

Control de un Péndulo Invertido Didáctico Usando Sincronización en Tiempo Real con Matlab

Jhon Esteban Rojas Benavides y Andrés Felipe Navarro Vega

Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniero Mecánico

Director

Carlos Borrás Pinilla

Magíster en Ingeniería Mecánica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2023

### **Agradecimientos**

En primer lugar, le quiero dar gracias a Dios por brindarme la oportunidad de vivir esta grandiosa experiencia de completar mi carrera y además por permitirme crecer no solo académicamente sino también como persona.

Agradezco a mi Padre Jhon Jairo Rojas Guerrero y a mi Madre Nelly Benavides Olarte por darme su apoyo incondicional y ese aliento de superación durante toda mi vida.

A mis abuelos Julia Guerrero y Evaristo Rojas por ese impulso para iniciar la carrera y apoyarme hasta el último día de sus vidas con ese anhelo de verme convertido en ingeniero.

A mi novia, amigos y familiares por acompañarme durante este proceso y darme el ánimo que necesite en esos episodios difíciles que he tenido.

A mi compañero Andrés Felipe Navarro por hacer parte de esta etapa de mi vida, brindando su apoyo a lo largo de este proceso.

A mi alma mater la Universidad Industrial de Santander por brindarme una formación integral de calidad.

A nuestro director, Carlos Borrás y a su auxiliar, Helio Villegas, por sus conocimientos, aportes y paciencia a lo largo del proyecto.

Muchas gracias.

### ***JHON ESTEBAN ROJAS BENAVIDES***

En primer lugar, quiero dar gracias a mis padres por ser mi motor y mi motivación a lo largo de la carrera, a mi padre por su apoyo y esmero; a mi madre por su paciencia y dedicación a lo largo de este proceso. También a mi hermana la cual es el motor de mi vida, gracias por motivarme siempre a seguir adelante y no desfallecer.

A mis compañeros de carrera y a todas las personas que de una u otra forma fueron partícipes en este proceso y lo hicieron posible y en especial a mi compañero de tesis por su paciencia, apoyo y su ayuda en lo largo de este proceso.

Gracias a la Universidad por todos los conocimientos aprendidos, y también por los gratos momentos que dejaron en mi vida en mi paso por dicha institución

Quiero manifestar agradecimiento al director de este proyecto y a su auxiliar de laboratorio, al ingeniero Carlos Borrás Pinilla por su orientación, sus consejos, su compromiso y su gran apoyo.

Sin ustedes nada de esto habría sido posible, cada uno directa o indirectamente aportaron a este proyecto su granito de arena y me ayudaron a que fuera tomando bases cada vez más sólidas.

Muchas gracias a todos.

### ***ANDRES FELIPE NAVARRO VEGA***

**Contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	11
1. Objetivos .....	12
1.1 Objetivo General .....	12
1.2 Objetivos Específicos.....	12
2. Marco teórico .....	13
2.1 Modelamiento del Péndulo Invertido.....	13
2.2 Dinámica de Motor de Corriente Continua.....	16
2.3 Estrategias de Control Clásicas.....	17
2.3.1 Acción de Control Proporcional (P) .....	18
2.3.2 Acción de Control Integral (I).....	18
2.3.3 Acción de Control Derivativa (D).....	18
2.3.4 Acción de Control Proporcional – Integral (PI).....	19
2.3.5 Acción de Control Proporcional – Derivativa (PD).....	19
2.4 Caja Gris .....	19
2.5 Modos Deslizantes .....	21
2.6 Acciones de Control PID .....	26
3. Estado del Arte.....	27
4. Metodología .....	31
4.1 Ensamblaje la Plata Física .....	32
4.1.1 Diseño Mecánico .....	33

CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO DIDÁCTICO	4
4.2 Diagrama Eléctrico .....	34
4.3 Programa de Obtención de Datos .....	36
4.3.1 Comportamiento de Bloque en Modo Continuo .....	36
4.3.2 Comportamiento de Bloque en Modo Discreto .....	36
4.3.3 Control Motor .....	38
4.3.4 Lectura de Ángulo del Péndulo.....	39
4.3.5 Lectura de Desplazamiento del Carro.....	40
4.4 Ecuaciones Cinemáticas del Sistema .....	41
4.5 Modelo Matemático .....	42
4.6 Validación de Caja Gris .....	43
4.7 Diseño de Control PID del Sistema .....	45
4.7.1 Prueba del Control PID en el Sistema Real .....	49
4.8 Diseño del Control por Modos Deslizantes .....	51
4.8.1. Prueba de Control por Modos Deslizantes en el Sistema Real.....	54
5. Resultados .....	57
6. Conclusiones .....	58
Referencias.....	59
Apéndices.....	61

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. <i>Matriz de estado del arte</i> .....	28
Tabla 2. <i>Listado de sistemas del péndulo</i> .....	33
Tabla 3. <i>Listado de componentes eléctricos y electrónicos</i> .....	35
Tabla 4. <i>Tiempo de muestreo</i> .....	41
Tabla 5. <i>Parámetros del modelo matemático</i> .....	43
Tabla 6. <i>Bloque de parámetros de PID del ángulo</i> .....	47
Tabla 7. <i>Bloque de parámetros de PID de la posición</i> .....	47
Tabla 8. <i>Parámetros del bloque de modos deslizantes</i> .....	53

**Lista de Figura**

	<b>Pág.</b>
Figura 1. <i>Pasos principales en el desarrollo del sistema de control</i> .....	31
Figura 2. <i>Diagrama de flujo de la metodología</i> .....	32
Figura 3. <i>Diagrama de sistemas del péndulo</i> .....	32
Figura 4. <i>Diagrama eléctrico</i> .....	35
Figura 5. <i>Analog input</i> .....	37
Figura 6. <i>Encoder</i> .....	37
Figura 7. <i>Bloque PWM</i> .....	37
Figura 8. <i>Bloque de switcheo para movimiento de motor</i> .....	38
Figura 9. <i>Bloque de lectura del ángulo de péndulo</i> .....	39
Figura 10. <i>Bloque Works pace</i> .....	39
Figura 11. <i>Bloque de lectura de posición del carro</i> .....	40
Figura 12. <i>Bloque Works pace</i> .....	40
Figura 13. <i>Programa de lectura de datos del sistema</i> .....	41
Figura 14. <i>Datos del sistema</i> .....	42
Figura 15. <i>Identificación del proceso</i> .....	43
Figura 16. <i>Comparación entre los datos del sistema y el modelo matemático</i> .....	44
Figura 17. <i>Planta virtual del modelo matemático</i> .....	45
Figura 18. <i>Modelo del control PID del sistema</i> .....	46
Figura 19. <i>Referencia de paso del PID Tuner</i> .....	47
Figura 20. <i>Estabilización de la planta virtual con control PID</i> .....	48

CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO DIDÁCTICO	7
Figura 21. Programa de control PID en paralelo .....	49
Figura 22. Control PID del sistema real.....	50
Figura 23. Control PID del sistema real con perturbación .....	51
Figura 24. Modelo del control por modos deslizantes del sistema .....	52
Figura 25. Bloque de modos deslizantes .....	52
Figura 26. Estabilización de la planta virtual con control por modos deslizantes.....	54
Figura 27. Programa de control por modos deslizantes en paralelo del sistema real .....	55
Figura 28. Control por modos deslizantes del sistema real.....	55
Figura 29. Control por modos deslizantes del sistema real con perturbación .....	56

**Lista de Apéndices**

	<b>Pág.</b>
Apéndice A. <i>Pruebas del funcionamiento del controlador del sistema.</i> .....	61
Apéndice B. <i>Función del modelo matemático.</i> .....	62
Apéndice C. <i>Código de estimación de los parámetros del sistema</i> .....	63
Apéndice D. <i>Planos del sistema</i> .....	65
Apéndice E. <i>Manual de funcionamiento del péndulo invertido</i> .....	67

### Resumen

**Título:** Control de un péndulo invertido didáctico usando sincronización en tiempo real con Matlab\*.

**Autor:** Jhon Esteban Rojas Benavides, Andrés Felipe Navarro Vega.\*\*

**Palabras Clave:** Péndulo invertido, sistema, control, modelo matemático.

#### Descripción:

En el desarrollo de este proyecto se dará uso a un sistema no lineal denominado péndulo invertido sobre base móvil, este sistema es uno de los más utilizados a la hora de poner a prueba y ampliar conocimientos sobre diferentes técnicas de control, y además facilita el poder comprender los fenómenos y comportamientos físicos que se presentan en los diferentes espacios.

Para dar cumplimiento a todos los objetivos planteados se desarrolla un controlador con la técnica de modos deslizantes partiendo de un modelo matemático el cual se encarga de controlar el ángulo del péndulo por medio del movimiento del carro (base), el cual se desplaza sobre un riel que limita su movimiento al eje X generando así perturbaciones las cuales son provocadas por una polea y un motor el cual contiene un encoder que brinda información sobre la posición de la base, estas perturbaciones permiten mantener la barra (péndulo) en una posición vertical, incluso cuando se le aplica una fuerza externa a la misma.

Por último, se realizan pruebas del controlador en la planta física obteniendo como resultado un sistema estable verificando que los parámetros hallados del modelo matemático son acordes a la planta física y que la técnica usada es óptima para este tipo de sistemas, además se genera una guía sobre el uso del péndulo para así completar una herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje sobre control.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Carlos Borrás Pinilla, Magíster en Ingeniería Mecánica

**Abstract**

**Title:** Control of a didactic inverted pendulum using real-time synchronization with Matlab\*.

**Author:** Jhon Esteban Rojas Benavides, Andrés Felipe Navarro Vega\*\*

**Keywords:** Inverted pendulum, system, control, mathematical model.

**Description:**

In the development of this project will make use of a nonlinear system called inverted pendulum on mobile base, this system is one of the most used when testing and expanding knowledge about different control techniques, and also facilitates the understanding of the phenomena and physical behaviors that occur in different spaces.

To fulfill all the objectives, a controller is developed with the technique of sliding modes based on a mathematical model which is responsible for controlling the angle of the pendulum through the movement of the carriage (base), which moves on a rail that limits its movement to the X axis thus generating disturbances which are caused by a pulley and a motor which contains an encoder that provides information about the position of the base, being disturbances allow to keep the bar (pendulum) in a vertical position, even when an external force is applied to it.

Finally, the controller is tested in the physical plant obtaining as a result a stable system verifying that the parameters found in the mathematical model are consistent with the physical plant and that the technique used is optimal for this type of system, also generates a guide on the use of the pendulum to complete a teaching tool for strengthening learning about control.

---

\* Degree work

\*\* Faculty of Physicomechanical Engineering, School of Mechanical Engineering, Director: Carlos Borrás Pinilla, Master in Mechanical Engineering

## Introducción

Los sistemas de péndulo invertido tienen como característica ser una herramienta que emula sistemas dinámicos los cuales son aplicados en la actualidad en diferentes campos de la industria tales como; la robótica, la biomecánica, la aeroespacial y en algunos transportes; para que este sistema sea aprovechable se hace necesario tener una herramienta que permita controlar, las diferentes variables que conforman el movimiento del sistema.

Gran parte de la optimización de procesos se debe a la automatización e implementación de sistemas de control cada vez más eficaces y que necesitan menos supervisión humana, previniendo los errores de los mismos, logrando mayor eficiencia, rapidez y precisión (Roca Garcia, 2015).

A lo largo de los últimos años se ha logrado apreciar un gran crecimiento y avance con respecto al uso del control automático, eso asociado a que la industria requiere operaciones cada vez más efectivas, utilizando tanto la menor mano de obra posible, como tiempo de operaciones; utilizando así diferentes técnicas de programación a la hora de diseñar controles que rijan ciertos parámetros.

Ya que este tipo de técnicas se utiliza en una gran cantidad de industrias como lo son las petroleras, automotrices, eléctricas y demás. Se hace necesario que los estudiantes de carreras afines tengan una interacción con herramientas didácticas a lo largo de su formación académica que les permita desarrollar habilidades a la hora de enfrentarse al control automático.

## 1. Objetivos

### 1.1 Objetivo General

Realizar un péndulo invertido, el cual será controlado en tiempo real utilizando un gemelo digital y controladores sintonizados con el modelo matemático, por medio del cual se nos permita evidenciar el funcionamiento de la herramienta didáctica de laboratorio de sistemas dinámicos y control de la escuela de ingeniería mecánica.

### 1.2 Objetivos Específicos

Desarrollar una herramienta didáctica basada en un péndulo simple adquirido por los autores.

Ensamblar un péndulo invertido basado en un prototipo comercial que permita comunicación en tiempo real con simulink.

Obtener el modelo matemático y validarlo a través del método de caja gris.

Controlar un péndulo invertido utilizando herramientas de modos deslizantes.

Elaborar manuales que permitan entender los diferentes sistemas de la herramienta, así como su uso.

## 2. Marco teórico

### 2.1 Modelamiento del Péndulo Invertido

El péndulo invertido es uno de los sistemas más utilizados para experimentar las diferentes estrategias de control por su dinámica no lineal, ya que esta permite comprender los fenómenos y comportamientos físicos de plantas y equipos presentes en diferentes espacios.

En el área de vehículos eléctricos unipersonales, la compañía Segway, Inc., ha diseñado diversos vehículos donde el conductor introduce como referencia la velocidad y dirección, mientras el vehículo debe mantener el equilibrio (Triviño Macías, 2020). Otro ejemplo también sería, los cohetes espaciales, ya que estos también requieren de un sistema de control para mantener la posición vertical durante el despegue. También se estudia el péndulo invertido para enfocar lo relacionado con el movimiento en robots bípedos a la hora de caminar (Triviño Macías, 2020).

Existen diferentes variantes de péndulos invertidos siendo el más estudiado el denominado péndulo invertido sobre base móvil, este sistema físico con características no lineales, consta de un carro, que se mueve en el eje X con el fin de balancear el péndulo hasta poder lograr el punto de equilibrio deseado o el rango en el que se quiere que se mueva, dicho carro se mueve sobre un riel, el cual restringe su movimiento en un solo eje, el desplazamiento de este es generado a través de un motor y una polea; en dicho sistema se puede medir: la posición, la velocidad y el ángulo en el cual se encuentra el péndulo. Estos valores son determinados gracias a un encoder que se encuentra acoplado en el motor, y un sensor análogo el cual está posicionado en la base del péndulo.

Dicho péndulo es inestable, ya que por efecto de la gravedad puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección, a menos que se le aplique una fuerza de control, esto conlleva

diferentes retos que supone su dinámica no lineal, este problema es comprendido en dos dimensiones ya que al moverse sobre un plano se dificulta el control de dicho sistema.

En la actualidad, el diseño de controladores para sistemas pendulares es un tema, que posee un cierto nivel de complejidad debido a sus características físicas y su aplicabilidad con los diferentes equipos a nivel industrial (Palacio Parra, 2015).

En los sistemas mecánicos se presenta la necesidad de obtener las ecuaciones que nos permitan controlar los movimientos de dichos sistemas; esto se obtiene por medio de la matemática clásica de newton, aunque, en estos casos se presenta cierta problemática relacionada con las variables vectoriales del movimiento del sistema que complican el análisis cuando se tienen rotaciones o algunas articulaciones. La solución a esta problemática la encontramos al emplear el método lagrangiano, el cual por sus consideraciones energéticas facilita el análisis del sistema mecánico.

Para el modelo matemático del péndulo, se idealizan dos dimensiones las cuales serán los ejes (X,Y) para poder analizar así el sistema físico, y las ecuaciones para iniciar el análisis matemático del modelo son basadas en la segunda ley de newton analizando el sistema en dos dimensiones.

Realizando sumatoria de fuerzas en el eje X se obtiene la siguiente ecuación.

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad \text{Ec. 1.}$$

Siendo:

M: masa del carrito

$\ddot{x}$ : aceleración del carrito

$b\dot{x}$ : fricción del carrito

N: Fuerza reactiva en eje X

F: Fuerza aplicada al carrito

Dicha normal es la generada por el péndulo al carrito; posteriormente se calcula la Normal realizando sumatoria de fuerzas sobre el péndulo en el eje X, y esto entrega como resultado la siguiente expresión:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad \text{Ec. 2.}$$

Siendo:

m: masa del péndulo

l: longitud del péndulo

$\dot{\theta}$ : velocidad angular del péndulo

$\ddot{\theta}$ : aceleración angular del péndulo

Haciendo sustitución entre las dos ecuaciones en mención, se logra encontrar la ecuación de la fuerza.

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad \text{Ec. 3.}$$

Como se tiene una fuerza reactiva en el punto de unión entre el péndulo y el carrito en el eje X, de la misma forma se tiene una en el eje Y que se le denomina "P", se realiza sumatoria de fuerzas perpendiculares al péndulo.

$$P\sin\theta + N\cos\theta - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \quad \text{Ec. 4.}$$

Ahora se procede a realizar sumatoria de momentos en el centroide del péndulo, de esta forma se añade un nuevo término a nuestro sistema de ecuaciones el cual es la inercia.

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta} \quad \text{Ec. 5.}$$

Realizando sustitución de términos en las dos últimas ecuaciones en mención, obtenemos la segunda ecuación gobernante.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta \quad \text{Ec. 6.}$$

A través de operaciones de sustitución de términos entre las ecuaciones ya mencionadas se busca identificar la aceleración lineal y la aceleración angular.

$$\ddot{x} = \frac{(I+ml^2)(F-b\dot{x}+ml\ddot{\theta}\sin\theta)+m^2l^2g\sin\theta\cos\theta}{-(ml\cos\theta)^2+(I+ml^2)(M+m)} \quad \text{Ec. 7.}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F+(M+m)\tan\theta-b\dot{x}+ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{\frac{(I+ml)(M+m)}{-ml\cos\theta}+ml\cos\theta} \quad \text{Ec. 8.}$$

Estas dos últimas ecuaciones son con el fin de linealizar el sistema, el cual es un sistema no lineal.

## 2.2 Dinámica de Motor de Corriente Continua

Los motores cumplen con una función principal la cual es imprimir movimiento a un sistema físico, en este caso del péndulo simple invertido es importante encontrar la relación entre las variables eléctricas y mecánicas.

En motores de corriente continua el circuito equivalente puede expresarse en función de voltaje, corriente y velocidad de giro.

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ea(t) \quad \text{Ec. 9.}$$

Donde  $E(t)$  (Fuerza contra electromotriz) sucede cuando los conductores se mueven a través de la corriente de campo.

En este caso se asume una relación proporcional  $Ke$  entre la velocidad angular del motor y el voltaje inducido.

$$Ea(t) = Ke(t) \quad \text{Ec. 10.}$$

En los motores de imán el efecto inductivo es muy bajo por lo tanto este se desprecia y se despeja la ecuación obteniendo así:

$$i(t) = \frac{v(t) - Ea(t)}{R} \quad \text{Ec. 11.}$$

$$i(t) = \frac{v(t) - Ke\omega(t)}{R} \quad \text{Ec. 12.}$$

Teniendo estos parámetros se supone que la corriente eléctrica que circula por el motor DC es directamente proporcional al torque.

$$T(t) = Kt i(t) \quad \text{Ec. 13.}$$

Sustituyendo la ecuación de corriente encontramos la siguiente ecuación de Torque.

$$T(t) = Kt v(t) - Kew(t) / R \quad \text{Ec. 14.}$$

Teniendo en cuenta que la variable matemática de interés es fuerza y no torque se procede a realizar el siguiente despeje usando la ecuación entre fuerza y torque.

$$Tm = d * F \quad \text{Ec. 15.}$$

$$F = Tm / d \quad \text{Ec. 16}$$

Contando con la ecuación de fuerza en términos de torque procedemos a sustituir la variable torque por su ecuación en términos eléctricos y así llegando a la ecuación deseada.

$$F = Kt (t) - Kew(t) R.d \quad \text{Ec. 17.}$$

### 2.3 Estrategias de Control Clásicas

El banco del péndulo, al ser un sistema inestable hace que sea necesario incluir un controlador capaz de estabilizar un sistema de control es la unión de distintos componentes encargados de administrar y ordenar el comportamiento de otro sistema con el fin de llegar a los objetivos deseados. Existen distintos métodos de control algunos más robustos que otros, pero con la misma finalidad, en esta ocasión se desea que el controlador permita mantener el péndulo verticalizado.

Para obtener un buen resultado por parte del controlador, se debe tener un buen y correcto ajuste de los tres parámetros.

### ***2.3.1 Acción de Control Proporcional (P)***

Esta acción de control consiste en multiplicar la señal de error por la constante  $K_p$ . Actúa sobre el presente, utilizando la información actual del error. En el caso de que el valor deseado esté muy lejos del valor obtenido en la respuesta del sistema, se aplicaría más acción. El valor será mayor si se está por debajo o menor si se está por encima.

$$u(t) = K_p e(t) \quad \text{Ec. 18.}$$

El factor proporcional influye en la velocidad de respuesta del sistema, en la medida en que se aumenta su valor, se disminuye el tiempo de respuesta, aunque si se aumenta demasiado, puede dar lugar a la aparición de oscilaciones que puede perjudicar (Triviño Macías, 2020).

### ***2.3.2 Acción de Control Integral (I)***

Esta consiste en una parte proporcional a la integral del error. La integral se puede ver como la suma de la señal de error, siendo cada vez mayor a medida que transcurre el tiempo, es decir, que toma en cuenta valores pasados del error. Esta acción garantiza que el error del sistema en régimen permanente sea cero.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(T) dT \quad \text{Ec. 19.}$$

El componente integral  $K_i$  también afecta a la velocidad de respuesta, de esta forma, si este valor es muy pequeño el sistema demora más en eliminar el error.

La componente integral tiende a oscilar la respuesta del sistema si se sobrepasa su valor, pero en mayor medida que la componente proporcional (Triviño Macías, 2020).

### ***2.3.3 Acción de Control Derivativa (D)***

Dicha acción consiste en realizar la derivada del error  $e(t)$  y tiene en cuenta la respuesta transitoria del sistema para así mejorar su estabilidad. La derivada del error hace referencia a la

velocidad con la que cambia la estabilidad del sistema, aumentando la amplitud de la acción de control cuando el error cambia de manera rápida y disminuyendo cuando cambia lentamente.

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec. 20.}$$

En términos generales, la componente derivativa mejora la respuesta del sistema para valores de  $Kd$  moderados, ya que, en ocasiones, demanda acciones de alto esfuerzo por un cambio muy brusco respecto a la referencia (Triviño Macías, 2020).

### **2.3.4 Acción de Control Proporcional – Integral (PI)**

Por medio de la combinación de estas dos componentes se consigue cambiar la acción de control, en cada momento, debido a la componente integral, dependiendo del estado del error en el presente (Triviño Macías, 2020).

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(T) dT \quad \text{Ec. 21.}$$

### **2.3.5 Acción de Control Proporcional – Derivativa (PD)**

El componente derivativo toma en cuenta la velocidad a la que varía el error, y esto, se suma a la proporcional cuando cambia rápidamente y se resta cuando cambia lentamente (Triviño Macías, 2020).

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec. 22.}$$

## **2.4 Caja Gris**

Al momento de realizar un prototipo de caja gris sobre un sistema no lineal es importante analizar el cómo están confirmadas. Los patrones no lineales pueden abarcar algo de negro y algo de blanco en proporciones muy específicas, y esto lo va a marcar la misma contextura que se haya establecido para dicho patrón.

Los modelos que son completamente blancos, también suelen ser conocidos como modelos de conocimiento, y estos son la respuesta a una gran cantidad de procedimientos en base a los

primeros principios. Este encuadre se basa en contemplar todos los enlaces que se presenten entre variables relevantes y el dar uso a un software como soporte para lograr dar un orden a estas relaciones de la mejor manera. Toman en cuenta para ello, leyes de conservación físicas y químicas; entre ellas tenemos el balance de masa, balance de componente, balance de energía y el balance de momento.

Los prototipos que son completamente negros, suelen ser llamados modelos empíricos o modelos experimentales, y tienen una relación con otros prototipos que tienen unos parámetros que no cuentan con una connotación física, y su finalidad es llegar a dar con un modelo que logre acoplarse a los datos obtenidos.

En estos prototipos no lineales se acostumbra a pensar en cajas negras para definir funciones en cuanto al dominio de la frecuencia. Y para los prototipos no lineales, las redes neuronales artificiales simbolizan la organización de la caja negra que se ha encargado de llamar más la atención.

Los prototipos de caja gris, tienen su origen debido a la unión de los modelos de conocimiento y los modelos completamente empíricos. La realidad de estos modelos está sujeta al apuro de lograr encontrar modelos que sean más ajustables y eficaces, ya que no resulta probable describir de manera completa la dinámica del sistema dando uso solo a modelos de conocimiento o totalmente empíricos.

El prototipo de caja gris suele ser el más realista, ya que para este caso se tiene una mayor información acerca de leyes que dan lugar al comportamiento de ciertas variables de este caso.

También tenemos que el prototipo de caja gris, suele ser menos fácil de descifrar que los modelos de conocimiento, pero en este caso requiere de menos tiempo para montarla, en comparación con un modelo de conocimiento, estableciendo el mismo nivel de dificultad.

Los modelos grises, al enlazar el empirismo y la teoría, dan lugar a llegar a obtener que prototipos elaborados tengan contenidos teóricos y experimentales regularmente importantes, ya que además de dar uso a la amplitud de la exactitud de predicciones, también se encargan de disminuir en gran manera los gastos a los que se tienen lugar en la etapa del prototipo o ejemplar.

## **2.5 Modos Deslizantes**

En los últimos treinta años, las estrategias para el diseño de controles avanzados por estructura variable VSC (Variable Structure Control), han encontrado gran evolución, entre los que se encuentra el Control por Modo Deslizante (Sliding Mode Control) y el Control Predictivo basado en Modelo (Model Predictive Control). Los sistemas VSC tienen como principal característica que tienen dos o más leyes de control y una regla de decisión, la regla de decisión es comúnmente llamada función de conmutación, la cual tiene como entrada alguna medida del comportamiento del sistema en el instante actual, y su salida corresponde a la ley de control que se aplicaría en ese mismo instante de tiempo. Al aplicar esta ley de control, vamos a tener un sistema de estructura variable o una combinación de subsistemas con leyes de control fijas e individuales, cada una de estas leyes es válida en determinada región del comportamiento del sistema. Por otra parte, tenemos que, las propiedades de cada una de las estructuras del sistema pueden ser combinadas, logrando así que se pueda diseñar una estructura con diversas propiedades (Gonzalez Rental, 2012).

La denominación de modos deslizantes proviene del hecho que, en este modo de operación, los estados del sistema son forzados a evolucionar (o deslizarse) sobre un subespacio del espacio de estados que nombraremos de esta manera: superficie de control o de modo deslizante.

Para el diseño de controladores encontramos que existen distintos métodos de control; esto debido a que se deben tener en cuenta las necesidades que se presenta. De esta forma, han ido

evolucionando y apareciendo nuevos algoritmos, que permiten disminuir las desventajas de los métodos clásicos.

Una de las técnicas más utilizadas de control clásico es, el PID, aun cuando ha presentado inconvenientes para sistemas lineales, como por ejemplo el encontrar la restricción del cálculo de sus ganancias solo para sistemas de bajo orden. Esto implica que, si la inestabilidad del sistema presenta un coeficiente de orden superior, el control PID no se puede implementar. Esto dio lugar a que fuera necesario desarrollar una nueva técnica de control conocida como Modos Deslizantes. Se dice que fue implementada por Emelyanov y otros colaboradores, en la antigua Unión Soviética en los años 50.

Este, es un control por realimentación no lineal donde se cambia su estructura para lograr el desempeño deseado. Debido a que el control por modos deslizantes es más sensible a variaciones en los parámetros del sistema y perturbaciones, se puede considerar su uso para el control de sistemas sus actuados. Esta ley de control consta de dos partes: el control equivalente y el control de conmutación. Mientras el control equivalente se encarga de garantizar que los estados del sistema permanezcan dentro de la superficie deslizante, el control de conmutación lleva el sistema hacia una superficie específica.

Dicho control por modos deslizantes presenta algunas ventajas, entre ellas tenemos: la insensibilidad a las variaciones de parámetros y rechazo de perturbaciones externas, es decir, añaden una solidez al sistema. Además de ello, este tipo de control, está siendo utilizado en sistemas de potencia, controles para brazos robóticos, problemas de diseño aeroespacial, entre otros.

Un claro ejemplo de las técnicas clásicas de control es el ya mencionado PID, el cual, a pesar de ser de las técnicas más utilizadas, presenta ciertas desventajas e inconvenientes, por

ejemplo: para los sistemas lineales, cuando el coeficiente de inestabilidad es de orden superior el control PID no es aplicable. Partiendo de esto, nace el control por modos deslizantes.

Tenemos también, que los sistemas de control por modo deslizante representan una parte fundamental de la teoría de sistemas no lineales propuesta en la ex Unión Soviética. Consiste en el empleo de acciones de control conmutadas o discontinuas sobre una o varias superficies de conmutación. La teoría de control por modo deslizante se ha combinado con la teoría de sistemas inteligentes como vienen siendo: la lógica difusa, redes neuronales, razonamiento probabilístico, algoritmos fanáticos, entre otros.

La idea básica del control por modo deslizante consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. De esta manera, el comportamiento dinámico del sistema, en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De este modo, plasmando los objetivos de control en tales ecuaciones mediante un diseño adecuado de las mismas, es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables.

El control por modos deslizantes, es un control no lineal que consta de dos partes: un control equivalente y un control de conmutación; esto, debido a que es un control más sensible a variaciones, en dicho control es esencial seleccionar la superficie deslizante, ya que de esto depende la estabilización del péndulo en su posición invertida, una de las ventajas más notorias del control por modos deslizantes es la robustez que añade al sistema; las perturbaciones externas no afectan el sistema, por lo que la principal ventaja del control por modos deslizantes es que aporta robustez cuando se presenten perturbaciones tanto internas, como externas.

El método de modos deslizantes se basan en aplicar una señal de control conmutando a alta frecuencia, por medio de la cual se logra llevar el estado del sistema a una superficie denominada

superficie de deslizamiento  $\sigma = 0$ , gracias a esto se puede obtener un comportamiento dinámico concreto del sistema en lazo cerrado, este comportamiento se vuelve completamente insensible a un tipo particular de incertidumbre debido al modelo; una vez se encuentre en la superficie, la acción de control deberá mantenerlo en la superficie ante posibles perturbaciones externas; por lo que la principal ventaja del control por modos deslizantes es que aporta robustez ante perturbaciones, tanto internas como externas. La superficie de deslizamiento será diseñada con el fin de que el estado cumpla las especificaciones deseadas (González Rental, 2012).

El control por modo deslizante se caracteriza por dos comportamientos en lazo cerrado denominados modo de alcance y modo deslizante o de deslizamiento. El primero hace referencia a cuando el sistema entra a este modo gracias a la acción de una ley de control llamada ley de alcanzabilidad, con el fin de forzar el alcance de la superficie de deslizamiento; cuando el sistema esté en la superficie o en su cercanía, se pasa al siguiente modo de control. El segundo, es el comportamiento en el que la trayectoria del estado se desliza sobre la superficie y converge a un atractor estable incluido en la superficie, debido a la acción de una ley de control llamada control equivalente que satisface la condición de deslizamiento.

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{Ec. 23.}$$

A comienzos de los años 1962, B. Hamel dio inicio a estudios relacionados con controladores no lineales con el fin de acabar con las limitantes que existían hasta el momento, y propuso una expresión que actuaría sobre la señal de error de un sistema realimentado, esta expresión está definida por la relación:

$$u = |F_1(x, \dot{x}, \dots)| \operatorname{sgn}(F_2(x, \dot{x}, \dots)) \quad \text{Ec. 24.}$$

Donde  $| \cdot |$  se refiere al valor absoluto y las funciones  $F_1$  y  $F_2$  son filtros lineales, al implementar esta acción de control, se tendría una salida discontinua pero modulada por una función de una variable de estado y sus derivadas. Dado lo anterior, se consideró elegir  $u$  como

$$u = -|x|sgn(x + k\dot{x}) \quad \text{Ec. 25.}$$

Para llegar a la fórmula anterior, es conveniente desarrollar el siguiente ejemplo, consideremos un sistema de la forma

$$F_1(x, \dot{x}, \dots) = x \text{ y } F_2(x, \dot{x}, \dots) = (x + k\dot{x}) \quad \text{Ec. 26.}$$

Para llegar a la expresión anterior, es necesario desarrollar el siguiente ejemplo, consideremos un sistema de la forma

$$G(s) = \frac{a^2}{s^2} \quad \text{Ec. 27.}$$

Si tomamos como ley de control la expresión:

$$u = -|F(x)|sgn(\sigma(x)) \quad \text{Ec. 28.}$$

Donde  $\sigma(x)$  es la superficie de deslizamiento, sería necesario contar con una expresión que defina la superficie de deslizamiento. Eligiendo

$$\sigma(x) = x_1 + kx_2 \quad \text{Ec. 29.}$$

Y  $F(x)$  es la variable a controlar,  $x_1$ , entonces

$$u = -|x_1|sgn(x_1 + kx_2) \quad \text{Ec. 30.}$$

*Nota:* (González Rental, 2012).

Es posible plantear ciertos pasos a tener en cuenta para realizar un controlador por modos deslizantes:

1. Proponer una superficie deslizante.
2. Encontrar la derivada que contenga el término de control y así sustituirla en la ecuación de la superficie deslizante

3. Con dicha derivada reemplazar la ecuación de estado para encontrar el control equivalente el cual es el encargado de restringir el desplazamiento.

4. A través del método ensayo se diseña el controlador para encontrar el vector de estados deseado.

## 2.6 Acciones de Control PID

Los sistemas de control por modo deslizante representan una parte primordial de la teoría de sistemas no lineales propuesta en la ex Unión Soviética (Adán, 2015). Tenemos que dicha teoría consiste en el empleo de acciones de control conmutadas o discontinuas sobre una o varias superficies de conmutación (Gutiérrez Gallego, 2009). La teoría de control por modo deslizante se ha combinado con la teoría de sistemas inteligentes tales como lógica difusa, redes neuronales, razonamiento probabilístico, algoritmos fanáticos, entre otros (Adán, 2015).

Los controladores más comunes a nivel industrial se clasifican en función de las formas de las ecuaciones que describen su operación, proporcional P, proporcional-integral PI, proporcional-derivativo PD y proporcional-integral-derivativo PID (González Rental, 2012).

La ecuación que se encarga de describir la operación de la acción de control PID es la siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec. 31.}$$

Y la ecuación de transferencia

$$G_{pid}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad \text{Ec. 32.}$$

El controlador PID cuenta con una combinación de características de las acciones ya mencionadas, y puede mejorar la estabilidad y el error en estado estable.

La forma ideal de definir un controlador PID es la mostrada a continuación:

$$G_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad \text{Ec. 33.}$$

Pero, el término derivativo puro  $T_d s$  puede ser modificado por la ecuación

$$\frac{T_d}{1 + \gamma T_d s} \quad \text{Ec. 34.}$$

Para llegar a tener un PID real

$$G_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1 + \gamma T_d s} \right) \quad \text{Ec. 35.}$$

Donde tenemos que la constante  $\gamma$  puede tomar cualquier valor alrededor de 0.1 (Gonzalez Rental, 2012).

### 3. Estado del Arte

En la actualidad la ingeniería de control se ha convertido en un área fundamental debido a la necesidad de la sociedad de simular y comprender el comportamiento de equipos en distintas áreas.

El péndulo invertido es una de las herramientas más usadas para analizar comportamientos a través de distintas estrategias de control esto debido a su dinámica no lineal la cual permite comprender distintos fenómenos presentes en la actualidad.

El control por modos deslizantes es un control robusto que no se ve afectado por las perturbaciones externas del sistema; para el caso del péndulo simple invertido es uno de los controles más adecuados a usar. La tabla 1. Matriz del estado del arte. Muestra una relación donde se establecen los diferentes estudios a través del tiempo sobre el control por modos deslizantes y el uso de los péndulos simples en la ingeniería de control.

**Tabla 1.***Matriz de estado del arte*

Autores y año	Título	Aporte Científico
Giraldo E, Montoya O, Valenzuela J (2012)	Control global de un péndulo rotacional invertido empleando modelos de energía	El péndulo invertido de rotación permite la aplicación y prueba de algoritmos de control no lineal que pueden ser usados en sistemas mecatrónicos más complejos ya (posibles aplicaciones en las áreas de robótica, navegación autónoma, sistemas de control de posición, etc.)
Cadena C, Oscar Mauricio; Pazos A, Jhon Eyber; Rozo C, Leonel Darío. (2005)	Diseño de controlador por medio de PI generalizado para un sistema de suspensión de camión.	De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no-lineales y puede representar con precisión el comportamiento de los sistemas reales en muchos casos útiles.
Betancourt Manjarres, Ruben Dario; Morales Rodriguez, Stefania. (2014)	Diseño e implementación de un controlador por modos deslizantes para el péndulo invertido.	Los sistemas que se estudian en el entorno académico son representados por medio de modelos matemáticos; a partir de ahí se diseña e implementa un controlador que permita al comportamiento de la planta responder de forma casi instantánea a cambios ocasionados por el entorno o perturbaciones tales como ruidos en el medio.

Autores y año	Título	Aporte Científico
Sanabria T, Camilo A; Hernández G, Óscar M. (2009)	Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados	Las técnicas de control moderno han sido ampliamente utilizadas en diferentes tipos de plantas, entre las que se encuentra el péndulo invertido simple.
Rodríguez, Gabriel R; Sánchez Sánchez, Pablo; Reyes Cortés, Fernando; Michua Camarillo, Antonio; Calderón Flores Benjamín; Cid Monjaraz, Jaime; Torres Monsivais, Juan C y Morales Timal, Gabriela. (2009)	Modelado, Control y Simulación de un Sistema Péndulo Invertido Sobre Base Móvil	El péndulo invertido es uno de los ejemplos más conocidos de sistemas para estabilizar, fue ampliamente estudiado por la comunidad científica, y actualmente es un problema importante de control, ya que cada vez hay más sistemas que pueden aproximarse con este modelo.
Adolfo Cortés Gustavo Cardona (2017)	Diseño, simulación y control de un péndulo invertido doble lineal para el laboratorio de automática de la EIEE de UNIVALLE	Los sistemas físicos no lineales han sido recientemente objeto de un activo interés por parte de muchos investigadores y diseñadores en áreas tan diversas como control de aviones y naves espaciales, robótica, control de procesos e ingeniería biomédica.
Victor Huilcapia, Byron Lima, Xavier Blasc, Juan Manuel Herrero (2018)	Optimización multiobjetivo en modelado y control de un péndulo invertido rotatorio	En la actualidad se está haciendo énfasis en el estudio de nuevas metodologías para el modelado y diseño de controladores de procesos cada vez más complejos.

Autores y año	Título	Aporte Científico
O. D. Ramírez Cárdenas, J.F. Guerrero Castellanos, J. Linares Flores, S. Durand, W.F. Guerrero Sanchez. (2019)	Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder seguidor	El péndulo invertido sobre base móvil es uno de los sistemas más conocidos y estudiados por la comunidad de robótica y control automático ya que además de ser un sistema no lineal, es un sistema subactuado y con restricciones holonomas  Li et al.
Johnny Omar medina Durán, Ruby Daniela Vargas Quintero, Norbey Chinchilla Herrera, Yesenia Restrepo Chaustre. (2016)	Control neuronal de un sistema de equilibrio (péndulo invertido) en dispositivos lógicos programables	Es de común consenso que para que un sistema actúe como un sistema inteligente debe emular las funciones de las criaturas vivas en cuanto a algunas de sus facultades mentales. Al menos, la inteligencia requiere la habilidad de percibir (agente) y adaptarse al entorno (aprendizaje), tomar decisiones y realizar acciones de control.
Luis Geovanny Triviño Macias. (2020)	Modelado, simulación y control de un péndulo invertido	El péndulo invertido constituye uno de los sistemas no lineales más utilizados para la experimentación de diferentes estrategias de control.
Oscar Rodriguez, Edwin Tellez Diego Gutierrez. (2012)	Simulación del péndulo invertido rotacional usando easy java simulations y matlab.	Plataformas virtuales se simulan y presentan modelos matemáticos a sistemas reales con el fin de facilitar la

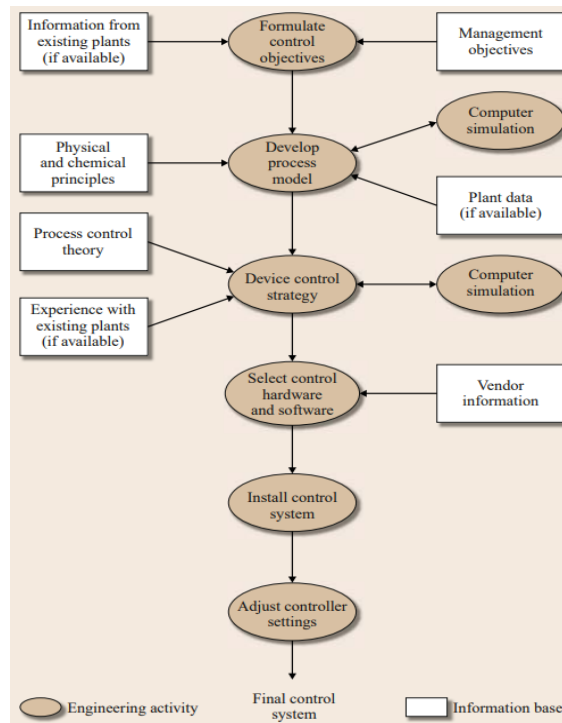
Autores y año	Título	Aporte Científico
		enseñanza del control automático a estudiantes de ingeniería

### 4. Metodología

La metodología se basa en el esquema de la figura 2. El cual plantea sistemáticamente el desarrollo del proyecto con el fin de darle cumplimiento a los objetivos fijados, este basado en el diagrama de flujo de los pasos principales en el desarrollo del sistema de control, planteado en el libro Manual de Springer de Automatización.

**Figura 1.**

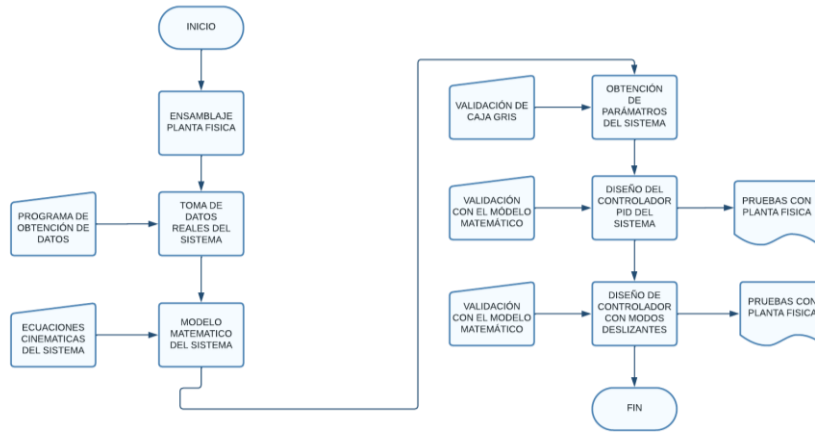
*Pasos principales en el desarrollo del sistema de control*



*Nota.* Tomado de Edgar, T. F. (2009). Springer Handbook of Automation. In Springer Handbook of Automation (Issue January 2009).

**Figura 2.**

*Diagrama de flujo de la metodología*

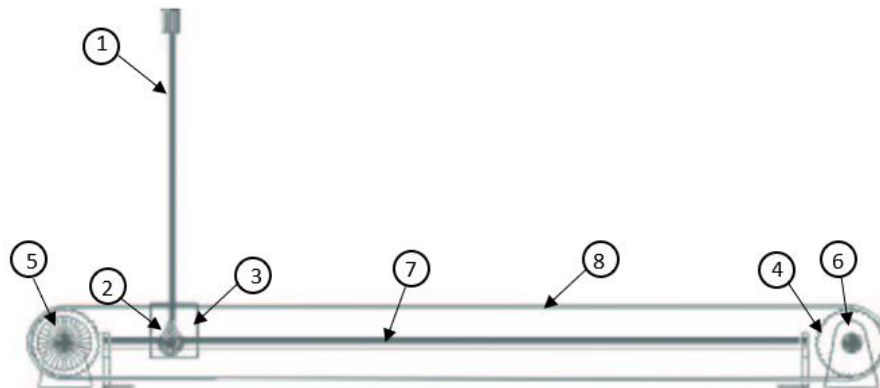


### 4.1 Ensamblaje la Plata Física

Para dar inicio al desarrollo del proyecto se debe ensamblar el péndulo obtenido, para así realizar la toma de datos.

**Figura 3.**

*Diagrama de sistemas del péndulo*



**Tabla 2.***Listado de sistemas del péndulo*

<b>1</b>	Péndulo
<b>2</b>	Acople Carrito-Péndulo
<b>3</b>	Carrito
<b>4</b>	Polea
<b>5</b>	Motor
<b>6</b>	Base Fija De Las Poleas
<b>7</b>	Riel
<b>8</b>	Correa

**4.1.1 Diseño Mecánico**

Se adquirió un prototipo de péndulo invertido comercial dentro del cual vienen diferentes componentes, los cuales están distribuidos en distintos subsistemas.

- El sistema de tracción; el cual se encuentra conformado por el motor DC, este es un motor DC CANON, dicho motor cuenta con un imán fuerte permanente que genera gran torque. Cuenta también con unas poleas sobre las cuales se encuentra una correa encargada de transferir el movimiento del motor al carrito, para lograr dar movimiento al péndulo. Y, por último, cuenta un riel cuadrado con ranuras el cual actúa como guía del carrito y así limite su movimiento a en el eje X.

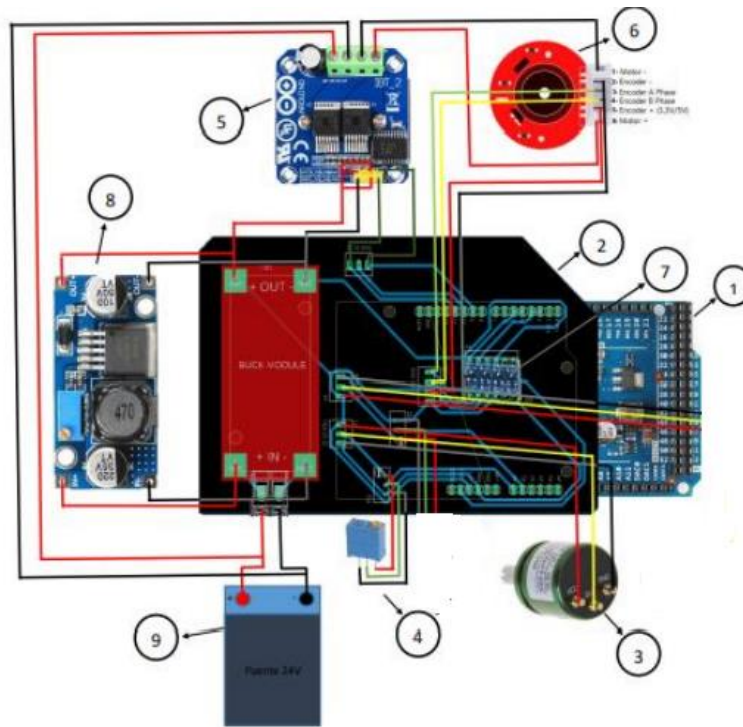
- El sistema de sensado; este se encuentra conformado por un Sensor Óptico Rotativo, el cual es fundamental para la lectura de la posición angular del péndulo un sensor que otorgue dichos datos sin ángulos muertos, dicho sensor cuenta con alta resolución y bajo ruido dinámico. Y también cuenta con un encoder hace las veces de un sensor o contador, el cual se encarga de convertir el movimiento en señales.

- El sistema electrónico; este cuenta con un Arduino DUO, aquí la placa Arduino está basada en un hardware libre, el cual permite la fácil creación de microordenadores, como también mantener ciertos valores de referencia de voltaje, en la mayoría de placas Arduino su valor referencia es de 5 V, el Arduino cumple una función primordial la cual es grabar las instrucciones siendo así el cerebro de la planta, lo cual permite obtener datos de los sensores y controlar dicha planta. Y consta también de una protoboard, la cual es una placa o tarjeta por medio de la cual se llevan a cabo conexiones electrónicas.

- El sistema basculante; este está conformado por el carro que es la pieza que se encarga de mover el péndulo, se encuentra ubicada sobre el riel y es guiada a través de una polea dentada la cual le aporta movimiento para con este lograr verticalizar el péndulo. Y por una barra o lámina de aluminio la cual se encarga de hacer las veces de péndulo en este sistema.

#### **4.2 Diagrama Eléctrico**

En la figura 4. Se puede evidenciar la conexión de los diferentes elementos eléctricos y electrónicos que brindan potencia y lectura, el cual consta de sensores, el encoder para el desplazamiento de la base móvil, los módulos y el conversor de nivel lógico.

**Figura 4.***Diagrama eléctrico***Tabla 3.***Listado de componentes eléctricos y electrónicos*

Ítem	Referencia
1	Arduino Due
2	Baqelita
3	Sensor de ángulo de efecto hall
4	Trimmer de 5 KOhm
5	Puente H BTS7960
6	Motor con encoder NF5475
7	Convertor de niveles bidireccional de 5v a 3.3v
8	Modulo regulador DC Lm2596
9	Fuente DC 24V

### **4.3 Programa de Obtención de Datos**

Para la obtención de datos es necesario desarrollar un programa en cual permite darle movimiento a la planta física y a su vez extraer los datos de los diferentes elementos que componen el sistema.

Para desarrollar el programa se requieren diversos elementos del SIMULINK, así como librerías que sean compatibles con el Arduino ya que para interactuar entre los elementos electrónicos y el Matlab dichos bloques.

#### ***4.3.1 Comportamiento de Bloque en Modo Continuo***

Cuando el bloque se opera en modo continuo, este bloque de onda sinusoidal puede convertirse en inexacto debido a la pérdida de precisión a medida que el tiempo se vuelve más grande.

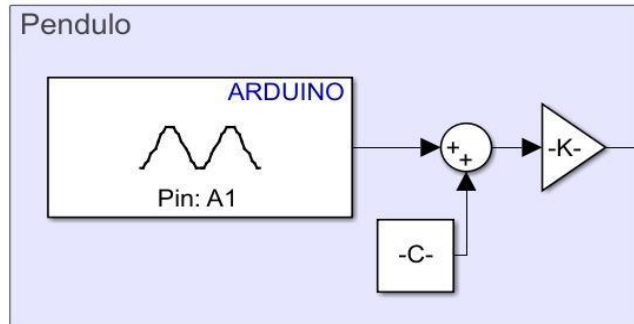
#### ***4.3.2 Comportamiento de Bloque en Modo Discreto***

Un valor de parámetro de tiempo de muestra mayor que cero hace que el bloque se comporte como si estuviera conduciendo un bloque de retención de orden cero cuya muestra de tiempo se establece en ese valor.

De este modo, puede construir modelos con fuentes de onda sinusoidal que son puramente discretas, en lugar de los modelos que son sistemas híbridos continuos/discretos. Los sistemas híbridos son inherentemente más complejos y, como resultado, requieren más tiempo para simular.

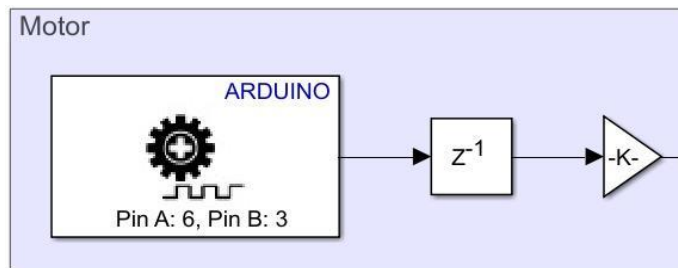
**Figura 5.**

*Analog input*



**Figura 6.**

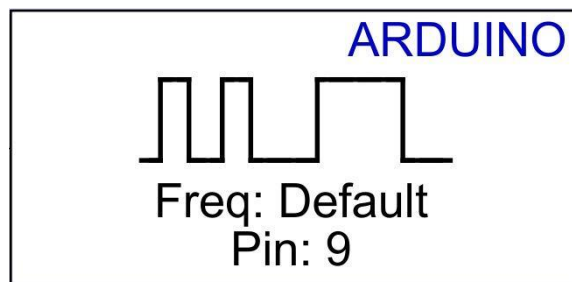
*Encoder*



El bloque encoder actúa como sensor conectado entre el motor y el Arduino, el cual se encarga de indicar a través de ticks el comportamiento del motor, cada vez que la cantidad de ticks disminuya indica que está girando en contra de las manecillas del reloj, así si la cantidad de ticks aumenta el motor estará girando en sentido de las manecillas del reloj.

**Figura 7.**

*Bloque PWM*



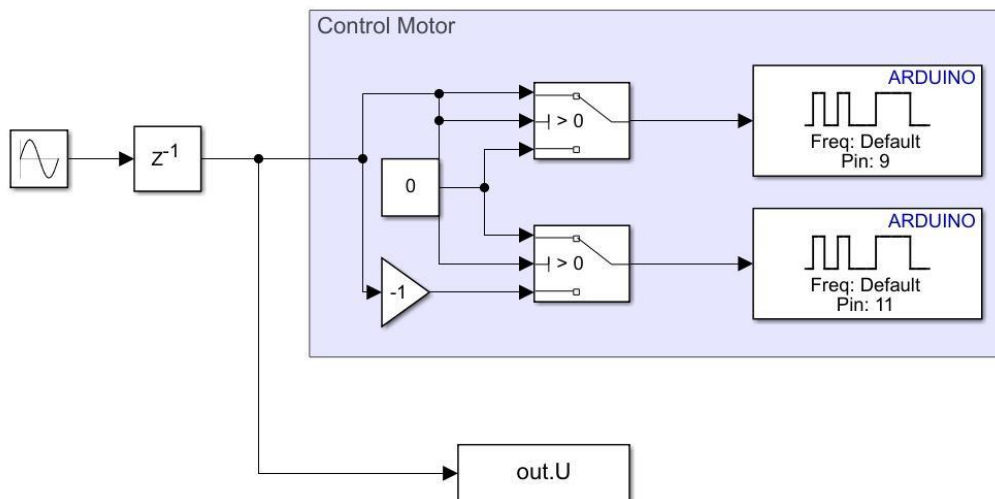
Este bloque permite generar una gama de distintos niveles de potencia y a través de un ancho de pulso genera una señal modulada enviada al bloque de Arduino para con esto obtener una salida analógica.

Una consideración importante a tener en cuenta cuando se trata de bloques PWM en un modelo simulink es que se deben dar tiempos más largos de muestreo para así evitar que el sistema se sature.

### 4.3.3 Control Motor

#### Figura 8.

*Bloque de switcheo para movimiento de motor*



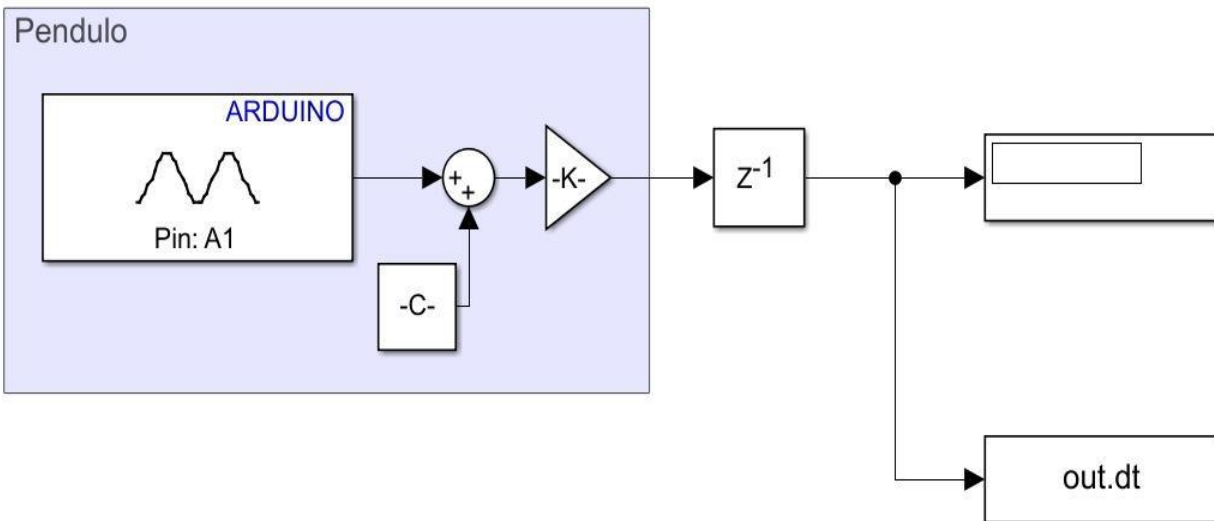
Para poder obtener datos tanto del ángulo del péndulo como del desplazamiento del carro es necesario crear un control del motor que por medio de pulsos y un switcheo genere movimiento del motor que a su vez va a generar que el carro se mueva sobre el riel siempre a la misma distancia del centro del mismo en ambos sentidos.

Y este bloque llamado to Works pace permite almacenar estos datos en tiempo real de las variaciones del voltaje.

#### 4.3.4 Lectura de Ángulo del Péndulo

**Figura 9.**

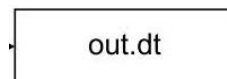
*Bloque de lectura del ángulo de péndulo*



A la hora de realizar la lectura del ángulo es necesario tener una unión de diferentes bloques partiendo del bloque tal de Arduino que es quien está conectado al sensor análogo y brinda la lectura del cambio de ángulo que experimenta el péndulo a medida que el carro se desplaza sobre el riel.

**Figura 10.**

*Bloque Works pace*

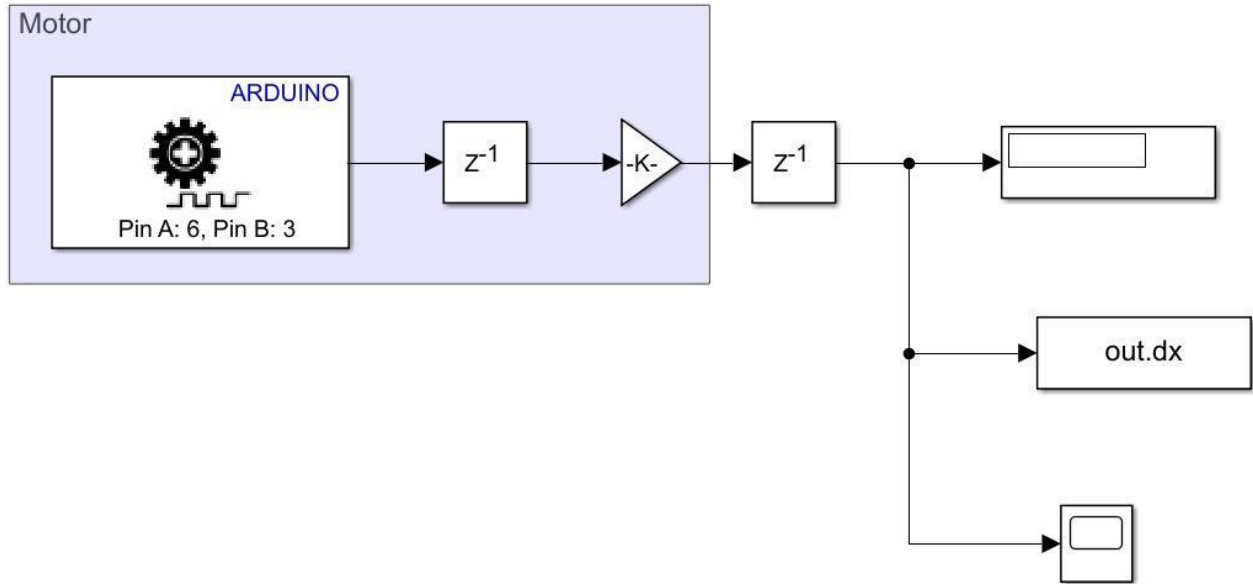


En esta parte del programa bloque to Works pace permite almacenar estos datos en tiempo real de las variaciones de dicho ángulo.

### 4.3.5 Lectura de Desplazamiento del Carro

**Figura 11.**

*Bloque de lectura de posición del carro*



La lectura del desplazamiento del carro se toma a través del bloque de encoder y este hace referencia al encoder que incluye el motor que funciona por medio de un sensor hall, esta parte del programa muestra la distancia recorrida del carro en centímetros (cm) desde el centro del riel a la izquierda  $-X$  y a la derecha  $+X$ .

**Figura 12.**

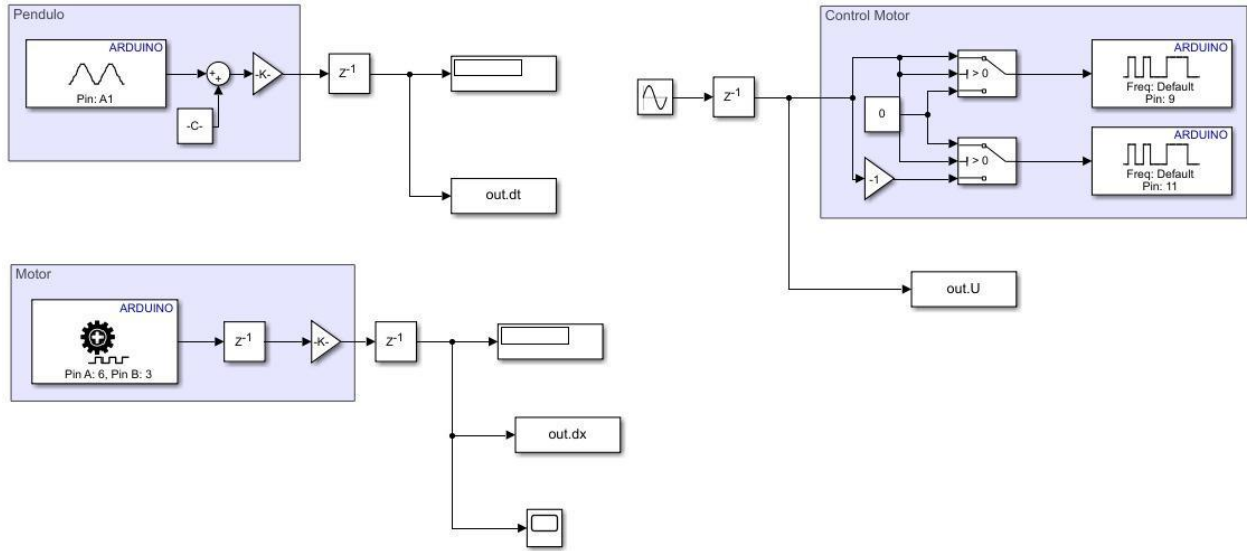
*Bloque Works pace*



En este caso el bloque to Works pace permite almacenar los datos en tiempo real de las variaciones de la posición del carro.

**Figura 13.**

*Programa de lectura de datos del sistema*



Al combinar los tres bloques formamos en programa de lectura de datos del sistema en tiempo real los cuáles son almacenados en una tabla, los datos son tomados durante el tiempo de muestreo de 20 segundos.

**Tabla 4.**

*Tiempo de muestreo*

<b>Tiempo de muestreo</b>	<b>0.01s</b>
---------------------------	--------------

#### 4.4 Ecuaciones Cinemáticas del Sistema

Para completar la ecuaciones del sistema es necesario realizar un reemplazo entre las ecuaciones (Ec. 7.) , (Ec. 8.) y (Ec. 17.) esto con el fin de que las ecuaciones del modelo estén en términos de voltaje ya que esta es la variable de entrada a controlar en el sistema.

$$\frac{(I m (R I m r_p \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - k_e k_t \cos(\theta) \theta + k_t u \cos(\theta) + M_c R g r_p \sin(\theta) - R \dot{b} r_p X \cos(\theta) + R g m r_p \sin(\theta)))}{(I m (R I m r_p \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - k_e k_t \cos(\theta) \theta + k_t u \cos(\theta) + M_c R g r_p \sin(\theta) - \dot{R} b r_p X \cos(\theta) + R g m r_p \sin(\theta)))} \text{ Ec. 42.}$$

$$\frac{-(I m (R I m r_p \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - k_e k_t \cos(\theta) \theta + k_t u \cos(\theta) + M_c R g r_p \sin(\theta) - \dot{R} b r_p X \cos(\theta) + R g m r_p \sin(\theta)))}{2} + R I^3 m^2 r_p \ddot{\theta}^2 \sin(\theta) + R I^2 m r_p \ddot{\theta}^2 \sin(\theta) \text{ Ec. 43.}$$

$$\frac{}{R I^3 m^2 r_p \ddot{\theta}^2 \sin(\theta) + R I^2 m r_p \ddot{\theta}^2 \sin(\theta)}$$

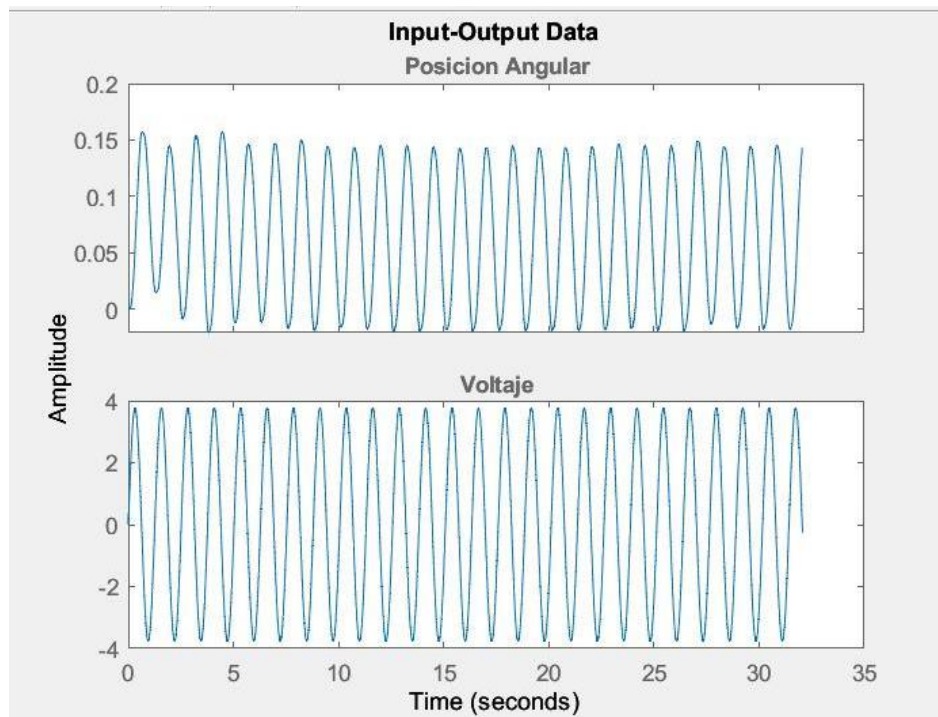
#### 4.5 Modelo Matemático

Estas ecuaciones son las que conforman la función para la obtención de los parámetros del modelo matemático por medio de la validación de caja gris.

Se genera un código en Matlab para evidenciar gráficamente el comportamiento tanto de la posición angular del péndulo como el desplazamiento del carro vs el voltaje con los datos tomados de la plataforma física.

**Figura 14.**

*Datos del sistema*



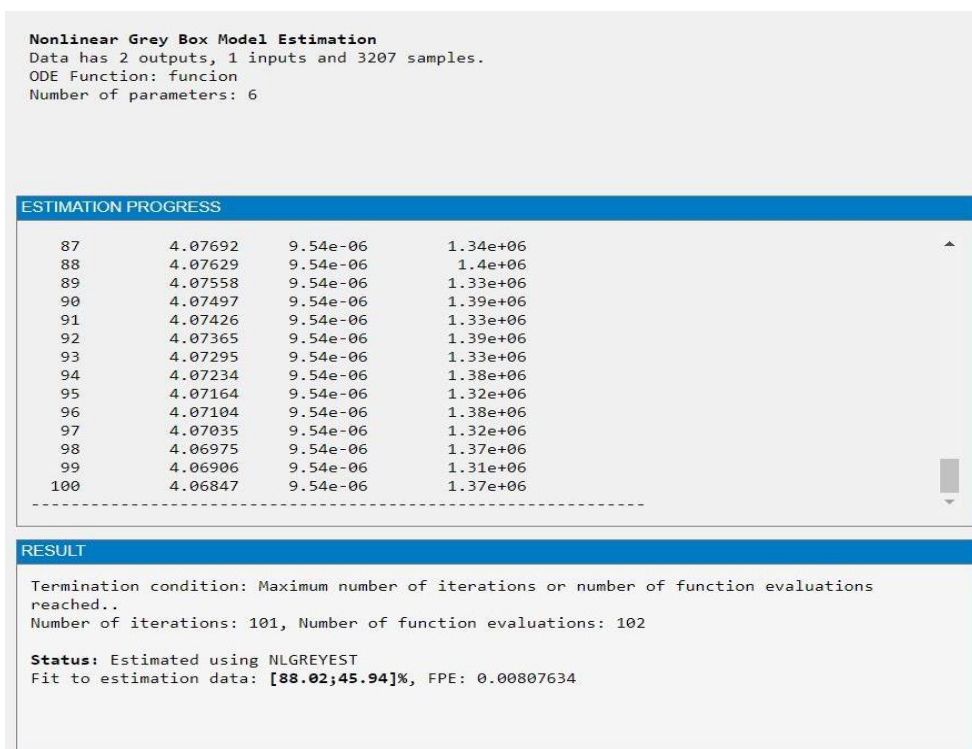
Para evidenciar el porcentaje de igualdad entre las gráficas del modelo matemático y la validación de los datos obtenidos del sistema, se crea un código, el cual junto con los parámetros que se hallan por medio de la validación de caja gris, permite evidenciar este porcentaje.

#### 4.6 Validación de Caja Gris

Para obtener los parámetros desconocidos del sistema se debe hacer una iteración también conocida como validación de caja gris, la cual nos permite llevar el modelo matemático a ser semejante con la planta física, en este caso se le dio un total de 100 iteraciones a la validación para que este resultado fuera lo más cercano posible al sistema real.

#### Figura 15.

##### *Identificación del proceso*



**Tabla 5.**

##### *Parámetros del modelo matemático*

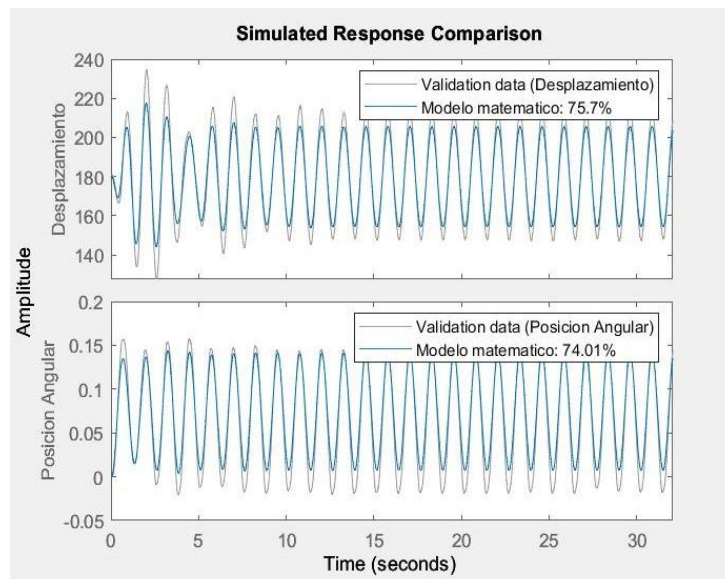
Descripción	Parámetros	Valor	Unidad
Longitud del péndulo	L	0,24	m
Gravedad	g	9,91	m/s <sup>2</sup>
Radio polea	rp	0,02	m

Descripción	Parámetros	Valor	Unidad
Resistencia de armadura	R	5,7	ohm
Masa del carro	Mc	0,165	Kg
Masa del péndulo	m	0,086	Kg
Constante viscosa del carro	b	3,9	n.m.s/rad
Inercia del péndulo	I	0,0001	Kg.m <sup>2</sup>
Constante electromagnética del motor	Ke	0,044	v.s/rad
constante de torque del motor	Kt	0,044	n.m/a

Luego de obtener los parámetros se introducen en el código que calcula el porcentaje de similitud entre el modelo matemático y la planta real, obteniendo un 75.7% de similitud del desplazamiento del carro y un 74.01% de la posición angular del péndulo, considerando que este porcentaje de similitud es suficiente para simular la planta física se detiene las iteraciones en este punto.

### Figura 16.

*Comparación entre los datos del sistema y el modelo matemático*

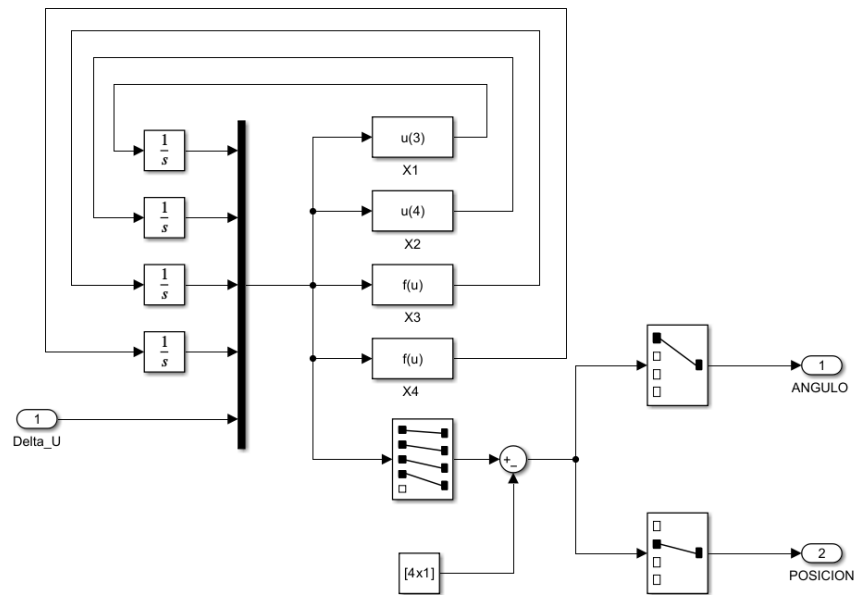


#### 4.7 Diseño de Control PID del Sistema

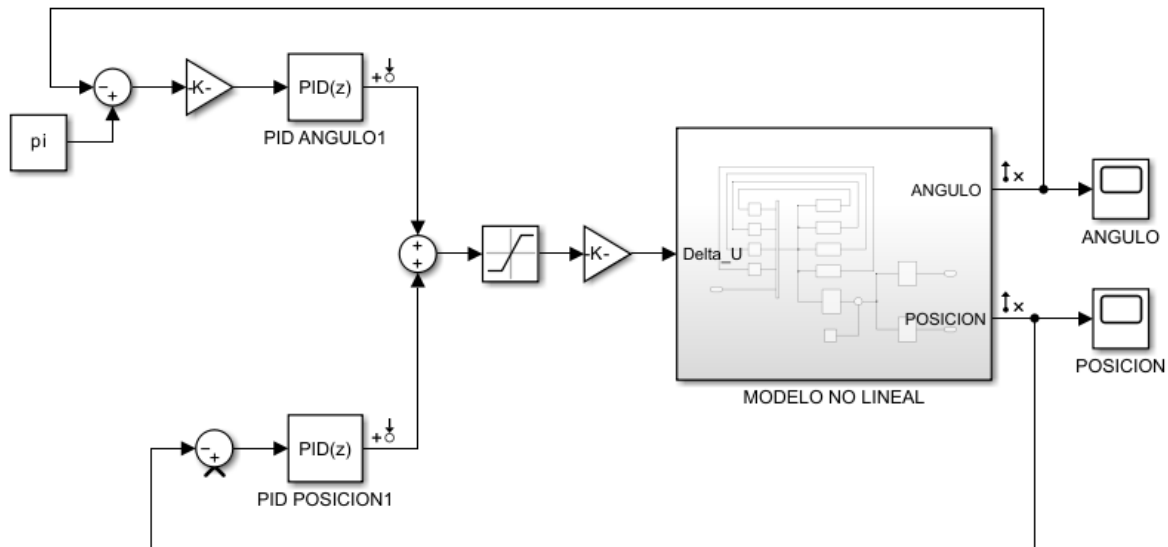
Para el diseño del controlador se hace necesario realizar una simulación con una planta virtual creada con bloques de la herramienta Simulink de Matlab la cual nos permite obtener parámetros del controlador lo más cercanos posibles a los necesarios para controlar la planta real.

**Figura 17.**

*Planta virtual del modelo matemático*



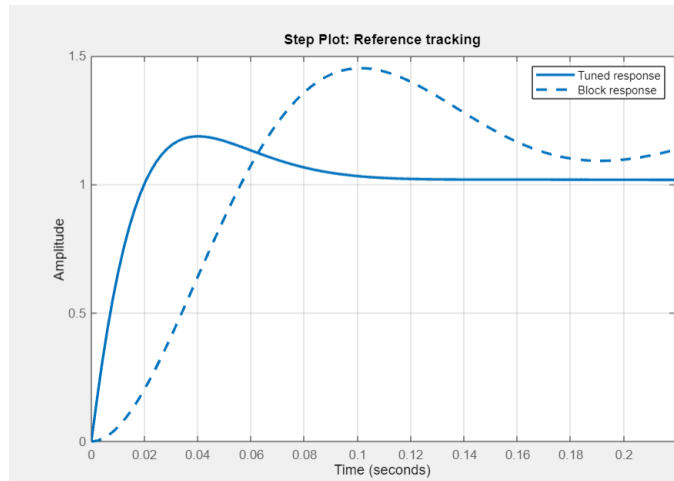
Para realizar la simulación del control inicial se implementan bloques de control PID, uno para controlar el desplazamiento y posición del carro y otro para controlar el ángulo del péndulo, la cual en este caso se utiliza una organización de controladores en paralelo.

**Figura 18.***Modelo del control PID del sistema*

Para determinar los parámetros de los bloques de PID se utiliza el **PID Tuner**, el cual proporciona un método de ajuste de bucle único rápido, con este método se puede lograr un diseño robusto con el tiempo de respuesta deseado.

Cuando se inicia PID Tuner, el software calcula un modelo de planta lineal visto por el controlador. El software identifica automáticamente la entrada y salida de la planta y utiliza el punto de funcionamiento actual para la linealización.

El sintonizador PID calcula un controlador PI inicial para lograr un compromiso razonable entre rendimiento y robustez. De forma predeterminada, el rendimiento del seguimiento de referencia de paso se muestra en el gráfico 18.

**Figura 19.***Referencia de paso del PID Tuner*

Si bien; el PID Tuner calcula ciertos parámetros es necesario variar manualmente algunos de estos, para que la respuesta transitoria del sistema fuera optima, con esto el sistema se controlara de una manera rápida y sin tener grandes variaciones.

**Tabla 6.***Bloque de parámetros de PID del ángulo*

Parámetros	Valor
P	-22
I	-30
D	5
N	2

**Tabla 7.***Bloque de parámetros de PID de la posición*

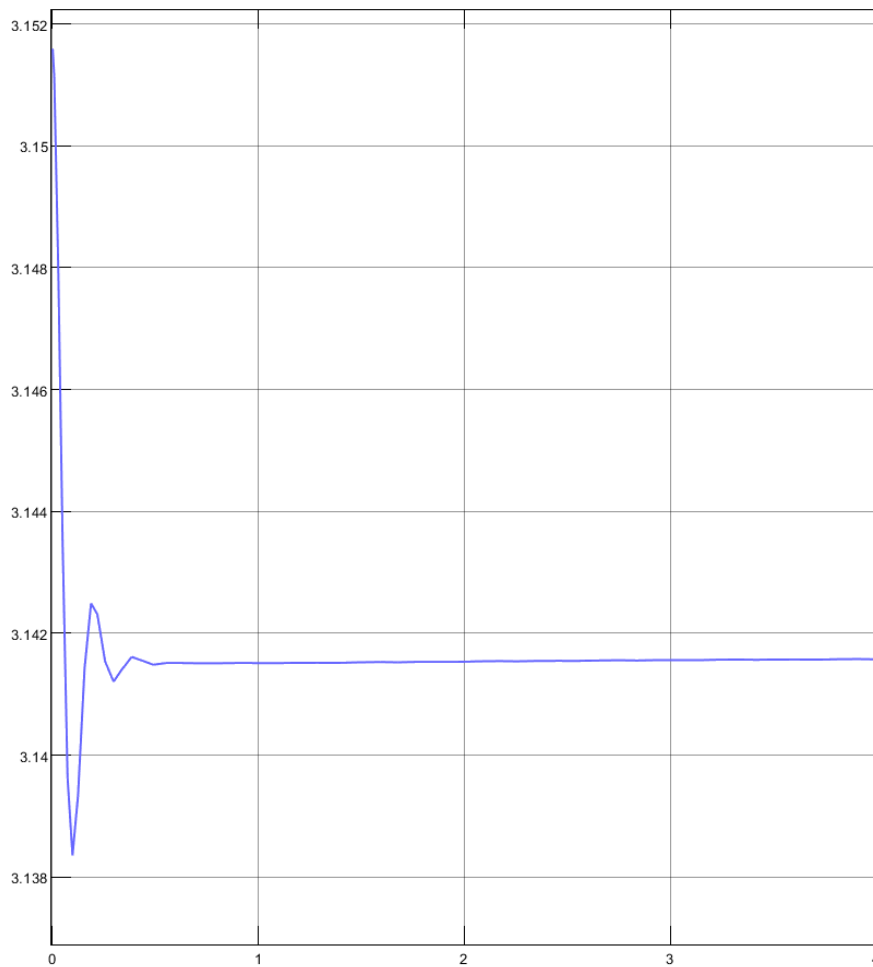
Parámetros	Valor
P	7
I	0,5

Parámetros	Valor
D	-1
N	0

Al realizar la simulación y aplicar la acción de control al sistema, obtenemos que sistema se estabiliza en un tiempo menor a un segundo, que si bien en es un poco brusco es necesario para que el péndulo se mantenga de manera vertical al momento de liberar este.

### Figura 20.

*Estabilización de la planta virtual con control PID*

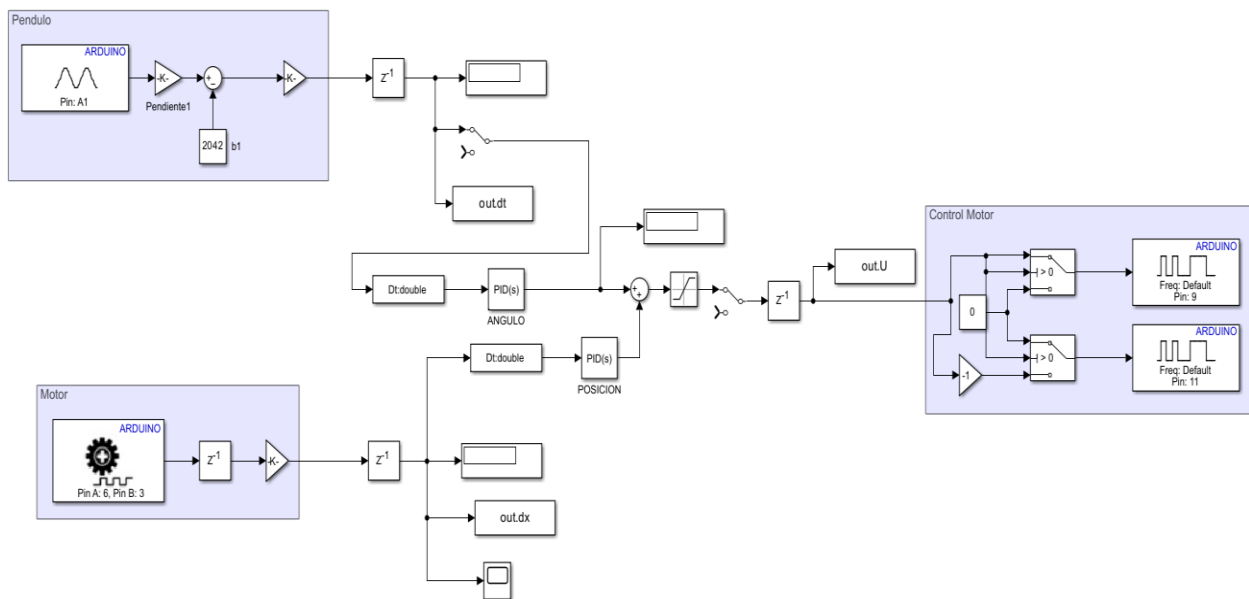


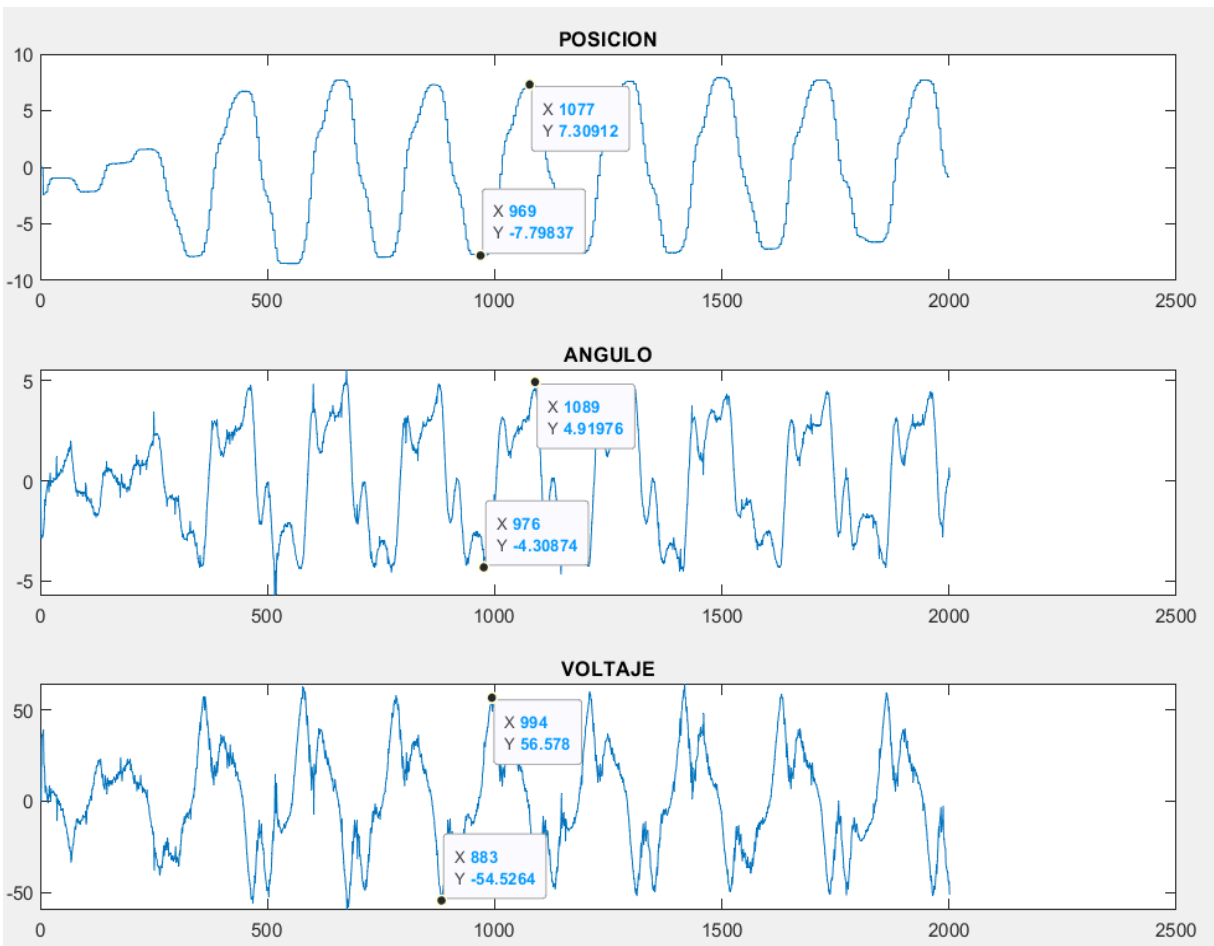
**4.7.1 Prueba del Control PID en el Sistema Real**

Ya con el sistema simulado se procede a realizar una prueba de control en la planta física, esto con el fin de poner a prueba la acción de control de los PID y además verificar la similitud entre la planta modelada y la real, dando como resultado una acción de control limpia en la que el péndulo busca mantenerse en su punto de equilibrio.

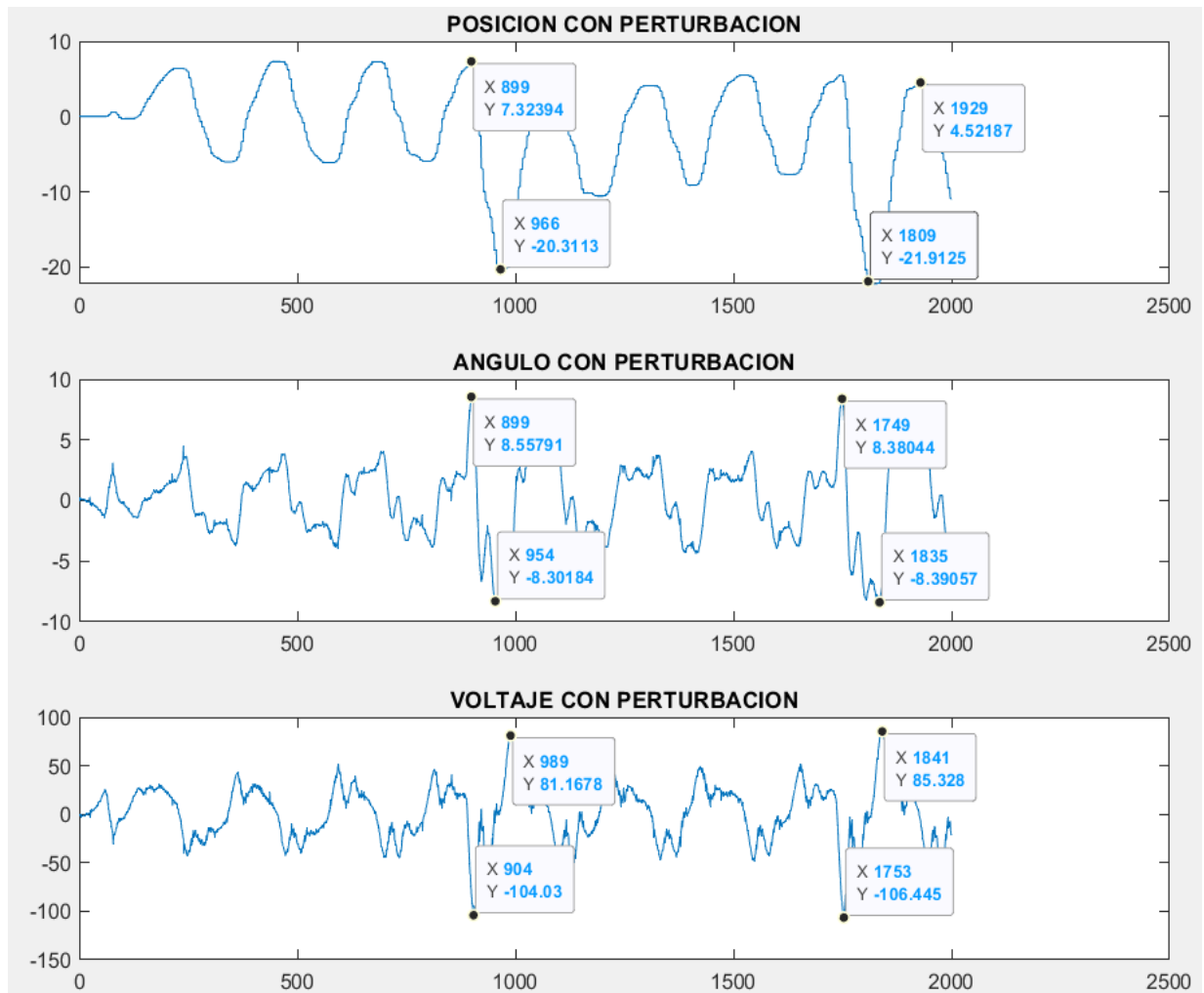
**Figura 21.**

*Programa de control PID en paralelo*



**Figura 22.***Control PID del sistema real*

Para asegurar que el controlador presentara un correcto funcionamiento se realizaron perturbaciones al sistema, esto golpeando la barra (péndulo) para verificar que el sistema retornara a su posición de equilibrio.

**Figura 23.***Control PID del sistema real con perturbación*

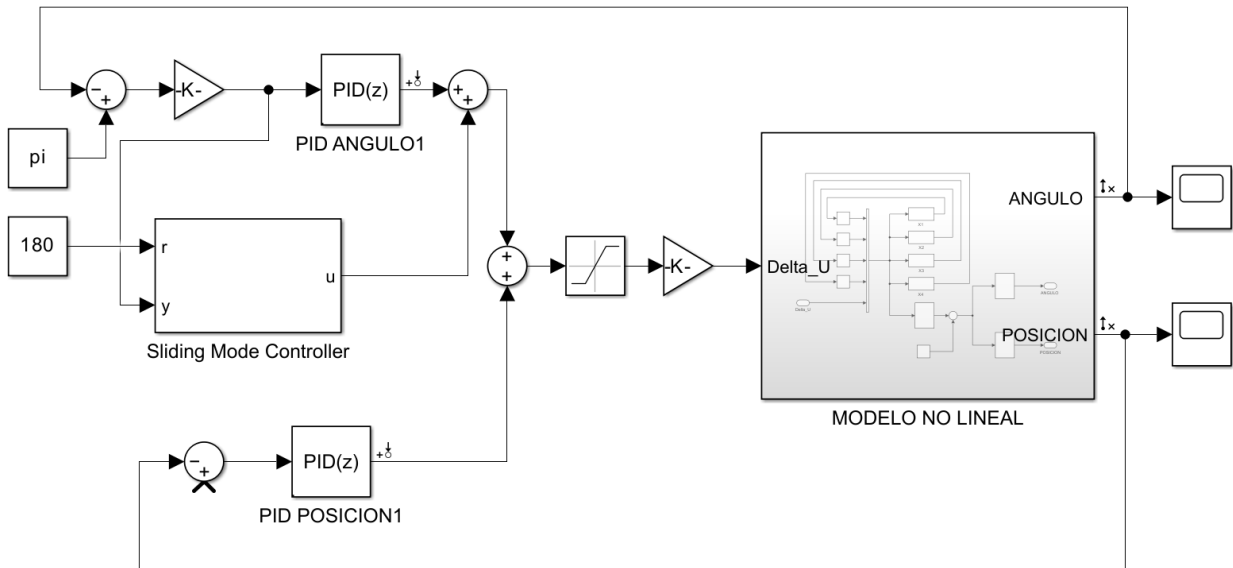
En la graficas del control del sistema se hace evidente las perturbaciones realizadas, las cuales afectan al ángulo la posición y además muestra la variación del voltaje que es necesario para que el sistema vuelva a su estado de equilibrio.

#### 4.8 Diseño del Control por Modos Deslizantes

Para aplicar la estrategia de modos deslizantes es necesario tomar de base el control ya diseñado por PID, al aplicar dicha estrategia se espera que el control tenga más suavidad sin afectar a efectividad del mismo y este siga manteniendo el sistema en su punto de equilibrio.

**Figura 24.**

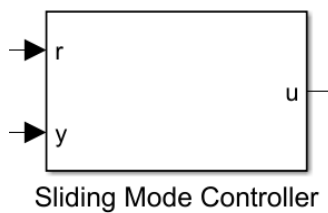
*Modelo del control por modos deslizantes del sistema*



El bloque de Simulink que se utiliza para la estrategia de modos deslizantes se conoce como Sliding Mode Controller o como SMC por sus siglas en inglés, lo cual significa control de modo deslizante basado en histéresis, el cual consta de dos puertos de entrada y uno de salida, al puerto “r” le debe entrar una señal de referencia de la plata la cual en este caso es  $180^\circ$  que es el estado de equilibrio del péndulo, al puerto “y” se le debe asignar una señal de salida del sistema de la planta y el puerto de salida “u” brinda la señal de salida del sistema de control.

**Figura 25.**

*Bloque de modos deslizantes*



A este bloque lo definen 4 parámetros los cuales son, ancho de banda de la histéresis total, límite superior de la acción de control, límite inferior de la acción de control y el tiempo de muestra en segundos, entre ejecuciones consecutivas de bloques. Durante la ejecución, el bloque produce salidas y, si corresponde, actualiza su estado interno.

Para determinar estos parámetros es necesario tomar los valores predeterminados del bloque y variar estos hasta obtener una acción de control suave que permita estabilizar el sistema en su punto de equilibrio.

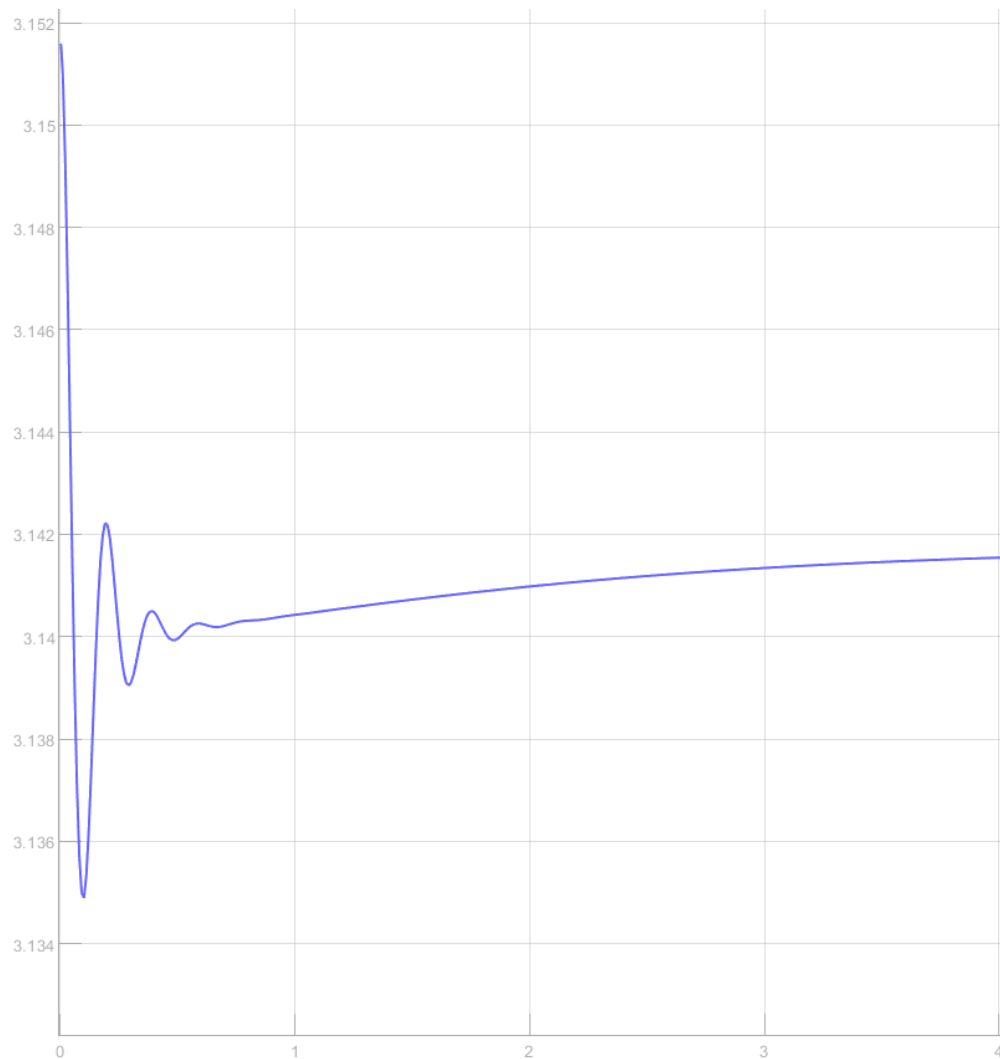
**Tabla 8.***Parámetros del bloque de modos deslizantes*

<b>Parámetros</b>	<b>Valor</b>
Hysteresis band	1
Control action upper limit	20
Control action lower limit	-20
Sample time	0,01

Al realizar la simulación y aplicar la acción de control al sistema, obtenemos que el sistema se estabiliza de una manera más suave con el control por modos deslizantes a diferencia del control por PID, por lo cual demora un poco más de tiempo en estabilizar.

**Figura 26.**

*Estabilización de la planta virtual con control por modos deslizantes*

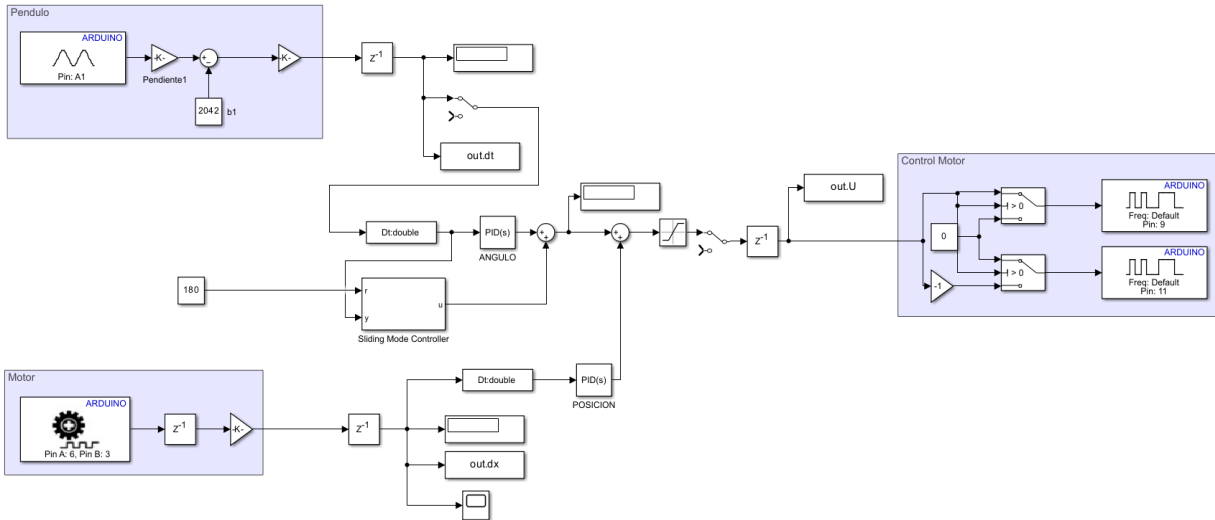


#### ***4.8.1. Prueba de Control por Modos Deslizantes en el Sistema Real***

Realizar una prueba de control en la planta física, esto con el fin de poner a prueba la acción de control ejercida por el bloque SMC, en la cual se logra evidenciar que el péndulo llega a su punto de equilibrio, pero de una forma suave demostrando así la efectividad del control.

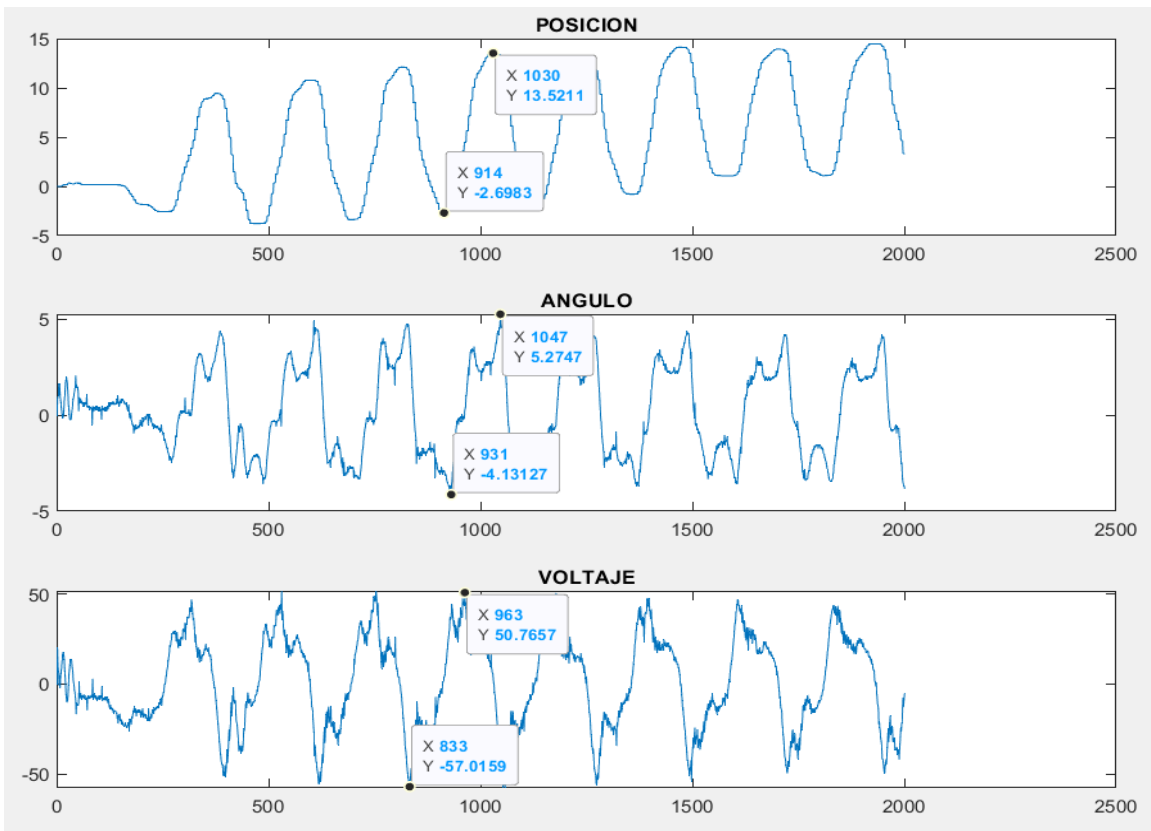
**Figura 27.**

*Programa de control por modos deslizantes en paralelo del sistema real*



**Figura 28.**

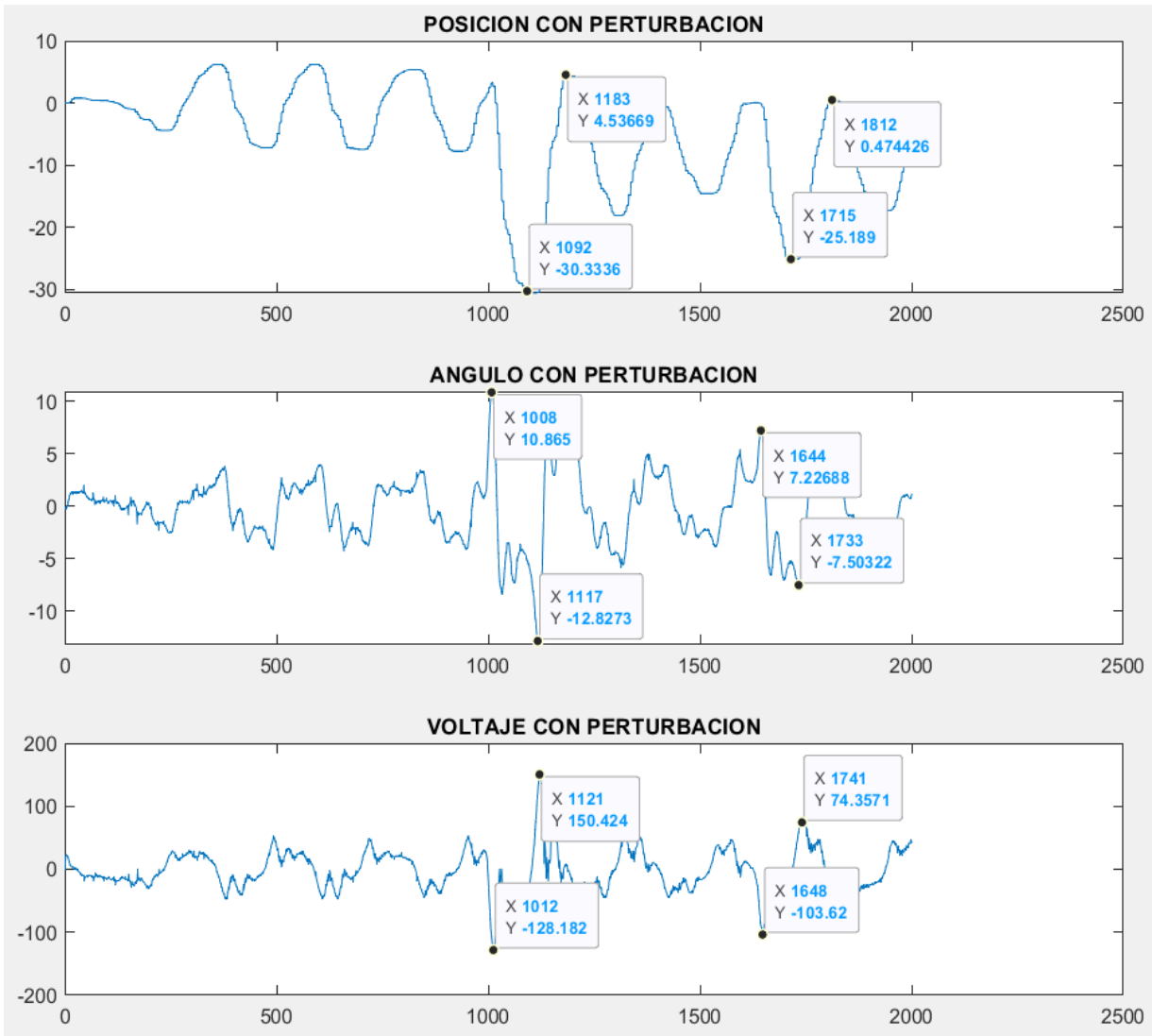
*Control por modos deslizantes del sistema real*



Al igual que en el control por PID se realizaron perturbaciones al sistema con el fin asegurar que el controlador presentara un correcto funcionamiento y verificar que el sistema retornara a su posición de equilibrio con suavidad.

**Figura 29.**

*Control por modos deslizantes del sistema real con perturbación*



En la graficas del control del sistema se hace evidente las perturbaciones realizadas, las cuales afectan al ángulo y la posición, la cual en este caso presenta una mayor magnitud ya que al ser más suave la estabilización del sistema requiere más distancia para alcanzar el nivel de equilibrio.

## 5. Resultados

- Por medio de la herramienta de Matlab Simulink, se pudo desarrollar un controlador por la técnica de modos deslizantes, partiendo de un control PID y gracias a esta se pudo interactuar en tiempo real con el modelo físico, lo cual permitía realizar ajustes en ciertos parámetros con el fin de que el controlador fuera lo más eficiente posible.
- A través del modelo matemático del sistema realizado a partir de las ecuaciones cinemáticas de la teoría de péndulo invertido y validado por medio del método de caja gris, se logró determinar los diferentes parámetros de los controladores todo esto a nivel de simulación, para luego probarse en la planta física y tener un buen punto de partida para ajustar dichos parámetros.
- Se diseñó un manual que completara la herramienta didáctica, con el objetivo de facilitar el manejo del péndulo, el cual explica el paso a paso sobre el desarrollo de los controladores usados y el cómo interactuar con la planta física a través de los bloques de la herramienta Simulink ligados al Arduino, además de como validar el modelo matemático por medio del método de caja gris para así obtener parámetros lo más cercanos posible a los reales de la planta física.

## 6. Conclusiones

Se obtuvo un 75.5% y un 74.01% de similitud, en el desplazamiento y el ángulo respectivamente, entre el modelo matemático con los parámetros obtenidos con el programa y la planta real, el diseño del controlador se trabajó con este porcentaje ya que en el modelo matemático no se contempla diferentes variables con lo son el ruido, coeficientes de fricción y algunas resistencias con las que convive en modelo real.

Al realizar una comparativa entre el funcionamiento del sistema del control por PID y por modos deslizantes, se evidencia una acción de control la cual permitía la corrección en el ángulo del péndulo de una manera más suave con el controlador por modos deslizantes y así mismo en las perturbaciones al péndulo se pudo concluir que el controlador por PID utiliza 27.63 cm de desplazamiento para llegar a la posición vertical del péndulo lo cual produce un movimiento brusco, a diferencia del control por modos deslizantes que utiliza 34.87 cm de desplazamiento del carro para alcanzar la posición vertical del péndulo lo que genera un movimiento suave a la hora de realizar esta corrección.

### Referencias

- Betancourt Manjarres, R. D., & Morales Rodríguez, S. (2014). *Diseño e implementación de un controlador por modos deslizantes para el péndulo invertido*. [Trabajo de grado]. Fundación Universitaria Los Libertadores.
- Castaños Luna, F. (2003). *Levantamiento y Estabilización del Péndulo Invertido*.
- Control Tutorials for MATLAB and Simulink. (2011). *Tutorial*.  
<https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&ion=SystemMode>  
ling
- Cornieles, E. (2014, 27 octubre). Sistema de control en modo deslizante para regular la posición y la velocidad de un motor de corriente directa. *Télématique*.  
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5157992.pdf>
- Cortés Cardona, G. A. (2017). *Diseño, simulación y control de un péndulo invertido doble lineal para el laboratorio de automática de la EIEE de Univalle*. Universidad del Valle.
- Edgar, T. F. (2009). Springer Handbook of Automation. In Springer Handbook of.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-78831-7>
- Gutiérrez Gallego, J. H. (2009). *Diseño de un sistema de control supervisor híbrido* [Tesis de Magister]. Universidad Technological de Pereira.
- Palacio Parra, S. (2015). *Diseño de un sistema de control para un módulo de un péndulo invertido de rotación*. [Trabajo de grado]. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Roca García, J. (2015). *Diseño e implementación de un péndulo invertido sobre un carro móvil para el laboratorio de Mecatrónica de la FIMCP Aplicando Estrategias de Control*

*Proporcional Integral Derivativo (PID)*. [Magíster en Automatización y Control Industrial]. Escuela Superior Politécnica del Litoral.

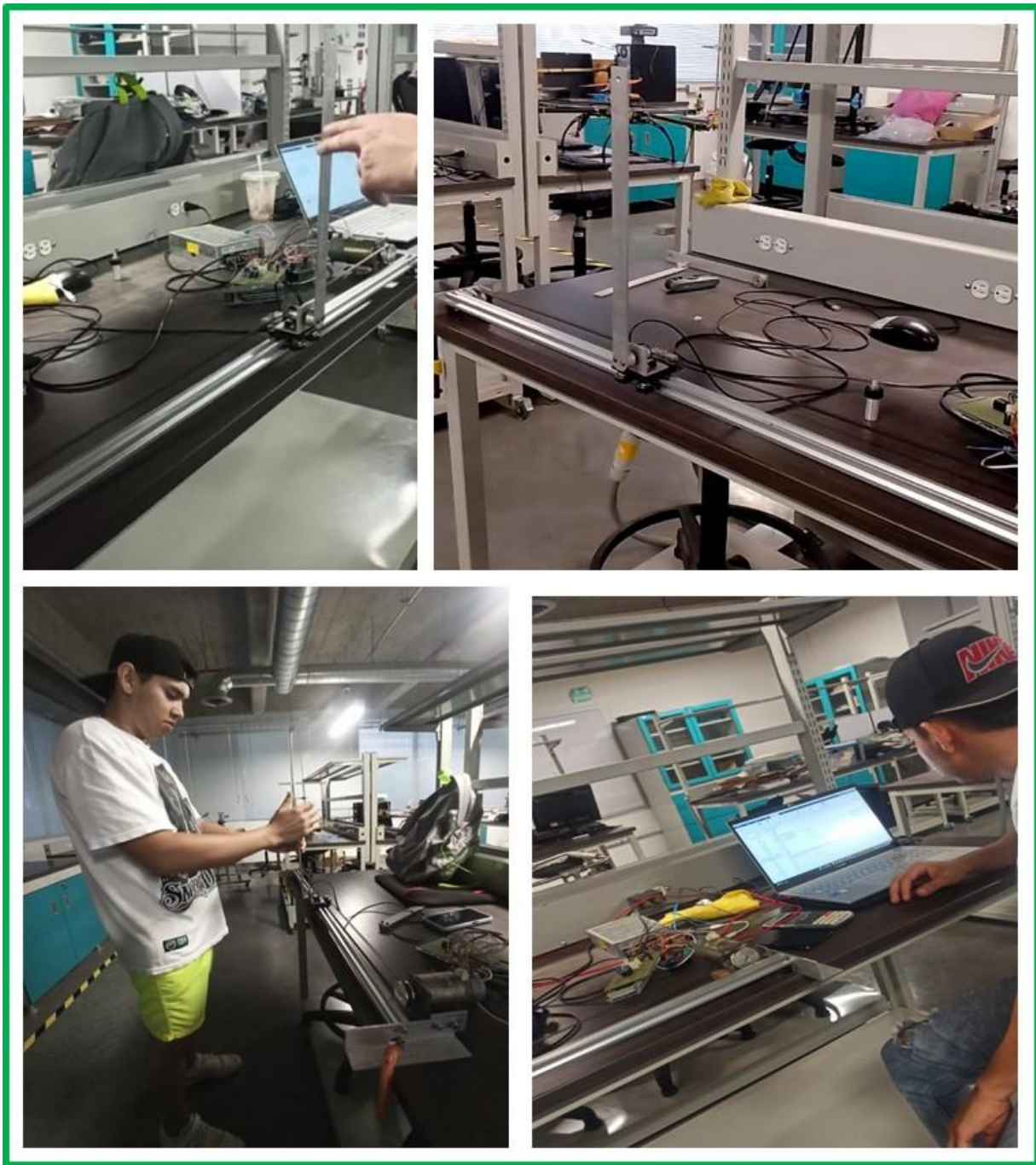
Romero Rodríguez, G., Sánchez Sánchez, P., Reyes Cortés, F., Michua Camarillo, A., Calderón Flores, B., Cid Monjaraz, J., Torres Monsivais, J. C., & Morales Timal, G. (2009). Modelado, Control y Simulación de un Sistema Péndulo Invertido Sobre Base Móvil. *Mecamex*. <http://www.mecamex.net/anterior/cong08/articulos/38.pdf>

Sanabria T., Camilo A.; Hernández G., Oscar M. (2009). Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. *Tecnura*, 13(25). <https://www.redalyc.org/pdf/2570/257020617006.pdf>

Triviño Macías, L. G. (2020). *Modelado, simulación y control de un péndulo invertido* [Trabajo de grado]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Apéndices

Apéndice A. Pruebas del funcionamiento del controlador del sistema.



**Apéndice B.** *Función del modelo matemático.*

```

function [dx,y] = funcion(t, x, u, Mc, m, b, I, Ke, Kt, varargin)

l =0.2295; % longitud
rp =0.02;  % radio polea
g =9.81;   % gravedad
R =6.7;    % resistencia armadura

y = [ x(4);
      x(3)
      ];

dx = [ -(1*m*(R*l*m*rp*cos(X(3))*sin(X(3))*X(1)^2 - Ke*Kt*cos(X(3))*X(1) +
Kt*u*cos(X(3)) ...
      + Mc*R*g*rp*sin(X(3)) - R*b*rp*X(2)*cos(X(3))+ R*g*m*rp*sin(X(3))))/(R*rp*(I*m +
I*Mc ...
      + l^2*m^2 - l^2*m^2*cos(X(3))^2 + Mc*l^2*m));

      (I*Kt*u + Kt*l^2*m*u - I*Ke*Kt*X(1) - I*R*b*rp*X(2) - Ke*Kt*l^2*m*X(1) -
R*b*l^2*m*rp*X(2)...
      + (R*g*l^2*m^2*rp*sin(2*X(3)))/2 + R*l^3*m^2*rp*X(1)^2*sin(X(3)) +
I*R*l*m*rp*X(1)^2*sin(X(3)))...
      /((R*rp*(I*m + I*Mc + l^2*m^2 - l^2*m^2*cos(X(3))^2 + Mc*l^2*m));

      x(1);
      x(2);
      ];

```

**Apéndice C. Código de estimación de los parámetros del sistema**

```
%% Carga de datos

z = iddata( y, U, 0.01, 'Name', 'Datos experimentales');

z.InputName = 'Voltaje';

z.InputUnit = 'V';

z.OutputName = {'Desplazamiento', 'Posicion Angular'};

z.OutputUnit = {'m', 'rad'};

z.Tstart = 0;

z.TimeUnit = 's';

figure('Name', [z.Name ': dx -> lineal velocity output']);
plot(z(:, 1, 1)); % (Voltage -> Posicion angular).

figure('Name', [z.Name ': dt -> Angular velocity output']);
plot(z(:, 2, 1)); % (Voltage -> Velocidad angular).

%% Carga de la funcion

FileName      = 'funcion';    % Descripcion de la estructura del modelo.

Order         = [2 1 4];

Parameters    = [0.165; 0.086; 3.9; 0.0001; 0.044; 0.044]; % Parametros

InitialStates = [0; 0; 0; 0];    % Estado inicial

Ts           = 0; % Tiempo-Sistema continuo.

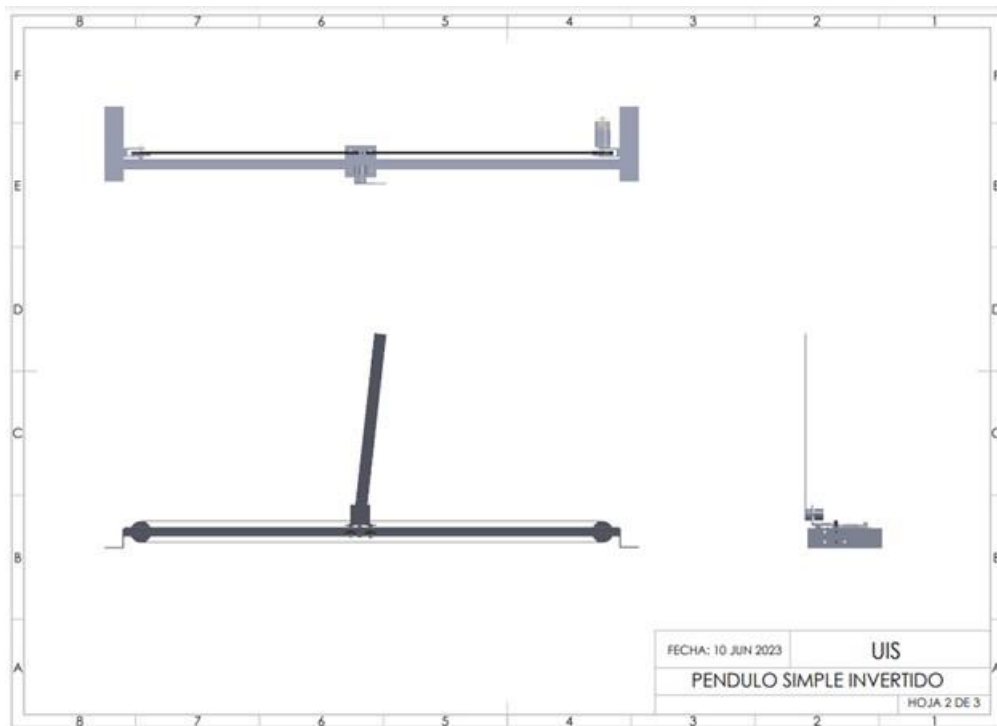
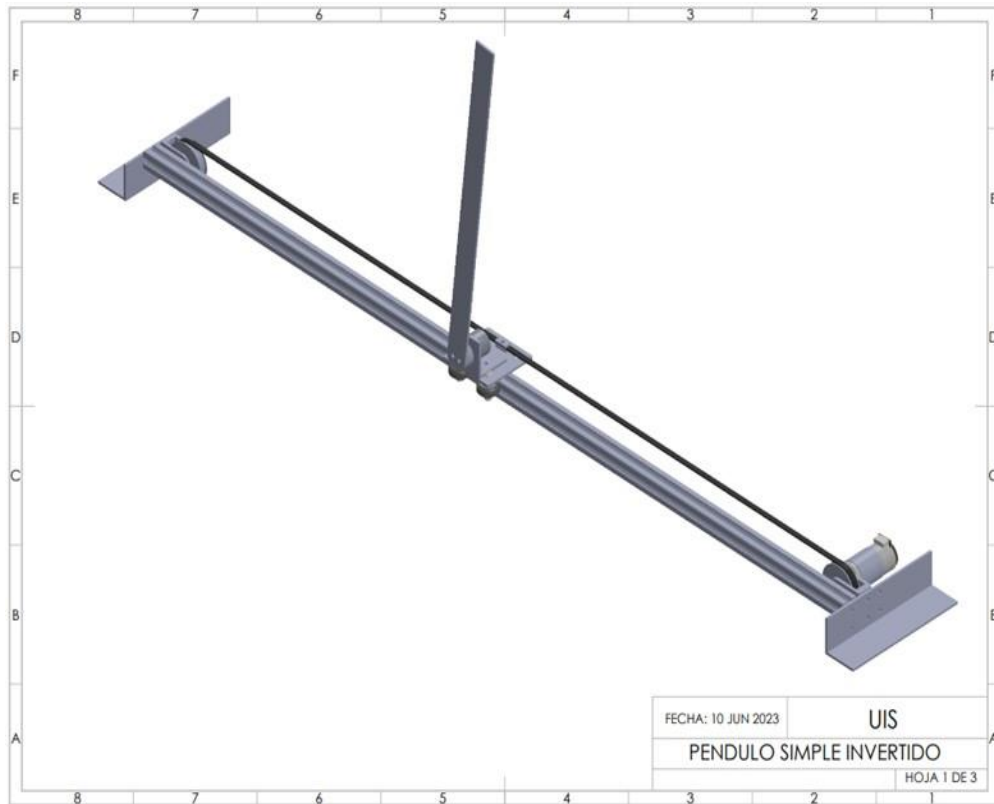
nlgr = idnlgrey(FileName, Order, Parameters, InitialStates, Ts, ...
                'Name', 'Modelo matematico');

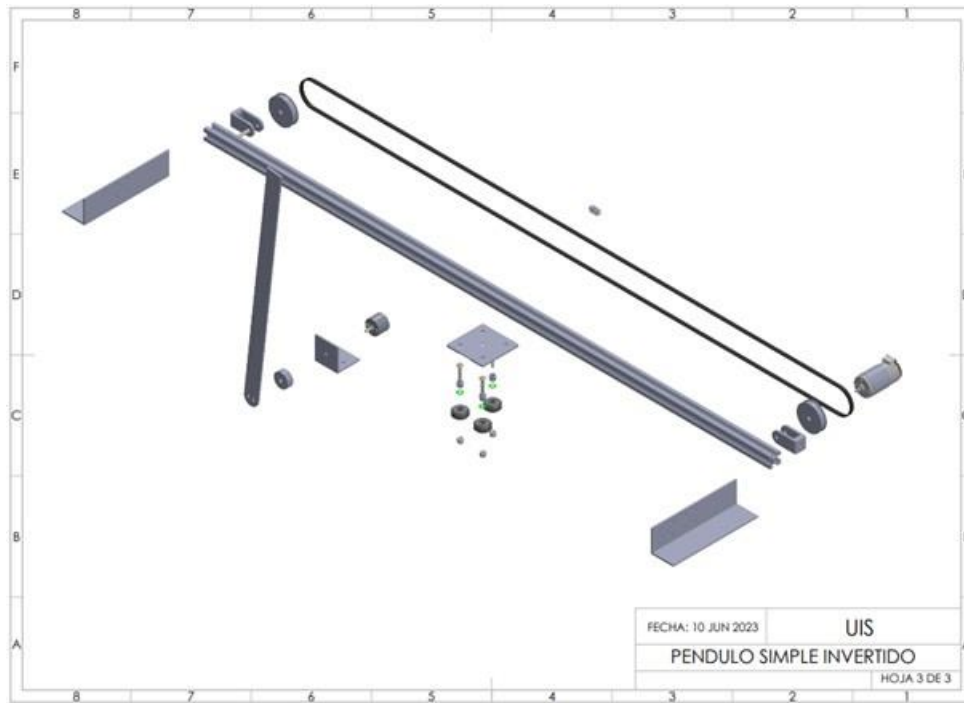
compare(z, nlgr);
```

```
% Estimacion
nlgr = setinit(nlgr, 'Fixed', {true true true true}); % Estimación de los estados
iniciales.
opt = nlgreyestOptions('Display', 'on');
opt.SearchOptions.MaxIterations =100;
nlgr = nlgreyest(z, nlgr, opt);

compare(z, nlgr);
```

Apéndice D. Planos del sistema





**Apéndice E.** *Manual de funcionamiento del péndulo invertido*



# Manual Péndulo Invertido



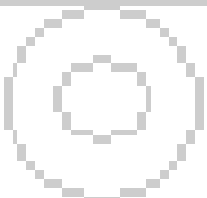
M

Jhon Esteban Rojas

Benavides

Andres Felipe Navarro

Vega



## MANUAL DEL PÉNDULO INVERTIDO

Por medio de este manual, se explicará la forma en la cual se podrá dar cumplimiento a los objetivos que fueron planteados al inicio del proyecto para la realización del péndulo invertido.

El primer paso es el ensamblaje de la planta física; ya que, para poder llegar a la toma de datos, se deberá primero realizar el ensamble del péndulo; para el diseño mecánico se requieren algunos componentes mecánicos, entre los que encontramos:

La barra, la cual deberá ser elaborada en aluminio, que es la que se encargará de comportarse como péndulo.

El riel, este será en forma de cuadrado con una especie de calados que van a ser quien encause el carrito limitando su movimiento por el eje x.

El carro, será el encargado de dar movimiento al péndulo, se va a situar sobre el riel, y se le va a dar movimiento a través de una polea con el fin de poder mantener el péndulo de manera vertical.

El sensor óptico rotativo, es indispensable ya que este va a dar lugar a la lectura a la posición angular del péndulo, ya que es un sensor que se va a encargar de darnos dichos datos.

Los acoples, se van a encontrar ubicados entre el péndulo y el carrito para lograr que estos mantengan la posición que se quiere.

La polea, o correa dentada, tendrá como función propagar la potencia del motor, hacia el carrito para lograr que se mueva.

El motor DC, tendrá como función mover la polea para que esta logre tener control sobre el carrito, ya que este cuenta con un imán que se encarga de generar torque.

Las bases, de estas bases unas se, encargarán de sostener el motor DC, otra base para el sensor, una base para el riel, estas bases son en aluminio, pero vienen en diferentes tamaños, de acuerdo con el uso que se le vaya a dar.

El Arduino DUO, esta placa tomará como base un hardware libre que da lugar a la fácil recreación de microordenadores, generalmente su valor de referencia es de 5V, y en este caso cumplirá una función muy importante, debido a que será el encargado de grabar las instrucciones, lo que lo convierte en una parte esencial, permitiendo tener datos de los sensores y lograr controlar la planta.

## PROGRAMA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Para lograr conseguir dichos datos, es esencial crear un programa que le dé movimiento a la planta física y de igual manera obtenga los datos de los elementos que forman este sistema.

Para poder elaborar este programa, es necesario recurrir a varios elementos del SIMULINK, al igual que librerías que sean compatibles con el Arduino, para poder dar lugar a la interacción entre estas partes electrónicas.

## COMPORTAMIENTO DE BLOQUE EN MODO CONTINUO

Cuando el bloque actúa de manera continua, este puede llegar a ser inexacto debido a que va perdiendo fuerza a causa de que el tiempo va siendo cada vez más grande.

## COMPORTAMIENTO DEL BLOQUE EN MODO DISCRETO

Cuando el valor del tiempo de muestra que se obtiene es superior a cero, da como consecuencia que el bloque actúe como si estuviera siendo manejado por un bloque de retención de orden cero, y la muestra de tiempo se va a dar con ese valor.

Es posible llevar a cabo diferentes modelos, pero los sistemas híbridos son más complejos, y por ello van a necesitar de un tiempo mayor para poder lograr la simulación.

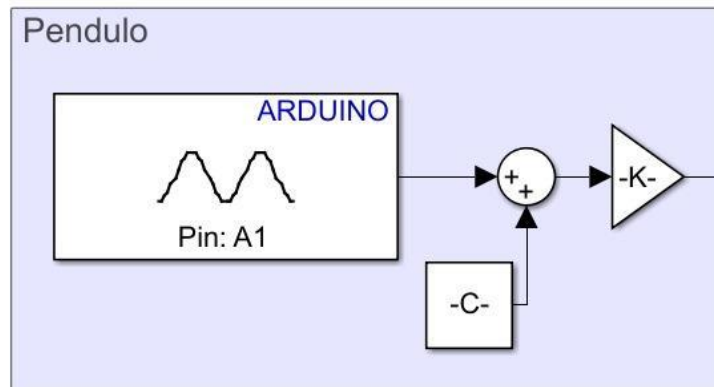


FIGURA 1. ANALOG INPUT

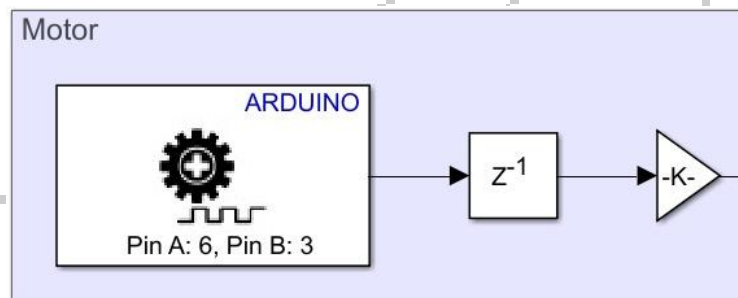


FIGURA 2. ENCODER

Este bloque encoder tiene como función ser el conector entre el motor y el Arduino, y este se va a encargar por medio de ticks de mostrar el proceder del motor; si se observa que los ticks van en disminución quiere decir que este va girando de manera contraria a las manecillas del reloj, pero si se observa que los ticks van en aumento quiere decir que va girando de acuerdo con las manecillas del reloj.



FIGURA 3. BLOQUE PWM

Por medio de este, se van a generar diferentes potencias y esto da lugar a una señal modulada que es enviada al bloque Arduino para lograr obtener una salida analógica.

Es muy importante tener en cuenta que al utilizar bloques PWM en el modelo de Simulink se deberán tomar tiempos más largos para la toma de muestras para que el sistema no llegue a colapsar.

### CONTROL DEL MOTOR:

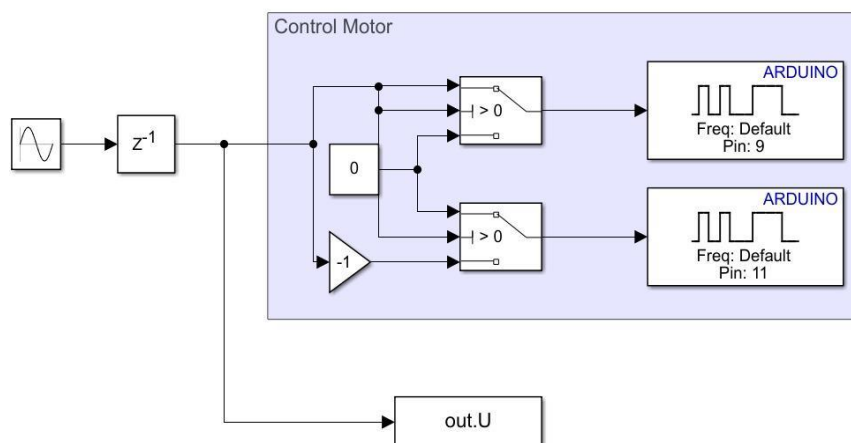


FIGURA 4. BLOQUE DE SWITCHEO PARA MOVIMIENTO DE MOTOR

Para que se logró tener los datos del ángulo del péndulo y del desplazamiento del carrito es indispensable elaborar un control del motor el cual va a requerir de pulsos y un switcheo para lograr dar movimiento al motor, lo cual va a obtener como resultado que el carrito se desplace por el riel a una misma distancia y en un mismo sentido.

Esto se conoce como to workspace, y por medio de este se pueden datos en tiempo real acerca de los cambios del voltaje.

## LECTURA DE ÁNGULO DEL PÉNDULO

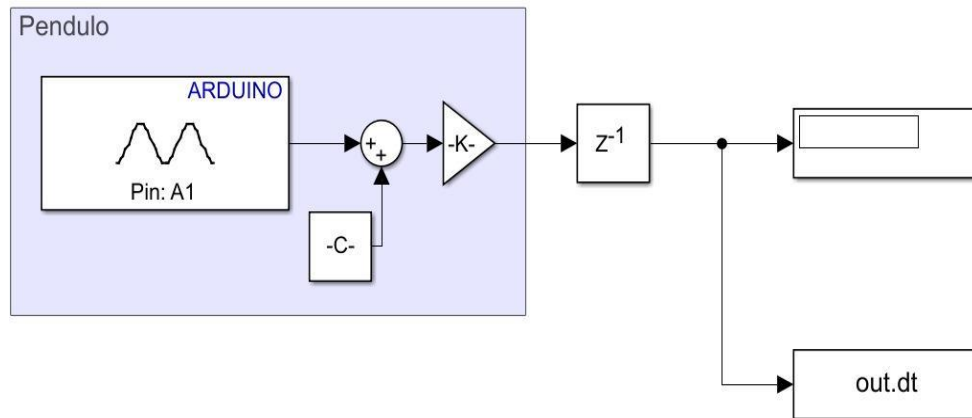


FIGURA 5. BLOQUE DE LECTURA DEL ÁNGULO DEL PÉNDULO

Al momento de realizar la lectura del ángulo, se debe contar con la unión de distintos bloques, iniciando por el bloque del Arduino que es el que está conectado al sensor analógico y se encargará de mostrar la lectura de los cambios de ángulo que percibe el péndulo a lo largo del recorrido que realiza el carrito por el riel.



FIGURA 6. BLOQUE WORKSPACE

Por este lado del programa, el bloque workspace nos facilitará acumular los datos en tiempo real sobre los cambios del ángulo.

## LECTURA DEL DESPLAZAMIENTO DEL CARRO

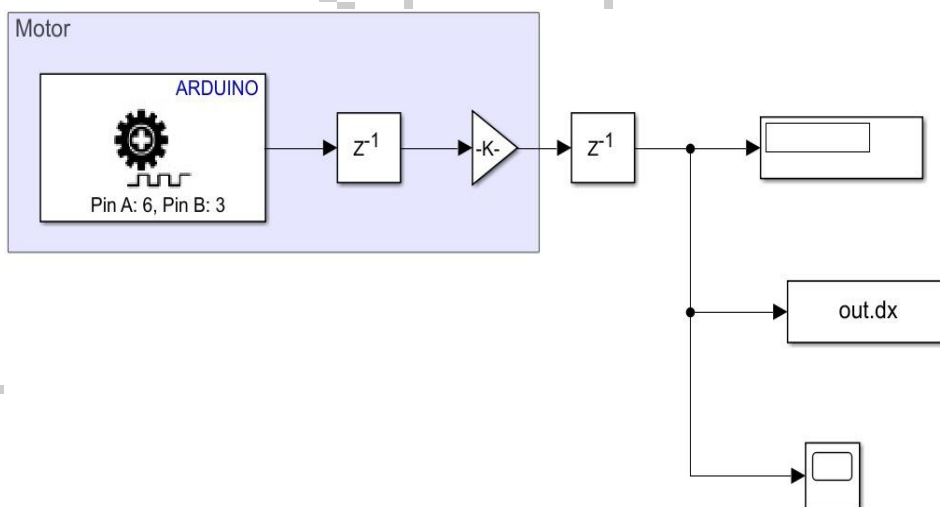


FIGURA 7. BLOQUE POSICIÓN DE CARRITO

La lectura sobre el movimiento del carrito se llevará a cabo por medio del bloque encoder, y hace referencia al encoder que cuenta con el motor que actúa a través de un sensor hall, en este lado del programa será posible ver la distancia que el carro ha avanzado en centímetros (cm) desde el centro del riel a la izquierda-X y a la derecha +X.



FIGURA 8. BLOQUE WORKSPACE

En este sentido, este bloque to workspace será el encargado de consentir el almacenamiento de datos en tiempo real de los distintos cambios sobre la postura del carrito.

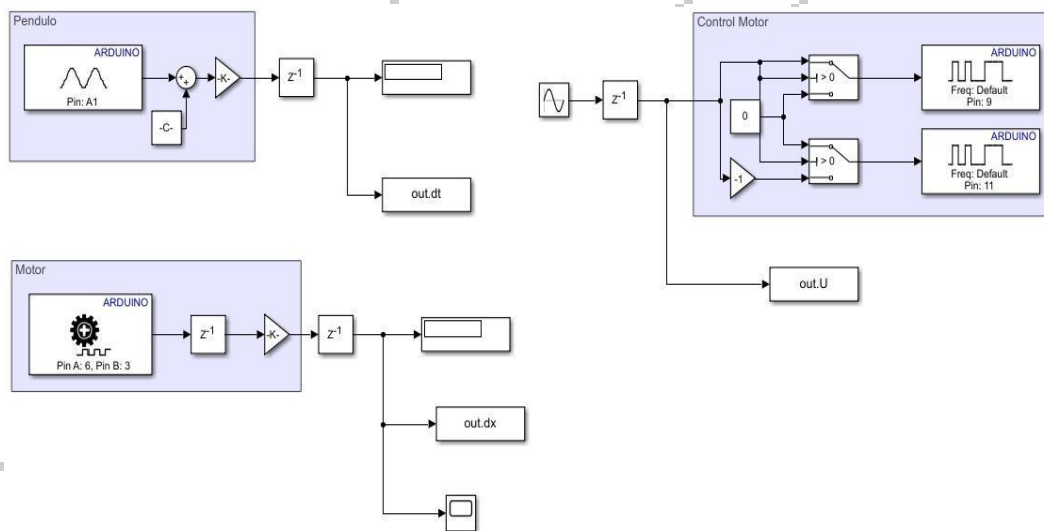


FIGURA 9. PROGRAMA DE LECTURA DE DATOS DEL SISTEMA

Al juntar los tres bloques será posible crear un programa de lectura de datos del sistema, la cual se va a dar en tiempo real y posteriormente serán recopilados en una tabla, para tomar este dato se tomará como referencia un tiempo de muestreo de 20 segundos.

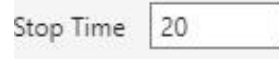
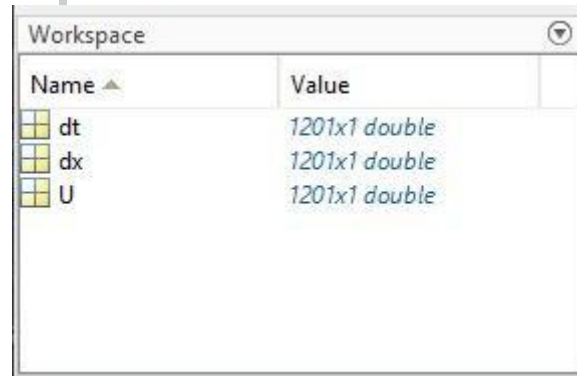


FIGURA 10. TIEMPO DE MUESTREO



Name	Value
dt	1201x1 double
dx	1201x1 double
U	1201x1 double

FIGURA 11. DATOS DEL SISTEMA

## ECUACIONES CINEMATICAS DEL SISTEMA

Para finalizar la ecuación de este sistema, será necesario sustituir las ecuaciones  $\ddot{x} = \frac{(I+ml^2)(F-bx+ml\dot{\theta}\sin\theta)+m^2l^2g\sin\theta\cos\theta}{-(ml\cos\theta)^2+(I+ml^2)(M+m)}$ ,  $\ddot{\theta} = \frac{F+(M+m)\tan\theta-bx+ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{\frac{(I+ml)(M+m)}{-ml\cos\theta}+ml\cos\theta}$  y  $F = Kt v(t) - Kew(t)$  R.d, esto debido a que se necesita que las ecuaciones estén en términos de voltaje, puesto que esta es la variable de entrada que se va a manejar en el sistema.

## MODELO MATEMATICO

Por medio de estas ecuaciones se formará la función para posteriormente lograr conseguir los parámetros del modelo matemático a través de la validación de la caja gris.

```

1 function [dx,y] = funcion(t, x, u, Mc, m, b, I, Ke, Kt, varargin)
2
3 l =0.2295; % longitud
4 rp =0.02; % radio polea
5 g =9.81; % gravedad
6 R =6.7; % resistencia armadura
7
8
9 y = [ x(4);
10       x(3)
11       ];
12
13 dx = [ -(1*m*(R*1*m*rp*cos(X(3))*sin(X(3))*X(1)^2 - Ke*Kt*cos(X(3))*X(1) + Kt*u*cos(X(3)) ...
14         + Mc*R*g*rp*sin(X(3)) - R*b*rp*X(2)*cos(X(3)) + R*g*m*rp*sin(X(3)))/(R*rp*(I*m + I*Mc ...
15         + 1^2*m^2 - 1^2*m^2*cos(X(3))^2 + Mc*1^2*m));
16
17         (I*Kt*u + Kt*1^2*m*u - I*Ke*Kt*X(1) - I*R*b*rp*X(2) - Ke*Kt*1^2*m*X(1) - R*b*1^2*m*rp*X(2)...
18         + (R*g*1^2*m^2*rp*sin(2*X(3)))/2 + R*1^3*m^2*rp*X(1)^2*sin(X(3)) + I*R*1*m*rp*X(1)^2*sin(X(3))...
19         /(R*rp*(I*m + I*Mc + 1^2*m^2 - 1^2*m^2*cos(X(3))^2 + Mc*1^2*m));
20         x(1);
21         x(2);
22         ];

```

FIGURA 12. CÓDIGO DE FUNCIÓN DEL MODELO MATEMATICO

Luego de esto, se debe producir un código Matlab para poder demostrar gráficamente cómo es el comportamiento de la posición angular del péndulo, cómo es el desplazamiento del carrito vs el voltaje con los datos que se podrán recopilar en la plataforma física.

```

1      %% Carga de datos
2      z = iddata( y, U, 0.01, 'Name', 'Datos experimentales');
3      z.InputName = 'Voltaje';
4      z.InputUnit = 'V';
5      z.OutputName = {'Posicion Angular', 'Desplazamiento'};
6      z.OutputUnit = {'°', 'm'};
7      z.Tstart = 0;
8      z.TimeUnit = 's';
9
10     figure('Name', [z.Name ': dx -> lineal velocity output']);
11     plot(z(:, 1, 1)); % Plot first input-output pair (Voltage -> Angular position).
12     figure('Name', [z.Name ': dt -> Angular velocity output']);
13     plot(z(:, 2, 1)); % Plot second input-output pair (Voltage -> Angular velocity).

```

FIGURA 13. CÓDIGO PARA GRAFICAR LOS DATOS DEL SISTEMA

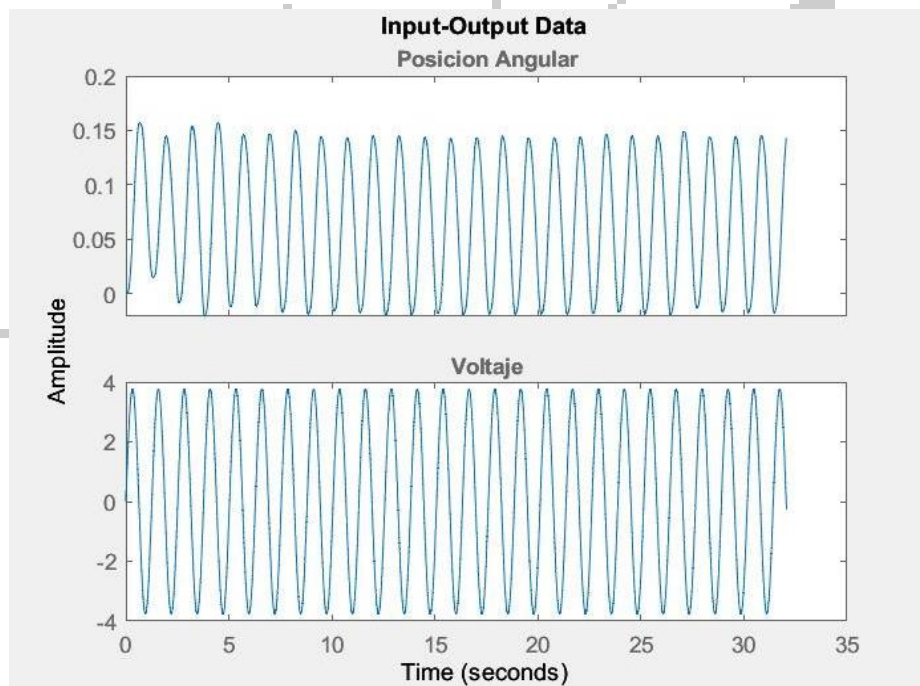


FIGURA 14. GRAFICA DE LOS DATOS DEL SISTEMA

Para lograr demostrar el grado de igualdad que hay entre las gráficas del modelo matemático y la validación de los datos que se obtendrán en el sistema, es necesitará crear un código, y este, a la par con los parámetros que se encontraran a través de la validación de caja gris, va a permitir demostrar tal porcentaje.

```

15 %% Carga de la funcion
16 FileName = 'funcion'; % File describing the model structure.
17 Order = [2 1 4]; % Model orders [ny nu nx].
18 Parameters = [0.165; 0.086; 3.9; 0.0001; 0.044; 0.044]; % Parametros hallados
19 InitialStates = [0; 0; 0; 0]; % Initial initial states.
20 Ts = 0;
21 % Time-continuous system.
22 nlgr = idnlgrey(FileName, Order, Parameters, InitialStates, Ts, ...
23 'Name', 'Modelo matematico');
24 compare(z, nlgr);
25

```

FIGURA 15. CÓDIGO DE COMPARACIÓN DE GRÁFICAS DEL SISTEMA Y EL MODELO MATEMÁTICO

## VALIDACIÓN DE CAJA GRIS

Para lograr llegar a dar con los parámetros desconocidos del sistema se deberá llevar a cabo una interacción, la cual también se conoce como validación de caja gris, y esto nos va a permitir que el modelo matemático llegue a ser similar con la planta física, para este caso se debe tomar un total de 100 interacciones a la validación para lograr obtener el resultado más próximo al sistema real.

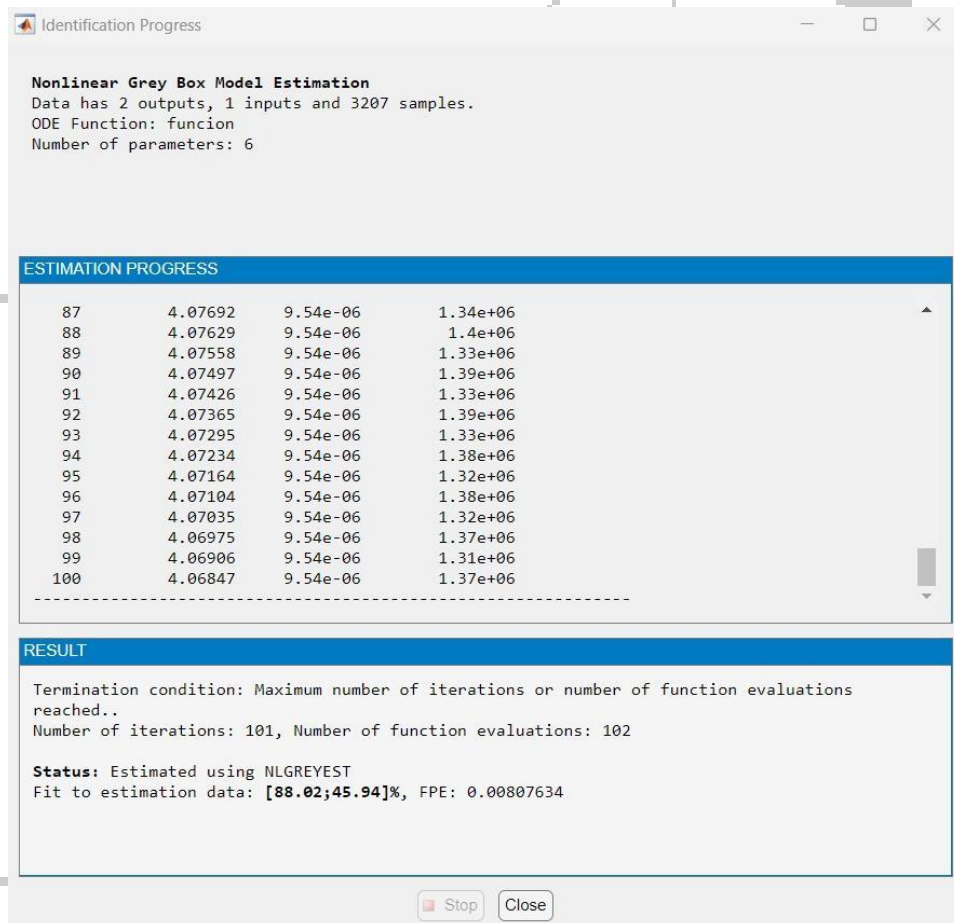


FIGURA 16. IDENTIFICACIÓN DEL PROCESO

```

2      l = 0.24;      %[m] longitud del pendulo
3      g = 9.81;     %[m/s^2] gravedad
4      rp = 0.02;    % radio polea
5      R = 5.7;      % resistencia armadura
6      Mc = 0.1650;  %[kg] masa del carro
7      m = 0.0860;  %[kg] masa del pendulo
8      b = 3.9000;   %[n.m.s/rad] constante viscosa del carro
9      I = 0.0001;   %[kg.m^2] inercia del pendulo
10     Ke = 0.0440;  %[v.s/rad] constante electromagnetica del motor
11     Kt = 0.0440;  %[n.m/a] constante de torque del motor

```

FIGURA 17. PARAMETROS DEL MODELO MATEMÁTICO

Posteriormente, al adquirir los parámetros, se deberán incluir en el código que deduce el porcentaje de semejanza que se da entre el modelo matemático y la plata real, arrojando como resultado un 75.7% de semejanza del carrito y un 74.01% de acuerdo con la posición angular del péndulo, teniendo en cuenta que este valor de semejanza es apto para simular la planta física y se detienen las interacciones en ese puesto.

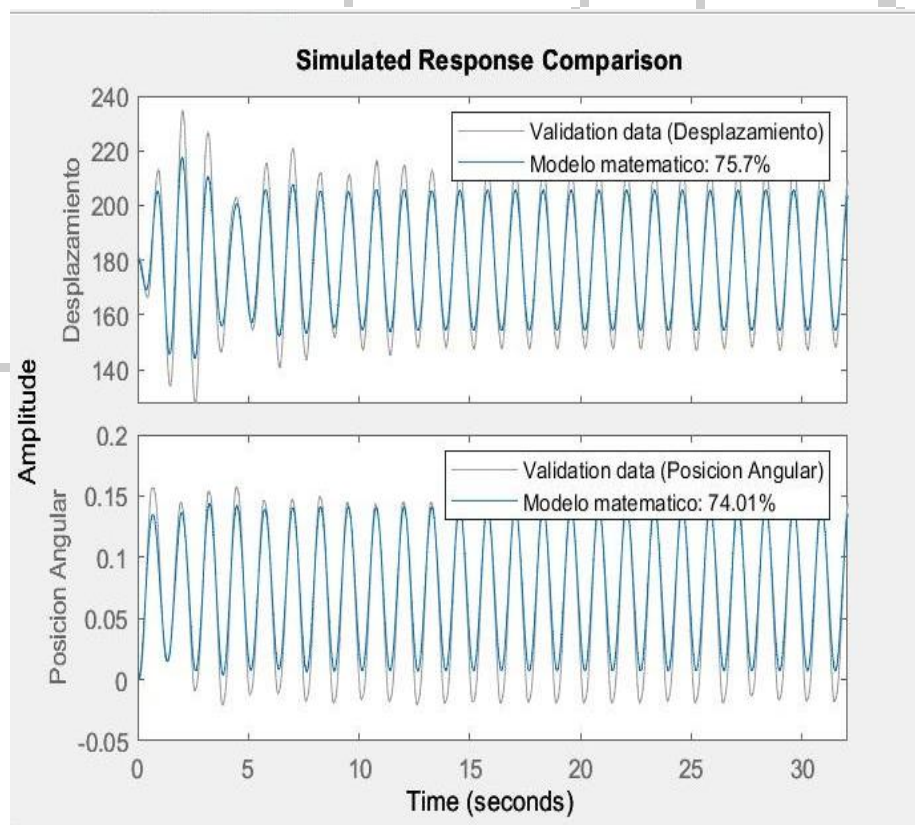


FIGURA 18. GRÁFICAS DE COMPARACIÓN ENTRE LOS DATOS DEL SISTEMA Y EL MODELO MATEMÁTICO

### DISEÑO DE CONTROL PID DEL SISTEMA

Es necesario, para lograr elaborar el controlador, que se lleve a cabo una simulación con una planta virtual, la cual se hará mediante bloques de la herramienta Simulink de Matlab, y por medio de esta podremos tomar los parámetros del controlador lo más próximos a los que se necesitaran para el control de la planta real.

La simulación del control inicial se debe llevar a cabo por medio de bloques de control PID, por medio de uno se controla el desplazamiento y la posición del carrito, y por medio de otro se controla la posición del péndulo, para este proceso se manejan controladores en paralelo.

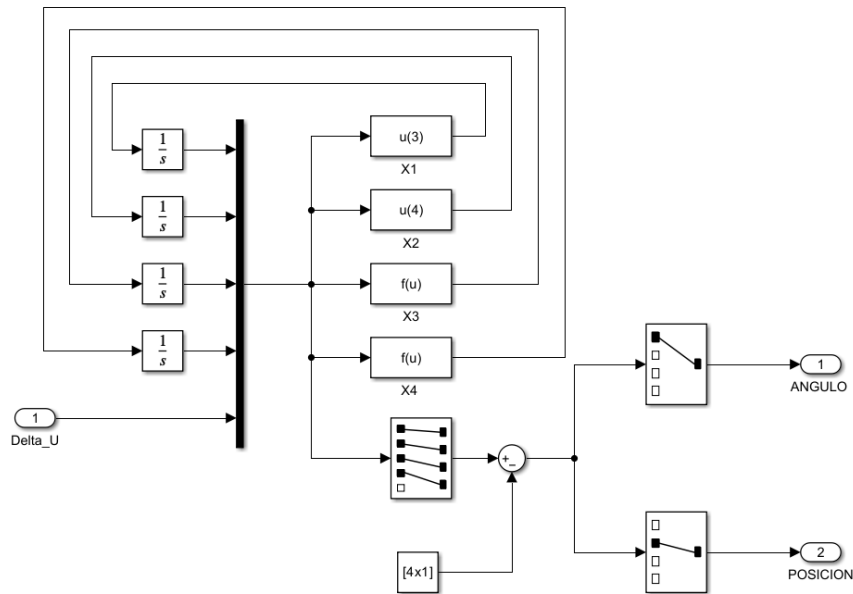


FIGURA 19. PLANTA VIRTUAL DEL MODELO MATEMATICO

La simulación del control inicial se debe llevar a cabo por medio de bloques de control PID, por medio de uno se controla el desplazamiento y la posición del carrito, y por medio de otro se controla la posición del péndulo, para este proceso se manejan controladores en paralelo.

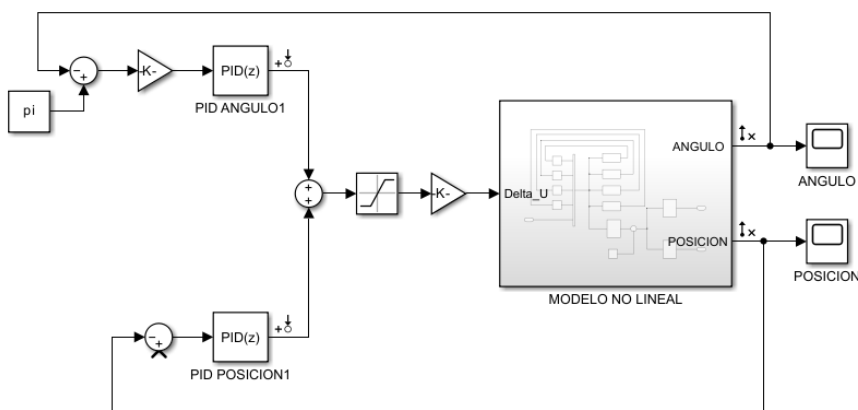


FIGURA 20. MODELO DEL CONTROL PID DEL SISTEMA

Los parámetros de los bloques PID se establecen por medio del **PID Tuner**, que se encargara de darle un método de ajuste de bucle único rápido, por medio de este es posible lograr un modelo fuerte con el tiempo de respuesta que se espera obtener.

Al dar inicio al PID Tuner, el software realizara un cálculo de un modelo de planta lineal observado por el controlador. Automáticamente, el software va a establecer la entrada y salida de la planta y va a usar el punto de funcionamiento actual para la linealización.

El sintonizador PID va a calcular un controlador PID para obtener un acuerdo entre rendimiento y robustez. Predeterminadamente, el rendimiento del seguimiento de referencia de paso se muestra en la siguiente gráfica:

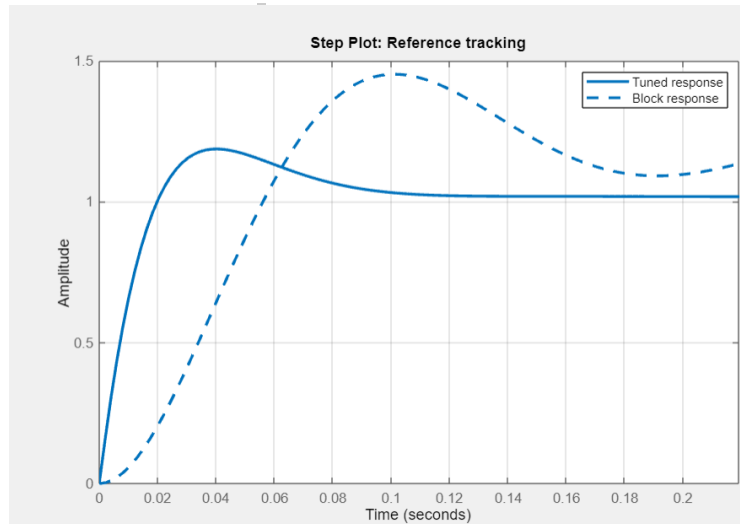


FIGURA 21. REFERENCIA DE PASO DEL PID TUNER

El PID Tuner mide ciertos parámetros, que son esenciales para lograr variar de manera manual algunos de estos, para que se llegue a una respuesta transitoria del sistema que sea optima, y por medio de ello, el sistema se va a poder controlar de una forma más veloz y sin que se lleguen a tener variaciones muy grandes.

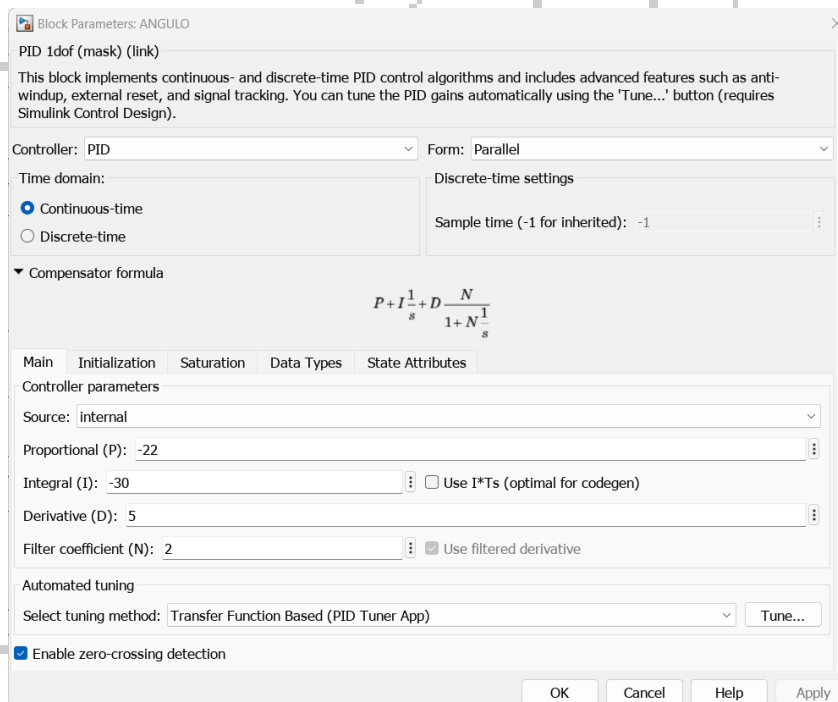


FIGURA 22. BLOQUE DE PARÁMETROS DE PID DEL ÁNGULO

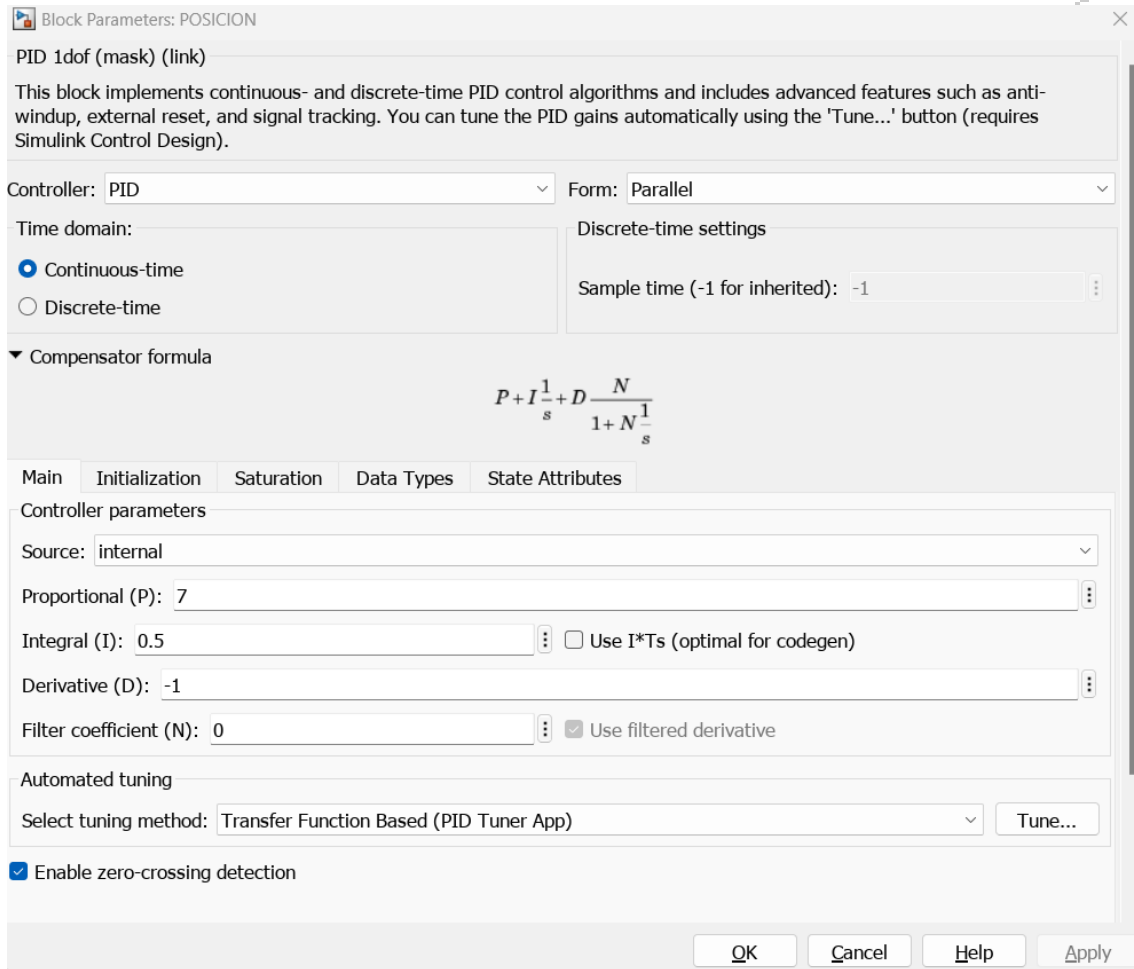


FIGURA 23. BLOQUE DE PARÁMETROS DE PID DE LA POSICIÓN

Al momento de llevar a cabo la simulación y ejercer la acción de control al sistema, tenemos que el sistema logra estabilizarse en menos de un segundo, y a pesar de que esto es un poco tosco, es plenamente necesario para lograr que el péndulo permanezca de forma vertical al momento de liberarlo.



FIGURA 24. GRAFICA DE ESTABILIZACION DE LA PLANTA VIRTUAL CON CONTROL PID

**PRUEBA DEL CONTROL PID EN EL SISTEMA REAL**

Al ya tener el sistema simulado, se pasa a llevar a cabo una prueba de control en la plata física; esto se hace para poder poner a prueba la acción de control de los PID y también para lograr verificar el parecido entre la planta modelada y la planta real, lo cual da como resultado una acción de control limpia en la que el péndulo busca permanecer en su punto de equilibrio.

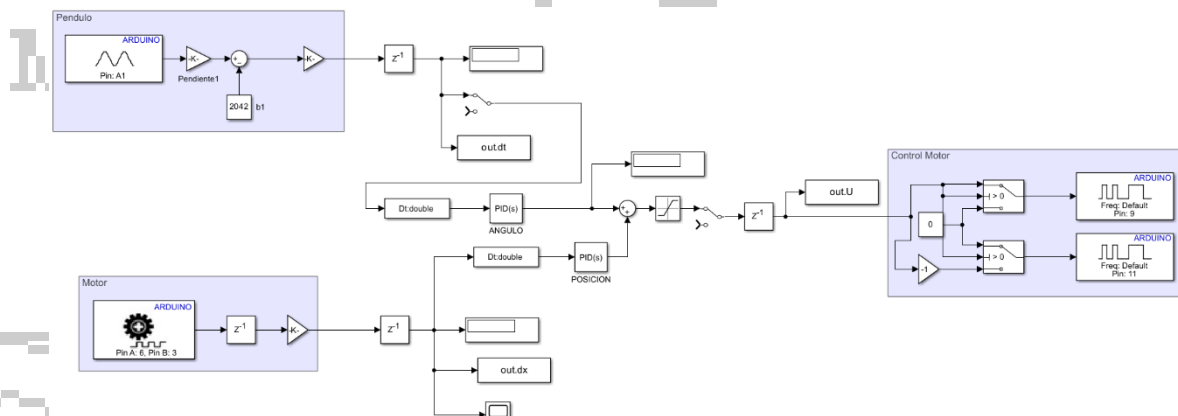


FIGURA 25. PROGRAMA DE CONTROL PID EN PARALELO

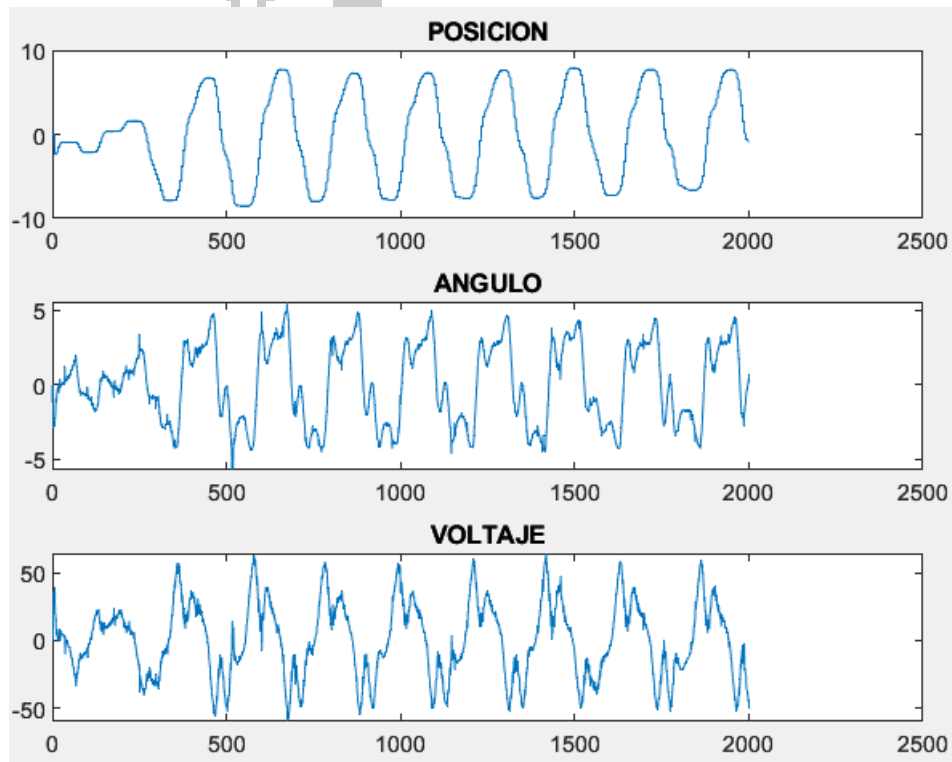


FIGURA 26. GRFICAS DEL CONTROL PID DEL SISTEMA REAL

Para poder contar con la certeza de que el controlador funciona de manera adecuada será necesario provocar perturbaciones al sistema, y eso se va a lograr golpeando la barra (péndulo) para ver que el sistema logre retornarla a su posición de equilibrio.

Al ver las gráficas del control del sistema se harán evidentes las perturbaciones llevadas a cabo, y estas se ven influenciadas en el ángulo, la posición y también va a evidenciar la variación en el voltaje que es esencial para que el sistema vuelva a su estado de equilibrio.

### DISEÑO DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

Para poder llevar a cabo el programa de modos deslizantes es de vital importancia acoger como base el control que ya fue diseñado por PID, al momento de llevar a cabo este método se busca que el control tenga más suavidad sin que esto vaya a afectar la validez de este, y que de esta manera el sistema se siga conservando en un punto de equilibrio.

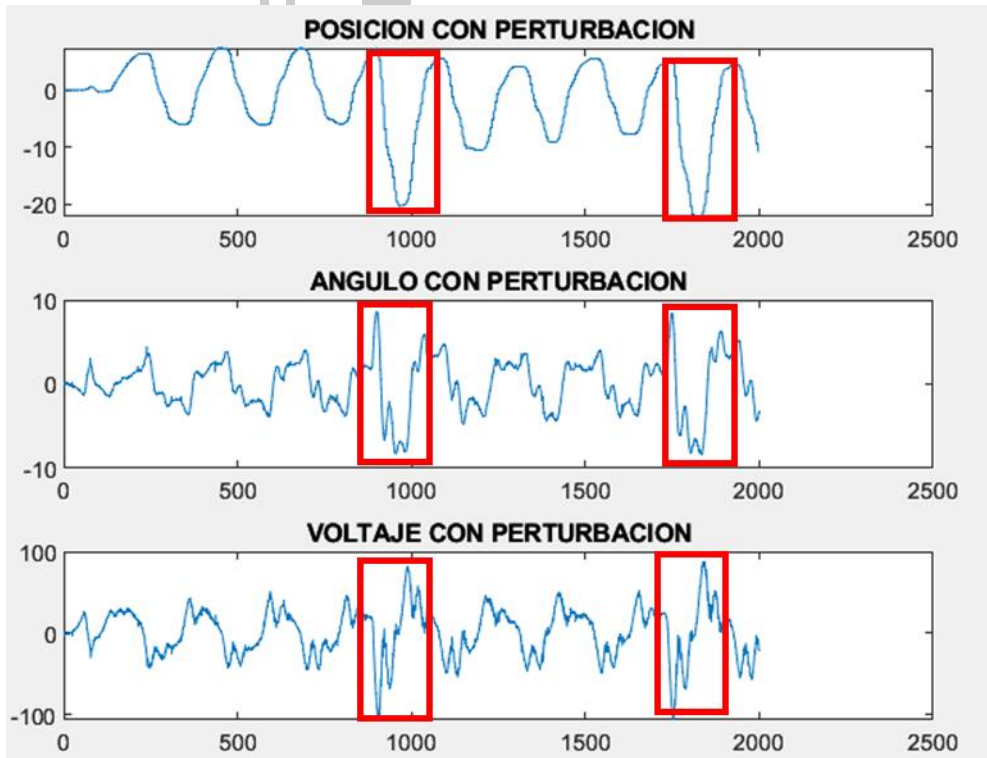


FIGURA 27. GRAFICAS DEL CONTROL PID DEL SISTEMA REAL CON PERTURBACION

**DISEÑO DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES**

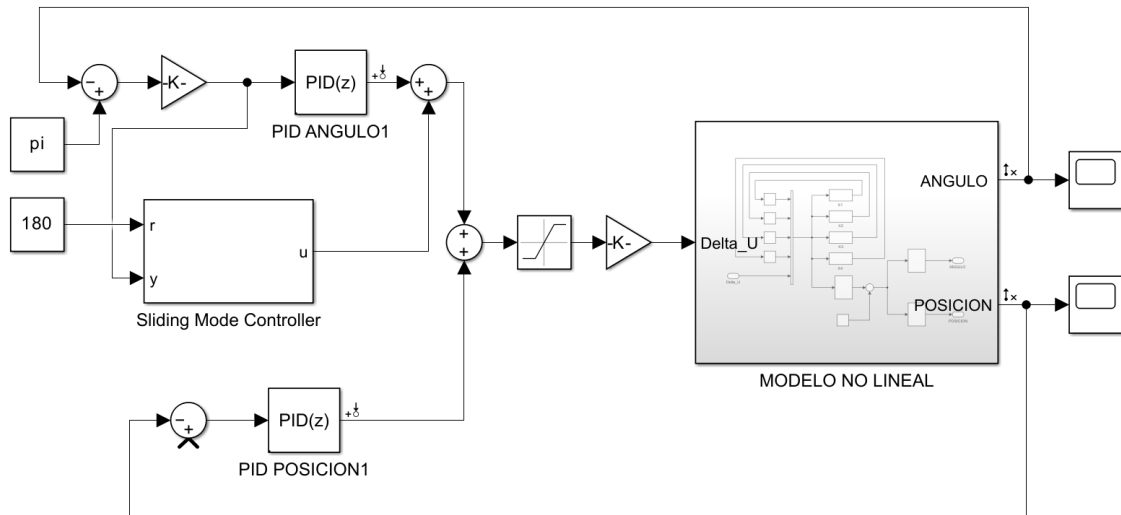


FIGURA 28. MODELO DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DEL SISTEMA

El bloque de simulink que se va a usar para la planificación de modos deslizantes es conocida como Sliding Mode Controller o SMC las cuales son sus siglas en inglés, y esto quiere decir control de modo deslizante basado

en histéresis, el cual cuenta con dos puertos de entrada y un puerto de salida, al puerto r es necesario que reciba una señal de referencia la cual en esta ocasión vendría siendo  $180^\circ$  ya que es el estado de equilibrio del péndulo, al puerto y es necesario establecer una señal de salida del sistema de la planta y el puerto de salida u proporciona la señal de salida de dicho sistema de control.

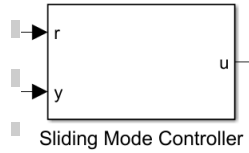


FIGURA 29. BLOQUE DE MODOS DESLIZANTES

Este bloque se va a determinar por cuatro parámetros, que vienen siendo: ancho de la banda de la histéresis total, límite superior de la acción de control, límite inferior de la acción de control y el tiempo de muestra en segundos, entre las ejecuciones continuas del bloque. En el tiempo de dicha ejecución, el bloque crea salidas, y si concuerdan, se encarga de renovar su estado interior.

Para llegar a estos parámetros, se requiere de la toma de diferentes valores predispuestos del bloque y cambiarlos hasta lograr tener una acción de control suave que dé lugar a poder establecer el punto de equilibrio del sistema.

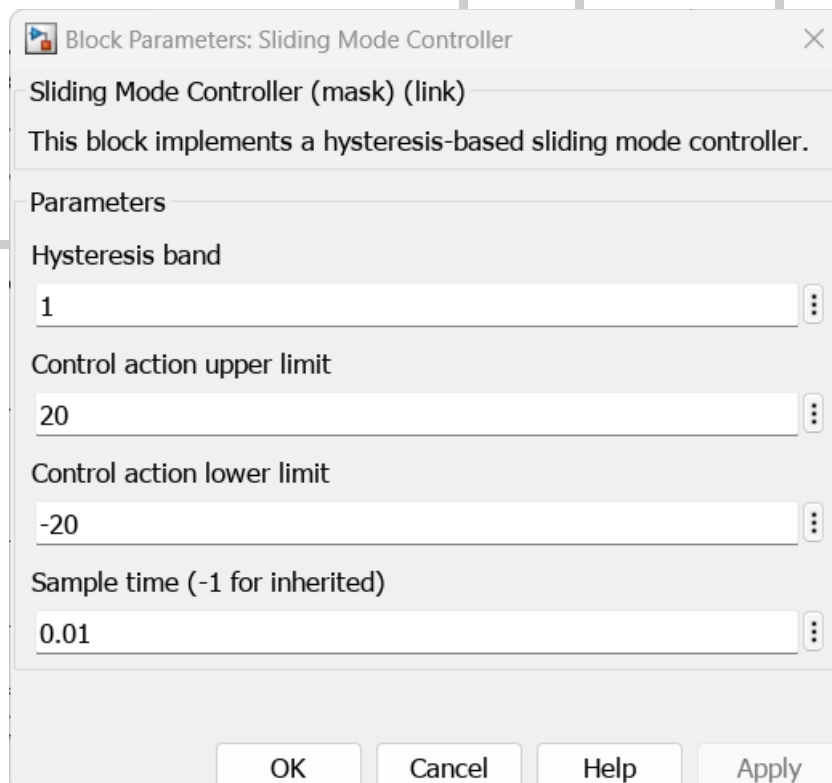


FIGURA 30. PARAMETROS DEL BLOQUE DE MODOS DESLIZANTES

Al llevar a cabo la simulación y emplear la acción de control al sistema, se podrá evidenciar que el sistema va a lograr estabilizarse de una manera algo más pulida con el control por modos deslizantes en comparación con el control por PID, ya que por medio de esta demora un poco más en encontrar su punto de estabilidad.

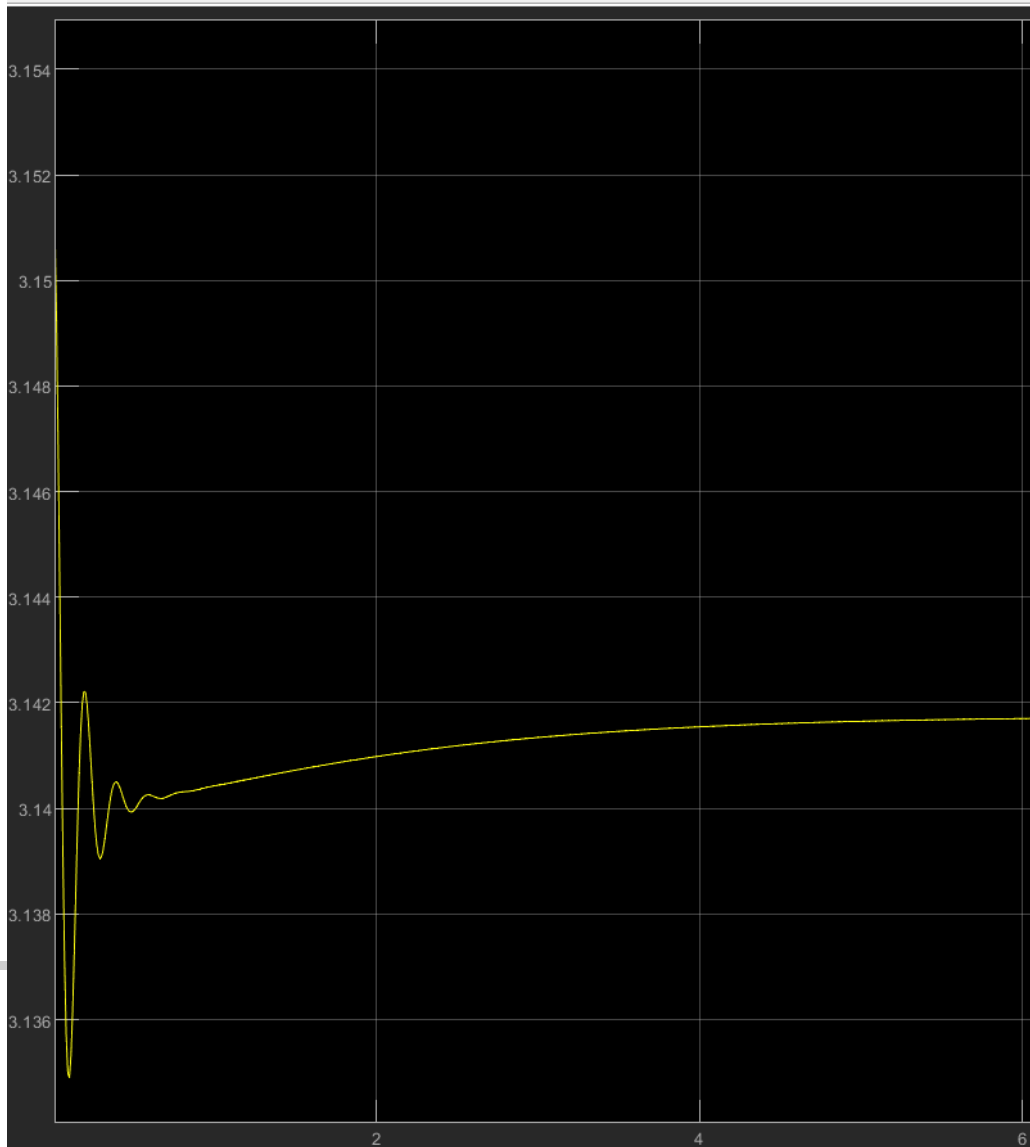


FIGURA 31. GRAFICA DE ESTABILIZACION DE LA PLANTA VIRTUAL CON CONTROL DE MODOS DESLIZANTES

### PRUEBA DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DEL SISTEMA REAL

Es necesario realizar la prueba de control en la planta física, lo cual tiene como objetivo poner a prueba la acción de control que es llevada a cabo por el bloque SMC, y así se podrá demostrar que el péndulo llega al punto de equilibrio de una manera más pulida, logrando de esta manera demostrar lo eficaz del control.

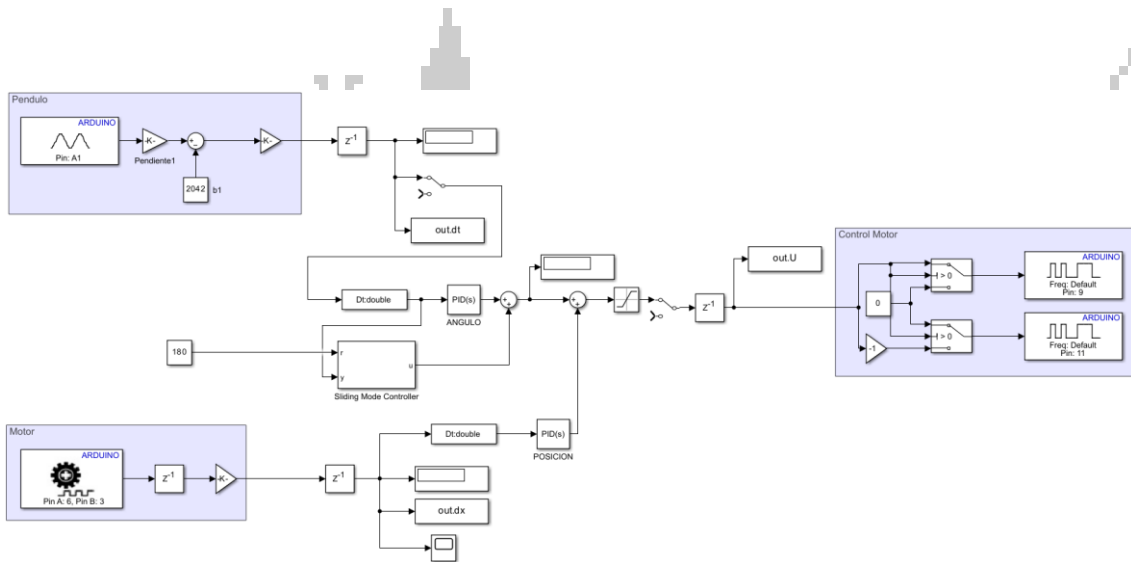


FIGURA 32. PROGRAMA DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES EN PARALELO DEL SISTEMA REAL

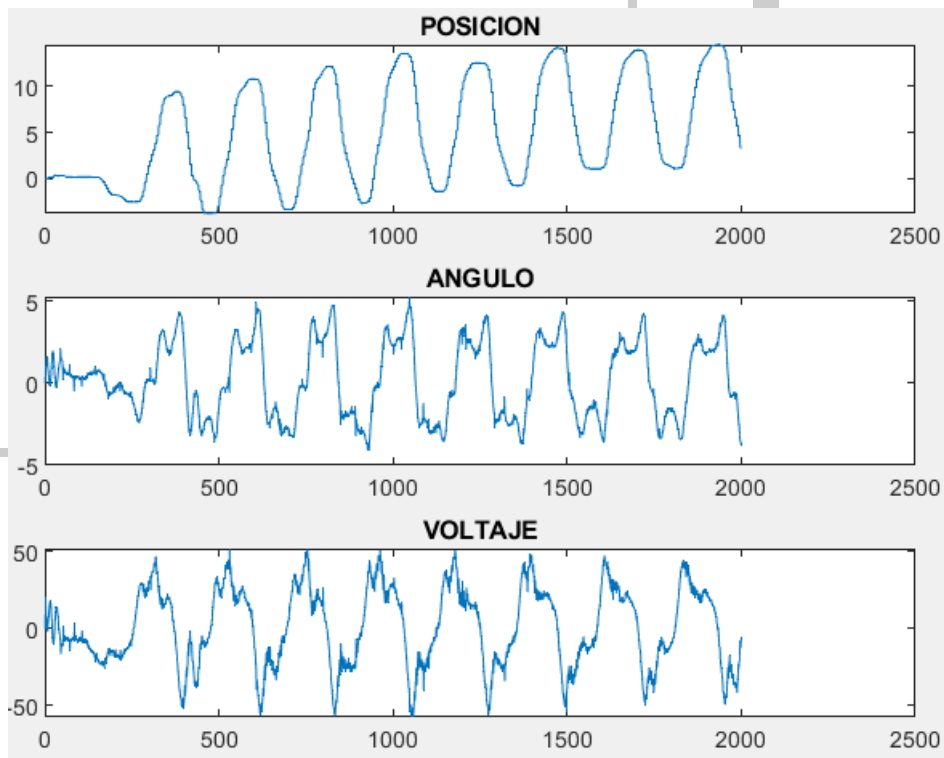


FIGURA 33. GRAFICAS DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DEL SISTEMA REAL

De igual manera que en el control por PID se deben llevar a cabo perturbaciones al sistema para que de esta manera se logre evidenciar que el controlador funcionara de manera adecuada y poder demostrar que el sistema volverá a su posición de equilibrio con delicadeza.

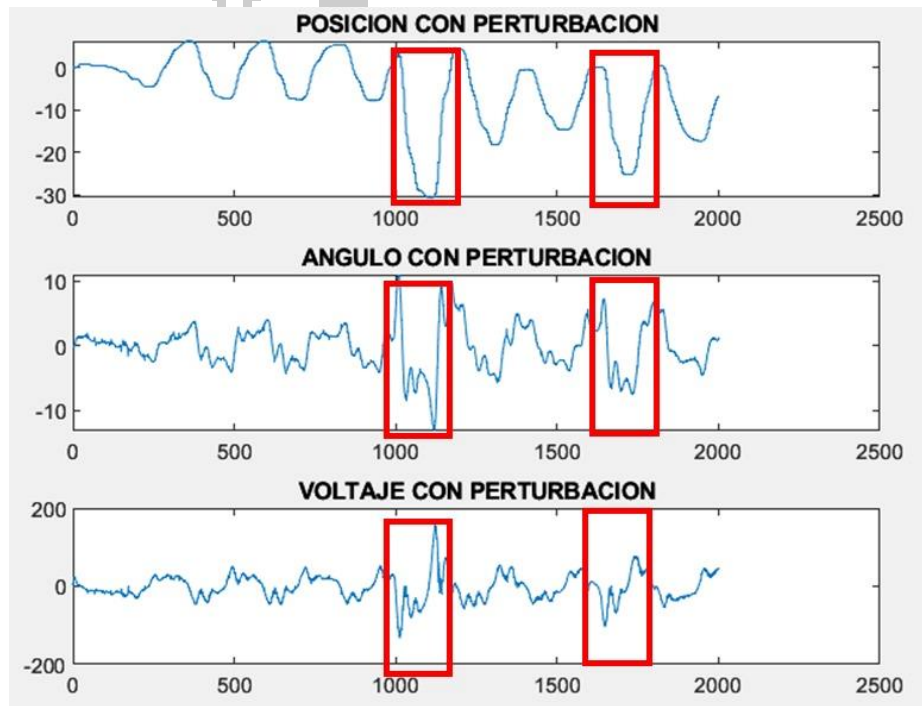


FIGURA 34. GRAFICAS DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DEL SISTEMA REAL CON PERTURBACION

Al observar las gráficas sobre control del sistema, es posible observar las perturbaciones que se llevan a cabo, las cuales se ven reflejadas en el ángulo y en la posición, y en el caso en cuestión se presenta una magnitud más grande debido a que al ser más delicada la estabilización del sistema, va a necesitar más distancia para poder encontrar el punto de equilibrio.

# AVISO

## LA SEGURIDAD ES RESPONSABILIDAD DE TODOS



- Asegúrese de que todos los productos y equipos de seguridad y componentes electrónicos relacionados estén en buenas condiciones antes de usarlos.
- Antes de iniciar, se debe chequear que la correa se encuentre en posición, bien acoplada a las poleas y al carrito.
- Es necesario examinar las conexiones electrónicas en la protoboard.
- Antes de iniciar la toma de datos, comprobar que los sensores estén brindando un funcionamiento adecuado
- Verificar que las prensas estén fijadas al riel, para así el péndulo no pierda estabilidad.
- Dar al prototipo el uso adecuado, de acuerdo con la finalidad por la cual fue creado.



Mantenga sus dedos, manos, cabello, ropa holgada, guantes y herramientas lejos de las piezas en movimiento.



No operar o reparar este equipo hasta que haya tenido el entrenamiento e instrucciones apropiadas para este uso. Lee el manual de operación y servicio.



Prohibido el consumo de alimentos y bebidas cerca del equipo.