

**PARES POTENCIAL DENSIDAD PARA
MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE
DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES**

Fernando Cortés Serrano

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2014

**PARES POTENCIAL DENSIDAD PARA
MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE
DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES**

Fernando Cortés Serrano

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director: Dr. Guillermo Alfonso González Villegas

Co-Director: Dr. Jerson Iván Reina Medrano

Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2014

Índice general

Introducción	12
1 Construcción de Modelos de Galaxias	15
1.1 Introducción	15
1.2 Modelo general de las galaxias	16
1.2.1 Simetrías y componentes de los modelos	16
1.2.2 Movimiento en el plano meridional	18
1.3 Familia infinita de discos generalizados de Kalnajs	20
1.3.1 Modelos de discos delgados finitos	20
1.3.2 Discos generalizados de Kalnajs	23
1.3.3 Expresiones analíticas de los modelos	24
1.4 Modelos tipo Miyamoto-Nagai	26
1.4.1 Expansión multipolar del potencial gravitacional	26
1.4.2 Expresiones analíticas de los modelos	27
1.5 Modelo de disco delgado y halo	28

1.5.1	Densidad del disco y del halo	29
1.5.2	Curva de rotación	30
2	Modelos Particulares de Disco-Halo	32
2.1	Introducción	32
2.2	Modelo de halo $n = 0$ y modelo de disco $m = 1$	33
2.2.1	Razón entre la masa del halo y la masa del disco	34
2.2.2	Razón entre la constante a_h y la constante a	35
2.2.3	Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia	38
2.3	Modelo de halo $n = 0$ y modelo de disco $m = 2$	41
2.3.1	Razón entre la masa del halo y la masa del disco	43
2.3.2	Razón entre la constante a_h y la constante a	43
2.3.3	Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia	45
2.4	Modelo de halo $n = 1$ y modelo de disco $m = 1$	49
2.4.1	Razón entre la masa del halo y la masa del disco	51
2.4.2	Razón entre el término dipolar y el término monopolar	51
2.4.3	Razón entre la constante a_h y la constante a	54
2.4.4	Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia	54
	Conclusiones	60
	A Cálculo de la velocidad circular en $\eta = 0$	62

Bibliografía**64**

Índice de figuras

1.1	Componentes de una galaxia espiral	19
1.2	Coordenadas esferoidales oblatas	23
2.1	Razón entre la masa del halo y la masa del disco	38
2.2	Razón entre la constante a_h y la constante a	39
2.3	Razón entre b y a_h para $b/a_h > 1$	41
2.4	Razón entre b y a_h para $b/a_h \approx 1$	42
2.5	Razón entre b y a_h para $b/a_h < 1$	44
2.6	Razón entre la masa del halo y la masa del disco	46
2.7	Razón entre la constante a_h y la constante a	48
2.8	Razón entre b y a_h para $b/a_h > 1$	49
2.9	Razón entre b y a_h para $b/a_h \approx 1$	50
2.10	Razón entre b y a_h para $b/a_h < 1$	52
2.11	Razón entre la masa del halo y la masa del disco M_d	54
2.12	Razón entre la constante A_1 y la constante A_0	55

2.13	Razón entre la constante a_h y la constante a	57
2.14	Razón entre las constantes b y a_h para $b/a_h > 1$	58
2.15	Razón entre las constantes b y a_h para $b/a_h \approx 1$	59
2.16	Razón entre las constantes b y a_h para $b/a_h < 1$	61

Resumen

TÍTULO: PARES POTENCIAL DENSIDAD PARA MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES¹

AUTOR: CORTÉS SERRANO, Fernando².

PALABRAS CLAVES: Galaxias: masas y distribución de masa; Galaxias: cinemática, dinámica y rotación; Galaxias espirales: discos y halos.

DESCRIPCIÓN:

Se presenta una familia infinita de pares Potencial-Densidad para modelos de galaxias compuestos de discos delgados y halos esferoidales. Los modelos se obtienen expresando el potencial gravitacional como la superposición de dos componentes independientes, una correspondiente al disco galáctico y otra al halo esferoidal. La componente correspondiente al disco galáctico se obtiene considerando soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, expresadas en términos de productos de polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase. El potencial gravitacional generado por el halo esferoidal de materia se construye considerando una expansión multipolar del potencial y realizando una transformación tipo Miyamoto-Nagai en la variable z , de tal manera que el nuevo potencial es solución de la ecuación de Poisson y representa el potencial gravitacional del halo de materia.

Se propusieron modelos particulares para los potenciales gravitacionales del disco y el halo de materia. Conociendo los potenciales gravitacionales se obtuvieron expresiones analíticas, normalizadas, para la densidad superficial del disco, la densidad del halo de materia y las correspondientes expresiones para las curvas de rotación. A partir de éstas fue posible conocer los cambios en las curvas de rotación como consecuencia de la variación de las razones entre los parámetros del disco y el halo de materia.

¹Trabajo de grado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo Alfonso González Villegas (Director), Jerson Iván Reina Medrano (Co-Director).

Abstract

TITLE: POTENTIAL DENSITY PAIRS FOR GALAXY MODELS COMPOSED OF THIN DISKS AND SPHEROIDAL HALOES ³

AUTHOR: CORTES SERRANO, Fernando ⁴.

KEY WORDS: Galaxies: masses and distribution of mass; Galaxies: kinematic, dynamic and rotation; Spiral galaxies: discs and haloes.

DESCRIPTION:

We present an infinite family of potential-density pairs for galaxy models composed by thin disks and spheroidal haloes. The models are obtained by expressing the gravitational potential as the superposition of two independent components, one corresponding to the galactic disk and the other to the spheroidal halo. The component corresponding to the galactic disk is obtained by considering solutions of Laplace's equation in oblate spheroidal coordinates, expressed in terms of products of Legendre polynomials and Legendre functions of second class. The gravitational potential generated by the spheroidal halo of matter is built considering a multipole expansion potential and performing a transformation to the Miyamoto-Nagai type in the variable z , so that the new potential is solution of the Poisson equation and represents the gravitational potential of the matter halo.

Particular models for the gravitational potential of the disk and the halo of matter are proposed. Given the gravitational potential, we obtain analytical expressions for the surface density of the disk, the density of the halo of matter and the corresponding expressions for the rotation curves. From these it is possible to know the changes in rotation curves due to the variation of the ratios between the parameters of the disk and matter halo.

³Degree project.

⁴Faculty of science, School of physics, Guillermo A. González Villegas (Advisor), Jerson I. Reina Medrano (Co-Advisor).

Agradecimientos

- A Dios por haberme dotado de la fortaleza mental, la cual me ha permitido dar cumplimiento a esta etapa tan importante en mi vida.
- A mis padres por todo el apoyo incondicional y por su comprensión a través de mi proceso de formación académica.
- A mi tía por su comprensión, colaboración y apoyo incondicional durante este proceso.
- A la Universidad Industrial de Santander porque durante mi formación académica la he considerado como mi segundo hogar.
- A la Escuela de Física por representar a la ciencia más fundamental y maravillosa.
- A todos los profesores que han hecho parte de mi formación académica.
- Al profesor Guillermo A. González por haberme orientado de forma oportuna durante mi trabajo de grado.
- A todos los compañeros del Girg por sus consejos para el desarrollo de este trabajo.

Introducción

Actualmente, uno de los problemas más importantes en dinámica de galaxias es el de la determinación de la distribución de su masa con base en las observaciones de la rapidez circular o curva de rotación [Pierens & Huré, 2004], definida como la rapidez de las estrellas moviéndose en el plano galáctico en órbitas circulares alrededor del centro de la galaxia [Binney & Tremaine, 2011]. Si se asume un modelo particular para la composición de una galaxia, es posible obtener una expresión analítica para el potencial gravitacional de todo el sistema. A partir del potencial gravitacional se pueden obtener las expresiones correspondientes para la densidad superficial del disco galáctico, la densidad del halo de materia y la velocidad circular de rotación. El ajuste del modelo con la curva de rotación permite determinar completamente la distribución de masa de la galaxia [Binney & Tremaine, 2011].

Estrellas, nubes de gas, polvo y demás componentes de la materia de las galaxias espirales se agrupan de diversas maneras formando subestructuras en las cuales la materia está estratificada de diferentes modos. La descripción más aceptada de la composición de galaxias espirales es que una porción significativa de su masa está concentrada en un disco delgado, mientras que las otras contribuciones a la masa total de la galaxia vienen de un halo esferoidal de materia oscura, el bulbo central y un agujero negro central [Binney & Tremaine, 2011]. Dado que todas las componentes contribuyen al campo gravitacional de la galaxia, obtener modelos apropiados que incluyan los efectos de todas las partes es un problema de gran dificultad. Sin embargo, la contribución de cada parte está limitada a ciertas escalas de distancia, luego, en un modelo razonablemente realista no es necesario incluir la contribución de todas las componentes [Faber, 2006]. En particular, la influencia gravitacional del agujero negro central es apreciable sólo dentro de algunos parsecs alrededor del centro de la galaxia [Schodel *et al.*, 2002], así que ésta puede ser despreciada cuando se estudia la dinámica en el disco, o en regiones afuera del bulbo central. Mientras que el bulbo domina principalmente la región interna de la galaxia en unos pocos kiloparsecs. Entonces, las principales contribuciones al campo gravitacional de la galaxia, a gran escala, vienen del disco galáctico delgado y del halo de materia oscura [Faber, 2006].

Como se ha dicho anteriormente, es suficiente representar una galaxia por un modelo simple que tenga la misma estructura que la galaxia [Binney & Tremaine, 2011]. Existen varios modelos analíticos tridimensionales en la literatura para representar el campo gravitacional de diferentes tipos de galaxias y componentes galácticos. [Jaffe, 1983] y [Hernquist, 1990] presentaron modelos analíticos para galaxias esféricas y bulbos. Modelos tridimensionales para galaxias planas fueron obtenidos por [Miyamoto & Nagai, 1975] y [Satoh, 1980]. [de Zeeuw & Pfenniger, 1988] consideraron un conjunto de modelos elipsoidales apropiados para galaxias barradas. [Long & Murali, 1992] derivaron pares potencial densidad para una barra prolata y triaxial. [Gonzalez & Reina, 2006] encontraron una familia infinita de modelos analíticos adecuados para discos delgados de tamaño finito. [Ospina, 2006] construye modelos planos finitos para galaxias no axialmente simétricas. En el trabajo de [Paez, 2010] se obtienen modelos analíticos adecuados para regiones circunucleares de galaxias espirales barradas. [Salazar, 2010] construye una serie de modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en galaxias.

Las curvas de rotación de muchas galaxias espirales son aproximadamente planas en las regiones más lejanas a las que han sido observadas, a menudo un factor de dos o más veces el radio de la distribución estelar [Binney & Tremaine, 2011]. Por esta razón es importante construir modelos para galaxias espirales que incorporen diferentes componentes de materia y que a su vez describan el comportamiento de las curvas de rotación observadas. Los modelos descritos en el párrafo anterior tienen un énfasis en el planteamiento de pares potencial-densidad para distribuciones de materia con diversos tamaños y geometrías. Sin embargo, algunos de ellos no presentan el análisis correspondiente a las curvas de rotación. Dentro de los modelos que sí realizan este análisis se tiene: [Miyamoto & Nagai, 1975] quienes obtienen una expresión analítica para la curva de rotación cuyos parámetros permiten reproducir el aspecto de la curva observada de nuestra propia galaxia hasta los primeros 10 kiloparsecs aproximadamente, [Satoh, 1980] emplea la curva de rotación de la galaxia elíptica NGC 4697 junto con otros datos cinemáticos y fotométricos para obtener la masa de esta galaxia, [Hernquist, 1990] obtiene curvas de rotación adecuadas para bulbos donde se observa un comportamiento kepleriano de las curvas, [Gonzalez & Reina, 2006] obtienen curvas de rotación keplerianas para distribuciones discoidales de materia con las características particulares exigidas para tales discos en ese trabajo, [Salazar, 2010] obtiene curvas de rotación keplerianas para distribuciones de materia tridimensionales que van desde casi esféricas hasta discos.

En este trabajo de grado se construyen modelos para galaxias espirales, los cuales están caracterizados por poseer dos componentes: un disco delgado finito de materia y un halo de gran tamaño o un pequeño bulbo central, dependiendo el caso particular planteado. Los modelos se obtuvieron considerando el potencial gravitacional total co-

mo la superposición de las dos componentes independientes. El potencial gravitacional, generado por el halo esferoidal de materia o el bulbo, se construye considerando una expansión multipolar del potencial en coordenadas esféricas, que posteriormente debe ser expresado en coordenadas cilíndricas [Salazar, 2010]. Como este potencial es solución de la ecuación de Laplace es necesario realizar una transformación sobre la coordenada z [Miyamoto & Nagai, 1975] de manera que el nuevo potencial satisface la ecuación de Poisson y representa el potencial de la distribución de materia tridimensional. Para obtener el potencial gravitacional de la distribución de materia en forma de disco delgado finito, es necesario resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, cuya solución es una superposición de productos de polinomios de Legendre y funciones de Legendre de segunda clase. A partir de los potenciales gravitacionales particularmente planteados se obtuvieron expresiones analíticas para la densidad superficial del disco, la densidad del halo de materia y las correspondientes expresiones para las curvas de rotación. Utilizando las expresiones analíticas se realizó la manipulación de los parámetros del disco y del halo cambiando las razones entre éstos y observando los cambios ocurridos en la curva de rotación y en las distribuciones de materia. De esta manera se pudo obtener regiones planas en las curvas de rotación tanto en la parte interior al disco como en distancias mayores al radio del disco estelar y simultáneamente conocer la distribución de materia en el disco y en el halo.

Este trabajo se desarrolla en tres capítulos. El primer capítulo muestra las características que tiene el modelo general para representar galaxias. En el segundo capítulo se presenta el fundamento teórico de los diferentes modelos de galaxias y componentes galácticos, esenciales para desarrollar este trabajo como son la ley de gravitación de Newton, el potencial gravitacional, la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace y la ley de Gauss del campo gravitacional y finalmente la relación entre la rapidez circular y el potencial gravitacional asociada al movimiento en el plano meridional. Además se presenta el modelo de discos delgados finitos en $2D$ y la expansión multipolar del potencial para distribuciones tridimensionales de materia. También se dedica una sección al final de este mismo capítulo para presentar el modelo particular escogido para este trabajo, que consiste en la combinación de los dos modelos ya mencionados. En el tercer capítulo se muestra los resultados obtenidos, a través de las cantidades físicas de interés, para el modelo particular propuesto.

Capítulo 1

Construcción de Modelos de Galaxias

SECCIÓN 1.1

Introducción

A través de este capítulo se desarrolla los fundamentos de la teoría básica para construir modelos de galaxias.

En la sección 1.2 se hace una descripción de las características generales de una galaxia en relación con las grandes estructuras que la componen. Se establecen las expresiones generales para caracterizar estas estructuras como son: el potencial gravitacional y la densidad de materia. También se plantean las ecuaciones de movimiento asociadas a una partícula que se encuentra en un campo gravitacional y el problema es reducido al de una partícula que se mueve en una órbita circular.

En la sección 1.3 se presenta el modelo de discos delgados finitos axialmente simétricos, caracterizados por ser distribuciones de materia en dos dimensiones. Adicionalmente, estos discos tienen una densidad máxima en el centro que decrece monótonamente, a medida que el radio aumenta, hasta anularse en el borde, ya que el disco es de tamaño finito. Se muestran las expresiones físicas de interés como son: el potencial

gravitacional, la densidad superficial y la rapidez circular para algunos modelos de disco en particular.

La sección 1.4 presenta la expansión multipolar del potencial y la transformación propuesta en el artículo de [Miyamoto & Nagai, 1975]. A partir de estos potenciales se puede caracterizar distribuciones tridimensionales de materia que van desde formas esféricas hasta discoidales.

En la sección 1.5 se plantea el modelo utilizado en este trabajo de investigación. El modelo es la combinación de las distribuciones de materia analizadas en las secciones 1.3 y 1.4.

SECCIÓN 1.2

Modelo general de las galaxias

1.2.1 Simetrías y componentes de los modelos

Las galaxias son sistemas estelares compuestos de miles de millones de estrellas que forman diversas estructuras que varían en forma y tamaño como se observa en la figura 1.1. A menor escala se encuentran los agujeros supermasivos centrales, que no forman un sistema estelar, cuya influencia gravitacional es de unos pocos parsec alrededor del centro galáctico. De mayor tamaño se tiene las protuberancias centrales en forma de esferas o esferas achatadas, con influencia gravitacional en la región interna de las galaxias. Las estructuras visibles de mayor tamaño son los discos galácticos, observados a través de telescopios ópticos, que abarcan decenas de kiloparsecs. Finalmente, las estructuras de mayor tamaño, no observables a través de instrumentos que miden el espectro electromagnético, inferidas por sus efectos gravitacionales, entre ellas se encuentran los halos de materia oscura, ver [Binney & Tremaine, 2011; Schodel *et al.*, 2002].

Algunos de los modelos que se utilizan para representar galaxias consisten de distribuciones continuas de materia caracterizadas por una densidad $\rho(r)$ y un potencial gravitacional $\Phi(r)$. Las dos cantidades físicas se relacionan a través de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(r) = 4\pi G\rho(r). \quad (1.1)$$

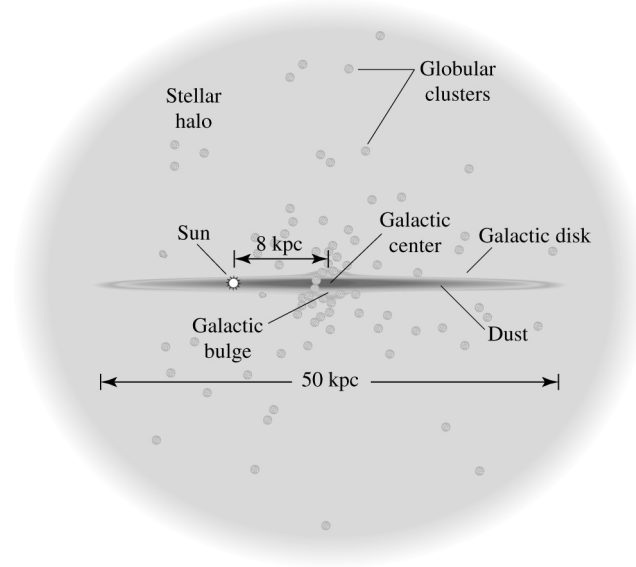


Figura 1.1: Componentes de una galaxia espiral (Tomado de [Carroll & Ostlie, 2007]).

Ésta es una ecuación diferencial que puede ser resuelta para $\Phi(r)$ dado $\rho(r)$, o viceversa, junto con una condición de frontera adecuada. Para obtener un modelo completo de una galaxia, se debe considerar las contribuciones de todas las componentes, tal que la distribución de materia estará dada por

$$\rho = \rho_{bh} + \rho_b + \rho_d + \rho_h + \dots, \quad (1.2)$$

donde ρ_{bh} , ρ_b , ρ_d y ρ_h son las densidades de materia del agujero negro central, la protuberancia central, el disco galáctico delgado y el halo de materia oscura, respectivamente. Así, el potencial gravitacional tendrá la forma general

$$\Phi = \Phi_{bh} + \Phi_b + \Phi_d + \Phi_h + \dots. \quad (1.3)$$

La contribución de cada componente está limitada a ciertas escalas de distancia, así que se puede construir modelos donde se considera la contribución de algunas componentes mientras se desprecia las demás.

El modelo general adoptado hace uso de dos simetrías: la simetría axial y la simetría de reflexión. La simetría axial implica la independencia del potencial respecto de la coordenada acimutal ϕ , $\Phi = \Phi(R, z)$, de las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) ; mientras que la simetría de reflexión establece que el potencial por arriba y por abajo del plano $z = 0$ debe ser igual

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \quad (1.4)$$

la cual implica que la componente normal del gradiente del potencial Φ , satisface la relación

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(R, -z) = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi(R, z). \quad (1.5)$$

1.2.2 Movimiento en el plano meridional

La ecuación general de movimiento de una partícula que se mueve dentro de un campo gravitacional, axialmente simétrico, es de la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi(R, z), \quad (1.6)$$

donde (R, z) son las coordenadas cilíndricas. Es necesario reescribir \mathbf{r} y $\nabla\Phi$ en términos de sus componentes paralelas para los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_R$, $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$, se tiene

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{e}}_R + z\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (1.7)$$

y

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z. \quad (1.8)$$

Partiendo de la Ec. (1.6) y utilizando la forma de la aceleración en coordenadas cilíndricas junto con el gradiente del potencial Φ (1.8), se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (1.9a)$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0, \quad (1.9b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (1.9c)$$

La Ec. (1.9b) expresa la conservación del momento angular respecto al eje z , en donde el momento angular con respecto al eje z queda definido por $L_z = R^2\dot{\phi}$. Las otras dos ecuaciones (1.9a) y (1.9c) describen el movimiento de las estrellas en el plano R y z , respectivamente.

Reemplazando $\dot{\phi}$ en la Ec. (1.9a) se tiene

$$\ddot{R} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\Phi + \frac{L_z^2}{2R^2}\right) \quad (1.10)$$

donde se define

$$\Phi_{eff} \equiv \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (1.11)$$

como el potencial efectivo. La órbita en tres dimensiones de las estrellas es el resultado de la combinación del movimiento sobre el plano meridional (R, z) y la rotación alrededor del eje z con rapidez angular $\dot{\phi} = L_z/R^2$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de R y z en términos del potencial efectivo, quedan expresadas en la forma

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R}, \quad (1.12a)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z}. \quad (1.12b)$$

Por esta razón, el movimiento tridimensional de una estrella en un potencial axialmente simétrico $\Phi(R, z)$, puede ser reducido a un movimiento en dos dimensiones sobre el plano meridional (R, z).

Por otro lado, es importante obtener el valor mínimo del potencial efectivo Φ_{eff} , de esta forma se obtiene la condición necesaria para que las órbitas sean circulares. En el mínimo del potencial se satisfacen las condiciones

$$\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R} = \frac{\partial\Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} = 0, \quad (1.13a)$$

$$\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z} = 0. \quad (1.13b)$$

La segunda condición Ec. (1.13b) se satisface en cualquier lugar del plano ecuatorial ($z = 0$), y la primera Ec. (1.13a) se satisface para un radio constante $R = R_0$, es decir

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R_0} = \frac{L_z^2}{R_0^3} = R_0\dot{\phi}^2. \quad (1.14)$$

La anterior es una ecuación para una órbita circular con la rapidez angular $\dot{\phi}$. Así, el mínimo del potencial efectivo se alcanza para un radio constante R_0 , en el cual la órbita circular tiene momento angular L_z . Definiendo la velocidad angular como $\dot{\phi} = V/R$ y teniendo en cuenta la condición dada por (1.14), la rapidez circular para cualquier radio, siempre y cuando la órbita sea circular, está dada en la forma

$$V^2 = R \frac{\partial\Phi}{\partial R}. \quad (1.15)$$

SECCIÓN 1.3

Familia infinita de discos generalizados de Kalnajs

1.3.1 Modelos de discos delgados finitos

Con el fin de obtener modelos de discos delgados finitos axialmente simétricos, se necesita encontrar soluciones de la ecuación de Laplace que representen el potencial externo de una fuente tipo disco delgado finito. De acuerdo con esto, se necesita resolver la ecuación de Laplace para un potencial axialmente simétrico, basado en el trabajo [Gonzalez & Reina, 2006]

$$\Phi(R, z)_{,RR} + \frac{\Phi(R, z)_{,R}}{R} + \Phi(R, z)_{,zz} = 0, \quad (1.16)$$

donde se utiliza la notación $\Phi(R, z)_{,RR} = \partial^2 \Phi(R, z) / \partial R^2$, (R, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Se impondrá que el potencial gravitacional tenga una simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$,

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \quad (1.17)$$

tal que la derivada normal del potencial, $\partial\Phi/\partial z$, satisface la relación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, z), \quad (1.18)$$

de acuerdo con el carácter atractivo del campo gravitacional. Se asume que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula en el plano $z = 0$, con el fin de obtener una distribución delgada de materia que represente el disco.

Dado un potencial $\Phi(R, z)$ con las propiedades mencionadas arriba, la densidad $\sigma(R)$ de la distribución superficial de materia puede ser obtenida usando la ley de Gauss junto con la condición Ec. (1.18),

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=0^+} \quad (1.19)$$

Para obtener una densidad superficial correspondiente a una distribución de materia tipo disco delgado finito, se impone las condiciones

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0; \quad R \leq a, \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0; \quad R > a, \quad (1.20b)$$

tal que la distribución de materia está restringida al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$.

Ahora se introduce las coordenadas esferoidales oblatas, cuya simetría se adapta de forma natural a la geometría del modelo. Estas coordenadas se relacionan con las coordenadas cilíndricas mediante

$$R = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \quad (1.21a)$$

$$z = a\xi\eta \quad (1.21b)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. El disco tiene coordenadas $\xi = 0$, $0 \leq \eta^2 < 1$.

Utilizando la transformación de coordenadas 1.21 se obtiene la ecuación de la elipse

$$\frac{R^2}{a^2(1 + \xi^2)} + \frac{z^2}{a^2\xi^2} = 1, \quad (1.22)$$

también se obtiene la ecuación de la hipérbola

$$\frac{R^2}{a^2(1 - \eta^2)} - \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1. \quad (1.23)$$

Estas elipses e hipérbolas tienen un foco en común que está dado por el valor de la constante a . En la figura 1.2 se muestra un conjunto de elipses Ec. (1.22) e hipérbolas Ec. (1.23) confocales, generadas mediante el software de cálculo Mathematica.

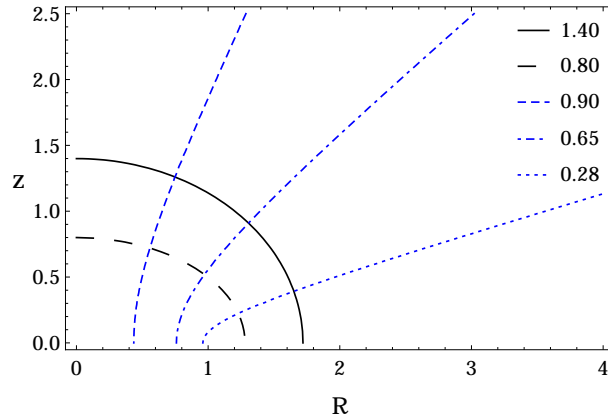


Figura 1.2: Coordenadas esferoidales oblatas. Las coordenadas constantes $\eta = \{1.40, 0.80\}$ y $\xi = \{0.90, 0.65, 0.28\}$ corresponden a hipérbolas y elipses confocales, respectivamente.

En términos de las coordenadas esferoidales oblatas, la ecuación de Laplace puede ser escrita como:

$$\left[(1 + \xi^2) \Phi_{d,\xi} \right]_{,\xi} + \left[(1 - \eta^2) \Phi_{d,\eta} \right]_{,\eta} = 0. \quad (1.24)$$

Se necesita encontrar soluciones de la ecuación de Laplace que sean funciones pares de η y con las condiciones de frontera

$$\Phi_{,\xi}(0, \eta) = F(\eta), \quad (1.25a)$$

$$\Phi_{,\xi}(\xi, 0) = 0, \quad (1.25b)$$

en el que la función $F(\eta)$ está definida en la sección 2.3.2. La solución a la ecuación Ec. (1.24) tiene la forma [Gonzalez & Reina, 2006]

$$\Phi_d(\xi, \eta) = - \sum_{l=0}^m C_{2l} q_{2l}(\xi) P_{2l}(\eta), \quad (1.26)$$

en donde $P_{2l}(\eta)$ y $q_{2l}(\xi) = i^{2l+1} Q_{2l}(i\xi)$ son los polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, respectivamente. Con esta solución para el potencial gravitacional, la densidad superficial de materia está dada por

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{l=0}^m C_{2l} (2l+1) q_{2l+1}(0) P_{2l}(\eta). \quad (1.27)$$

Las constantes C_{2l} se escogen adecuadamente tal que la densidad superficial presente un comportamiento físicamente razonable. En la sección 2.3.2 se analizará un comportamiento particular para la densidad.

Además de la densidad de materia, otra cantidad física comúnmente usada para caracterizar las distribuciones galácticas de materia es la velocidad circular, o curva de rotación, definida como la velocidad tangencial de las estrellas en órbitas circulares alrededor del centro. Dado $\Phi(R, z)$, se puede conocer V a través de la expresión general de la velocidad Ec. (1.15). La expresión matemática para la velocidad circular en el disco, cuando $\xi = 0$, está dada por, ver [Gonzalez & Reina, 2006]

$$V_d^2(\xi = 0, \eta) = \frac{1 - \eta^2}{\eta} \sum_{l=0}^m C_{2l} q_{2l}(0) P'_{2l}(\eta), \quad (1.28)$$

La expresión para la velocidad circular por fuera del disco, cuando $\eta = 0$, tiene la forma, (ver anexo A)

$$V_{fd}^2 = -\frac{1 + \xi^2}{\xi} \sum_{l=0}^m C_{2l} \frac{\partial q_{2l}(\xi)}{\partial \xi} P_{2l}(0). \quad (1.29)$$

Entonces, la velocidad circular en todo el plano $z = 0$, se obtiene sumando las dos expresiones Ec. (1.28) y Ec. (1.29), tal que se obtiene

$$\begin{aligned} V^2 = & \frac{1 - \eta^2}{\eta} \sum_{l=0}^m C_{2l} q_{2l}(0) \frac{\partial P_{2l}(\eta)}{\partial \eta} [1 - H(R - 1)] \\ & - \frac{1 + \xi^2}{\xi} \sum_{l=0}^m C_{2l} \frac{\partial q_{2l}(\xi)}{\partial \xi} P_{2l}(0) H(R - 1), \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde se ha introducido la función de Heaviside,

$$H(R) = \begin{cases} 1, & \text{si } R \geq 0, \\ 0, & \text{si } R < 0, \end{cases} \quad (1.31)$$

para expresar la velocidad total teniendo en cuenta el dominio de cada componente del disco.

1.3.2 Discos generalizados de Kalnajs

Se requiere que la densidad superficial sea una función monótonamente decreciente del radio, con un máximo en el centro del disco. Para hacer esto, se imponen las condiciones [Gonzalez & Reina, 2006]

$$\sigma(a) = 0, \quad (1.32a)$$

$$\sigma(0) = \sigma_{max}, \quad (1.32b)$$

tal que

$$M = \int_0^a \sigma(R) dA, \quad (1.33)$$

donde M es la masa total del disco y dA es el elemento diferencial de área. Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, la densidad superficial se puede escribir de la siguiente manera

$$\sigma = \frac{F(\eta)}{2\pi a G \eta}, \quad (1.34)$$

donde $F(\eta)$ es una función par de η , monótonamente creciente en el intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, y es tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\eta)}{\eta} = 0. \quad (1.35)$$

Además, se debe imponer la condición

$$\int_0^1 F(\eta) d\eta = \frac{MG}{a}, \quad (1.36)$$

de acuerdo con la Ec. (1.33)

Una función $F(\eta)$ que satisface las condiciones anteriores requeridas es

$$F(\eta) = (2m + 1) \frac{MG}{a} \eta^{2m}. \quad (1.37)$$

Para satisfacer la condición Ec. (1.35), se debe escoger $m \geq 1$. Con esta forma particular de $F(\eta)$, se obtiene una familia infinita de discos con densidades superficiales de masa dadas por

$$\sigma_m(R) = \frac{2m + 1}{2\pi a^2} M \left[1 - \frac{R^2}{a^2} \right]^{m-1/2}. \quad (1.38)$$

Luego de satisfacer las condiciones de densidad del disco, ya es posible obtener los valores de las constantes C_{2l} [Gonzalez & Reina, 2006], tal que

$$C_{2l} = \frac{MG}{a} \frac{\pi^{1/2} (4l + 1) (2m + 1)!}{2^{2m+1} (2l + 1) (m - l)! \Gamma(m + l + 3/2) q_{2l+1}(0)}. \quad (1.39)$$

1.3.3 Expresiones analíticas de los modelos

Con los valores de C_{2l} , se calculan las diferentes cantidades físicas que caracterizan el comportamiento de los modelos. Por ejemplo, el potencial gravitacional de los primeros

tres miembros de la familia está dados por

$$\Phi_1(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + A (3\eta^2 - 1) \right], \quad (1.40a)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + 1 \frac{10A}{7} (3\eta^2 - 1) + B (35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right], \quad (1.40b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi, \eta) = & -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + \frac{10A}{6} (3\eta^2 - 1) + \frac{21B}{11} (35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right. \\ & \left. + C (231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5) \right], \end{aligned} \quad (1.40c)$$

donde

$$A = \frac{1}{4} \left[(3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi \right], \quad (1.41a)$$

$$B = \frac{3}{448} \left[(35\xi^4 + 30\xi^2 + 3) \cot^{-1} \xi - 35\xi^3 - \frac{55}{3}\xi \right], \quad (1.41b)$$

$$C = \frac{5}{8448} (231\xi^6 + 315\xi^4 + 105\xi^2 + 5) \cot^{-1} \xi - 231\xi^5 - 238\xi^3 - \frac{231}{5}\xi. \quad (1.41c)$$

De igual manera, para las densidades superficiales de masa de los tres primeros miembros de la familia, se obtienen las expresiones

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad (1.42a)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{3/2}, \quad (1.42b)$$

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{7}{2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{5/2}, \quad (1.42c)$$

donde $\tilde{\sigma}_m = \pi a^2 \sigma / M$, de manera tal que la densidad está normalizada para cada uno de los modelos. Las correspondientes expresiones para las velocidades circulares están

dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1^2 = & \frac{3\pi}{4} \tilde{R}^2 \left[1 - H(\tilde{R} - 1) \right] - \frac{3MG}{2} \left\{ \sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right. \\ & \left. - \tilde{R}^2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right\} H(\tilde{R} - 1), \end{aligned} \quad (1.43a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2^2 = & \frac{15\pi}{32} \tilde{R}^2 \left(4 - 3\tilde{R}^2 \right) \left(1 - H(\tilde{R} - 1) \right) + \frac{15MG}{16} \left\{ \sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right. \\ & \left. \times \left(3\tilde{R}^2 - 2 \right) + \left(4\tilde{R}^2 - 3\tilde{R}^4 \right) \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right\} H(\tilde{R} - 1), \end{aligned} \quad (1.43b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_3^2 = & \frac{105\pi}{256} \tilde{R}^2 \left(5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8 \right) \left(1 - H(\tilde{R} - 1) \right) - \frac{35MG}{128} \left\{ \sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right. \\ & \left. \times \left(15\tilde{R}^4 - 26\tilde{R}^2 + 8 \right) - 3\tilde{R}^2 \left(5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8 \right) \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right. \\ & \left. H(\tilde{R} - 1) \right\}, \end{aligned} \quad (1.43c)$$

donde $\tilde{R} = R/a$. Así se puede comprobar que la rapidez $\tilde{V}_m^2 = aV^2/(MG)$ está normalizada, tal que la coordenada radial está normalizada y escalada respecto al radio del disco.

SECCIÓN 1.4

Modelos tipo Miyamoto-Nagai

1.4.1 Expansión multipolar del potencial gravitacional

Para obtener modelos tridimensionales de galaxias, por ejemplo, estructuras en forma de halo esferoidal, se propone una expansión multipolar del potencial gravitacional en coordenadas esféricas, de la forma

$$\Psi = - \sum_{k=0}^n \frac{A_k P_k(\cos \theta)}{r^{k+1}}, \quad (1.44)$$

donde $P_k(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre, A_k son los multipolos y θ es el ángulo polar en coordenadas esféricas. Ahora se realizan las siguientes transformaciones que permiten pasar de coordenadas esféricas a cilíndricas

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \quad (1.45a)$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}. \quad (1.45b)$$

Debido a que el potencial gravitacional, expresado como una expansión multipolar, es solución de la ecuación de Laplace, se debe realizar la siguiente transformación sobre la variable z [Salazar, 2010; vogt & Letelier, 2005; Miyamoto & Nagai, 1975]:

$$z \rightarrow z^* = a_h + \sqrt{z^2 + b^2}, \quad (1.46)$$

donde a_h y b son parámetros distintos de cero que tienen dimensiones de longitud. Realizando la transformación de la variable z dentro de la Ec. (1.44), el potencial queda definido por un nuevo potencial

$$\Phi_h(R, z) = \Psi(R, z^*), \quad (1.47)$$

el cual queda escrito en términos de dos nuevos parámetros, a_h y b . De modo que el nuevo potencial satisface la ecuación de Poisson Ec. (1.1). Esto permite obtener la densidad de materia, que en términos de las coordenadas cilíndricas, se escribe

$$\rho(R, z) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \Phi_h(R, z)_{,RR} + \frac{\Phi_h(R, z)_{,R}}{R} + \Phi_h(R, z)_{,zz} \right\}. \quad (1.48)$$

1.4.2 Expresiones analíticas de los modelos

El potencial gravitacional de los primeros tres miembros de la familia están dados por [Salazar, 2010]

$$\Phi_{h_0}(R, z) = -\frac{A_0}{[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{1/2}}, \quad (1.49a)$$

$$\Phi_{h_1}(R, z) = -\frac{A_0}{[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{1/2}} - \frac{A_1(a_h + \zeta)}{[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{3/2}}, \quad (1.49b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{h_2}(R, z) = & -\frac{A_0}{[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{1/2}} - \frac{A_1(a_h + \zeta)}{[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{3/2}} \\ & - \frac{A_2[-R^2 + 2(a_h + \zeta)^2]}{2[R^2 + (a_h + \zeta)^2]^{5/2}}, \end{aligned} \quad (1.49c)$$

donde $\zeta = \sqrt{b^2 + z^2}$.

Las correspondientes distribuciones de masa están dadas por

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\zeta^3 \left[\tilde{R}^2 + (1 + \zeta)^2 \right]^{5/2}} \left\{ \tilde{R}^2 + [1 + 3\zeta][1 + \zeta]^2 \right\} \quad (1.50a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 = & \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\zeta^3 \left[\tilde{R}^2 + (1 + \zeta)^2 \right]^{7/2}} \left\{ \tilde{R}^4(1 - \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2(1 + \zeta)[\tilde{a}_1(1 - 8\zeta) \right. \\ & \left. + (1 + \zeta)^3[2\tilde{a}_1(1 + 4\zeta) + (1 + \zeta)(1 + 3\zeta)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.50b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2 = & \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\zeta^3 \left[\tilde{R}^2 + (1 + \zeta)^2 \right]^{9/2}} \left\{ 2\tilde{R}^6(1 - \tilde{a}_1) + 3\tilde{R}^4 \left[2(1 + \zeta)^3 - 6\tilde{a}_1\zeta(1 + \zeta) \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\tilde{a}_2 \right] \right\} + 3\tilde{R}^2(1 + \zeta)^2 \left[2(1 + \zeta)^2(1 + 2\zeta) + 2\tilde{a}_1(1 + \zeta) - \tilde{a}_2(1 + 25\zeta) \right] \\ & + 2(1 + \zeta)^4 \left[(1 + \zeta)^2(1 + 3\zeta) + 2\tilde{a}_1(1 + \zeta)(1 + 4\zeta) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\zeta) \right], \end{aligned} \quad (1.50c)$$

donde $\tilde{R} = R/a_h$, $\zeta = \sqrt{\tilde{b}^2 + \tilde{z}^2}$, $\tilde{b} = b/a_h$, $\tilde{z} = z/a_h$, $\tilde{a}_1 = A_1/(a_h GM)$, $\tilde{a}_2 = A_2/(a_h^2 GM)$, $\tilde{\rho} = a_h^3 \rho/M$, siendo M la masa de la distribución tridimensional de materia. Se puede verificar el carácter adimensional de la densidad sabiendo que a_h y b tienen unidades de distancia y el cociente A_k/GM tiene unidades de *distancia*^k.

SECCIÓN 1.5

Modelo de disco delgado y halo

Con el fin de obtener modelos de galaxias compuestos de un disco delgado y un halo esferoidal, consideraremos un potencial gravitacional axialmente simétrico $\Phi = \Phi(R, z)$, donde (R, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Se supone adicionalmente que el potencial posee simetría de reflexión Ec. (1.17), respecto al plano $z = 0$. El potencial gravitacional total es la superposición de dos componentes independientes

$$\Phi(R, z) = \Phi_d(R, z) + \Phi_h(R, z), \quad (1.51)$$

donde $\Phi_d(R, z)$ es el potencial gravitacional generado por el disco galáctico, mientras que $\Phi_h(R, z)$ corresponde al potencial gravitacional del halo esferoidal. El potencial gravitacional del disco es solución de la ecuación de Laplace afuera del disco,

$$\nabla^2 \Phi_d(R, z) = 0, \quad (1.52)$$

mientras que el potencial gravitacional del halo satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi_h(R, z) = 4\pi G \rho(R, z), \quad (1.53)$$

donde $\rho(R, z)$ es la densidad del halo.

1.5.1 Densidad del disco y del halo

El problema de la densidad superficial del disco satisface la ecuación de Laplace Ec. (1.52). Por esta razón, el análisis correspondiente a la densidad superficial del disco, es precisamente el que se realizó en la sección 2.3. Los modelos de disco empleados en este trabajo se caracterizan por tener una densidad máxima en el centro y su valor disminuye monótonamente hasta cero en el borde del disco, de esta manera la expresión analítica para cualquier modelo particular de disco está dado por Ec. (1.38).

La distribución de materia de un halo tridimensional satisface la ecuación de Poisson Ec. (1.53). De esta manera, el primer modelo se obtiene aplicando la ecuación Ec. (1.48) al potencial Ec. (1.49a), para obtener una distribución de materia de la forma

$$\tilde{\rho} = \frac{4\pi a^3 G \rho}{A_0} = \frac{4\pi a^3 \rho}{M_h} = \frac{\tilde{a}^2 \tilde{A}_0 \left(\tilde{a} \tilde{R}^2 + \tilde{a}^3 + 5\tilde{a}^2 \zeta + 7\tilde{a} \zeta^2 + 3\zeta^3 \right)}{\zeta^3 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \zeta)^2 \right]^{5/2}}, \quad (1.54)$$

donde $\tilde{a} = a_h/a$, $\zeta = \sqrt{\tilde{z}^2 + \tilde{b}^2}$, $\tilde{z} = z/a$, $\tilde{b} = b/a$. Además se ha definido $\tilde{A}_k \equiv A_k/(a^k A_0)$, para representar la razón entre los multipolos A_k y el monopolo A_0 , este parámetro es adimensional y está escalado respecto al parámetro a , que corresponde a la constante del disco, la cual tiene unidades de longitud. En el que $A_0 = MG$ y M_h es la masa de la distribución 3D de materia. De esta manera es posible observar que la densidad está normalizada y sus coordenadas (\tilde{R} , \tilde{z}) están escaladas respecto al radio del disco a .

El segundo modelo, con términos de monopolo y dipolo, se obtiene aplicando la Ec. (1.48) al potencial en la Ec. (1.49b), y de esta manera se obtiene la distribución de materia dada por la siguiente expresión para la densidad

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} = \frac{4\pi a^3 \rho}{M_h} = & \frac{\tilde{b}^2}{\zeta^3 [\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \zeta)^2]^{7/2}} \left\{ \tilde{a}^5 \tilde{A}_0 + 3\tilde{A}_0 \tilde{z}^2 \zeta (\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) - \tilde{A}_1 (\tilde{R}^4 + 8\tilde{R}^2 \tilde{z}^2 - 8\tilde{z}^4) \right. \\
& + \tilde{b}^4 (8\tilde{A}_1 + 3\tilde{A}_0 \zeta) + \tilde{a}^4 (2\tilde{A}_1 + 7\tilde{A}_0 \zeta) + \tilde{b}^2 [-8\tilde{A}_1 (\tilde{R}^2 - 2\tilde{z}^2) \\
& + 3\tilde{A}_0 \zeta (\tilde{R}^2 + 2\tilde{z}^2)] + 2\tilde{a}^3 [7\tilde{A}_1 \zeta + \tilde{A}_0 (9\tilde{b}^2 + \tilde{R}^2 + 9\tilde{z}^2)] \\
& + \tilde{a} [13\tilde{b}^4 \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \zeta (-7\tilde{R}^2 + 26\tilde{z}^2 + 26\tilde{b}^2) + \tilde{A}_0 (\tilde{R}^4 + 8\tilde{R}^2 \tilde{z}^2 + 8\tilde{b}^2 \tilde{R}^2 \\
& + 26\tilde{b}^2 \tilde{z}^2)] + \tilde{a}^2 [\tilde{A}_0 \zeta (7\tilde{R}^2 + 22\tilde{z}^2) + \tilde{A}_1 (\tilde{R}^2 + 30\tilde{z}^2) \\
& \left. + \tilde{b}^2 (30\tilde{A}_1 + 22\tilde{A}_0 \zeta) \right\}. \tag{1.55}
\end{aligned}$$

De igual manera que para la primera expresión de la densidad, ver la Ec. (1.54), se puede observar que la densidad, correspondiente al segundo modelo, está adimensionalizada y escalada respecto al radio del disco a .

1.5.2 Curva de rotación

Teniendo en cuenta la forma general para la rapidez circular Ec. (1.15) y además, que el modelo planteado es la superposición de dos componentes, el disco delgado y el halo esferoidal, la expresión que involucra las dos componentes tendrá la forma

$$V^2 = R \frac{\partial \Phi_d}{\partial R} + R \frac{\partial \Phi_h}{\partial R}. \tag{1.56}$$

El primer sumando, en la ecuación anterior, es el correspondiente a la velocidad circular en un disco de materia dado por Ec. (1.30); el segundo sumando representa la contribución de la distribución 3D de materia a la curva de rotación, cuya forma depende del número de términos escogidos para la expansión multipolar. Entonces la forma general para la rapidez circular es

$$\begin{aligned}
V^2(\tilde{R}) = & \frac{1 - \eta^2}{\eta} \sum_{l=0}^m C_{2l} q_{2l}(0) \frac{\partial P_{2l}(\eta)}{\partial \eta} [1 - H(\tilde{R} - 1)] \\
& - \frac{1 + \xi^2}{\xi} \sum_{l=0}^m C_{2l} \frac{\partial q_{2l}(\xi)}{\partial \xi} P_{2l}(0) H(\tilde{R} - 1) + \tilde{R} \frac{\partial \Phi_{h_n}}{\partial \tilde{R}}, \tag{1.57}
\end{aligned}$$

donde Φ_{h_n} es el potencial gravitacional, ver las Ec. (1.49), de un modelo particular de halo. En la Ec. (1.57), para la rapidez circular, se ha dejado explícito el último término, correspondiente a la contribución del halo, ya que depende de cuántos términos de la expansión se incluyen para obtener la densidad de materia del halo, aportados por el índice n en el potencial gravitacional Φ_{h_n} , ver las Ec. (1.49).

Capítulo 2

Modelos Particulares de Disco-Halo

SECCIÓN 2.1

Introducción

Cada una de las tres secciones siguientes contiene un modelo particular que resulta de la combinación de un disco delgado finito y un halo o una protuberancia central, dependiendo el tamaño de la estructura tridimensional seleccionada para ser estudiada. En la sección 2.2 se escogió el primer modelo de disco planteado en la sección 1.3.3, ver la Ec. (1.42a), en superposición con un halo cuya densidad se construye a partir del término monopolar, ver la Ec. (1.49a), de la expansión multipolar, ver la Ec. (1.44). Lo que se hizo fue utilizar los parámetros asociados a cada potencial gravitacional de tal manera que se cambiaron las razones entre dos parámetros particulares escogidos y se dejaron constantes los demás parámetros. Por ejemplo se observó los cambios ocurridos en la curva de rotación debidos a diferentes razones entre la masa del disco M_d y la masa del halo M_h . También se observó la distribución de materia del halo, a través de los contornos de densidad, utilizando los valores particulares de las constantes a , a_h , b y A_k introducidos en la expresión analítica de la rapidez circular. En la sección 2.3 se escogió el segundo modelo de disco planteado en la sección 1.3.3, ver la Ec. (1.42b) en superposición con el halo de la primera sección. Se realizó el mismo análisis

de los parámetros que en la sección anterior. La última sección utiliza los dos primeros términos de la expansión multipolar para construir el halo de materia en superposición con el primer modelo de disco.

SECCIÓN 2.2

Modelo de halo $n = 0$ y modelo de disco $m = 1$

Cada uno de los modelos particulares de disco, valores de $m \geq 1$ en la Ec. (1.38), se caracterizan por describir distribuciones de materia que se encuentran confinadas en un disco de tamaño finito de espesor cero. La expresión analítica para la distribución de materia $\sigma(\tilde{R})$ de este modelo de disco, se obtiene escogiendo el índice $m = 1$ en la expresión general para la densidad superficial, ver la Ec. (1.38), tal que

$$\tilde{\sigma}_1(\tilde{R}) = \frac{3}{2}(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}, \quad (2.1)$$

donde $\tilde{\sigma}_1(\tilde{R}) = \pi a^2 \sigma_1(\tilde{R})/M_d$, $\tilde{R} = R/a$. Como se puede observar, la densidad superficial está adimensionalizada. El disco de materia se extiende en el intervalo $0 \leq \tilde{R} \leq 1$, en el plano $z = 0$. La notación $\tilde{R} = R/a$ muestra el carácter adimensional de la coordenada radial y además muestra el escalamiento de esta coordenada con respecto al radio del disco a . Todos los casos analizados en esta sección presentan el mismo modelo de disco.

La densidad de materia del halo es una función analítica que está definida en todo el espacio, para visualizar el comportamiento de esta función se utilizan contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) . Tales contornos muestran esencialmente un mapa topográfico¹, es decir, un mapa de alturas de una función, en este caso la densidad de materia. La forma matemática para la densidad de materia $\tilde{\rho}$, en este modelo de halo $n = 0$, se obtiene aplicando la Ec. (1.48) sobre el primer término de la expansión multipolar, ver la Ec. (1.49a), tal que la densidad se escribe como

$$\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{b}^2 \tilde{A}_0 (\tilde{a} \tilde{R}^2 + \tilde{a}^3 + 5\tilde{a}^2 \zeta + 7\tilde{a} \zeta^2 + 3\zeta^3)}{\zeta^3 [\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \zeta)^2]^{5/2}}, \quad (2.2)$$

¹Los contornos de densidad, observados en los resultados, fueron generados mediante el software de cálculo Wolfram Mathematica 9.

donde $\tilde{\rho} = 4\pi G a^3 \rho / A_0 = 4\pi a^3 \rho / M_h$, $A_0 = GM_h$, $\zeta = \sqrt{\tilde{z}^2 + \tilde{b}^2}$, $\tilde{a} = a_h/a$, $\tilde{b} = b/a$ y $\tilde{z} = z/a$, donde M_h es la masa del halo y $\tilde{A}_0 = A_0/A_0 = 1$ es la razón entre el término monopolar con sí mismo.

Para obtener la expresión para la rapidez de este modelo particular se reemplaza ($m = 1$, $n = 0$) dentro de la forma general de la rapidez circular Ec. (1.57), tal que la

$$\begin{aligned} \tilde{V}^2 = & \frac{3\pi}{4} \tilde{R}^2 \left(1 - H(\tilde{R} - 1) \right) - \frac{3}{2} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} - \tilde{R}^2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right) \\ & * H(\tilde{R} - 1) + \frac{\tilde{A}_0 \tilde{M} \tilde{R}^2}{\left(\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $\tilde{V}^2 = aV^2/(M_dG)$, $\tilde{M} = M_h/M_d$, $\tilde{A}_0 = 1$. Esta expresión para la rapidez también está normalizada. Recordemos que las coordenadas (\tilde{R}, \tilde{z}) son adimensionales y están escaladas respecto al radio del disco a .

2.2.1 Razón entre la masa del halo y la masa del disco

En el cuadro (a) de la figura 2.1 se muestra los contornos de densidad de un halo, generados a partir de la función de densidad Ec. (2.2), en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) . Los dos ejes sobre los que se dibujan los contornos, son adimensionales y están escalados respecto al radio del disco. La función de densidad está normalizada en el centro, $\tilde{\rho}_0(\tilde{R}, \tilde{z}) = \tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})/\tilde{\rho}(0,0) = 1$, ya que es allí donde se encuentra su valor máximo. De aquí en adelante se utilizará la notación $\tilde{\rho}_0$ para denotar el valor de la densidad en el centro de coordenadas. Respecto al comportamiento de la función, se puede ver que la densidad decrece ligeramente más rápido a lo largo del eje \tilde{z} que a lo largo del eje \tilde{R} , representando un sutil achatamiento de la distribución de materia, a lo largo del eje \tilde{z} . Además la función decrece monótonamente a medida que la distancia aumenta, desde el centro de coordenadas.

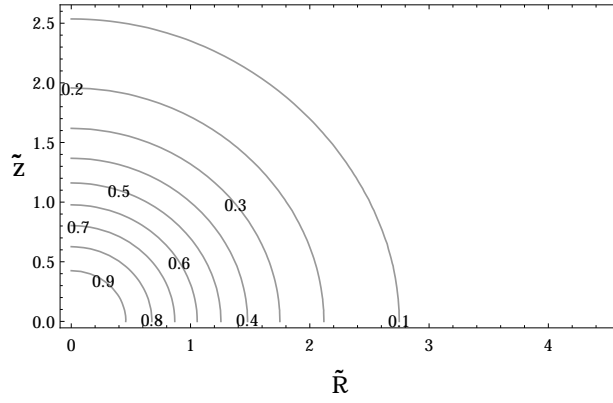
El cuadro (b) muestra el perfil de densidad del disco, cuya función analítica se muestra en la Ec. (2.1). Este perfil satisface las condiciones particulares exigidas para la distribución de materia de los discos delgados finitos, ya que la densidad tiene un valor máximo en el centro y decrece monótonamente hasta anularse en el borde. Finalmente, en el cuadro (c) se observan las curvas de rotación, generadas mediante la expresión de la rapidez, Ec. (2.3), para este modelo particular. La curva inferior, curva de puntos y rayas, sólo tiene en cuenta el potencial gravitacional del disco descrito en este modelo

y sirve de referencia para comparar cómo cambia la curva de rotación cuando se agrega otra componente, en este caso un halo de materia con diferentes valores de masa. Todas las curvas tienen en común un pico en $\tilde{R} = 1$, esto se debe al modelo particular de disco escogido; los demás modelos de disco tienen un comportamiento suave en el mismo punto. Se puede ver un ligero incremento en la magnitud de la velocidad al interior del disco, en $\tilde{R} < 1$. En la parte externa del disco, cuando la razón $\tilde{M} = M_h/M_d$ aumenta, las curvas de rotación van aumentando en magnitud, hasta llegar a la curva de puntos donde se observa una región plana. La extensión de esta región plana, depende de cómo están relacionados los demás parámetros del disco y el halo, como se verá en el análisis de las siguientes gráficas.

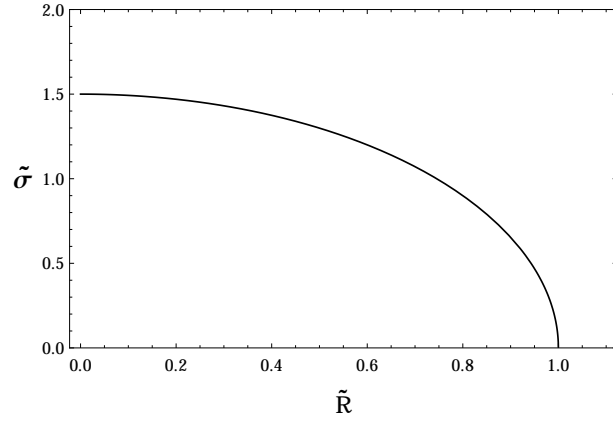
2.2.2 Razón entre la constante a_h y la constante a

En el cuadro (a) de la figura 2.2 se observa los contornos de densidad de un halo esferoidal ligeramente achatado de gran tamaño. Respecto al tamaño de los halos, de ahora en adelante, se escogerá como referencia los primeros diez contornos de densidad, en los cuales la densidad pasa del máximo valor $\tilde{\rho}_0$ hasta $\tilde{\rho}_0/10$. Para esta distribución de materia, los primeros diez contornos se extienden hasta más de 2.5 veces el radio del disco lo cual representa una distribución de materia de gran tamaño. En el cuadro (b) de la figura 2.2 se ha seleccionado los contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\tilde{\rho}_0$. Cada uno de estos contornos pertenece a una distribución de materia como la del cuadro (a). A medida que la razón $\tilde{a} = a_h/a$ aumenta, el tamaño del halo es cada vez mayor. Esta característica permite elegir, por ejemplo, estructuras del tamaño que se desee. En el cuadro (c) de la figura 2.2 se puede observar los cambios ocurridos en las curvas de rotación en presencia de halos de diferente tamaño. Donde se ha elegido halos de igual masa, ésta debe ser suficiente para aplanar la curva de rotación, $\tilde{M} = 7$.

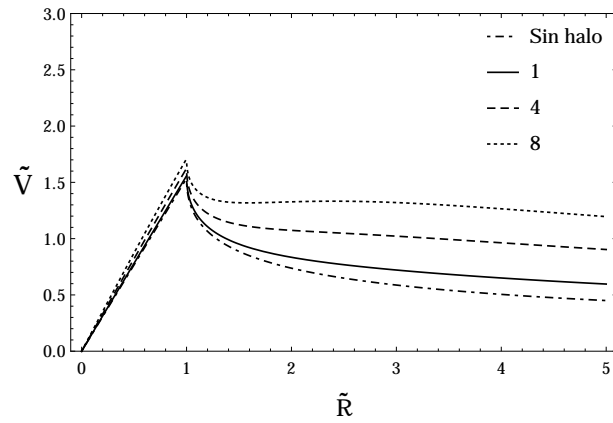
Lo que se observa inicialmente en estas curvas es que los cambios más significativos en la curva de rotación se observan en la parte externa del disco. Si la razón \tilde{a} aumenta, implicando halos de mayor tamaño, la región plana se extiende en un intervalo cada vez mayor, pero con una disminución en la magnitud de la velocidad, respecto a las regiones planas de las demás curvas. En otras palabras, cuando los halos son pequeños, la curva de rotación tiene una región plana de poca extensión pero con una magnitud mayor para la velocidad. Cuando los halos son grandes, la región plana de la curva de rotación se extiende muy lejos, pero su magnitud es pequeña. Nuevamente, la curva inferior permite saber cómo debería ser el comportamiento de la velocidad en ausencia de halos masivos de gran tamaño, únicamente con una distribución de materia discoidal en dos dimensiones.



(a) Densidad del halo

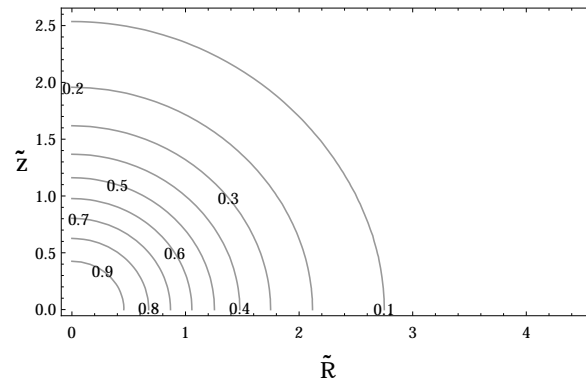


(b) Perfil de densidad del disco

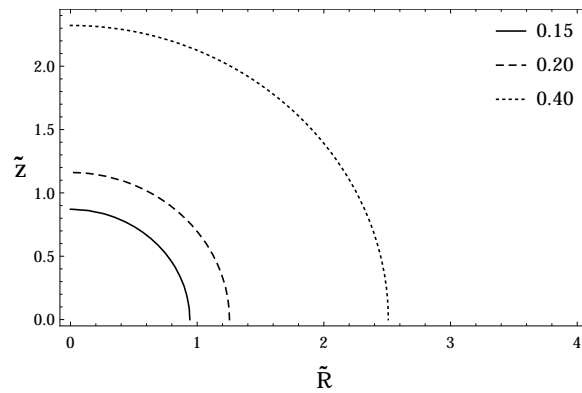


(c) Curva de rotación

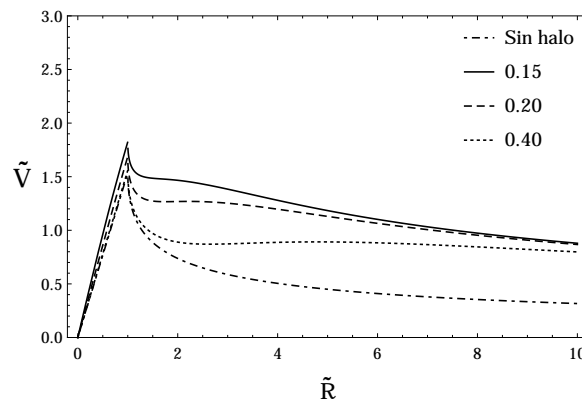
Figura 2.1: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.20$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_0 = 1$. **(b)** Perfil de densidad del disco, modelo $m = 1$, a lo largo del eje \tilde{R} . **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.20$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_0 = 1$, la masa del disco M_d y la masa del halo M_h , donde $\tilde{M} = \{1, 4, 8\}$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.2: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_0 = 1$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_0 = 1$, $\tilde{a} = \{0.15, 0.20, 0.40\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son la constante a_h del halo y la constante a del disco, donde: $\tilde{M} = 7$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_0 = 1$, $\tilde{a} = \{0.15, 0.20, 0.40\}$.

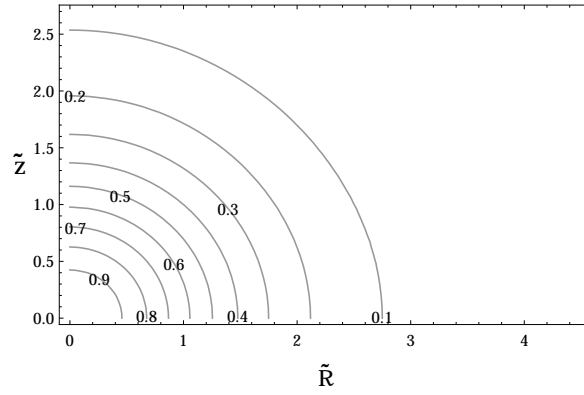
2.2.3 Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia

Caso 1: $b/a_h > 1$

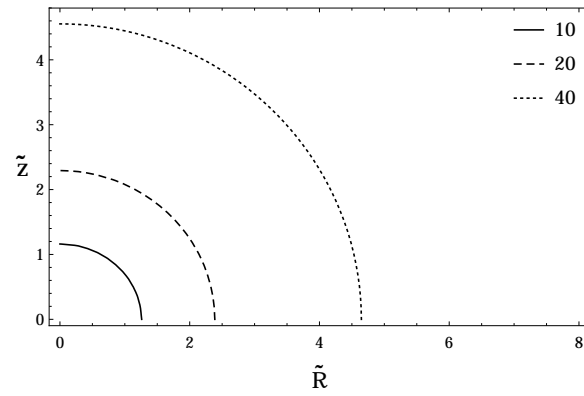
El cuadro (a) de la figura 2.3 muestra un halo de gran tamaño, ligeramente achatado a lo largo del eje \tilde{z} . Este halo contiene la curva $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\tilde{\rho}_0$ que corresponde al contorno de menor tamaño observado en el cuadro b) de la figura 3.3. En el cuadro (b) de la figura 2.3 se tiene los contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\tilde{\rho}_0$. Lo que se observa para $b/a_h > 1$, es que los contornos se hacen cada vez más grandes a medida que b/a_h aumenta, esto conduce a distribuciones de materia cada vez más grandes. En este caso no se cambió la razón entre los parámetros a y a_h . Por lo tanto, también es posible cambiar el tamaño de la distribución manipulando a_h y b . En el cuadro (c) de la figura 2.3 se observan los cambios en las curvas de rotación debidos a estructuras 3D cada vez más grandes, pero esta vez manipulando a_h y b . Nuevamente, los halos más pequeños, curva continua del cuadro b), crean pequeñas regiones planas cercanas al borde del disco, curva continua cuadro c). Por otro lado, halos de gran tamaño crean extensas regiones planas, con una magnitud pequeña de la velocidad promedio en ese intervalo.

Caso 2: $b/a_h \approx 1$

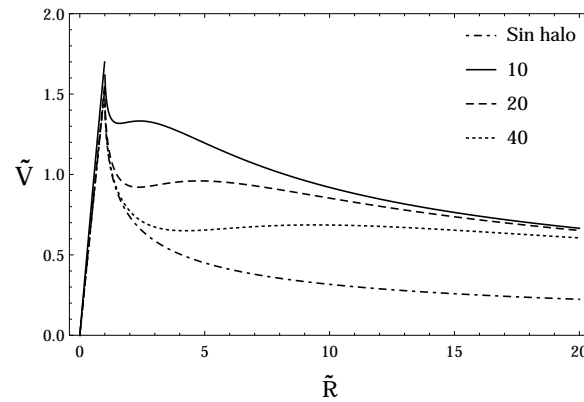
En el cuadro (a) de la figura 2.4 se observa un halo muy pequeño y bastante achatado. En éste, los primeros diez contornos se extienden un poco más allá de la mitad del radio del disco. El cuadro (b) de la figura 2.4 muestra los contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\tilde{\rho}_0$. Se observa dos aspectos importantes, un cambio en el tamaño y además los tres contornos tienen más o menos la misma forma achatada. A medida que la razón b/a_h aumenta ligeramente, los halos aumentan un poco de tamaño. Con respecto a la forma, se está viendo un aplanamiento de la distribución cada vez mayor, a medida que b/a_h se hace más pequeño desde el caso 1) hasta el caso 2). En el cuadro (c) de la figura 2.4 se observa los efectos sobre la curva de rotación debidos a las estructuras ya descritas en los numerales a) y b). Ligeros cambios en la forma de estas estructuras pueden ser observados en la región interna de la curva de rotación, es decir, para valores de $\tilde{R} < 1$. Lo que se observa es que el halo de menor tamaño, pero con el mismo valor de masa, hace que la pendiente de la curva de rotación empiece desde cero con mayor inclinación. En otras palabras, la rapidez es mayor para la misma distancia al centro de coordenadas.



(a) Densidad del halo

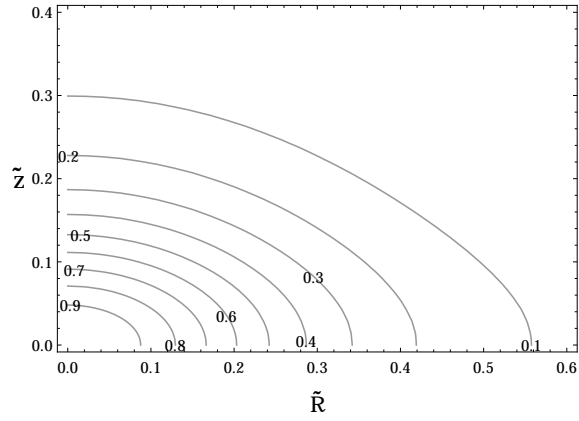


(b) Contornos de tres halos

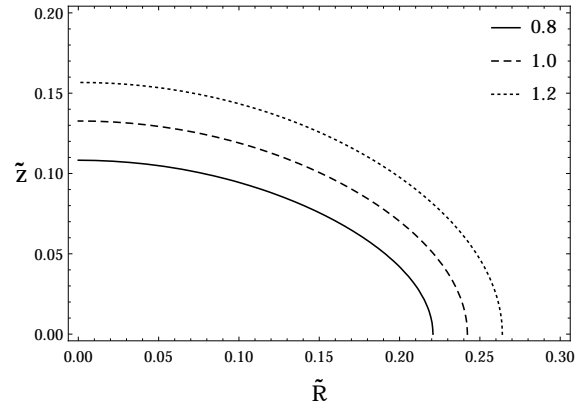


(c) Curva de rotación

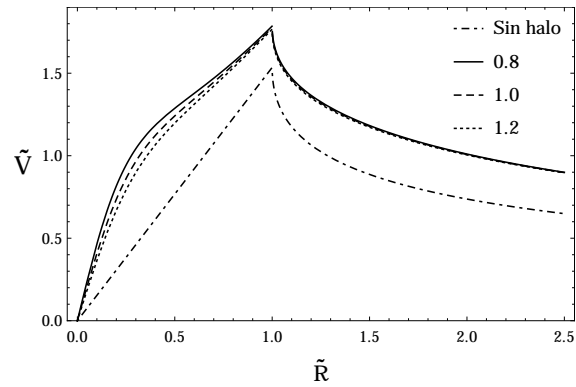
Figura 2.3: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{10, 20, 40\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 8$, $\tilde{a} = 0.20$ y $b/a_h = \{10, 20, 40\}$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.4: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 1$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{0.8, 1.0, 1.2\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 1$, $\tilde{a} = 0.2$ y $b/a_h = \{0.8, 1.0, 1.2\}$.

Caso 3: $b/a_h < 1$

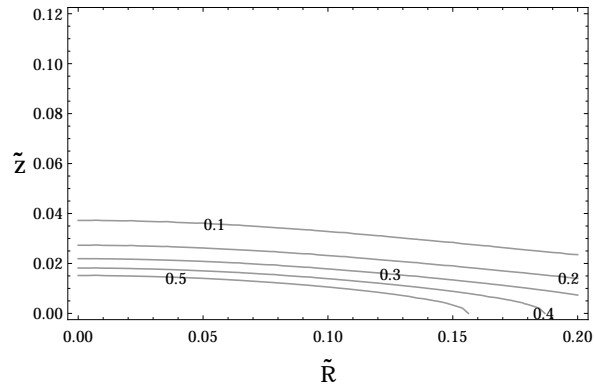
En el cuadro (a) de la figura 2.5 se observa una distribución de materia muy aplanada, en la cual los contornos de densidad se van apilando en el eje \tilde{z} y se extienden a lo largo del eje radial \tilde{R} , formando estructuras discoidales. De esta manera se concluye que la razón entre los parámetros a_h y b del halo de materia, se utiliza para obtener distribuciones de materia que van desde esferoidales, caso 1, hasta muy aplanadas en forma de discos $3D$, caso 3. Los contornos observados, en el cuadro (b) de la figura 2.5, corresponden a tres distribuciones $3D$ de materia, en los que se ha estudiado la razón $b/a_h < 1$. Se puede observar cómo se aplanan estos contornos a medida que disminuye la razón entre b y a_h , empezando por la línea de puntos hasta el contorno de línea continua más aplanado. También se observa que esta distribución discoidal de materia es pequeña respecto al disco delgado finito, ya que los contornos seleccionados están en una región más pequeña que la quinta parte del radio del disco. En el cuadro (c) de la figura 2.5, se observan las curvas de rotación correspondientes a las distribuciones discoidales previamente descritas. Se puede observar que el disco más aplanado tiene mayor influencia sobre la curva de rotación, ya que esta curva presenta un ligero incremento en la pendiente comparada con las demás.

SECCIÓN 2.3**Modelo de halo $n = 0$ y modelo de disco $m = 2$**

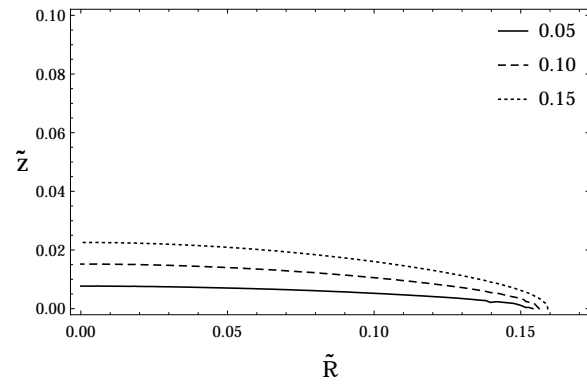
La expresión analítica para la distribución de materia $\sigma(\tilde{R})$ de este modelo de disco, se obtiene escogiendo el índice $m = 2$, en la expresión general para la densidad superficial, ver la Ec. (1.38), tal que la densidad superficial se escribe como

$$\tilde{\sigma}_2(\tilde{R}) = \frac{5}{2}(1 - \tilde{R}^2)^{3/2}, \quad (2.4)$$

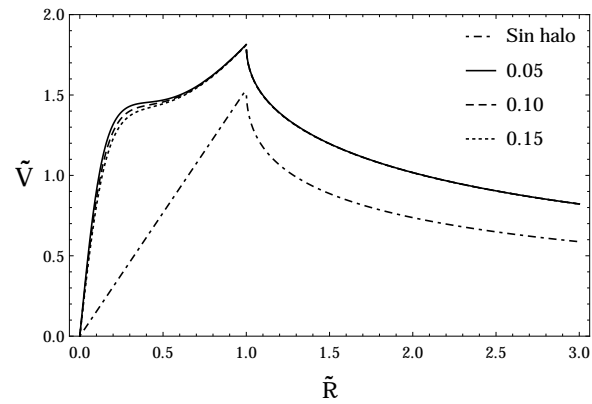
donde $\tilde{\sigma}_2(\tilde{R}) = \pi a^2 \sigma_2 / M_d$, tal que, el disco de materia está en el intervalo $0 \leq \tilde{R} \leq 1$, en el plano $z = 0$. Nuevamente se presenta la densidad superficial adimensionalizada. Todos los casos analizados en esta sección presentan el mismo modelo de disco, cuyo perfil se observa en el cuadro (b) de la figura 3.6. La expresión analítica para la distribución de materia del halo $\tilde{\rho}$ es la misma que se planteó en la Ec. (2.2). Los índices (m, n)



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.5: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 0.1$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{0.05, 0.10, 0.15\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 1$, $\tilde{a} = 0.2$ y $b/a_h = \{0.05, 0.10, 0.15\}$.

representan un modelo particular de disco y halo respectivamente.

Para obtener la forma matemática de la curva de rotación de este modelo, se reemplaza ($m = 2, n = 0$) en la ecuación general de la rapidez circular, ver la Ec. (1.57), para el modelo de disco y halo, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{V}^2 = & -\frac{15}{32}\pi\tilde{R}^2(-4 + 3\tilde{R}^2)(1 - H(\tilde{R} - 1)) + \frac{15}{16} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1}(-2 + 3\tilde{R}^2) \right. \\ & \left. + (4\tilde{R}^2 - 3\tilde{R}^4) \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right) H(\tilde{R} - 1) + \frac{\tilde{M}\tilde{R}^2}{(\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

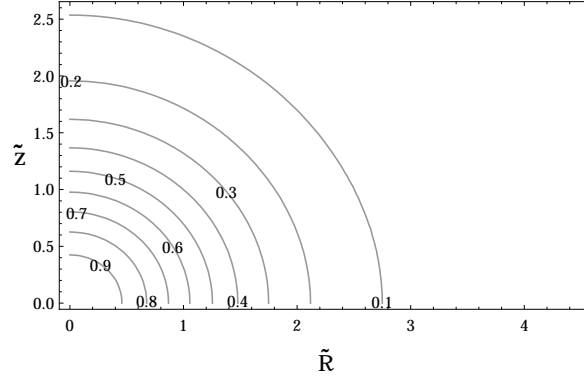
donde $\tilde{V}^2 = aV^2/(M_dG)$. Esta expresión para la rapidez circular también está adimensionalizada.

2.3.1 Razón entre la masa del halo y la masa del disco

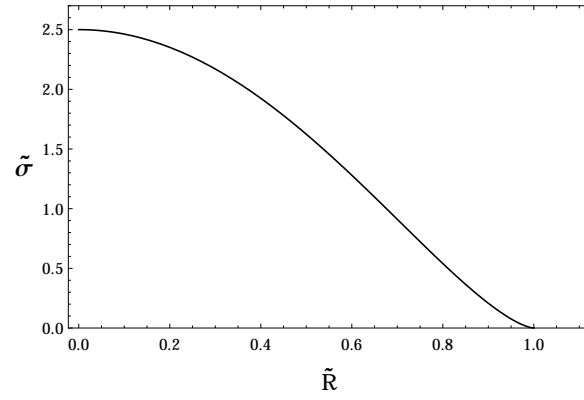
Los contornos de densidad del cuadro (a) de la figura 2.6 representan un halo esférico ligeramente achatado a lo largo del eje \tilde{z} . Aunque estas distribuciones de materia se extienden a través de todo el espacio, la densidad de materia decrece muy rápidamente; de esta manera, la mayor parte de la materia estará concentrada, para efectos prácticos, en sus primeros diez contornos. Estos primeros diez contornos se extienden hasta aproximadamente tres veces el radio del disco, lo cual lo convierte en un halo de gran tamaño. En el cuadro (b) de la figura 2.6 se puede observar el perfil de densidad del disco de materia. El perfil observado presenta el valor máximo en el centro y decrece monótonamente, en función de la distancia, hasta anularse en el borde del disco en $\tilde{R} = 1$. Este es el comportamiento general esperado para cada uno de los modelos de disco. El primer aspecto que se puede observar de las curvas de rotación, cuadro (c) de la figura 2.6, es que en el borde del disco todas las curvas son suaves, teniendo en cuenta que se trata del mismo modelo de disco. Se puede ver cómo se obtiene la región plana de la curva de rotación a medida que la masa del halo aumenta.

2.3.2 Razón entre la constante a_h y la constante a

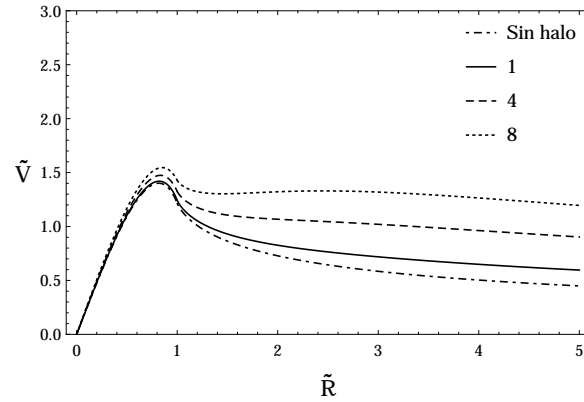
En el cuadro (a) de la figura 2.7 se observan los contornos de densidad del mismo halo de la sección anterior. En el cuadro (b) de la figura 2.7 se han seleccionado los contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\tilde{\rho}_0$, la distribución de



(a) Densidad del halo



(b) Perfil de densidad del disco



(c) Curva de rotación

Figura 2.6: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$. **(b)** Perfil de densidad del disco modelo $m = 2$ a lo largo del eje \tilde{R} . **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son la masa del disco M_d y la masa del halo M_h , donde: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$ y $\tilde{M} = \{0, 1, 4, 8\}$.

materia correspondiente al contorno de la mitad, está distribuida como se observa en el cuadro (a) de la figura 2.7. Estos contornos permiten confirmar nuevamente que el parámetro a_h se puede utilizar para obtener halos de diferentes tamaños. Lo anterior se justifica ya que a medida que la razón \tilde{a} aumenta, los contornos de densidad se hacen cada vez más grandes. En el cuadro (c) de la figura 2.7 se puede ver las regiones planas obtenidas con los halos de diferente tamaño. Las más extensas corresponden a los halos de mayor tamaño y así sucesivamente.

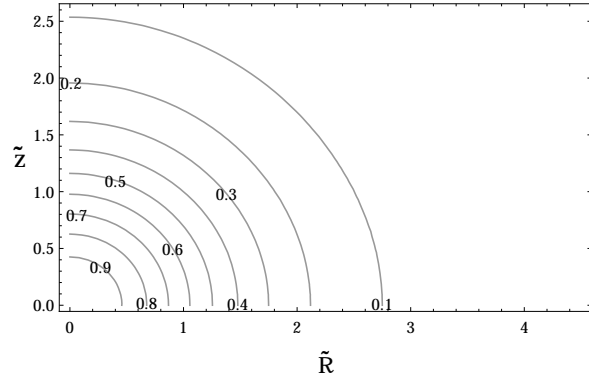
2.3.3 Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia

Caso 1: $b/a_h > 1$

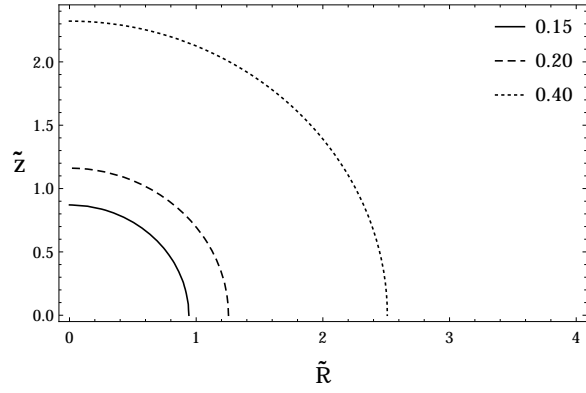
En el cuadro (a) de la figura 2.8 se muestra el mismo halo de los dos casos previos. En el cuadro (b) de la figura 2.8 se observa los contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0.5\rho_0$. Lo que se observa, cuando $b/a_h > 1$, es que los contornos se hacen cada vez más grandes a medida que b/a_h aumenta, por tanto los respectivos halos serán de mayor tamaño. Además, la forma de las distribuciones es casi esférica. El cuadro (c) de la figura 2.8 representa los cambios que sufren las curvas de rotación en presencia de halos de diferente tamaño. Es necesario observar que la masa de todos los halos es de ocho veces la masa del disco.

Caso 2: $b/a_h \approx 1$

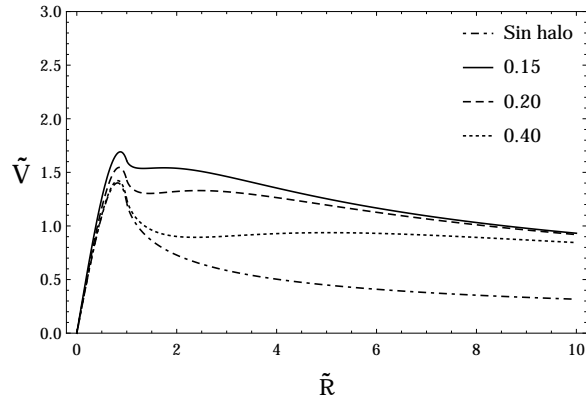
En el cuadro (a) de la figura 2.9 se observa una distribución de materia muy achata-da, distante de la forma esférica pero no tan aplanado para ser discoidal. Sus primeros diez contornos se extienden poco más allá de la mitad del radio del disco. En el cuadro (b) de la figura 2.9 se observa un ensanchamiento en los contornos de densidad debido al aumento en la razón entre los parámetros b y a_h del halo. En el cuadro (c) de la figura 2.9 se observa una disminución en la magnitud de la velocidad, en la parte interna del disco, debido al aumento en el tamaño de la distribución, teniendo en cuenta que la masa es la misma. En otras palabras, la materia está más extendida.



(a) Densidad del halo

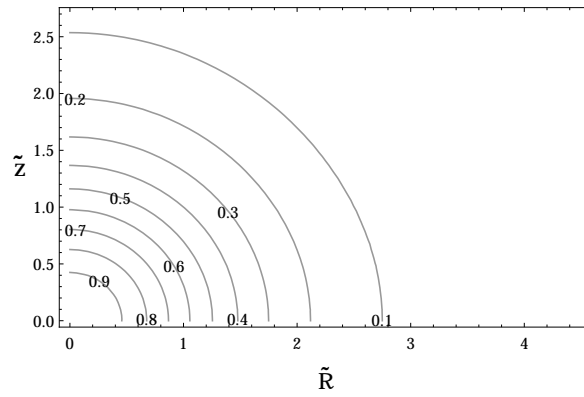


(b) Contornos de tres halos con la misma densidad

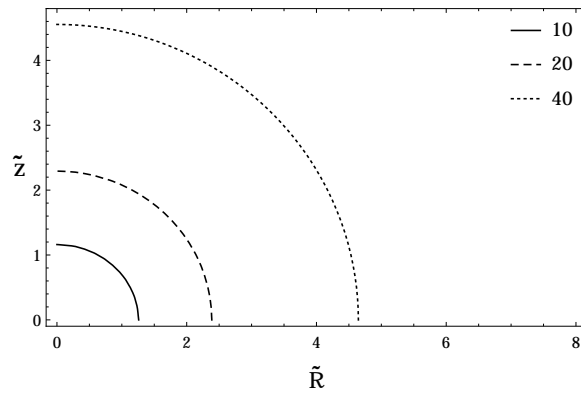


(c) Curvas de rotación

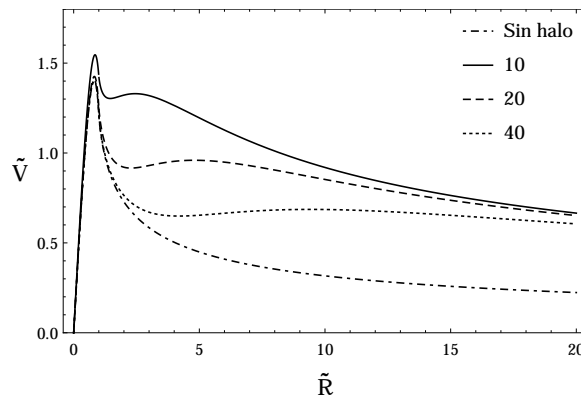
Figura 2.7: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = \{0.15, 0.20, 0.40\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son la constante a_h del halo y la constante a del disco, donde: $\tilde{M} = 7$, $b/a_h = 10$, $\tilde{a} = \{0.15, 0.20, 0.40\}$.



(a) Densidad del halo

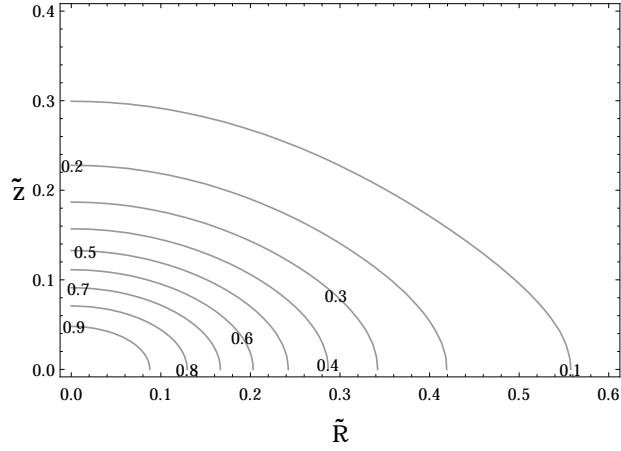


(b) Contornos de tres halos

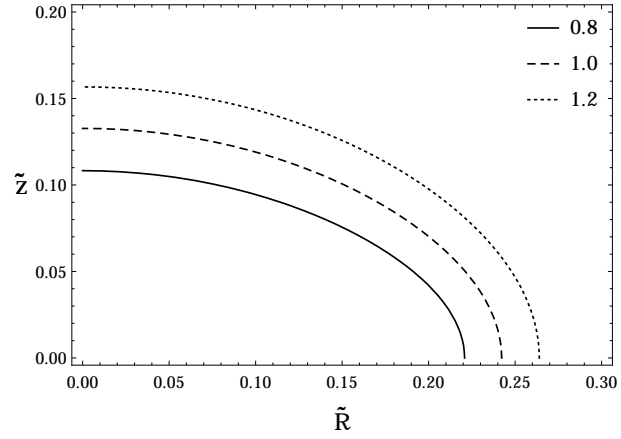


(c) Curva de rotación

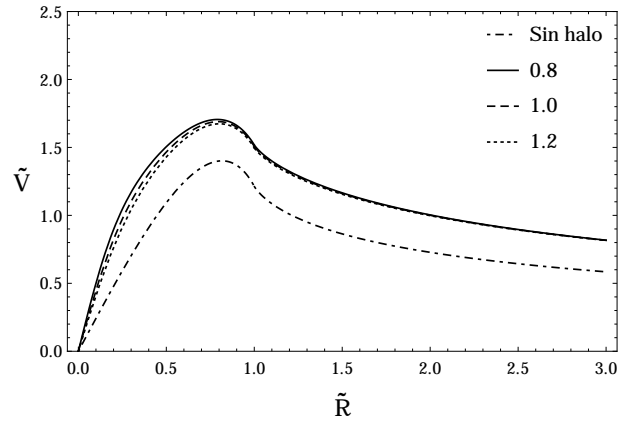
Figura 2.8: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{10, 20, 40\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 8$, $\tilde{a} = 0.20$ y $b/a_h = \{10, 20, 40\}$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.9: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 1$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{0.8, 1.0, 1.2\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 1$, $\tilde{a} = 0.2$ y $b/a_h = \{0.8, 1.0, 1.2\}$.

Caso 3: $b/a_h < 1$

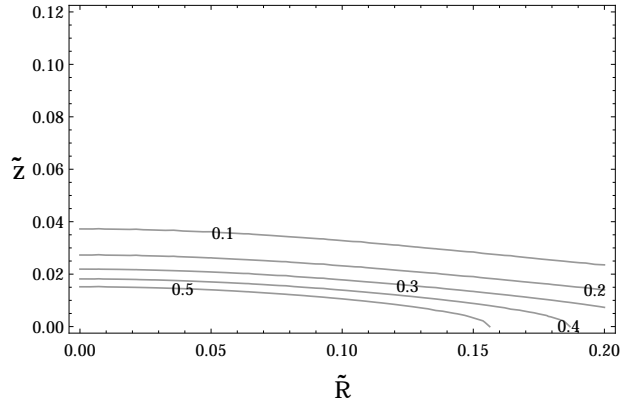
En el cuadro (a) de la figura 2.10 se observa una estructura discoidal muy pequeña, sus primeros diez contornos están confinados en una región más pequeña que la tercera parte del radio del disco, donde la razón entre las masas es de $\tilde{M} = 1$, en este caso la estructura es discoidal, pequeña y muy masiva. En el cuadro (b) de la figura 2.10 se observa el aplanamiento de estas distribuciones de materia debido a la disminución de la razón b/a_h . En el cuadro (c) de la figura 2.10 se observa un leve aumento en la magnitud de la velocidad a medida que las distribuciones discoidales se hacen más planas. Este pequeño cambio se observa en la parte interna del disco.

SECCIÓN 2.4**Modelo de halo $n = 1$ y modelo de disco $m = 1$**

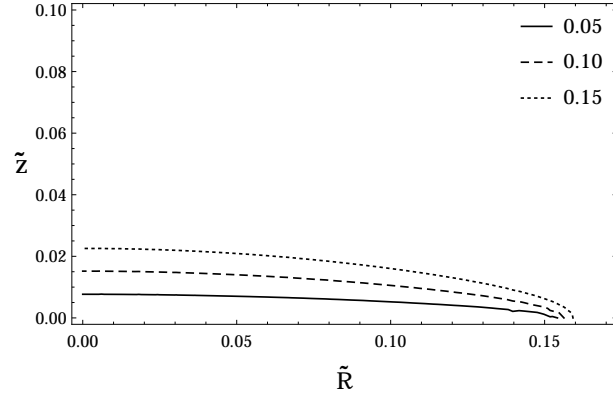
El disco empleado en este modelo es el mismo utilizado en la primera sección de resultados, ver la Ec. (2.1). El segundo modelo de halo, con términos de monopolo y dipolo, se obtiene aplicando la Ec. (1.48) al potencial Ec. (1.49b), para obtener

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} = \frac{4\pi a^3 \rho}{M_h} = & \frac{\tilde{b}^2}{\zeta^3 [\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \zeta)^2]^{7/2}} \left\{ \tilde{a}^5 \tilde{A}_0 + 3\tilde{A}_0 \tilde{z}^2 \zeta (\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) - \tilde{A}_1 (\tilde{R}^4 + 8\tilde{R}^2 \tilde{z}^2 - 8\tilde{z}^4) \right. \\
& + \tilde{b}^4 (8\tilde{A}_1 + 3\tilde{A}_0 \zeta) + \tilde{a}^4 (2\tilde{A}_1 + 7\tilde{A}_0 \zeta) + \tilde{b}^2 [-8\tilde{A}_1 (\tilde{R}^2 - 2\tilde{z}^2) \\
& + 3\tilde{A}_0 \zeta (\tilde{R}^2 + 2\tilde{z}^2)] + 2\tilde{a}^3 [7\tilde{A}_1 \zeta + \tilde{A}_0 (9\tilde{b}^2 + \tilde{R}^2 + 9\tilde{z}^2)] \\
& + \tilde{a} [13\tilde{b}^4 \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \zeta (-7\tilde{R}^2 + 26\tilde{z}^2 + 26\tilde{b}^2) + \tilde{A}_0 (\tilde{R}^4 + 8\tilde{R}^2 \tilde{z}^2 + 8\tilde{b}^2 \tilde{R}^2 \\
& + 26\tilde{b}^2 \tilde{z}^2)] + \tilde{a}^2 [\tilde{A}_0 \zeta (7\tilde{R}^2 + 22\tilde{z}^2) + \tilde{A}_1 (\tilde{R}^2 + 30\tilde{z}^2) \\
& \left. + \tilde{b}^2 (30\tilde{A}_1 + 22\tilde{A}_0 \zeta) \right\}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

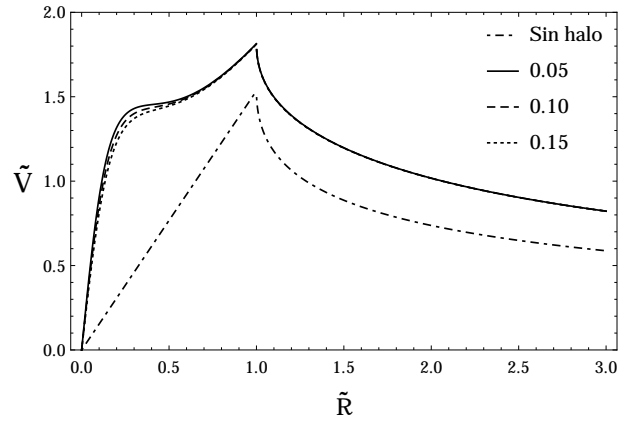
donde $\tilde{A}_0 = A_0/A_0 = 1$ es adimensional, $\tilde{A}_1 = A_1/(aA_0)$ es la razón entre la constante del dipolo A_1 y la constante del monopolo A_0 adimensionalizada y reescalada a través de la constante a del disco.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.10: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 0.1$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\tilde{\rho} = cte = 0.5\tilde{\rho}_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = \{0.05, 0.10, 0.15\}$ respectivamente. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son las constantes b y a_h del halo de materia, donde: $\tilde{M} = 1$, $\tilde{a} = 0.2$ y $b/a_h = \{0.05, 0.10, 0.15\}$.

La función matemática de la rapidez, para este modelo, se obtiene reemplazando ($m = 1, n = 1$) dentro de la ecuación general, ver la Ec. (1.57), en el modelo de disco y halo, tal que la expresión de la rapidez circular tiene la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^2 = & \frac{3\pi}{4} \tilde{R}^2 \left(1 - H(\tilde{R} - 1) \right) - \frac{3}{2} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} - \tilde{R}^2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right) \\ & \times H(\tilde{R} - 1) + \frac{\tilde{A}_0 \tilde{M} \tilde{R}^2}{\left(\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2 \right)^{3/2}} + \frac{\tilde{A}_1 \tilde{M} \tilde{R}^2 (\tilde{a} + \tilde{b})}{\left(\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2 \right)^{5/2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

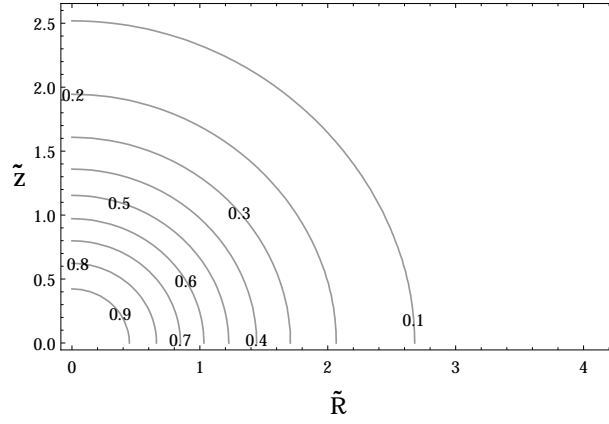
donde $\tilde{V}^2 = aV^2/(M_d G)$ y $\tilde{M} = M_h/M_d$, tal que la rapidez está adimensionalizada.

2.4.1 Razón entre la masa del halo y la masa del disco

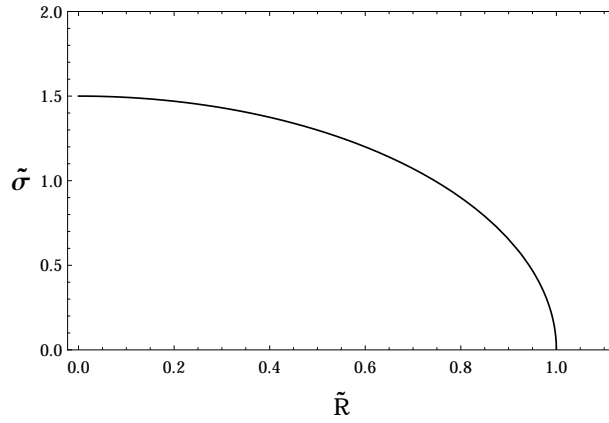
En el cuadro (a) de la figura 2.11 se observa un halo de gran tamaño casi esférico. En el cuadro (b) de la figura 2.11 se observa el perfil de densidad del disco delgado. En el cuadro (c) de la figura 2.11 se puede observar el aplanamiento de la curva de rotación a medida que la masa del halo aumenta.

2.4.2 Razón entre el término dipolar y el término monopolar

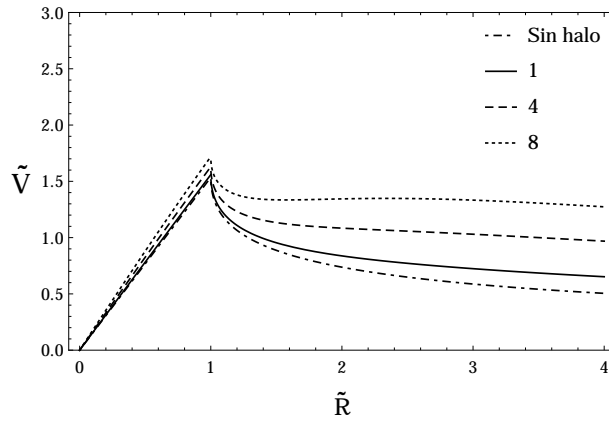
En el cuadro (a) de la figura 2.12 se observa una distribución de materia en 3D de tamaño pequeño, sus primeros diez contornos abarcan una región más pequeña que un tercio del radio del disco, bastante achatado a lo largo del eje \tilde{z} . La razón entre la masa de esta estructura y el disco es de $\tilde{M} = 1.5$. En el cuadro (b) de la figura 2.12 se observa cómo se comprime radialmente la estructura, cuando la razón \tilde{A}_1 aumenta. En el cuadro (c) de la figura 2.12 se observa un aumento en la magnitud de la velocidad, en la región interior del disco, a medida que la forma de la estructura se alarga, cuando A_1/A_0 aumenta. La importancia de esta curva está en que a través de ésta se puede explicar el aplanamiento de la curva de rotación, en su parte interna, debido a la presencia de estructuras de materia con las características observadas.



(a) Densidad del halo

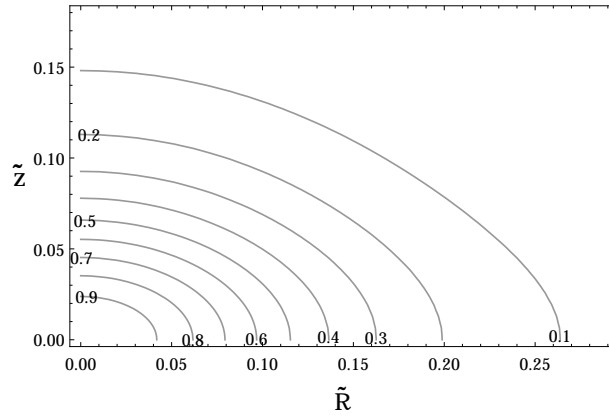


(b) Perfil de densidad del disco

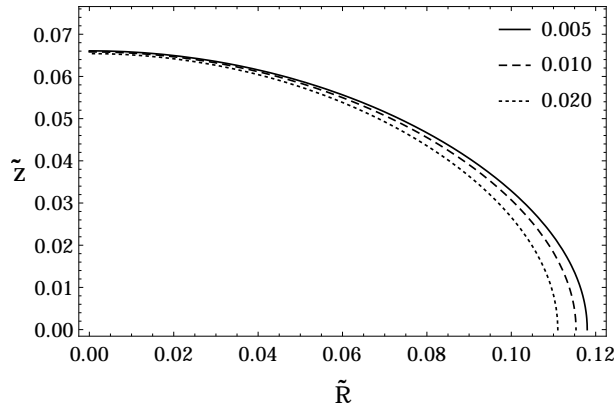


(c) Curva de rotación

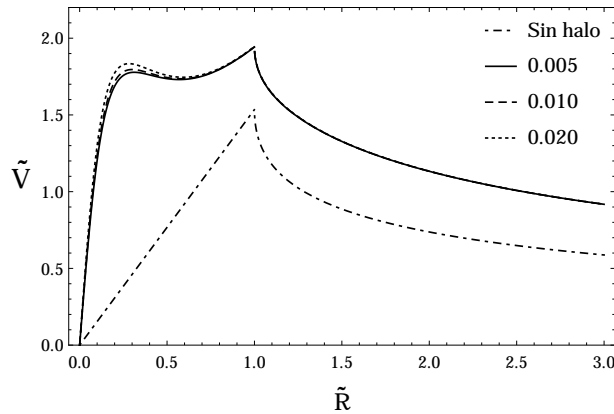
Figura 2.11: (a) Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_1 = 0.05$. (b) Perfil de densidad del disco, modelo $m = 1$, a lo largo del eje \tilde{R} . (c) Curva de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{a} = 0.2$, $\tilde{A}_1 = 0.05$, la masa del disco M_d y la masa del halo M_h , donde $\tilde{M} = \{1, 4, 8\}$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.12: (a) Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.1, b/a_h = 1, \tilde{A}_1 = 0.005$. (b) Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho = cte = 0.5\rho_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2, \tilde{A}_1 = \{0.005, 0.010, 0.020\}$ respectivamente. (c) Curva de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{M} = 1.5, \tilde{a} = 0.2$, el término monopolar A_0 y el término dipolar A_1 , de la expansión multipolar, donde $\tilde{A}_1 = \{0.005, 0.010, 0.020\}$.

2.4.3 Razón entre la constante a_h y la constante a

En el cuadro (a) de la figura 2.13 se observa un halo de gran tamaño ligeramente achatado. En el cuadro (b) de la figura 2.13 se observa el aumento de tamaño de los contornos a medida que a_h/a aumenta. En el cuadro (c) de la figura 2.13 se observan regiones planas en las curvas de rotación, las cuales se extienden a mayor distancia para halos de mayor tamaño.

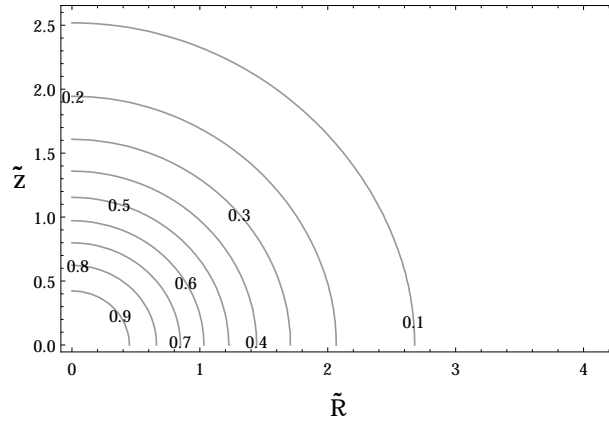
2.4.4 Razón entre las constantes b y a_h del halo de materia

Caso 1: $b/a_h > 1$

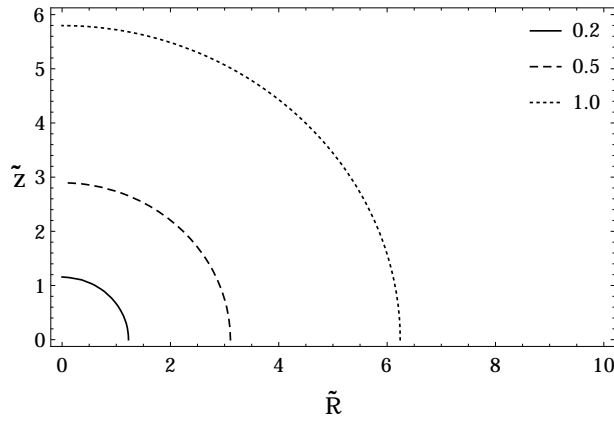
En el cuadro (a) de la figura 2.14 se observa un halo esferoidal muy pequeño, ya que la mayoría de la masa está confinada en una región más pequeña que la tercera parte del radio del disco. Este tipo de estructura puede representar, por ejemplo, la protuberancia central de una galaxia espiral. Sin embargo, en este trabajo no aborda esta parte comparativa del modelo con alguna galaxia en particular. Se requiere de criterios de comparación, lo que involucra un trabajo de revisión exhaustivo adicional. En el cuadro (b) de la figura 2.14 se observa un achatamiento de la distribución a lo largo del eje de simetría, a medida que la razón b/a_h disminuye. En el cuadro (c) de la figura 2.14 se observan curvas aplanadas en la región interna del disco galáctico, este comportamiento se obtuvo usando halos esferoidales muy masivos y a la vez muy pequeños.

Caso 2: $b/a_h \approx 1$

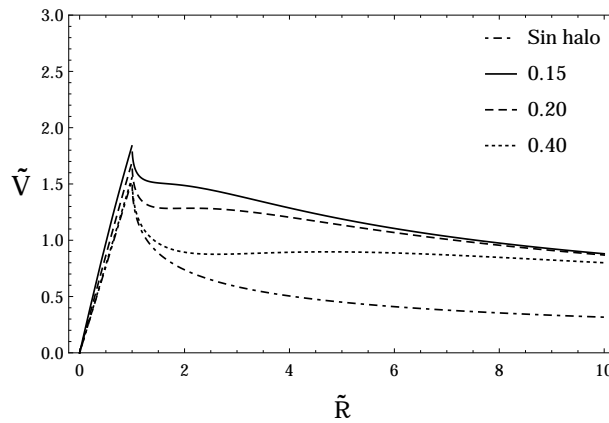
En el cuadro (a) de la figura 2.15 se observa un halo achatado más grande que el tamaño del disco galáctico. En el cuadro (b) de la figura 2.15 se observa un aumento en el tamaño de los halos a medida que b/a_h aumenta. En el cuadro (c) de la figura 2.15 se observa un aplanamiento en las curvas de rotación, en la parte externa del disco galáctico, debido a las estructuras previamente descritas.



(a) Densidad del halo

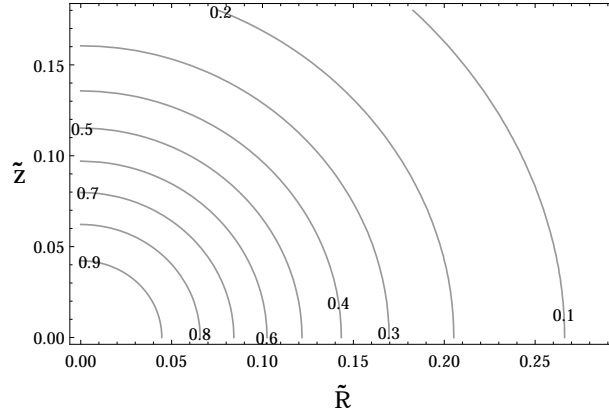


(b) Contornos de tres halos

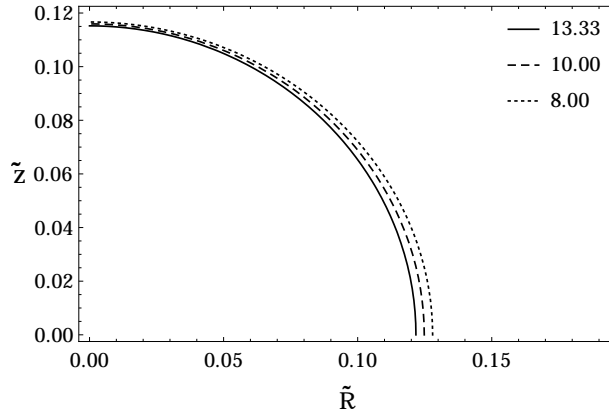


(c) Curvas de rotación

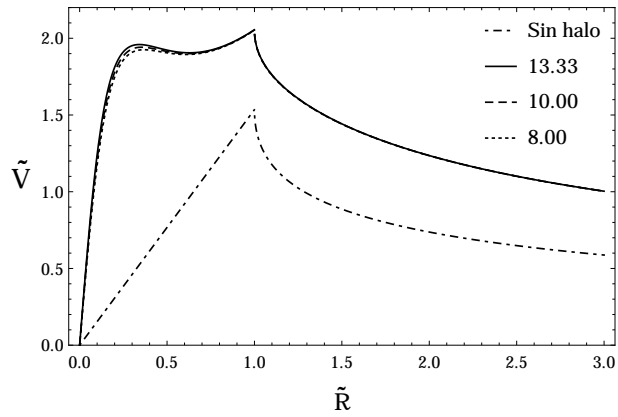
Figura 2.13: (a) Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.2, b/a_h = 10, \tilde{A}_1 = 0.05$. (b) Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho = cte = 0.5\rho_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2, \tilde{A}_1 = 0.05, b/a_h = 10, \tilde{a} = 0.2$. (c) Curva de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{M} = 7, \tilde{a} = 0.2, \tilde{A}_1 = 0.05, b/a_h = 10$, la constante a del disco y la constante a_h del halo de materia, donde $\tilde{a} = \{0.2, 0.5, 1.0\}$.



(a) Densidad del halo

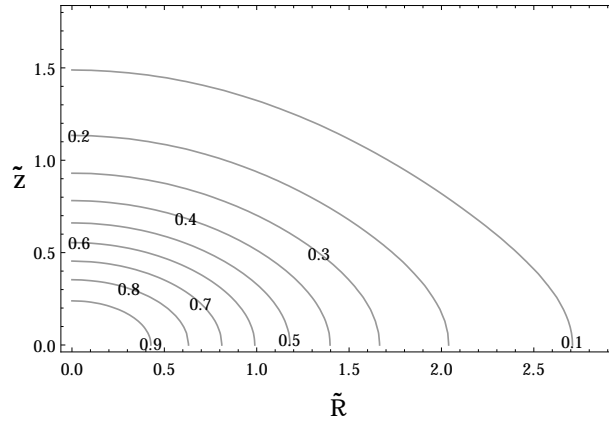


(b) Contornos de tres halos

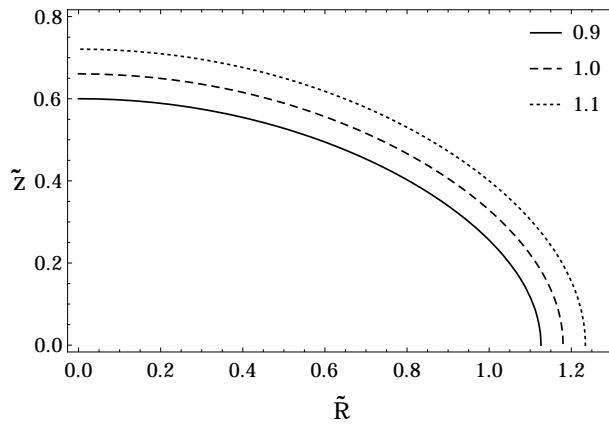


(c) Curvas de rotación

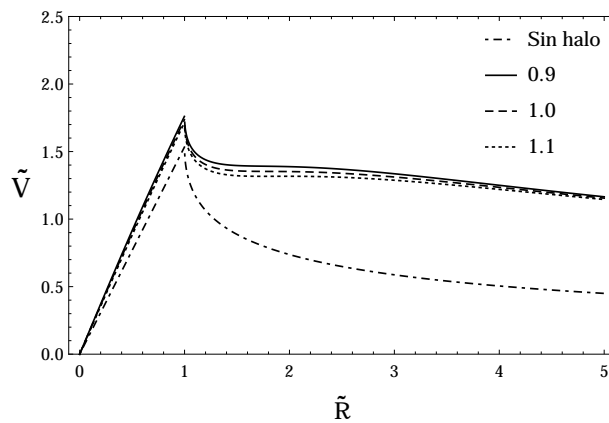
Figura 2.14: (a) Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 0.02$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_1 = 0.001$. (b) Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho = cte = 0.5\rho_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 0.2$, $\tilde{A}_1 = 0.001$, $b/a_h = 10$, $\tilde{a} = 0.02$. (c) Curva de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{M} = 2$, $b/a_h = 10$, $\tilde{A}_1 = 0.001$, las constantes b y a_h , del halo de materia, donde $b/a_h = \{13.33, 10.00, 8.00\}$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos

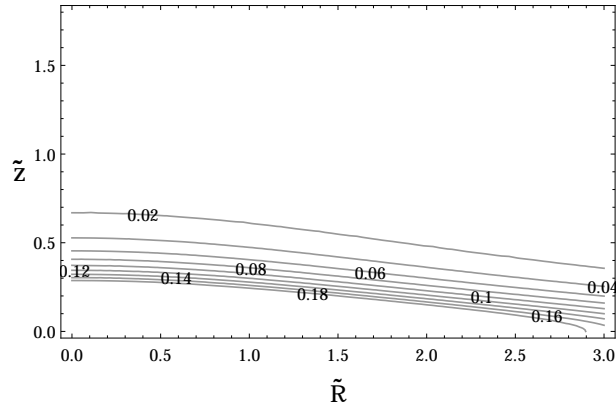


(c) Curva de rotación

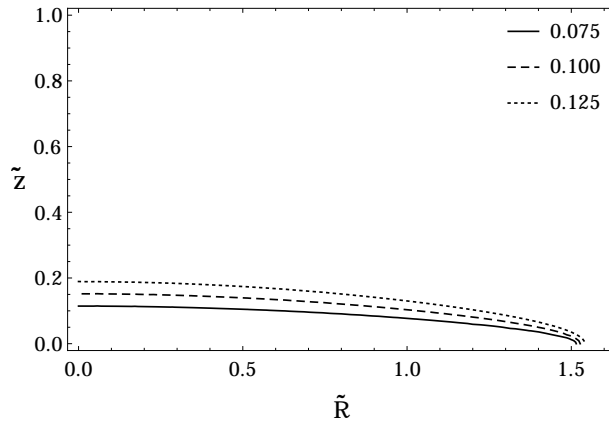
Figura 2.15: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 1.0$, $b/a_h = 1.0$, $\tilde{A}_1 = 0.05$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho = cte = 0.5\rho_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{A}_1 = 0.05$, $b/a_h = 1$, $\tilde{a} = 1$. **(c)** Curvas de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{M} = 7$, $\tilde{A}_1 = 0.05$, las constantes b y a_h , del halo de materia, donde $b/a_h = \{0.9, 1.0, 1.1\}$.

Caso 3: $b/a_h < 1$

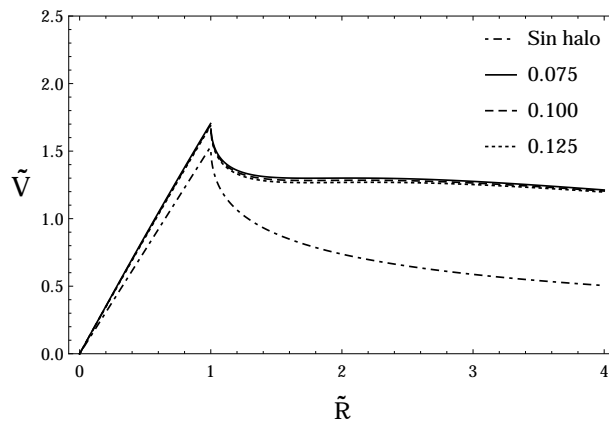
En el cuadro (a) de la figura 2.16 se observa una distribución discoidal $3D$ de mayor tamaño que el disco delgado. En el cuadro (b) de la figura 2.16 se observa un aplanamiento de los contornos de densidad a medida que b/a_h disminuye. En el cuadro (c) de la figura 2.16 se puede observar curvas aplanadas, en la región externa del disco delgado finito, debido a la presencia de distribuciones discoidales muy masivas, donde $\tilde{M} = 7$.



(a) Densidad del halo



(b) Contornos de tres halos



(c) Curva de rotación

Figura 2.16: **(a)** Contornos de densidad en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes a un halo con los siguientes parámetros: $\tilde{a} = 2.0$, $b/a_h = 0.100$, $\tilde{A}_1 = 0.05$. **(b)** Contornos de densidad de tres halos que satisfacen $\rho = cte = 0.5\rho_0$, cuyos parámetros son: $\tilde{a} = 2$, $\tilde{A}_1 = 0.05$, $b/a_h = 0.075$, $\tilde{a} = 1$, $b/a_h = \{0.075, 0.100, 0.125\}$. **(c)** Curva de rotación cuyos parámetros de interés son: $\tilde{M} = 7$, $\tilde{a} = 2.0$, $\tilde{A}_1 = 0.05$, las constantes b y a_h , del halo de materia, donde $b/a_h = \{0.075, 0.100, 0.125\}$.

Conclusiones

Se han construido modelos compuestos de un halo esferoidal y un disco delgado de materia con funciones analíticas que carecen de puntos singulares. Por ejemplo, la densidad de los modelos de halo utilizados tiene un valor finito en el centro de coordenadas, a diferencia de la expresión para la densidad, utilizada en el modelo de Navarro, Frenk y White (NFW) para describir los halos de materia oscura de sus simulaciones, ver referencia [Binney & Tremaine \[2011\]](#). Con respecto a la rapidez circular, también se observan curvas de rotación continuas y suaves, excepto para el primer modelo de disco.

A partir de los modelos particulares escogidos se realizó un análisis de los efectos producidos, en la curva de rapidez circular, como consecuencia de la variación del parámetro \tilde{M} que representa la razón entre la masa de la estructura en $3D$ con respecto al disco de materia en $2D$. De esta manera fue posible obtener regiones planas tanto en la parte interna como en la parte externa del disco. Para aplanar la región interior del disco fue necesario introducir una estructura masiva y de menor tamaño que el radio del disco. La región externa de la curva de rotación fue aplanada utilizando estructuras masivas de gran tamaño, halos, con masas superiores a 7 veces la masa contenida en el disco. Este resultado es importante ya que en la literatura se justifica el comportamiento plano de las curvas de rotación de las galaxias espirales, en sus regiones más externas, debido a una mayor influencia gravitacional de estos halos con respecto al disco galáctico, ver capítulo 1 de [Binney & Tremaine \[2011\]](#).

Fue posible obtener estructuras de diferentes tamaños y formas variando las razones entre los parámetros del disco y el halo a , a_h y b . Esto permite obtener modelos de galaxias que contengan estructuras de diferentes tamaños como: protuberancias centrales, discos delgados y gruesos, halos estelares y halos oscuros.

Como un trabajo posterior se puede pensar en un ajuste del modelo con datos observacionales, utilizando criterios de comparación que deberán ser revisados en la literatura.

Los resultados de este trabajo han sido presentados en dos eventos nacionales: XXV CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA Y IV CONGRESO COLOMBIANO DE INGENIERÍA FÍSICA.

Apéndice **A**

Cálculo de la velocidad circular en $\eta = 0$

Para obtener la expresión analítica de la velocidad circular por fuera del disco, cuando $\eta = 0$, es necesario conocer $\partial\Phi/\partial R$, como se observa en la Ec. (1.15). De esta manera, es necesario aplicar la regla de la cadena, debido a la dependencia del potencial respecto a las coordenadas ξ y η

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial R} + \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial R}. \quad (\text{A.1})$$

Se deriva parcialmente cada una de las ecuaciones de transformación de coordenadas Ec. (1.21a) y Ec. (1.21b), respecto a la coordenada R , tal que

$$R = a^2\xi \frac{\partial\xi}{\partial R} (1 - \eta^2) - a^2\eta \frac{\partial\eta}{\partial R} (1 + \xi^2) \quad (\text{A.2})$$

$$0 = a\eta \frac{\partial\xi}{\partial R} + a\xi \frac{\partial\eta}{\partial R}, \quad (\text{A.3})$$

se quiere conocer la forma de los términos $\partial\xi/\partial R$ y $\partial\eta/\partial R$ para la región exterior al disco. Entonces, reemplazando $\eta = 0$ en la Ec. (A.2) y en la Ec. (A.3), para obtener

$$\frac{\partial \xi}{\partial R} = \frac{R}{a^2 \xi}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial R} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Estos resultados se reemplazan en la Ec. (A.1) y posteriormente en la Ec. (1.15) para obtener finalmente la expresión analítica de la velocidad circular en la región externa al disco, en $z = 0$, la cual está dada por

$$V_{fd}^2(\xi, \eta = 0) = -\frac{1 + \xi^2}{\xi} \sum_{l=0}^m C_{2l} \frac{\partial q_{2l}(\xi)}{\partial \xi} P_{2l}(0), \quad (\text{A.6})$$

esta expresión depende del modelo particular de disco escogido, el cual está determinado por el índice m .

Bibliografía

- BINNEY, J. & TREMAINE, S. (2011). *Galactic dynamics*. Princeton university press.
- CARROLL, B. W. & OSTLIE, D. A. (2007). *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson Addison Wesley.
- DE ZEEUW, T. & PFENNIGER, D. (1988). Potential-density pairs for galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **235**, 949–995.
- FABER, T. (2006). *Galactic halos and gravastars: static spherically symmetric space-times in modern general relativity and astrophysics*. M. Sc. Thesis in Applied Mathematics, Victoria University of Wellington.
- GONZALEZ, G. A. & REINA, J. I. (2006). An Infinite Family of Generalized Kalnajs Disks. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **371**, 1873–1876.
- HERNQUIST, L. (1990). An analytical model for spherical galaxies and bulges. *The Astrophysical Journal* **356**, 359–364.
- JAFFE, W. (1983). A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **202**(4), 995–999.
- LONG, K. & MURALI, C. (1992). Analytical potentials for barred galaxies. *The Astrophysical Journal* **397**, 44–48.
- MIYAMOTO, M. & NAGAI, R. (1975). Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan* **27**, 533–543.
- OSPINA, P. A. (2006). *Potencial gravitacional y densidad superficial de masa para modelos planos finitos de galaxias no axialmente simétricas*. Trabajo de grado en Física, Universidad Industrial de Santander.
- PAEZ, M. A. (2010). *Modelos Newtonianos de discos gruesos para regiones circun-nucleares de galaxias espirales barradas*. Trabajo de grado en Física, Universidad Industrial de Santander.

- PIERENS, A. & HURÉ, J.-M. (2004). Rotation Curves of Galactic Disks for Arbitrary Surface Density Profiles: A Simple and Efficient Recipe. *ApJ* **605**, 179–182.
- SALAZAR, K. V. (2010). *Modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en la componente discoidal de galaxias espirales*. Trabajo de grado en Física, Universidad Industrial de Santander.
- SATOH, C. (1980). Dynamical models of axisymmetric galaxies and their applications to the elliptical galaxy ngc4697. *Publications of the Astronomical Society of Japan* **32**, 41.
- SCHODEL, R., OTT, T., GENZEL, R., HOFMANN, R., LEHNERT, M. *et al.* (2002). A Star in a 15.2 year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way. *Nature* **419**, 694–696.
- VOGT, D. & LETELIER, P. S. (2005). On Multipolar Analytical Potentials for Galaxies. *pasj* **57**, 871–875.