

**GRUPOS DE ISOMETRÍAS DE
POLÍGONOS Y POLIEDROS REGULARES**

ANGY CARELLY CORONEL SUÁREZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

GRUPOS DE ISOMETRÍAS DE POLÍGONOS Y POLIEDROS REGULARES

ANGY CARELLY CORONEL SUÁREZ

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director

RAFAEL FERNANDO ISAACS GIRALDO
MsC. en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

*A Reynaldo, Yamile, Teresa, Edwin y Juanes,
por estos cuatro largos años de comprensión y
espera.*

Agradezco a

Dios, mi ser celestial, por regalarme un poco de sabiduría y guiarme en este duro camino.

Mis padres, nana y hermanas, por su gran apoyo emocional y económico.

Mi hijo y su padre, quienes con su cariño me animaron y colaboraron para culminar esta fase.

Rafael Isaacs, mi director, por regalarme un poco de su sabiduría para la realización de este trabajo.

Profesores, Sonia Sabogal, Bernardo Mayorga, Marlio Paredes, Jorge Villamizar, que durante estos años me ofrecieron su amistad.

El Grupo de Educación Matemática y en especial mis compañeros del Semillero, de los cuales siempre recibí palabras de aliento en el momento preciso.

Son demasiadas personas las que han estado a mi lado durante esta etapa de mi vida y sería casi imposible nombrarlos a todos. Lo único que realmente puedo hacer es agradecerles con todas mis fuerzas y corazón por sus valiosos aportes y sabios consejos.

“Mil y mil gracias ...”

Índice general

1. Preliminares	3
2. Grupos asociados a polígonos regulares	11
2.1. Generadores del grupo diédrico	16
2.2. Representación matricial del grupo diédrico	18
2.3. Subgrupos de D_n	20
2.4. Centro de D_n	21
2.5. Subgrupos Normales del Grupo D_n	22
3. Grupos asociados a poliedros regulares	25
3.1. El grupo del tetraedro (Ω_T)	28
3.1.1. Subgrupos de Ω_T	33
3.2. El grupo del hexaedro (Ω_H)	36
3.2.1. Algunos subgrupos de Ω_H	43
3.3. El grupo del octaedro (Ω_O)	46
3.4. El grupo del dodecaedro (Ω_D)	47
3.4.1. Algunos subgrupos de Ω_D	51
3.5. El grupo del icosaedro (Ω_I)	53
3.6. El Omnipoliedro	55

A. Scripts en scilab	57
A.1. Script para hallar el grupo	57
A.2. Script para la tabla del grupo	59
A.3. Matrices de Ω_D	59
Bibliografía	65

TÍTULO: GRUPOS DE ISOMETRÍAS DE POLÍGONOS Y POLIEDROS REGULARES*

AUTOR: ANGY CARELLY CORONEL SUÁREZ**

PALABRAS CLAVE: Grupos de isometrías, Grupos Diédricos, Polígonos regulares, Poliedros regulares, Omnipoliedro.

DESCRIPCIÓN:

Durante la planeación del trabajo, se vio la importancia de estudiar ciertos grupos de simetrías muy populares, estos son los grupos de isometrías de polígonos y poliedros regulares.

El estudio, desde el punto de vista de la teoría de grupos, de estos objetos geométricos relativamente familiares, revela una dimensión lúdica y dinámica de gran interés, pues se enlazan conceptos combinatorios, geométricos y estructurales. En cuanto la matemática, se basó especialmente en el manejo de herramientas conceptuales de tres áreas: álgebra lineal, geometría euclidiana y álgebra moderna. La presentación de cada isometría se hizo como permutación finita de vértices y en forma matricial. Para esto último, fue necesario encontrar los vértices de cada polígono y poliedro en coordenados espaciales y determinando propiedades matriciales calcular los coeficientes correspondientes. Para los cálculos y la realización de los gráficos, se utilizó el programa `Scilab` que es de libre uso y el `maple` incorporado en `Scientific WorkPlace`.

El primer capítulo contiene conceptos necesarios, los cuales se exponen buscando fundamentalmente fijar conceptos y notación. El segundo capítulo presenta el grupo Diédrico (D_n) de isometrías de los polígonos, la descripción de sus subgrupos, los grupos normales y cocientes. El tercer y último capítulo expone un resultado clásico de los griegos: sólo existen cinco poliedros regulares. Después de esto, se presentan los tres grupos de simetrías con la descripción de sus elementos y algunos subgrupos. Por último, se pretendía mostrar el grupo de isometrías del Omnipoliedro, pero se deja como tarea para lectores interesados. Los `Scripts` realizados en `Scilab` para la obtención de los grupos con su respectiva tabla, se presentan en los anexos, junto con las matrices que conforman el grupo del dodecaedro.

* Monografía.

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Isaacs Rafael.

TITLE: GROUPS DE ISOMETRÍAS OF REGULAR POLYGONS AND POLYHEDRONS*

AUTHOR: ANGY CARELLY CORONEL SUÁREZ**

KEY WORDS: Isometries groups, Dihedral groups, To regulate polygons, To regulate polyhedrons, Omnihedron.

DESCRIPCIÓN:

Planning this work, the importance was seen of studying certain groups of very popular symmetries; these are the groups of isometries of polygons and regular polyhedrons.

The study, from the point of view of the theory of groups, of these relatively familiar geometric objects, reveals a playing dimension of great interest, because they are linked concepts combinatorial, geometric and structural. As soon as the mathematical one, it was based especially on the handling of conceptual tools of three areas: lineal algebra, euclidean geometry and modern algebra. The presentation of each isometry was made as finite exchange of vertexes and in matricial form. For this last, it was necessary to find the vertexes of each polygon and polyhedron in coordinated space and determining matrix properties to calculate the corresponding coefficients. For the calculations and the realization of the graphics, the program `Scilab` was used; that is of free use and the `maple` incorporated in `Scientific Workplace`.

The first chapter contains necessary concepts, which are exposed looking for fundamentally to fix concepts and notation. The second chapter presents the dihedral group (D_n) of isometries of the polygons, the description of its subgroups, the normal groups and quotients. The third and last chapter exposes a classic result of the Greeks: five regular polyhedrons only exist. After this, the three groups of symmetries are presented with the description of their elements and some subgroups. Lastly, it was sought to show the group of isometries of the Omnihedron, but it is left as task for interested readers. The `scripts` carried out in `Scilab` for the obtaining of the groups with their respective chart, is presented in the annexes, together with the wombs that conform the group of the dodecahedron.

* Monograph.

** Ability of sciences. School of Mathematics. Licentiate in mathematics. Isaacs Rafael.

Introducción

En un curso normal de Álgebra Moderna se estudia y analiza las propiedades de los grupos con sus demostraciones y al estudiar otras materias nos damos cuenta de la importancia de ésta para el desarrollo de las matemáticas, pero la mayoría de las veces no nos detenemos a pensar qué otras aplicaciones tiene en la vida diaria.

Inicialmente, nuestro propósito era dar a conocer a los estudiantes de la Licenciatura y a otras personas interesadas en este campo, cómo en juegos tan sencillos y entretenidos como el “Triqui”, en otros juegos de tablero y en el estudio de polígonos y poliedros regulares, se ve reflejado el Álgebra Moderna.

Este trabajo inició por el interés hacia el artículo *The group of automorphisms of the game 3-dimensional Ticktacktoe* escrito por *Roland Silver* de la MITRE Corporation, en donde se estudia el grupo de isometrías del tradicional juego “Triqui” en $2D$ y $3D$. Además, se vio la importancia de estudiar ciertos grupos de simetrías muy populares, de los que tal vez se habla bastante, pero que a niveles elementales pocas veces son presentados. Estos son los grupos de isometrías de polígonos y poliedros regulares.

Al iniciar el estudio de los polígonos y poliedros resultó tan fascinante e interesante que consideramos que era suficiente, así que el estudio de aplicaciones en juegos de tablero se dejará para otra oportunidad o para algún lector que se interese en el tema.

El estudio, desde el punto de vista de la teoría de grupos, de estos objetos geométricos relativamente familiares, revela una dimensión lúdica y dinámica de gran interés, pues se enlazan conceptos combinatorios, geométricos y estructurales.

El trabajo, en cuanto la matemática, se basó especialmente en el manejo de herramientas conceptuales de tres áreas del programa *Licenciatura en Matemáticas* de la UIS: el álgebra lineal, la geometría euclidiana y el álgebra moderna. La presentación de cada isometría se hizo como permutación finita de vértices y en forma matricial. Para esto último, fue necesario encontrar los vértices de cada polígono y poliedro en coordenados espaciales y determinando propiedades matriciales calcular los coeficientes correspondientes. Para los cálculos y la realización de los gráficos, se utilizó el programa **Scilab** que es de libre uso y el *maple* incorporado en *Scientific WorkPlace*.

El primer capítulo contiene conceptos necesarios, los cuales se exponen buscando fundamentalmente fijar conceptos y notación.

El segundo capítulo presenta el grupo diédrico D_n de isometrías de los polígonos, la descripción de sus subgrupos, los grupos normales y cocientes.

El tercer y último capítulo se expone un resultado clásico de los griegos: *sólo existen cinco poliedros regulares*. Después de esto, se presentan los tres grupos de simetrías con la descripción de sus elementos y algunos subgrupos. Por último, se pretendía mostrar el grupo de isometrías del Omnipoliedro, pero se deja como tarea para lectores interesados.

Los **scripts** realizados en **Scilab** para la obtención de los grupos con su respectiva tabla, se presentan en los apéndices.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación expongo algunos conceptos básicos de geometría y álgebra moderna, los cuales son necesarios para leer y comprender este trabajo.

Definición 1.0.1. Una **operación binaria $*$ en un conjunto**, es una regla que asigna a cada par ordenado (a, b) de elementos de un conjunto, algún elemento del conjunto, que notaremos $a * b$.

Definición 1.0.2. Un **grupo $\langle G, * \rangle$** es un conjunto G , junto con una operación binaria $*$ en G , tal que se satisface los siguientes axiomas:

- ζ_1 . La operación binaria $*$ es **asociativa**, es decir, $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo a, b, c en G .
- ζ_2 . Existe un elemento e en G tal que $e * x = x * e = x$ para todas las $x \in G$. (Este elemento e es un **elemento identidad** para $*$ en G .)
- ζ_3 . Para cada a en G existe un elemento a' en G con la propiedad de que $a' * a = a * a' = e$. (El elemento a' es un **inverso de a respecto a $*$** .)

Definición 1.0.3. Si G es un conjunto finito, entonces el **orden $|G|$ de G** es el número de elementos en G .

Definición 1.0.4. El **centro de un grupo $\langle G, * \rangle$** es el conjunto de todas las $a \in G$ tales que $ax = xa$ para todas las $x \in G$, esto es, el conjunto de elementos de G que conmutan con todo elemento de G .

Definición 1.0.5. Si H es un subconjunto de G cerrado bajo la operación de grupo de $\langle G, * \rangle$ y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un **subgrupo de G** . Denotaremos por $H \leq G$.

El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar si un subconjunto H de un grupo G es subgrupo del mismo.

Teorema 1.0.6. *Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo de G si y sólo si*

- I. H es cerrado bajo la operación binaria de G ;
- II. la identidad e de G está en H ;
- III. para todos los $a \in H$ es cierto que $a^{-1} \in H$ también.

Demostración. Si $H \leq G$ entonces por definición de subgrupo se cumplen las condiciones I, II y III.

De manera recíproca, supóngase que H es un subconjunto de un grupo G que cumple las condiciones I, II y III. Por II tenemos de inmediato que ζ_2 se satisface. También ζ_3 se satisface por III. Falta corroborar el axioma asociativo ζ_1 . Pero, con seguridad, para toda $a, b, c \in H$ es cierto que $(ab)c = a(bc)$ en H ya que si están en H , están en G y allí se cumple la ley asociativa. De aquí que $H \leq G$. \square

Definición 1.0.7. Un **isomorfismo entre un grupo G y un grupo G'** es una función ϕ biyectiva de G en G' , tal que para todas las x y y en G ,

$$\phi(xy) = (\phi(x))(\phi(y)).$$

Los grupos G y G' son isomorfos. La notación usual es $G \simeq G'$.

Definición 1.0.8. Una transformación ϕ de un grupo G en un grupo G' es un **homomorfismo** si

$$\phi(ab) = (\phi(a))(\phi(b))$$

para todos los elementos a y b en G .

Definición 1.0.9. El **kernel de un homomorfismo ϕ de un grupo G** en un grupo G' es el conjunto de elementos de G cuya imagen, bajo ϕ , es el elemento identidad de G' .

Teorema 1.0.10. Sea G un grupo y sea $a \in G$. Entonces

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subgrupo de G .

Demostración. Sean $a^r, a^s \in H$ con $r, s \in \mathbb{Z}$, entonces $a^r a^s = a^{r+s} \in H$, luego H es cerrado bajo la operación de grupo de G . Además, $a^0 = e$ de modo que $e \in H$. Para $a^r \in H$, existe $a^{-r} \in H$ y $a^r a^{-r} = a^{-r} a^r = a^0 = e$. Todas las condiciones se satisfacen, por tanto, $H \leq G$. \square

Definición 1.0.11. El grupo H del teorema 1.0.10 es el **subgrupo cíclico de G generado por a** y se denotará $\langle a \rangle$.

Definición 1.0.12. Un elemento a de un grupo G **genera G** y es un **generador de G** si $\langle a \rangle = G$. Un grupo G es **cíclico** si existe algún elemento $a \in G$ que lo genere.

Definición 1.0.13. Sea H un subgrupo de un grupo G y sea $a \in G$. La **clase lateral izquierda aH de H** es el conjunto $\{ah \mid h \in H\}$. La **clase lateral derecha Ha de H** se define de manera similar.

Teorema 1.0.14. Sea G un grupo de orden finito n y H un subgrupo de G . El orden de H divide al orden de G .

Demostración. Ver [1] página 112 \square

Definición 1.0.15. Un subgrupo H de un grupo G es un **subgrupo normal de G** si $g^{-1}Hg = H$ para todas las $g \in G$. Se denotará $H \triangleleft G$.

Definición 1.0.16. Si N es un subgrupo normal de un grupo G , el grupo de las clases laterales de N bajo la operación inducida es el **grupo cociente de G módulo N** y se denota G/N . Las clases laterales son las **clases residuales de G módulo N** .

Teorema 1.0.17. (Teorema fundamental del homomorfismo) Sea ϕ un homomorfismo de un grupo G en un grupo G' , con kernel K . Entonces, $\phi(G)$ es grupo y existe un isomorfismo canónico (natural) de $\phi(G)$ con G/K .

Demostración. Mostremos primero que $\phi(G)$ es grupo.

ζ_1 . Sean $\phi(a)$, $\phi(b)$ y $\phi(c)$ elementos en $\phi(G)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\phi(a)[(\phi(b))(\phi(c))] &= (\phi(a))[\phi(bc)] = \phi(a[bc]) = \\ \phi([ab]c) &= [\phi(ab)](\phi(c)) = [(\phi(a))(\phi(b))](\phi(c)).\end{aligned}$$

ζ_2 . $(\phi(e))(\phi(a)) = \phi(ea) = \phi(a) = \phi(ae) = (\phi(a))(\phi(e))$, luego, existe $e' = \phi(e) \in \phi(G)$.

ζ_3 . $(\phi(a^{-1}))(\phi(a)) = \phi(a^{-1}a) = \phi(e) = \phi(aa^{-1}) = (\phi(a))(\phi(a^{-1}))$, luego, existe $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1}) \in \phi(G)$.

Mostremos ahora que existe un isomorfismo canónico de $\phi(G)$ con G/K . Sea $aK \in G/K$, definiremos la transformación

$$\psi: G/K \rightarrow \phi(G) \quad \text{como} \quad \psi(aK) = \phi(a).$$

Debemos probar que ψ está bien definida, es decir, si $b \in aK$, debemos ver que $\phi(a) = \phi(b)$: como $b \in aK$, entonces $b = ak_1$ para $k_1 \in K$, luego $a^{-1}b = k_1$. Entonces,

$$e' = \phi(k_1) = \phi(a^{-1}b) = (\phi(a^{-1}))(\phi(b)) = (\phi(a))^{-1}(\phi(b)).$$

De aquí

$$\phi(b) = (\phi(a))e' = \phi(a).$$

Luego, ψ está bien definida.

Para mostrar que ψ es uno a uno, supongamos que $\psi(aK) = \psi(bK)$. Entonces, $\phi(a) = \phi(b)$, de modo que

$$e' = (\phi(a))^{-1}(\phi(b)) = (\phi(a^{-1}))(\phi(b)) = \phi(a^{-1}b).$$

Por la definición de K , $a^{-1}b \in K$, lo cual implica que $b \in aK$, de modo que $bK = aK$. Por lo tanto, ψ es uno a uno.

Es claro que ψ es sobre por su definición.

Con

$$\psi[(aK)(bK)] = \psi(abK) = \phi(ab) = (\phi(a))(\phi(b)) = [\psi(aK)][\psi(bK)]$$

terminamos la demostración de que ψ es isomorfismo. \square

Definición 1.0.18. Una **transformación de un conjunto** A es una función uno a uno de A sobre sí mismo.

Definición 1.0.19. Una **permutación de un conjunto** A es una función de A en A que es biyectiva.

En las permutaciones de un conjunto se define una operación binaria natural, la *multiplicación de permutaciones*. Sea A un conjunto y sea σ y τ permutaciones de A . La *función compuesta* $\sigma\tau$, nos da una transformación de A en A y es fácil ver que es una permutación.

Teorema 1.0.20. Sean A un conjunto no vacío y S_A la familia de todas las permutaciones de A . Entonces S_A es un grupo bajo la multiplicación de permutaciones.

Demostración. Debemos verificar los tres axiomas.

ζ_1 . Como las permutaciones son funciones, mostraremos que $[(\sigma\tau)\mu](a) = [\sigma(\tau\mu)](a)$ para toda $a \in A$. Así,

$$[(\sigma\tau)\mu](a) = \mu[(\sigma\tau)(a)] = \mu[\tau(\sigma(a))] = (\tau\mu)[\sigma(a)] = [\sigma(\tau\mu)](a).$$

Por consiguiente, $(\sigma\tau)\mu$ y $\sigma(\tau\mu)$ llevan toda $a \in A$ al mismo elemento, luego $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$.

ζ_2 . Existe la permutación $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ tal que $I(a) = a$ para todas las $a \in A$, así I actúa como identidad.

ζ_3 . Para una permutación σ definimos σ^{-1} tal que $\sigma^{-1}(a)$ será el elemento a' de A tal que $a = \sigma(a')$. La existencia de exactamente un elemento a' con esta característica se debe a que, como función, σ es uno a uno y sobre. Además se puede ver que:

$$I(a) = a = \sigma(a') = \sigma(\sigma^{-1}(a)) = (\sigma^{-1}\sigma)(a)$$

y también que

$$I(a') = a' = \sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(\sigma(a')) = (\sigma\sigma^{-1})(a'),$$

de manera que $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = I$. □

Definición 1.0.21. Si A es el conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces el grupo de todas las permutaciones de A es el **grupo simétrico de n letras** y se denotará S_n .

Nótese que S_n tiene $n!$ elementos, donde

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1).$$

Teorema 1.0.22. (de Cayley) *Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Demostración. Sea G un grupo dado. Sea S_G el grupo de todas las permutaciones de G . Como S_G es demasiado grande para ser isomorfo a G , definamos cierto subconjunto de S_G . Para $a \in G$ sea ρ_a la transformación de G en G dada por

$$\rho_a(x) = xa$$

para $x \in G$. Si $\rho_a(x) = \rho_a(y)$ entonces $xa = ya$ luego $x = y$. Así, ρ_a es una función uno a uno. Además, si $y \in G$, entonces

$$\rho_a(ya^{-1}) = (ya^{-1})a = y,$$

así, ρ_a es sobre. Entonces como $\rho_a: G \rightarrow G$ es uno a uno y sobre, ρ_a es una permutación de G , esto es, $\rho_a \in S_G$. Sea

$$G' = \{\rho_a | a \in G\}.$$

Vamos a mostrar que $G' \leq S_G$. Debemos ver que G' es cerrado bajo la multiplicación de permutaciones, esto es $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$. Veamos que actúan igual sobre toda $x \in G$.

$$(\rho_a\rho_b)(x) = \rho_b(\rho_a(x)) = \rho_b(xa) = (xa)b = x(ab) = \rho_{ab}(x).$$

Así, $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$ y por lo tanto, G' es cerrado bajo la multiplicación. Ahora, es claro que para toda $x \in G$,

$$\rho_e(x) = xe = x,$$

donde e es el elemento identidad de G , de modo que ρ_e es la permutación identidad I de S_G y está en G' . Como $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$ tenemos

$$\rho_a\rho_{a^{-1}} = \rho_{aa^{-1}} = \rho_e = \rho_{a^{-1}a} = \rho_{a^{-1}}\rho_a.$$

De aquí que

$$(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}},$$

de modo que $(\rho_a)^{-1} \in G'$. Entonces, G' es un subgrupo de S_G . Falta probar que G es isomorfo al grupo G' . Defínase $\phi: G \rightarrow G'$ por

$$\phi(a) = \rho_a$$

para $a \in G$. Si $\phi(a) = \phi(b)$ entonces ρ_a y ρ_b deben ser la misma permutación de G . En particular,

$$\rho_a(e) = \rho_b(e),$$

así que $ea = eb$ y $a = b$. Por tanto, ϕ es uno a uno. Es inmediato que ϕ es sobre por la definición de G' . Finalmente, $\phi(ab) = \rho_{ab}$ mientras que

$$\phi(a)\phi(b) = \rho_a\rho_b.$$

Pero ya se dijo que ρ_{ab} y $\rho_a\rho_b$ son la misma permutación de G . Así

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Por lo anterior, $G \simeq G'$. □

Definición 1.0.23. Sea G un grupo y $a_i \in G$ para $i \in I$. El menor subgrupo de G que contiene $\{a_i \mid i \in I\}$ es el **subgrupo generado por** $\{a_i \mid i \in I\}$. Si este subgrupo es todo G , entonces $\{a_i \mid i \in I\}$ **genera** G y las a_i son **generadores de** G . Si existe un conjunto finito $\{a_i \mid i \in I\}$ que genere G , entonces G es **finitamente generado**. Se notará $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = G$

Teorema 1.0.24. Si G es un grupo y $a_i \in G$ para $i \in I$, entonces el subgrupo H de G generado por $\{a_i \mid i \in I\}$ consta de precisamente aquellos elementos de G que son productos finitos de potencias de exponente entero de a_i , donde, en ese producto, pueden presentarse varias veces potencias de alguna a_i dada.

Demostración. Ver [1] página 89. □

Definición 1.0.25. Si A es un conjunto en donde se ha definido el concepto de distancia, una transformación ϕ de A es una **isometría** si $d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y))$, es decir, si ϕ preserva la distancia.

Definición 1.0.26. Una **rotación** $\rho_{(P, \theta)}$ es una rotación que rota el plano alrededor del punto P en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, en un ángulo θ , donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Definición 1.0.27. Una **reflexión** en el plano es una función μ que transforma cada punto de una determinada recta l en sí mismo y a todo punto fuera de la recta a la imagen reflejada en el espejo l que queda a la misma distancia entre el punto y l .

Capítulo 2

Grupos asociados a polígonos regulares

La definición de **grupo de simetrías** a la cual hacemos referencia en este trabajo es la expuesta en [3]:

“La noción de grupo permite caracterizar en términos exactos la simetría de una figura geométrica, para la cual, a cada figura se le puede poner en correspondencia el conjunto de todas las transformaciones de un espacio, que hagan coincidir la figura dada con ella misma. Este conjunto será un grupo con relación a la realización consecutiva de transformaciones, que precisamente caracteriza la simetría de la figura”.

Utilizaremos el *maple* incorporado en el programa *Scientific WorkPlace* y *scripts* realizados en *Scilab* para hallar las matrices que nos definen el grupo de simetrías (ver apéndice A.1) y su respectiva tabla (ver apéndice A.2).

Para iniciar, consideremos como ilustración un triángulo y un hexágono regular:

Por simetrías de un polígono regular de n lados se entienden el siguiente conjunto de movimientos de dicho polígono.

1. n rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a través de los ángulos $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
2. n reflexiones correspondientes a los n ejes de simetría.

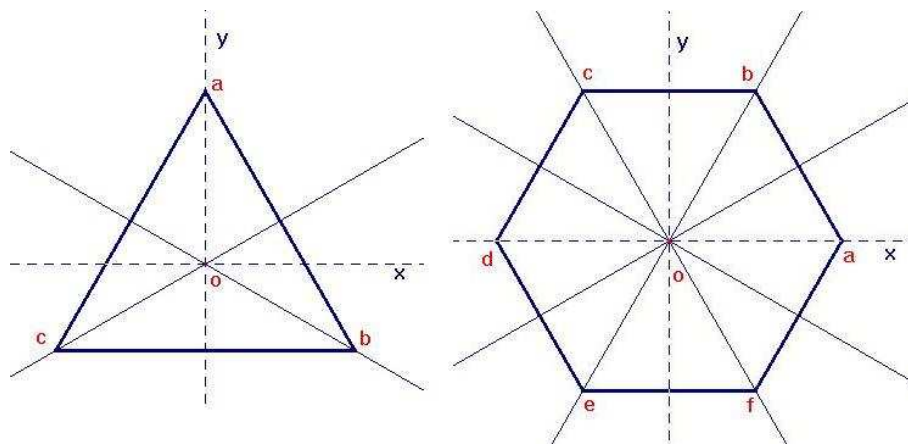


Figura 2.1: Simetrías del triángulo y el hexágono

Para el caso en que n sea par los ejes de simetría son:

- $\frac{n}{2}$ líneas obtenidas uniendo el centro O del polígono con cada uno de sus vértices $1, 2, \dots, n$.
- $\frac{n}{2}$ líneas obtenidas uniendo el centro O con los puntos medios de los n lados del polígono.

Para el caso en que n es impar las n reflexiones corresponden a los n ejes de simetría obtenidos uniendo el centro O del polígono con sus vértices $1, 2, \dots, n$.

Sean $B \subseteq A$, I_B el grupo de isometrías de B y sean las $f: A \rightarrow A$ biyecciones tal, que $f(B) = B$ y para todo $x, y \in A$ se tiene $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Entonces $I_B \leq S_A$. De esto, el conjunto de $2n$ movimientos constituye un subgrupo de $S_{\mathbb{R}^2}$, bajo la operación de composición de movimientos. Se denomina el **grupo diédrico de grado n** , y se denota por D_n .

Denotaremos f^k la rotación a través del ángulo $\frac{2\pi k}{n}$, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Cuando $k = 0$ tenemos $f^0 = I$.

La rotación f a través del ángulo $\theta = \frac{2\pi}{n}$, corresponde a la permutación de los vértices dada por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La reflexión g respecto al eje de simetría que pasa por el vértice 1, corresponde

a la permutación de los vértices dada por:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & n-k+2 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.0.1. Veamos el grupo diédrico de grado impar 3, es decir, D_3 (ver figura 2.1):

$$I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 0^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 120^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 240^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{ao}$$

$$fg = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{bo}$$

$$f^2g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{co}$$

Aquí vemos que D_3 está formado por 3 rotaciones de 0° , 120° y 240° alrededor del origen y 3 reflexiones respecto a los tres ejes de simetría correspondientes a unir cada vértice del triángulo con el centro o . Es decir, $|D_3| = 6$.

El cuadro 2.2 muestra la tabla de D_3

Ejemplo 2.0.2. Un grupo diédrico de grado par 6, es decir, D_6 (ver figura 2.1):

$$I = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 0^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & e & f & a \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 60^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f^2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & a & b \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 120^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d & e & f & a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 180^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & f & a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 240^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$f^5 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 300^\circ \text{ alrededor del origen}$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & f & e & d & c & b \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{ao}$$

$$fg = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por el punto medio de } \overline{cd} \text{ y el origen}$$

$$f^2g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & d & c & b & a & f \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{co}$$

$$f^3g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d & c & b & a & f & e \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por el punto medio de } \overline{bc} \text{ y el origen}$$

$$f^4g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & b & a & f & e & d \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por } \overline{bo}$$

$$f^5g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & f & e & d & c \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al eje definido por el punto medio de } \overline{ab} \text{ y el origen}$$

D_6 está formado por 6 rotaciones de 0° , 60° , 120° , 180° , 240° y 300° alrededor del origen, 3 reflexiones respecto a los tres ejes de simetría correspondientes a unir cada vértice del triángulo con el centro o y 3 reflexiones respecto a los tres ejes de simetría correspondientes a unir los puntos medios de los lados del triángulo con el centro o . Es decir, $|D_6| = 12$.

\cdot	I	f	f^2	g	fg	f^2g
I	I	f	f^2	g	fg	f^2g
f	f	f^2	I	f^2g	g	fg
f^2	f^2	I	f	fg	f^2g	g
g	g	f^2g	fg	I	f	f^2
fg	fg	f^2g	g	f^2	I	f
f^2g	f^2g	g	fg	f	f^2	I

Cuadro 2.2: Tabla de D_3

El cuadro 2.4 muestra la tabla de D_6

\cdot	I	f	f^2	f^3	f^4	f^5	g	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g
I	I	f	f^2	f^3	f^4	f^5	g	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g
f	f	f^2	f^3	f^4	f^5	I	f^5g	g	fg	f^2g	f^3g	f^4g
f^2	f^2	f^3	f^4	f^5	I	f	f^4g	f^5g	g	fg	f^2g	f^3g
f^3	f^3	f^4	f^5	I	f	f^2	f^3g	f^4g	f^5g	g	fg	f^2g
f^4	f^4	f^5	I	f	f^2	f^3	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g	g	fg
f^5	f^5	I	f	f^2	f^3	f^4	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g	g
g	g	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g	I	f	f^2	f^3	f^4	f^5
fg	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g	g	f^5	I	f	f^2	f^3	f^4
f^2g	f^2g	f^3g	f^4g	f^5g	g	fg	f^4	f^5	I	f	f^2	f^3
f^3g	f^3g	f^4g	f^5g	g	fg	f^2g	f^3	f^4	f^5	I	f	f^2
f^4g	f^4g	f^5g	g	fg	f^2g	f^3g	f^2	f^3	f^4	f^5	I	f
f^5g	f^5g	g	fg	f^2g	f^3g	f^4g	f	f^2	f^3	f^4	f^5	I

Cuadro 2.4: Tabla de D_6

En las tablas 2.2 y 2.4 podemos verificar que:

1. El producto de dos rotaciones es una rotación.
2. El producto de dos reflexiones es una rotación.
3. El producto de una rotación y una reflexión es una reflexión.
4. f^k tiene orden n : $(f^k)^n = I$.
5. g tiene orden 2: $g^2 = I$.

6. $f^k g$ es de orden 2: $(f^k g)^2 = I$.

7. $gfg = f^{-1}$.

2.1. Generadores del grupo diédrico

Teorema 2.1.1. Sean f y g la rotación y reflexión anteriores, entonces, $\langle f, g \rangle = D_n$.

Demostración. En la definición 1.0.23 dijimos que $\langle g, f \rangle \leq D_n$. Debemos probar que $|\langle g, f \rangle| = 2n$

Sea $x \in \langle f, g \rangle$, entonces x tiene la forma

$$x = f^{k_1} g^{l_1} f^{k_2} g^{l_2} \dots f^{k_m} g^{l_m}, \quad k_i, l_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Como f es un elemento de orden n y g un elemento de orden 2 podemos decir que

$$x = f^{k_1} g^{l_1} f^{k_2} g^{l_2} \dots f^{k_m} g^{l_m}, \quad 0 \leq k_i \leq n-1, \quad 0 \leq l_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Consideremos el producto $g^l f^k$.

Si $l = 0$, entonces $g^0 f^k = f^k g^0$.

Si $l = 1$, variando k tenemos:

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad gI = Ig. \\ k = 1 : & \quad gf = f^{-1}g^{-1} = f^{-1}g = f^{n-1}g. \\ k = 2 : & \quad gf^2 = gff = f^{n-1}(gf) = f^{n-1}(f^{-1}g) = f^{n-2}g. \\ k = 3 : & \quad gf^3 = gf^2f = f^{n-2}(gf) = f^{n-3}g. \\ & \quad \vdots \\ k = n-1 : & \quad gf^{n-1} = f^{n-(n-1)}g = fg. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que cada elemento $x \in \langle f, g \rangle$ tiene la forma $x = f^k g^l$, con $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq 1$. Resultan entonces $2n$ elementos.

Comprobemos ahora que son diferentes. Sea $0 \leq k, r \leq n-1$ y $0 \leq l, s \leq 1$ tales que $f^k g^l = f^r g^s$, luego $f^{k-r} = g^{s-l} \in \{\langle f \rangle \cap \langle g \rangle\}$. Como $\langle f \rangle \neq \langle g \rangle$ y $f \neq 1$ tenemos que $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = 1$, entonces, $n \mid (k-r)$. Siendo r y k con las condiciones dadas sólo puede tenerse que $r = k$. Análogamente $l = s$. Por lo tanto, todos los x son diferentes.

Obtenemos entonces que:

$$D_n = \{1, f, f^2, \dots, f^{n-1}, g, fg, \dots, f^{n-1}g\} = \langle f, g \rangle. \quad \square$$

D_n tiene la siguiente regla de multiplicación:

$$(f^k g^m)(f^{k'} g^{m'}) = \begin{cases} f^{k+k'} g^{m+m'}, & m = 0 \\ f^{k-k'} g^{m+m'}, & m = 1. \end{cases}$$

Teorema 2.1.2. *Sea G un grupo generado por los elementos a y b tales que*

$$\begin{aligned} a^n &= 1, & a \text{ es de orden } n \\ b^2 &= 1, & b \text{ es de orden } 2 \\ bab &= a^{-1}, \end{aligned}$$

entonces, $G \simeq D_n$.

Demostración. Es posible repetir la prueba realizada anteriormente para comprobar que G tiene $2n$ elementos diferentes:

$$G = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}.$$

La función $\varphi : G \rightarrow D_n$, dada por $\varphi(a^k b^l) = f^k g^l$, $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq 1$, define un isomorfismo entre G y D_n :

Probemos que φ está bien definida: sean $x, y \in G$, en donde $x = y$. Existen k_1, k_2, l_1, l_2 tal que $x = a^{k_1} b^{l_1}$ y $y = a^{k_2} b^{l_2}$. Como $x = y$ tenemos que $k_1 = k_2$ y $l_1 = l_2$, luego $\varphi(x) = f^{k_1} g^{l_1} = \varphi(y)$.

φ es uno a uno: sean $x, y \in G$ tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$. De ahí, $f^{k_1} g^{l_1} = f^{k_2} g^{l_2}$, luego $k_1 = k_2$ y $l_1 = l_2$, entonces, $a^{k_1} b^{l_1} = a^{k_2} b^{l_2}$, por lo tanto $x = y$.

φ es sobre por definición.

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y):$$

$$\varphi(xy) = \varphi(a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2}) = \varphi(a^{k_1} a^{-k_2} b^{l_1} b^{l_2}) = \varphi(a^{k_1-k_2} b^{l_1+l_2}) = f^{k_1-k_2} g^{l_1+l_2}.$$

Además

$$\varphi(x)\varphi(y) = f^{k_1} g^{l_1} f^{k_2} g^{l_2} = f^{k_1} f^{-k_2} g^{l_1} g^{l_2} = f^{k_1-k_2} g^{l_1+l_2}. \quad \square$$

2.2. Representación matricial del grupo diédrico

Consideremos en $GL(2, \mathbb{R})$ las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

con $\theta = \frac{2\pi}{n}$. R es de orden n y S es de orden 2. Además

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

es decir $SRS = R^{-1}$. Esto indica que $\langle R, S \rangle \simeq D_n$. La matriz R representa la rotación del sistema de coordenadas xy a través de un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{n}$ y la matriz S representa una reflexión de dicho sistema.

Ejemplo 2.2.1. Para hallar las matrices de D_3 utilizando el `script` del apéndice A.1 necesitamos primero construir un triángulo equilátero centrado en el origen. Sus vértices $\{a, b, c\}$ estarán dados por

$$\left\{ (0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Para hallar las matrices que definen las reflexiones que nos generarán el grupo, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La primera columna corresponde al vértice a del triángulo, el cual se mantiene fijo y la segunda columna de ambas matrices son los vértices b y c , los cuales se

intercambian entre sí, generando así la matriz de la transformación: *reflexión respecto al eje que pasa por a y el origen*.

El grupo de simetrías del triángulo es:

$$\begin{aligned}
 I &= I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & g &= A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 f &= BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & fg &= ABA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 f^2 &= AB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & f^2g &= B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2. El hexágono regular centrado en el origen que necesitamos, tendría sus vértices $\{a, b, c, d, e, f\}$ en

$$\left\{ (0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Realizando el mismo procedimiento que con D_3 , las matrices que nos definen el grupo de simetrías del hexágono son:

$$\begin{aligned}
 I &= I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & g &= A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 f &= CB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & fg &= ACB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 f^2 &= BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & f^2g &= ABA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 f^3 &= AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & f^3g &= C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$f^4 = AB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad f^4g = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f^5 = BC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad f^5g = ABC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.3. Subgrupos de D_n

Por los generadores de D_n podemos presentar los siguientes subgrupos:

De orden 1 : 1

De orden 2 : $\langle g \rangle, \langle fg \rangle, \langle f^2g \rangle, \dots, \langle f^{n-1}g \rangle$
 $\langle f^{\frac{n}{2}} \rangle$, si n es par

De orden n : $\langle f \rangle$

De orden k : como $\langle f \rangle$ es cíclico entonces por cada divisor k de n existe al menos un subgrupo y además, por el teorema 1.0.14 puede existir subgrupos cuyo orden es los divisores de $2n$

De orden $2n$: D_n

Ejemplo 2.3.1. Subgrupos de D_3 :

Orden 1 : $\{I\}$

Orden 2 : $\langle g \rangle, \langle fg \rangle, \langle f^2g \rangle$

Orden 3 : $\langle f \rangle$

Orden 6 : D_3

Ejemplo 2.3.2. Subgrupos de D_6

Orden 1 : $\{I\}$

Orden 2 : $\langle g \rangle, \langle fg \rangle, \langle f^2g \rangle, \langle f^3g \rangle, \langle f^4g \rangle, \langle f^5g \rangle, \langle f^3 \rangle$

Orden 3 : $\langle f^2 \rangle = \{I, f^2, f^4\}$

Orden 4 : $\langle f^3, g \rangle = \{I, f^3, g, f^3g\},$

$$\langle f^3, f^2g \rangle = \{I, f^3, f^2g, f^5g\},$$

$$\langle f^3, f^4g \rangle = \{I, f^3, fg, f^4g\}$$

Orden 6 : $\langle f \rangle, \langle f^2, g \rangle = \{I, f^2, f^4, g, f^2g, f^4g\},$

$$\langle f^2, f^5g \rangle = \{I, f^2, f^4, fg, f^3g, f^5g\}$$

Orden 12 : D_6

2.4. Centro de D_n

Teorema 2.4.1. $Z(D_n)$ contiene solamente rotaciones y además

$$Z(D_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{1, f^{\frac{n}{2}}\} = \langle f^{\frac{n}{2}} \rangle, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Mostremos que para todo $0 \leq k \leq n-1$, $f^k g \notin Z(D_n)$: en efecto, $(f^k g)f = (f^k f^{-1})g = f^{k-1}g$ y también $f(f^k g) = (f f^k)g = f^{k+1}g$. Si $f^{k-1}g = f^{k+1}g$ entonces $f^2 = 1$; pero $f^n = 1$ para $n \geq 3$. Luego en $Z(D_n)$ no hay reflexiones.

Sea $f^k \in Z(D_n)$ con $0 \leq k \leq n-1$. Entonces

$$f^k g = g f^k \Rightarrow f^k g = f^{-k} g \Rightarrow f^{2k} = 1 \Rightarrow n|2k$$

Cuando n es impar entonces $k = 0$, por lo tanto $Z(D_n) = I = 1$.

Sea $n = 2m$ par. Como $2m|2k$ entonces existe $\lambda \geq 1$ tal que $2k = 2m\lambda \Rightarrow k = m\lambda$. Si fuese

$$\lambda \geq 2 \Rightarrow k = m\lambda \geq 2m = n \Rightarrow k \geq n$$

contradicción; por lo tanto $\lambda = 1 \Rightarrow k = n/2$.

De lo anterior obtenemos que si $x \in Z(D_n)$ entonces x es de la forma $x = f^{\frac{n}{2}}$. Veamos que realmente en este caso par $f^{\frac{n}{2}} \in Z(D_n)$:

$$ff^{\frac{n}{2}} = f^{\frac{n}{2}}f, \quad gf^{\frac{n}{2}} = f^{-\frac{n}{2}}g = f^{\frac{n}{2}}g.$$

Luego, $f^{\frac{n}{2}}$ conmuta con cada elemento de $\langle f, g \rangle = D_n$, es decir, $f^{\frac{n}{2}} \in Z(D_n)$. \square

2.5. Subgrupos Normales del Grupo D_n

Teorema 2.5.1. *Sea $N \triangleleft D_n$, entonces N tiene la siguiente forma:*

$$N = 1, \text{ ó } D_n \text{ ó } \begin{cases} \langle f^k \rangle, k|n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \langle f^k \rangle, k|n \text{ ó} \\ \{f^{2k}g^l, 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1, 0 \leq l \leq 1\} \text{ ó} \\ \{f^{2k+1}g, 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1\} \cup \{f^{2k} | 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Demostración. Sea $N \triangleleft D_n$. Consideremos los siguientes casos posibles:

1. n es impar y N no contiene reflexiones: en este caso $N \leq \langle f \rangle$ y existe entonces un divisor positivo k de n tal que $N = \langle f^k \rangle$. Veamos que cada subgrupo de este tipo es efectivamente normal en D_n :

$$(f^\alpha g^\beta)^{-1} (f^k)^j (f^\alpha g^\beta) = \begin{cases} f^{-kj} & \text{si } \beta = 1 \\ f^{kj} & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

2. n es impar y en N hay al menos una reflexión: sea $f^k g$ en N , donde k es fijo y cumple $0 \leq k \leq n - 1$. Sea $0 \leq r \leq n - 1$, entonces $(f^r)^{-1} (f^k g) (f^r) \in N$, luego $f^{k-2r} g \in N$. Tomando $r = k$ se tiene que $f^{-k} g \in N$ y entonces $f^{-2k} \in N$. Tomemos ahora $r = k + 1$, entonces $f^{k-2(k+1)} g = f^{-k-2} g \in N$ y entonces $f^k g f^{-k-2} g = f^{2k+2} \in N$. De

aquí resulta entonces que $f^2 \in N$. Como n es impar, $\langle f \rangle = \langle f^2 \rangle \subseteq N$, es decir, $f \in N$. Finalmente, $f^{-k} \in N$ y entonces $g \in N$. Esto garantiza que $N = D_n$.

3. n es par y N no contiene reflexiones: razonando como en el caso impar se obtiene que existe entonces un divisor positivo k de n tal que $N = \langle f^k \rangle$.
4. n es par y en N hay al menos una reflexión: sea $n = 2t$ y sea $f^k g$ en N , donde k es fijo y cumple $0 \leq k \leq n - 1$. Al igual que en el caso impar podemos concluir que $f^2 \in N$. Consideremos dos casos posibles:

a) $g \in N$: entonces el siguiente conjunto de n elementos distintos está incluido en N : $\{f^{2r} g^l \mid 0 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1, 0 \leq l \leq 1\}$. Si N posee al menos un elemento adicional, entonces $|N| \geq n+1$ y esto implica que $|N| = 2n$. En efecto, $|N|$ divide a $2n$ y entonces $2n = |N|a$; si $a \geq 2$ entonces $|N|a \geq 2|N|$, luego $2n \geq 2n + 2$, lo cual es falso. Así pues, si N no posee al menos un elemento adicional, entonces N es exactamente el subgrupo $\{f^{2r} g^l \mid 0 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1, 0 \leq l \leq 1\}$. En caso contrario, N coincide con D_n .

b) $g \notin N$: veamos que entonces necesariamente $fg \in N$. En efecto, k debe ser impar, ya que de lo contrario $k = 2u$ y entonces $(f^2)^{-u} = f^{-k} \in N$, con lo cual $f^{-k} f^k g = g \in N$, lo cual es falso. Así pues, $k = 2w + 1$ y esto implica que $f^{-2w} f^k g = fg \in N$.

Nótese que entonces N contiene al conjunto $\{f^{2k} \mid 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1\}$ y también al conjunto $\{f^{2k+1} g \mid 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1\}$, la reunión de los cuales tiene n elementos. Como se vio anteriormente, si N posee al menos un elemento adicional, entonces $N = D_n$, en caso contrario N es exactamente la reunión de estos dos conjuntos. \square

Ejemplo 2.5.1. Los subgrupos normales de D_3 son:

$$I, \quad \langle f \rangle \quad D_3$$

Y los grupos cociente:

$$D_3/I = D_3$$

$$D_3/\langle f \rangle = \{\{I, f, f^2\}, \{g, fg, f^2g\}\}$$

Ejemplo 2.5.2. Los subgrupos normales de D_6 son:

$$I, \quad \langle f \rangle, \quad \langle f^2 \rangle, \quad \langle f^3 \rangle, \quad D_6,$$

$$\{f^0g^0, f^2g^0, f^4g^0, f^0g^1, f^2g^1, f^4g^1\} = \{I, f^2, f^4, g, f^2g, f^4g\} = \langle f^2, g \rangle,$$

$$\{f^1g^1, f^3g^1, f^5g^1, f^0, f^2, f^4\} = \{fg, f^3g, f^5g, I, f^2, f^4\} = \langle f^2, f^5g \rangle$$

Los grupos cociente:

$$D_6/I = D_6$$

$$D_6/\langle f \rangle = \{\{I, f, f^2, f^3, f^4, f^5\}, \{g, fg, f^2g, f^3g, f^4g, f^5g\}\}$$

$$D_6/\langle f^2 \rangle = \{\{f, f^3, f^5\}, \{I, f^2, f^4\}, \{g, f^2g, f^4g\}, \{fg, f^3g, f^5g\}\}$$

$$D_6/\langle f^3 \rangle = \{\{f, f^4\}, \{f^2, f^5\}, \{I, f^3\}, \{g, f^3g\}, \{fg, f^4g\}, \{f^2g, f^5g\}\}$$

$$D_6/\langle f^2, g \rangle = \{\{f, f^3, f^5, fg, f^3g, f^5g\}, \{I, f^2, f^4, g, f^2g, f^4g\}\}$$

$$D_6/\langle f^2, f^5g \rangle = \{\{f, f^3, f^5, g, f^2g, f^4g\}, \{I, f^2, f^4, fg, f^3g, f^5g\}\}$$

Capítulo 3

Grupos asociados a poliedros regulares

El estudio de los poliedros tuvo un lugar central en la geometría griega, sin embargo, fueron Descartes y Euler quienes descubrieron que: *en un poliedro simple, supongamos V representa el número de vértices, A el de aristas y C el de caras; entonces, siempre*

$$V - A + C = 2. \quad (3.1)$$

A partir de esta fórmula es fácil demostrar que no existen más que cinco poliedros regulares. Supongamos que un poliedro regular tiene C caras cada una de las cuales es un polígono regular de n lados, y que llegan r aristas a cada vértice. Contando las aristas por las caras y los vértices, vemos que

$$nC = 2A, \quad (3.2)$$

ya que cada arista pertenece a dos caras y por esto interviene dos veces en el producto nC . Por otra parte,

$$rV = 2A, \quad (3.3)$$

ya que cada arista tiene dos vértices. De aquí y de (3.1) obtenemos la ecuación

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{r} - A = 2$$

que es igual a

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \quad (3.4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ y $r \geq 3$, ya que un polígono debe tener como mínimo, tres lados y, por lo menos deben llegar tres lados a cada ángulo del poliedro. Además, $\frac{1}{n} + \frac{1}{r}$ debe ser mayor que $\frac{1}{2}$, pues A debe ser positiva. Veamos entonces, qué valores pueden tomar r y n :

Para $n = 3$, la ecuación (3.4) toma la forma,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

entonces r puede ser igual a 3, 4 ó 5. De aquí obtenemos $A = 6, 12$ ó 30 .

Para $n = 4$ tenemos,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{4} = \frac{1}{A}$$

de la que se deduce que $r = 3$ y por lo tanto, $A = 12$.

Para $n = 5$ tenemos,

$$\frac{1}{r} - \frac{3}{10} = \frac{1}{A}$$

luego $r = 3$ y por lo tanto, $A = 30$.

Para $n \geq 6$, la ecuación asigna valores negativos a A , lo cual no tendría sentido. Podemos decir entonces, que el conjunto de poliedros dados por estos casos da el número de poliedros regulares posibles.

Sustituyendo estos valores de n , r y A en las ecuaciones (3.2) y (3.3), obtenemos el número de vértices y de caras de los poliedros correspondientes:

Nombre	V	A	C
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Para iniciar nuestro estudio sobre la simetría de los poliedros, es necesario poner claro y unificar la definición que manejaremos de *poliedro* y de *poliedro regular*, que tomaremos también de [3]:

Definición 3.0.2. Un *poliedro* es el conjunto de un número finito de polígonos planos, tal que:

1. cada lado de cualquier polígono es simultáneamente un lado de otro polígono (pero sólo de uno) que se denomina adyacente del primero (respecto a dicho lado),
2. a partir de cada uno de los polígonos que integran el poliedro, es posible alcanzar cualquier otro de ellos, pasando al polígono adyacente a aquél y, a su vez, a partir de este último es posible pasar a su adyacente, etc.

Estos polígonos se denominan *caras*, sus lados *aristas* y sus vértices, *vértices* del poliedro.

Definición 3.0.3. Un *poliedro regular* es un polígono tal que todas sus caras son polígonos regulares iguales y todos sus ángulos poliedros de los vértices son regulares e iguales.

Definición 3.0.4. El grupo de simetrías del poliedro, Ω , llamado el *grupo del poliedro*, es el conjunto de todas las isometrías que envían vértices en vértices, lo cual implica que envían aristas en aristas y caras en caras.

Consideraremos el centro del poliedro como el origen. Ω^+ denota el conjunto de Ω de las simetrías con determinante 1 y Ω^- denota el conjunto de Ω de las simetrías con determinante -1 .

Para cumplir nuestro objetivo es necesario que los lectores conozcan la posición de los poliedros en el espacio tridimensional, por esto, lo primero que se hará es dar las coordenadas de sus vértices.

3.1. El grupo del tetraedro (Ω_T)

Consideremos el tetraedro construido de la siguiente manera: primero haremos un triángulo equilátero que nos sirva como base para el tetraedro. Sus vértices en el plano estarán dados por:

$$\begin{aligned} & \{(0, 1), (\cos(-30), -\operatorname{sen}(-30)), (-\cos(-30), -\operatorname{sen}(-30))\} \\ & = \left\{ (0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

La distancia entre estos puntos es $\sqrt{3}$, por lo tanto el vértice que nos definirá el tetraedro debe estar a la misma distancia, luego los vértices del tetraedro son:

$$\left\{ (0, 1, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), (0, 0, \sqrt{2}) \right\}.$$

Para construir el tetraedro centrado en el origen, debemos hallar el baricentro y correr el tetraedro anterior esta distancia sobre el eje z . Así, los vértices a, b, c, d del tetraedro regular centrado en el origen son:

$$\left\{ \left(0, 1, -\frac{1}{4}\sqrt{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2} \right), \left(0, 0, \frac{3}{4}\sqrt{2} \right) \right\}$$

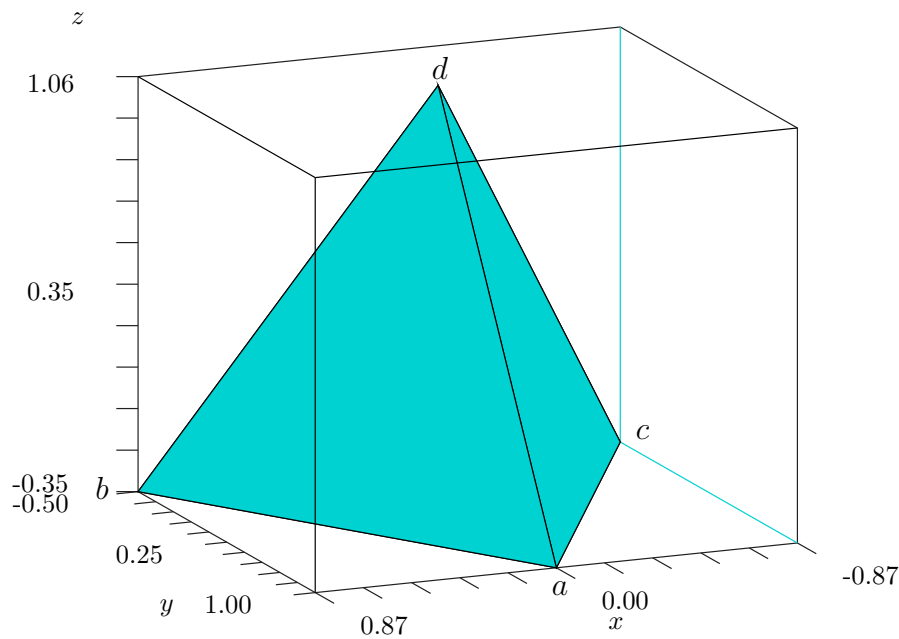


Figura 3.1: Tetraedro regular

Para hallar las matrices que nos definen las simetrías, debemos resolver sistemas de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} m & n & o \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, las dos primeras columnas corresponden a los vértices a y b del tetraedro, los cuales se mantienen fijos y la tercera columna de ambas matrices son los vértices c y d , los cuales se intercambian entre sí, generando así la matriz que nos define la transformación A : *reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}* . De esta forma hallaremos las seis reflexiones que nos generarán todo el grupo.

De lo anterior, las matrices que nos definen las simetrías del tetraedro son:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 0°

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ac} y el punto medio de \overline{bd}

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ad} y el punto medio de \overline{bc}

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{bc} y el punto medio de \overline{ad}

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{bd} y el punto medio de \overline{ac}

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano que pasa por \overline{cd} y el punto medio de \overline{ab}

$$AF = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ rotación de } 180^\circ \text{ alrededor de}$$

la recta que pasa por los puntos medios de \overline{cd} y \overline{ab}

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor de la recta que pasa por los puntos medios de \overline{bc} y \overline{ad}

$$BE = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor de la recta que pasa por los puntos medios de \overline{bd} y \overline{ac}

$$AB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por a y el origen

$$AC = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por a y el origen

$$AD = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por b y el origen

$$AE = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por b y el origen

$$BF = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por c y el origen

$$BD = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por c y el origen

$$CE = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por d y el origen

$$CF = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por d y el origen

$$ACF = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por c y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}

$$ABF = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por d y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}

$$ACD = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor de la recta que pasa por d y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ac} y el punto medio de \overline{bd}

$$ACE = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por c y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}

$$ABD = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por d y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y el punto medio de \overline{cd}

$$ABE = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor de la recta que pasa por d y el origen, seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{bc} y el punto medio de \overline{ad}

La tabla de Ω_T aparece en el cuadro 3.2.

Otra manera de contar las simetrías de Ω_T^+ es la siguiente: la identidad $\{I\}$, (1); las rotaciones de 180° alrededor de los tres ejes definidos por los centros de las aristas opuestas $\{AF, BE, CD\}$, (3); las rotaciones de 120° y 240° alrededor de los cuatro ejes definidos por cada vértice y el origen $\{AB, AC, AD, AE, BF, BD, CE, CF\}$, (8).

Las simetrías de Ω_T^- , son las composiciones de las simetrías de Ω_T^+ con una simetría con determinante -1 , podemos tomar A . El orden de Ω_T es la suma de los órdenes de Ω_T^+ y Ω_T^- , es decir, 24.

3.1.1. Subgrupos de Ω_T

Los subgrupos de Ω_T son:

$$\text{De orden 2: } \langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle, \langle E \rangle, \langle F \rangle;$$

$$\langle AF \rangle, \langle BE \rangle, \langle CD \rangle.$$

De orden 3: $\langle AB \rangle, \langle AD \rangle, \langle BD \rangle, \langle CE \rangle$.

De orden 4: $\langle ABD \rangle, \langle ABE \rangle, \langle ABF \rangle$;

$$\langle A, F \rangle = \{I, A, F, AF\}, \langle B, E \rangle = \{I, B, E, BE\},$$

$$\langle C, D \rangle = \{I, C, D, CD\}.$$

De orden 6: $\langle A, B \rangle = \{I, A, B, C, AB, AC\}$,

$$\langle A, D \rangle = \{I, A, D, E, AD, AE\},$$

$$\langle B, D \rangle = \{I, B, D, F, BD, BF\},$$

$$\langle C, E \rangle = \{I, C, E, F, CE, CF\}.$$

De orden 8: $\langle A, ABE \rangle = \{I, A, F, AF, BE, CD, ABE, ACD\}$,

$$\langle B, ABD \rangle = \{I, B, E, AF, BE, CD, ABD, ACF\},$$

$$\langle C, ABF \rangle = \{I, C, D, AF, BE, CD, ABF, ACE\}.$$

De orden 12: $\langle AB, AF \rangle = \Omega_T^+$.

De orden 24: Ω_T

.	I	A	B	C	D	E	F	AB	AC	AD	AE	AF	BD	BE	BF	CD	CE	CF	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF
I	I	A	B	C	D	E	F	AB	AC	AD	AE	AF	BD	BE	BF	CD	CE	CF	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF
A	A	I	AB	AC	AD	AE	AF	B	C	D	E	F	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	BD	BE	BF	CD	CE	CF
B	B	AC	I	AB	BD	BE	BF	C	A	ACD	ACE	ACF	D	E	F	ABD	ABE	ABF	CD	CE	CF	AD	AE	AF
C	C	AB	AC	I	CD	CE	CF	A	B	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	D	E	F	AD	AE	AF	BD	BE	BF
D	D	AE	BF	CD	I	AD	BD	ABE	ACF	E	A	ACE	F	ABF	B	C	ABD	ACD	CE	AB	BE	CF	AF	AC
E	E	AD	BE	CF	AE	I	CE	ABF	ACD	A	D	ABD	ACE	B	ABE	ACF	F	C	AF	BF	AB	AC	BD	CD
F	F	AF	BD	CE	BF	CF	I	ABD	ACE	ABF	ACF	A	B	ACD	D	ABE	C	E	AB	CD	AD	BE	AC	AE
AB	AB	C	A	B	ABD	ABE	ABF	AC	I	CD	CE	CF	AD	AE	AF	BD	BE	BF	ACD	ACE	ACF	D	E	F
AC	AC	B	C	A	ACD	ACE	ACF	I	AB	BD	BE	BF	CD	CE	CF	AD	AE	AF	D	E	F	ABD	ABE	ABF
AD	AD	E	ABF	ACD	A	D	ABD	BE	CF	AE	I	CE	AF	BF	AB	AC	BD	CD	ACE	B	ABE	ACF	F	C
AE	AE	D	ABE	ACF	E	A	ACE	BF	CD	I	AD	BD	CE	AB	BE	CF	AF	AC	F	ABF	B	C	ABD	ACD
AF	AF	F	ABD	ACE	ABF	ACF	A	BD	CE	BF	CF	I	AB	CD	AD	BE	AC	AE	B	ACD	D	ABE	C	E
BD	BD	ACE	F	ABD	B	ACD	D	CE	AF	BE	AC	AE	BF	CF	I	AB	CD	AD	ABE	C	E	ABF	ACF	A
BE	BE	ACD	E	ABF	ACE	B	ABE	CF	AD	AC	BD	CD	AE	I	CE	AF	BF	AB	ACF	F	C	A	D	ABD
BF	BF	ACF	D	ABE	F	ABF	B	CD	AE	CF	AF	AC	I	AD	BD	CE	AB	BE	C	ABD	ACD	E	A	ACE
CD	CD	ABE	ACF	D	C	ABD	ACD	AE	BF	CE	AB	BE	CF	AF	AC	I	AD	BD	E	A	ACE	F	ABF	B
CE	CE	ABD	ACE	F	ABE	C	E	AF	BD	AB	CD	AD	BE	AC	AE	BF	CF	I	ABF	ACF	A	B	ACD	D
CF	CF	ABF	ACD	E	ACF	F	C	AD	BE	AF	BF	AB	AC	BD	CD	AE	I	CE	A	D	ABD	ACE	B	ABE
ABD	ABD	CE	AF	BD	AB	CD	AD	ACE	F	ABE	C	E	ABF	ACF	A	B	ACD	D	BE	AC	AE	BF	CF	I
ABE	ABE	CD	AE	BF	CE	AB	BE	ACF	D	C	ABD	ACD	E	A	ACE	F	ABF	B	CF	AF	AC	I	AD	BD
ABF	ABF	CF	AD	BE	AF	BF	AB	ACD	E	ACF	F	C	A	D	ABD	ACE	B	ABE	AC	BD	CD	AE	I	CE
ACD	ACD	BE	CF	AD	AC	BD	CD	E	ABF	ACE	B	ABE	ACF	F	C	A	D	ABD	AE	I	CE	AF	BF	AB
ACE	ACE	BD	CE	AF	BE	AC	AE	F	ABD	B	ACD	D	ABE	C	E	ABF	ACF	A	BF	CF	I	AB	CD	AD
ACF	ACF	BF	CD	AE	CF	AF	AC	D	ABE	F	ABF	B	C	ABD	ACD	E	A	ACE	I	AD	BD	CE	AB	BE

Cuadro 3.2: Tabla de Ω_T

3.2. El grupo del hexaedro (Ω_H)

Para construir el hexaedro, construiremos primero los cuadrados inferior y superior. Sus vértices $\{a, b, c, d\}$ y $\{e, f, g, h\}$ en el plano están dados por $\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$. Como el hexaedro debe estar centrado en el origen y la medida de su arista es 2, el cuadrado inferior debemos bajarlo 1 y el superior, subirlo la misma cantidad. Por lo tanto, los vértices $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ del hexaedro son:

$$\{(1, 1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1), (1, -1, -1), \\ (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1)\}.$$

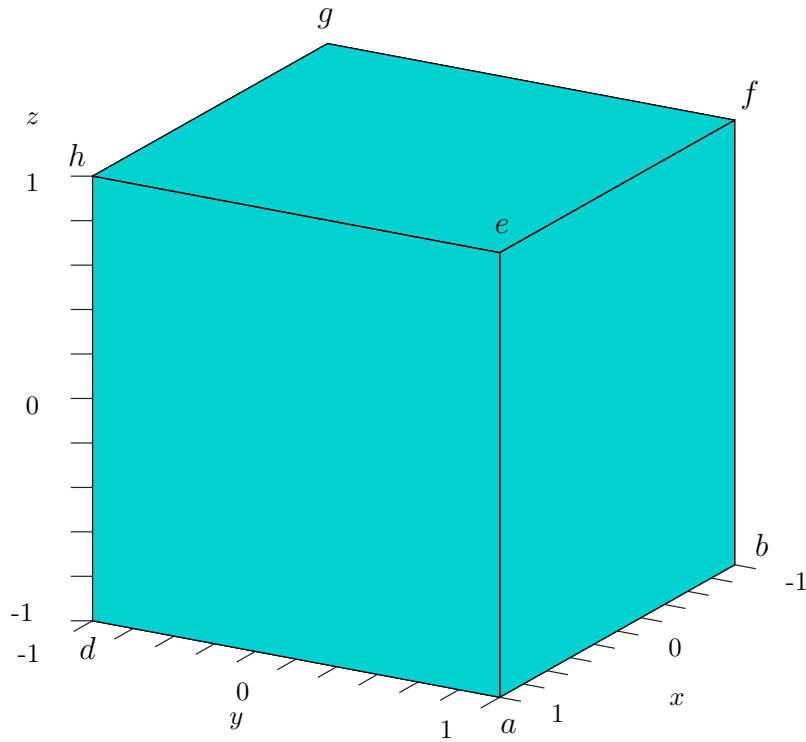


Figura 3.2: Hexaedro regular

Las matrices que nos definen las simetrías del hexaedro son:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 0°

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano yz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano xz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

reflexión respecto al plano xy

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje z

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje x

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje y

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje z

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje y

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje x

$$ABD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación de 270° alrededor del eje z

$$ACF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 270° alrededor del eje y

$$BCE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 270° alrededor del eje x

$$ABE = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que
pasa por los puntos medios de \overline{cd} y \overline{ef}

$$ABF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que
pasa por los puntos medios de \overline{ad} y \overline{fg}

$$ACD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que pasa por los puntos medios de \overline{ae} y \overline{cg}

$$ACE = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que pasa por los puntos medios de \overline{ab} y \overline{gh}

$$BCD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que pasa por los puntos medios de \overline{bf} y \overline{dh}

$$BCF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 180° alrededor del eje que pasa por los puntos medios de \overline{bc} y \overline{eh}

$$DE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor del eje que pasa por \overline{ce}

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 240° alrededor del eje que pasa por \overline{df}

$$ED = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor del eje que pasa por \overline{bh}

$$FE = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 120° alrededor del eje que pasa por \overline{ag}

$$ABDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 120^\circ \text{ alrededor del eje que}$$

pasa por \overline{df}

$$ABED = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 240^\circ \text{ alrededor del eje que}$$

pasa por \overline{ce}

$$ACDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 240^\circ \text{ alrededor del eje que}$$

pasa por \overline{ag}

$$BCDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 240^\circ \text{ alrededor del eje que}$$

pasa por \overline{bh}

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por}$$

\overline{ae} y \overline{cg}

$$AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por}$$

\overline{af} y \overline{dg}

$$BD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por}$$

\overline{bf} y \overline{dh}

$$BE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{cf} \text{ y } \overline{de}$$

$$CE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{ah} \text{ y } \overline{bg}$$

$$CF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{be} \text{ y } \overline{ch}$$

$$AE = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 90^\circ \text{ alrededor del eje } x, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano } yz$$

$$BF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 90^\circ \text{ alrededor del eje } y, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano } xz$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 90^\circ \text{ alrededor del eje } z, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano } xy$$

$$ABC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 180^\circ \text{ alrededor del eje } z, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano } xy$$

$$ABCD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 270^\circ \text{ alrededor del eje } z, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano } xy$$

$$ABCE = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 270° alrededor del eje x , seguida de una reflexión respecto al plano yz

$$ABCF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 270° alrededor del eje y , seguida de una reflexión respecto al plano xz

$$ADE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje z , seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{cd} y \overline{ef}

$$ADF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje y , seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{cd} y \overline{ef}

$$AED = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje x , seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ae} y \overline{cg}

$$AFE = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje y , seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{ab} y \overline{gh}

$$BDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotación de 90° alrededor del eje x , seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por \overline{bc} y \overline{eh}

$$BED = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 90^\circ \text{ alrededor del eje } z, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{bc} \text{ y } \overline{eh}$$

$$CDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 90^\circ \text{ alrededor del eje } z, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{ab} \text{ y } \overline{gh}$$

$$ABCDE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 270^\circ \text{ alrededor del eje } x, \text{ seguida de una reflexión respecto al plano que pasa por } \overline{ad} \text{ y } \overline{fg}$$

La tabla de Ω_H aparece en el cuadro 3.5

Otra manera de contar las simetrías de Ω_H^+ es la siguiente: la identidad I , (1); las rotaciones de 90° , 180° y 270° alrededor de los tres ejes definidos por los centros de las caras opuestas $E, BC, BCE, F, AC, ACF, D, AB, ABD$, (9); las rotaciones de 180° alrededor de los seis ejes definidos por los centros de las aristas opuestas $ABE, ABF, ACD, ACE, BCD, BCF$, (6); las rotaciones de 120° y 240° alrededor de los cuatro ejes definidos por los vértices opuestos $DE, ABED, ABDE, DF, FE, ACDE, ED, BCDE$, (8).

Las simetrías de Ω_H^- , son las composiciones de las simetrías de Ω_H^+ con la simetría central ABC (envía (x, y, z) a $-(x, y, z)$). El orden de Ω_H es, por lo tanto, 48.

3.2.1. Algunos subgrupos de Ω_H

Algunos subgrupos de Ω_H son:

$$\text{De orden 2: } \langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle;$$

$$\langle AB \rangle, \langle AC \rangle, \langle BC \rangle;$$

$$\langle AD \rangle, \langle AF \rangle, \langle BD \rangle, \langle BE \rangle, \langle CE \rangle, \langle CF \rangle;$$

$\langle ABC \rangle;$

$\langle ABE \rangle, \langle ABF \rangle, \langle ACD \rangle, \langle ACE \rangle, \langle BCD \rangle, \langle BCF \rangle;$

$\langle DE \rangle, \langle DF \rangle, \langle FE \rangle, \langle ED \rangle.$

De orden 4: $\langle D \rangle, \langle E \rangle, \langle F \rangle;$

$\langle AE \rangle, \langle BF \rangle, \langle CD \rangle.$

De orden 6: $\langle ADF \rangle, \langle AFE \rangle, \langle AED \rangle, \langle BDE \rangle.$

De orden 8: $\langle A, D \rangle = \{I, A, B, D, AB, AD, BD, ABD\},$

$\langle A, F \rangle = \{I, A, C, F, AC, AF, CF, ACF\},$

$\langle B, E \rangle = \{I, B, C, E, BC, BE, CE, B\}.$

De orden 24: $\Omega_H^+.$

De orden 48: $\Omega_H.$

3.3. El grupo del octaedro (Ω_O)

Para nuestro estudio, construiremos un octaedro regular cuyos vértices están sobre los ejes x, y, z a una distancia entre cada uno de $\sqrt{2}$. Por tanto, los vértices a, b, c, d, e, f del octaedro regular centrado en el origen son:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$$

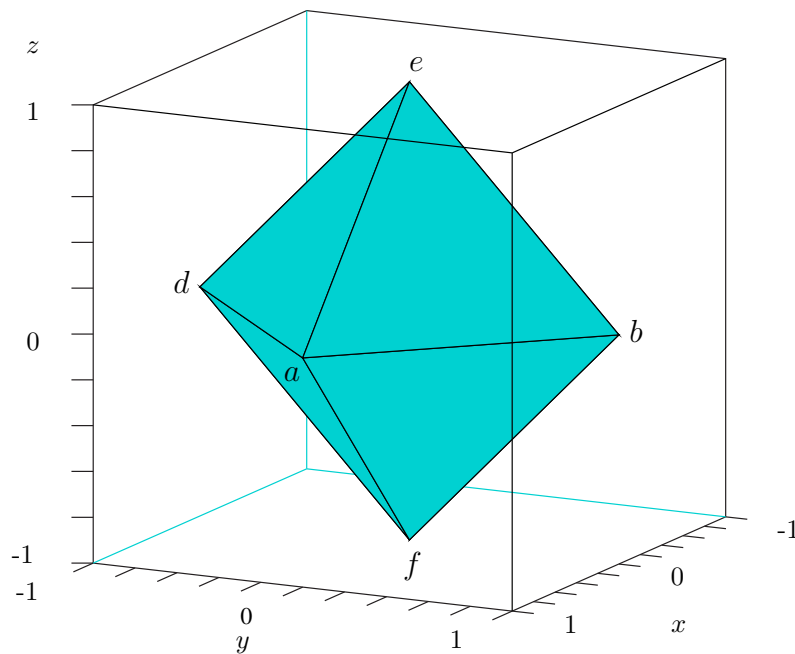


Figura 3.3: Octaedro regular

Al realizar el proceso para hallar las matrices generadoras del grupo del octaedro, nos damos cuenta que son las mismas del hexaedro, por lo tanto, si intercambiamos vértices por caras en la descripción de las transformaciones del hexaedro, nos resultan las transformaciones del octaedro.

Como los grupos del hexaedro y octaedro son iguales, toda la teoría desarrollada para el grupo del hexaedro, coincide con la del octaedro.

3.4. El grupo del dodecaedro (Ω_D)

Observando el dodecaedro, nos damos cuenta que sus vértices forman cuatro pentágonos, el de la base y el techo tienen el mismo radio y los internos tienen radio mayor a los iniciales, pero igual entre ellos.

Las coordenadas del pentágono regular con radio 1 centrado en el origen que forma el techo son:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) \\ \text{sen}(2\pi/5) \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} \cos(4\pi/5) \\ \text{sen}(4\pi/5) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las distancias entre estos puntos son:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2}: & \sqrt{(1 - \cos(2\pi/5))^2 + (\text{sen}(2\pi/5))^2} = 1,1756 \\ \overline{P_2P_3}: & \sqrt{(\cos(2\pi/5) - \cos(4\pi/5))^2 + (\text{sen}(2\pi/5) - \text{sen}(4\pi/5))^2} = 1,1756 \\ \overline{P_1P_3}: & \sqrt{(1 - \cos(4\pi/5))^2 + (\text{sen}(4\pi/5))^2} = 1,9021 \end{aligned}$$

Para hallar las coordenadas del pentágono interno superior, se busca r y h tal que

$$Q_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi/5) \\ r \text{sen}(2\pi/5) \\ h \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} r \cos(4\pi/5) \\ r \text{sen}(4\pi/5) \\ h \end{pmatrix}$$

y además, como son regulares, se debe tener que $\|Q_i - P_i\| = 1,1756$ y $\|Q_i - Q_{i+1}\| = 1,9021$

También, la distancia entre Q_1 y Q_2 debe ser la distancia de P_1 a P_3 es decir:

$$\sqrt{(1 - \cos(4\pi/5))^2 + (\text{sen}(4\pi/5))^2} = r \sqrt{(1 - \cos(2\pi/5))^2 + (\text{sen}(2\pi/5))^2},$$

luego $r = 1,618$.

h la calculamos utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(1,1756)^2 - (0,618)^2} = 1,0001$$

Vienen ahora los R' s, vértices del pentágono interno inferior, los cuales tiene el mismo radio pero están desplazados 36°

$$R_1 = \begin{pmatrix} r \cos(\pi/5) \\ r \operatorname{sen}(\pi/5) \\ h + j \end{pmatrix},$$

cuya distancia a Q_1 deberá ser 1,1756 es decir:

$$\sqrt{r^2 (1 - \cos(\pi/5))^2 + r^2 (\operatorname{sen}(\pi/5))^2 + j^2} = 1,1756, \text{ entonces } j = 0,61812$$

Por lo anterior, las distancias entre el origen y cada pentágono son:

$$h_1 = 0,61812/2 = 0,30906 \quad (\text{Pentágono interno superior})$$

$$h_2 = 0,30906 + h = 1,3092 \quad (\text{Pentágono del techo})$$

$$s_1 = -h_1 \quad (\text{Pentágono interno inferior})$$

$$s_2 = -h_2 \quad (\text{Pentágono de la base})$$

Los puntos del dodecaedro serán de la forma:

$$f(k, n, m) = \begin{pmatrix} (n + (1 - n)r) \cos(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ (n + (1 - n)r) \operatorname{sen}(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ (-1)^m (j/2 + nh) \end{pmatrix},$$

donde n y m son 0 ó 1, mientras k va de 0 a 4.

$$n = 0, f(k, 0, m) = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ r \operatorname{sen}(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ (-1)^m j/2 \end{pmatrix}$$

se obtienen los pentágonos internos.

$$n = 1, f(k, 1, m) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ \operatorname{sen}(2\pi k/5 + m(\pi/5)) \\ (-1)^m (j/2 + h) \end{pmatrix}$$

se obtienen los pentágonos base, con $m = 1$ y techo, con $m = 0$.

Los puntos $f(k, 1, 0)$ forman el pentágono del techo $\{p, q, r, s, t\}$, los $f(k, 1, 1)$ forman el pentágono base $\{a, b, c, d, e\}$, los $f(k, 0, 1)$ forman el pentágono interno inferior $\{g, i, k, m, o\}$ y los $f(k, 0, 0)$ forman el pentágono interno superior $\{f, h, j, l, n\}$.

Por lo tanto, los vértices del dodecaedro centrado en el origen son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,80902, -0,58779, -1,3092), (0,80902, 0,58779, -1,3092), \\ (-0,30902, -0,95106, -1,3092), (-1, 0, -1,3092), \\ (-0,30902, -0,95106, -1,30906), (1,309, -0,95104, -0,30906), \\ (1,618, 0, 0,30906), (1,309, 0,95104, -0,30906), \\ (0,49999, 1,5388, 0,30906), (-0,49999, 1,5388, -0,30906), \\ (-1,3090, 0,95104, 0,30906), (-1,618, 0, -0,30906), \\ (-1,309, -0,95104, 0,30906), (-0,49999, -1,5388, -0,30906), \\ (0,49999, -1,5388, 0,30906), (1, 0, 1,30906), \\ (0,30902, 0,95106, 1,3092), (-0,80902, 0,58779, 1,3092), \\ (-0,80902, -0,58779, 1,3092), (0,30902, -0,95106, 1,3092) \end{array} \right\}$$

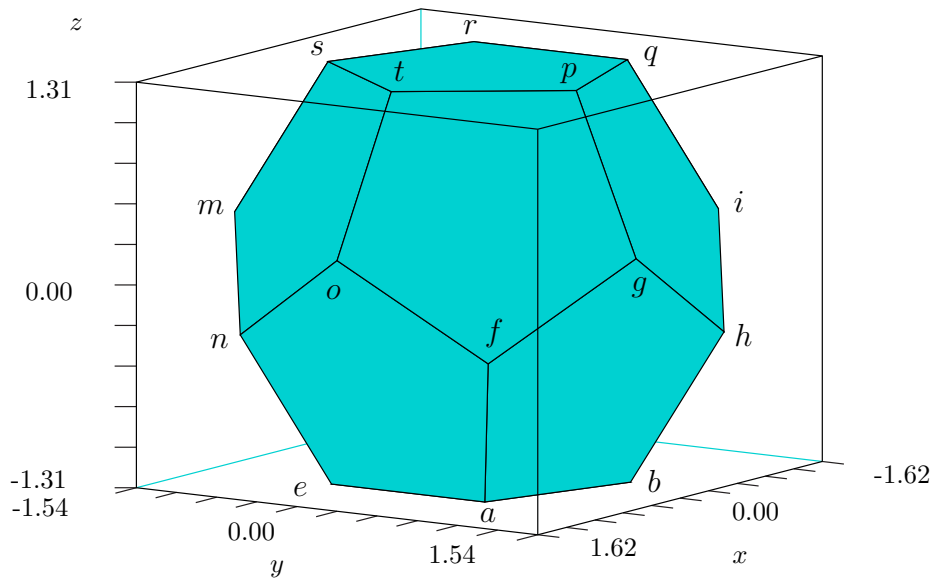


Figura 3.4: Dodecaedro regular

Las matrices generadoras son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{reflexión respecto al plano } xz$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,30901 & -0,95105 & 0 \\ 0,95105 & 0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 72^\circ \text{ alrededor del eje } z$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,80901 & 0,58778 & 0 \\ 0,58779 & -0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 180^\circ \text{ alrededor del eje que pasa por los puntos medios de } \overline{gh} \text{ y } \overline{lm}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,94722 & -0,16245 & 0,27636 \\ 0,16247 & -0,5 & -0,85051 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \quad \text{rotación de } 120^\circ \text{ alrededor del eje que pasa por } \overline{gl}$$

Debido a la gran cantidad de matrices que conforman el grupo del icosaedro, se pondrán en el apéndice A.3 y la tabla podrá realizarla quien esté interesado con el `script` apéndice en A.2.

Otra manera de contar las simetrías de Ω_D^+ es la siguiente: la identidad $\{I\}$, (1); las rotaciones de 72° , 144° , 216° y 288° alrededor de los seis ejes definidos por los centros de las caras opuestas $\{B, BB, BBB, ABA, DDC, CBDC, BDD, CD, DDBD, CDBC, BBDD, BDC, DCD, DB, ABDA, CBD, CDD, BD, ADBA, DC, BDBC, BBB, DDBB, CBDB\}$, (24); las de 180° alrededor de los quince ejes definidos por los por los centros de las aristas opuestas $\{BCDB, BBBCD, BBBDC, BBDCD, CDBB, BDDBB, BBDD, DBB, BDB, BBD, CB, C, BC, BBC, CBB\}$, (15); las rotaciones de 120° y 240° alrededor de los diez ejes definidos por los vértices opuestos $\{ABCD, CDB, DDBC, BCD, CBBD, BBDC, BDCD, DBD, BCDD, DBC, ABAD, DDB, D, DD, CDC, BDD, BCDC, BADBA, DBCD, ABDAB\}$, (20).

Las simetrías de Ω_D^- son la composición de las simetrías de Ω_D^+ con la simetría A de determinante -1 . El orden de Ω_D es, por lo tanto, 120.

3.4.1. Algunos subgrupos de Ω_D

Algunos subgrupos de Ω_D son:

- De orden 2: los generados por las matrices que son rotaciones de 180° alrededor del eje que pasa por los puntos medios de aristas opuestas;
 - los generados por las reflexiones respecto al origen o respecto al plano definido por aristas opuestas.
- De orden 3: los generados por las rotaciones de 120° y 240° alrededor del eje que pasa por los vértices opuestos.
- De orden 5: los generados por las rotaciones de 72° , 144° , 216° y 288° alrededor del eje que pasa por los centros de caras opuestas.
- De orden 6: $\langle ABD \rangle$, $\langle ADB \rangle$, $\langle BAD \rangle$.

De orden 10: $\langle ABC \rangle, \langle BCA \rangle, \langle CAD \rangle$.

De orden 60: Ω_D^+ .

De orden 120: Ω_D .

3.5. El grupo del icosaedro (Ω_I)

Para construir el icosaedro, vamos a hacer coincidir el eje z , con el segmento que comunica los vértices a y l . Mirando desde la parte positiva del eje z , vemos que los vértices $\{b, c, d, e, f\}$ y $\{g, h, i, j, k\}$ forman pentágonos regulares y sus coordenadas en el plano xy estarían dadas por

$$\{(1, 0), (\cos 72, \text{sen } 72), (-\cos 36, \text{sen } 36), (-\cos 36, -\text{sen } 36), (\cos 72, -\text{sen } 72)\}$$

$$\{(\cos 36, -\text{sen } 36), (\cos 36, \text{sen } 36), (-\cos 72, \text{sen } 72), (-1, 0), (-\cos 72, -\text{sen } 72)\}$$

Las aristas del icosaedro miden $2 \text{sen } 36$ y la altura de los triángulos equiláteros que conforman las caras es $\cos 36$, entonces, construyendo triángulos y utilizando funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, deducimos que la distancia entre los pentágonos es $v = \cos(\arccos(\frac{1}{2\text{sen } 36}) - 18) \cos 36$ y la distancia del plano xy a los puntos a y l es $w = 2 \text{sen}(\cos^{-1}(\frac{1}{2\text{sen } 36})) \text{sen } 36$.

Por lo tanto, el primer pentágono se debe bajar $\frac{v}{2}$ sobre el eje z , el segundo se debe subir la misma distancia, el vértice a se debe bajar $\frac{v}{2} + w$ y el l subir lo mismo.

Los vértices del icosaedro centrado en el origen son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 0, -1,011), (1, 0, -0,39297), (0,30902, 0,95106, -0,39297), \\ (-0,80902, 0,58779, -0,39297), (-0,80902, -0,58779, -0,39297), \\ (0,30902, -0,95106, -0,39297), (0,80902, -0,58779, 0,39297), \\ (0,80902, 0,58779, 0,39297), (-0,30902, 0,95106, 0,39297), \\ (-1, 0, 0,39297), (-0,30902, -0,95106, 0,39297), (0, 0, 1,011) \end{array} \right\}$$

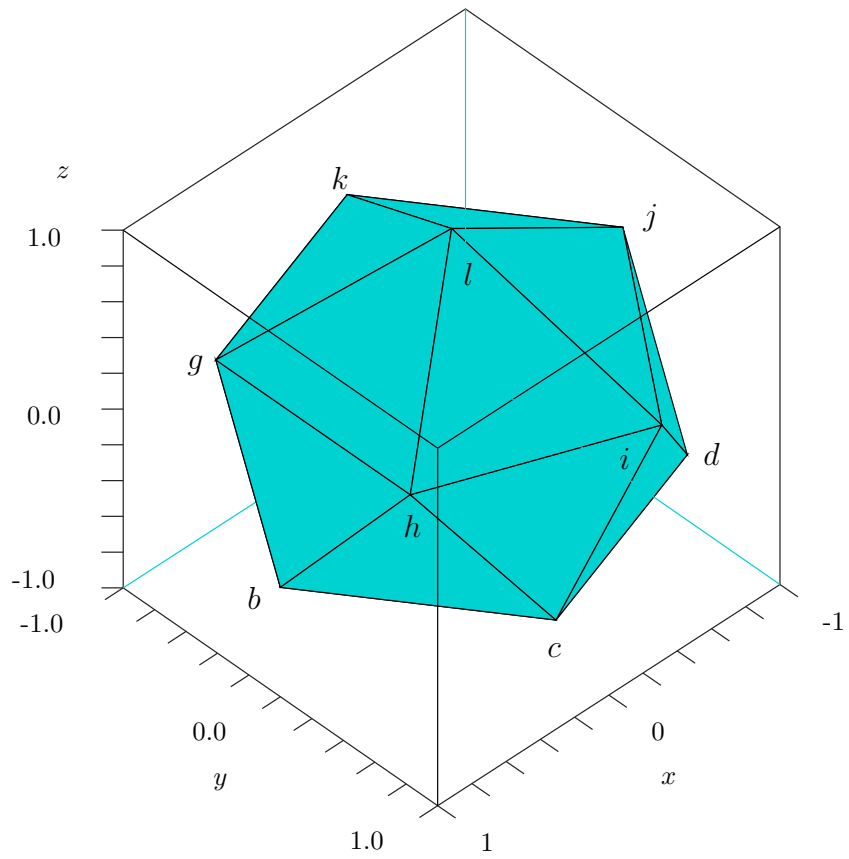


Figura 3.5: Icosaedro regular

Al igual que $\Omega_H = \Omega_O$, aquí tenemos que $\Omega_D = \Omega_I$, intercambiando vértices por caras.

3.6. El Omnipoliedro

Seguramente muy pocas personas han oído hablar del **Omnipoliedro**. Esta palabra significa todos los poliedros, y recibe este nombre porque está formado por el armazón de los cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

La construcción se realiza de forma que los cinco poliedros regulares, están inscritos uno dentro de otro. En el interior se encuentra el *octaedro*; sus vértices se sitúan en el centro de las aristas del *tetraedro*. Los cuatro vértices del tetraedro coinciden con otros tantos del *cubo*. Las aristas del cubo se encuentran sobre las caras del *dodecaedro*, y por último, el *icosaedro* proporciona rigidez al dodecaedro cuando las aristas de ambos se cortan en los puntos medios.

Mi idea inicial era caracterizar su grupo de isometrías, pero creo que es mejor dejarlo como una tarea para quienes hayan leído este trabajo y tengan la inquietud de saber si coincide o no con algún Ω y en caso negativo, ¿cuál es su grupo de simetrías?

Lo que si puedo adelantar es la medida de las aristas de cada poliedro para que se llegue a la construcción final. En [6] se puede encontrar programas para la construcción de los poliedros en Cabri, al igual que las medidas para la construcción del Omnipoliedro que se encuentra en el Tossal de Alicante (ver figura 3.6):



Figura 3.6: Omnipoliedro

Las dimensiones para realizar el Omnipoliedro de Alicante son:

Poliedro	Número de barras	Longitud de la arista
Tetraedro	6	2,36 m
Cubo	12	1,67 m
Octaedro	12	1,18 m
Icosaedro	30 m	1,67
Dodecaedro	30	1,03 m

“...Algunos de los cálculos para que cada poliedro encaje en el siguiente no son complicados, aplicar el teorema de Pitágoras o tener alguna idea feliz, son suficientes para el octaedro, el tetraedro y el cubo. Para los dos poliedros que van por el exterior: el dodecaedro y el icosaedro hay que aplicar la proporción áurea, concepto que ha sido utilizado por científicos y artistas de todas las épocas...”

Espero que el grupo de cada uno de los poliedros proporcione sugerencias importantes para lograr este objetivo.

Apéndice A

Scripts en scilab

A.1. Script para hallar el grupo

Script en *Scilab* para hallar el grupo de simetrías de los polígonos y poliedros.

```
//script grupotetra.sce para generar el grupo del tetraedro
```

```
clear
I=[ 1  0  0;
    0  1  0;
    0  0  1];
A=[ 1/2      -1/6*sqrt(3)  -1/3*sqrt(6);
    -1/6*sqrt(3)  5/6      -1/3*sqrt(2);
    -1/3*sqrt(6)  -1/3*sqrt(2)  -1/3];
B=[ 1/2      1/6*sqrt(3)   1/3*sqrt(6);
    1/6*sqrt(3)  5/6      -1/3*sqrt(2);
    1/3*sqrt(6)  -1/3*sqrt(2)  -1/3];
C=[-1  0  0;
    0  1  0;
    0  0  1];
D=[ 1  0      0;
    0  1/3    2/3*sqrt(2);
    0  2/3*sqrt(2)  -1/3];
```

```

E=[ 1/2          -1/2*sqrt(3)  0;
    -1/2*sqrt(3) -1/2         0;
     0           0           1];
F=[ 1/2          1/2*sqrt(3)  0;
    1/2*sqrt(3) -1/2         0;
     0           0           1];
gene=list(A,B,C,D,E,F);
productos=list();
m=1;
for i=1:length(gene)
    for j=1:length(gene)
        productos(m)=gene(i)*gene(j);
        m=m+1;
    end
end for i=1:length(gene)
    for j=1:length(gene)
        for k=1:length(gene)
            productos(m)=gene(i)*gene(j)*gene(k);
            m=m+1;
        end
    end
end
grupo=list(I,A,B,C,D,E,F);
m=length(grupo)+1;
for i=1:length(productos)
    clave=1;
    for j=1:length(grupo)
        if round(10^5*productos(i))/(10^5)==...
            round(10^5*grupo(j))/(10^5) then
            clave=0;
        end
    end
    if clave==1 then
        grupo(m)=productos(i);
        m=m+1;
    end
end save('D:\Doc_TeX\Angy\Poliedros\grupotetra.dat',grupo);
disp('El tamaño del grupo es') length(grupo)

```

A.2. Script para la tabla del grupo

Script para realizar la tabla del grupo de simetrías.

```
//script tablatetra.sce para generar la tabla del grupo
//para el tetraedro

lvector=['I','A','B','C','D','E','F','AB','AC',...
'AD','AE','AF','BD','BE','BF','CD','CE','CF',...
'ABD','ABE','ABF','ACD','ACE','ACF'];
for i=1:length(grupo)
  for j=1:length(grupo)
    for k=1:length(grupo)
      if round(10^5*grupo(i)*grupo(j))/(10^5)==...
          round(10^5*grupo(k))/(10^5) then
        matriz(i,j)=k;
        lmatriz(i,j)=lvector(k);
      end
    end
  end
end
disp('La matriz que representa la tabla del grupo escrita en
comandos TeX es:')
texprint(lmatriz)
```

A.3. Matrices de Ω_D

En este apéndice se encuentran las 120 matrices que conforman el grupo del dodecaedro. Las primeras 60 (sacando la matriz A) equivalen a las rotaciones que conforman Ω_D^+ y las 60 restantes, Ω_D^- .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,30901 & -0,95105 & 0 \\ 0,95105 & 0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,80901 & 0,58778 & 0 \\ 0,58779 & -0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 0,94722 & -0,16245 & 0,27636 \\ 0,16247 & -0,5 & -0,85051 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} & BB &= \begin{pmatrix} -0,80901 & -0,58777 & 0 \\ 0,58777 & -0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
BBB &= \begin{pmatrix} -0,80899 & 0,58778 & 0 \\ -0,58778 & -0,80899 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & ABA &= \begin{pmatrix} 0,30901 & 0,95105 & 0 \\ -0,95105 & 0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
BC &= \begin{pmatrix} -0,30903 & 0,95104 & 0 \\ 0,95104 & 0,30902 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & BD &= \begin{pmatrix} 0,13818 & 0,42533 & 0,89428 \\ 0,95106 & -0,309 & 0 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
CB &= \begin{pmatrix} 0,809 & -0,58778 & 0 \\ -0,58778 & -0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & CD &= \begin{pmatrix} 0,86181 & -0,42531 & -0,27633 \\ 0,42533 & 0,30902 & 0,85051 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
DB &= \begin{pmatrix} 0,1382 & -0,95105 & 0,27636 \\ -0,42532 & -0,30902 & -0,85051 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & DC &= \begin{pmatrix} 0,67082 & 0,68818 & -0,27636 \\ -0,16246 & 0,5 & 0,85051 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
DD &= \begin{pmatrix} 0,94723 & 0,16247 & 0,27635 \\ -0,16245 & -0,49997 & 0,85052 \\ 0,27644 & -0,85076 & -0,44718 \end{pmatrix} & BBC &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
BBD &= \begin{pmatrix} -0,8618 & 0,42531 & 0,27632 \\ 0,42531 & 0,30902 & 0,85051 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} & BCD &= \begin{pmatrix} -0,13820 & -0,42532 & -0,89427 \\ 0,95105 & -0,309 & 0 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BDB &= \begin{pmatrix} 0,44721 & 0 & 0,89428 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & BDC &= \begin{pmatrix} 0,36179 & -0,26287 & -0,89428 \\ 0,58779 & 0,80900 & 0 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BDD &= \begin{pmatrix} 0,44720 & 0,5257 & -0,72349 \\ 0,85066 & 0 & 0,52564 \\ 0,27644 & -0,85076 & -0,44718 \end{pmatrix} & CBB &= \begin{pmatrix} -0,30902 & -0,95103 & 0 \\ -0,95104 & 0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
CBD &= \begin{pmatrix} 0,6708 & 0,16247 & 0,72349 \\ -0,68819 & 0,49999 & 0,52563 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & CDB &= \begin{pmatrix} -0,13819 & -0,95105 & -0,27633 \\ 0,42532 & -0,30902 & 0,85051 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
CDC &= \begin{pmatrix} 0,44722 & 0,85064 & 0,27633 \\ 0,52573 & 0 & -0,85051 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & CDD &= \begin{pmatrix} 0,67083 & -0,16244 & 0,72348 \\ 0,68819 & 0,49998 & -0,52565 \\ -0,27644 & 0,85076 & 0,44718 \end{pmatrix} \\
DBB &= \begin{pmatrix} -0,86179 & -0,42532 & 0,27636 \\ -0,42532 & 0,30901 & -0,85051 \\ 0,27642 & -0,85075 & -0,44722 \end{pmatrix} & DBC &= \begin{pmatrix} -0,44721 & 0,85064 & -0,27636 \\ -0,52573 & 0 & 0,85051 \\ 0,72368 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
DBD &= \begin{pmatrix} 0,0528 & 0,68819 & 0,72348 \\ -0,68819 & -0,49998 & 0,52565 \\ 0,72370 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & DCD &= \begin{pmatrix} 0,67083 & -0,68818 & -0,27632 \\ 0,16246 & 0,49997 & -0,85052 \\ 0,72371 & 0,52581 & 0,44719 \end{pmatrix} \\
DDB &= \begin{pmatrix} 0,44721 & -0,85066 & 0,27635 \\ -0,52570 & 0 & 0,85052 \\ -0,72370 & -0,5258 & -0,44718 \end{pmatrix} & DDC &= \begin{pmatrix} 0,86181 & 0,42532 & -0,27635 \\ -0,4253 & 0,309 & -0,85052 \\ -0,27643 & 0,85076 & 0,44718 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ABAD &= \begin{pmatrix} 0,44722 & -0,52572 & -0,72348 \\ -0,85065 & 0 & -0,52565 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} & ABDA &= \begin{pmatrix} 0,13818 & -0,42533 & 0,89428 \\ -0,95106 & -0,309 & 0 \\ 0,27643 & -0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ADBA &= \begin{pmatrix} 0,1382 & 0,95105 & 0,27636 \\ 0,42532 & -0,30902 & 0,85051 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & BBBD &= \begin{pmatrix} -0,67079 & -0,16247 & -0,72349 \\ -0,68820 & 0,49998 & 0,52561 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BBCD &= \begin{pmatrix} -0,9472 & 0,16245 & -0,27635 \\ 0,16245 & -0,49998 & -0,85049 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & BBDC &= \begin{pmatrix} -0,44722 & -0,85063 & -0,27632 \\ 0,52572 & 0 & -0,85051 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BBDD &= \begin{pmatrix} -0,67083 & 0,16243 & -0,72347 \\ 0,68817 & 0,49997 & -0,52565 \\ 0,27644 & -0,85076 & -0,44718 \end{pmatrix} & BCDB &= \begin{pmatrix} -0,4472 & 0 & -0,89427 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BCDC &= \begin{pmatrix} -0,3618 & 0,26286 & 0,89427 \\ 0,58778 & 0,80900 & 0 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & BCDD &= \begin{pmatrix} -0,44721 & -0,52570 & 0,72348 \\ 0,85065 & 0 & 0,52564 \\ -0,27644 & 0,85076 & 0,44718 \end{pmatrix} \\
BDBC &= \begin{pmatrix} 0,3618 & 0,26285 & -0,89428 \\ -0,58778 & 0,80901 & 0 \\ 0,72368 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & BDCD &= \begin{pmatrix} 0,0528 & -0,68815 & 0,72350 \\ 0,68820 & -0,50000 & -0,52561 \\ 0,72371 & 0,52581 & 0,44719 \end{pmatrix} \\
BDDB &= \begin{pmatrix} 0,63816 & -0,26286 & -0,72349 \\ 0,26288 & -0,80902 & 0,52564 \\ -0,72370 & -0,5258 & -0,44718 \end{pmatrix} & CBBD &= \begin{pmatrix} -0,44722 & 0,52571 & 0,72346 \\ -0,85064 & 0 & -0,52565 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
CBDB &= \begin{pmatrix} 0,3618 & -0,58776 & 0,72349 \\ 0,26286 & 0,80901 & 0,52563 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} & CBDC &= \begin{pmatrix} 0,63818 & 0,26285 & -0,72349 \\ -0,26287 & -0,809 & -0,52563 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
CDBB &= \begin{pmatrix} -0,94720 & -0,16246 & -0,27633 \\ -0,16246 & -0,49999 & 0,85051 \\ -0,27642 & 0,85075 & 0,44722 \end{pmatrix} & CDBC &= \begin{pmatrix} -0,67081 & 0,68818 & 0,27633 \\ 0,16245 & 0,49999 & -0,85051 \\ -0,72368 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
DBCD &= \begin{pmatrix} -0,36180 & -0,58779 & -0,72348 \\ -0,26287 & 0,80898 & -0,52566 \\ 0,89454 & 0 & -0,4472 \end{pmatrix} & DDBB &= \begin{pmatrix} -0,67082 & -0,68819 & 0,27635 \\ -0,16245 & 0,49996 & 0,85052 \\ -0,72369 & 0,52579 & -0,44718 \end{pmatrix} \\
DDBC &= \begin{pmatrix} -0,13821 & 0,95105 & -0,27635 \\ -0,42530 & -0,30899 & -0,85052 \\ -0,89454 & 0 & 0,44718 \end{pmatrix} & DDBD &= \begin{pmatrix} 0,36179 & 0,58778 & 0,72350 \\ -0,26284 & 0,80899 & -0,52565 \\ -0,89454 & 0 & 0,44719 \end{pmatrix} \\
ABCD A &= \begin{pmatrix} -0,13820 & 0,42532 & -0,89427 \\ -0,95105 & -0,309 & 0 \\ -0,27643 & 0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & ABDAB &= \begin{pmatrix} -0,36181 & -0,26285 & 0,89428 \\ -0,58776 & 0,80902 & 0 \\ -0,72370 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BADBA &= \begin{pmatrix} -0,36179 & 0,58778 & -0,72348 \\ 0,26287 & 0,80901 & 0,52565 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & BBBDC &= \begin{pmatrix} -0,63818 & -0,26284 & 0,72349 \\ -0,26287 & -0,80900 & -0,52561 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BBDCD &= \begin{pmatrix} -0,63820 & 0,26288 & 0,72345 \\ 0,26286 & -0,80897 & 0,52566 \\ 0,72371 & 0,52581 & 0,44719 \end{pmatrix} & BBDD B &= \begin{pmatrix} -0,0528 & 0,68819 & -0,72347 \\ 0,68815 & -0,49999 & -0,52565 \\ -0,72370 & -0,5258 & -0,44718 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BDDDB &= \begin{pmatrix} -0,0528 & -0,68815 & -0,72349 \\ -0,68818 & -0,5 & 0,52564 \\ -0,72369 & 0,52579 & -0,44718 \end{pmatrix} & AB &= \begin{pmatrix} 0,30901 & -0,95105 & 0 \\ -0,95105 & -0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
AC &= \begin{pmatrix} 0,80901 & 0,58778 & 0 \\ -0,58779 & 0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & AD &= \begin{pmatrix} 0,94722 & -0,16245 & 0,27636 \\ -0,16247 & 0,5 & 0,85051 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 0,30901 & 0,95105 & 0 \\ 0,95105 & -0,30901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & CA &= \begin{pmatrix} 0,80901 & -0,58778 & 0 \\ 0,58779 & 0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
DA &= \begin{pmatrix} 0,94722 & 0,16245 & 0,27636 \\ 0,16247 & 0,5 & -0,85051 \\ 0,27643 & -0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} & ABB &= \begin{pmatrix} -0,80901 & -0,58777 & 0 \\ -0,58777 & 0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
ABC &= \begin{pmatrix} -0,30903 & 0,95104 & 0 \\ -0,95104 & -0,30902 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & ABD &= \begin{pmatrix} 0,13818 & 0,42533 & 0,89428 \\ -0,95106 & 0,309 & 0 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ACD &= \begin{pmatrix} 0,86181 & -0,42531 & -0,27633 \\ -0,42533 & -0,30902 & -0,85051 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & ADB &= \begin{pmatrix} 0,1382 & -0,95105 & 0,27636 \\ 0,42532 & 0,30902 & 0,85051 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ADC &= \begin{pmatrix} 0,67082 & 0,68818 & -0,27636 \\ 0,16246 & -0,5 & -0,85051 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & BAD &= \begin{pmatrix} 0,44722 & -0,52572 & -0,72348 \\ 0,85065 & 0 & 0,52565 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BBA &= \begin{pmatrix} -0,80901 & 0,58777 & 0 \\ 0,58777 & 0,80901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & BCA &= \begin{pmatrix} -0,30903 & -0,95104 & 0 \\ 0,95104 & -0,30902 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
BDA &= \begin{pmatrix} 0,13818 & -0,42533 & 0,89428 \\ 0,95106 & 0,309 & 0 \\ 0,27643 & -0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} & CAD &= \begin{pmatrix} 0,67081 & 0,16247 & 0,72349 \\ 0,68821 & -0,49999 & -0,52563 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
CDA &= \begin{pmatrix} 0,86181 & 0,42531 & -0,27633 \\ 0,42533 & -0,30902 & 0,85051 \\ -0,27643 & 0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & DAB &= \begin{pmatrix} 0,44720 & -0,85065 & 0,27636 \\ 0,52573 & 0 & -0,85051 \\ -0,72370 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
DBA &= \begin{pmatrix} 0,1382 & 0,95105 & 0,27636 \\ -0,42532 & 0,30902 & -0,85051 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & DCA &= \begin{pmatrix} 0,67082 & -0,68818 & -0,27636 \\ -0,16246 & -0,5 & 0,85051 \\ 0,7237 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
ABBC &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & ABBD &= \begin{pmatrix} -0,8618 & 0,42531 & 0,27632 \\ -0,42531 & -0,30902 & -0,85051 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ABCD &= \begin{pmatrix} -0,13820 & -0,42532 & -0,89427 \\ -0,95105 & 0,309 & 0 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & ABDB &= \begin{pmatrix} 0,44721 & 0 & 0,89428 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ABDC &= \begin{pmatrix} 0,36179 & -0,26287 & -0,89428 \\ -0,58779 & -0,80900 & 0 \\ 0,7237 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & ABDD &= \begin{pmatrix} 0,44720 & 0,5257 & -0,72349 \\ -0,85066 & 0 & -0,52564 \\ 0,27644 & -0,85076 & -0,44718 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ACDB &= \begin{pmatrix} -0,13819 & -0,95105 & -0,27633 \\ -0,42532 & 0,30902 & -0,85051 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} & ACDC &= \begin{pmatrix} 0,44722 & 0,85064 & 0,27633 \\ -0,52573 & 0 & 0,85051 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ACDD &= \begin{pmatrix} 0,67083 & -0,16244 & 0,72348 \\ -0,68819 & -0,49998 & 0,52565 \\ -0,27644 & 0,85076 & 0,44718 \end{pmatrix} & ADBB &= \begin{pmatrix} -0,86179 & -0,42532 & 0,27636 \\ 0,42532 & -0,30901 & 0,85051 \\ 0,27642 & -0,85075 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
ADBC &= \begin{pmatrix} -0,44721 & 0,85064 & -0,27636 \\ 0,52573 & 0 & -0,85051 \\ 0,72368 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & ADBD &= \begin{pmatrix} 0,0528 & 0,68819 & 0,72348 \\ 0,68819 & 0,49998 & -0,52565 \\ 0,72370 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BADB &= \begin{pmatrix} -0,36179 & -0,58778 & -0,72348 \\ 0,26287 & -0,80901 & 0,52565 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} & BBAD &= \begin{pmatrix} -0,67081 & -0,16246 & -0,72348 \\ 0,68819 & -0,49999 & -0,52563 \\ 0,27643 & 0,85076 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BCAD &= \begin{pmatrix} -0,44723 & 0,52572 & 0,72347 \\ 0,85064 & 0 & 0,52565 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} & BCDA &= \begin{pmatrix} -0,13820 & 0,42532 & -0,89427 \\ 0,95105 & 0,309 & 0 \\ -0,27643 & 0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
BDAB &= \begin{pmatrix} -0,36181 & -0,26285 & 0,89428 \\ 0,58776 & -0,80902 & 0 \\ -0,72370 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & BDCA &= \begin{pmatrix} 0,36179 & 0,26287 & -0,89428 \\ 0,58779 & -0,80900 & 0 \\ 0,7237 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
CADB &= \begin{pmatrix} 0,3618 & -0,58777 & 0,72349 \\ -0,26285 & -0,80902 & -0,52563 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} & CADC &= \begin{pmatrix} 0,63819 & 0,26285 & -0,72349 \\ 0,26288 & 0,80901 & 0,52563 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
CDBA &= \begin{pmatrix} -0,13819 & 0,95105 & -0,27633 \\ 0,42532 & 0,30902 & 0,85051 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} & DABB &= \begin{pmatrix} -0,67083 & -0,68817 & 0,27636 \\ 0,16244 & -0,50000 & -0,85051 \\ -0,72368 & 0,52580 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
DABD &= \begin{pmatrix} 0,36178 & 0,58780 & 0,72348 \\ 0,26287 & -0,80898 & 0,52567 \\ -0,89455 & 0 & 0,44720 \end{pmatrix} & DBCA &= \begin{pmatrix} -0,44721 & -0,85064 & -0,27636 \\ -0,52573 & 0 & 0,85051 \\ 0,72368 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
DBDA &= \begin{pmatrix} 0,0528 & -0,68819 & 0,72348 \\ -0,68819 & 0,49998 & 0,52565 \\ 0,72370 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & ABBCD &= \begin{pmatrix} -0,9472 & 0,16245 & -0,27635 \\ -0,16245 & 0,49998 & 0,85049 \\ -0,27643 & -0,85076 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
ABBDD &= \begin{pmatrix} -0,67083 & 0,16243 & -0,72347 \\ -0,68817 & -0,49997 & 0,52565 \\ 0,27644 & -0,85076 & -0,44718 \end{pmatrix} & ABCDB &= \begin{pmatrix} -0,4472 & 0 & -0,89427 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,89453 & 0 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
ABCDC &= \begin{pmatrix} -0,3618 & 0,26286 & 0,89427 \\ -0,58778 & -0,80900 & 0 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & ABCDD &= \begin{pmatrix} -0,44721 & -0,52570 & 0,72348 \\ -0,85065 & 0 & -0,52564 \\ -0,27644 & 0,85076 & 0,44718 \end{pmatrix} \\
ABDDB &= \begin{pmatrix} 0,63816 & -0,26286 & -0,72349 \\ -0,26288 & 0,80902 & -0,52564 \\ -0,72370 & -0,5258 & -0,44718 \end{pmatrix} & ACDBB &= \begin{pmatrix} -0,94720 & -0,16246 & -0,27633 \\ 0,16246 & 0,49999 & -0,85051 \\ -0,27642 & 0,85075 & 0,44722 \end{pmatrix} \\
ACDBC &= \begin{pmatrix} -0,67081 & 0,68818 & 0,27633 \\ -0,16245 & -0,49999 & 0,85051 \\ -0,72368 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & BADBC &= \begin{pmatrix} -0,63819 & 0,26286 & 0,72348 \\ -0,26287 & 0,809 & -0,52565 \\ 0,72368 & 0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BADBD &= \begin{pmatrix} -0,63819 & -0,26284 & 0,72348 \\ 0,26286 & 0,809 & 0,52563 \\ 0,72370 & -0,52579 & 0,44722 \end{pmatrix} & BBADB &= \begin{pmatrix} -0,36180 & 0,58778 & -0,72348 \\ -0,26286 & -0,80900 & -0,52563 \\ 0,89453 & 0 & -0,44722 \end{pmatrix} \\
BCADC &= \begin{pmatrix} -0,0528 & -0,68819 & -0,72347 \\ 0,68818 & 0,49998 & -0,52565 \\ -0,7237 & 0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix} & CADBC &= \begin{pmatrix} -0,0528 & 0,68817 & -0,72349 \\ -0,68819 & 0,50001 & 0,52563 \\ -0,72368 & -0,52579 & -0,44722 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] FRALEIGH Jhon. *Álgebra Abstracta. Primer curso*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A, U.S.A, 1987.
- [2] *Curso de Estructuras Algebraicas*. Programa “Universidad Virtual”, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.
- [3] *Enciclopedia de las Matemáticas*. Editorial MIR Rubiños, S.A, Moscú-Madrid, 1860, Tomos 6 y 8, pág. 175, 266, 348, 358.
- [4] NEWMAN James. *SIGMA, el mundo de las Matemáticas*. Ediciones Grijalbo, S.A, 1994, Tomo 4, pág. 172-176.
- [5] REZENDE Jorge. Artículos sobre *Polyhedron puzzles* del “Boletim da Sociedade Portuguesa (SPM)”. Página web: http://gfm.cii.fc.ul.pt/Members/JR.pt_PT.html
- [6] Página web: <http://terra.es/personal5/maiteg.arnau/>