Matemáticas que me acompañaron en mi formación, por sus enseñanzas e inspiración.

Tabla de Contenido

1. Introducción.....	12
2. Planteamiento del Problema	13
3. Antecedentes	15
4. Teoría de las Situaciones Didácticas.....	17
4.1. Aprendizaje por Adaptación	17
4.2. Situación Didáctica y Situación Adidáctica.....	19
4.3. Proceso de Validación.....	20
4.4. Proceso de Devolución	21
4.5. DGPAD-Colombia como Medio	22
5. Metodología de Investigación	24
5.1. Ingeniería Didáctica.....	24
5.2. Población de Estudio	25
6. Análisis Preliminar	26
6.1. Análisis Epistemológico	26
6.2. Análisis Cognitivo	30
6.3. Análisis Didáctico.....	33
7. Análisis a Priori	38
7.1. Primera Actividad.....	40
7.1.1 Diseño de las Tareas	41
7.1.2. Análisis de las Tareas.....	43
7.1.2.1. Primera Tarea.....	44
7.1.2.2 Segunda Tarea.....	45
7.2 Segunda Actividad.....	46

7.2.1. Diseño de las tareas	46
7.2.2 Análisis de las Tareas.....	51
7.2.2.1. Primera Tarea.....	51
7.2.2.2. Segunda Tarea.....	52
7.2.2.3 Tercera Tarea.....	54
7.3. Tercera Actividad.....	54
7.3.1. Diseño de las Tareas	54
7.3.2. Análisis de las Tareas.....	56
7.3.2.1. Primera Tarea.....	56
7.3.2.2. Segunda Tarea.....	56
7.4. Cuarta Actividad	57
7.4.1. Diseño de las tareas	57
7.4.2 Análisis de las Tareas.....	59
7.4.2.1. Primera Tarea.....	59
7.4.2.2. Segunda Tarea.....	60
7.5. Análisis de la secuencia	60
8. Análisis a Posteriori	62
8.1. Primera Actividad	63
8.1.1. Primera Tarea.....	63
8.1.2. Segunda Tarea.....	69
8.2. Segunda Actividad.....	71
8.2.1. Primera Tarea.....	71
8.2.2. Segunda Tarea.....	77
8.2.3. Tercera tarea.....	82

8.3. Tercera Actividad.....	82
8.3.1. Primera Tarea.....	82
8.3.2. Segunda Tarea.....	89
8.4. Cuarta Actividad.....	91
8.4.1. Primera Tarea.....	91
8.4.2. Segunda Tarea.....	95
8.5. Análisis de la secuencia	124
9. Conclusiones.....	125
Referencias Bibliográficas.....	130
Apéndices	133

Lista de Figuras

Figura 1. <i>Esquema de la situación didáctica</i>	19
Figura 2. <i>Esquema de la situación adidáctica en la situación didáctica</i>	20
Figura 3. <i>Cálculo de la altura de una pirámide</i>	28
Figura 4. <i>Multiplicación y división de segmento de Descartes</i>	29
Figura 5. <i>Triángulos proporcionales</i>	32
Figura 6. <i>Ejemplo de uso del TFP</i>	33
Figura 7. <i>Libro Vamos a Aprender de noveno</i>	34
Figura 8. <i>Actividad inicial del libro Vamos a Aprender</i>	35
Figura 9. <i>Diferenciación entre el teorema de tales y el TFP</i>	35
Figura 10. <i>Ejemplo del libro Vamos a Aprender</i>	36
Figura 11. <i>Tarea 1 de la Actividad 1</i>	41
Figura 12. <i>Retroacción del mico</i>	42
Figura 13. <i>Retroacción pregunta</i>	42
Figura 14. <i>Tarea 2 de la Actividad 1</i>	43
Figura 15. <i>Pregunta en la tarea 2 de la Actividad 1</i>	43
Figura 16. <i>Solución a la tarea 1 de la actividad 1</i>	44
Figura 17. <i>Alternativa de solución a la tarea 1 de la actividad 1</i>	45
Figura 18. <i>Tarea 1 de la Actividad 2</i>	47
Figura 19. <i>Botón continuar en la tarea 1 de la actividad 2</i>	48
Figura 20. <i>Pregunta 1 para la tarea 1 de la actividad 2</i>	48
Figura 21. <i>Retroacción a la pregunta de la tarea 1 de la actividad 2</i>	49
Figura 22. <i>Pregunta 2 para la tarea 1 de la actividad 2</i>	49
Figura 23. <i>Pregunta final para la tarea 1 de la actividad 2</i>	50

Figura 24. <i>Retroacción tarea 2 de la actividad 2</i>	50
Figura 25. <i>Tarea 3 de la Actividad 2</i>	51
Figura 26. <i>Dificultad en la tarea 1 de la actividad 2</i>	52
Figura 27. <i>Mayor costo de construcción</i>	53
Figura 28. <i>Solución a la tarea 3 de la actividad 2</i>	54
Figura 29. <i>Tarea 1 de la actividad 3</i>	55
Figura 30. <i>Tarea 2 de la actividad 3</i>	55
Figura 31. <i>Tarea 1 de la actividad 4</i>	57
Figura 32. <i>Retroacción botón verificar de la tarea 1 en la actividad 4</i>	58
Figura 33. <i>Tarea 2 de la actividad 4</i>	58
Figura 34. <i>Retroacción botón verificar de la tarea 2 en la actividad 4</i>	59
Figura 35. <i>Construcción para la tarea 1 de la actividad 4</i>	60
Figura 36. <i>Uso de simetría axial para duplicar</i>	67

Lista de Tablas

Tabla 1. <i>Evidencias de la primera tarea</i>	64
Tabla 2. <i>Evidencias segunda tarea de la primera actividad</i>	69
Tabla 3. <i>Evidencias de la primera tarea de la segunda actividad</i>	71
Tabla 4. <i>Evidencias segunda tarea de la segunda actividad</i>	77
Tabla 5. <i>Reflexión sobre el uso del paralelismo</i>	81
Tabla 6. <i>Evidencias primera tarea de la tercera actividad</i>	83
Tabla 7. <i>Evidencias tercera tarea de la tercera actividad</i>	89
Tabla 8. <i>Evidencias primera tarea de la cuarta actividad</i>	92
Tabla 9. <i>Primera estrategia de la segunda tarea de la cuarta actividad</i>	96
Tabla 10. <i>Reflexión sobre la idea de triplicar un segmento</i>	97
Tabla 11. <i>Comparación entre ejecución de los estudiantes y resultado esperado</i>	102
Tabla 12. <i>Desarrollo de estrategia para dividir segmento en partes iguales</i>	104
Tabla 13. <i>Desarrollo de la tarea 3.2 para dividir un segmento en tres partes iguales</i>	107
Tabla 14. <i>Solución de la segunda tarea de la cuarta actividad</i>	115
Tabla 15. <i>Generalización de la estrategia</i>	122

Lista de Apéndices

Apéndice A. Transcripción Primera Actividad.....	133
Apéndice B. Transcripción Segunda Actividad	136
Apéndice C. Transcripción Tercera Actividad	143
Apéndice D. Transcripción Cuarta Actividad	148

Resumen

Título: Diseño de tareas autónomas en DGPAD para la división de un segmento en partes iguales usando el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad*

Autor: Yani Natalia Gonzalez Cruz**

Palabras clave: Automatización, DGPAD, Teorema fundamental de la proporcionalidad, Retroacción.

Descripción:

El principal resultado de esta investigación es el diseño e implementación de tareas en DGPAD-Colombia, que posibilitan el aprendizaje por adaptación del teorema fundamental de la proporcionalidad (TFP) y su uso para resolver problema de dividir un segmento en partes iguales. El objetivo es evaluar hasta qué punto es posible disminuir la intervención directa del profesor en las tareas para que los estudiantes las resuelvan y desarrollen conocimientos de manera autónoma. El producto de este estudio es una microingeniería didáctica, sustentada por la Teoría de las Situaciones Didácticas, que comienza con un análisis preliminar, que abarca ámbitos epistemológicos, cognitivos y didácticos. Luego, en el análisis a priori, se diseña una secuencia de cuatro actividades que ponen en juego retroacciones didácticas y matemáticas; las primeras constituyen actos de devolución automatizados con el propósito de minimizar la presencia del profesor; mientras que las segundas, corresponden a los elementos matemáticos propios del TFP. Posteriormente, las tareas se pilotaron con una pareja de estudiantes de noveno grado. El análisis a posteriori permitió comprobar algunas de las hipótesis planteadas y revela el potencial de las retroacciones didácticas para automatizar actos de devolución y para gestionar las tareas, permitiendo a los estudiantes resolver el problema planteado a partir de los conocimientos involucrados en la secuencia. Sin embargo, la intervención del profesor fue necesaria para el desarrollo de la secuencia, dado que se requiere la institucionalización sobre los conocimientos constituidos por los alumnos en las tareas intermedias.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Codirector: Martín Eduardo Acosta Gempeler.

Abstract

Title: Design of autonomous tasks in DGPAD for the division of a segment into equal parts using the Fundamental Theorem of Proportionality*

Author: Yani Natalia Gonzalez Cruz**

Key Words: Automation, DGPAD, Fundamental Theorem of Proportionality, Feedback.

Description:

The main result of this research is the design and implementation of tasks in DGPAD-Colombia, which enable adaptive learning of the Fundamental Theorem of Proportionality (FTP) and its application in solving the problem of dividing a segment into equal parts. The objective is to assess to what extent it is possible to reduce the direct intervention of the teacher in these tasks so that students can solve them and develop knowledge autonomously. The product of this study is a micro-didactical engineering framework, grounded in the Theory of Didactical Situations, which begins with a preliminary analysis covering epistemological, cognitive, and didactical aspects. Following this, the a priori analysis involves the design of a sequence of four activities that incorporate didactical and mathematical feedback: the former consists of automated feedback acts aimed at minimizing the teacher's presence, while the latter relates to the mathematical elements inherent to the FTP. Subsequently, the tasks were piloted with a pair of ninth-grade students. The a posteriori analysis helped verify some of the hypotheses and reveals the potential of didactical feedback to automate response acts and manage the tasks, allowing students to solve the given problem by using the knowledge developed throughout the sequence. However, teacher intervention was still necessary to advance through the sequence, as institutionalization of the knowledge students developed in intermediate tasks was required.

* Degree Thesis

** Sciences Faculty. Mathematics School. Bachelor's Degree in Mathematics. Advisor: Luis Ángel Pérez Fernández. Co-Advisor: Martín Eduardo Acosta Gempeler.

1. Introducción

El problema de dividir un segmento en partes iguales ha sido tratado en distintas etapas del desarrollo matemático, encontrando su solución en el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad (TFP). Sin embargo, en la enseñanza, este teorema es tratado desde una perspectiva numérica o algebraica, limitando su aplicación a ejercicios de encontrar la cuarta proporcional. Por esto, es importante recuperar la naturaleza geométrica de este teorema, para movilizarlo al resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales.

Por otra parte, el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD) para la enseñanza de diferentes elementos matemáticos ha tenido un apogeo en los últimos años, pero es necesario conocer los alcances y las configuraciones que deben realizarse a estos recursos para que sean un medio de aprendizaje para los estudiantes. Respecto a esto Acosta (2010) argumenta que el SGD es el medio por el cual el estudiante puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permiten acercarse al conocimiento, pero este medio debe ser diseñado de manera detallada para que las interacciones del estudiante si lo conduzcan al aprendizaje por adaptación y este sea muy cercano al saber que el profesor quiere enseñar.

De este modo, el presente trabajo busca diseñar e implementar una micro ingeniería de tareas autónomas en DGPAD-Colombia que posibilite la automatización de actos de devolución para promover el aprendizaje por adaptación del TFP en el problema de dividir un segmento en partes iguales. Para esto, se realiza un pilotaje con una pareja de estudiantes de noveno grado de una institución pública de Bucaramanga.

El trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera: en el segundo capítulo se expone el problema de investigación, en el que se plantea dos objetivos con los que se busca dar respuesta a la pregunta de investigación. En el tercer capítulo se exponen los antecedentes de

investigación. En el cuarto capítulo se exponen algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), la cual usaremos como Marco teórico. En el quinto capítulo se habla de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Luego, en el sexto capítulo se realiza el análisis preliminar, en el cual se abordan los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos del TFP. En el séptimo capítulo se realiza el análisis a priori, donde se conciben los diseños de las tareas y los resultados esperados de las mismas. En el octavo capítulo se realiza el análisis a posteriori, el cual contrasta las hipótesis planteadas en el análisis a priori con los resultados de la implementación. Finalmente, en el noveno capítulo se encuentran las conclusiones del trabajo de investigación.

2. Planteamiento del Problema

Actualmente la tecnología permite que los estudiantes sin necesidad de la intervención del docente puedan acercarse al conocimiento, porque se tiene acceso a recursos digitales que abordan el saber matemático. Por esto es importante estudiar cómo se incorporan estas tecnologías para el beneficio de la enseñanza de las matemáticas sin la presencia efectiva del profesor.

En consonancia con este pensamiento, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004) afirma que el SGD le permite al estudiante, por medio de una secuencia de actividades, explorar o acercarse a un elemento teórico, reconocer una propiedad que se mantiene invariante y realizar generalizaciones. De modo que, construye conocimientos con los que se enfrenta a la resolución de problemas.

Acosta (2010) sostiene que el SGD es un medio por el cual se pueden plantear actividades donde el estudiante interactúe, tome decisiones y así fortalecer su aprendizaje geométrico. Por lo que el uso del SGD permite la realización de actividades autónomas, con la posibilidad de

automatizar los actos de devolución, que son responsabilidad del profesor, en un modelo de interacción del estudiante con el medio.

En este sentido, encontramos que se han realizado trabajos de matemática recreativa, como el de Rueda y Niño (2013) donde identifican que el SGD da la oportunidad de automatizar actos que eran exclusivos del profesor, porque conducen a los estudiantes en un proceso de validación que los dota de autonomía sobre su proceso de aprendizaje.

En una línea similar, pero enfocada a la enseñanza de la homotecia, Estévez (2022) estudia cómo el uso de retroacciones didácticas en un SGD favorece el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia. En este trabajo establece que se debe estudiar cuidadosamente el rol del profesor para prever las intervenciones del profesor y evitar ser inoportuno en estas.

Nos interesa estudiar la posibilidad de automatizar actos de devolución en situaciones adidácticas relativas al problema de dividir un segmento en partes iguales y hasta qué punto el aprendizaje se da mediante el proceso de interacción del alumno con el medio y no por efectos del contrato didáctico. En este sentido, resulta necesario considerar la problemática de la proporcionalidad en el proceso educativo, la cual exponemos brevemente a continuación.

Guacaneme (2001) sostiene que, aunque existe un esfuerzo por tratar la proporción desde sus diferentes perspectivas matemáticas, a menudo se reduce a tratar la razón como un simple número fraccionario. Esto lleva a la utilización de algoritmos para la multiplicación y división de números racionales. Ante esta situación, el autor enfatiza en la necesidad de abordar la proporcionalidad respetando la esencia de la razón y la proporción. Por ejemplo, la Geometría propone una aproximación que preserva la naturaleza de estos elementos.

Pretendemos aportar al estudio de estas dos problemáticas, por medio de la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo diseñar tareas autónomas en el SGD para minimizar la ostensión del profesor en la división de un segmento en partes iguales, por medio del teorema fundamental de la proporcionalidad?

Con el objetivo de responder a esta pregunta, se proponen los siguientes objetivos:

- Diseñar una micro ingeniería didáctica de tareas autónomas en DGPAD que posibilite el aprendizaje por adaptación para la división de un segmento en partes iguales a partir del teorema fundamental de la proporcionalidad.
- Evaluar la autonomía de la micro ingeniería diseñada a partir del análisis a posteriori de un pilotaje.

3. Antecedentes

Las investigaciones consideradas como referentes para esta investigación están organizadas bajo dos ejes temáticos: investigaciones relacionadas con el diseño de actividades matemáticas autónomas en SGD y la enseñanza del TFP.

En cuanto al diseño de actividades autónomas en SGD, Rueda y Niño (2013) llevaron a cabo un estudio centrado en la automatización de actividades de matemática recreativa utilizando Cabri LM. Uno de los aportes de esta investigación fue la definición y exploración de “actos de devolución” como proceso de devolución.

Además, diseñaron seis talleres en los cuales se implementaron y automatizaron estos actos de devolución. El propósito detrás de esta automatización era fomentar una mayor autonomía en los estudiantes. Una de las limitaciones de estas tareas, fue que los estudiantes intentaron abordar

el problema sin que hubiera una apropiación de estas tareas, los autores reportan que esto se dio porque las estrategias desarrolladas privilegiaban el ensayo-error.

Sin embargo, los resultados obtenidos y las perspectivas que se abrieron a raíz de este estudio sientan las bases para futuras investigaciones, un ejemplo notable es el estudio de Estévez (2022). Inspirado en una secuencia didáctica diseñada en Cabri LM por Pérez (2017), Estévez se propuso rediseñarla en DGPAD, con el objetivo de desarrollar una nueva secuencia que potencie el reconocimiento perceptivo de la razón en la homotecia. Esta investigación se llevó a cabo utilizando la metodología de ingeniería didáctica con una pareja de estudiantes de noveno grado.

Pérez (2017) y Estévez (2022) destacan que las retroacciones proporcionadas por el SGD poseen un carácter tanto matemático como didáctico y usando esta premisa, se estructuró la programación de las tareas autónomas y se descubrió que estas retroacciones no solo gestionaban las tareas, sino que también desempeñaban el papel de "actos de devolución", además las retroacciones permitían programar otras acciones como hacer titilar un objeto para mostrar una propiedad que no es fácilmente perceptible.

Un aspecto digno de mención de una actividad propuesta en este contexto es la integración de componentes gráficos y numéricos para destacar la proporcionalidad presente en las homotecias propuestas, este aspecto es abordado por Guacaneme en un estudio académico.

Guacaneme (2001) estudia el tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas y argumenta que la forma en que se aborda la proporción y la proporcionalidad es de manera aislada, por lo que en los libros de matemáticas se evidencia que la proporción es abordada desde un contexto aritmético y la proporcionalidad es abordada desde las magnitudes, pero esta última es vista desde una situación donde deben encontrar el valor de una incógnita.

Por otra parte, Masseno y Pereira (2022) estudiaron una actividad que surge del tratado *L'usage du compas de proportion* publicado en 1631 por Didier Henrion. A través de este tratado, propusieron ejercicios que interrelacionan el Teorema de Proporcionalidad con conceptos de perpendicularidad y paralelismo. Estas actividades se implementaron en la escuela profesionalizante de Itaitinga con estudiantes de segundo año de Bachillerato. La serie de actividades está separada en dos momentos: el primero consiste en una introducción que ilustra la relevancia histórica del compás de proporción; en el segundo momento, se les plantea una actividad práctica que les enseña cómo usar un compás para dividir un segmento en cinco partes iguales.

Al finalizar las investigadoras destacan las dificultades que experimentaron los estudiantes al intentar identificar o trazar rectas perpendiculares, esenciales para validar el paralelismo necesario para establecer segmentos proporcionales en una línea dada.

4. Teoría de las Situaciones Didácticas

Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), propone un modelo de interacción entre el profesor, el estudiante y un medio, donde este último se concibe como un subsistema autónomo. A continuación, describimos brevemente los conceptos fundamentales de esta teoría, los cuales darán sustento teórico a nuestro trabajo de investigación.

4.1. Aprendizaje por Adaptación

Este concepto es heredado de la epistemología genética de Piaget y da origen a la TSD, Brousseau (2007) define el aprendizaje por adaptación como el proceso en el que:

el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la prueba del aprendizaje. (p. 30)

Para que este proceso de adaptación se dé, es importante que el alumno tenga alguna intención que le motive a actuar en el medio, de modo que este reaccione de manera natural a sus acciones, de modo que el alumno pueda interpretar dichas retroacciones y validar sus acciones en términos de su intención. Acosta (2010) describe el proceso de interacción con el medio en cinco aspectos:

- *Intención:* Es el origen de toda interacción, sino hay intención directamente no hay aprendizaje por adaptación.
- *Acción:* Cuando hay intención, el sujeto actúa sobre el medio para alcanzar dicho propósito.
- *Retroacción:* Ante las acciones el medio reacciona, estas reacciones del medio deben ser identificadas e interpretadas por el sujeto.
- *Interpretación:* Uno de los momentos más importantes es cuando el sujeto interpreta la retroacción del medio y le da un significado según el objetivo que se quiere alcanzar.
- *Validación:* El sujeto decide si la acción realizada le sirvió para alcanzar su objetivo, en el caso de que no, el sujeto vuelve a actuar sobre el medio y el proceso de interacción continúa con la misma u otra acción.

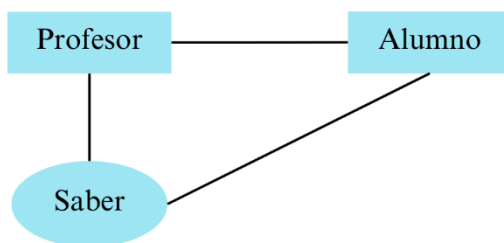
La TSD diferencia el conocimiento del saber, donde el primero es producto de la experiencia propia del estudiante al interactuar con un medio y el segundo representa el conjunto de contenidos y teorías que son aceptados por una comunidad matemática. Por esto el saber es impersonal y descontextualizado, es decir, institucional; mientras que el conocimiento es personal y contextualizado.

4.2. Situación Didáctica y Situación Adidáctica

Margolinas (2009) se refiere a la situación didáctica como un escenario donde un profesor y un estudiante interactúan alrededor de un saber que se quiere enseñar. En esta situación el profesor está involucrado en el sistema de interacciones, porque el profesor tiene intención de transmitir un saber, como se puede ver en la *Figura 1*.

Figura 1.

Esquema de la situación didáctica



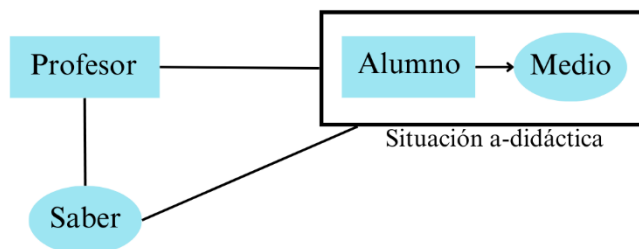
Dado que el aprendizaje por adaptación no es producto de un proceso comunicativo directo del docente, este emplea una estrategia indirecta a través de un medio. Brousseau (2007) argumenta que:

esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. (p.31)

Además, Margolinas propone que una situación didáctica no es necesariamente adidáctica. Pero es posible que, dentro de la situación didáctica, ciertos aspectos se experimenten como situaciones adidásticas (ver la *Figura 2*).

Figura 2.

Esquema de la situación adidáctica en la situación didáctica



De este modo podemos describir la situación adidáctica como la estrategia que usa el profesor para generar el aprendizaje por adaptación para que el estudiante incorpore unos conocimientos que le darán sentido al saber que el profesor quiere enseñar, en esta situación adidáctica se privilegia la interacción del estudiante con el medio y los significados que este le dé a las retroacciones.

Existen dos procesos relacionados con la situación adidáctica: el de validación y el de devolución de los cuales son responsables el alumno y el profesor respectivamente.

4.3. Proceso de Validación

Como se mencionó anteriormente, la validación se da cuando el estudiante emite un juicio sobre sus acciones para decidir si estas lo llevaron a acercarse a la solución o no. Ante esto Rueda y Niño (2013) identifican cinco aspectos sobre el proceso de validación en los estudiantes:

- *Aceptar el problema:* El estudiante acepta la responsabilidad asignada por el profesor de resolver el problema.
- *Comprender el problema:* El estudiante lee, analiza e interpreta los requerimientos del problema.

- *Emplear una estrategia de solución:* Se pone en marcha una estrategia que ayude a llegar a la solución del problema propuesto. No debe reducirse al azar o ensayo y error.
- *Controlar los procesos intermedios:* control de los procedimientos matemáticos, es decir, buscar y corregir errores de procedimiento.
- *Validar la solución del problema:* Se decide si la estrategia que se llevó a cabo para solucionar el problema fue acertada o no. (pp. 21 - 22)

4.4. Proceso de Devolución

El estudiante, al encontrarse en una situación adidáctica, asume un papel consciente y responsable en su interacción con el medio. No obstante, esto no significa que el profesor se convierta en un espectador del desempeño del estudiante. Brousseau (1987) citado por Margolinas (2009) precisa que:

No basta con “comunicar” un problema a un alumno para que el problema se convierta en su problema y que él se sienta el único responsable de resolverlo. No basta tampoco que el alumno acepte esta responsabilidad para que el problema que resuelve sea un problema “universal”, libre de presupuestos subjetivos. Llamamos “devolución” a la actividad por la cual el profesor trata de lograr esos dos resultados (p. 41).

Por esto el docente se encuentra alerta y dispuesto a intervenir por medio de “devoluciones”, pero en estas devoluciones el docente se desliga de su responsabilidad directa sobre el contenido que se está tratando. Es decir, las acciones del profesor durante la situación adidáctica deben permitir que el sujeto reflexione sobre su proceso de validación, evitando dar juicios sobre las acciones del estudiante, comunicar la solución o estrategias que puedan sesgar las acciones del sujeto.

Ante las intervenciones del profesor Rueda y Niño (2013), proponen una clasificación de actos de devolución, de los cuales serán tenidos en cuenta los siguientes:

- *Hacer comprender el problema:* el profesor brinda la información y condiciones necesarias para que el sujeto pueda llegar a resolver el problema.
- *Solicitar una estrategia de solución:* Si el profesor considera que las respuestas del estudiante son producto del azar, se le pide una justificación ante dichas observaciones.
- *Hacer controlar los procesos intermedios:* se le solicita al estudiante que revise los pasos necesarios para resolver el problema, conforme a la estrategia escogida.
- *Responder a una solicitud de ayuda del estudiante:* el profesor debe brindar ayuda al estudiante sin interrumpir el proceso de validación. Por lo general se busca evitar el abandono del problema (pp. 22 – 23).

El presente trabajo busca la automatización de los actos de devolución en las tareas propuestas. De modo que estos orienten en la apropiación y solución de las tareas propuestas, por esto se tendrán en cuenta las posibles acciones de los estudiantes y las retroacciones de estas.

4.5. DGPad-Colombia como Medio

Según lo expuesto anteriormente el medio es un componente fundamental de la situación a-didáctica, donde el estudiante interactúa y toma conciencia de sus acciones y las retroacciones del medio, acciones que deben establecer conexiones coherentes entre los conocimientos que pone en juego el alumno y el saber que se quiere enseñar. Ante esto Acosta (2010), argumenta que el SGD, por su programación garantiza que todos las construcciones y manipulaciones de figuras geométricas corresponden a la teoría de la geometría euclidiana. Por esto, las retroacciones de este medio corresponden al saber que el profesor quiere enseñar.

DGPAD-Colombia es una aplicación de Geometría Dinámica, que es usada para la enseñanza e investigación en Matemáticas. Al analizar este programa desde la TSD encontramos que DGPAD permite que los estudiantes interactúen gracias a sus características de arrastre, construcción y se acerquen al concepto matemático. En esta interacción del estudiante con DGPAD como medio, Pérez (2017) y Estévez (2022) distinguen dos tipos de retroacciones: las matemáticas y didácticas. Las primeras son aquellas que corresponden a la teoría matemática, mientras que las retroacciones didácticas son aquellas que se manifiestan en la pantalla, con el fin de favorecer la interacción del alumno con el medio, pero que no corresponden a propiedades matemáticas. Por ejemplo, cambiar el color de un objeto u ocultarlo, bloquearlo, etc. Mostrar un texto, iniciar una animación, entre otras.

Pérez (2017) propone cuatro roles de las retroacciones didácticas: gestión y articulación de las tareas, gestionar actos de devolución, promover el proceso de validación y resaltar propiedades que no son fácilmente perceptibles.

En este orden de ideas, las retroacciones didácticas podrían constituir actos de devolución automatizados. Es decir, se puede minimizar la presencia efectiva del profesor a través del uso de las retroacciones didácticas que ofrece DGPAD-Colombia. Sin embargo, como no toda intervención del profesor constituye un acto de devolución, no toda retroacción que pretenda suplir el papel del profesor en un momento determinado corresponde con un acto de devolución automatizado.

Existen mecanismos de reproducción e imitación que emplean los profesores por medio del contrato didáctico. Es esencial no pasar por alto las consecuencias de estos mecanismos en el aprendizaje de los estudiantes. Debido que la validación que surge de estos procesos es producto de las instrucciones del profesor y no de un aprendizaje por adaptación (Brousseau, 2007).

5. Metodología de Investigación

Con el propósito de cumplir los objetivos planteados en esta investigación se trabajará bajo la metodología de ingeniería didáctica expuesta por Artigue (1995). Esta autora argumenta que la validación de las hipótesis es interna y basada en una confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Es decir, esta metodología evalúa un diseño dentro del contexto específico para el que fue diseñado.

5.1. Ingeniería Didáctica

En la estructura de esta metodología, se ha incorporado el estudio de casos como herramienta principal, donde Artigue (1995) distingue cuatro fases: Análisis preliminar, Análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori. A continuación, se describen:

Análisis preliminar: Constituye una contextualización teórica, curricular y didáctica para el profesor, en el campo en el que se mueve el saber que se va a desarrollar. Para esto se identifican tres dimensiones, la primera es la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego, la dimensión cognitiva está asociada a las características intelectuales de la comunidad a la que va dirigida la enseñanza. Por último, la dimensión didáctica está asociada a las características del sistema de enseñanza.

En el presente trabajo, la dimensión epistemológica se ve reflejada en el estudio del TFP. En la dimensión cognitiva se conciben las dificultades que tienen los estudiantes ante este teorema, posibles acciones de los estudiantes ante las tareas. Por último, en la dimensión didáctica, se analizan el tipo de tareas y los actos de devolución que se incorporan en el diseño.

Análisis a priori: En esta fase se determinan las hipótesis basándose en el análisis preliminar sobre como las decisiones tomadas influyen en el comportamiento de los estudiantes y

su interpretación, para el planteamiento de una secuencia de tareas autónomas, de modo que esta fase busca “determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado” (Artigue, 1995, p. 45).

A la luz de la TSD esta fase tiene una parte descriptiva y otra predictiva que se centra en las características de la situación adidáctica. Por lo cual, se analizan las opciones de acción, decisión que el estudiante puede tomar ante el medio. Además, se anticipan los comportamientos del sujeto y se muestra como la identificación realizada permite controlar y asegurar los comportamientos esperados (Artigue, 1995).

Experimentación: En este momento es donde la hipótesis y tareas previamente propuestas son puestas a pruebas mediante un pilotaje, con el fin de validar o refutar las suposiciones iniciales. Para la recolección de datos, se utilizarán grabaciones de pantalla y de audio.

Análisis a posteriori: En este momento se tienen dos tipos de información, la estipulada en el análisis a priori que corresponde a las hipótesis y la recolectada en la fase de experimentación. Ante esto se hace una comparación para la validación o ajuste de las hipótesis formuladas.

5.2. Población de Estudio

La población de estudio está compuesta por dos estudiantes de noveno grado de un colegio público de Bucaramanga. Los estudiantes manifiestan haber trabajado con SGD, pero no específicamente con DGPAD. Sin embargo, su experiencia se ha limitado a componentes algebraicos o gráficos, lo que sugiere que no han interactuado con construcciones meramente geométricas. Por esto, el profesor debe realizar una explicación sobre cómo funcionan las herramientas en DGPAD.

6. Análisis Preliminar

En el presente análisis se definen las variables didácticas que se tendrán en cuenta para el diseño de las tareas, con el fin de responder hasta qué punto y de qué manera los estudiantes pueden resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales, utilizando el TFP, a través de acciones autónomas y de la puesta en escena de sus conocimientos, movilizados por la ingeniería didáctica, y qué tanto es necesaria la intervención del profesor.

Este análisis se estructura bajo tres perspectivas: epistemológica, cognitiva y didáctica, con el fin de exponer los cimientos teóricos y procesos mentales relativos al aprendizaje y uso del TFP y de qué manera se enseña.

Este teorema, también conocido como el Teorema de Tales, es una de las principales herramientas de la geometría euclidiana para resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales.

Es importante aclarar que, en algunos textos escolares y universitarios, no se hace distinción entre el teorema de tales y el TFP. Con el objetivo de facilitar la comprensión y referencia posterior, nos referiremos a este último como lo proponen Clemens, O'Daffer y Cooney (1998): “Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos lados, entonces divide a estos proporcionalmente” (p. 308).

6.1. Análisis Epistemológico

Aunque no hay un único autor a quien se le atribuya el TFP, puede ser rastreado en la perspectiva de destacados pensadores matemáticos, los cuales sentaron las bases para comprender la relación de proporcionalidad entre magnitudes a través de razones.

En los libros V y VI de *Los Elementos* de Euclides, que surgen en una época donde las magnitudes inconmensurables suponían un obstáculo para el progreso de la Matemática, se trata la proporcionalidad de las magnitudes representadas por segmentos, lo que supone una separación entre el tratamiento de los números y de las magnitudes.

En el libro V se define que una razón es la relación entre dos magnitudes del mismo tipo, donde se compara el tamaño de una respecto a la otra. Aquí es importante tener en cuenta que no se habla necesariamente de razones que estén dadas por números racionales o enteros, por lo cual no se puede confundir a la razón con la fracción. Así mismo, una proporción es definida como la igualdad de dos razones.

Sin embargo, la representación de los números a través de las magnitudes o cantidades, así como la definición de la multiplicación a partir de adiciones repetidas de la magnitud tomada como la unidad, constituye un obstáculo epistemológico con el que usualmente los estudiantes se enfrentan (Laguerre, 2005). Dado que al tratar proporciones usualmente lo hacen desde una perspectiva numérica y muy pocas veces desde una geométrica. Esto significa que para los estudiantes no es sencillo describir la proporcionalidad de las cantidades sin asignar valores numéricos específicos (Guacaneme, 2001).

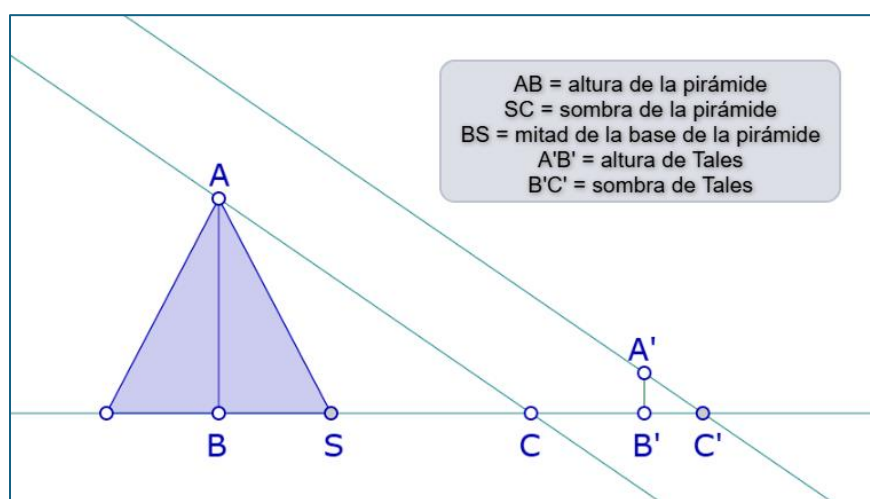
Por otra parte, en el libro VI se enuncia que:

sí se traza una recta paralela a un lado de un triángulo, esta cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Recíprocamente, si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo (Puertas, 1991, p. 58).

Esta idea corresponde a la usada por Tales para medir la altura de las emblemáticas pirámides de Egipto, usando la medida de la sombra de la pirámide y de su propia sombra, a partir del siguiente razonamiento: si su sombra es igual a su estatura entonces la sombra de la pirámide y su correspondiente altura también serán iguales, como se puede ver en la *Figura 3* (Boyer, 1968; Heath, 1921).

Figura 3.

Cálculo de la altura de una pirámide



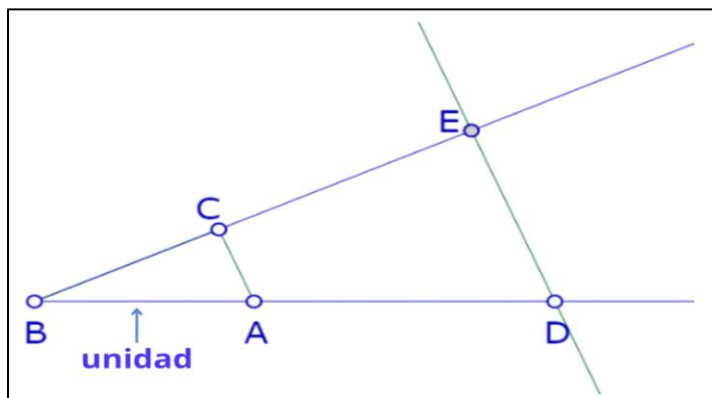
De este modo, el paralelismo entre AC, AB, BC con A'C', A'B' y B'C' respectivamente, permite establecer la siguiente relación de proporcionalidad: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. Luego, realizando algunas mediciones y cálculos se puede obtener la medida de AB que corresponde a la altura de la pirámide.

Note que esta idea sería la precursora del uso de las paralelas para establecer una proporción entre una magnitud y otra, es decir, usar el paralelismo para trasportar la razón por medio del TFP. En relación con esta idea, Descartes propone que se pueden operar magnitudes como operamos números si tomamos una unidad adecuada. Esto implica que los segmentos, pueden ser multiplicados y divididos (Laguerre, 2005).

Un ejemplo de esto se ve en la *Figura 4*, donde AB es la unidad y se quiere multiplicar BD por BC . Para esto se necesita unir los puntos A y C , luego se traza DE paralelo a AC , ahora estableciendo la proporción tenemos que $\frac{1}{BD} = \frac{BC}{BE}$, de este modo $BD \cdot BC = BE$. Así mismo, se obtiene la relación de dividir BE por BD , donde $\frac{BE}{BD} = BC$.

Figura 4.

Multiplicación y división de segmento de Descartes



En el problema de dividir un segmento en partes iguales, no es necesario tomar una magnitud como la unidad para establecer la cuarta proporcional. Sin embargo, sí nos interesa el uso del TFP, porque este nos permite transportar la razón dada en un segmento a otro segmento adyacente a través del paralelismo.

En este sentido, para que el alumno pueda resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales, en primer lugar, debe reconocer este hecho geométrico: el paralelismo permite transportar razones. En segundo lugar, debe comprender que al construir un segmento que sea el doble, el triple y en general múltiplo de otro, también está obteniendo la relación inversa. Es decir, si $AB = n \cdot AC$, $n \in \mathbb{N}$ entonces $AC = \frac{AB}{n}$. Por ejemplo, si AB es el doble de AC entonces AC es la mitad de AB o si AB es el triple de AC entonces AC es la tercera parte de AB .

En tercer lugar, debe entender que el problema de dividir un segmento en partes iguales se puede resolver multiplicando otro segmento adyacente al segmento que se quiere dividir y luego transportando la razón con paralelismo se obtendrá la razón en el segmento deseado.

Con el propósito de que los alumnos desarrollen este proceso a través del aprendizaje por adaptación y no solo por imitación de manera mecanizada, en este trabajo proponemos una micro ingeniería que movilice los saberes mencionados en el párrafo anterior, para que los alumnos construyan los conocimientos que le dan sentido a dicho saber.

6.2. Análisis Cognitivo

Según los Estándares Básicos de Competencias, al finalizar el grado quinto los estudiantes ya tienen una noción de proporcionalidad y razones, por lo que se espera que a partir del grado sexto los estudiantes puedan enfrentarse al problema de dividir un segmento en partes iguales.

Sin embargo, Guacaneme (2001) sostiene que, aunque existe un esfuerzo por tratar la proporción desde el álgebra y geometría, a menudo se reduce a tratar la razón desde un enfoque aritmético. Esto conduce a los estudiantes a la utilización de algoritmos para la multiplicación y división de números racionales al abordar la proporcionalidad entre razones. El autor enfatiza en la necesidad de abordar la proporcionalidad respetando la esencia de la razón y la proporción. Por ejemplo, la Geometría propone una aproximación que preserva la naturaleza de estos elementos.

Sin embargo, Filloy y Lema (1996) reportan que esta transición de las nociones aritméticas a nociones más amplias sobre los números, figuras y operaciones no se dan de manera natural. Este cambio hace que los estudiantes al enfrentarse a problemas de proporcionalidad sigan usando métodos que les funcionaba para abordar problemas en aritmética.

En general, el hecho de que en la enseñanza del TFP mayoritariamente se aborden problemas numéricos o algebraicos en los que se conocen tres medidas y se debe encontrar la cuarta usando la relación de proporcionalidad que garantiza el teorema, ha reducido al TFP a un procedimiento que los alumnos aplican de manera sistemática, sin ser conscientes de los hechos que hay detrás de este resultado. Este tratamiento del TFP ha marginado el uso de este teorema para transportar razones. Como resultado, resulta difícil encontrar en la literatura elementos cognitivos relativos al uso del TFP para dividir un segmento en partes iguales desde el punto de vista de la geometría euclidiana.

Por esta razón, a partir de algunos ensayos con estudiantes entre los grados octavo y decimo, se encontraron ciertas características en la forma en que los estudiantes interactúan con el TFP cuando lo aplican para dividir a un segmento, las cuales expondremos a continuación.

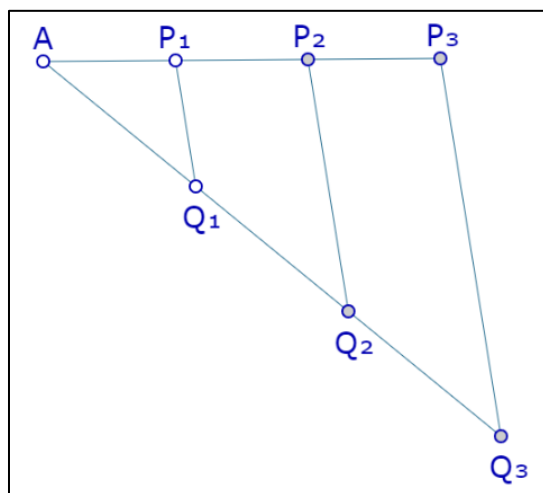
En primer lugar, los alumnos no tienen dificultades para multiplicar un segmento n veces. Sin embargo, para ellos no es evidente que cuando se multiplica un segmento, están generando otro segmento que está dividido en partes iguales, donde cada una de estas partes tienen la misma longitud que el segmento inicial. Es decir, no suelen percatarse en el hecho de que se puede construir un segmento que esté dividido en partes iguales a partir de la multiplicación.

Por otra parte, cuando construyen un triángulo semejante a otro como en la *Figura 5*, la manera en que los estudiantes garantizan que los triángulos tengan lados proporcionales es multiplicando dos de los lados y el tercer lado surge de dicho proceso. Por ejemplo, los estudiantes hacen que la longitud de AP_2 y AQ_2 sean el doble de la longitud de AP_1 y AQ_1 respectivamente. No obstante, asumen que ellos construyeron el tercer lado P_2Q_2 de manera similar a los otros dos, sin reflexionar sobre el hecho de que, al garantizar la proporción en dos lados correspondientes de los triángulos y la congruencia del par de ángulos comprendido entre ellos, hace que el tercer lado

también cumpla la proporción. Además, no reconocen fácilmente la relación de paralelismo entre P_1Q_1 y P_2Q_2 .

Figura 5.

Triángulos proporcionales



Esta reflexión sobre el paralelismo es fundamental para comprender cómo las rectas paralelas transportan las razones en el TFP. Luego, para los estudiantes es difícil llegar a pensar en que para construir un triángulo proporcional a otro solo basta construir la razón en un lado del triángulo y por medio de rectas paralelas garantizarla en los otros dos lados. Por consiguiente, no logran movilizar el TFP para obtener una razón fraccionaria en un segmento mediante la construcción de la razón inversa y el uso de rectas paralelas. Estas dificultades llevan a que el estudiante espere que el docente evalúe sus acciones ante el problema, para así tomar decisiones.

Por ende, en este trabajo se busca pasar de argumentos autoritarios por parte de los alumnos; donde las afirmaciones están basadas en las del profesor, a argumentos empíricos y analíticos. En los argumentos empíricos, el estudiante se apoya en hechos físicos o de una construcción en el SGD, donde estos hechos evidenciados constituyen argumentos por sí mismos. Luego, se espera que haya una cadena deductiva que ordene dichos argumentos.

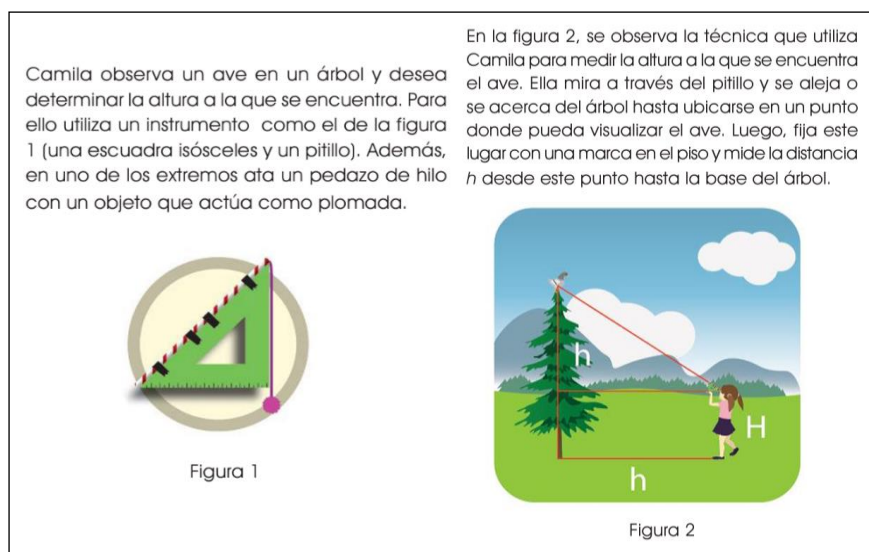
6.3. Análisis Didáctico

En el marco de este análisis, se realiza el estudio de la presencia del TFP en los lineamientos curriculares para la educación en Colombia. Particularmente en los Derechos Básicos de aprendizaje (DBA, 2016) y el catálogo de libros “Vamos a Aprender” (2017) del Ministerio de Educación Nacional.

En los DBA encontramos que para el grado noveno se espera que los estudiantes propongan y justifiquen estrategias de medición y cálculo de longitudes usando el TFP, tal como se ve en la *Figura 6*. En este ejemplo podemos constatar que se intenta encontrar una longitud que aparentemente es difícil de medir, por lo cual se propone que la niña tiene una estrategia para medir la altura a la que se encuentra el ave en la cúspide del árbol.

Figura 6.

Ejemplo de uso del TFP



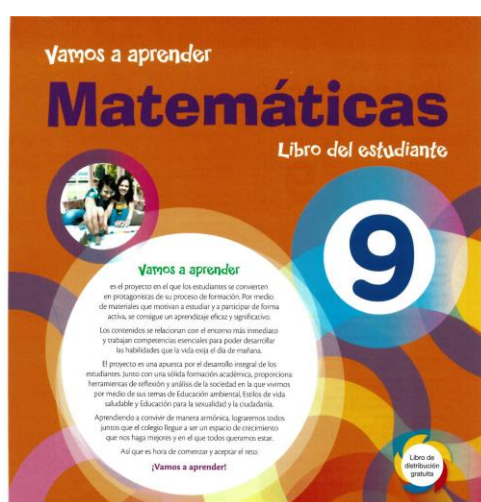
Nota. Tomado de *Derechos Básicos de Aprendizaje*, MEN (2016).

Además, podemos ver que en la imagen donde se encuentra la niña se dibujan unos segmentos que buscan traducir el problema a términos geométricos. Lo que permite que se puedan establecer relaciones entre dichos segmentos para dar solución al problema.

Respecto al libro Vamos a aprender para el grado noveno, encontramos que en la sección del pensamiento métrico se trabaja el TFP, tal como se ve en la *Figura 7*.

Figura 7.

Libro Vamos a Aprender de noveno

	Pensamiento métrico Longitudes, áreas y volúmenes	Pág. 66
	1. Sistemas de medida internacional y anglosajón. Conversiones 68 Tema transversal: Educación para la sexualidad y la ciudadanía 2. Magnitudes físicas 70 Tema transversal: Estilos de vida saludable 3. Longitudes de cuerdas y segmentos 74 4. Cálculo de longitudes en un triángulo rectángulo 78 5. Teorema de tales 82 6. Longitudes de áreas de figuras planas 84 7. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos 86 Tema transversal: Educación ambiental 8. Área y volumen de la esfera 90	

Nota. Tomado de *Vamos a Aprender Matemáticas 9*, MEN (2017).

Al dirigirnos a la sección del libro vemos que se empieza a abordar por medio de una situación donde se plantea encontrar una longitud (ver *Figura 8*). Luego viendo la solución que plantea el libro se evidencia que es un ejercicio para encontrar la cuarta proporcional.

Figura 8.*Actividad inicial del libro Vamos a Aprender*

Analiza

Un obrero apoya una escalera sobre una pared y atraviesa un palo de 2 m para ayudarla a sostener. La situación se modela en la Figura 3.35.

- ¿A qué altura está el borde superior de la escalera del piso?

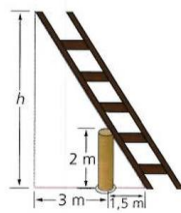


Figura 3.35

Conoce

Para hallar h se establece la siguiente proporción:

$$\frac{1,5}{2} = \frac{4,5}{h} \Rightarrow h = 6 \text{ m}$$

Por lo tanto, el borde superior de la escalera está a 6 m del piso.

Nota. Tomado de *Vamos a Aprender Matemáticas 9*, MEN (2017).

A continuación, el libro puntualiza la diferencia entre teorema de tales y el teorema fundamental de la proporcional, aunque a este último no lo llame de esta forma (ver *Figura 9*). Además, menciona que la demostración del TFP se puede hacer a partir del Teorema de Tales, pero no hay un espacio que permita explorar esta afirmación o que permita que los estudiantes la puedan evidenciar.

Figura 9.*Diferenciación entre el teorema de tales y el TFP*

El teorema de Tales es un importante enunciado en el que se afirma lo siguiente:

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, entonces los segmentos de las transversales, determinados por las paralelas, son proporcionales.

El teorema de Tales es útil en la demostración de otros teoremas geométricos, como el que se enuncia a continuación.

Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados.

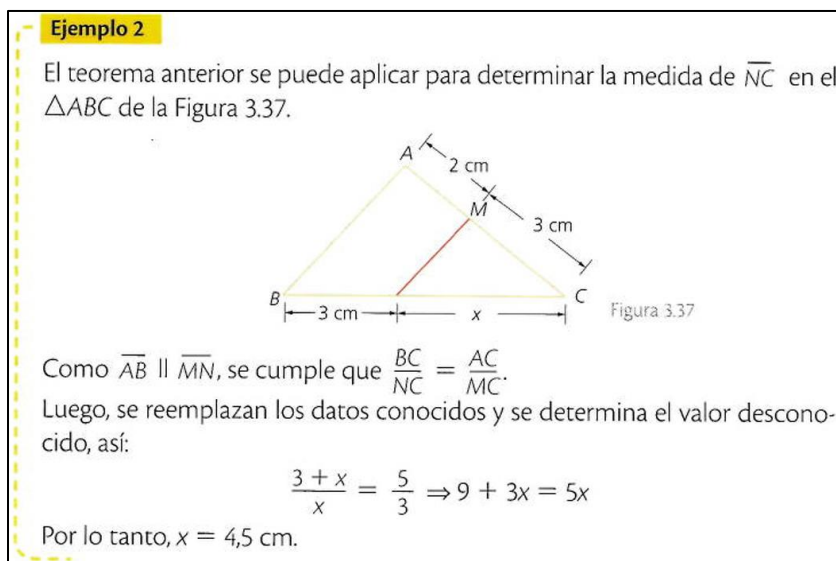
Nota. Tomado de *Vamos a Aprender Matemáticas 9*, MEN (2017).

Siguiendo en la sección, vemos que los ejemplos y ejercicios solo tienen un carácter numérico-algebraico, abandonando un poco la esencia geométrica del teorema, donde en realidad

no se analiza la importancia de las paralelas en este resultado. Además, vemos que las representaciones son prototípicas, lo que impide que el estudiante encuentre la relación de proporcionalidad en problemas con representaciones diferentes (ver *Figura 10*).

Figura 10.

Ejemplo del libro Vamos a Aprender



Nota. Tomado de *Vamos a Aprender Matemáticas 9*, MEN (2017).

Se concluye que este teorema es utilizado mayoritariamente en problemas algebraicos o métricos, donde los ejercicios tienen la misma estructura y solo cambian los valores para encontrar una cuarta proporcional. Sin embargo, el TFP posee características geométricas propias que merecen ser exploradas. Por ejemplo, es frecuente que se pase por alto el papel del paralelismo en este teorema.

En este contexto, para promover el uso del TFP como un método para dividir un segmento en partes iguales se diseña una secuencia de tareas que quiere mostrar que una solución a este problema es la siguiente:

Si se desea dividir al segmento AB en partes iguales, se recurre a utilizar un segmento auxiliar AC. Luego si queremos que AB esté dividido en un factor n de partes iguales, se tiene en cuenta que, si multiplicamos la longitud del segmento AC por n veces, también obtenemos una relación inversa donde el segmento resultante de la multiplicación estará dividido en n partes iguales, donde cada una de estas partes tendrá la misma longitud que AC. Luego, las rectas paralelas desempeñan la función de transportar esta razón al segmento AB estableciendo una proporción entre la multiplicación del segmento AC y la división del segmento AB.

Ahora, para lograr que los alumnos reconozcan el TFP como un hecho geométrico, se utiliza como estrategia didáctica, solicitar a los alumnos construir un triángulo de tal manera que la longitud de cada uno de sus lados sea múltiplo de la longitud de los lados de otro triángulo dado. Se espera que los alumnos construyan el triángulo en posición de similitud con el triángulo dado. Esto es, que hagan coincidir un par de vértices correspondientes y que los lados adyacentes a ese vértice estén alineados con los lados correspondientes del triángulo dado. Esto se ilustra en la *Figura 5*, donde los triángulos coinciden en el vértice A y los segmentos adyacentes que concurren en A están alineados.

De acuerdo con las evidencias que se tienen, los alumnos casi siempre utilizan esta estrategia, porque simplifica el problema, dado que ya tendrían un par de ángulos iguales y solo faltaría multiplicar los lados adyacentes a dicho ángulo. En caso de que el alumno no la utilice, se le puede sugerir que lo haga. De esta manera, se obtiene como consecuencia que la longitud del tercer par de lados correspondientes tiene la misma relación que la longitud de los otros pares de lados correspondientes y que además son paralelos. Así, con las tareas adecuadas, se podría lograr que reconozcan la relación entre el paralelismo y la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Por otra parte, se considera que asignar un costo al uso de las herramientas, donde la herramienta círculo (que permite multiplicar segmento) sea más costosa que la herramienta recta paralela (que permite transportar razones). Esto fomenta en los estudiantes la necesidad de usar paralelas para obtener una construcción más económica. De esta manera, podrían multiplicar solo un lado del triángulo y con el paralelismo obtener la multiplicación de los otros dos pares de lados. Posteriormente, deberían utilizar este conocimiento para dividir un segmento en partes iguales.

7. Análisis a Priori

De acuerdo con el análisis preliminar, la intención del diseño de las tareas es que a través de las acciones e interacciones de los estudiantes se construyan y utilicen los siguientes hechos geométricos para dividir un segmento en partes iguales:

- i. Si se duplica, triplica o en general se multiplica un segmento una cantidad entera de veces, a la vez se está obteniendo un segmento que está dividido en partes iguales.
- ii. Para construir dos triángulos en posición de similitud, solo basta construir la razón de proporcionalidad deseada en un par de lados correspondientes de los triángulos y utilizar las rectas paralelas para transportar dicha razón al otro par de lados.
- iii. Del anterior hecho geométrico se debe entender que, si se quiere dividir un segmento dado en partes iguales, se debe construir un segmento adyacente que esté dividido en esa cantidad de partes iguales y transportar la razón al segmento dado con rectas paralelas.

El diseño de las tareas está dividido en 4 actividades: La primera moviliza el hecho geométrico i; la segunda y tercera atienden a los hechos geométricos ii y iii; y la cuarta corresponde al problema de dividir un segmento en partes iguales a partir de lo realizado en las anteriores actividades.

El objetivo de las tareas es minimizar la dependencia del estudiante hacia la orientación directa del profesor para comprender y abordar el problema de dividir un segmento en partes iguales. Para lograr esto, se busca fomentar la autonomía por parte del alumno a través de las tareas en DGPAD que les permitan reconocer, comprender y utilizar los hechos geométricos involucrados en el problema en cuestión. Esto no significa la ausencia total de la presencia del profesor en las tareas.

Las tareas se han estructurado para que los estudiantes trabajen en parejas, ya que esta dinámica facilita el intercambio de ideas y el desarrollo de estrategias de solución. La presencia del profesor durante estas actividades es fundamental, no sólo para supervisar el progreso de los estudiantes, sino también para asegurarse de que ambos actúen de manera equitativa en la tarea.

Los problemas de construcción propuestos están pensados para que se realicen con las herramientas de DGPAD-Colombia (punto, segmento, recta, círculo, ...) y con hechos geométricos, prescindiendo de ajustes perceptivos y estrategias de carácter numérico para garantizar las propiedades solicitadas. De este modo, para que los estudiantes identifiquen si sus construcciones no obedecen a métodos perceptivos se les pide que utilicen la herramienta mico. Esta herramienta mueve los puntos libres que hay en la pantalla, permitiendo la validación de las estrategias empleadas. En otras palabras, el mico automatiza el arrastre de los objetos y la validación de la construcción mediante el arrastre es parte del contrato didáctico. Es decir, los alumnos y el profesor acuerdan que la construcción es correcta cuando al arrastrar todos los objetos, esta conserva las propiedades solicitadas, siendo estas percibidas cuando la figura es alterada.

En el análisis preliminar se menciona la estrategia de asignarle costo a las herramientas, para esto se decide que las herramientas de tipo circular (círculo, compás) tienen un costo de 5 y las herramientas de tipo lineal (segmento, recta, recta paralela) tendrán un costo de 2. Esta

estrategia busca favorecer la utilización de las rectas paralelas para transportar la razón, prescindiendo de la utilización de círculos que son más costosos.

Para lograr que los alumnos identifiquen los hechos geométricos i, ii y iii, mencionados anteriormente, es necesario restringir las acciones mediante el bloqueo de algunas herramientas. Por ejemplo, no queremos que usen la herramienta punto medio para dividir un segmento porque esperamos que lo hagan duplicando otro. Es decir, utilizando la relación inversa. Por este motivo solo se dejarán habilitadas las herramientas necesarias y otras pocas que no se requieren como la herramienta recta perpendicular, para que ellos decidan cuáles usar.

Para llevar el cálculo del costo, en la pantalla se ve una expresión llamada *costo_construcción* la cual identifica los elementos construidos y dependiendo del tipo de herramienta utilizada añadirá su valor a la expresión. Por ejemplo, si los estudiantes construyen un segmento, entonces se sumará 2 al valor de la expresión *costo_construcción*. Si luego construyen un círculo se sumará 5, resultando en un costo de 7 para la construcción realizada.

A continuación, se analizan las tareas diseñadas en cada una de las actividades, donde se describen las posibles acciones de los estudiantes, retroacciones del medio, decisiones de diseño, objetivos y lo que se espera de las tareas.

7.1. Primera Actividad

Esta actividad tiene dos propósitos: el primero es que los estudiantes usen la herramienta círculo para duplicar, triplicar y, en general, construir la multiplicación de un segmento dado. El segundo, pretende que reconozcan que, al multiplicar un segmento, al mismo tiempo obtienen la razón inversa de dicha multiplicación. Usaremos la expresión “multiplicar un segmento” para

referirnos a la construcción de un nuevo segmento cuya longitud sea múltiplo de la longitud del segmento dado.

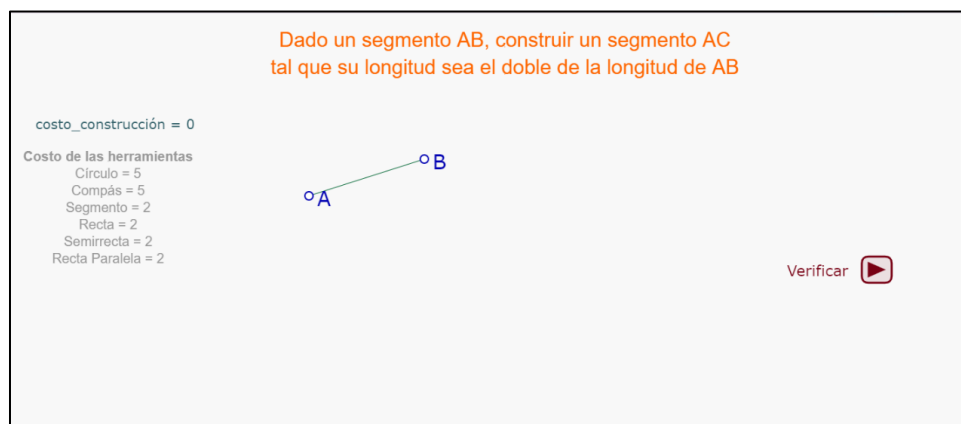
La actividad está organizada en dos tareas, las cuales describimos detalladamente a continuación.

7.1.1 Diseño de las Tareas

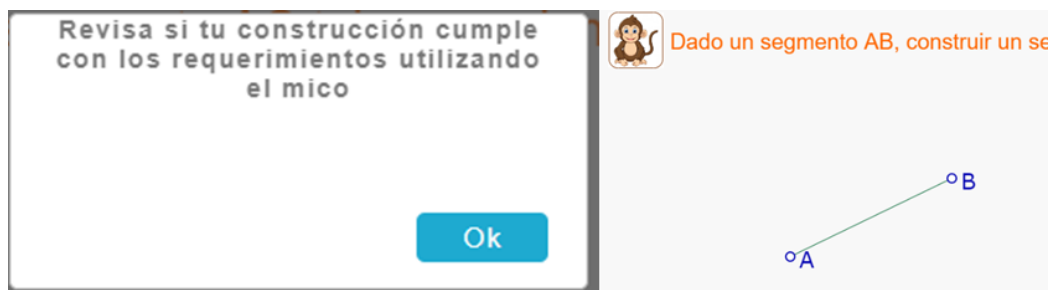
Como primera tarea se muestra en la página de DGPAD un segmento AB, un botón de color rojo para verificar la construcción, la consigna “*Dado un segmento AB, construir un segmento AC tal que su longitud sea el doble de la longitud de AB*” en color naranja, el costo de la construcción y los costos de cada herramienta (ver *Figura 11*).

Figura 11.

Tarea 1 de la Actividad 1



Si el segmento AC es acomodado perceptivamente para que tenga el doble de la medida del segmento AB, al presionar el botón *verificar*, se muestra el cuadro de texto emergente: “*revisa si tu construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico*”. Luego el estudiante debe activar el mico de manera manual y aparecerá en la pantalla tal como se ve en la *Figura 12*. Al presionar sobre la imagen del mico, los objetos construidos se moverán y la relación entre las longitudes de los segmentos AB y AC no se conservarán.

Figura 12.*Retroacción del mico*

En cambio, si al presionar el botón *verificar*, este detecta que el segmento AC cumple con lo solicitado, se mostrará el mensaje “*muy bien, continúe*” y el botón *continuar* en la pantalla, el cual al presionarlo muestra el enunciado “*completa la oración que se mostrará a continuación, escogiendo una de las opciones del menú desplegable*” (ver Figura 13).

Figura 13.*Retroacción pregunta*

Al mismo tiempo que aparece este enunciado con su menú desplegable aparece un botón *verificar respuesta*. Este permite que el estudiante avance solo si se escoge la respuesta correcta. Por ejemplo, si dijeron que AB es el doble de AC, entonces al presionar se muestra el mensaje “¿AB es el doble de AC?”.

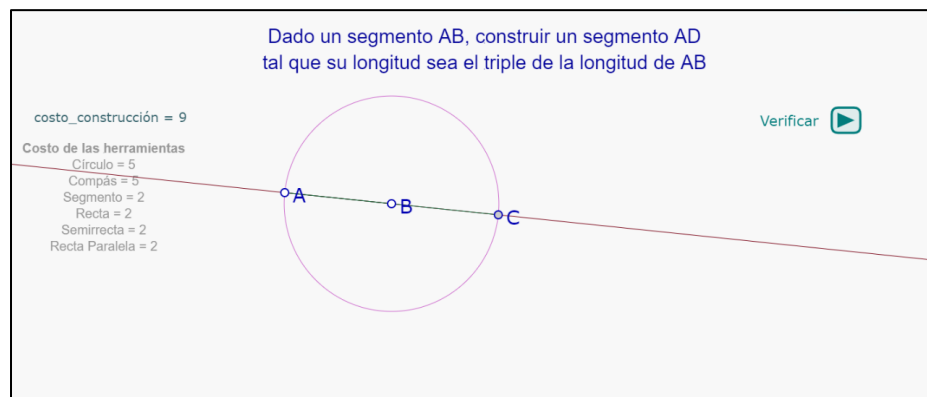
Al completar la oración como AB es la mitad de AC y pulsar el botón *continuar*, se muestra el mensaje “AB es la mitad de AC”, el cual reafirma lo dicho por los estudiantes. Luego se ocultan los botones *continuar* y *verificar respuesta*, para hacer visible el pulsador *siguiente tarea*. Al presionar este último se oculta la consigna de la primera tarea y muestra el enunciado: “Dado un

segmento AB , construir un segmento AD tal que su longitud sea el triple de la longitud de AB ” en color azul y un nuevo botón *verificar* de color verde (ver *Figura 14*).

Los objetos geométricos construidos para resolver la primera tarea permanecen en la pantalla a pesar de que la tarea cambie, esto para que los estudiantes no vean las dos tareas como planteamientos aislados.

Figura 14.

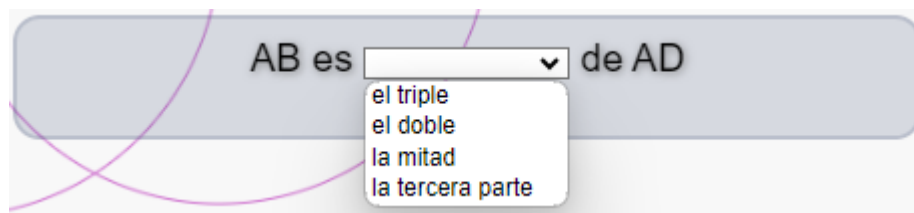
Tarea 2 de la Actividad 1



Al momento de resolver esta segunda tarea los estudiantes se encuentran con retroacciones similares a las de la primera tarea. Pero en el momento de pasar a la pregunta que tiene menú desplegable (ver *Figura 15*) se tiene en cuenta que en esta tarea la respuesta correcta sería decir que AB es la tercera parte de AD .

Figura 15.

Pregunta en la tarea 2 de la Actividad 1



7.1.2. Análisis de las Tareas

A continuación, se describen las distintas posibilidades de interacción en cada una de las tareas.

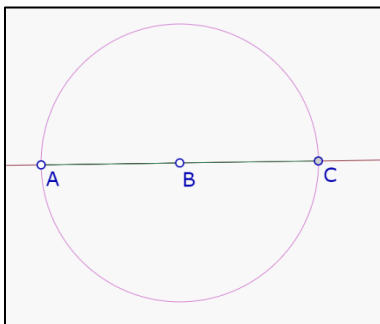
7.1.2.1. Primera Tarea

Se espera que en un primer momento empleen estrategias perceptivas. Es decir, que construya el segmento AC con C como un punto libre en la pantalla. Muestre las medidas de AC, AB y luego muevan el punto C hasta que la medida del segmento AC sea el doble de la longitud del segmento AB. Consideramos que al utilizar el mico invalidará esta estrategia y la abandonarán, por lo que acudirán al uso de las herramientas de construcción.

Se espera que los estudiantes tengan una noción previa del círculo como herramienta para construir segmentos con igual longitud y que en esta tarea movilicen esa idea para construir el doble de un segmento dado. Efectivamente si construyen un círculo con centro en B que pasa por A y construyen una recta que pasa por A y por B, encontrarán que C es la intersección entre el círculo y recta contruidos (ver la *Figura 16*). De este modo, se espera que entiendan que basta seleccionar el segmento como radio de un círculo, para obtener un segmento que mida el doble.

Figura 16.

Solución a la tarea 1 de la actividad 1



Sin embargo, podrían usar esta misma idea de utilizar los círculos para construir el doble, pero en lugar de hacer AC superpuesto al segmento AB, lo hacen en un segmento adyacente de

Figura 17.

[illegible]

7.1.2.2 Segunda Tarea

En esta tarea el estudiante tiene en la pantalla la construcción realizada para la tarea anterior, se espera que empiece a generalizar la idea de utilizar el círculo para multiplicar un segmento. Es decir, ya tienen un segmento AC que es el doble de AB. Para construir el triple de AB, basta con construir un círculo con centro en C que pase por B. La intersección entre la recta AB y el último círculo construido será el punto D.

Luego, se da la misma reflexión sobre el hecho de que al construir el triple, a la vez se está construyendo un segmento que está dividido en 3 partes iguales, es decir, AB es la tercera parte de AD.

Al final de la segunda tarea, el profesor podría preguntar ¿cómo hacemos si queremos construir un segmento que mida cuatro o cinco veces el segmento AB? Esta pregunta permite determinar si el estudiante ha descubierto una estrategia para multiplicar segmentos utilizando círculos.

7.2 Segunda Actividad

Esta actividad consta de 3 tareas, que buscan concretar el uso del TFP como mecanismo para transportar razones de un segmento a otro.

En un primer momento, se quiere que identifiquen que en un par de triángulos si dos pares de lados correspondientes tienen la misma razón y cada uno de estos dos pares están alineados, entonces el tercer par de lados tendrán la misma razón y serán paralelos. Cuando un par de triángulos tienen esta relación, se dice que están en posición de similitud.

Luego, con la relación de paralelismo identificada se quiere que los estudiantes la utilicen para transportar razones. En este punto se utiliza la estrategia del costo de las herramientas para que los estudiantes construyan una razón en un par de lados utilizando el paralelismo en vez de uno o más círculos.

7.2.1. Diseño de las tareas

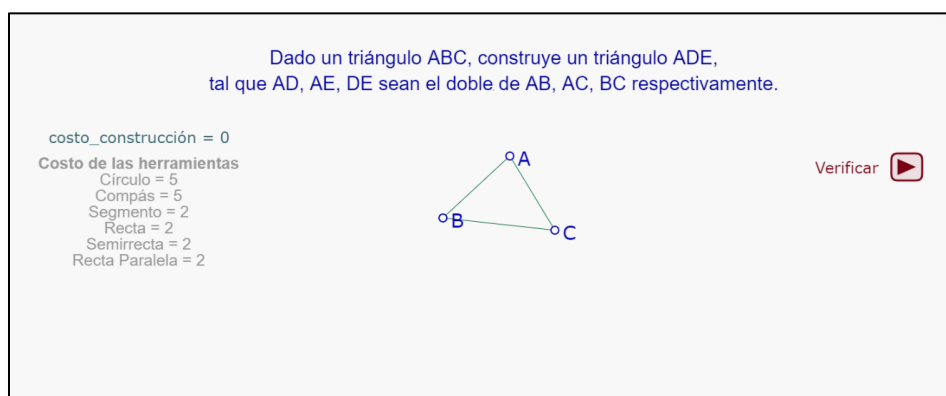
Al comenzar la actividad se les muestra en la pantalla un triángulo ABC, un botón *verificar* y el enunciado “*Dado un triángulo ABC, construye un triángulo ADE, tal que AD, AE, DE, sean el doble de AB, AC, BC respectivamente*” acompañado de una expresión *costo_construcción* (ver

la *Figura 18*). Se decidió que el enunciado debe ser específico con la correspondencia entre los dos triángulos para facilitar la programación y verificar la construcción del triángulo ADE de manera más sencilla. Además, se pide un triángulo ADE, para que los triángulos coincidan en el vértice A y así evitar que deban garantizar la congruencia de ángulos entre los triángulos.

Por otra parte, si los alumnos persisten en construir utilizando solo la percepción o medidas de los segmentos, al momento de verificar la construcción hay una retroacción que lo envía a revisar la construcción usando la herramienta del mico.

Figura 18.

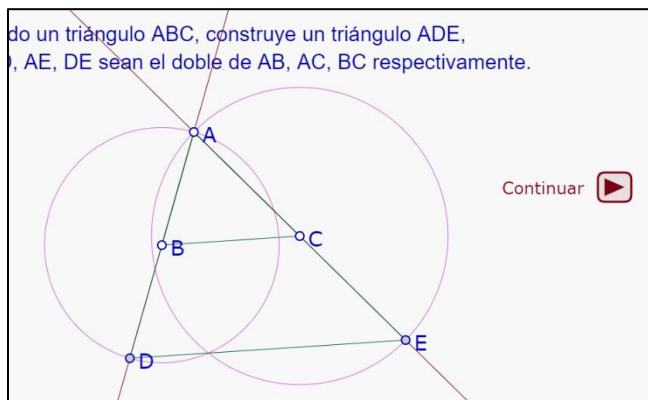
Tarea 1 de la Actividad 2



Se espera que utilizando lo empleado en la actividad anterior, dupliquen los dos lados adyacentes al vértice A. Luego al presionar el botón de *Verificar*, si el triángulo ADE está construido según las condiciones, se muestra el botón *Continuar* de color rojo y se oculta el botón *Verificar* (ver la *Figura 19*), que al presionarlo muestra la pregunta de opción múltiple para completar las oraciones que se ven en la *Figura 17*.

Figura 19.

Botón continuar en la tarea 1 de la actividad 2



Al presionar el botón *Continuar* se muestra el mensaje que enuncia las preguntas con menú desplegable y a la vez se muestra el recuadro con oraciones para completar que se ven en la *Figura 20*. Además, se muestra en pantalla el botón *verificar respuesta*, el cual al presionarlo identifica si las afirmaciones son correctas.

Figura 20.

Pregunta 1 para la tarea 1 de la actividad 2

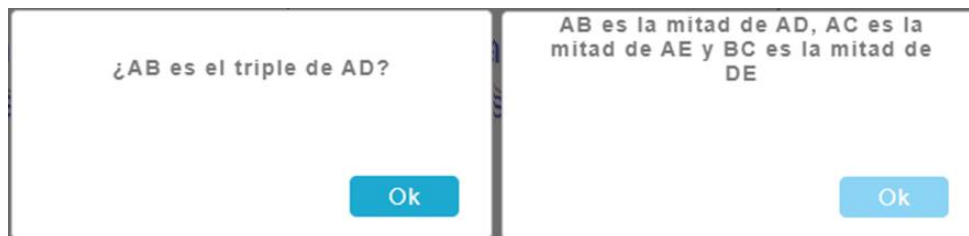
AB es	de AD	AB es	de AD
AC es	de AE	AC es	de AE
BC es	de DE	BC es	de DE

el doble
el triple
la mitad
la tercera parte

De manera similar a la actividad anterior, las retroacciones ante las respuestas del estudiante son de dos formas: si la respuesta es incorrecta entonces se mostrará entre signos de interrogación la afirmación hecha por el estudiante, en cambio, si la respuesta es correcta se reafirmará mediante un mensaje (ver la *Figura 21*).

Figura 21.

Retroacción a la pregunta de la tarea 1 de la actividad 2



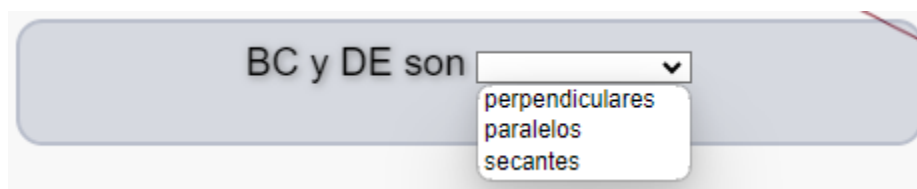
¿AB es el triple de AD?	AB es la mitad de AD, AC es la mitad de AE y BC es la mitad de DE
Ok	Ok

Luego, se muestra nuevamente el botón Continuar, esta vez de color verde para denotar que hubo un cambio. Al pulsarlo se exhibe la frase: “BC y DE son” junto a un menú desplegable que tiene las opciones: perpendiculares, paralelos, secantes (ver la *Figura 22*).

Este cuestionamiento busca llamar la atención en la relación de paralelismo entre el segmento BC y DE, como consecuencia de haber construido el triángulo ADE en posición de similitud al triángulo ABC.

Figura 22.

Pregunta 2 para la tarea 1 de la actividad 2



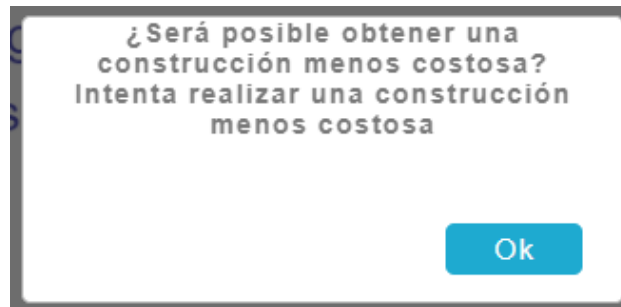
BC y DE son

- perpendiculares
- paralelos
- secantes

Al responder la segunda pregunta de manera correcta, se muestra el botón Siguiente tarea, al presionarlo muestra el mensaje “¿Será posible obtener una construcción menos costosa? Intenta realizar una construcción menos costosa” (ver la *Figura 23*).

Figura 23.

Pregunta final para la tarea 1 de la actividad 2



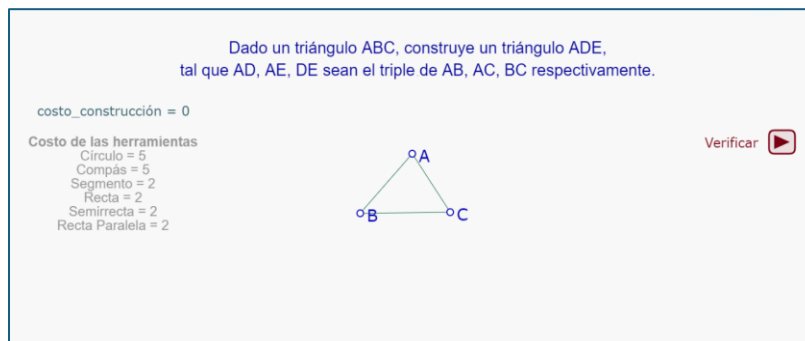
En cuanto a la segunda tarea, se muestra el mismo enunciado de la tarea 1 y la misma estructura del botón verificar. Pero en esta tarea no se realizan las preguntas que se ven en la *Figura 20* y *Figura 12*, dado que el objetivo de esta segunda es otro. En el momento en que el estudiante resuelva la tarea al presionar el botón verificar se muestra el mensaje de la *Figura 24*.

Figura 24.

Retroacción tarea 2 de la actividad 2



En cuanto a la tercera tarea (ver la *Figura 25*), se propone ya no construir el doble sino el triple de las longitudes de los lados del triángulo dado. En esta tarea también se hacen las mismas preguntas con menú desplegable que se ven en la *Figura 20* y *Figura 12*. Esto para identificar la relación inversa entre cada lado del triángulo ABC y su lado correspondiente en el triángulo ADE.

Figura 25.*Tarea 3 de la Actividad 2*

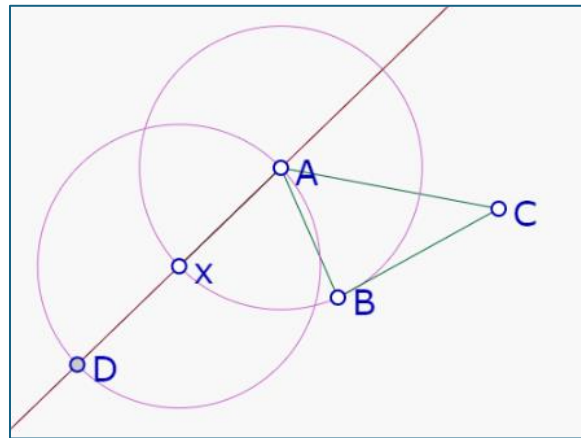
En general, la tercera tarea está programada de manera similar a las dos tareas anteriores, pero tiene un objetivo diferente.

7.2.2 *Análisis de las Tareas*

7.2.2.1. Primera Tarea

Al iniciar la segunda actividad se espera que hayan abandonado las estrategias perceptivas, es decir, que no utilicen las medidas de los segmentos para arrastrarlos e intentar acomodar las longitudes para que cumplan con los requerimientos. Sin embargo, para los estudiantes no es sencillo abandonar estas estrategias, por lo cual se sigue insistiendo en que utilicen el mico para validar si las construcciones cumplen con lo solicitado.

Aquí se hace importante la construcción que hacen los estudiantes para duplicar un segmento, porque si realizan la alternativa de construcción que expusimos anteriormente. Es decir, si construyen el segmento AD siendo el doble de AB y D no está alineado con A y con B (ver la *Figura 26*), entonces al momento de construir el segmento AE, aparte de garantizar que sea el doble de AC, deben garantizar que $\angle BAC \approx \angle DAE$ para que se cumpla que DE sea el doble de BC.

Figura 26.*Dificultad en la tarea 1 de la actividad 2*

Esto supone una dificultad, porque las tareas no han proporcionado maneras de garantizar la congruencia de ángulos. Por esto el profesor debe intervenir y solicitar una construcción menos costosa.

De este modo, se espera que construyan el segmento AD, donde D está alineado con A y B, y el segmento AE, donde E está alineado con A y C. Como consecuencia, el segmento DE tiene el doble de la longitud del segmento BC y, además, son paralelos. Por medio de las preguntas de selección múltiple se busca que el estudiante reflexione sobre estas propiedades que surgieron de la construcción realizada.

Al terminar esta tarea se le pregunta al estudiante si es posible realizar la misma construcción, pero menos costosa.

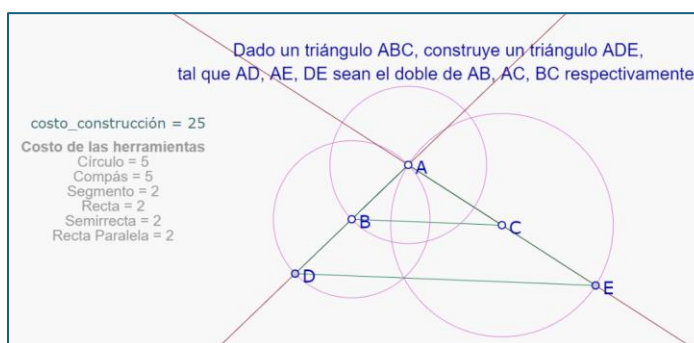
7.2.2.2. Segunda Tarea

La segunda tarea se presenta en una ventana diferente a la de la tarea 1, para que los estudiantes puedan volver a ella cuando consideren necesario o si el profesor lo sugiere.

Es importante tener en cuenta que, a veces los estudiantes añaden elementos innecesarios a sus construcciones que aumentan el costo. Por ejemplo, en la *Figura 27* hay un círculo con centro en A que pasa por B que en realidad no está relacionado con los demás objetos construidos. Este círculo hace que la construcción cueste 25, pero en realidad cuesta 20, ya que el círculo se puede eliminar sin afectar la construcción.

Figura 27.

Mayor costo de construcción



Si la construcción en la primera presenta las características expuestas anteriormente, los estudiantes podrían, en la segunda tarea, realizar la misma construcción eliminando los objetos geométricos que son innecesarios. Esto hace que la tarea sea menos costosa, pero no cumple el objetivo de que los estudiantes usen el paralelismo para transportar razones. Por esto el profesor debe intervenir y pedirle al estudiante otra construcción que sea menos costosa, de modo que deban utilizar las rectas paralelas para reducir el costo de la construcción.

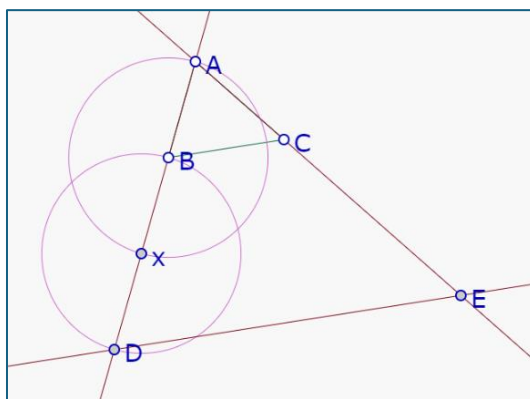
De este modo, se espera que los estudiantes solo utilicen el círculo para garantizar la razón en un par de lados correspondientes y utilicen el paralelismo entre BC y DE que se identificó en la tarea anterior, para garantizar la razón entre los pares de lados faltantes. El costo de las herramientas hace que el estudiante busque cómo garantizar razones de una manera menos costosa, dado que utilizar un círculo cuesta 5 y usar rectas paralelas cuesta 2.

7.2.2.3 Tercera Tarea

En esta tarea se espera que los estudiantes utilicen el paralelismo para construir el triángulo ADE, de tal forma que la longitud de los lados del triángulo ADE sean el triple de los lados correspondientes del triángulo ABC. Como se ve en la *Figura 28*, se triplica el segmento AB y utilizando el paralelismo entre BC y DE, se construye el segmento AE que es triple de AC.

Figura 28.

Solución a la tarea 3 de la actividad 2



7.3. Tercera Actividad

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes transporten razones, como la mitad o la tercera parte, entre segmentos. Además, comprender que, para dividir un segmento, primero se debe construir la razón en un segmento adyacente y luego transportarla utilizando una recta paralela. Para ello se plantean las tareas que describiremos a continuación.

7.3.1. Diseño de las Tareas

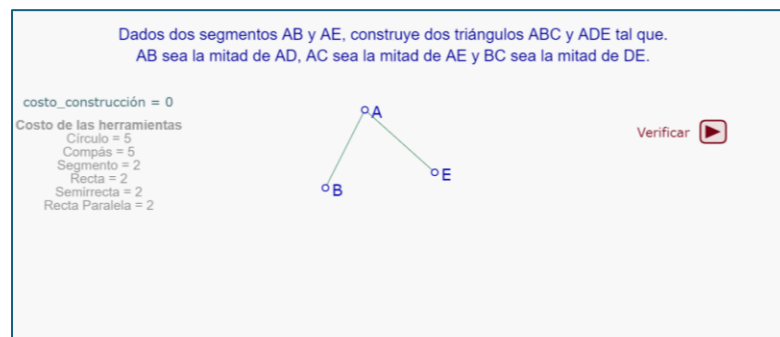
En la primera tarea se propone que “*Dados dos segmentos AB y AE, construye dos triángulos tal que AB sea la mitad de AD, AC sea la mitad de AE y BC sea la mitad de DE*”, en la pantalla se muestran los segmentos AB y AE, el botón *verificar* y la expresión *costo_construcción* (ver la *Figura 29*). El botón sirve para identificar si la construcción realizada es correcta o está

incompleta. Por ejemplo, si el estudiante construye el punto D, pero no traza el segmento AD, se mostrará el mensaje “no hay segmento AD”.

Dado que hay una dependencia entre los triángulos, la existencia y propiedades de uno son necesarias para la construcción del otro. En consecuencia, si existe el triángulo ADE pero no el triángulo ABC se muestra el mensaje “no ha construido el triángulo ABC”.

Figura 29.

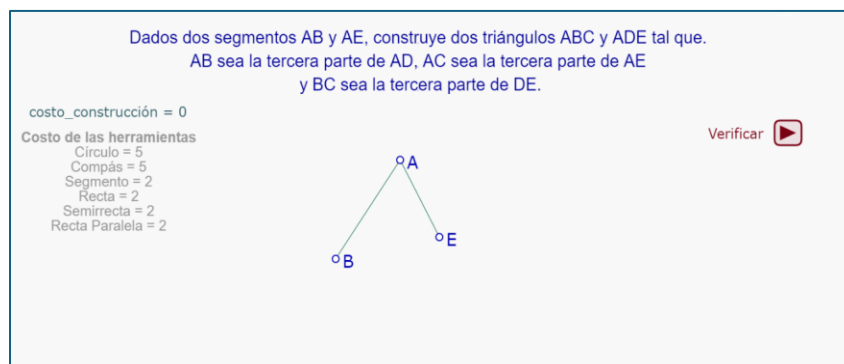
Tarea 1 de la actividad 3



En cuanto a la segunda tarea, también se solicita construir los triángulos ABC y ADE, pero en este caso se pide que los lados del triángulo ABC sean la tercera parte de los lados correspondientes del triángulo ADE (ver la *Figura 30*).

Figura 30.

Tarea 2 de la actividad 3



7.3.2. *Análisis de las Tareas*

7.3.2.1. Primera Tarea

En esta tarea ya no se pide construir el doble un segmento sino de la mitad, para poner en juego la relación inversa que se ha trabajado en las tareas anteriores. En la actividad previa se pide construir un triángulo ADE cuyos lados sean el doble de los del triángulo ABC. Sin embargo, en esta tarea se proporciona solo un lado de cada triángulo, los cuales no son correspondientes entre sí. Lo que significa que, por un lado, se tiene el segmento AB que es la mitad de un segmento AD que se debe construir y, por otro lado, se tiene el segmento AE, para el cual se debe construir un segmento AC que sea la mitad.

La idea de duplicar el segmento AB ya fue trabajada en las tareas anteriores, por lo que los estudiantes no deberían tener problemas en encontrar el doble de dicho segmento. Sin embargo, encontrar la mitad de un segmento es una tarea nueva.

Para este segundo interrogante es importante reflexionar sobre la actividad inmediatamente anterior. De esa tarea se sabe que C debe ser colineal a A y E, y que los segmentos BC y DE son paralelos. Esta última propiedad es la clave para resolver la tarea.

Si para los estudiantes esta idea no es inmediata se les pedirá que revisen las propiedades identificadas en la actividad anterior y busquen relaciones entre dicha actividad con la presente tarea.

7.3.2.2. Segunda Tarea

Siguiendo la dinámica de las tareas anteriores, donde después de proponer un problema sobre duplicar una longitud, se propone una tarea para triplicarla. En este caso la primera tarea pide construir la mitad de la longitud de los segmentos y la segunda pide la tercera parte. Este

enfoque permite a los estudiantes conjeturar sobre cualquier otra proporción entera que se pida o necesite construir. Es decir, los estudiantes podrán generalizar las estrategias utilizadas para garantizar la mitad y la tercera parte, aplicándolas a situaciones donde se les pida, por ejemplo, la quinta parte.

7.4. Cuarta Actividad

Esta actividad corresponde al problema de dividir un segmento en partes iguales. Para lo cual en la primera tarea se les pide a los estudiantes que dividan un segmento en dos partes iguales; en la segunda tarea se pide que dividan el segmento en tres partes iguales.

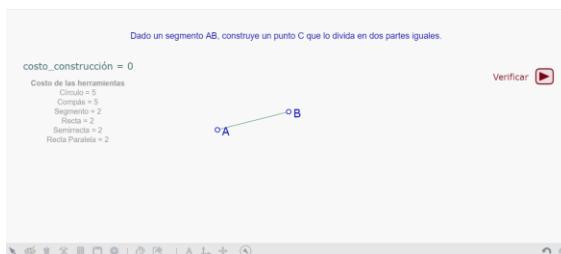
El objetivo de esta actividad es que los estudiantes empleen las estrategias desarrolladas en las tareas anteriores para resolver este problema. Al hacerlo, los estudiantes generalizan al TFP como una herramienta para dividir un segmento en partes iguales.

7.4.1. Diseño de las tareas

En la primera tarea se pide que “*dado un segmento AB, construye un punto C que lo divida en dos partes iguales*”, se le proporciona el segmento AB y el botón *verificar* (ver Figura 31). Al presionar el botón se identifica si el punto C está en el segmento AB, en caso de que no se muestra el mensaje “*El punto C no está en el segmento AB*” (ver Figura 32), en el caso contrario se pasa a verificar si el punto C divide al segmento en dos partes iguales.

Figura 31.

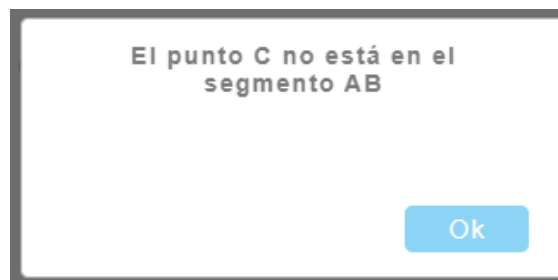
Tarea 1 de la actividad 4



Si el punto C no divide al segmento AB en dos partes iguales al presionar el verificar se muestra el mensaje “*revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico y arrastrando el punto C*”. Se hace la aclaración de que deben arrastrar el punto C, porque el mico mueve los puntos libres; sin embargo, si el punto está sobre un segmento, este mantiene la misma proporción en el segmento al usar el mico. Es decir, si se construye el punto C en el segmento AB y se ajusta el punto para que parezca estar en la mitad del segmento, al usar el mico, el punto seguirá pareciendo estar en la mitad.

Figura 32.

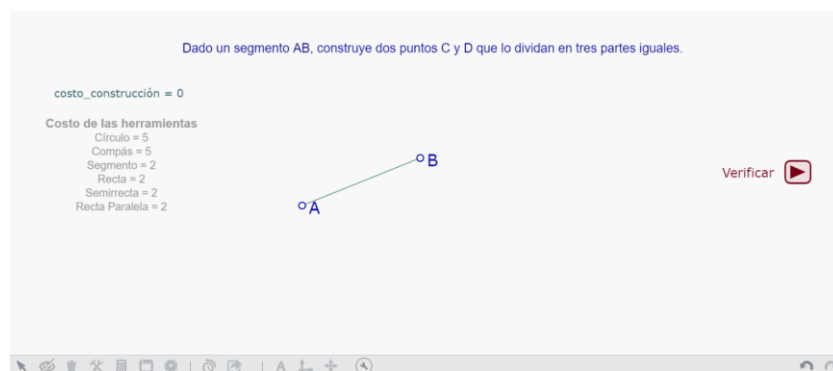
Retroacción botón verificar de la tarea 1 en la actividad 4



En cuanto a la segunda tarea se muestra la consigna “*Dado un segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan en tres partes iguales*”, un segmento AB y el botón *verificar* (ver Figura 33).

Figura 33.

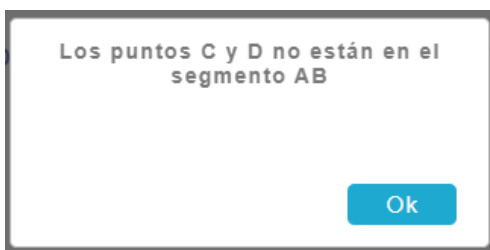
Tarea 2 de la actividad 4



Al igual que en la tarea anterior, al presionar el botón *Verificar*, este identifica si están contruidos los puntos C y D, además, si estos puntos están en el segmento AB o se construyeron fuera de él. En el caso de que estén fuera del segmento se muestra el mensaje “*los puntos C y D no están en el segmento AB*” (ver Figura 34).

Figura 34.

Retroacción botón verificar de la tarea 2 en la actividad 4



7.4.2 Análisis de las Tareas

7.4.2.1. Primera Tarea

Puede ocurrir que los estudiantes no diferencien entre la tarea de duplicar un segmento y dividirlo. Por lo cual, podrían construir C haciendo que el segmento AC sea el doble, en este caso al presionar el botón se mostrará el mensaje “*el punto C no está en el segmento AB*”. Esta retroacción enfatiza en el hecho de que el punto C, debe dividir al segmento AB en dos partes iguales y no duplicarlo.

Se espera que recuerden que, en la primera tarea de la tercera actividad, ya dividieron un segmento en dos partes iguales. Ahora deben analizar qué construcción deben realizar para resolver este problema. Si los estudiantes no ven la relación de esta tarea con la tarea anterior, el profesor puede sugerir el análisis de esta.

En consecuencia, se movilizan los hechos geométricos descubiertos en las anteriores tareas para construir el punto C. La manera de hacerlo es construir un segmento adyacente al segmento

Figura 35.

En cuanto a esta tarea se anticipa que intentarán generalizar la idea utilizada anteriormente, es decir, ahora al segmento auxiliar lo triplican y usando el paralelismo transportan la razón para obtener la tercera parte de AB. Al finalizar el profesor podría preguntar: ¿Cómo se divide un segmento en cuatro o cinco partes iguales?, esta pregunta invita a generalizar el uso de esta estrategia para garantizar otras razones fraccionarias.

La secuencia de actividades fue planeada para que los estudiantes desarrollen los conocimientos que les permita identificar cómo funciona el TFP en los triángulos en posición de similitud y movilicen los hechos mencionados anteriormente para resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales. Por ello, en la primera actividad los alumnos aprenden a multiplicar un segmento, y a través de las retroacciones del medio, descubren que a la vez se obtiene un segmento que está dividido en partes iguales. La segunda actividad tiene como propósito que

movilicen el conocimiento adquirido en la primera actividad para construir un triángulo que sea semejante a uno dado inicialmente, donde deben multiplicar segmentos. También se busca que los estudiantes identifiquen y utilicen las rectas paralelas para transportar razones, lo que les permite multiplicar segmentos y así construir triángulos semejantes. En la tercera actividad, se brinda un andamiaje para que los estudiantes pasen de utilizar las rectas paralelas para garantizar razones enteras (mitad y tercera parte) y empiecen a transportar razones fraccionarias. Finalmente, al retirar el andamiaje de la tercera actividad, se espera que los estudiantes reconozcan los objetos o acciones que ayudaron a resolver la tarea anterior e intenten movilizar estas ideas para resolver el problema propuesto.

Se considera que al realizar estas tareas se identifican los diferentes hechos geométricos que intervienen en la división de un segmento. Por lo cual, la solución a este problema se va construyendo a medida que van sucediendo las tareas. Sin embargo, es posible que la solución al problema de dividir un segmento en partes iguales requiera de otros elementos que están al margen del diseño. Por ejemplo, cuestiones propias del contrato didáctico o aspectos cognitivos asociados al problema y al lenguaje.

Una estrategia que se empleará para llevar esta secuencia a cabo es abrir las tareas en diferentes ventanas y dejarlas abiertas en simultáneo. De modo que, los estudiantes puedan ir y volver a las tareas si lo requieren para recuperar las estrategias desarrolladas. Incluso, el profesor podría sugerirlo cuando considere pertinente. Esto también favorece el proceso de generalización de dichas estrategias. Por ejemplo, al desarrollar la tarea de construir un triángulo ADE tal que sus lados sean el doble de los lados de ABC, teniendo esta tarea abierta, para los estudiantes es más sencillo recuperar la idea para construir un triángulo ADE tal que los lados sean el triple de los lados de ABC.

En cuanto a las acciones de los estudiantes, se espera que realicen construcciones perceptivas, es decir, construcciones que tienen argumentos visuales en lugar de teóricos. Además, las retroacciones están programadas para que los estudiantes validen si su construcción cumple con los requerimientos. Por esto, se habilita la acción de arrastre con el “mico”, dado que esta opción mueve los objetos, sin verse influenciado por las estrategias visuales de los estudiantes. A través del mico se busca incentivar la necesidad de que las construcciones soporten el arrastre, como parte fundamental del contrato didáctico, para que los estudiantes incorporen elementos teóricos a las construcciones. Esto se traduce en que, si una construcción cumple con los requerimientos entonces soporta el arrastre. Por lo cual, las estrategias perceptivas serán abandonadas gracias a las retroacciones que les pide utilizar el mico.

Aunque estas tareas tienen programadas retroacciones, que son hechas con base en las acciones que se espera realicen los alumnos, la intervención del profesor no se retira por completo. Por ejemplo, en la cuarta actividad el profesor pregunta por razones mayores porque se debe realizar un proceso de institucionalización de los conocimientos desarrollados a través de la secuencia.

8. Análisis a Posteriori

En este capítulo se comparan las hipótesis planteadas en el análisis a priori con los resultados obtenidos de la experimentación de las actividades. Estas fueron implementadas con dos estudiantes de noveno grado de una institución pública de Bucaramanga. Previamente habían usado SGD, pero no DGPAD, de modo que antes de empezar el pilotaje se propusieron dos tareas para que conocieran el software. Para la recolección de datos se grabaron tanto la pantalla como el audio, permitiendo capturar las interacciones verbales y las acciones en DGPAD.

Los resultados de la experimentación se exponen mediante tablas de tres columnas, la primera para enumerar, la segunda indica el sujeto que está actuando (P, E1 y E2 para indicar al profesor y a los dos estudiantes respectivamente), la tercera muestra la acción del sujeto (la distribución de esta será, si el texto aparece sin paréntesis, indica que es diálogo, si aparece entre paréntesis “()” indica que es algo que se observa en el video pero no es dicho, por último, si el texto aparece entre paréntesis cuadrado “[]” indica que es una interpretación de lo realizado o dicho. Además, cuando sea necesario se muestran imágenes para evidenciar lo que sucedió).

Los soportes presentados en cada actividad no corresponden a la transcripción completa, si el lector requiere una lectura más detallada en el apartado de los apéndices se encuentra la transcripción completa.

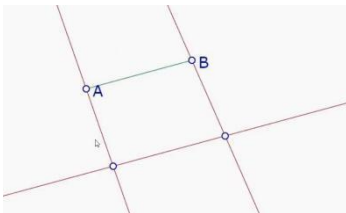
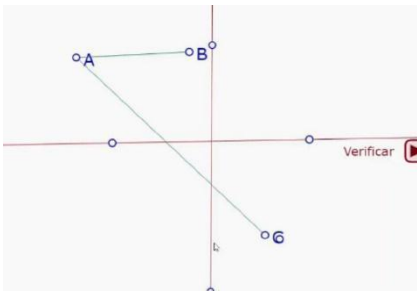
8.1. Primera Actividad

En el presente apartado presentamos el análisis y evidencias de las dos tareas planteadas en la primera actividad, cuyo objetivo es que los estudiantes contemplen al círculo como una herramienta para multiplicar segmentos.

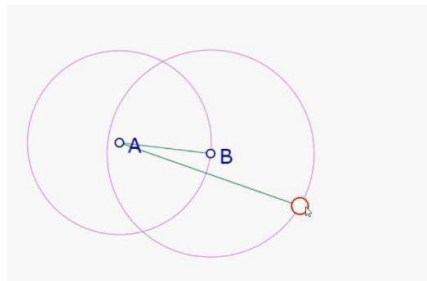
8.1.1. Primera Tarea

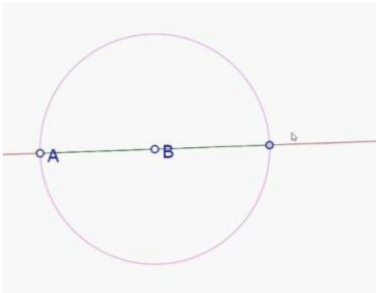
Esta primera propone: *“Dado un segmento AB, construir un segmento AC tal que su longitud sea el doble de la longitud de AB”*. En la *Tabla 1* se evidencia que las primeras estrategias que usan los estudiantes son de ajuste perceptivo. Esto se ve reflejado en las líneas 5 y 6. Sin embargo, en la línea 17 vemos que sin necesidad de presionar el botón verificar los estudiantes invalidan la construcción realizada de manera perceptiva porque saben que, al presionar el mico, la relación entre los segmentos no se conservará. Seguidamente empiezan a buscar otras estrategias que les permita construir un segmento AC que cumpla con las condiciones.

Tabla 1.*Evidencias de la primera tarea*

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
4	E2	Primero la reflejamos (Traza una recta paralela al segmento AB que pasa por un punto libre de la pantalla).
5	E1	Ahora una recta que una el segmento AB con la recta paralela, pero que sea el doble (Traza una recta que pasa por B y un punto de la recta paralela, luego traza una recta que pasa por A y otro punto de la recta paralela).
		
6	E2	Se supone que el punto que está debajo de A debe ser C y que AC debe ser el doble de AB. ¿Cómo hacemos para que sea el doble?
7	E1	(Borra la construcción realizada por E2 y construye un círculo centro en A que pasa por B).
8	E2	No, ese círculo nos ayuda a construir un segmento igual... Intentemos hacer una “t” (Borra la construcción realizada por E1).
9	E1	¿Una “t”? ¿cómo así una “t”?
10	E2	Sí, más o menos así... (Borra el círculo y construye de manera perceptiva dos rectas perpendiculares cerca al segmento AB). No sé qué estoy haciendo, pero aquí se vería reflejado el punto C. (Construye el punto C y el segmento AC).
		
Es que es como para reflejarlo con otro, pero no sé... (Borra las rectas que construyó en posición de “t”).		

11	E1	No sé qué hizo usted. (Selecciona el punto A como centro de un círculo, pero duda si elegir C o B para terminar de construir el círculo y decide no construirlo).
12	E2	No, ese no se puede porque ese es para construir segmentos del mismo tamaño.
13	P	¿Cuál es la idea que tiene E1?
14	E1	Quiero sacar un segmento que sea igual a AB y luego, con la misma, sacar uno que sea el doble. (Construye un círculo con centro en A que pasa por B y construye un punto C libre en la pantalla).
15	E2	¿Y si intenta construir otro círculo del B al C? ¿O del A al C?
16	E1	(Construye un círculo con centro en A que pasa por C y empieza a arrastrar el punto A). No, no da. (Presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico”).
17	E2	Es que cuando activemos el mico, se debe cumplir que siempre AC sea el doble de AB. Entonces aquí, cuando el mono mueva, no siempre va a ser el doble.
18	E1	¿Entonces cómo hacemos que sea el doble? Ya sabemos que se puede sacar un segmento que mida lo mismo. (Borra el segmento AC, el punto C y el círculo con centro en A que pasa por C).
19	E2	Yo creo que con un círculo con centro en B. (Construye el círculo con centro en B que pasa por un punto libre en la pantalla. Luego, traza el segmento que une el punto A con el punto libre y mueve el punto A). Pero vea que aquí no termina siendo el doble.



20	E1	(Borra la construcción realizada por E2 y construye un círculo con centro en A que pase por B y otro círculo con centro en B que pase por A. Luego, construye un punto C libre que está en el segundo círculo y crea el segmento AC).
21	E2	(Muestra las medidas de AB y AC).
22	E1	(Arrastra el punto C y se da cuenta que en un momento AC es el doble de AB. Luego, borra el círculo con centro en B que pasa por A. Decide borrar el punto C y construir una recta que pasa por A y por B, traza la intersección entre la recta y el círculo).
		
23	E2	Pero ¿ese punto sería C?
24	E1	(Nombra al punto como C y le da en el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “Muy bien, continúe”, a la vez se oculta el botón <i>verificar</i> y se muestra el botón <i>continuar</i>).

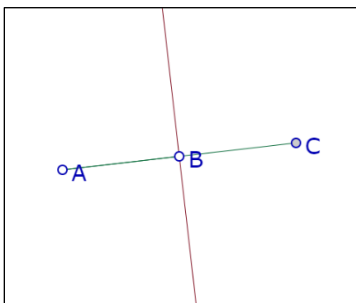
En consecuencia, E2 en la línea 8 y 10 propone que el punto C resulta de reflejar al segmento AB respecto a unas rectas que fueron construidas de manera que parecen ser perpendiculares. No obstante, para E1 esta idea no es clara y por eso deciden desecharla.

Sin embargo, esta idea de usar la simetría axial no es tan alejada de la tarea, pues sabemos que la distancia entre un punto y su respectiva imagen reflejada es el doble de la distancia entre el punto y el eje de simetría (ver la *Figura 36*). Pero, en la construcción que realizaron hace falta garantizar que el eje de simetría sea perpendicular al segmento AB y que pase por B. Esto asegura que la distancia del punto A a la recta sea la misma que la longitud del segmento AB. Luego, al

reflejar al punto A respecto a dicha recta se obtendrá un punto C, el cual cumplirá que AC sea el doble de AB.

Figura 36.

Uso de simetría axial para duplicar



Esta estrategia no les funcionó porque los estudiantes no tenían claridad sobre este concepto geométrico y la llevaron a cabo ajustando la simetría perceptivamente. Además, como en la programación de las tareas se restringieron las herramientas para favorecer el uso del círculo, no había herramientas que permitieran llevar a cabo dicha construcción sin que antes se usara la herramienta círculo.

Por otra parte, E1 en repetidas ocasiones propone la idea que se ve en la línea 7 y 11 de la *Tabla 1*, pero E2 respondía con negación a dicha sugerencia. La estrategia consistía en construir un círculo con centro en A que pasa por B, pero el estudiante 2 mencionaba en repetidas ocasiones que usar el círculo para garantizar que la longitud de AC fuera el doble de la longitud de AB no servía porque el círculo sólo permitía construir segmentos con la misma longitud.

El profesor al ver que el E1 se abstenía de desarrollar su idea decide intervenir y establecer un espacio para que comunique sus ideas (línea 13), lo que permite un espacio de conversación entre los estudiantes. Esta intervención del profesor fue pertinente, pues no emite juicios sobre las

estrategias de los estudiantes, pero sí logró que ambos estudiantes participaran de igual manera en el desarrollo de las tareas, favoreciendo también la interacción con el medio.

El estudiante comunica en la línea 14 que, su idea es construir un segmento de igual longitud que AB y luego sacar un segmento que sea el doble, utilizando la misma idea. Esto supone que quiere realizar la construcción alternativa que se mostró en el análisis a priori, que consistía en construir al segmento AC de manera adyacente al segmento AB. Sin embargo, vemos que el primer intento de desarrollar dicha idea construye el círculo y luego un punto C libre para ubicarlo sobre el círculo perceptivamente. Lo que supone que las estrategias de esta índole no son sencillas de abandonar, y a menudo los estudiantes las dejan de lado y luego las retoman.

A pesar de que el primer intento se realizó por medio de la percepción, los estudiantes eran conscientes de que dicha construcción no era la que se pedía, pues decidieron no presionar el botón verificar. Luego, en la línea 20 el E1 está convencido de que, si ya saben cómo construir un segmento que mida lo mismo, pueden emplear esa idea para construir uno que mida el doble. Esto implica que el estudiante empieza a movilizar sus conocimientos, pues por medio de la generalización de la idea de garantizar segmentos de igual medida, logrará resolver el problema.

Además, en las líneas 21 y 22 deciden construir el círculo con centro en A que pasa por B y otro con centro en B que pase por A. Mediante el arrastre de los objetos deciden probar poner al punto C en el segundo círculo y para comprobar que AC es el doble de AB deciden mostrar las medidas de dichos segmentos. Igualmente, por medio del arrastre constatan que cuando C es colineal con los puntos A y B entonces AC es el doble de AB. Al observar esto, el estudiante 1 borra el punto C, construye una recta AB y su intersección con el círculo. En este momento el estudiante 1 decide presionar el botón verificar, pues él ya anticipa que su construcción cumple con los requerimientos y efectivamente, el mensaje que se muestra es *“Muy bien, continúe”*.

Ahora, cuando se muestra la pregunta con menú desplegable se ve que el estudiante 1 en el apuro de avanzar no lee bien la consigna y enuncia que AB es el doble de AC. Pero al presionar el botón se muestra el mensaje: “¿AB es el doble de AC?”. Rápidamente E2 corrige diciendo que AB es la mitad de AC. En este sentido el efecto de la retroacción que plantea la pregunta es positivo puesto que, devolvió el problema al alumno, constituyendo un acto de devolución.

A pesar de que los estudiantes en un principio pensaron en construir al segmento AC adyacente al segmento AB, a través de las interacciones y retroacciones se encaminó a los estudiantes a la construcción del segmento AC superpuesto al segmento AB, hecho fundamental para el desarrollo de las siguientes tareas.

8.1.2. Segunda Tarea

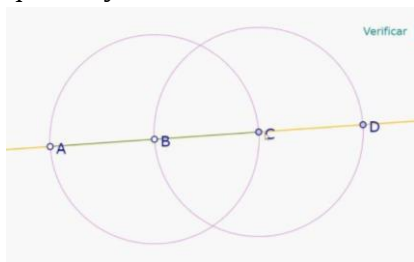
En esta tarea se pide que: “Dado un triángulo AB, construir un segmento AD tal que su longitud sea el triple de la longitud de AB”. Como se muestra en la *Tabla 2*, el haber propuesto esta tarea en la misma ventana que la primera tarea y conservar la construcción realizada por los estudiantes permitió que rápidamente pensarán en volver a utilizar el círculo como estrategia, tal como se ve en la línea 29.

Tabla 2.

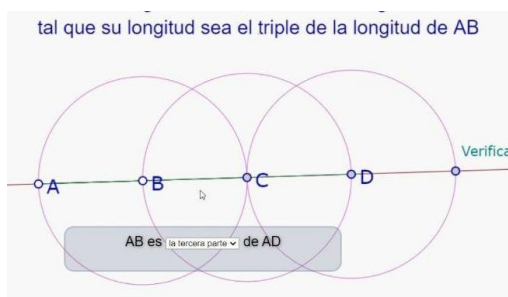
Evidencias segunda tarea de la primera actividad

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
28	E2	(lee la consigna). ¿No se puede hacer otro círculo más grande?
29	E1	¿Qué AD sea el triple? Voy a intentar sacar otro círculo (Construye un círculo con centro en C que pasa por B).

-
- 30 E2 Ajá, entonces D es la intersección. Simplemente trazamos un segmento que vaya desde A hasta la intersección (Construye el punto D).



-
- 31 E1 Mmm, pero queda el punto C ahí.
-
- 32 E2 No pasa nada, porque el círculo fue construido desde el punto C, entonces toca dejarlo ahí.
-
- 33 E1 (Presiona el botón verificar y se muestra el mensaje “no hay segmento AD”. construye el segmento AD y presiona el botón verificar nuevamente, se muestra el mensaje “Muy bien, continúe” y aparece el botón continuar).
-
- 36 P Si quisiéramos construir un segmento que sea 4 veces AB, ¿cómo lo haríamos?
-
- 37 E2 Sacar otro círculo del punto D que pase por C y en la intersección ponemos el punto.



-
- 38 P Muy bien, entonces de este modo podemos duplicar, triplicar y multiplicar el segmento. Entonces pasemos a la siguiente tarea.
-

Como se muestra en la *Tabla 2*, el haber propuesto esta tarea en la misma ventana que la tarea 1 y conservar la construcción realizada por los estudiantes permitió que rápidamente pensarán en volver a utilizar el círculo como estrategia, tal como se ve en la línea 29.

Por otra parte, cuando el profesor en la línea 36 pregunta cómo se construye un segmento que mida 4 veces la longitud del segmento AB, los estudiantes rápidamente argumentan: “Sacar otro círculo del punto D que pase por C y en la intersección ponemos el punto”, esto evidencia que los estudiantes lograron asimilar el hecho geométrico que se quería que los alumnos consolidaran en esta primera actividad.

8.2. Segunda Actividad

La presente actividad se desarrolla con el objetivo de que los estudiantes identifiquen que, para construir dos triángulos en posición de similitud, solo basta construir la razón de proporcionalidad deseada en un par de lados correspondientes de los triángulos y utilizar las rectas paralelas para transportar dicha razón al otro par de lados.

8.2.1. Primera Tarea

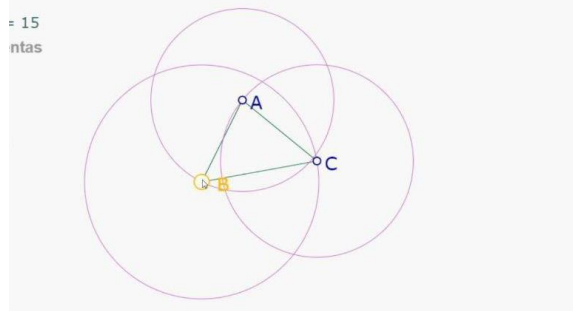
Esta primera tarea propone que: “Dado un triángulo ABC, construye un triángulo ADE, tal que AD, AE, DE, sean el doble de AB, AC, BC respectivamente”. En la Tabla 3, se evidencian las acciones realizadas por los estudiantes, de ella podemos decir que:

La primera idea de los estudiantes fue construir el doble de los lados del triángulo ABC por medio del círculo. Lo que supone que ya piensan en el círculo como una estrategia que permite multiplicar el segmento, la cual es clave para resolver esta tarea, esto podría significar el abandono de las estrategias perceptivas.

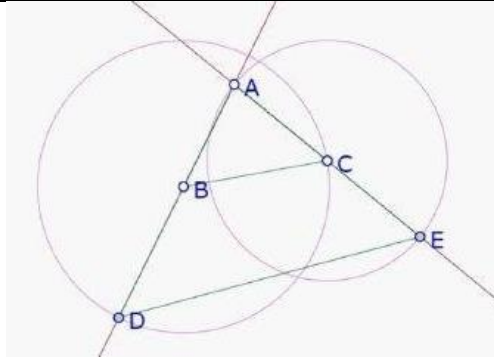
Tabla 3.

Evidencias de la primera tarea de la segunda actividad

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
7	E2	Saque tres círculos para ver (E1 construye un círculo con centro en C que pasa por A, otro círculo con centro en B que pasa por C).



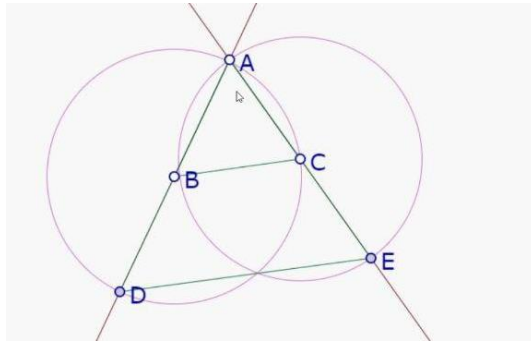
8	E1	¿Será que sí? Estoy dudando. A... B...
9	E2	Entonces toque en el punto A y saque una recta que pase por B y cree otra recta que pase por A y por C. (E1 construye las rectas que le pidió E2). Ahora ponga la intersección.
10	E1	(Construye las rectas que le pidió E2).
11	E2	Ahora ponga la intersección entre la recta AB y el círculo, y ahora lo mismo en la recta AC y el otro círculo.
12	E1	Voy a quitar el círculo con centro en A que pasa por B (Traza el segmento que une las intersecciones).
13		(Presionan el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “No hay ningún lado del triángulo ADE”).
14	E1	¡Ah, ya! Este punto es E y este es D.



Ahora toca verificar

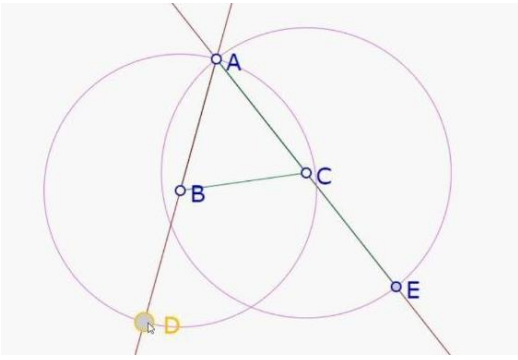
(Presiona el botón *verificar* y se muestra el mensaje “*Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico*”).

15	E2	Si se mueve ya no queda el doble.
16	E1	Si, intentemos mover un círculo (Arrastra el círculo con centro en C que pasa por A).
17	E2	Si, ya no queda... ¡Si!
18	E1	[Sigue moviendo el círculo con centro en C que pasa por A e intenta que A esté en el círculo con centro en B que pasa por C].



Necesitamos fijar al punto A en este círculo y está el doble, ¿sí o no?

19	E2	Pues sí, pero cómo lo fijamos allá. Intente con un círculo con centro en D que pase por A.
20	E1	(Traza un círculo con centro en D que pasa por A y arrastra el punto A) ¡Tengo una idea!, no necesitamos ese círculo. (Borra el círculo con centro en D que pasa por A).
21	E2	No.

22	E1	Necesitamos... Qitemos este círculo. (Borra el círculo con centro en B que pasa por C).
23	E2	¡No! porque se desaparece D.
24	E1	Sí, lo sé (Traza un círculo con centro en B que pasa por A).
25	E2	Ok, del B al A. ¡Ah, ya!
26	E1	(Traza la intersección entre la recta AB y el círculo con centro en B que pasa por A). Y este se llama D.
		
27		(Trazan los segmentos AD, AE y DE, y arrastran el punto A para verificar si cumple lo requerido).
30	E1	AB es el doble de AD.
31	E2	No, AB es la mitad de AD...AC es la mitad de AE y BC es la mitad de DE. (Da clic al botón <i>Verificar respuesta</i> y se muestra el mensaje “ <i>AB es la mitad de AD, AC es la mitad de AE y BC es la mitad de DE</i> ”. Al mismo tiempo aparece un botón <i>Continuar</i> de color verde).
32		(Presionan el botón <i>Continuar</i> y aparece el mensaje que enuncia la oración para completar y se muestra un cuadro que dice “ <i>BC y DE son</i> ”).
33	E2	BC y DE son paralelos ¿será?
34	E1	Si, son paralelos
35		(Verifican la respuesta y aparece el mensaje “ <i>BC y DE son paralelos</i> ”, también se muestra el botón <i>Siguiente tarea</i>).
36	P	¿Por qué BC y DE son paralelos?

37	E2	Si, porque si una se mueve para un lado, la otra también se va moviendo para ese lado. La única diferencia es que es el doble. Tiene el mismo movimiento.
38	P	¿A qué se refiere con “el mismo movimiento”?
39	E2	O sea, si DE queda inclinada para un lado, entonces BC también queda inclinada para ese lado.
40	E1	Porque si se mueven siempre este va a ser el doble de este. (Señala los segmentos DE y BC).

En la línea 7, los estudiantes construyen tres círculos cuando solo eran necesarios dos, pero esto quiere decir que los estudiantes pretendían duplicar los 3 lados usando la estrategia del círculo. Luego, construyen las rectas AB y AC, estas rectas solo les permitirá construir el doble de los segmentos que contienen, olvidándose de construir la recta BC para obtener el doble de este tercer lado.

A pesar de no construir las tres rectas, sí se mantienen los tres círculos, pero se concentran en construir al segmento AD y AE. Sin embargo, en la construcción del primero tienen inconvenientes pues el círculo que construyeron para el doble del segmento AB tiene centro en A y pasa por B, lo que les impide construir un segmento AD que tenga el doble de la longitud de AB. No obstante, como habían construido un círculo con centro en B que pasa por C, en la línea 11 los estudiantes confunden este círculo y lo utilizan para construir a AD como el doble de AB mediante la intersección entre la recta AB y dicho círculo.

En la línea 12 y 14 se dan cuenta que no es necesario duplicar el tercer lado. Al presionar el botón verificar, descubren que no han construido el segmento DE, pero los extremos de este segmento ya están trazados en la construcción realizada.

En el proceso de validación por parte de los estudiantes, al verificar la construcción se muestra el mensaje que les pide usar el mico. Sin embargo, para los estudiantes ya no es necesario usar esta herramienta, pues ellos ya saben que la construcción que realicen debe conservar las propiedades solicitadas a pesar de que los objetos se muevan en la pantalla. Por ello, deciden arrastrarlos manualmente para ver si hay alguna condición que no se cumpla. De esta manera, evidencian que el círculo utilizado no pasa por el punto A, lo que les permite invalidar la construcción, ya que para construir el doble de AB el círculo debe tener centro en uno de los extremos del segmento y pasar por el otro extremo.

Este percance es solucionado por los estudiantes en la línea 26 al construir un nuevo círculo con centro en B que pasa por A. Y así construyen los puntos D y E y trazan el segmento DE. En efecto, esta es una estrategia de solución exitosa, en donde DE es el doble de BC como consecuencia del criterio de semejanza LAL, aunque los alumnos pasan por alto el determinar si esta condición se cumple o no y deciden presionar el botón verificar para validar la construcción. Posiblemente lo obvian por su evidencia perceptiva.

Seguidamente, se muestran las preguntas que buscan relacionar a los segmentos contruidos con sus respectivas mitades, es decir, AB es la mitad de AD, AC es la mitad de AE, BC es la mitad de DE. Pero, en esta última hizo falta reflexionar en el hecho de cómo se garantiza que DE sea el doble de BC o que cadena de acciones llevaron a que se diera este resultado.

Por otra parte, no tienen problema en identificar que BC y DE son segmentos paralelos y en la línea 36 el profesor pregunta por qué estos segmentos son paralelos, a lo que responden que es por cómo se comportan al arrastrar, esta respuesta es dada con argumentos visuales de la construcción, mas no por razonamientos deductivos. Sin embargo, no se puntualiza en el hecho de

que, al garantizar las razones en dos lados de los triángulos, entonces el tercero resulta ser paralelos y cumple con la misma razón.

8.2.2. Segunda Tarea

Aunque esta tarea comienza cuando en la tarea anterior se les pregunta a los estudiantes: “¿Será posible obtener una construcción menos costosa? Intenta realizar una construcción menos costosa”. Esta tarea se propone el siguiente enunciado: “Dado un triángulo ABC , construye un triángulo ADE , tal que AD , AE , DE , sean el doble de AB , AC , BC respectivamente”. Recordemos que esta tarea es la misma que la primera de esta actividad, pero aquí se tiene en cuenta el costo de las herramientas. Por esto, antes de comenzar las tareas a los estudiantes se les explicó que la expresión “costo_construcción” contabilizaba el costo de la construcción a medida que iban utilizando las herramientas. Además, se les aclaró que en todas las tareas debían realizar la construcción menos costosa posible. Este hecho parte del contrato didáctico entre el profesor y los estudiantes, como veremos más adelante, beneficia al aprendizaje por adaptación de los estudiantes en las tareas.

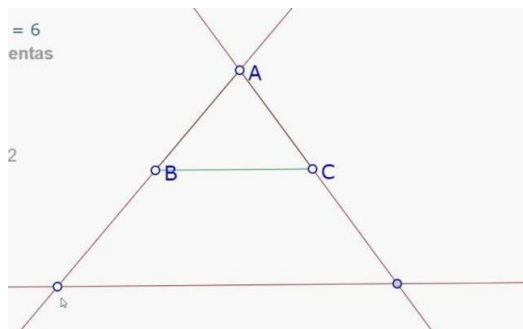
Tabla 4.

Evidencias segunda tarea de la segunda actividad

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
46	E1	¿Qué valga menos de 20?
47	E2	¿Y si lo hacemos con rectas paralelas? O sea, como semejanza, ¿Si me entiende?
48	E1	Puede ser, sí. ¿Cómo era?
49	E2	Primero saque las rectas de los lados desde el A.
50	E1	(Traza las rectas AC y AB).

51 E2 Ahora trace una recta como horizontal. [Se refiere a una recta paralela al segmento BC].

52 E1 (Traza una recta paralela al segmento BC que pasa por un punto en la recta AB y traza la intersección entre la recta AC y la recta paralela).

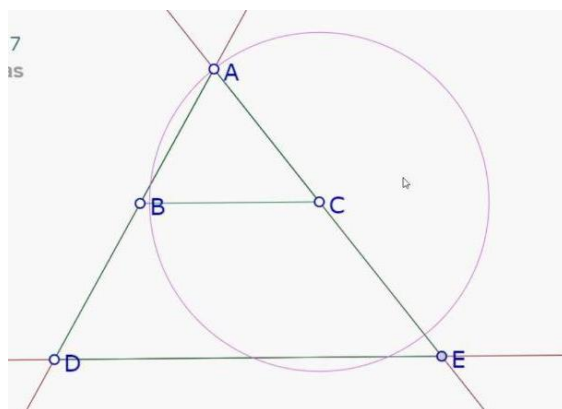


(Al punto libre lo llaman D y al punto de intersección lo llaman E).

53 (Trazan los segmentos AD, DE y AE, y presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico”).

54 E1 ¡Ah, no! Espere (Arrastra el punto A).
¿Será el doble? (Construye un círculo con centro en C que pasa por A para verificar si AE es el doble de AC).

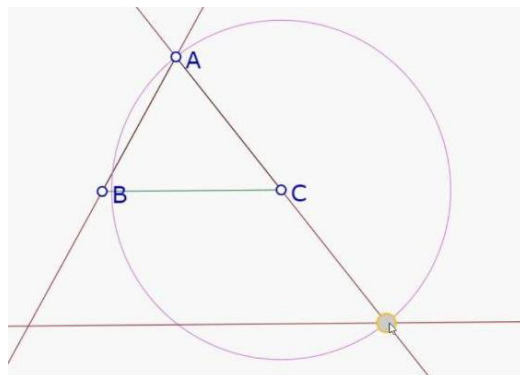
No es el doble.



55 E2 No, tiene que estar más arriba. [Se refiere al punto E].

56 E1 Si, voy a borrar esto (Borra el punto D y traza la intersección entre el círculo con centro en C que pasa por A con la recta AC. Luego, traza

una recta paralela a BC, que pasa por el punto de intersección mencionado).



57		(Nombran las intersecciones de las rectas como D y E)
58	E2	Borre el círculo, porque si no cuesta más.
59	E1	(Construye los segmentos AD, AE y DE, y presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Muy bien, pero ¿esta construcción es menos costosa a la construcción anterior?</i> ”).
60	E2	Venga, borremos esto. (Borra el círculo con centro en C que pasa por A). ¡Ay! Se borró todo. (Retrocede para regresar la construcción).

En la *Tabla 4* los estudiantes mencionan que la construcción anterior costó 20 y se preguntan: “¿Qué valga menos de 20?”. Respondiendo a esta pregunta, E2 expresa: “Y si lo hacemos con rectas paralelas? O sea, como semejanza, ¿si me entiende?”. Piensan en la semejanza de triángulos como una estrategia que usa rectas paralelas para construir triángulos semejantes, motivados por la necesidad de reemplazar los círculos por rectas paralelas, dado que estos son más costosos. Con esto se evidencia que para los estudiantes fue clara la idea de realizar una construcción menos costosa.

Sin embargo, como no basta con prolongar dos lados del triángulo y trazar una recta paralela al tercero para construir un triángulo tal que la longitud de sus lados sean el doble, la

estrategia no es concluyente. Pues, tal como los estudiantes lo evidenciaron en la línea 54 esta recta paralela se puede mover libremente, lo que hace que la proporcionalidad entre este par de triángulos no esté dada por una razón fija, sino que esta varía a medida que se arrastran los objetos.

En estas acciones se evidencia que la pregunta de la tarea anterior que buscaba identificar que BC y DE eran segmentos paralelos sirvió para que los estudiantes capturen la idea del paralelismo, para realizar una construcción menos costosa.

No obstante, como en la tarea anterior se evidenció que al duplicar los lados AB y AE, se obtenía un segmento DE paralelo a BC. Esto lleva a los estudiantes a pensar en la idea de que este hecho geométrico evidenciado funciona de manera recíproca. Es decir, creen que, al garantizar que los dos segmentos DE y BC sean paralelos, entonces surgirá que los lados del triángulo ADE serán el doble de los lados del triángulo ABC.

En el momento de validar si se cumple la razón entre los lados de los triángulos, no fue suficiente el arrastre de los puntos, entonces el estudiante 1 decide utilizar al círculo para verificar si se cumple de AE es el doble de AC (línea 54). Al realizar esto, evidencian que para garantizar las condiciones es necesario garantizar la razón en un par de lados de los triángulos y, con base en esta razón construida, trazar la recta paralela tal como lo hicieron los estudiantes en la línea 56.

Es importante destacar que en este momento los estudiantes no solo utilizan el círculo para multiplicar segmentos, sino que también lo emplean para evaluar si un segmento es producto de la multiplicación de otro. Anteriormente, los estudiantes validaban esto mostrando las medidas de los segmentos y arrastrando los objetos para identificar las relaciones de multiplicación entre los segmentos. En otras palabras, los alumnos suman a su haber una nueva estrategia para validar, que integra un conocimiento constituido en la interacción con el medio y la percepción. Puesto

que saben que el círculo garantiza equidistancia, pero determinan si el punto está en el círculo visualmente.

A pesar de tener la construcción realizada, los estudiantes aún creen que pueden economizar más la construcción borrando el círculo (línea 58 y 60). Por lo que deciden borrarlo, esperando que la recta paralela permanezca ahí. Al ver que se eliminó la recta paralela dado que era un objeto que dependía del punto construido con el círculo, decide rehacer la construcción y en ese momento valida que el círculo es necesario para la construcción.

Tabla 5.

Reflexión sobre el uso del paralelismo

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
67	P	¿Por qué usaron rectas paralelas, en vez de otro círculo?
68	E2	Porque en la paralela si se mueve el segmento y toda la figura para un lado, entonces se van a mover. O sea, se va a reflejar en todos los lados.
69	P	Pero ustedes no construyeron el círculo acá para garantizar que AD sea el doble de AB ¿por qué utilizaron paralelas para garantizarlo?
70	E1	Porque si sacamos el círculo en C, entonces podemos sacar el doble de AC y entonces como esta es ...
71	E2	Porque se supone que, si el lado ACE y ABD son iguales de longitud, entonces al sacarlo de un lado tiene que dar lo mismo en el otro lado.
72	E1	No, no es la misma. Pero siempre va a dar el doble. (Arrastra el punto C para mostrarle a E2 que estos dos lados no tienen la misma longitud). Pues, sabemos cómo hacerlo.
73	P	Ok, entonces las paralelas nos sirven para garantizar el doble de AB, teniendo garantizado que AE es el doble de AC...

Por otro lado, al finalizar la tarea y realizar una construcción menos costosa, el profesor les pregunta a los estudiantes por qué utilizaron las rectas paralelas para construir el doble de los lados

dados. Ante esto en la *Tabla 5* se muestra la reflexión sobre el hecho de que para garantizar que AD sea el doble de AB no se construyó un círculo, sino que se utilizó una recta paralela. E2 en la línea 71 expresa: “*al sacarlo de un lado, tiene que dar lo mismo en el otro lado*”. Esta expresión constituye una formulación del conocimiento por parte del alumno. Dado que, en otras palabras, su idea sugiere: si se construye una razón con un punto en un segmento, esta se puede transportar por medio de rectas paralelas a un segmento que sea adyacente.

8.2.3. Tercera tarea

Esta tarea propone la generalización de las dos anteriores: “*Dado un triángulo ABC, construye un triángulo ADE, tal que AD, AE, DE, sean el triple de AB, AC, BC respectivamente*”. Note que, en esta tarea ya no se les pide duplicar los lados, sino triplicarlos. Como el objetivo de las tareas es resolverlas de la manera más económica, entonces los estudiantes utilizan la estrategia del paralelismo desarrollada en la tarea anterior para construir el triángulo ADE. Esto favorece el proceso de generalización de dicha estrategia en los estudiantes.

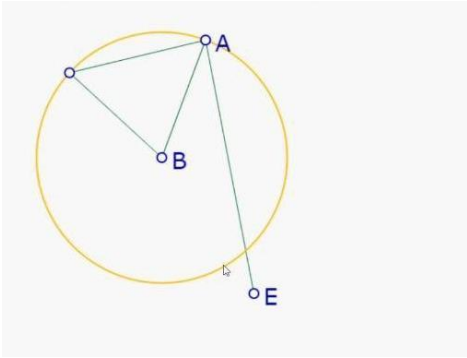
8.3. Tercera Actividad

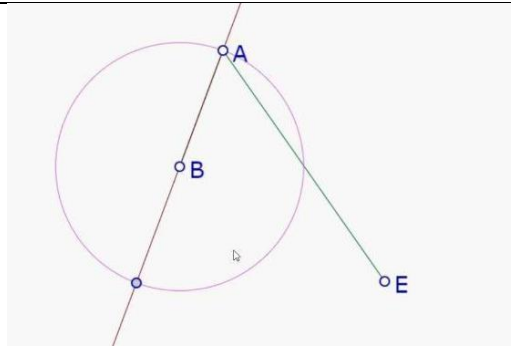
A continuación, mostramos y analizamos los resultados obtenidos en las dos tareas propuestas para esta actividad.

8.3.1. Primera Tarea

Esta tarea propone que: “*Dados dos segmentos AB y AE, construye dos triángulos tal que AB sea la mitad de AD, AC sea la mitad de AE y BC sea la mitad de DE*”. En la *Tabla 6* se muestran las evidencias de las estrategias y construcciones realizadas durante la experimentación.

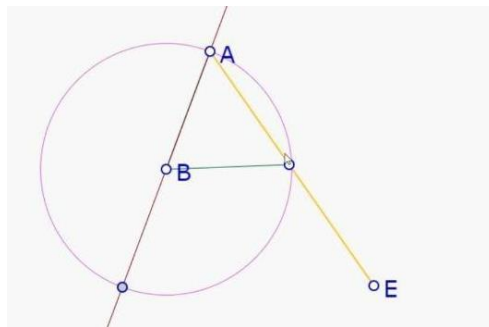
Tabla 6.*Evidencias primera tarea de la tercera actividad*

No	Sujeto	Descripción / Evidencia
2	E2	O sea, toca sacar un C.
3	E1	Pero al mismo tiempo un D.
4	E2	Pero toca como sacar un C aquí (Señala un espacio en la pantalla).
5	E1	¡Ah, no! está fácil, mire (Construye un círculo con centro en B que pasa por A). Ah no, espere. (Mueve el punto E, para que el segmento AE se vea más grande que el segmento AB).
6		(vuelven a leer el enunciado)
7	E2	Si, mira un ejemplo (Construye un segmento desde A hasta un punto del círculo y traza un segmento desde B hasta dicho punto).
		
		(Arrastra el círculo)
		No, pero no sería la mitad.
8	E1	No.
9	E2	O sea, ahí queda un triángulo.
10	E1	Si, pero no (Borra los segmentos contruidos por E2).
11	E2	Si, si podía quedar bien y acá se pone uno más grande. Se hace otro círculo más grande.
12	E1	(Traza una recta por A y B, y pone la intercepción entre dicha recta y el círculo con centro en B que pasa por A).



13 E2 No, porque tiene que ser un triángulo y no una recta. Tiene que ser el triángulo ABC.

14 E1 Ay, ¿cómo sería? (traza un segmento desde B hasta un punto en el segmento AE).



15 E2 No, porque ahí es otro... Bueno sí. Si, ahí.

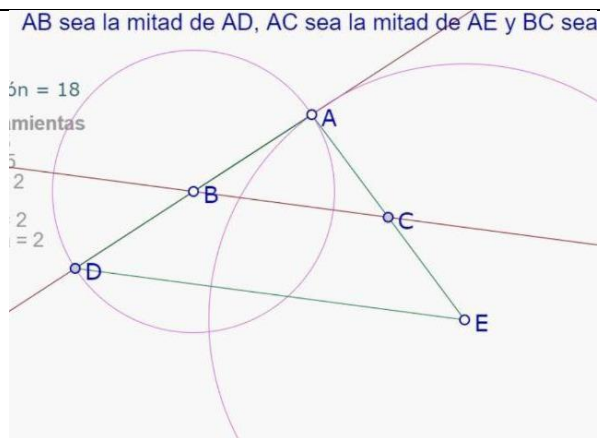
16 E1 ¿Ahí sería C?

(Se refiere al punto libre en el segmento AE y lo nombra C).

Espere.

(Traza una recta paralela al segmento BC que pasa por el punto de intersección entre la recta AB y el círculo con centro en B que pasa por A).

		(Arrastra el punto A y presiona <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>No ha construido el triángulo ADE</i> ”).
30	E1	(Traza el segmento AC, presiona en <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico</i> ”). Ah, no.
31	P	Arrastre C.
32	E1	(Arrastra el punto). No, no se sale. (Traza una recta que pasa por C y A, y vuelve a arrastrar C). ¡Ya entendí!
33	E2	(Borra la recta que pasa por C y A). Intente unir una recta con la C y la E.
34	E1	(Traza una recta que pasa por E y C).
35	E2	Inténtela, a ver si ya queda.
36	E1	No, queda suelta [Se refiere a que el punto C se puede seguir moviendo como punto libre].
37	E2	Mueva la B. (E1 mueve el punto B) La B si está fija.
38	E1	La C no. ¿Cómo hacemos que la C esté fija?
39	E2	De pronto porque tocaba crear primero AC [Se refiere al segmento AC].
40	E1	(Borra el punto C, traza una recta paralela al segmento DE que pasa por B, y traza la intersección entre esta y el segmento AE).
41	E2	Igual queda movable, ¿no? [Se refiere al punto C].
42	E1	Este punto es C (Nombra C a la intersección entre la recta paralela con el segmento AE). Movable no quedó.



De las evidencias mostradas en la *Tabla 6*, podemos ver en las primeras líneas que a pesar de que en las tareas anteriores se construyó el triángulo ADE en posición de similitud al triángulo ABC, en esta tarea los estudiantes pensaron en construir los triángulos en posiciones separadas. Esto se debe a que para los estudiantes no es sencillo entender el enunciado y enlazar esta tarea con las anteriores, debido a que en todo momento se hablaba del doble, triple, pero no de la mitad o tercera parte. Pero, se percatan de que con esa estrategia no es sencillo garantizar que los lados del triángulo ABC sean la mitad de los de ADE (ver la línea 7 a 12).

Luego, E1 traza una recta AB y pone la intersección entre dicha recta y el círculo con centro en B que pasa por A. Pero E2, le dice que esa construcción no sirve pues debe ser un triángulo ABC y una recta, esto da cuenta de que para los estudiantes no es muy claro el enunciado, pues en realidad este punto de intersección sería el punto D.

Al abandonar la idea de construir los triángulos por separado, consideran construirlos de manera similar a como se han construido en las tareas anteriores. Debemos tener en cuenta que los puntos que hacen falta construir son D y E; el primero es resultado de duplicar AB, pero hace falta construir al punto C, que no es tan inmediato dado que debe ser el punto medio del segmento AE.

Ahora, como necesitan un punto C para trazar el triángulo, entonces ponen un punto libre en el segmento AE, pero no se fijan si AC es la mitad de AE. Luego, construyen una recta paralela al segmento BC que pasa por el punto que más tarde llamarán D. Esto significa que para los estudiantes no es inmediata la relación inversa entre el doble y la mitad.

Al momento de construir dicha recta paralela se dan cuenta que esta no pasa por el punto E. Por esto, intentan por medio de arrastre y construcción de círculos, que esa recta pase por dicho punto. Al usar el mico para verificar, invalidan la estrategia.

El profesor les pide que arrastren el punto C, al realizarlo. Los estudiantes se dan cuenta que el punto C, es un punto libre y se preguntan cómo fijarlo. Luego, el estudiante en unos de sus intentos realiza una recta paralela al segmento DE que pasa por B.

En primer momento la intervención del profesor es oportuna pues los estudiantes estaban centrando su atención en que E estuviera en la recta paralela, esto dado que buscaban garantizar que AE sea el doble de AC, pero no fijaron en que AE ya era un segmento dado y AC debía garantizarse como la mitad de AE. Sin embargo, lo que los estudiantes realizaron responde al aprendizaje desarrollado en las tareas anteriores. Pero también se destaca que los estudiantes no se fijan en la relación “mitad”.

Luego de que verifican la tarea, el profesor en la línea 44 pregunta: *¿Cómo se garantiza que AB sea la mitad de AD?* Ante esto, no tienen problema en describir al círculo como estrategia para duplicar al segmento AD. Por lo que se explicita que los estudiantes relacionan que a la vez que se duplica un segmento al mismo tiempo se obtiene un segmento dividido en dos partes iguales.

Sin embargo, en la línea 47 cuando se les pregunta: “¿cómo se garantiza que AC sea la mitad de AE ?”. Para los estudiantes no es inmediata la respuesta, pues no han estructurado el proceso que realizaron para garantizar dicha solicitud. Al tomarse un tiempo, la estudiante 2 en la línea 54 expone que como ya se había garantizado que AB fuera la mitad de AD y que como se sacó una paralela desde el segmento DE que pasa por B . Sin embargo, aún dudan que AC es la mitad de AE . Luego, el profesor sugiere que muestren las medidas de los segmentos. Al hacerlo y arrastrar los puntos de la construcción, los estudiantes constatan que AC es la mitad de AE , como resultado de la construcción que ellos mismos explicaron.

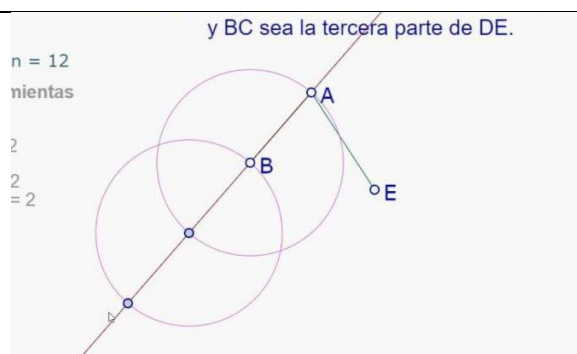
8.3.2. Segunda Tarea

Esta segunda tarea propone que: “*Dados dos segmentos AB y AE , construye dos triángulos tal que AB sea la tercera parte de AD , AC sea la tercera parte de AE y BC sea la tercera parte de DE* ”. Cuando los estudiantes leen el enunciado, no tienen problema en extraer la estrategia utilizada en la tarea anterior. Desde la línea 64 a la 72 de la *Tabla 7*, se denota que los estudiantes trasponen de manera eficaz la estrategia usada en la segunda tarea. Por lo que se puede concluir, que no hubo problema con generalizar este hecho geométrico.

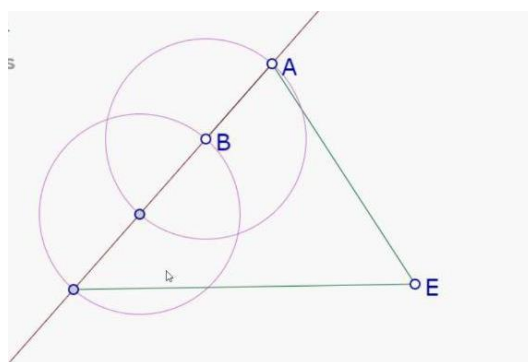
Tabla 7.

Evidencias tercera tarea de la tercera actividad

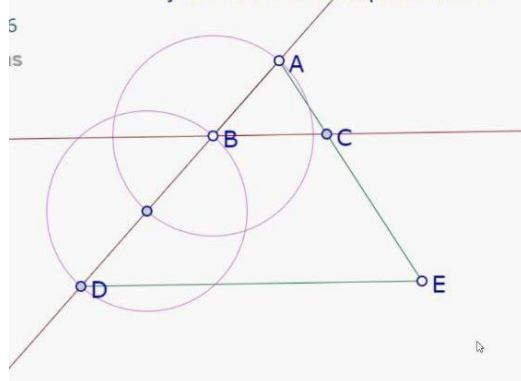
No	Sujeto	Descripción / Evidencia
64	E2	Toca hacer lo mismo, pero sacarle una más. (Traza un círculo centrado en B que pase por A . Luego, una recta que pase por los puntos A y B . Marca el punto de intersección entre el círculo y la recta. A continuación, dibuja un círculo con centro en el punto de intersección que pase por B . Finalmente, construye la recta AE)



65	E1	Quite la recta, una este punto con E.
66	E2	(Borra la recta AE y une E con el último punto de intersección construido)
67	E2	¿Y si bajamos a E? (Mueve el punto E para que el segmento AE quede más grande y lee el enunciado nuevamente)
68	E1	Saque la recta paralela de aquí (Señala el último segmento que construyeron).



69	E2	¿A dónde? [Pregunta por qué punto debe pasar la recta paralela].
70	E1	Por B.
71	E2	(Traza la recta paralela al segmento que pasa por B y pone el punto de intersección entre esta y el segmento AE).
72		(Nombran el punto D, el punto C y trazan los segmentos AC, AD, BC).



(Presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “*Muy bien, continúe*”).

8.4. Cuarta Actividad

A continuación, se analiza las acciones de los estudiantes, devoluciones del profesor, validaciones de los estudiantes y cómo estas influyen en el desarrollo de la actividad.

8.4.1. Primera Tarea

Esta tarea propone el primer problema de dividir un segmento: “*Dado un segmento AB, construye un punto C que lo divida en dos partes iguales*”. En la *Tabla 8*, cuando los estudiantes leen el enunciado de la primera tarea de la cuarta actividad, primero piensan en construir el doble del segmento AB, pero rápidamente se percatan de que deben garantizar la mitad de AB, no el doble. Se evidencia que los estudiantes entienden dónde debe estar el punto C, porque en la línea 7, E2 cambia el nombre de B por C para que, al duplicar AC, entonces se construye AB de tal forma que AC es la mitad de AB.

Como saben que el círculo permite duplicar segmentos, intentan encontrar la forma de que al construir círculos se garantice la mitad del segmento, por esto construyen círculos al azar en espera de que resulte el punto C. A pesar de que en las anteriores actividades los estudiantes habían

abandonado las estrategias perceptivas, cuando E2 dice: “ponga un punto cualquiera en el centro” los estudiantes recaen en el uso de dichas estrategias.

Al notar que los estudiantes están pensando la tarea como un problema aislado a las tareas anteriores y buscan estrategias nuevas para lograr dividir al segmento AB en dos partes iguales, el profesor decide preguntar a modo de sugerencia: “¿No sirve alguna de las ideas que usaron en las tareas anteriores?”. En ese momento los estudiantes realizan acciones acordes a lo que el profesor les sugirió, pero ellos no entendían a qué se refería el profesor por lo que borraron y decidieron volver a usar círculos.

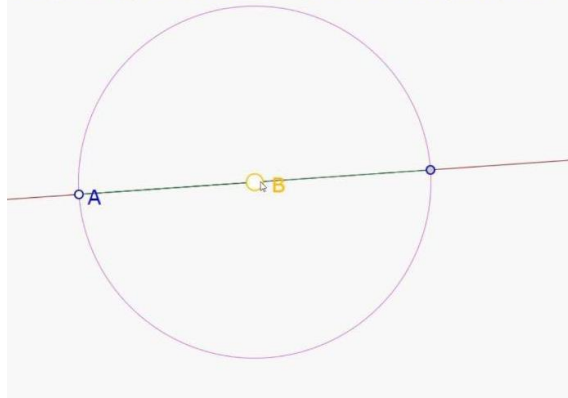
Cuando vuelven a la estrategia de usar círculos, los estudiantes construyen la mediatriz del segmento AB, sin embargo, no hay una reflexión sobre este elemento teórico. Incluso la forma de los estudiantes validar habían construido un punto C que era punto medio de AB fue midiendo los segmentos AC, CB y constatando si su longitud era la misma. Es decir, los estudiantes no validaron que C era el punto medio de AB, porque C es la intersección entre dicha mediatriz y el segmento, por lo cual C es punto medio de AB.

Tabla 8.

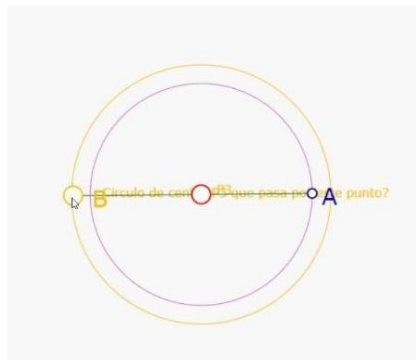
Evidencias primera tarea de la cuarta actividad

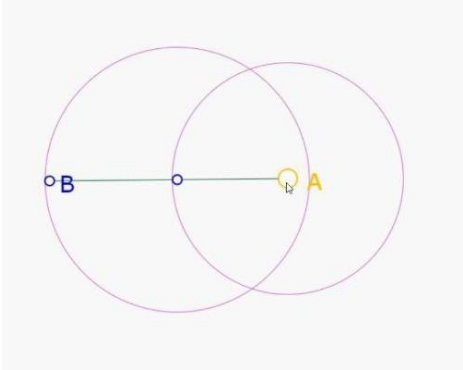
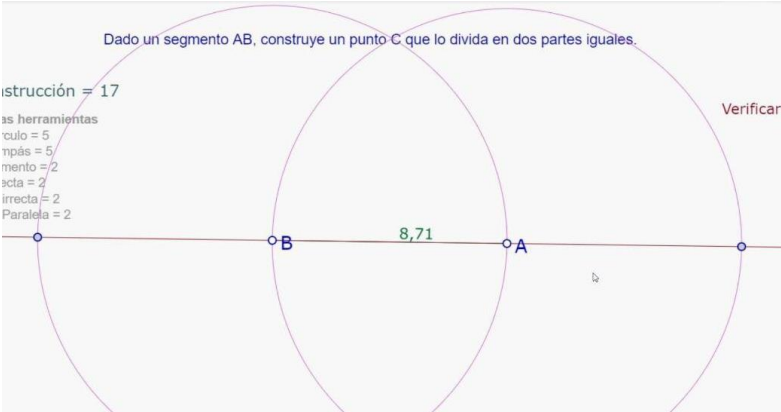
No	Sujeto	Descripción / Evidencia
1	E2	(Lee el enunciado).
2	E1	(Construye un círculo con centro en B que pasa por A y una recta que pasa por A y por B).
3	E2	No, eso ya no. ¿O sí?
4	E1	(Construye la intersección entre el círculo y la recta. Empieza a construir un círculo con centro en ese punto para que pase por B, pero decide no hacerlo).
		No.

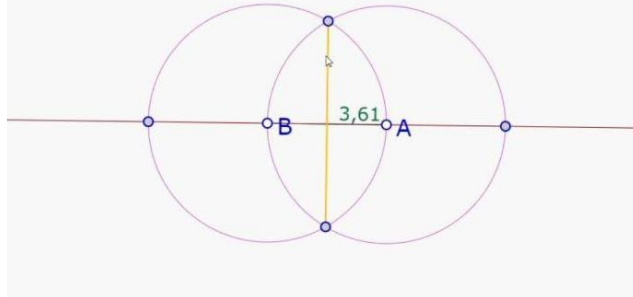
un segmento AB, construye un punto C que lo divida en dos partes iguales.



5	E2	No, borre ese círculo.
6	E1	Mmm, ¿qué sea la mitad?
7	E2	Quiero intentar algo. (Cambia el nombre de B por C y nombra al punto de intersección como B).
8	E1	¡Ah, sí!
9	P	No le pueden cambiar los nombres a los objetos dados.
10	E2	(Elimina los objetos construidos y regresa al segmento AB dado).
11	E1	¿Cómo hacemos que esto sea la mitad?
12	E2	¿Y si crea un punto justo en el centro?
13	E1	Esa es la idea. Pero ¿cómo hacemos que el punto esté justo en el centro?
14	E2	Ponga un punto cualquiera en el centro.
16	E2	Ahora haga un círculo que toque... (E1 construye un círculo con centro en el punto). Ajá, ahora otro de ese centro al B.



		No, no queda. Pues yo creo que esta con círculo ya no va.
17	E1	Espere. (Borra los círculos y construye un círculo con centro en A que pasa por el punto que está en el segmento AB. Luego construye un círculo con centro en ese punto y pasa cerca al punto B).
		
22	E2	No, si está mal ¿cómo fue que usted lo hizo ahorita?
24	P	¿No sirve alguna de las ideas que usaron en las tareas anteriores?
28	E1	(Construye un círculo con centro en B que pasa por A y un círculo con centro en A que pasa por B. Luego una recta que pasa por A y por B, y construyen las intersecciones entre los círculos y las rectas).
		
29	E2	Bueno, ahí tenemos el doble.
30	E1	(Traza las intersecciones entre los círculos)
31	E2	Ahora póngales una recta
32	E1	(Construye el segmento que une a las dos intersecciones).



(pone el punto de intersección entre los segmentos y la llaman C)

34	E1	Pero C no se puede arrastrar.
35	E2	Mídalos. (Se refiere a medir el segmento AC y BC).
36	E1	Sino estoy mal esto lo divide, pero... (Se refiere al punto C construido)
37	P	¿Lo divide en dos partes iguales?
38		(miden los segmentos AC y BC. Arrastran los puntos y se dan cuenta que AC y BC miden lo mismo).
39	E2	Sí, mire, los medí los dos por aparte y sí.

8.4.2. Segunda Tarea

Aquí se propone el segundo problema de dividir un segmento en partes iguales: “*Dado un segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan en tres partes iguales*”. En la Tabla 9 Los estudiantes replican la misma estrategia utilizada en la tarea anterior, es decir, construyen círculos para dividir al segmento AB en tres partes iguales, tal como se evidencia en las líneas 51 y 52. Luego de hacerlo manifiestan que realizar esto solo los lleva a obtener el punto medio de AB, cuando dicen: “*¡Ah no! Sigue siendo la mitad*”. Sin embargo, los estudiantes se resisten a abandonar esta estrategia. Dado que, en las actividades anteriores cuando se proponía la primera

tarea que tenía que ver con el doble o la mitad de una magnitud, la solución para esta tarea se podía generalizar para el caso del triple o tercera parte de ser el caso de la tarea.

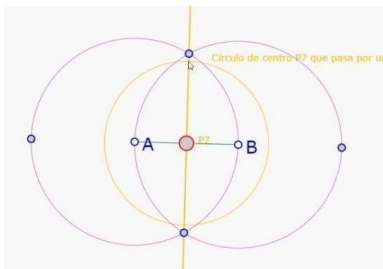
Tabla 9.

Primera estrategia de la segunda tarea de la cuarta actividad

No	Sujeto	Evidencia / Descripción
41		(leen la consigna)
42	E2	Trazamos dos círculos. Pero ¿cómo los trazamos?
43		(Construyen un círculo con centro en B que pasa por A, otro círculo con centro en A que pasa por B).
51	E1	(Construye un círculo con centro en el punto 2 y que pasa por B).

| 52 | E2 | (Borra los dos círculos con centro en 1 y 2. Luego, construye un círculo con centro en 1 que pasa por B y otro círculo con centro en 2 que pasa por A). |
| 53 | E1 | ¡Ah, no! Sigue siendo la mitad. (Se refiere a la intersección de los nuevos círculos). [Borra los dos círculos más grandes y traza una recta que pasa por las intersecciones de los dos círculos más pequeños]. ¿Va a seguir siendo lo mismo? |

54	E2	Si, va a seguir siendo lo mismo. [Se refiere a la intersección entre la recta y el segmento AB, va a seguir siendo la mitad]
57		(Empiezan a trazar círculos con los puntos que tienen contruidos, intentando que algo encaje o que aparezca un punto que les indique donde se divide el segmento en tres partes iguales. Pero al final, los eliminan).

De la *Tabla 10*, cuando el profesor notó que para los estudiantes es difícil abandonar la idea de solo construir círculos para dividir a AB en tres partes iguales, decide intervenir diciendo: “*si fuera, no construir dos puntos C y D que lo dividan en partes iguales, sino que fuera triplicarlo ¿lo podrían resolver?*”. Con esto el profesor quiere que relacionen esta tarea con las anteriores, haciendo el análisis de que al triplicar un segmento a la vez se obtiene un segmento que está dividido en tres partes iguales, desde luego, no solo basta esta idea para resolver la tarea, pero ese fue el punto de partida para encontrar una estrategia que les permita dividir el segmento.

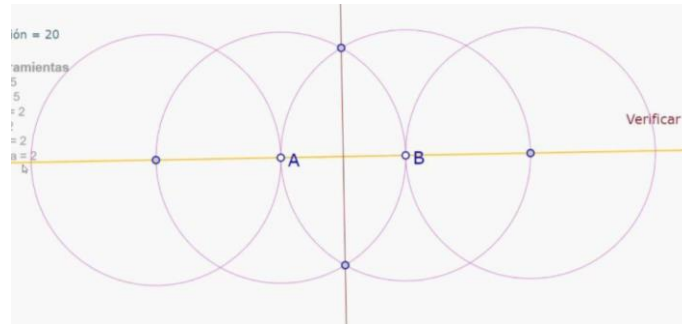
Tabla 10.

Reflexión sobre la idea de triplicar un segmento

No	Sujeto	Evidencia / Descripción
58	P	Les tengo una pregunta. Si fuera no construir dos puntos C y D que lo dividan en partes iguales, sino que fuera triplicarlo ¿lo podrían resolver?
59	E2	O sea, no dividir en tres, sino triplicarlo.
60	E1	¿Triplicar el segmento?

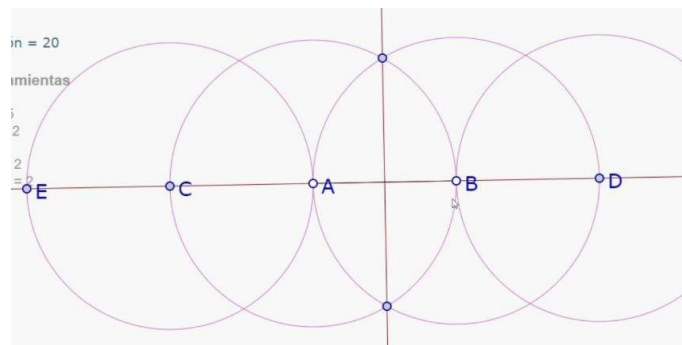
64	P	La pregunta es, si en vez de construir dos puntos C y D que dividen al segmento en tres partes iguales, quisieran triplicarlo ¿lo podrían hacer?
----	---	--

65	E2	Pues una opción sería poniendo... (Construye los círculos de la imagen)
----	----	---



68	P	¿Quién es el triple de AB? Póngale nombres
----	---	--

69	E2	(Nombra los puntos como E, C y D)
----	----	-----------------------------------



70	P	¿Quién es el triple de quién?
----	---	-------------------------------

71	E2	CD es el triple de AB
----	----	-----------------------

72	P	¿De AB?
----	---	---------

73	E1	Si acaso de A y el centro.
----	----	----------------------------

74	E2	(Mide los segmentos CA, AB, BD).
----	----	----------------------------------

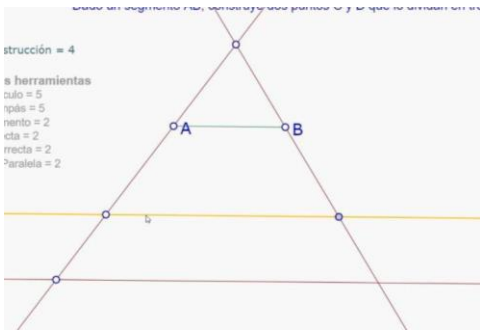
Esta completa sería el triple de AB [Se refiere al segmento CD].

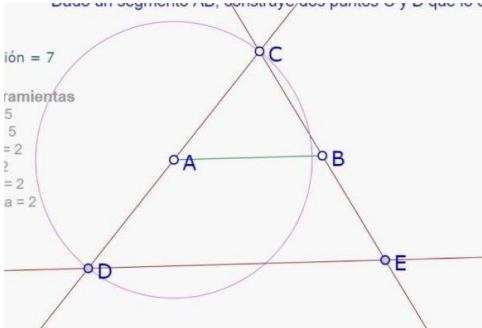
75	P	¿Solo de AB?
----	---	--------------

76	E1	De CA y BD
----	----	------------

77	P	O sea, CD es el triple de CA. ¿Qué es AC para CD?
----	---	---

78	E2	La tercera parte
----	----	------------------

79	P	¿Usted está de acuerdo? [Hace referencia a E1].
80	E1	La tercera parte de CD sería CA.
81	P	Vuelva a esta tarea [Hace referencia a la segunda tarea de la tercera actividad].
82	E2	¡Es casi lo mismo!
83	P	¿Es casi lo mismo? ¿cómo así?
84	E2	Porque también está en tres partes, pero diferente orden. Se pudo haber hecho lo mismo.
85	P	¿Cómo así? No entiendo.
86	E2	O sea, en vez de haber hecho todos estos círculos se pudo haber partido así (Muestra la segunda de la actividad cuatro y se regresa a la segunda tarea de la tercera actividad).
87	E1	¡Ah, ya!
88		(Regresan a resolver la tarea).
90	E2	(Construye dos rectas secantes, donde la primera pasa por A y la segunda pasa por B).
91	E1	Punto [Se refiere a construir un punto en la recta que pasa por A].
92	E2	(Construye un punto en la recta que pasa por A y traza una recta paralela al segmento AB que pase por dicho punto. Luego, marca la intersección entre esta recta paralela y la recta que pasa por B. Después, traza otra recta paralela al segmento AB que pase por un punto libre en la recta que pasa por A).
		
93	E1	No entiendo.

94	E2	Es que esto quedó más grande, tenía que sacar los círculos primero. Ahí me equivoqué. [Borra las rectas paralelas y traza un círculo con centro en A que pasa por la intersección entre las rectas].
		
95	P	¿Qué relación hay entre AC y CD?
96	E2	Que AC es la mitad de DC
97	P	¿Está de acuerdo con eso? (le pregunta a E1)
98	E1	Sí, porque ella hizo un círculo y trazó la paralela...
99	E2	Porque está en el centro del círculo y en los dos extremos están C y D
100	P	Ok y ¿qué relación hay entre CB y CE?
101	E2	Lo mismo. Que CB es la mitad de CE.
102	P	¿Por qué?
103	E2	No sé.
104	P	Por qué esta vez no trazó círculos.
105	E2	No.
106	P	Construyeron la mitad de CE, pero necesitábamos en la primera tarea la mitad y en una segunda tarea la tercera parte [Se refiere a que en la primera tarea se pide la mitad de AB y en la segunda se pide la tercera parte].

Los estudiantes no tienen problema para triplicar al segmento AB (Ver línea 69). Luego, cuando el profesor pregunta: “¿Quién es el triple de AB?”. E2 dice: “CD es el triple de AB”. Luego el profesor pregunta: “¿Solo de AB?” y E1 responde: “De CA y BD”. Enseguida el profesor

pregunta: “¿Qué es AC para CD?”, E2 responde: “La tercera parte”. En este momento formulan el hecho de que al construir CD como el triple de AB, se obtiene un segmento que está dividido en tres partes iguales, pues AB, CA y BD son terceras partes de CD.

Luego, el profesor sugiere que se dirijan a la tarea 3.2, segunda tarea de la tercera actividad, la cual tenían abierta con la solución en el navegador. Al visualizar ambas tareas en paralelo, E1 exclama: “¡Es casi lo mismo!”, E2 reflexiona sobre lo dicho por su compañero y responde: “Porque también está en tres partes, pero diferente orden. Se pudo haber hecho lo mismo”, estableciendo una conexión entre ambas tareas, aunque esta no es muy clara aún. Esta intervención del profesor constituye un acto de devolución, porque los estudiantes reconocen la conexión entre estas ideas y la tarea en cuestión sin que el profesor se los diga de manera explícita. Esto es, relacionan la tarea actual con la tarea 3.2.

Luego, E2 expresa: “O sea, en vez de haber hecho todos estos círculos se pudo haber partido así”, refiriéndose a que la tercera parte de AB se podría obtener sin construir los círculos como lo estaban haciendo sino usando el hecho geométrico evidenciado en la tarea 3.2. E1 asiente y los dos se disponen a desarrollar la idea.

En la ejecución se evidencia que, a pesar de que identifican la relación entre estas tareas, no hay claridad sobre cómo orientar los segmentos y construir los objetos auxiliares para obtener la razón que requieren.

es adyacente. Esto les permitió trazar el segmento CE como el doble de CB a partir de duplicar el segmento CA y usar rectas paralelas para transportar esta razón.

En la *Tabla 10*, el profesor interviene preguntando: “*Qué relación hay entre AC y CD*” “*Qué relación hay entre CB y CE?*”. Los estudiantes no tienen problema en decir que CA es la mitad de CD, del mismo modo que CB es la mitad de CE. Luego, el profesor dice: “*Construyeron la mitad de CE, pero necesitábamos en la primera tarea la mitad y en la segunda la tercera parte*”. Es cierto que CB es la mitad de CE. Sin embargo, los estudiantes construyeron primero CB y luego el punto E, interpretando esto como una tarea distinta a la de dividir el segmento. Esto se debe a que no es lo mismo tener el segmento CE y construir a B como el punto medio de este, que tener el segmento CB y construir el punto E, con CE el doble de CB.

Luego, en la *Tabla 12*, E2 exclama: “*¡Está mal ubicado! hubiera tocado de este lado*”, refiriéndose a que el segmento AB debe estar inclinado y en otra posición. Luego, en la línea 119 se puede ver que posicionan a AB y construyen el segmento auxiliar adyacente AE, luego construyen a AC y AF como el doble de AB y AE respectivamente. Aquí nuevamente, vemos que no logran dividir el segmento AB, sino que siguen duplicando los segmentos. Por tanto, la intervención del profesor no constituye un acto de devolución, porque los estudiantes replicaron la construcción que se ve en la *Tabla 11*.

Sin embargo, en el proceso de la construcción que se puede ver en la *Tabla 12*, cuando E2 intenta construir un segmento auxiliar adyacente a AB, pero expresa: “*No sé cómo construirlo. No sé dónde ponerlo*”. El profesor interviene y pregunta: “*¿Importa dónde coloque el punto?*”, haciendo referencia a la posición del segmento auxiliar. E2 responde: “*Creo que podría alterar el orden*”. E2 no construye el segmento auxiliar adyacente a AB porque asume que, si utiliza cualquier punto libre para construir AE, este segmento no servirá para garantizar la propiedad

deseada. Luego, E1 toma el mando y construye un punto libre en la pantalla y lo une con A para construir el segmento auxiliar y afirma: “*Creo que no cambia*”.

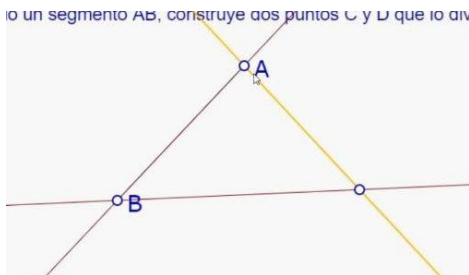
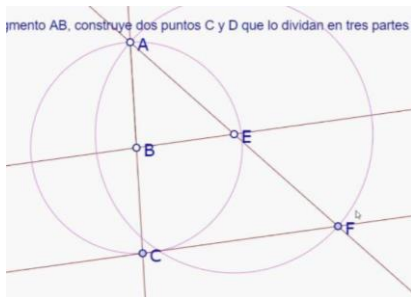
Recordemos que la única condición que debe cumplir el segmento auxiliar es que sea adyacente al segmento AB, por esto la intervención del profesor constituye un acto de devolución porque incita a los estudiantes a reflexionar sobre las condiciones que debe cumplir el segmento auxiliar sin dar instrucciones directas. Al indagar sobre la posición del punto, hace que los estudiantes se vean en la necesidad de reflexionar sobre esto y validar si cualquier punto sirve para construir dicho segmento.

Otra situación que sucedió en el proceso de la construcción se ve cuando E1 muestra las medidas del segmento AB y E2 le indica que no es necesario que coloque las medidas de los segmentos para realizar y verificar la construcción, se evidencia un proceso de validación de los estudiantes. Donde utilizan los objetos geométricos contruidos y sus relaciones para validar, prescindiendo de las medidas de estos.

Tabla 12.

Desarrollo de estrategia para dividir segmento en partes iguales

No	Sujeto	Evidencia / Descripción
107	E2	Está mal ubicado. Hubiera tocado esta de este lado [Se refiere a que el segmento AB debía estar en la posición inclinada de CD].
108		(Ubican el segmento AB de forma que quede inclinado y trazan una recta por A y B).
109	E2	[Intenta construir un segmento adyacente a AB]. Ayúdame, es que este si no sé cómo construirlo. No sé dónde ponerlo.
110	P	¿Importa dónde coloque el punto?
111	E2	Si, porque podría alterar el orden.
112	P	¿Cuál orden?

113	E2	O sea, al sacar la mitad podría cambiar...
114	E1	(Construye una recta que pasa por A y un punto libre en la pantalla. Luego, traza una recta que pasa por B y el punto libre que lo llaman E).
		
115	E2	Creo que no cambia.
116	E1	(Muestra la medida del segmento AB)
117	E2	No es necesario poner los centímetros ni nada de eso.
118	E1	(Construye dos círculos: uno con centro en B y otro con centro en E, ambos pasando por A).
119	E2	(Traza los puntos de intersección entre las rectas y los círculos, y los llama C y F. Inicialmente planea unir estos dos puntos con un segmento, pero cambia de opinión y decide trazar una recta paralela a BE que pase por C).
		
120	E1	No
121	E2	Si, porque tienen que ser dos puntos que dividan a AB (Revisa la construcción). ¡Ah, no! Sacar el triple no daría para eso.

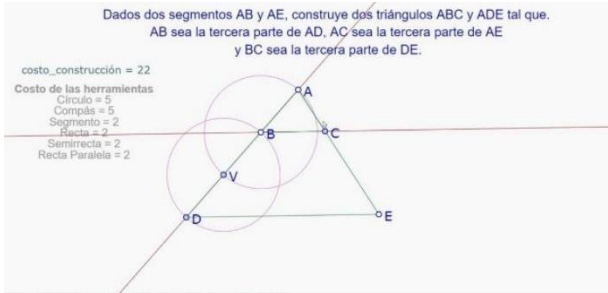
En la *Tabla 13* se muestra cómo el profesor les pide que analicen si en algún momento dividieron un segmento en tres partes iguales en la tarea 3.2, a lo cual los estudiantes responden

que no. Luego, el profesor hace énfasis en el enunciado, preguntando: “¿*Qué dice la tarea?*”, El responde: “*Tercera parte de AE*”, el profesor buscando profundizar, pregunta: “¿*Cómo garantizan que AC es la tercera parte de AE?*”. Ante la pregunta, E2 responde: “*Al trazar una paralela de este a este punto aquí daría la otra parte. O sea, siempre daría sacando la paralela de acá y poniéndolo en el punto este va a dar la división de este lado*”, lo que intenta explicar es que las paralelas permiten transportar una razón que ya se tenga garantizada en algunos de los segmentos involucrados, formulando un conocimiento consolidado en las tareas previas.

Aún los estudiantes no tienen claridad sobre cómo lograron que AC fuera la tercera parte de AE y dan algunos argumentos que articulan tanto los conocimientos constituidos en las tareas como ideas perceptivas e intuitivas. Por esto, el profesor pregunta: “¿*Nota alguna relación en el enunciado?*”, enfatizando en las relaciones entre las tareas por medio de los enunciados. Esto no es sencillo pues, como habíamos dicho anteriormente, existe una desconexión lingüística entre los enunciados de la primera, segunda y tercera actividad con los de la cuarta. La dificultad que tienen los estudiantes para relacionar estas tareas da cuenta de ello. A pesar de esta desconexión, ambos expresan que se relacionan porque en las dos tareas deben dividir en tres partes.

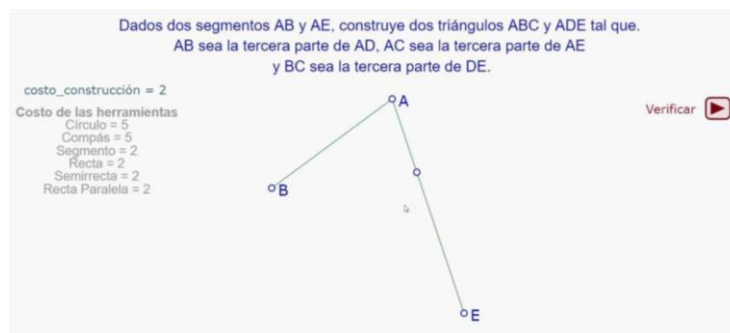
En este momento, los estudiantes por error cierran la página donde tenían la tarea 3.2 abierta y se borra la solución. Por lo cual, si querían analizar esa construcción debían volverla a realizar. De alguna forma este error favorece a la secuencia, porque ahora esta tarea será resuelta con el objetivo de obtener la estrategia que permita resolver el problema de dividir un segmento en tres partes iguales.

Tabla 13.*Desarrollo de la tarea 3.2 para dividir un segmento en tres partes iguales*

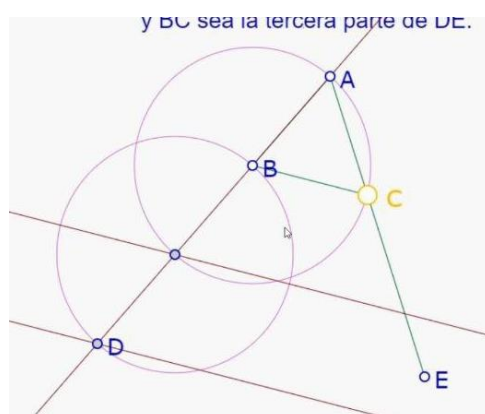
No	Sujeto	Evidencia / Descripción
122	P	Devolvámonos a esta tarea (Se refiere a la tarea dos de la tercera actividad). ¿Ahí no sacaron la tercera parte en ningún momento?
		 Dados dos segmentos AB y AE, construye dos triángulos ABC y ADE tal que, AB sea la tercera parte de AD, AC sea la tercera parte de AE y BC sea la tercera parte de DE. costo_construcción = 22 Costo de las herramientas Círculo = 5 Compás = 5 Segmento = 2 Recta = 2 Semirecta = 2 Recta Paralela = 2
123	E2	No.
124	P	¿No? ¿Qué dice la tarea?
125	E1	Tercera parte de AE
126	E2	¿Lo que estamos haciendo también funciona como tercera parte?
127	P	No sé...Pero la pregunta es ¿Aquí construyeron la tercera parte en algún momento?
128	E2	En este si, la tercera parte de AE. Además, AB es la tercera parte de AD.
129	P	¿Cómo garantizan que AC es la tercera parte de AE? ¿tendrá algo que ver los círculos?
130	E2	Si, porque cada círculo se coje desde el medio hasta los extremos, entonces acá estamos que AB es la mitad de AV.
131	P	Entonces, ¿AB es la tercera parte de AD por eso?
132	E1	Si.
133	E2	(Duda de la afirmación hecha).
134	P	¿Cuál es el problema? ¿Es AC la tercera parte de AE?
135	E2	Si
136	P	¿Cómo lo demostraron?

137	E2	Porque al bajar una paralela. (Traza una recta paralela al segmento BC que pasa por V). Al trazar una paralela de este a este punto aquí daría la otra parte. O sea, siempre daría sacando la paralela de acá y poniéndolo en el punto este va a dar la división de este lado. (Intenta explicar que, si traza una recta paralela al segmento BC y que pase por V, entonces en el segmento AE va a obtener una división).
138	P	¿Usted podría explicar lo que ella quiere decir? (Le pregunta a E1).
139	E1	O sea que este es el doble (Señala el triángulo cuyos lados son el doble de los lados de ABC) y que este es el triple (Señala el triángulo ADE) del triángulo.
140	P	O sea, ¿BC también es la tercera parte de DE?
141	E1	No.
142	P	Pero mi pregunta es ¿cómo hizo para que AC fuera la tercera parte de AE? ¿eso siempre se cumple?
143		(Arrastran el punto B y notan que los puntos sobre la recta AE no cambian de posición).
144	P	¿Es AC la tercera parte de AE siempre?
145	E2	Si.
146	P	¿Cómo garantizaron que AC fuera la tercera parte de AE?
147	E2	Creo que fue por poner estos círculos y poniendo la recta fue que...
148	P	¿Qué rectas? ¿qué tienen esas rectas de especiales?
149		(Se quedan en silencio)
150	P	¿Qué puede decir de los segmentos BC y DE?
151	E1	Que DE es el doble de BC
152	P	¿Qué más?
153	E1	Son paralelas
154	E2	(Duda y dice en voz baja que no)
155	P	¿Son paralelas? Hace un rato ustedes respondieron justo eso ¿no?

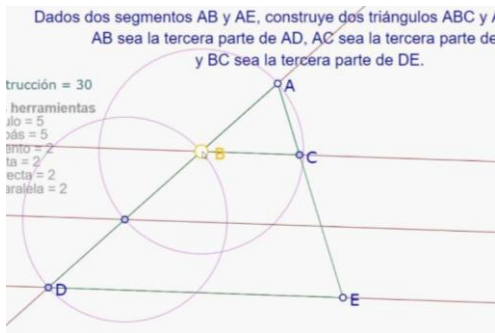
163	P	En el enunciado, ¿nota alguna relación en el enunciado?
164	E1	La tercera parte
165	P	¿Por qué eso está relacionado?
166	E1	Por qué toca dividir esa en tres (Se refiere al segmento AB que se debe dividir en tres partes iguales). [Vuelve a analizar los objetos que había construido a manera de experimentación].
167	E2	Venga, borremos todo eso. Mire, acá solo usamos dos círculos (Abre la ventana donde está la tarea que analizaron)
168		(Vuelven al punto de partida en la tarea 2 de la actividad 4 y sin culpa cierran el archivo donde habían resuelto la tarea 2 de la actividad 3).
169	P	La cerraron. Si quieren analizarla deben volverla a resolver.



170	E1	(Construye un punto libre en AE y une a B con dicho punto que llama C. Luego, construye el segmento AD que es el triple de AB y traza rectas paralelas al segmento BC).
-----	----	---



171	E2	(Mueve el punto E). Está como... tenía que bajar más [se refiere a que el punto E debía coincidir con la última recta paralela].
-----	----	--

182	P	¿Qué significa que no se pueda mover?
183	E1	Que cuando toque C, no se pueda mover.
184	P	¿Usted está garantizando que AC sea la tercera parte de AE? Eso dice el enunciado. Ese C que tiene, ¿cumple con lo requerido?
185		(Responden al mismo tiempo) No.
186	P	Entonces, ¿quién es C?
187	E2	Es que ahí no está garantizando que C sea la tercera. [Se refiere a que AC no es la tercera parte de AE].
188	E1	(Borra el punto C y construye una recta paralela al segmento DE que pasa por B y traza la intersección entre AE y dicha recta). ¡Ahora sí!
		
189	P	¿Es AC la tercera parte de AE?
190	E1	Si
191		(Presionan el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “Muy bien, continúe”)
192	P	¿Cómo garantizaron que AC es la tercera parte de AE?
193	E1	Pues de B se hizo un círculo A y luego se pusiera una recta, donde genera el otro punto...
194	E2	Se puso un círculo de B a A y de ahí la recta viene siendo más o menos C.
195	P	Describame la construcción.
196	E1	Se trazó una recta de B a A y en esa se puso un círculo de B a A, entonces donde quedó la esquina va X [Se refiere a intersección entre el círculo y la recta]. Y trazó la recta de B a C.

197	P	¿Y cómo trazó esa recta?
198	E1	Primero, inicié los círculos de BA y tracé el punto X [es el punto de intersección entre el círculo y la recta] y de ahí siguiendo la recta y con el círculo [se refiere al círculo con centro en X que pasa por B] salió el punto D. Y de ahí ...
199	P	Usted unió el punto D con E.
200	E1	Luego, paralelamente de... es que fue al azar.
201	E2	Es que el la tiró por tirarla [se refiere a que solo construyó las rectas paralelas para ver si algo encajaba]. Es que en el punto B puso una recta paralela y sacó el punto C.
202	P	Pero ¿recta paralela a cuál?
203	E1	BC es paralelo a DE.
204	P	¿Y cómo hizo eso?
205	E1	Yo uní todo y saqué paralela a esta, entonces salió esta [Se refiere a que construyó el segmento DE y trazó una paralela a este segmento que pasa por B].
206	P	¿Eso le sirve para resolver el problema de dividir el segmento en tres partes iguales?
207	E1	Si, el problema es...
208	P	¿Aquí hay algún segmento que usted haya dividido en tres partes iguales?
209	E2	BA y AD se dividieron en tres partes iguales.
210	P	Entonces, ¿Cómo dividió esos segmentos en partes iguales?
211	E2	Primero se guio por BA, hizo los círculos y ahí si completó con las rectas.
212	P	¿Y esa idea le serviría para esta tarea? [Se refiere a la tarea dos de la actividad cuatro].
213	E1	¡Ah si! Ya entendí.

Los estudiantes empiezan a resolver nuevamente la tarea 3.2 en la línea 169 de la *Tabla 13*. Ubican un punto libre en el segmento AE que luego llamarán C, enseguida construyen el segmento AD como el triple de AB, construyen el segmento BC y trazan rectas paralelas a él para transportar la razón. Sin embargo, el punto C es libre y no cumple con la razón que ellos quieren garantizar (línea 170).

Luego, creen que el error en la construcción está porque ninguna de las rectas paralelas al segmento BC conecta los puntos D y E. Por esto intentan acomodar el punto C de tal forma que visualmente se cumpla lo dicho anteriormente, pero se dan cuenta de que esta estrategia no funciona. A continuación, E2 sugiere: “¿Y si los une?”, haciendo referencia a una recta que pase por D y E. Vuelven a retomar estrategias perceptivas que parecían abandonadas.

Construyen una recta que pasa por D y E, pero siguen dejando al punto C como un punto libre (Ver línea 178). El profesor pregunta: “¿Qué es lo que quiere garantizar?”, E1 responde: “Que no se pueda mover”, el profesor pregunta: “¿Qué significa que no se pueda mover?”, E1 responde: “Que cuando toque C, no se pueda mover”. Esto da cuenta de que los estudiantes no se fijan en garantizar que AC sea la tercera parte de AE, sino que sea un objeto que no se mueva y visualmente dañe la construcción. A lo cual, el profesor pregunta: “¿Usted está garantizando que AC sea la tercera parte de AE? Eso dice el enunciado. Ese C que tiene, ¿cumple con lo requerido?”, rápidamente los estudiantes responden que ese punto C no garantiza que AC sea la tercera parte de AE.

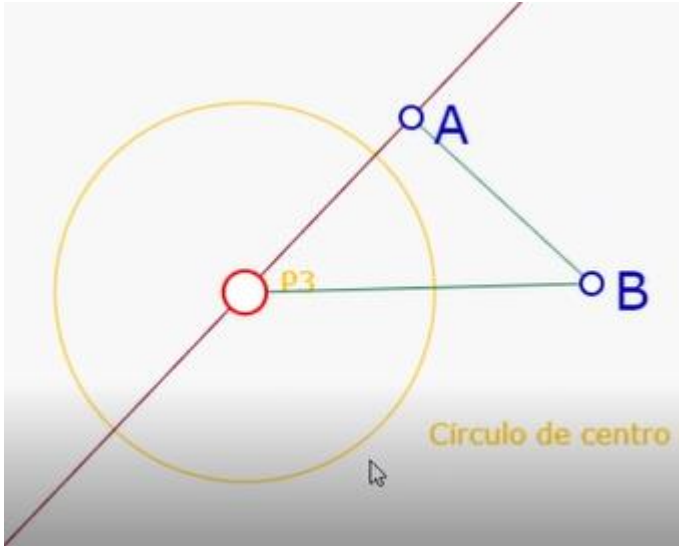
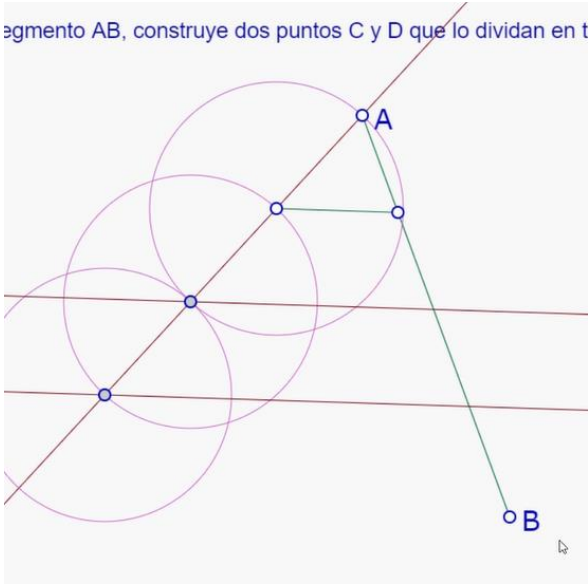
Ahora, el estudiante E1 borra el punto C y traza una recta paralela a DE que pasa por B, al intersecarla con el segmento AE se obtiene el punto C (ver línea 188). Esta construcción logra resolver el problema, pero se hace importante extraer la estrategia de construcción al obtener el punto C para poderla trasladar a la tarea de dividir un segmento en tres partes iguales.

El profesor pregunta: “¿Cómo garantizan que AC es la tercera parte de AE ?”, lo que provoca dos respuestas divergentes por parte de los estudiantes; E2 dice: “Se puso un círculo de B a A y de ahí la recta viene siendo más o menos C ”, lo que supone que el punto C es un punto producto de una recta que pasa por A y se corta con AE , es decir, C es un punto libre en AE . Por otra parte, E1 describe la construcción realizada, pero en el momento que va a hablar sobre las rectas paralelas, expresa: “es que fue al azar” haciendo referencia a que no usó las rectas paralelas esperando que resultara el punto C , sino que las usó para ver si algo de esa estrategia funcionada. Esto muestra que E2 aún no tiene claro que C no es un punto libre y que es producto de construir las rectas paralelas y E1 sabe que las rectas paralelas le permitieron construir el punto C , pero no ha consolidado esta idea.

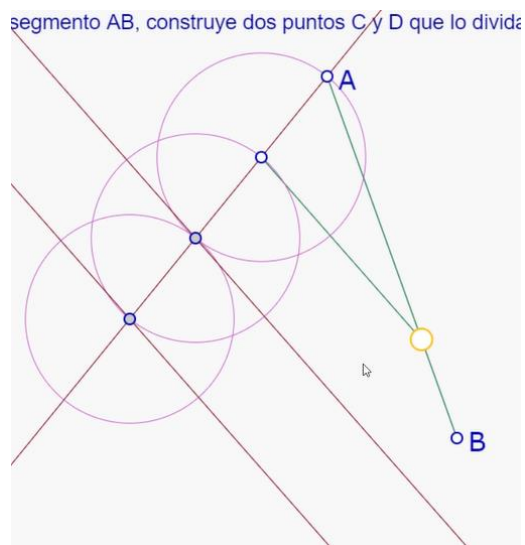
Luego, el profesor interviene preguntando: “¿Recta paralela a cuál?”, E1 responde: “ BC es paralelo a DE ”, el profesor pregunta: “¿Cómo hizo eso?”, a lo que E1 responde: “Yo uní todo y saqué paralela a esta, entonces salió esta”. Señalando en la pantalla, E1 se refiere a que trazó la recta DE y a esta trazó rectas paralelas que permitieron construir el punto C .

Note que aquí se está dividiendo a AE en tres partes iguales, pero los estudiantes aún no han consolidado este conocimiento y por eso les cuesta trasladar esta idea a la tarea que desean resolver. Por esto, el profesor pregunta: “¿Aquí hay algún segmento que haya dividido en tres partes iguales?”, “¿Eso le sirve para resolver el problema de dividir el segmento en tres partes iguales?”. Los estudiantes manifiestan que esta idea podría servir.

Tabla 14.*Solución de la segunda tarea de la cuarta actividad*

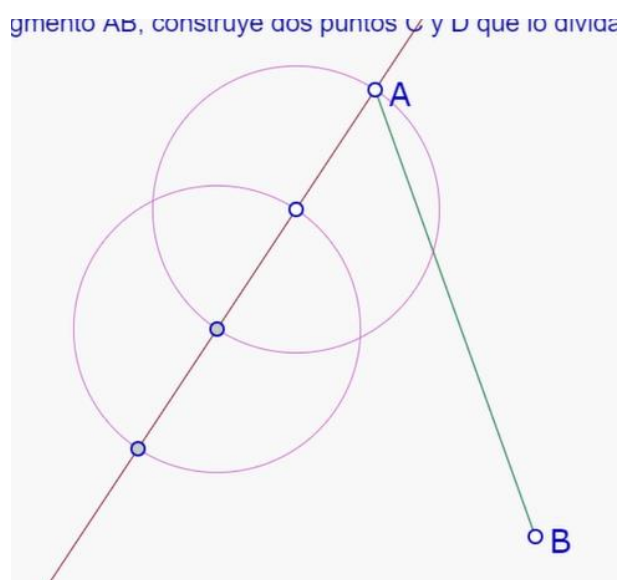
No	Sujeto	Evidencia / Descripción
215	E2	No, espere. Dejemos este acá y sacamos este acá [Se refiere a no construir el triple de AB, luego construye un segmento auxiliar]. 
216	E1	No [Expresa que no está de acuerdo con esa construcción].
217	E2	Ah si, espere (Realiza la construcción que se ve en la imagen). 
218	E1	Si [Se expresa de manera afirmativa].

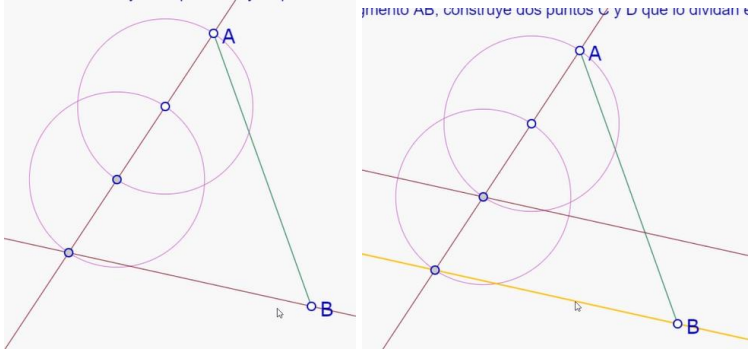
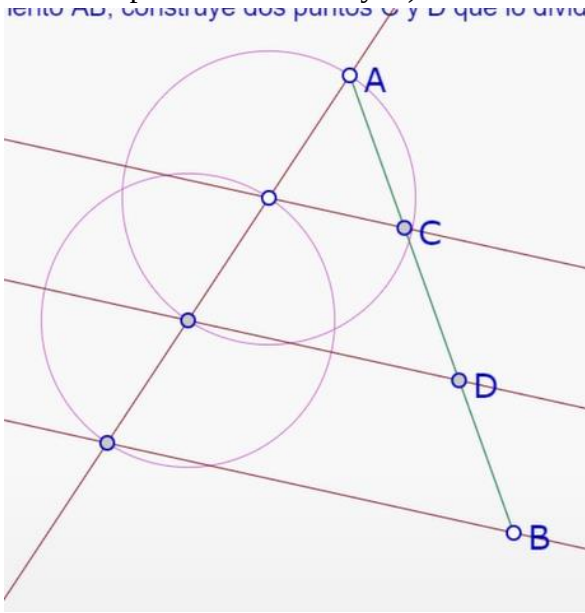
219	P	¿Está dividido en tres partes iguales?
220	E2	No, en cuatro partes iguales.
221	P	Arrastre este punto [Se refiere al punto libre que hay sobre el segmento AB].
222		(Al arrastrar el punto se daña la razón que ellos creían que estaba garantizada).



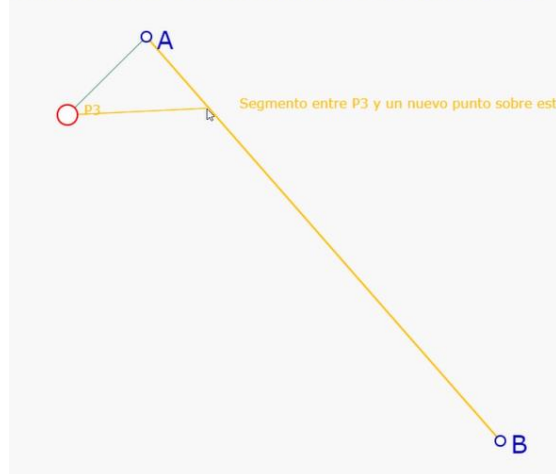
223	E1	Mmm, que raro.
224	E2	(Borra uno de los círculos construidos)

Ese no va.

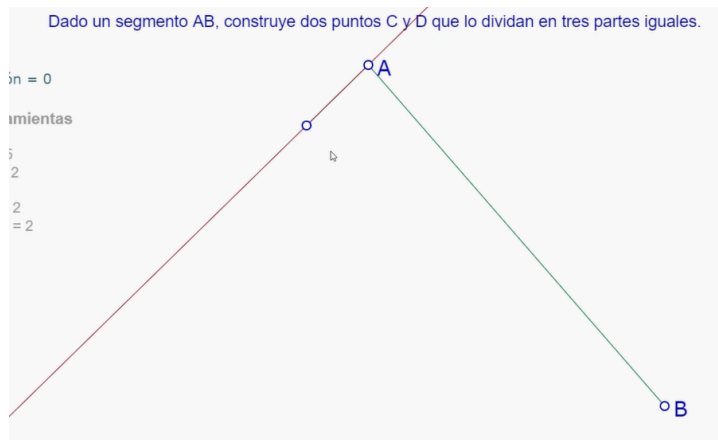


Hagalo usted [Le da el control a E1].		
225	E1	Bueno.
		
226		(Luego, nombrar los puntos de intersección entre el segmento AB y las rectas paralelas como C y D).
		
(Presionan el botón <i>Verificar</i> y se muestra el mensaje “Muy bien”).		
227	P	Les propongo otro problema. Van a dividirlo ahora en cinco partes iguales [Se refiere al segmento AB].
228	E1	Ok, toca volver a hacerlo.
229	E2	(Construye un segmento auxiliar y forma un triángulo con un punto libre en el segmento AB).

construye dos puntos C y D que lo dividan en tres partes iguales.



230	E1	No.
231	E2	No que.
232	P	Cuentele.
233	E2	Hagalo a ver.
234	P	Use usted el ratón y usted cuentele porque no [Se refiere a que E2 haga la construcción y E1 le comunique en donde está cometiendo errores].
235	E1	Borramos este punto (Borra el punto libre que está en el segmento AB).

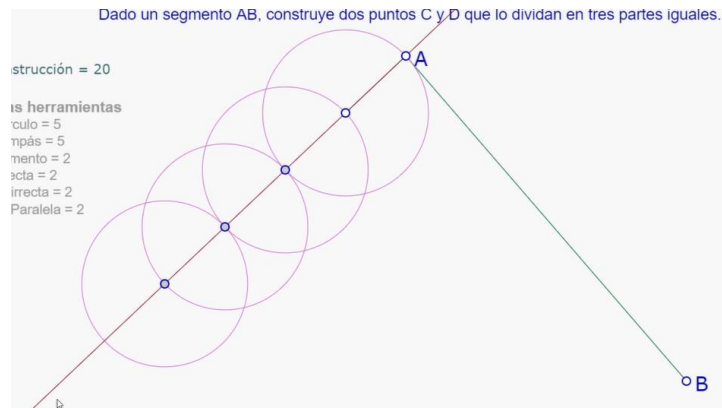


De ese punto, primero hace el círculo a A [Le pide que duplique el segmento formado por A y el punto que no tiene nombre].

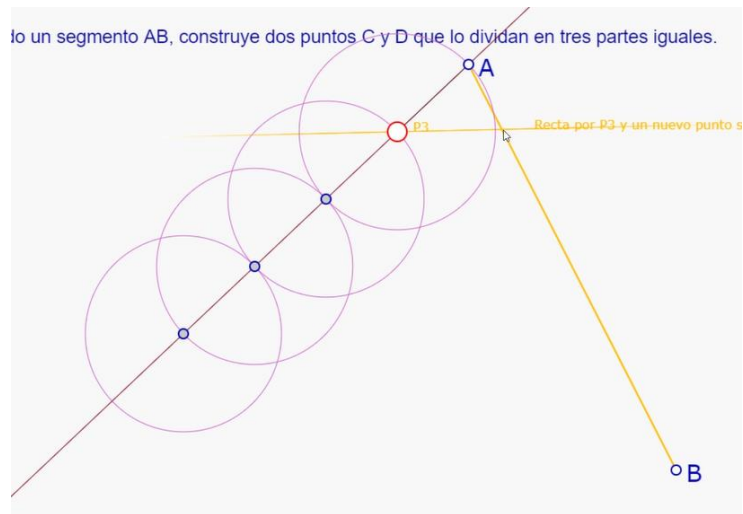
236	E2	Por eso, es que primero tocaba mirar a donde se unía el punto, porque sino queda como a la deriva.
-----	----	--

237 E1 guarda silencio y E2 realiza lo que le pidió E1.

238 E2 (Quintuplica el segmento auxiliar).



(Luego, saca una recta del primer punto hacia el segmento AB).



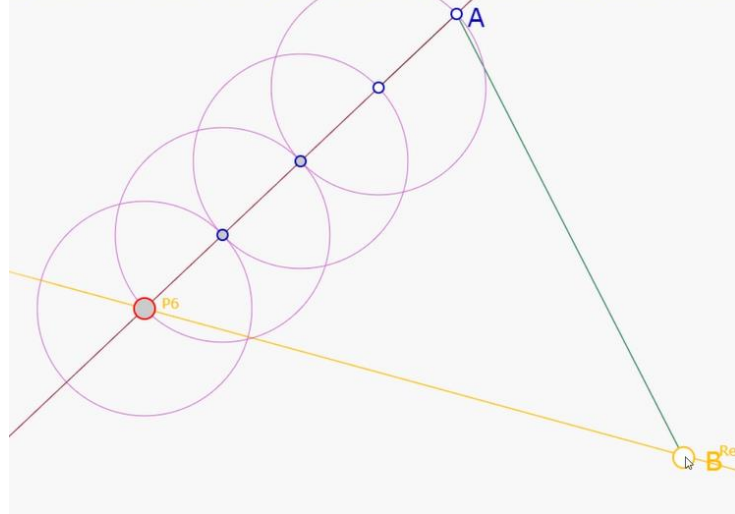
239 E1 No.

240 E2 Entonces.

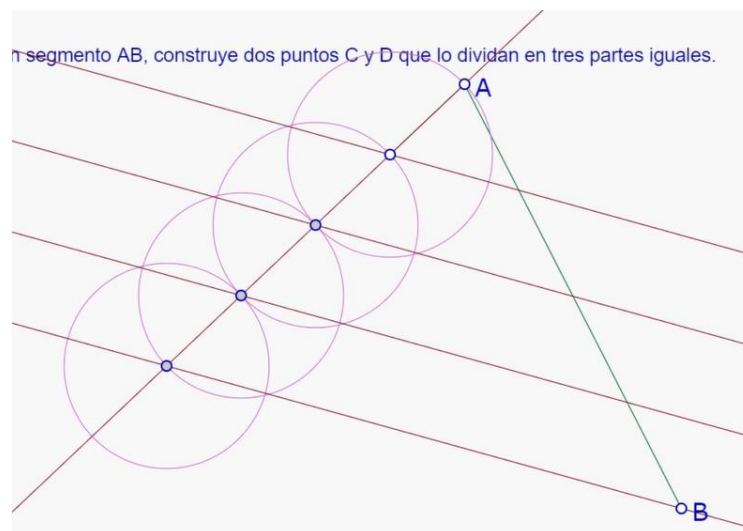
241 E1 (Señala que debe unir el último punto con B).

242 E2 ¡Ah, si!

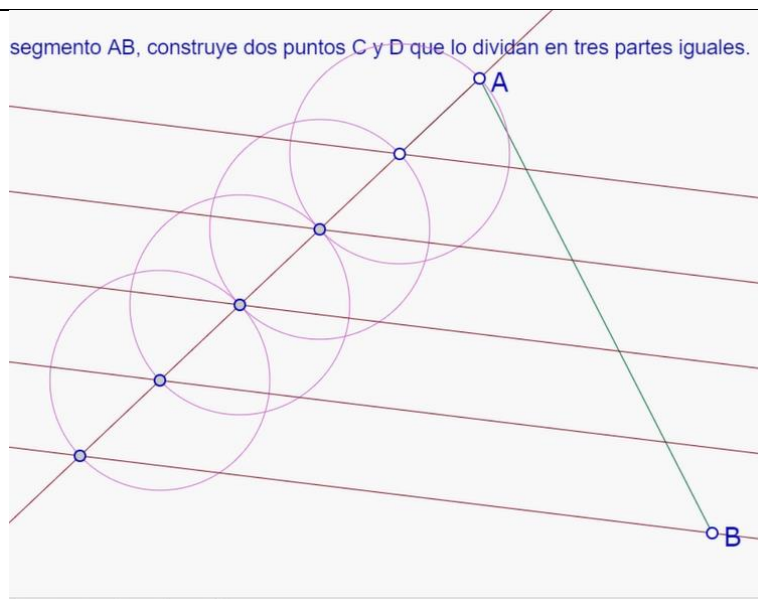
segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan en tres partes iguales.



(Luego, traza rectas paralelas para transportar la razón al segmento AB).



243	E1	Hay cuatro [Se refiere a que solo se dividió el segmento en cuatro partes].
244	E2	Si, me faltó uno. (Corrige la construcción).



En el momento en que los estudiantes resuelven nuevamente la tarea 3.2 recuerdan la construcción que les permite dividir a un segmento en tres partes iguales. Por esto, en la *Tabla 14* intentan replicar dicha construcción en el problema de construir dos puntos, C y D, que dividan al segmento AB en tres partes iguales. E2 tiene un comienzo bien al construir una recta que pasa por A, en la que va a estar contenido el segmento auxiliar. Sin embargo, E2 aún no tiene conciencia sobre la construcción de razones fraccionarias a partir de transportar la razón con paralelismo. En la línea 217, triplica al segmento auxiliar, construye un punto libre en el segmento AB uniendo dicho punto con el extremo del segmento auxiliar, y a partir de este construye rectas paralelas, como si quisieran transportar el triple, en vez de la tercera parte.

Cuando el profesor se percate de este hecho les pregunta: “¿Está dividido en tres partes iguales?”. E2 responde: “No, en cuatro partes iguales”, esta respuesta es dada desde una interpretación visual de la construcción, no teórica. Por lo cual, el profesor les pide que arrastren el punto libre en el segmento AB. Al hacerlo, E1 se percata de que no se está garantizando la razón

requerida y decide borrar las rectas paralelas y construye una recta que une al triple del segmento auxiliar con B. Luego, traza las rectas paralelas a esta recta y así divide al segmento AB en tres partes iguales.

Con este obstáculo surge la pregunta de si es necesario agregar una tarea que funcione como puente entre trasportar razones enteras (doble, triple, etc.) y trasportar razones fraccionarias (mitad, tercera parte, etc.). Esta implementación permitió ver que para los estudiantes es sencillo trasportar razones del primer tipo, pero cuando se trata de la segunda hay mayores dificultades para formar un conocimiento sobre esto. Esto sugiere que se debe hacer una transición más explícita, con actividades que ayuden a manejar estas relaciones fraccionarias en el contexto de proporcionalidad geométrica entre triángulos.

Por otra parte, en la línea 227, el profesor propone que ahora se divida al segmento AB en cinco partes iguales, esto para ver si ya había un conocimiento estandarizado sobre cómo resolver este problema. Además, el profesor propició el espacio para que E1 le explicase a E2 porque el iniciar con un punto libre en el segmento que se quiere dividir no permite obtener la razón deseada. Desde la línea 235 a 244, se observa como el trabajo colaborativo entre E1 y E2 facilita que ambos comprendan los procesos y estrategias implementados para resolver el problema.

Tabla 15.

Generalización de la estrategia

No	Sujeto	Evidencia / Descripción
245	P	¿Qué pueden concluir de esta tarea?, si quisieramos dividir un segmento en partes iguales ¿qué tendríamos que hacer?
246	E2	Primero sacar un punto al lado contario del lugar que queremos dividir.
247	P	¿Cualquiera?

248	E1	Si
249	E2	Sí, ¿no?
250	P	Arrastre el punto. ¿Cambia la solución?
251	E2	(Arrastra el punto que del segmento auxiliar y se da cuenta que la división del segmento AB no cambia).
252	P	Entonces puede ser cualquiera.
253	E2	Sí y de ese punto sacamos un círculo al punto inicial [Se refiere al segmento auxiliar formado con A].
254	P	¿Para que el círculo?
255	E2	Para sacar los extremos.
256	P	¿Qué es lo que se quiere lograr con los círculos?
257	E1	Es que con un círculo serían dos partes (Señala los dos segmentos formados de igual longitud).
258	E2	Entonces así podemos hacer más círculos para dividir en mas partes.
259	P	Pero, ¿está dividiendo?
260	E2	Relativamente si. Porque estamos dividiendo y a la vez aumentando.
261	P	Listo, ya tiene las cinco partes iguales ¿y luego?
262	E2	Primero unimos el último punto que nos dio del último círculo con B y de ese sacamos...
263	E1	Las paralelas.
264	P	¿Por qué paralelas?
265	E2	Para poder dividir.
266	E1	Es que apartir de la recta ibamos poniendo paralelas para dividir acá [Se refiere a dividir al segmento AB].

Por último, en la *Tabla 15*, el profesor busca que los estudiantes formulen y consoliden de manera verbal el proceso para dividir un segmento en partes iguales, lo que refleja el uso TFP.

Cuando los estudiantes están describiendo esta construcción, el profesor hace dos preguntas importantes. La primera tiene que ver con el segmento auxiliar y el hecho de que su longitud no es relevante, mientras que sea adyacente al segmento que se quiere dividir. La segunda pregunta, se ve en la línea 259 cuando dice: *“Pero ¿está dividiendo?”*. El profesor plantea esto, dado que anteriormente, E2 afirma: *“Podemos hacer más círculos para dividir en más partes”*.

Ante esta pregunta E2 responde: *“Estamos dividiendo y a la vez aumentando”*. Haciendo referencia a que cuando se quiere obtener la quinta parte, entonces se debe quintuplicar al segmento auxiliar. De modo que, si se quiere dividir al segmento AB en n partes iguales, entonces se debe multiplicar al segmento auxiliar n veces.

8.5. Análisis de la secuencia

En las dos primeras actividades cuando los estudiantes realizan la construcción solicitada, al verificar que la construcción cumple los requerimientos, se da paso a las preguntas sobre las propiedades geométricas que se cumplen en dicha construcción. Por ejemplo, en la primera tarea de la segunda actividad, se muestra la oración: “BC y DE son”, donde la forma correcta de completarla es afirmando que son paralelos. Esta retroacción permitió que los estudiantes se fijaran en el paralelismo que surge entre estos dos segmentos al garantizar que AD y AE sean el doble de AB y AC respectivamente. Por lo cual, se considera que este tipo de retroacciones que ponen al estudiante a identificar las diferentes relaciones entre los distintos segmentos construidos son adecuadas para reconocer estas características. Sin embargo, las retroacciones deben favorecer una reflexión más profunda de estos aspectos identificados, para el reconocimiento de los hechos geométricos propios del TFP. En este caso, se debe indagar más sobre la forma como se plantea la retroacción para que los alumnos, centren la atención en la pregunta planteada y no solo que

escojan una respuesta. Incluso, conviene preguntarse por la necesidad de intervención del profesor en este momento.

Por otra parte, las retroacciones que utilizan al *mico* permiten que los estudiantes adopten aspectos del contrato didáctico, donde aceptan que el arrastre permite validar si una construcción obedece a argumentos teóricos. Por esto los estudiantes en un punto dejaron de utilizar el *mico*, porque constataron que ellos mismos podían arrastrar los objetos para validar si la construcción cumple con el planteamiento. Sin embargo, el *mico* no eliminó por completo el hecho de que los estudiantes intentaran implementar estrategias perceptivas a la hora de realizar construcciones, pues en la última actividad aún persistían estrategias de esta índole.

9. Conclusiones

El problema de dividir un segmento en partes iguales ha sido tratado en distintas etapas del desarrollo matemático, encontrando su solución en el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad. Sin embargo, en la enseñanza, este teorema es tratado desde una perspectiva numérica o algebraica, limitando su aplicación a ejercicios de encontrar la cuarta proporcional. Por esto, es importante recuperar la naturaleza geométrica de este teorema, para movilizarlo al resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales. En este trabajo se propone una secuencia de tareas con este objetivo, basada en la TSD y usando DGPad-Colombia como medio.

La Teoría de las Situaciones Didácticas, plantea que el aprendizaje ocurre a través de la interacción entre el estudiante y el medio, el cual es diseñado por el profesor. En el contexto de la geometría dinámica, DGPad-Colombia es una aplicación web que ofrece la opción de programar retroacciones didácticas, además de las retroacciones matemáticas propias de este. Por lo tanto, tiene potencial para desarrollar tareas que promuevan el aprendizaje por adaptación, considerándolo un medio con el cual interactúan los estudiantes.

Para recuperar la naturaleza geométrica del Teorema Fundamental de la Proporcionalidad y aprovechar el potencial de DGPAD-Colombia, se diseñaron cuatro actividades secuenciales cuyo objetivo es que el estudiante movilice los conceptos geométricos implícitos en el TFP, usando este teorema para resolver el problema de dividir un segmento en partes iguales.

Para diseñar estas tareas fue importante analizar el problema y determinar los hechos geométricos que intervienen en su solución. En el análisis a priori se anticiparon algunas acciones de los estudiantes que podrían realizar al enfrentar el problema, así como los diferentes hechos geométricos identificados previamente. De acuerdo con estos análisis, se anticiparon posibles actos de devolución por parte del profesor y algunos fueron automatizados mediante retroacciones. Por ejemplo, en las tareas, si los estudiantes realizan las construcciones de manera perceptiva, al presionar el botón verificar se muestra el mensaje: *"Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico"*.

De las acciones previstas en la primera actividad, podemos afirmar que efectivamente se logró el objetivo de que los estudiantes identificaran el primer hecho geométrico, el cual era que los multiplicaran un segmento y tuvieran conciencia sobre la razón inversa de esta multiplicación, en este caso los cuadros de diálogo que mostraban preguntas para completar, centraban la atención en este hecho, con el fin de que identificaran que, si AC es el doble de AB, entonces AB es la mitad de AC. En esta tarea las retroacciones fueron suficientes para lograrlo sin la participación del profesor.

En la segunda actividad, la estrategia de asignarle costo a las herramientas de construcción cumplió con el objetivo propuesto, ya que en la segunda actividad los estudiantes comenzaron a considerar las rectas paralelas como una herramienta que permite transportar razones entre segmentos. Además, esta estrategia también favoreció en otras actividades, donde los estudiantes,

motivados por la necesidad de reducir costos, preferían utilizar rectas paralelas en lugar de círculos para construir triángulos con lados proporcionales.

En la tercera actividad, aunque en un primer momento los estudiantes desarrollaron dicha tarea sin problema. No se desarrolló correctamente el hecho geométrico que había implícito en esta tarea, por lo que se plantea la posibilidad de programar retroacciones que den cuenta de ello o proponer otra tarea que haga una transición entre transportar razones enteras a razones fraccionarias.

Al revisar los enunciados de la segunda y tercera actividad, se pide a los estudiantes que, dado un triángulo ABC, construyan un triángulo ADE cuyos lados sean el doble o triple de los de ABC. Posteriormente, se les propone construir un triángulo ABC y ADE tal que los lados del primero sean la mitad de los del segundo. En estas actividades se les pide garantizar razones entre los lados de un par de triángulos. Sin embargo, de manera abrupta, en la cuarta actividad se les pide que construyan puntos en un segmento tal que lo dividan en partes iguales. Como consecuencia de esta desconexión, a pesar de que son problemas relacionados los estudiantes los perciben como aislados y, al resolver la cuarta actividad, comienzan una exploración abandonando un poco las ideas fundamentales de las tareas previas. Por esto, el profesor se vio en la necesidad de intervenir para incentivar una reflexión entre las tareas desarrolladas.

En cuanto a la secuencia de actividades propuestas, se observa que los aspectos geométricos tratados en ellas son suficientes para que los estudiantes puedan resolver el problema planteado. A pesar de que el profesor tuvo que intervenir al iniciar la cuarta actividad, cuando se da la transición entre las tres primeras actividades desarrolladas y la cuarta, los estudiantes fueron conscientes de que en las actividades anteriores ya se habían desarrollado las herramientas geométricas suficientes para resolver el problema propuesto. Por esto, cuando retomaron la

actividad 3, encontraron las conexiones entre los hechos geométricos identificados en las tareas anteriores y lograron resolver el problema de dividir el segmento en partes iguales.

Es importante señalar que, debido a esta desconexión, se sugiere en futuras investigaciones realizar una modificación en los enunciados de las tareas. Al hacerlo, se debería considerar una reorganización en el orden de las tareas para favorecer el entendimiento de la secuencia. Esta recomendación se basa en la observación de que, en la cuarta actividad los estudiantes lograron dividir un segmento AB en dos partes iguales por medio de la mediatriz. Pero como el objetivo de las actividades anteriores era que los estudiantes resolvieran la primera tarea y generalizaran la construcción de esta tarea para resolver las siguientes tareas. La falta de una conexión lingüística y las características de las tareas anteriores llevó a los estudiantes a entrar en un ciclo donde se enfocaron en generalizar la idea de la mediatriz para dividir al segmento en tres partes iguales, sin lograr abandonar esta estrategia.

Por otra parte, se constata que las retroacciones y tareas programadas no son suficientes para que los estudiantes tomen conciencia sobre los hechos geométricos o propiedades que se quiere que identifiquen. Por ejemplo, en la tarea 3.2 los estudiantes ya habían dividido al segmento en tres partes iguales, pero no eran conscientes de que lo habían hecho y cómo lo hicieron. En este caso se hizo necesaria la intervención del profesor para conducir a los estudiantes a una reflexión sobre este suceso.

En cuanto a la retroacción del *mico* como herramienta para validar las construcciones, los estudiantes aceptan que la construcción cumple con los requerimientos, cuando se conservan las propiedades solicitadas al presionar el *mico*. Por ejemplo, cuando: los estudiantes construían una recta que visualmente pasaba por un punto, pero al usar el *mico* esta característica se dejaba de

percibir, invalidaban la construcción. Este hecho del contrato didáctico, fue fundamental para el desarrollo de las tareas.

En lo concerniente al papel del profesor, como se ha dicho anteriormente, no creemos que se pueda minimizar de manera absoluta su intervención. Tal como se evidenció en la segunda tarea de la segunda actividad, pues fue necesario que el profesor iniciara una reflexión sobre el uso de las rectas paralelas para transportar razones entre triángulos en posición de similitud. Esta intervención se constituye como un proceso de institucionalización, donde el profesor ayuda a los estudiantes a concretar sus conocimientos desarrollados en la tarea sobre esta idea del TFP.

Aunque los resultados del pilotaje confirman en cierta parte las hipótesis del análisis a priori, esta implementación limita la generalización de los resultados, porque únicamente se trabajó con dos estudiantes.

Es necesario seguir indagando sobre el rol del profesor en las diferentes actividades, de modo que se pueda automatizar más retroacciones y minimizar más sus intervenciones en las tareas. Otro aspecto en el que se debe reflexionar con mayor profundidad es la dificultad propia del lenguaje en las tareas.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, M. (2010). *Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica*. Undécimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá, Colombia. pp. 132 - 142.
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En. Gómez, P (Ed.), *ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33 - 59). Grupo editorial Iberoamérica. Bogotá, Colombia.
- Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática*. Alianza editorial.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del zorzal. Buenos aires. Argentina.
- Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Addison-Wesley Iberoamericana. México.
- Estévez, R. (2022). *Retroacciones didácticas programadas en DGPAD para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia*. Trabajo de grado para optar por el título de Magister en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.
- Euclides. (1991). *Los elementos*. Libros V, VI (Trad. Puertas, M.). Madrid: Editorial Gredos S.A.
- Fillooy, E y Lema, S. (1996). *El teorema de Tales: significado y sentido en un sistema matemático de signos*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 55-75). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. [Disertación Doctoral]. Universidad del Valle, Cali.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics*. London. Oxford University Press.

Laguerre, E. (2005). *Une ingenierie didactique pour l'apprentissage du theoreme de thales au college*. Université Paris – Diderot - París VII. <https://theses.hal.science/tel-00337891>

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Universidad Industrial de Santander ediciones. Bucaramanga, Colombia.

Masseno, T. y Pereira, A. (2023). *Compreendendo as linhas de partes iguais do compasso de proporção (1631) pelo teorema de proporcionalidade*. REMATEC, 18 (43). <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023001.id433>.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Vamos a aprender matemáticas 9*. Ediciones SM.S.A. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2019). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia.

Pérez, L. (2017). *Situaciones adidácticas para la enseñanza de la homotecia usando Cabri Elem como medio*. Trabajo de grado para optar por el título de Magister en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

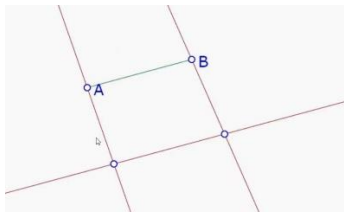
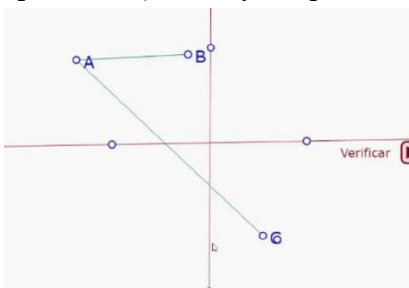
Rueda, M. y Niño, A. (2013). *Automatización de actos de devolución en software Cabri LM*.

[Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemática]. Universidad

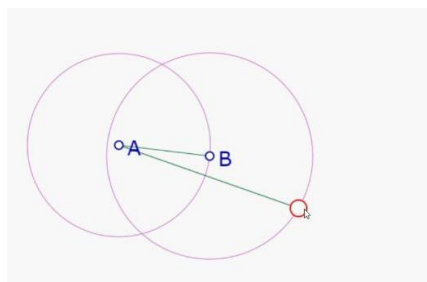
Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Apéndices

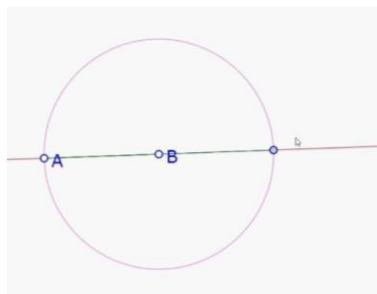
Apéndice A. Transcripción Primera Actividad

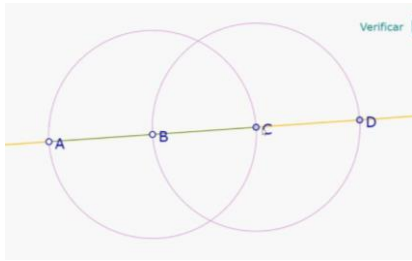
N.º	Sujeto	Descripción / Evidencia
1	E1	(Lee el enunciado) ¿cómo hacemos que sea el doble?
2	E2	Toca reflejarlo, pero de una manera más grande.
3	E1	Debemos construir el segmento AC, pero que sea el doble de AB.
4	E2	Primero la reflejamos (traza una recta paralela al segmento AB que pasa por un punto libre de la pantalla).
5	E1	Ahora una recta que una el segmento AB con la recta paralela, pero que sea el doble (traza una recta que pasa por B y un punto de la recta paralela, luego traza una recta que pasa por A y otro punto de la recta paralela).
		
6	E2	Se supone que el punto que está debajo de A debe ser C y que AC debe ser el doble de AB. ¿Cómo hacemos para que sea el doble?
7	E1	(Borra la construcción realizada por E2 y construye un círculo centro en A que pasa por B).
8	E2	No, ese círculo nos ayuda es a construir un segmento igual... Intentemos hacer una “t” (borra la construcción realizada por E1).
9	E1	¿Una “t”? ¿cómo así una “t”?
10	E2	Sí, más o menos así... (Borra el círculo y construye de manera perceptiva dos rectas perpendiculares cerca al segmento AB). No sé qué estoy haciendo, pero aquí se vería reflejado el punto C. (construye el punto C y el segmento AC).
		
		Es que es como para reflejarlo con otro, pero no sé... (Borra las rectas que construyó en posición de “t”).
11	E1	No sé qué hizo usted. (selecciona el punto A como centro de un círculo, pero duda si elegir C o B para terminar de construir el círculo y decide no construirlo).

12	E2	No, ese no se puede porque ese es para construir segmentos del mismo tamaño.
13	P	¿Cuál es la idea que tiene E1?
14	E1	Quiero sacar un segmento que sea igual a AB y luego con la misma sacar uno que sea el doble. (Construye un círculo con centro en A que pasa por B).
15	E2	¿Y si intenta construir otro círculo del B al C? ¿o del A al C?
16	E1	(Construye un círculo con centro en A que pasa por C y empieza a arrastrar el punto A). No, no da. (Presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico</i> ”)
17	E2	Es que cuando activemos el mico, se debe cumplir que siempre AC sea el doble de AB. Entonces aquí cuando el mono mueva, no siempre va a ser el doble.
18	E1	¿Entonces cómo hacemos que sea el doble? Ya sabemos que se puede sacar un segmento que mida lo mismo. (Borra el segmento AC, el punto C y el círculo con centro en A que pasa por C).
19	E2	Yo creo que con un círculo con centro en B (construye el círculo con centro en B que pasa por un punto libre en la pantalla. Luego, construye el segmento que une el punto A y el punto libre y arrastra el punto A). Pero vea que aquí no termina siendo el doble.



20	E1	(Borra la construcción realizada por E2 y construye un círculo con centro en A que pase por B y otro círculo con centro en B que pase por A. Luego, construye un punto C libre que está en el segundo círculo y crea el segmento AC).
21	E2	(Muestra las medidas de AB y AC).
22	E1	(Arrastra el punto C y se da cuenta que en un momento AC es el doble de AB. Además, borra el círculo con centro en B que pasa por A. Decide borrar el punto C y construir una recta que pasa por A y por B, traza la intersección entre la recta y el círculo).

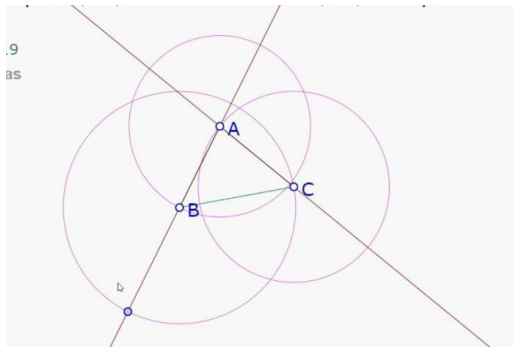
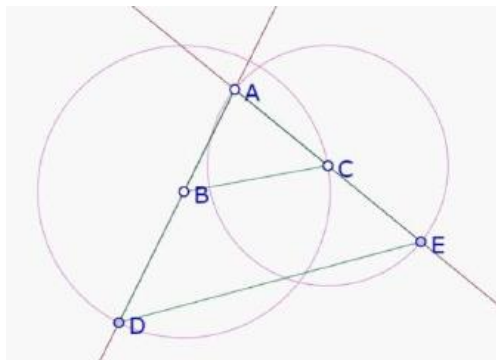


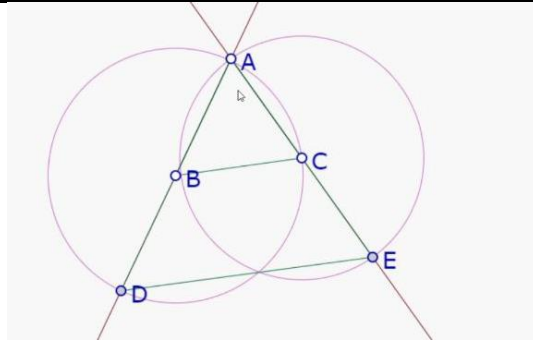
23	E2	Pero ¿ese punto sería C?
	E1	(nombra al punto como C, presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Muy bien, continúe</i> ”, a la vez se oculta el botón <i>verificar</i> y se muestra el botón <i>continuar</i>).
24	E2	Mmm, pues lo que vi fue que trazó una recta y puso la intersección.
25	E1	Si, es que AB es la mitad y AC es el doble. (presiona el botón <i>continuar</i> , se muestra el mensaje “ <i>completa la oración que se mostrará a continuación, escogiendo una de las opciones del menú desplegable</i> ” y aparece la oración para completar con un menú desplegable] (selecciona la opción de AB es el doble de AC y al presionar el botón <i>verificar respuesta</i> , se muestra el mensaje “ <i>¿AB es el doble de AC?</i> ”)
26	E2	(lee el mensaje). No, es la mitad. (selecciona la opción de AB es la mitad de AC y al presionar el botón <i>verificar respuesta</i> , se muestra el mensaje “ <i>AB es la mitad de AC</i> ”). (Se percata de que apareció el botón <i>siguiente tarea</i> y lo presiona).
27		(Se cambia la consigna y aparece un nuevo botón de <i>verificar</i>)
28	E2	(lee la consigna). ¿No se puede hacer otro círculo más grande?
29	E1	¿Qué AD sea el triple? Voy a intentar sacar otro círculo (construye un círculo con centro en C que pasa por B)
30	E2	Ajá, entonces D es la intersección. Simplemente trazamos un segmento que vaya desde A hasta la intersección. (Construye el punto D).
		
31	E1	Mmm, pero queda el punto C ahí.
32	E2	No pasa nada, porque el círculo fue construido desde el punto C, entonces toca dejarlo ahí
33	E1	(presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>no hay segmento AD</i> ”)(construye el segmento AD, presiona el botón <i>verificar</i> nuevamente y se muestra el mensaje “ <i>Muy bien, continúe</i> ” y aparece el botón <i>continuar</i>).
34	E2	(presiona el botón <i>continuar</i> y aparece en la pantalla las opciones en el menú desplegable para completar la pregunta). AB es la tercera parte.
35	E1	Si. (selecciona la opción de que AB es la tercera parte y aparece el mensaje “ <i>AB es la tercera parte de AD</i> ” y luego aparece el mensaje “ <i>Muy bien, terminaste la tarea</i> ”).

36	P	Si quisiéramos construir un segmento que sea 4 veces AB, ¿cómo lo haríamos?
37	E2	Sacar otro círculo del punto D que pase por C y en la intersección ponemos el punto.
38	P	Muy bien, entonces de este modo podemos duplicar, triplicar y multiplicar el segmento. Entonces pasemos a la siguiente tarea.

Apéndice B. Transcripción Segunda Actividad

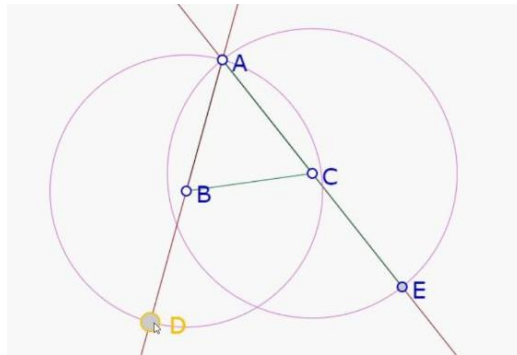
N.º	Sujeto	Descripción / Evidencia
1	E2	(lee el enunciado) mmm, o sea que tenemos que hacer otro igual pero que sea el doble.
2	E1	Si, hay que hacer el doble.
3	E2	¿Toca hacer el círculo?
4	E1	¿Cierto?
5	E2	No sé, puede ser.
6	E1	(Traza un círculo con centro en A, que pasa por B).
7	E2	Saque tres círculos para ver (E1 construye un círculo con centro en C que pasa por A, otro círculo con centro en B que pasa por C).
8	E1	¿Será que sí? Estoy dudando. A... B...
9	E2	Entonces toque en el punto A y saque una recta que pase por B y cree otra recta que pase por A y por C.

		(E1 construye las rectas que le pidió E2)
		Ahora ponga la intersección
10	E1	(E1 construye las rectas que le pidió E2)
11	E2	Ahora ponga la intersección entre la recta AB y el círculo, y ahora lo mismo en la recta AC y el otro círculo.
		
12	E1	Voy a quitar el círculo con centro en A que pasa por B. (traza el segmento que une las intersecciones)
13		(presionan el botón verificar y se muestra el mensaje “No hay ningún lado del triángulo ADE”).
14	E1	¡Ahh, ya! Este punto es E y este es D
		
		Ahora toca verificar (presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico”).
15	E2	Si se mueve ya no queda el doble.
16	E1	Si, intentemos mover un círculo. (Arrastra el círculo con centro en C que pasa por A)
17	E2	Si, ya no queda... ¡Si!
18	E1	(Sigue moviendo el círculo con centro en C que pasa por A e intenta que A esté en el círculo con centro en B que pasa por C).



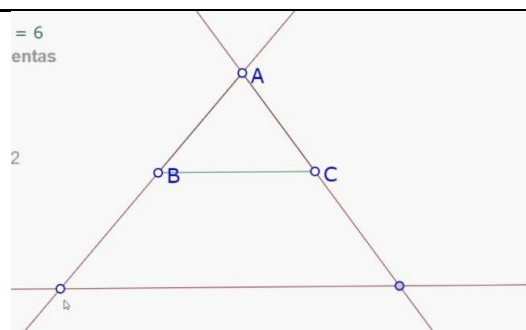
Necesitamos fijar al punto A en este círculo y está el doble, ¿sí o no?

19	E2	Pues sí, pero cómo lo fijamos allá. Intente con un círculo con centro en D que pase por A.
20	E1	(Traza un círculo con centro en D que pasa por A y arrastra el punto A). ¡Tengo una idea!, no necesitamos ese círculo.
21	E2	No.
22	E1	Necesitamos... Quitemos este círculo (borra el círculo con centro en B que pasa por C)
23	E2	¡No! porque se desaparece D.
24	E1	Si, lo sé. (Traza un círculo con centro en B que pasa por A)
25	E2	Ok, del B al A. ¡Ah, ya!
26	E1	(Traza la intersección entre la recta AB y el círculo con centro en B que pasa por A). Y este se llama D.



27		(Trazan los segmentos AD, AE y DE, y arrastran el punto A para verificar si cumple lo requerido).
28	E2	Ok, entonces verificar (presiona el botón <i>verificar</i> y aparece el mensaje “Muy bien, continúe”, también se muestra el botón <i>Continuar</i> y el botón <i>Verificar respuesta</i>).
29		(presionan el botón <i>continuar</i> y aparece el mensaje “Completa la oración que se mostrará a continuación, escogiendo una de las opciones del menú desplegable”. A la vez aparecen las tres oraciones con su menú desplegable).
30	E1	AB es el doble de AD.

31	E2	No, AB es la mitad de AD...AC es la mitad de AE y BC es la mitad de DE. (Da clic al botón <i>Verificar respuesta</i> y se muestra el mensaje “ <i>AB es la mitad de AD, AC es la mitad de AE y BC es la mitad de DE</i> ”. Al mismo tiempo aparece un botón <i>Continuar</i> de color verde).
32		(Presionan el botón <i>Continuar</i> y aparece el mensaje que enuncia la oración para completar y se muestra un cuadro que dice “ <i>BC y DE son</i> ”).
33	E2	BC y DE son paralelos ¿será?
34	E1	Si, son paralelos
35		(verifican la respuesta y aparece el mensaje “ <i>BC y DE son paralelos</i> ”, también se muestra el botón <i>Siguiente tarea</i>).
36	P	¿Por qué BC y DE son paralelos?
37	E2	Si, porque si una se mueve para un lado, la otra también se va moviendo pa ese lado. La única diferencia es que es el doble. Tiene el mismo movimiento.
38	P	¿A qué se refiere con “el mismo movimiento”?
39	E2	O sea, si DE queda inclinada para un lado, entonces BC también queda inclinada para el lado.
40	E1	Porque si se mueven siempre este va a ser el doble de este (señala los segmentos DE y BC).
41	P	Ok, entonces siguiente tarea.
42		(pulsan en <i>Siguiente tarea</i> y aparece el mensaje “ <i>¿Será posible obtener una construcción menos costosa? Intenta realizar una construcción menos costosa</i> ”).
43	P	¿Cuánto les costó esta construcción?
44	E1	20
45	P	Entonces si realizan la misma construcción pero que cueste menos de 20, ya tienen una construcción menos costosa.
46	E1	¿Qué valga menos de 20?
47	E2	¿Y si lo hacemos con rectas paralelas? O sea, como semejanza, ¿Si me entiende?
48	E1	Puede ser, sí. ¿Cómo era?
49	E2	Primero saque las rectas de los lados desde el A.
50	E1	(Traza las rectas AC y AB).
51	E2	Ahora trace una recta como horizontal (Se refiere a una recta paralela al segmento BC).
52	E1	(Traza una recta paralela al segmento BC que pasa por un punto en la recta AB y traza la intersección entre la recta AC y la recta paralela).

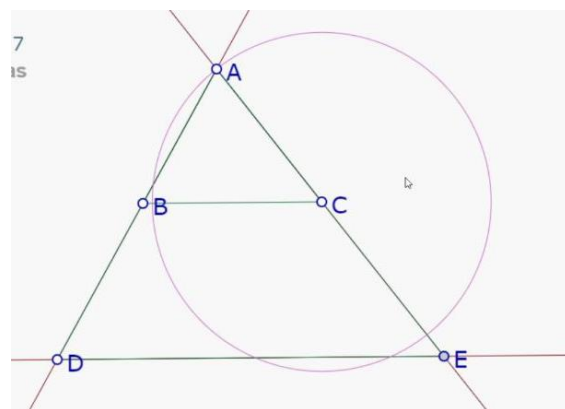


(Al punto libre lo llaman D y al punto de intersección lo llaman E).

- 53 (Trazan los segmentos AD, DE y AE, y presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “*Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico*”)

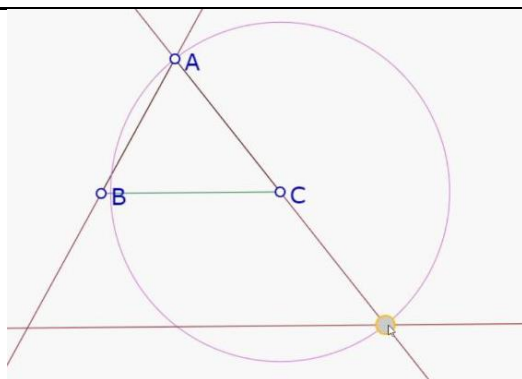
- 54 E1 ¡Ah, no! Espere (Arrastra el punto A).
¿Será el doble? (Construye un círculo con centro en C que pasa por A para verificar si AE es el doble de AC)

No es el doble.

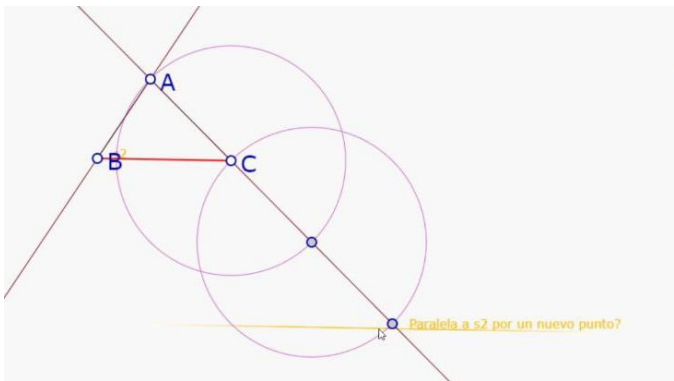


- 55 E2 No, tiene que estar más arriba (Se refiere al punto E).

- 56 E1 Si, voy a borrar esto (Borra el punto D y traza la intersección entre el círculo con centro en C que pasa por A con la recta AC. Luego, traza una recta paralela a BC, que pasa por el punto de intersección mencionado).

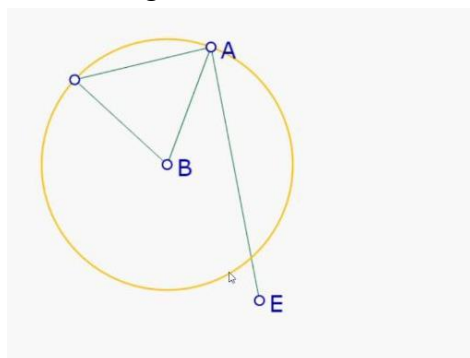


57		(Nombran las intersecciones de las rectas como D y E)
58	E2	Borre el círculo, porque si no cuesta más.
59	E1	(Construye los segmentos AD, AE y DE, y presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Muy bien, pero ¿esta construcción es menos costosa a la construcción anterior?</i> ”).
60	E2	Venga, borremos esto. (Borra el círculo con centro en C que pasa por A). ¡Ay! Se borró todo. (Retrocede para volver a la construcción).
61	P	¿Cuánto cuesta esta construcción?
62		(los dos responden) 17.
63	P	¿Cuánto costaba la anterior?
64		(los dos responden) 20.
65	P	¿entonces?
66	E2	Entonces si es menos costosa.
67	P	¿Por qué usaron rectas paralelas, en vez de otro círculo?
68	E2	Porque en la paralela si se mueve el segmento y toda la figura para un lado, entonces se van a mover. O sea, se va a reflejar en todos los lados.
69	P	Pero ustedes no construyeron el círculo acá para garantizar que AD sea el doble de AB ¿por qué utilizaron paralelas para garantizarlo?
70	E1	Porque si sacamos el círculo en C, entonces podemos sacar el doble de AC y entonces como esta es ...
71	E2	Porque se supone que, si el lado ACE y ABD son iguales de longitud, entonces al sacarlo de un lado tiene que dar lo mismo en el otro lado.
72	E1	No, no es la misma. Pero siempre va a dar el doble. (Arrastra el punto C para mostrarle a E2 que estos dos lados no tienen la misma longitud). Pues, sabemos cómo hacerlo.
73	P	Ok, entonces las paralelas nos sirven para garantizar el doble de AB, teniendo garantizado que AE es el doble de AC... Pasemos a la siguiente tarea. Recuerden que siempre deben garantizar que las construcciones sean lo más económicas posible.

74	E2	(lee la consigna) Tracemos otra vez recta, pero esta vez más larga...
75	E1	(Triplica el segmento AC y traza la recta AB. Traza la recta paralela al segmento BC, que pasa por el punto resultante de triplicar el segmento AC).
		
76	E2	(Nombra los puntos D y E).
77		(Presionan el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “No hay ningún lado del triángulo ADE”).
78	E1	¡Ah, ya!, es que no hicimos los segmentos.
79	E2	Dale a <i>verificar</i> , pero que va a salir muy caro. (el costo de la construcción es 22).
80	E1	Es lo más barato
81	E2	(Presiona el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “Muy bien, continúe” y aparece el botón <i>continuar</i>).
82	E1	Está barato.
83	E2	Bueno, sí. Dale a <i>continuar</i> .
84	E1	(presiona el botón <i>continuar</i> y aparecen las tres oraciones para identificar la relación entre los segmentos).
85	E2	(lee el mensaje) AB es la tercera parte de AD, AC es la tercera parte de AE y BC es la tercera parte de DE.
86		(Al <i>verificar respuesta</i> aparece el mensaje que reafirma la respuesta de los estudiantes. Luego, E2 presiona el botón <i>continuar</i> y afirman que BC y DE son paralelos).
87	P	¿Para que utilizamos las paralelas en esta construcción?
88	E1	Para ahorrar el costo
89	E2	No, para verificar también la distancia. O sea, las paralelas nos sirven para ubicar los puntos más o menos bien en su lugar.
90	P	Ok, siguiente tarea.

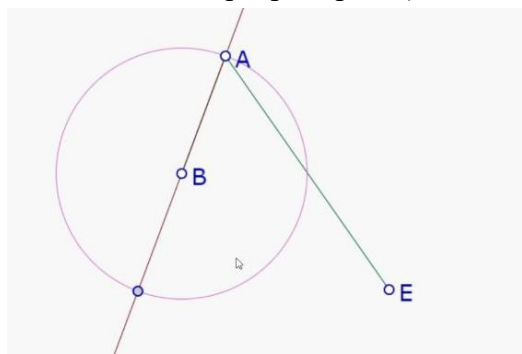
Apéndice C. Transcripción Tercera Actividad

N.º	Sujeto	Descripción / Evidencia
1	E1	(lee el enunciado)
2	E2	O sea, toca sacar un C.
3	E1	Pero al mismo tiempo un D.
4	E2	Pero toca como sacar un C aquí (señala un espacio en la pantalla)
5	E1	¡Ah, no! está fácil, mire. (construye un círculo con centro en B que pasa por A). Ah no, espere. (Mueve el punto E, para que el segmento AE se vea más grande que el segmento AB).
6		(vuelven a leer el enunciado)
7	E2	Si, mira un ejemplo (construye un segmento desde A hasta un punto del círculo y traza un segmento desde B hasta dicho punto)



(Arrastra el círculo) No, pero no sería la mitad.

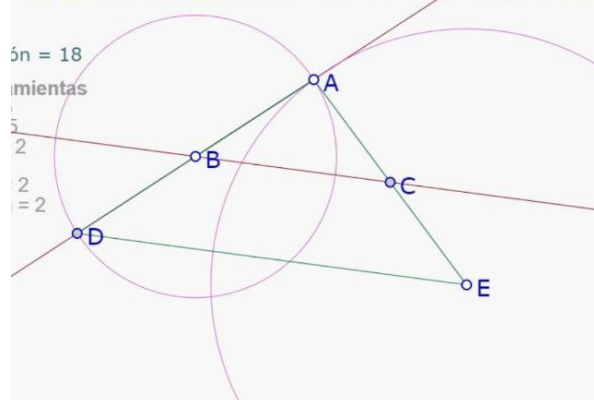
8	E1	No.
9	E2	O sea, ahí queda un triángulo.
10	E1	Si, pero no (Borra los segmentos contruidos por E2)
11	E2	Si, si podía quedar bien y acá se pone uno más grande. Se hace otro círculo más grande.
12	E1	(Traza una recta por A y por B, y pone la intercepción entre dicha recta y el círculo con centro en B que pasa por A).



42 E1 Este punto es C. (Nombra C a la intersección entre la recta paralela con el segmento AE).

Movible no quedó.

AB sea la mitad de AD, AC sea la mitad de AE y BC sea



43 (Trazan los segmentos y presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “*Muy bien, continúe*”).

44 P ¿Cómo se garantizó que AB sea la mitad de AD?

45 E1 Hice un círculo de B a A y una recta.

46 E2 Y donde terminaba el círculo en la parte de abajo.

47 P Ok, ¿Cómo se garantiza que AC sea la mitad de AE?

48 E2 Según lo que yo ví a estos dos se les sacó un...

49 E1 Primero se uní D y E, y luego saqué una recta paralela.

50 P ¿Y esa recta paralela para qué?

51 E1 Para que D y E sea igual a B y C... mmm, sean...

52 P Recuerden que estoy preguntando ¿cómo se garantizó que AC sea la mitad de AE?

53 E1 ¿Ah, sí!

54 E2 Ya estando reflejado este lado, con el círculo pudimos lograr que fuera el medio (señala el lado AD).

Sacamos una paralela a acá (señala el segmento DE).

55 E1 Y la recta paralela se puso en B.

56 P ¿Esa recta paralela garantiza que AC es la mitad de AE?

57 E1 Si. [mientras E2 está dudando]

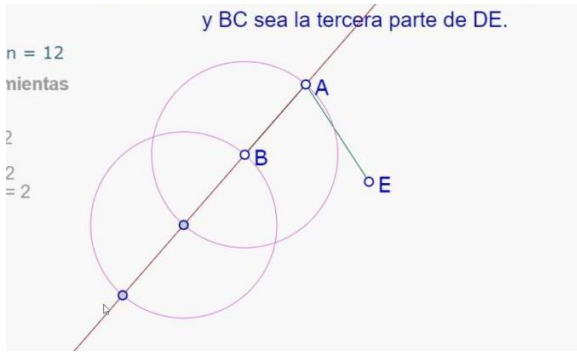
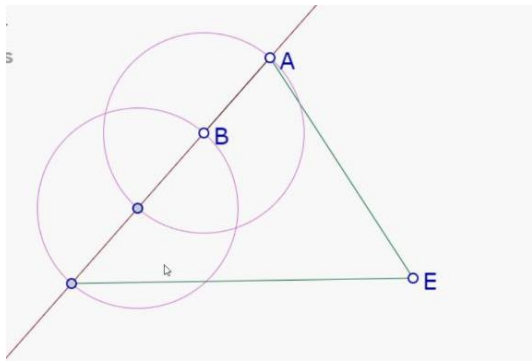
58 P Si no están seguros, podemos mostrar las medidas de los segmentos para ver.

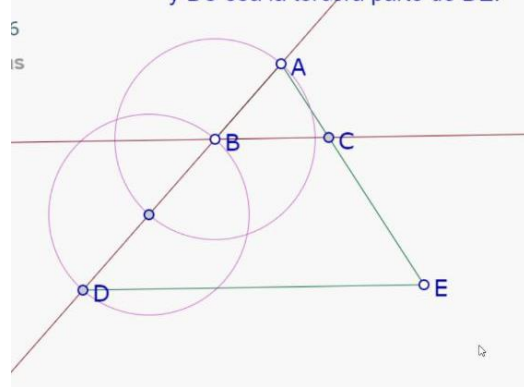
59 (Muestran las medidas de los segmentos AC y AE. Luego arrastran el punto E).

60 P ¿AC es la mitad de AE?

61 (Responden al mismo tiempo) Si.

62 P Ok, siguiente tarea.

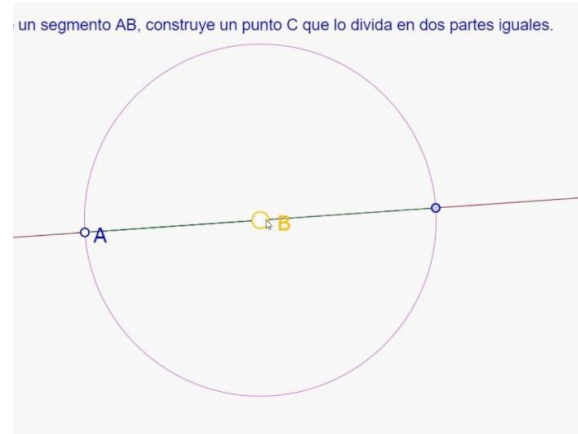
63	E1	(Lee la consigna)
64	E2	Toca hacer lo mismo, pero sacarle una más. (Traza un círculo centrado en B que pase por A. Luego, una recta que pase por los puntos A y B. Marca el punto de intersección entre el círculo y la recta. A continuación, dibuja un círculo con centro en el punto de intersección que pase por B. Finalmente, construye la recta AE) y BC sea la tercera parte de DE. 
65	E1	Quite la recta, una este punto con E.
66	E2	(Borra la recta AE y une E con el último punto de intersección construido)
67	E2	¿Y si bajamos a E? (Mueve el punto E para que el segmento AE quede más grande y lee el enunciado nuevamente)
68	E1	Saque la recta paralela de aquí (Señala el último segmento que construyeron). 
69	E2	¿A dónde? (Pregunta por qué punto debe pasar la recta paralela)
70	E1	Por B.
71	E2	(Traza la recta paralela al segmento que pasa por B y pone el punto de intersección entre esta y el segmento AE).
72		(Nombran el punto D, el punto C y trazan los segmentos AC, AD, BC).



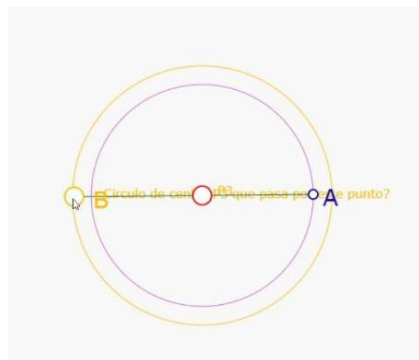
(Presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “Muy bien, continúe”).

73 P Siguiendo tarea. (les abre el nuevo archivo)

Apéndice D. Transcripción Cuarta Actividad

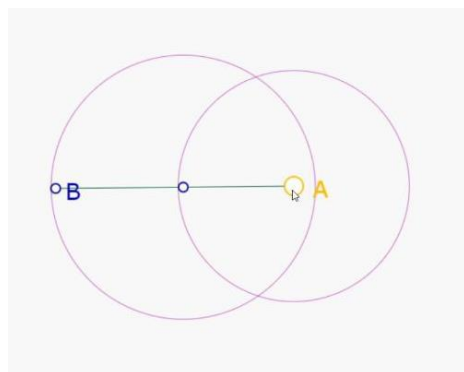
N.º	Sujeto	Descripción / Evidencia
1	E2	(Lee el enunciado).
2	E1	(Construye un círculo con centro en B que pasa por A y una recta que pasa por A y por B).
3	E2	No, eso ya no. ¿O sí?
4	E1	(Construye la intersección entre el círculo y la recta. Empieza a construir un círculo con centro en ese punto para que pase por B, pero decide no hacerlo). No.
		
5	E2	No, borre ese círculo.
6	E1	Mmm, ¿qué sea la mitad?
7	E2	Quiero intentar algo. (Cambia el nombre de B por C y nombra al punto de intersección como B).
8	E1	¡Ah, sí!

9	P	No le pueden cambiar los nombres a los objetos dados.
10	E2	(Elimina los objetos construidos y regresa al segmento AB dado).
11	E1	¿Cómo hacemos que esto sea la mitad?
12	E2	¿Y si crea un punto justo en el centro?
13	E1	Esa es la idea. Pero ¿cómo hacemos que el punto esté justo en el centro?
14	E2	Ponga un punto cualquiera en el centro.
15	E1	(Construye un punto que a la vista se ve en la mitad del segmento AB).
16	E2	Ahora haga un círculo que toque... (E1 construye un círculo con centro en el punto). Ajá, ahora otro de ese centro al B.

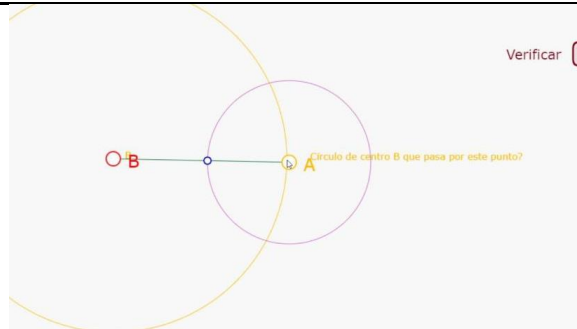


No, no queda. Pues yo creo que esta con círculo ya no va.

17	E1	Espere. (Borra los círculos y construye un círculo con centro en A que pasa por el punto que está en el segmento AB. Luego construye un círculo con centro en ese punto y pasa cerca al punto B).
----	----	---

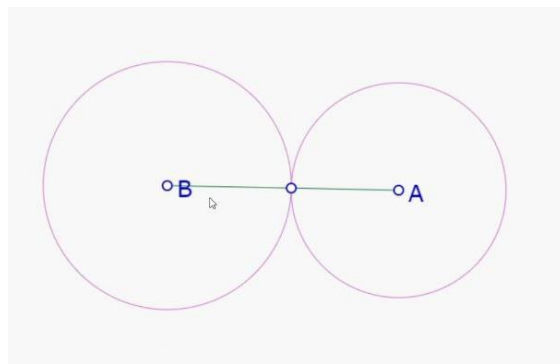


18	E2	Entonces borre el que está cerca al B y hágalo al círculo del A.
19	E1	¿este? (Abre un círculo con centro en B y lo acerca para que pase por A)



20 E2 No, si está muy grande

21 E1 (Decide hacer que el círculo con centro en B pase por el punto que está en el segmento AB).

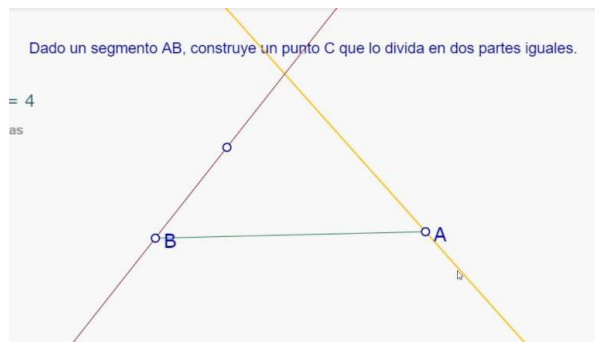


22 E2 No, si está mal ¿cómo fue que usted lo hizo ahorita?

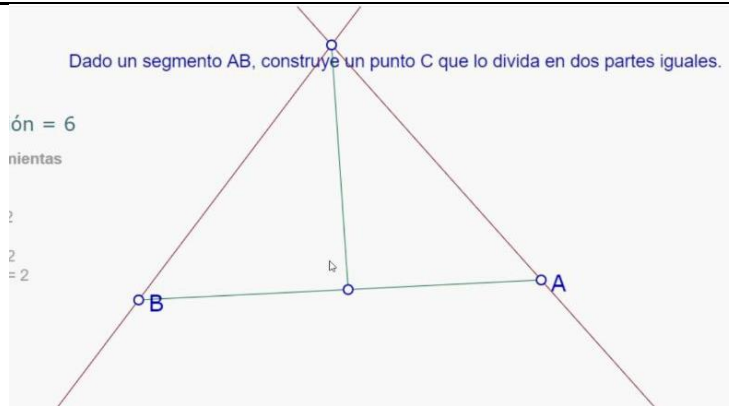
23 (Borran todos los objetos que construyeron y empiezan a experimentar con las herramientas al azar)

24 P ¿No sirve alguna de las ideas que usaron en las tareas anteriores?

25 E2 (Construye dos rectas secantes, la primera pasa por B y la segunda por A).

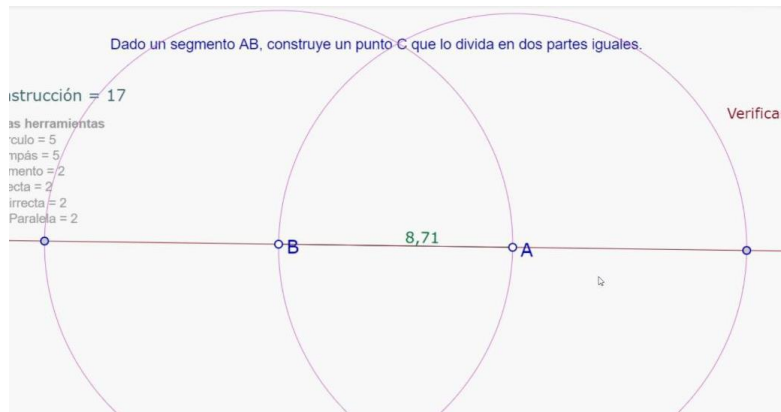


26 E1 (Traza un segmento desde la intersección de las rectas hasta un punto del segmento AB).



27 (Borran los objetos construidos).

28 E1 (Construye un círculo con centro en B que pasa por A y un círculo con centro en A que pasa por B. Luego una recta que pasa por A y por B, y construyen las intersecciones entre los círculos y las rectas).

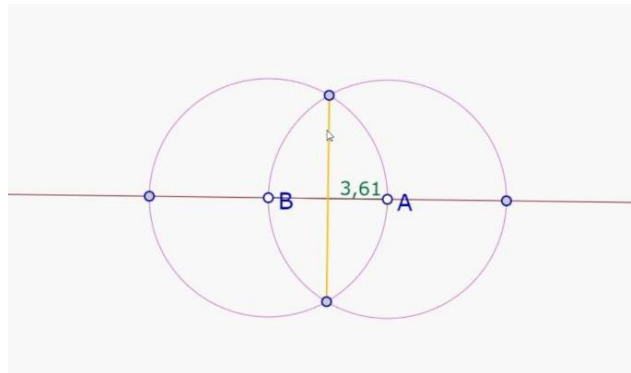


29 E2 Bueno, ahí tenemos el doble.

30 E1 (Traza las intersecciones entre los círculos)

31 E2 Ahora póngales una recta

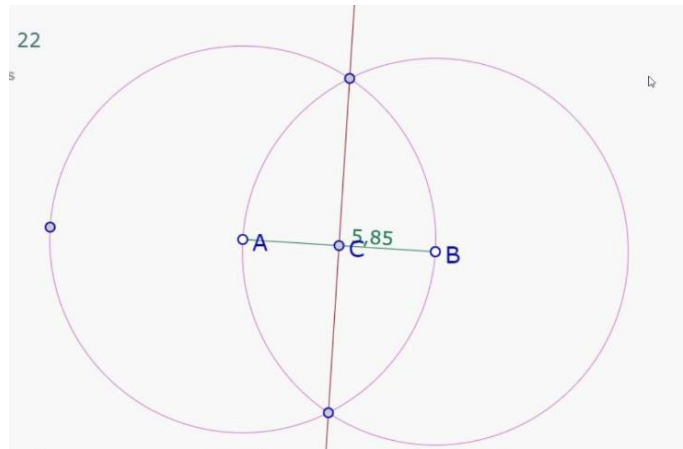
32 E1 (Construye el segmento que une a las dos intersecciones).



(pone el punto de intersección entre los segmentos)

33 (presionan el botón *verificar* y se muestra el mensaje “No ha construido el punto C”. Nombran al punto de intersección como C y vuelven a *verificar* y se muestra el

mensaje “Revisa si la construcción cumple con los requerimientos utilizando el mico y arrastrando el punto C”).



34 E1 Pero C no se puede arrastrar.

35 E2 Mídalos. [Se refiere a medir el segmento AC y BC].

36 E1 Sino estoy mal esto lo divide, pero...[Se refiere al punto C construido]

37 P ¿Lo divide en dos partes iguales?

38 (Miden los segmentos AC y BC. Arrastran los puntos y se dan cuenta que AC y BC miden lo mismo).

39 E2 Si mire, los medí los dos por aparte y sí.

40 P Ok, siguiente tarea.

41 (leen la consigna)

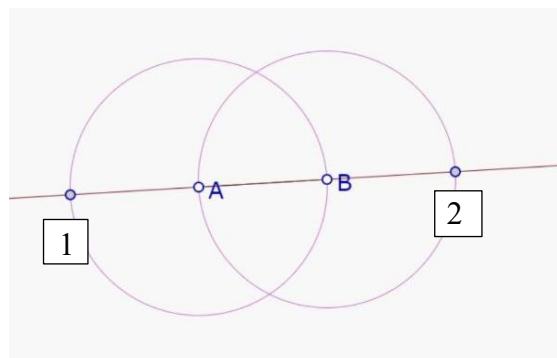
42 E2 Trazamos dos círculos. Pero ¿cómo los trazamos?

43 (Construyen un círculo con centro en B que pasa por A, otro círculo con centro en A que pasa por B).

44 E2 Con este es el punto medio, pero toca dividirlo en tres.

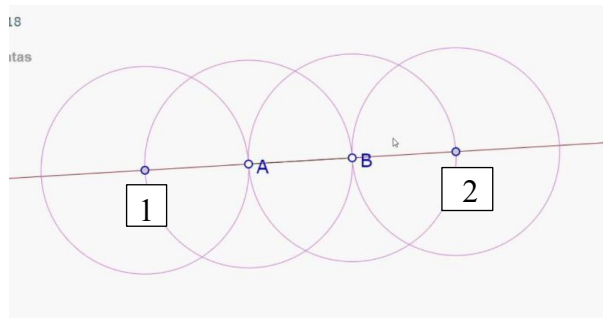
45 E1 Si.

46 E2 Entonces hagamos... (Construye una recta que pasa por A y B. Luego, construye las intersecciones entre la recta y los círculos).

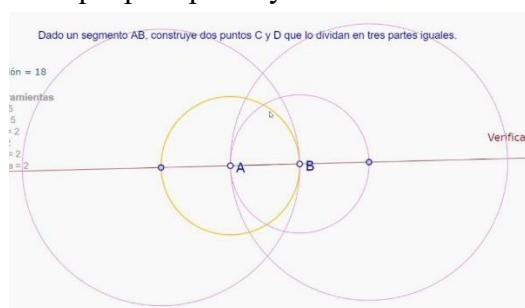


47 E1 Ahí da la mitad.

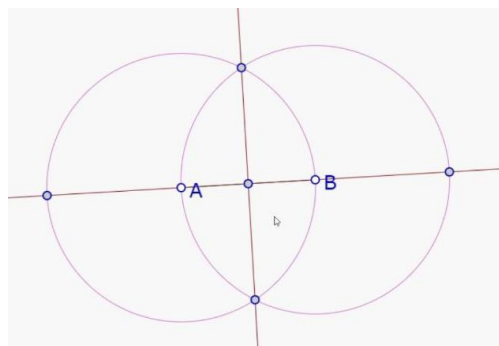
48	E2	(Construye un círculo con centro en el punto que se señala como 1 y que pasa por A)
49	E1	No
50	E2	¿O sí?
51	E1	(Construye un círculo con centro en el punto 2 y que pasa por B).

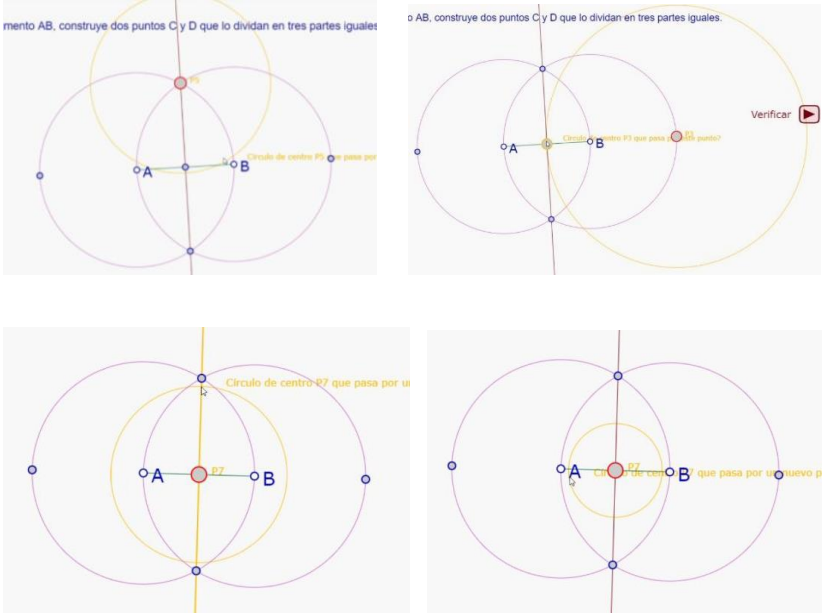
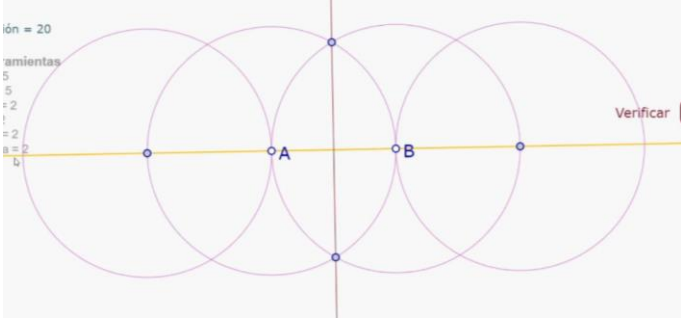


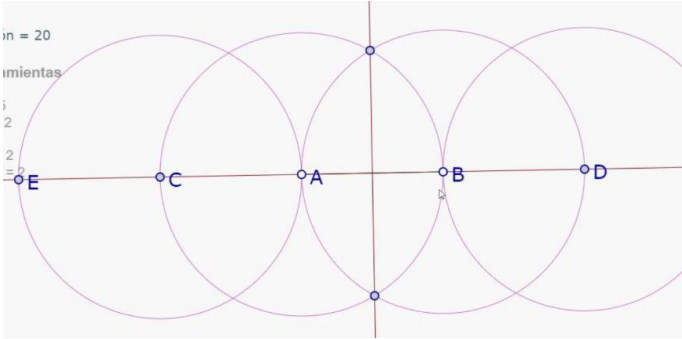
52	E2	(Borra los dos círculos con centro en 1 y 2. Luego, construye un círculo con centro en 1 que pasa por B y otro círculo con centro en 2 que pasa por A).
----	----	---

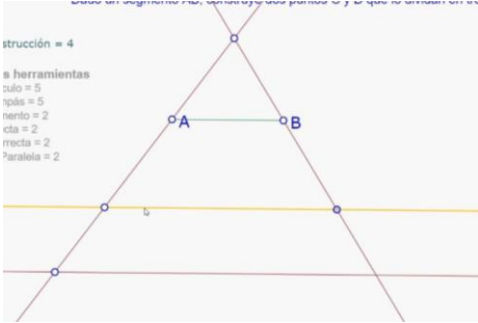
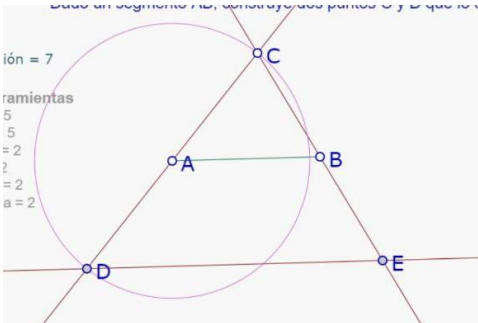


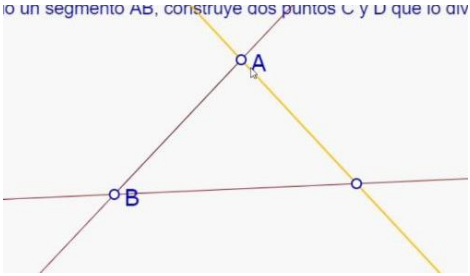
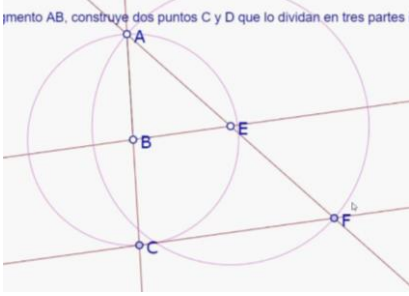
53	E1	¡Ah, no! Sigue siendo la mitad. [Se refiere a la intersección de los nuevos círculos]. (Borra los dos círculos más grandes y traza una recta que pasa por las intersecciones de los dos círculos más pequeños). ¿Va a seguir siendo lo mismo?
54	E2	Si, va a seguir siendo lo mismo (Se refiere a la intersección entre la recta y el segmento AB, va a seguir siendo la mitad).
55	E1	[Marca la intersección entre la recta y el segmento AB]. Mmm tenemos la mitad.



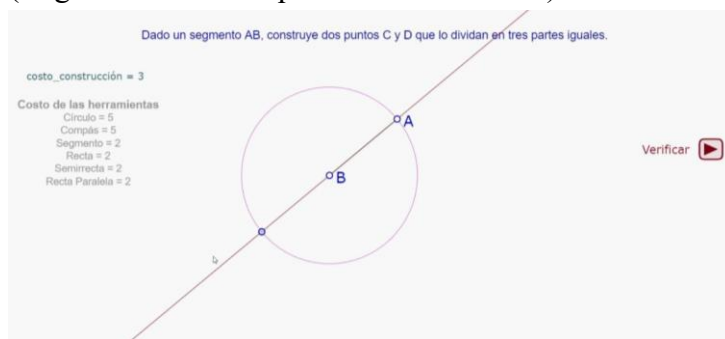
56	E2	Dividir en tres...
57		(Empiezan a trazar círculos con los puntos que tienen construidos, intentando que algo encaje o que aparezca un punto que les indique donde se divide el segmento en tres partes iguales. Pero al final, los eliminan).
		
58	P	Les tengo una pregunta. Si fuera no construir dos puntos C y D que lo dividan en partes iguales, sino que fuera triplicarlo ¿lo podrían resolver?
59	E2	O sea, no dividir en tres, sino triplicarlo.
60	E1	¿Triplicar el segmento?
61	P	Pero la pregunta es, ¿podrían hacerlo?
62	E2	Yo creo que sí
63	E1	¿Triplicar AB?
64	P	La pregunta es, si en vez de construir dos puntos C y D que dividen al segmento en tres partes iguales, quisieran triplicarlo ¿lo podrían hacer?
65	E2	Pues una opción sería poniendo... (Construye los círculos de la imagen)
		
66	P	¿Y para que necesita tantos puntos?
67	E2	Para sacarle el...

68	P	¿Quién es el triple de AB? Póngale nombres
69	E2	(Nombra los puntos como E, C y D)
		
70	P	¿Quién es el triple de quién?
71	E2	CD es el triple de AB
72	P	¿De AB?
73	E1	Si acaso de A y el centro.
74	E2	(Mide los segmentos CA, AB, BD). Esta completa sería el triple de AB. [Se refiere al segmento CD].
75	P	¿Solo de AB?
76	E1	De CA y BD
77	P	O sea, CD es el triple de CA. ¿Qué es AC para CD?
78	E2	La tercera parte
79	P	¿Usted está de acuerdo? (Hace referencia a E1)
80	E1	La tercera parte de CD sería CA.
81	P	Vuelva a esta tarea (Hace referencia a la segunda tarea de la tercera actividad).
82	E2	Es casi lo mismo.
83	P	¿Es casi lo mismo? ¿cómo así?
84	E2	Porque también está en tres partes, pero diferente orden. Se pudo haber hecho lo mismo.
85	P	¿Cómo así? No entiendo.
86	E2	O sea, en vez de haber hecho todos estos círculos se pudo haber partido así. (muestra la segunda de la actividad cuatro y se regresa a la segunda tarea de la tercera actividad).
87	E1	¡Ah, ya!
88		[Regresan a resolver la tarea]
89	P	Si necesitan volver a la tarea, lo pueden hacer.
90	E2	(Construye dos rectas secantes, donde la primera pasa por A y la segunda pasa por B).

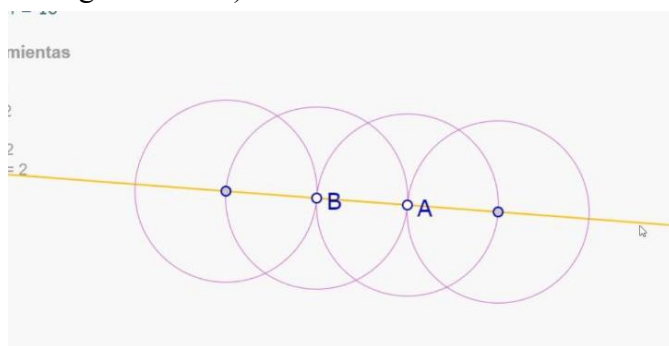
91	E1	Punto [Se refiere a construir un punto en la recta que pasa por A].
92	E2	(Construye un punto en la recta que pasa por A y traza una recta paralela al segmento AB que pase por dicho punto. Luego, marca la intersección entre esta recta paralela y la recta que pasa por B. Después, traza otra recta paralela al segmento AB que pase por un punto libre en la recta que pasa por A).
		
93	E1	No entiendo.
94	E2	Es que esto quedó más grande, tenía que sacar los círculos primero. Ahí me equivoqué. (Borra las rectas paralelas y traza un círculo con centro en A que pasa por la intersección entre las rectas).
		
95	P	¿Qué relación hay entre AC y CD?
96	E2	Que AC es la mitad de DC
97	P	¿Está de acuerdo con eso? (le pregunta a E1)
98	E1	Si, porque ella hizo un círculo y trazó la paralela...
99	E2	Porque está en el centro del círculo y en los dos extremos están C y D
100	P	Ok y ¿qué relación hay entre CB y CE?
101	E2	Lo mismo. Que CB es la mitad de CE.
102	P	¿Por qué?
103	E2	No sé.
104	P	Por qué esta vez no trazó círculos.
105	E2	No.
106	P	Construyeron la mitad de CE, pero necesitábamos en la primera tarea la mitad y en una segunda tarea la tercera parte.

107	E2	Esta mal ubicado. Hubiera tocado esta de este lado (Se refiere a que el segmento AB debía estar en una de las rectas secantes, entonces borra las rectas secantes y solo queda el segmento AB).
108		(Ubican el segmento AB de forma que quede inclinado y trazan una recta por A y B).
109	E2	(Intenta construir un segmento adyacente a AB). Ayúdame, es que este si no sé cómo construirlo. No sé dónde ponerlo.
110	P	¿Importa dónde coloque el punto?
111	E2	Si, porque podría alterar el orden.
112	P	¿Cuál orden?
113	E2	O sea, al sacar la mitad podría cambiar...
114	E1	(Construye una recta que pasa por A y un punto libre en la pantalla. Luego, traza una recta que pasa por B y el punto libre que lo llaman E). 
115	E2	Creo que no cambia.
116	E1	(Muestra la medida del segmento AB)
117	E2	No es necesario poner los centímetros ni nada de eso.
118	E1	(Construye dos círculos: uno con centro en B y otro con centro en E, ambos pasando por A).
119	E2	(Traza los puntos de intersección entre las rectas y los círculos, y los llama C y F. Inicialmente planea unir estos dos puntos con un segmento, pero cambia de opinión y decide trazar una recta paralela a BE que pase por C).
		
120	E1	No
121	E2	Si, porque tienen que ser dos puntos que dividan a AB. (revisa la construcción). ¡Ah, no! Sacar el triple no daría para eso.

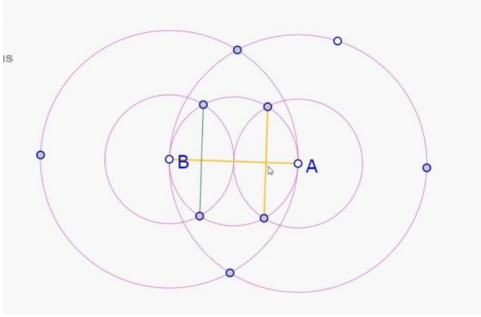
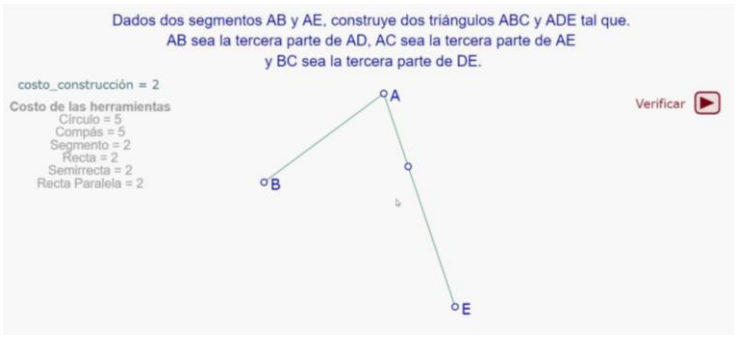
142	P	Pero mi pregunta es ¿cómo hizo para que AC fuera la tercera parte de AE? ¿eso siempre se cumple?
143		(Arrastran el punto B y notan que los puntos sobre la recta AE no cambian de posición).
144	P	¿Es AC la tercera parte de AE siempre?
145	E2	Si.
146	P	¿Cómo garantizaron que AC fuera la tercera parte de AE?
147	E2	Creo que fue por poner estos círculos y poniendo la recta fue que...
148	P	¿Qué rectas? ¿qué tienen esas rectas de especiales?
149		(Se quedan el silencio)
150	P	¿Qué puede decir de los segmentos BC y DE?
151	E1	Que DE es el doble de BC
152	P	¿Qué más?
153	E1	Son paralelas
154	E2	(Duda y dice en voz baja que no)
155	P	¿Son paralelas? Hace un rato ustedes respondieron justo eso ¿no?
156		(Regresan a la tarea que están resolviendo)

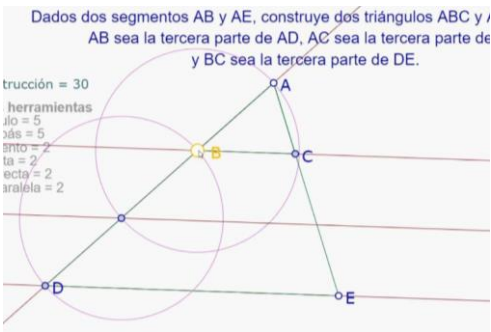


157	E1	Espere voy a intentar algo. (Construye tres círculos que están duplican y triplicando la longitud de AB).
-----	----	---

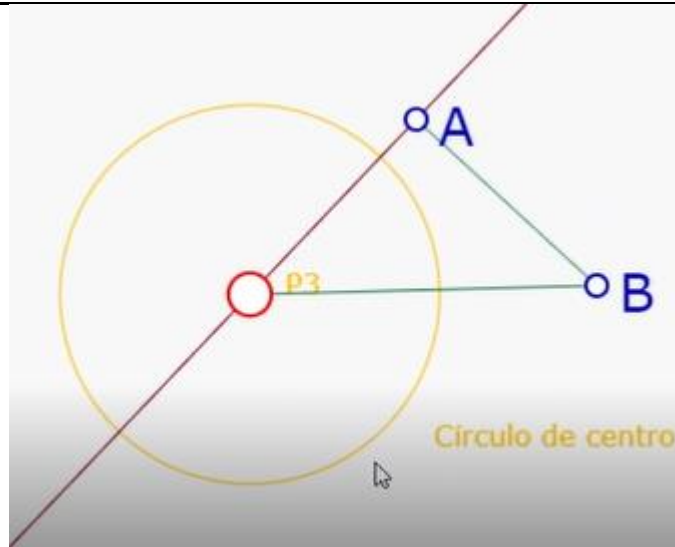


158	E2	¿Qué haces ahí?
-----	----	-----------------

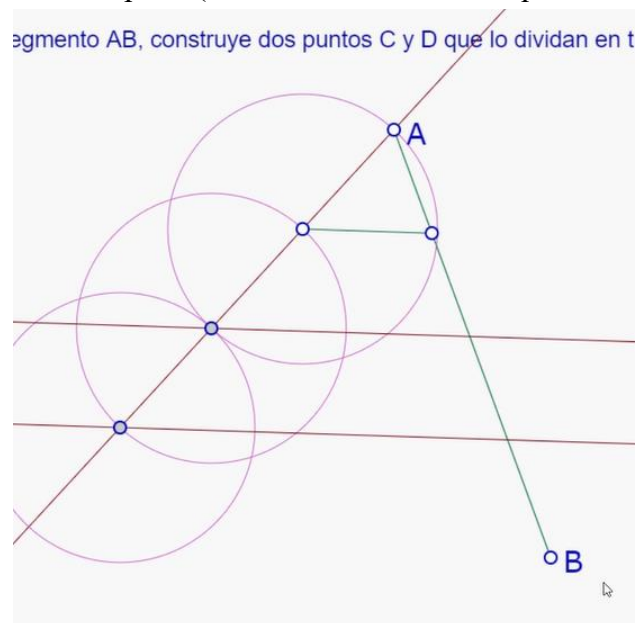
159	E1	No sé. [Está intentando aplicar la misma estrategia que utilizó para dividir al segmento en dos partes iguales].
160		[Otra vez empiezan a hacer segmentos y círculos al azar, para ver si en algún momento el resultado cambia y obtienen la tercera parte].
		
161	P	¿Usted cree que haciendo objetos arbitrarios lo va a resolver? Es lo que están haciendo. Ustedes se están olvidando de lo que han hecho. ¿La tarea que analizamos tiene alguna relación con esta?
162	E2	Si
163	P	En el enunciado, ¿nota alguna relación en el enunciado?
164	E1	La tercera parte
165	P	¿Por qué eso está relacionado?
166	E1	Por qué toca dividir esa en tres [Se refiere al segmento AB que se debe dividir en tres partes iguales]. (Vuelve a analizar los objetos que había construido a manera de experimentación).
167	E2	Venga, borremos todo eso. Mire, acá solo usamos dos círculos (abre la ventana donde está la tarea que analizaron)
168		(Vuelven al punto de partida en la tarea 2 de la actividad 4 y sin culpa cierran el archivo donde habían resuelto la tarea 2 de la actividad 3).
169	P	La cerraron. Si quieren analizarla deben volverla a resolver.
		
170	E1	(Construye un punto libre en AE y une a B con dicho punto que llama C. Luego, construye el segmento AD que es el triple de AB y traza rectas paralelas al segmento BC).

179	E1	(Construye una recta que pasa por B y C, y el segmento AC). [Luego, intenta construir objetos que hagan que C no se mueva libremente).
180	P	¿Qué es lo que usted quiere garantizar?
181	E1	Que no se pueda mover
182	P	¿Qué significa que no se pueda mover?
183	E1	Que cuando toque C, no se pueda mover.
184	P	¿Usted está garantizando que AC sea la tercera parte de AE? Eso dice el enunciado. Ese C que tiene, ¿cumple con lo requerido?
185		(Responden al mismo tiempo) No.
186	P	Entonces, ¿quién es C?
187	E2	Es que ahí no está garantizando que C sea la tercera. (Se refiere a que AC no es la tercera parte de AE).
188	E1	(Borra el punto C y construye una recta paralela al segmento DE que pasa por B y traza la intersección entre AE y dicha recta). ¡Ahora sí!
		
189	P	¿Es AC la tercera parte de AE?
190	E1	Si
191		(Presionan el botón <i>verificar</i> y se muestra el mensaje “ <i>Muy bien, continúe</i> ”)
192	P	¿Cómo garantizaron que AC es la tercera parte de AE?
193	E1	Pues de B se hizo un círculo A y luego se pusiera una recta, donde genera el otro punto...
194	E2	Se puso un círculo de B a A y de ahí la recta viene siendo más o menos C.
195	P	Describame la construcción
196	E1	Se trazó una recta de B a A y en esa se puso un círculo de B a A, entonces donde quedó la esquina va X [se refiere a intersección entre el círculo y la recta]. Y trazó la recta de B a C
197	P	¿Y cómo trazó esa recta?
198	E1	Primero, inicié los círculos de BA y tracé el punto X [es el punto de intersección entre el círculo y la recta] y de ahí siguiendo la recta y con el círculo [se refiere al círculo con centro en X que pasa por B] salió el punto D. Y de ahí ...

199	P	Usted unió el punto D con E.
200	E1	Luego, paralelamente de... es que fue al azar.
201	E2	Es que el la tiró por tirarla. [se refiere a que solo construyó las rectas paralelas para ver si algo encajaba]. Es que en el punto B puso una recta paralela y sacó el punto C.
202	P	Pero ¿recta paralela a cuál?
203	E1	BC es paralelo a DE.
204	P	¿Y cómo hizo eso?
205	E1	Yo uní todo y saqué paralela a esta, entonces salió esta. [Se refiere a que construyó el segmento DE y trazó una paralela a este segmento que pasa por B].
206	P	¿Eso le sirve para resolver el problema de dividir el segmento en tres partes iguales?
207	E1	Si, el problema es...
208	P	¿Aquí hay algún segmento que usted haya dividido en tres partes iguales?
209	E2	BA y AD se dividieron en tres partes iguales.
210	P	Entonces, ¿Cómo dividió esos segmentos en partes iguales?
211	E2	Primero se guio por BA, hizo los círculos y ahí si completó con las rectas.
212	P	¿Y esa idea le serviría para esta tarea? (Se refiere a la tarea dos de la actividad cuatro).
213	E1	Creo que si
214	E1	¡Ah si! Ya entendí.
215	E2	Voy a intentar. (triplica el segmento AB, pero se da cuenta que eso no le sirve para dividir al segmento AB en tres partes iguales y borra)
216	E2	No, espere. Dejemos este acá y sacamos este acá. (Se refiere a no construir el triple de AB, luego construye un segmento auxiliar).

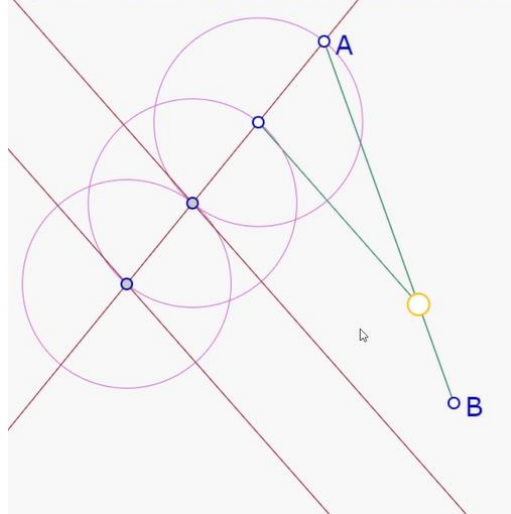


- | | | |
|-----|----|--|
| 217 | E1 | No. [Expresa que no está de acuerdo con esa construcción]. |
| 218 | E2 | Ah si, espere. (Realiza la construcción que se ve en la imagen). |



- | | | |
|-----|----|---|
| 219 | E1 | Si. [Se expresa de manera afirmativa]. |
| 220 | P | ¿Está dividido en tres partes iguales? |
| 221 | E2 | No, en cuatro partes iguales. |
| 222 | P | Arrastre este punto. [Se refiere al punto libre que hay sobre el segmento AB]. |
| 223 | | (Al arrastrar el punto se daña la razón que ellos creían que estaba garantizada). |

segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan

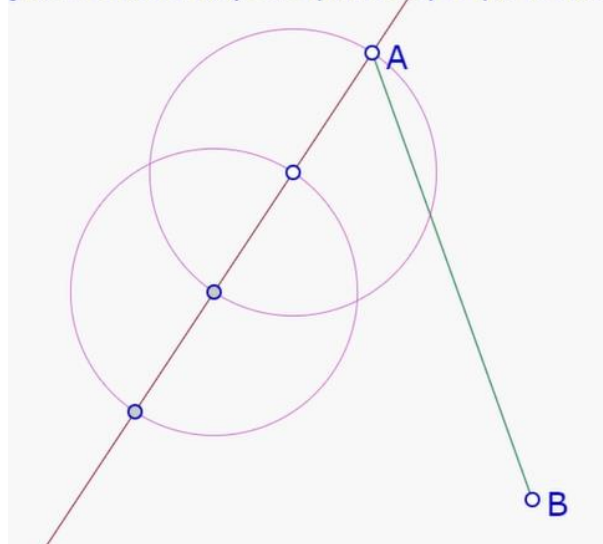


224 E1 Mmm, que raro.

225 E2 (Borra uno de los círculos construidos)

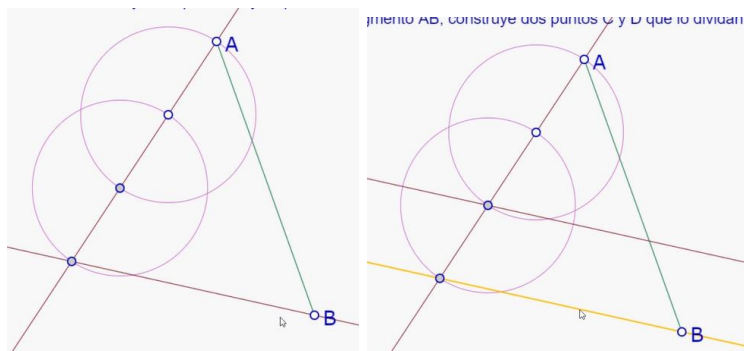
Ese no va.

segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan

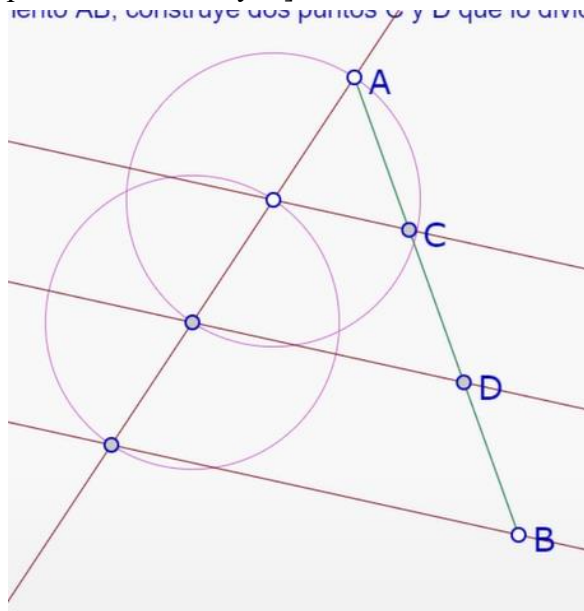


Hagalo usted. [Le da el control a E1].

226 E1 Bueno.



- 227 [Luego, nombrar los puntos de intersección entre el segmento AB y las rectas paralelas como C y D].

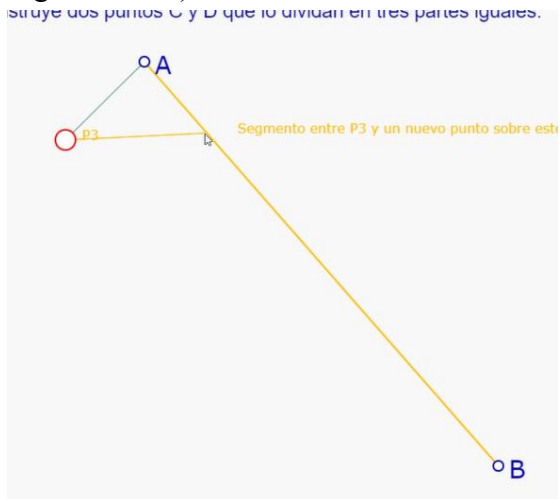


(Presionan el botón Verificar y se muestra el mensaje “Muy bien”).

- 228 P Les propongo otro problema. Van a dividirlo ahora en cinco partes iguales. [Se refiere al segmento AB].

- 229 E1 Ok, toca volver a hacerlo.

- 230 E2 (Construye un segmento auxiliar y forma un triángulo con un punto libre en el segmento AB).



- 231 E1 No.

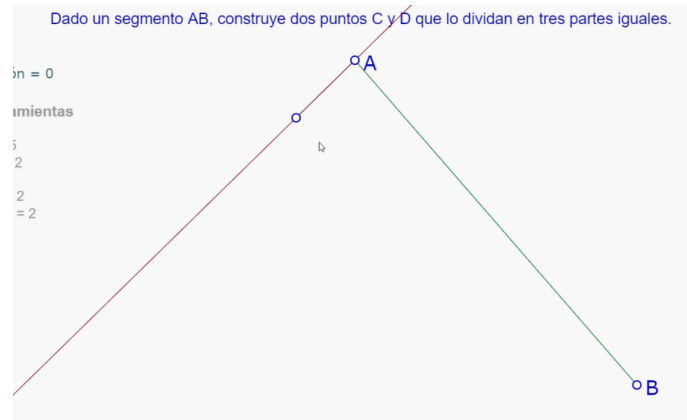
- 232 E2 No que.

- 233 P Cuentele.

- 234 E2 Hagalo a ver.

235 P Use usted el ratón y usted cuentele porque no. [Se refiere a que E2 haga la construcción y E1 le comunique en donde está cometiendo errores].

236 E1 Borramos este punto. (Borra el punto libre que está en el segmento AB).

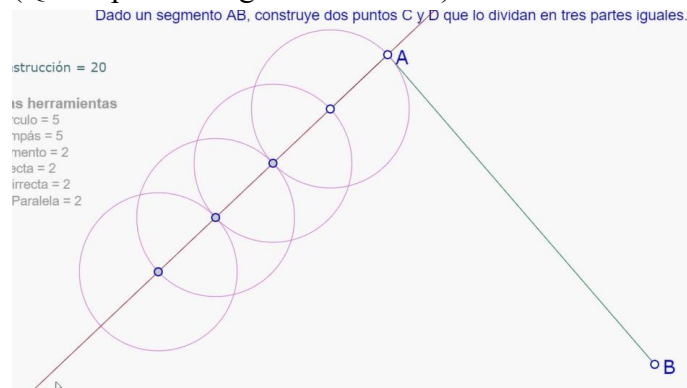


De ese punto, primero hace el círculo a A. [Le pide que duplique el segmento formado por A y el punto que no tiene nombre].

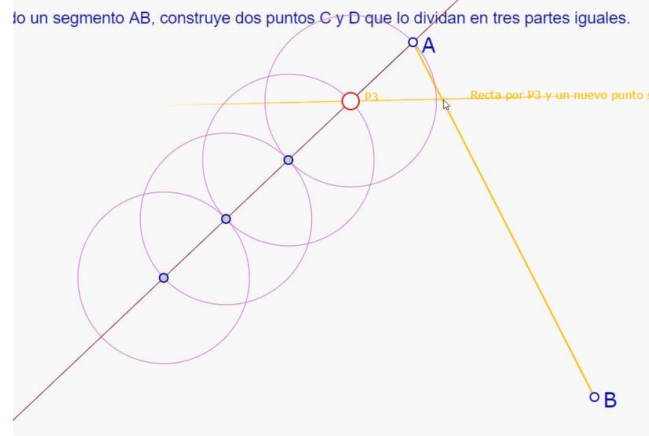
237 E2 Por eso, es que primero tocaba mirar a donde se unía el punto, porque sino queda como a la deriva.

238 E1 guarda silencio y E2 realiza lo que le pidió E1.

239 E2 (Quintuplica el segmento auxiliar).



(Luego, saca una recta del primer punto hacia el segmento AB).

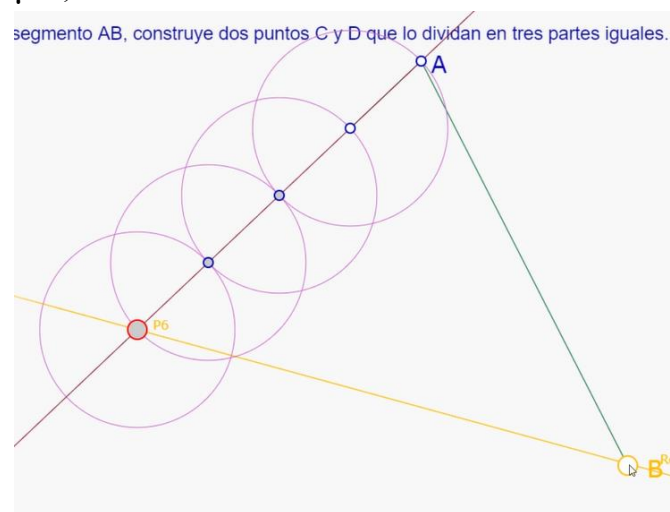


240 E1 No.

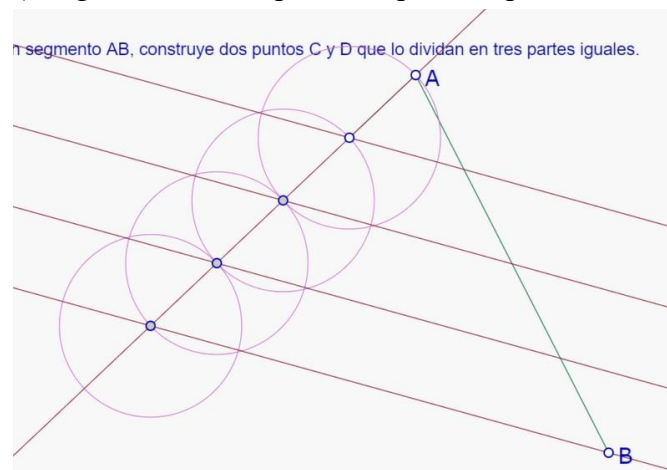
241 E2 Entonces.

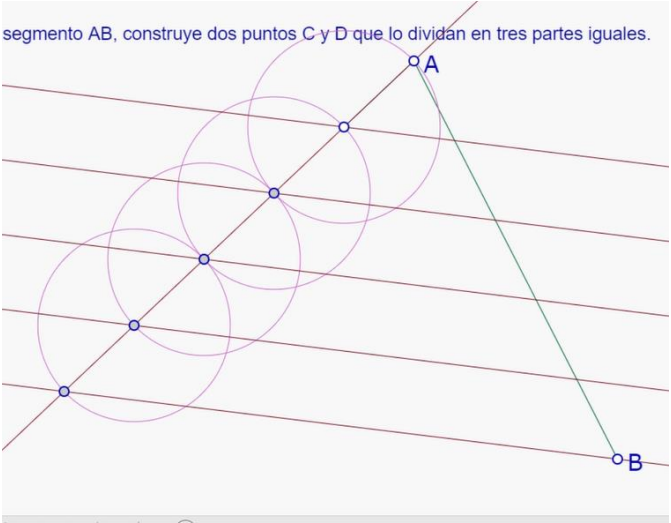
242 E1 (Señala que debe unir el último punto con B).

243 E2 ¡Ah, si!



(Luego, traza rectas paralelas para transportar la razón al segmento AB).



244	E1	Hay cuatro. [Se refiere a que solo se dividió el segmento en cuatro partes].
245	E2	Si, me faltó uno. (Corrige la construcción).
 segmento AB, construye dos puntos C y D que lo dividan en tres partes iguales.		
246	P	¿Qué pueden concluir de esta tarea?, si quisieramos dividir un segmento en partes iguales ¿qué tendríamos que hacer?
247	E2	Primero sacar un punto al lado contrario del lugar que queremos dividir.
248	P	¿Cualquiera?
249	E1	Si
250	E2	Sí, ¿no?
251	P	Arrastre el punto. ¿Cambia la solución?
252	E2	(Arrastra el punto que del segmento auxiliar y se da cuenta que la división del segmento AB no cambia).
253	P	Entonces puede ser cualquiera.
254	E2	Sí. Y de ese punto sacamos un círculo al punto inicial. [Se refiere al segmento auxiliar formado con A].
255	P	¿Para que el círculo?
256	E2	Para sacar los extremos.
257	P	¿Qué es lo que se quiere lograr con los círculos?
258	E1	Es que con un círculo serían dos partes. (Señala los dos segmentos formados de igual longitud).
259	E2	Entonces así podemos hacer más círculos para dividir en mas partes.
260	P	Pero, ¿Está dividiendo?
261	E2	Relativamente si. Porque estamos dividiendo y a la vez aumentando.
262	P	Listo, ya tiene las cinco partes iguales ¿y luego?
263	E2	Primero unimos el último punto que nos dio del último círculo con B y de ese sacamos...

264	E1	Las paralelas.
265	P	¿Por qué paralelas?
266	E2	Para poder dividir.
267	E1	Es que apartir de la recta ibamos poniendo paralelas para dividir acá. [Se refiere a dividir al segmento AB].