

**Efecto de la curvatura espacial
del Universo en el espectro angular
de las anisotropías en la temperatura
de la Radiación Cósmica de Fondo**

por

**GABRIEL ANDRÉS MARIÑO BOHORQUEZ
2000528**

**BUCARAMANGA, COLOMBIA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2008**

**Efecto de la curvatura espacial
del Universo en el espectro angular
de las anisotropías en la temperatura
de la Radiación Cósmica de Fondo**

por

**GABRIEL ANDRÉS MARIÑO BOHORQUEZ
2000528**

**Trabajo de grado
para optar al título de
Físico**

**BUCARAMANGA, COLOMBIA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2008**

“La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos”.
Albert Einstein

“Dado que la textura del Universo es la más perfecta y la obra de un Creador sapientísimo, nada sucede en el Universo sin obedecer alguna regla de máximo o mínimo”.
Leonhard Euler

“Todos los cambios, aún los más ansiados, llevan consigo cierta melancolía; porque aquello que dejamos es una parte de nosotros mismos: debemos morir una vida para entrar en otra”.
Anatole France

“El sistema de gobierno más perfecto es aquél que produce mayor suma de felicidad posible, mayor suma de seguridad social y mayor suma de estabilidad política”.
Simón Bolívar

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi padre quien apoyo y sustentó mis estudios, y nunca dejó de hacerlo a pesar de las dificultades que tuve en mis inicios en la vida universitaria. También agradezco a mi madre por su cariño y enseñanzas, ella fue una guía importante a lo largo de mi vida y en especial durante mi carrera, a pesar de que en los últimos semestres estuvo muy lejos siempre mantuvimos contacto. Agradezco a mis compañeros de la UIS por su amistad, Nelson, Daniel, Edwin, Cesar, William, Jorge, Viviana, Yolima, Karina ..., los extraño mucho cuando ya no teniamos las mismas clases porque cada uno de nosotros quedo disperso a lo largo de la carrera (cosas que pasan mucho en física). A mi buen amigo Jhon Humberto, soldado de la patria, tanto tiempo de habernos conocido y aún seguimos en contacto, espero que estes el dia de mi graduación compadre. A Lauren, a pesar de las riñas, me mantuviste firme en el camino para seguir estudiando y no guiarme por mis sentimientos. Al profesor Yeinzon, por permitirme tener el placer de trabajar junto a el en su proyecto de COLCIENCIAS, y sacar adelante este trabajo de grado; no sólo fue mi director de grado también es un amigo. A mis compañeros del GIRP, la pasamos chevere en Armenia, durante la reunión binacional de relatividad y gravitación, fue un gusto trabajar y compartir con ustedes. Y finalmente, por qué no agradecer a mis maestros de la escuela de física?, todos ellos me parecieron excelentes maestros. A cada uno de ellos su agradecimiento porque me motivaron en cierta manera a continuar estudiando esta apasionante ciencia, con la dedicación y amor que pusieron en su labor de enseñanza; pronto seremos colegas.

Bucaramanga, 15 de julio de 2008.

Resumen

Se estudian algunos aspectos teóricos acerca de la curvatura espacial K del Universo definida en la métrica de Friedman-Robertson-Walker, en base al bien conocido y aceptado escenario del curvatón que supone que la perturbación primordial de la curvatura ζ es generada por fluctuaciones cuánticas en un campo escalar ligero débilmente acoplado σ que no conduce a inflación. La consideración de la curvatura espacial del Universo implica varias modificaciones a la física empleada por los tradicionales modelos inflacionarios que usualmente la desprecian ($K = 0$) para estudiar el origen de estructuras a gran escala. Esto permite que la introducción de la curvatura espacial en el modelo cosmológico estándar inflacionario se convierta en una nueva herramienta para realizar ajustes más finos entre observación y teoría. En particular, la curvatura espacial es usada para estudiar su efecto en las perturbaciones primordiales de la curvatura, que se cree darían origen a las hoy en día observadas anisotropías en la temperatura de la Radiación Cósmica de Fondo, y explicar por ejemplo, la ligera caída de los multipolos más pequeños en el espectro angular C_l de dichas anisotropías, reportada por el satélite WMAP. En general, dado que la contribución relativa de la curvatura espacial a la densidad de energía del Universo Ω_K observada hoy día es muy pequeña, igualmente es el efecto de la curvatura espacial en las observaciones relacionadas, de manera que la suposición de un universo plano es ampliamente válida para la región correspondiente a nuestro universo observable, aunque tal suposición se considera para el presente trabajo como una posible aproximación de una topología curva que es más general, cuyos indicios son de momento poco apreciables. Sin embargo, un estudio más profundo de estos indicios ampliará nuestra comprensión sobre la naturaleza del Universo.

Palabras clave: Curvatura espacial del Universo, curvatón, escenario del curvatón, perturbación primordial de la curvatura, radiación cósmica de fondo, espectro angular, multipolos bajos, funciones hiperesféricas de Bessel.

Abstract

We review some theoretical aspects about the spatial curvature K of the Universe defined in the Friedman-Robertson-Walker's metric, on the basis of the well-known and accepted scenenario of the curvaton that supposes that primordial curvature perturbation ζ is generated by the quantum fluctuations of a weakly coupled light scalar field σ that does not drive inflation. The consideration of the spatial curvature of the Universe implies several modifications to the physics used by the traditional inflationary models who usually despise it ($K = 0$) to study the origin of the large-scale structure in the Universe. This allows that the introduction of the spatial curvature in the standard inflationary cosmological model should turn into a new tool to realize thinner adjustments between observation and theory. Especially, the spatial curvature is used to study its effect in the primordial curvature perturbation, that we believe may give origin to nowadays observed anisotropies in the temperature of the Cosmic Microwave Radiation, and to explain for example, the light fall of the smaller multipoles in the angular spectrum C_l of the above mentioned anisotropies, reported by the satellite WMAP. In general, provided that the relative contribution of the spatial curvature to the density of energy of the Universe Ω_K observed today is very small, equally it is the effect of the spatial curvature in the related observations, so that the supposition of a flat universe is widely cost for the region corresponding to our observable Universe, though such a supposition is considered for the present work as a possible approximation of a curved topology that is more general, whose indications are at the moment slightly valuable. Nevertheless, a deeper study of these indications will extend our comprehension on the nature of the Universe.

Key words: spatial curvature of the Universe, curvaton, curvaton scenario, primordial curvature perturbation, cosmic microwave background radiation, angular spectrum, low multipoles, hyperspherical Bessel's functions.

Índice general

1. Introducción	8
2. Teoría de perturbaciones cosmológicas en espacio curvo	16
2.1. Introducción	16
2.2. Perturbaciones métricas a primer orden en el elemento de línea de FRW	16
2.2.1. La no invariancia de las perturbaciones métricas ante trans- formaciones de coordenadas	17
2.2.2. La perturbación de la curvatura ζ invariante de gauge	18
2.3. Introducción a la teoría cuántica de campos en espacio curvo para describir las perturbaciones en el tensor energía-momentum	21
2.3.1. El tensor energía-momentum	21
2.3.2. La ecuación de Klein-Gordon	22
2.3.3. Las fluctuaciones cuánticas y las perturbaciones cosmológicas .	22
2.4. Conclusiones	23
3. El mecanismo del curvatón en espacio curvo para describir las per- turbaciones primordiales en la curvatura	24
3.1. Introducción	24
3.2. Descripción del modelo del curvatón	24
3.2.1. Configuración básica del potencial del curvatón	25
3.3. Perturbación de la curvatura ζ después del decaimiento del inflatón .	27
3.4. El fluido del curvatón	28
3.5. Las fluctuaciones en el campo escalar del curvatón	32
3.6. Conclusiones	34
4. Análisis del espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la Radiación Cósmica del Fondo	35
4.1. Introducción	35
4.2. Las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo .	35
4.3. Las perturbaciones primordiales en la curvatura	38
4.4. El espectro angular de las anisotropías en la temperatura	41
4.4.1. El espectro escalar de potencias	43

4.5.	Los efectos de la curvatura en las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo	44
4.5.1.	La supresión de los multipolos más bajos en el espectro angular	45
4.5.2.	Indicios en el índice espectral y su corrimiento	45
4.6.	Conclusiones	48
5.	Conclusiones generales	50
A.	Perturbaciones en la métrica de Friedman-Robertson-Walker	52
A.1.	La métrica de Friedman-Robertson-Walker: algunas definiciones y observaciones	52
A.2.	La derivada covariante	53
A.3.	Transformaciones infinitesimales de coordenadas en el elemento de línea más general	54
B.	El campo escalar del curvatón	58
B.1.	Definición de la densidad de energía y la presión del fluido del curvatón	58
B.2.	La ecuación diferencial de Klein-Gordon para el campo escalar del curvatón	59
C.	Solución espacial de la ecuación de Klein-Gordon para las perturbaciones de un campo escalar sin masa no dominante	63
C.1.	Solución angular: las funciones armónicas esféricas	64
C.2.	Solución radial: las funciones hiperesféricas de Bessel	66
C.3.	Principales propiedades de las funciones armónicas espaciales $Q_k(\vec{x})$	72
D.	Las Ecuaciones de Friedman y de continuidad durante inflación	75
E.	Las condiciones iniciales de vacío de Bunch-Davies y la cuantización de las fluctuaciones en el campo del curvatón	79
E.1.	Construcción del espacio de Fock	81
E.2.	Construcción del operador Hamiltoniano	83

Índice de figuras

1.1.	Representación bidimensional del espacio dependiendo del signo del parámetro de curvatura K . La superficie de un “plano” como se conoce en el espacio euclidiano cuando $K = 0$, tiene forma esférica en el espacio cerrado cuando $K > 0$ y forma hiperbólica en el espacio abierto cuando $K < 0$	9
1.2.	La magnitud de la contribución relativa de la curvatura disminuye dramáticamente durante inflación entre $t_{ini} < t < t_f$ y aumenta posteriormente hasta un valor Ω_K^* observado hoy día, y se espera que sea más grande en un futuro lejano. El valor Ω_K^* coincide con el observado en algún tiempo pasado t^* , cuando las escalas más lejanas observadas hoy día salieron del horizonte de partículas durante inflación (Nótese que la escala de tiempo durante inflación por motivos de comprensión ha sido exagerada).	13
1.3.	Inicialmente el horizonte de partículas comóvil es suficientemente grande para rodear una región causalmente conectada (región sombreada). La inflación entonces encoge dicho horizonte, dejando el Universo observable dentro de la región sombreada. Sin embargo, debido al aumento de escala durante inflación, muchos objetos se salen del horizonte de tal manera que al final de inflación el Universo observable corresponde a una región comóvil muy reducida en comparación con aquélla al comienzo de inflación.	14
1.4.	Relación bidimensional entre la ecuación de estado de la energía oscura caracterizada por el parámetro dependiente del tiempo w , y el parámetro de curvatura Ω_K . Los contornos muestran el 68 % y el 95 % de nivel de confianza (NC) y se le ha dado prioridad a los valores de $w > -2,5$. La figura muestra la restricción de sólo el WMAP (azul claro; 95 % NC) comparada con WMAP+BAO+SN (púrpura, 68 % y el 95 % NC). La información adicional dada por BAO y SN es muy útil dado que restringe los valores de Ω_K y w simultáneamente [8].	15

3.1.	Forma del potencial del inflatón. Se muestran las etapas a) slow roll y b) oscilación alrededor del mínimo de potencial. Durante el tiempo en que ϕ evoluciona hasta ϕ_{min} , el Universo es dotado de una enorme energía del vacío. Cuando esta energía domina la densidad total del Universo, comienza la expansión exponencial.	26
4.1.	Observar más lejos es observar el pasado. Actualmente la radiación electromagnética más lejana que observamos es la proveniente del fondo de microondas de la radiación cósmica, emitida 380.000 años después del Big Bang y un tiempo después del momento de igualdad radiación-materia. Esto sucedió cuando el Universo era un plasma caliente y los fotones cesaron de interactuar con los electrones, haciendo posible observar dicha radiación. Las fluctuaciones en la temperatura observadas a grandes ángulos en el cielo corresponden a las perturbaciones primordiales sobre la superficie de la última dispersión cuando éstas entraron al horizonte de partículas en la era de materia. Con el tiempo las perturbaciones primordiales en la curvatura se intensificaron por la atracción gravitacional de las inhomogeneidades de materia existentes dando como resultado las grandes estructuras que componen el Universo de nuestro tiempo: estrellas, galaxias, cúmulos, etc.	37
4.2.	El espectro angular C_l que mide la anisotropía en la temperatura de la RCF. Mayores valores del momento multipolar l corresponden a pequeños ángulos o bien, escalas más pequeñas del Universo (Cortesía del equipo WMAP de la NASA [29]). La línea continua corresponde al mejor ajuste teórico asumiendo $K = 0$	46
4.3.	Representación bidimensional del índice espectral n_s y su corrimiento $\frac{dn_s}{d \ln \beta}$. Los contornos muestran el 68 % y el 95 % de nivel de confianza. El punto correspondiente al universo plano ($K = 0$) se denomina P_p . El rango de valores correspondientes al Universo curvo se encuentran sobre el segmento de parábola de color negro. El punto P_c corresponde al caso del Universo más cerrado, y se encuentra en buena medida dentro de la región restringida por los datos observacionales (región sombreada). Por el contrario el punto P_a que corresponde al caso del Universo más abierto, se encuentra bastante alejado de la región restringida, lo cual descarta en este análisis al Universo abierto como candidato para nuestro Universo observable [35].	49

Capítulo 1

Introducción

El modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) adoptado como modelo estándar en cosmología, describe muy bien las propiedades de nuestro Universo observable tales como la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, la expansión de Hubble y la edad del Universo actual datada en casi 14 billones de años [1, 2, 3, 4]. El elemento de línea en coordenadas esféricas comóviles se puede expresar como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, t el tiempo cósmico y K es el parámetro de curvatura espacial que describe un universo espacialmente cerrado si $K > 0$, un universo espacialmente abierto si $K < 0$, o un universo espacialmente plano o euclidiano si $K = 0$ (vea la figura 1.1).

Para modelar el Universo más realísticamente, es necesario tomar en cuenta las pequeñas desviaciones en la homogeneidad e isotropía debido a la distribución de las macro-estructuras del Universo, por lo cual se requiere corregir el elemento de línea de FRW añadiendo pequeñas perturbaciones $\delta g_{\mu\nu}$ a la métrica. Estas perturbaciones son producidas por pequeñas inhomogeneidades en la densidad de energía del Universo $\frac{\delta\rho}{\rho}$, las cuales contrastan con las anisotropías en la temperatura de la Radiación Cósmica de Fondo (RCF) $\frac{\delta T}{T}$ por ser del orden de 10^{-5} [5, 6, 7]. El elemento de línea completo puede ser representado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

donde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ corresponde a la métrica de fondo dada por (1.1). La métrica completa ha sido desacoplada en una parte para el fondo y otra parte para las perturbaciones:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento, se empezará por escribir las ecuaciones de Einstein, las cuales relacionan la distribución general de la energía y

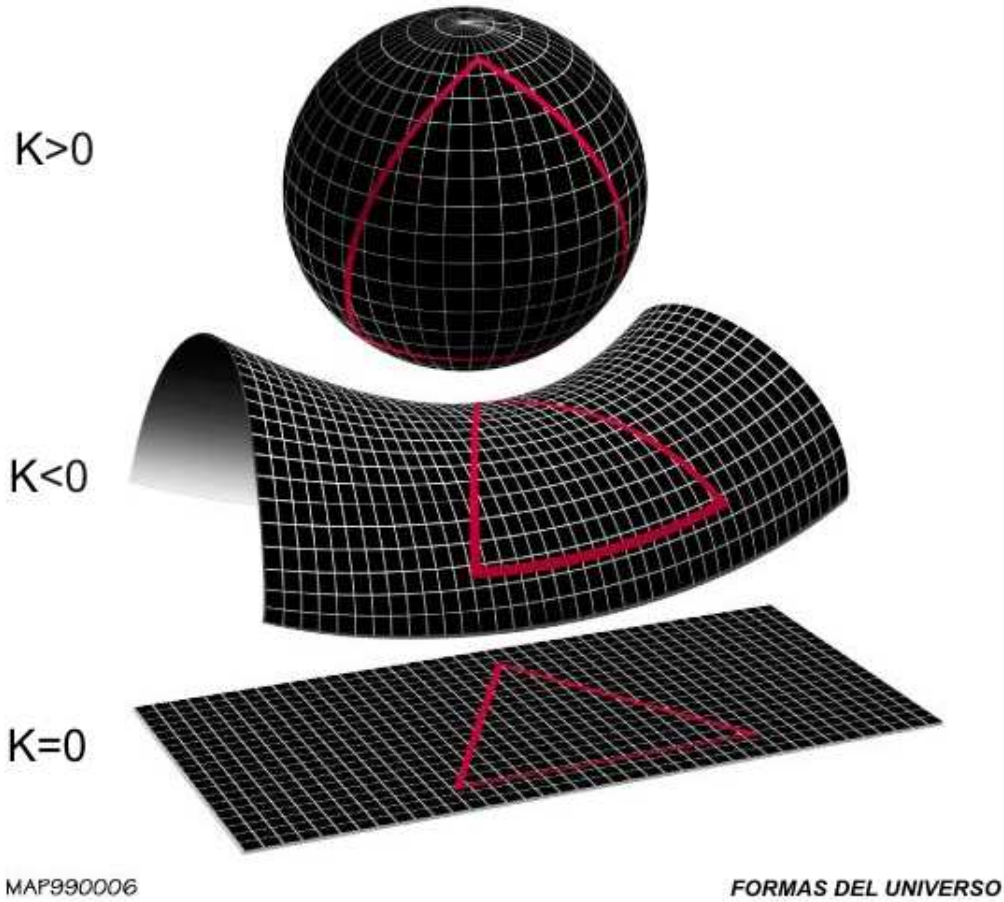


Figura 1.1: Representación bidimensional del espacio dependiendo del signo del parámetro de curvatura K . La superficie de un “plano” como se conoce en el espacio euclidiano cuando $K = 0$, tiene forma esférica en el espacio cerrado cuando $K > 0$ y forma hiperbólica en el espacio abierto cuando $K < 0$.

el momentum dadas por el tensor $T_{\mu\nu}$ con las propiedades geométricas del espacio-tiempo,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad (1.4)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci. $R = R^\mu_\mu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu}$ es el escalar de curvatura.

Para una métrica con pequeñas perturbaciones, el tensor de Einstein y el tensor de energía-momentum pueden ser escritos como:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \delta G_{\mu\nu} + \dots , \quad (1.5)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu} + \dots \quad (1.6)$$

De esta manera, las ecuaciones de Einstein pueden ser separadas como [12]:

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(0)} , \quad (1.7)$$

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} , \quad (1.8)$$

donde $T_{\mu\nu}^{(0)}$ es el tensor de energía-momentum de fondo y δ denota los términos lineales de las fluctuaciones en la métrica y la densidad de energía.

Las ecuaciones (1.7) para la métrica de fondo de FRW pueden ser resueltas asumiendo que el contenido del Universo está dado por un fluido perfecto con presión P_0 y densidad ρ_0 homogéneas e isotrópicas, dando como resultado las conocidas Ecuación de Friedman y ecuación de continuidad, respectivamente [1, 2, 3, 4]:

$$H^2 = \frac{\rho_0}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2} , \quad (1.9)$$

$$\dot{\rho}_0 + 3H(\rho_0 + P_0) = 0 , \quad (1.10)$$

en donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble y la constante $m_p = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$ es la masa reducida de Planck. Las ecuaciones de arriba describen completamente la evolución del universo una vez se conoce su contenido energético. En particular la ecuación de estado $P_0 = w\rho_0$ describe dicho fluido perfecto independientemente del parámetro de curvatura espacial K ¹.

Para analizar la contribución relativa de la curvatura espacial a la densidad de energía global del Universo, es conveniente reescribir la ecuación de Friedman (1.9) utilizando el parámetro de densidad de energía Ω definido como la razón entre la densidad de energía global del Universo ρ_0 y aquella densidad de energía global crítica ρ_{crit} que tendría si el espacio fuese absolutamente plano ($K = 0$), es decir,

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} , \quad \Omega = \frac{\rho_0}{\rho_{crit}} = \frac{\rho_0}{3m_p^2 H^2} \quad (1.11)$$

Un reciente reporte de datos proveniente del satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) en combinación con las medidas de distancias de SN (Type Ia supernovae) y BAO (Baryon Acoustic Oscillations) en la distribución de galaxias determinó el valor del parámetro de la densidad de energía del Universo actual como $-0,0175 < (\Omega - 1) < 0,0085$, lo cual significa que la contribución relativa de la curvatura espacial puede ser tan grande como $\frac{|K|}{(a_0 H_0)^2} = 0,0175$ [8]. Una

¹Excepto, cuando se estudia el caso de la energía oscura, bien sea como energía de vacío (constante cosmológica) con $w = -1$ o como energía oscura dinámica con $w \neq -1$ debido a que estas dos diferentes consideraciones parecen afectar los valores medidos de la contribución relativa de la curvatura a la densidad de energía del Universo, lo cuál sugiere una dependencia de la curvatura espacial en la densidad de energía oscura [8]

explicación para esta contribución tan pequeña supone que el parámetro de curvatura espacial K es igualmente pequeño ($K \approx 0$), incluso nulo, lo cual corresponde físicamente a un Universo muy plano, según la ecuación (1.11). Esta explicación se conoce como el problema de planitud, porque se requiere un ajuste muy fino en las condiciones iniciales, aunque sea una posibilidad.

Afortunadamente, inflación [9, 10] brinda una elegante solución para el problema de planitud ², al explicar como la contribución relativa de la curvatura decrece exponencialmente después de empezar inflación. Esto es porque la mayoría de los escenarios inflacionarios asumen que una expansión exponencial extremadamente corta ocurrió en el Universo muy temprano, previo al Big-Bang, lo que nos lleva afirmar que durante inflación el parámetro de Hubble $H_* = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_*$ permanece aproximadamente constante de tal forma que el factor de escala a_* evoluciona exponencialmente:

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a_*^2(t)H_*^2} \propto \frac{1}{a^2} \rightarrow 0 \text{ (exponencialmente) ,} \quad (1.12)$$

lo cual está en acuerdo con las observaciones mencionadas. El valor $\frac{K}{a^2 H^2}$ se denomina la contribución relativa de la curvatura espacial a la densidad de energía del Universo Ω_K , cuya evolución se muestra en la figura 1.2.

La propuesta de inflación, revela importantes aspectos acerca de la evolución del parámetro de curvatura Ω_K , así como del radio de nuestro Universo observable (horizonte de partículas). Si la curvatura espacial se asume nula, el parámetro Ω_K también lo será y no evolucionará con el tiempo, debido a que sin importar el tamaño de la región del espacio observable, éste siempre parecerá plano. Esta condición inicial es difícil de imaginar, y es más natural considerar que el Universo presenta una curvatura arbitraria K , desconocida. Si así fuera, sin importar que tan grande fuese antes de inflación, mientras transcurre la expansión acelerada se borra prácticamente su rastro a medida que se reduce el horizonte de partículas comóvil. Esto es porque a pesar de que el horizonte de partículas permanece constante, la expansión acelerada expulsa fuera del horizonte la mayoría del contenido del Universo, dejando una porción reducida del Universo al final de inflación mucho más pequeña que la había a su inicio, y así se explica por qué es difícil apreciar la curvatura ³. Terminada inflación, siguiendo la evolución estándar, el horizonte de partículas aumenta de nuevo (como es de esperarse) hasta la actualidad, al igual que la contribución relativa de la

²Igualmente, inflación también permite solucionar el problema de horizonte y el problema de las reliquias no deseadas, que en su conjunto forman parte de los tres principales problemas de la cosmología estándar original.

³La distancia física del horizonte de partículas d_h se puede aproximar como $d_h \propto H^{-1}$, la cual es constante durante inflación. La distancia comóvil del horizonte de partículas $d_c \approx \frac{H^{-1}}{a}$, por el contrario se reduce dramáticamente a consecuencia de la expansión rápida, lo cual significa que las distancias físicas entre puntos del espacio aumenta y la mayoría de objetos salen del horizonte físico.

curvatura Ω_K , a medida que el contenido del Universo expulsado durante inflación se reintegra paulatinamente a la región observable como se puede ver en la figura 1.3. A pesar de ello, la contribución hoy día no es lo suficientemente grande para alejarnos significativamente de la planitud. Aún así, existe una motivación adicional, dado el interés revivido (y creciente) en las mediciones de Ω_K , según la cual una mejor determinación observacional de Ω_K tiene una importante implicación para imponer condiciones a la naturaleza de la energía oscura. Un ejemplo de las mediciones realizadas al respecto se puede ver en la figura 1.4.

Las ecuaciones de movimiento para el fondo homogéneo comentadas anteriormente, no ofrecen mayor información acerca de la geometría real del Universo, y quedan algunas dudas acerca de la forma real del espacio, que contempla las tres posibilidades: cerrado, abierto o plano. Para aclarar esto último es necesario recurrir a las perturbaciones en la métrica y la densidad de energía relacionadas mediante las ecuaciones de Einstein (1.8).

En los primeros capítulos de este trabajo se tratará de construir una teoría general en espacio curvo para estas perturbaciones, enfocándonos en su origen y evolución. Más adelante, estudiaremos en particular las perturbaciones primordiales en la curvatura espacial, las cuales se creen darían origen a las hoy en día observadas anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF). El efecto que pueda tener la curvatura espacial K sobre estas anisotropías será examinado en detalle y comparado con las observaciones para obtener resultados más concisos en el capítulo 4.

En el capítulo de apéndices, se explican algunas expresiones, definiciones y procedimientos utilizados a lo largo del presente trabajo de grado, y se dan algunos comentarios.

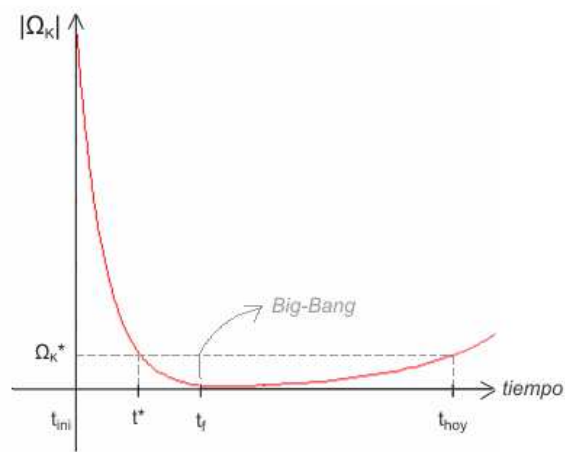


Figura 1.2: La magnitud de la contribución relativa de la curvatura disminuye dramáticamente durante inflación entre $t_{ini} < t < t_f$ y aumenta posteriormente hasta un valor Ω_K^* observado hoy día, y se espera que sea más grande en un futuro lejano. El valor Ω_K^* coincide con el observado en algún tiempo pasado t^* , cuando las escalas más lejanas observadas hoy día salieron del horizonte de partículas durante inflación (Nótese que la escala de tiempo durante inflación por motivos de comprensión ha sido exagerada).

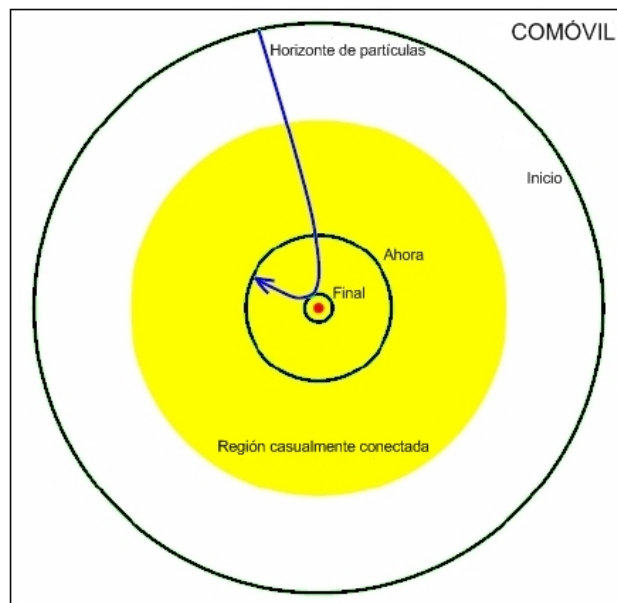


Figura 1.3: Inicialmente el horizonte de partículas comóvil es suficientemente grande para rodear una región causalmente conectada (región sombreada). La inflación entonces encoge dicho horizonte, dejando el Universo observable dentro de la región sombreada. Sin embargo, debido al aumento de escala durante inflación, muchos objetos se salen del horizonte de tal manera que al final de inflación el Universo observable corresponde a una región comóvil muy reducida en comparación con aquélla al comienzo de inflación.

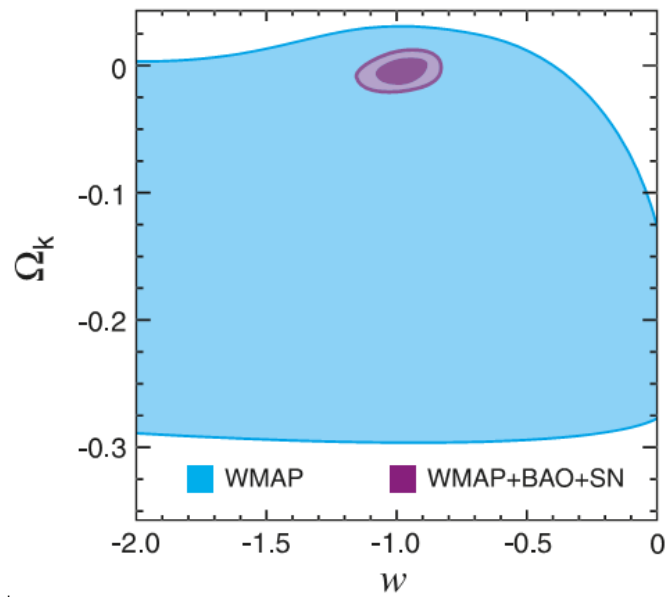


Figura 1.4: Relación bidimensional entre la ecuación de estado de la energía oscura caracterizada por el parámetro dependiente del tiempo w , y el parámetro de curvatura Ω_K . Los contornos muestran el 68 % y el 95 % de nivel de confianza (NC) y se le ha dado prioridad a los valores de $w > -2,5$. La figura muestra la restricción de sólo el WMAP (azul claro; 95 % NC) comparada con WMAP+BAO+SN (púrpura, 68 % y el 95 % NC). La información adicional dada por BAO y SN es muy útil dado que restringe los valores de Ω_K y w simultáneamente [8].

Capítulo 2

Teoría de perturbaciones cosmológicas en espacio curvo

2.1. Introducción

En este capítulo se estudiarán por separado las pequeñas perturbaciones en el tensor métrico y el tensor energía-momentum cuya evolución está descrita por las ecuaciones de Einstein 1.8. Particularmente, dentro de las perturbaciones métricas se buscarán cantidades físicas o cantidades invariantes de gauge, susceptibles de ser observadas, mientras que las perturbaciones del tensor $T_{\mu\nu}$ serán asociadas a uno o más campos escalares, que describen el contenido del Universo temprano, y cuyas fluctuaciones cuánticas serán las responsables de producir dichas perturbaciones métricas. Aunque el procedimiento es muy similar al realizado usualmente en cosmología, a diferencia de los modelos tradicionales, se ha tenido en cuenta el parámetro de curvatura K en todo momento.

2.2. Perturbaciones métricas a primer orden en el elemento de línea de FRW

Para comenzar se reescribirá el elemento de línea de FRW en una forma más adecuada, haciendo uso del siguiente cambio de variable:

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2} = \frac{\bar{r}}{\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \quad (2.1)$$

de tal forma que la expresión (1.1) se convierte en:

$$d\bar{s}^2 = dt^2 - \frac{a^2}{\gamma^2}(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2), \quad \bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2. \quad (2.2)$$

Por comodidad de ahora en adelante, se denotará la nueva coordenada \bar{r} como solamente r , entendiéndose que la coordenada radial ordinaria es verdaderamente $\frac{r}{\gamma}$.

Ahora, cambiando a tiempo conformal η (y a la nueva notación para r), el elemento de línea anterior se convierte en:

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \gamma^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)] , \quad d\eta = a^{-1}dt , \quad \gamma = 1 + \frac{1}{4}Kr^2 . \quad (2.3)$$

Como se había mencionado anteriormente, un modelo más realista incluye adicionalmente las perturbaciones métricas. Estas pueden ser categorizadas en tres distintos tipos: escalares, vectoriales y tensoriales. Esta calificación depende de cómo los campos a partir de los cuales construyamos $\delta g_{\mu\nu}$ transforman bajo transformaciones de coordenadas en el espacio 3D sobre la hiper-superficie de tiempo constante [11]. En la aproximación lineal descrita por las ecuaciones de Einstein 1.8, las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente de allí que pueden ser consideradas por separado. En particular, las perturbaciones vectoriales decaen cinemáticamente en un universo en expansión, mientras las perturbaciones tensoriales conducen a ondas gravitacionales las cuales están desacopladas de las inhomogeneidades en la densidad de energía y la presión. De hecho, tanto las perturbaciones vectoriales como tensoriales no presentan inestabilidades. Por el contrario, las perturbaciones escalares, si presentan inestabilidades que pueden conducir a inhomogeneidades crecientes, esenciales para la formación de estructuras. Por esta razón se ha considerado únicamente las perturbaciones escalares.

Entonces, la forma más general del elemento de línea en el espacio curvo considerando solamente grados de libertad escalares es:

$$ds^2 = a^2(\eta)(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i}dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}]dx^i dx^j \quad (2.4)$$

donde $\gamma_{ij} = \gamma^{-2}\delta_{ij}$ es el tensor métrico espacial de fondo sobre una hiper-superficie de tiempo constante y ϕ , B , D , ψ son cantidades escalares que representan las pequeñas perturbaciones $\delta g_{\mu\nu}$. Denotamos como $f_{|i} = D_i f$ la derivada covariante espacial de la función f con respecto a la métrica espacial de fondo γ_{ij} . En un Universo espacialmente plano ($K = 0$) esta derivada covariante se convierte en una derivada parcial ordinaria, denotada simplemente por ∂_i . De la definición de derivada covariante [13] tendremos que:

$$\begin{aligned} B_{|i} &= \partial_i B, & \text{porque } B \text{ es una cantidad escalar ,} \\ E_{|ij} &= D_j(D_i E) = \partial_j(\partial_i E) - \Gamma_{ij}^k(\partial_k E) & \text{donde,} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{K}{2\gamma} [\delta_{ij}x^k - \delta_j^k x^i - \delta_i^k x^j] , & \text{son las conexiones métricas} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.1. La no invariancia de las perturbaciones métricas ante transformaciones de coordenadas

Cualquier cambio en las coordenadas de fondo $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ introducirá un cambio en la métrica $\Delta g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$. Si $\Delta g_{\mu\nu} = 0$, se dice que la métrica permanece

invariante. La forma más general de demostrar si una cantidad es invariante es mediante una transformación infinitesimal de las coordenadas de fondo

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \eta + \epsilon_0(x^\mu) , \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij} \epsilon_{|j}(x^\mu) \quad (2.6)$$

siendo de nuevo la derivada covariante espacial con respecto a la métrica espacial de fondo γ_{ij} . En general, deberíamos tomar cuatro funciones $\epsilon^\alpha(x^\mu) = (\epsilon_0, \epsilon_i)$ para definir la transformación infinitesimal de coordenadas de arriba, pero sólo se necesitan dos funciones ϵ_0 y ϵ para preservar la naturaleza escalar de la perturbación métrica, ya que las otras dos solo contribuyen a las perturbaciones de tipo vectorial [12].

Mediante este cambio de coordenadas, asumiendo que el elemento de línea más general permanece invariante, podemos hallar las siguientes reglas de transformación para las cantidades escalares ϕ , B , ψ y E :

$$\tilde{\phi} = \phi - (a'/a)\epsilon_0 - \epsilon'_0 ; \tilde{\psi} = \psi + (a'/a)\epsilon_0 ; \tilde{B} = B + \epsilon_0 - \epsilon' ; \tilde{E} = E - \epsilon . \quad (2.7)$$

donde una ' denota la derivada parcial con respecto al tiempo conformal η .

Las transformaciones dadas por (2.6) y (2.7) definen el grupo de transformaciones de gauge de gravitación. Claramente las cantidades escalares ϕ , B , ψ y E no son invariantes de gauge, y al depender su valor del sistema de coordenadas elegido, no son candidatos adecuados para hacer algún estudio experimental. En la siguiente sección nos encargaremos de encontrar una cantidad más adecuada para describir las perturbaciones métricas observables.

2.2.2. La perturbación de la curvatura ζ invariante de gauge

Al estudiar cantidades asociadas a perturbaciones métricas, existen inconvenientes en el momento de escoger las coordenadas de fondo apropiados. Las variables físicas deberían ser independientes de las coordenadas de fondo, es decir, deberían permanecer invariantes ante cualquier transformación infinitesimal de coordenadas. Por ejemplo, es posible obtener una forma inhomogénea para la métrica $g_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ en un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico por causa de una elección inconveniente de las coordenadas. De allí que es importante distinguir entre inhomogeneidades físicas y meros artificios coordenados.

Para abordar este problema, utilizaremos el formalismo de las invariantes de gauge (variables métricas que son independientes de la elección de las coordenadas) en el contexto de pequeñas perturbaciones escalares de un espacio-tiempo de fondo homogéneo e isotrópico. Al considerar solo invariantes de gauge en nuestro estudio, evitaremos cometer el error de confundir artificios coordenados con efectos físicos.

Más allá, toda cantidad física es una invariante de gauge, de manera que las invariantes de gauge le dan un significado físico más claro a nuestro trabajo.

Consideremos una cantidad escalar $q(\eta, x^i)$ definido sobre una variedad física \mathfrak{M} . q puede ser separado en su valor de fondo y una perturbación

$$q(\eta, x^i) = q_0(\eta) + \delta q(\eta, x^i) \quad (2.8)$$

donde las funciones de fondo $q_0(\eta)$ son funciones fijas de coordenadas, por lo tanto en un segundo sistema de coordenadas \tilde{x}^α , q_0 tendrá exactamente la misma dependencia funcional en \tilde{x}^α .

La perturbación de la cantidad escalar q en el sistema de coordenadas x^μ está definida como:

$$\delta q(\eta, x^i) = q(\eta, x^i) - q_0(\eta) \quad (2.9)$$

la cual puede ser evaluada en un punto $p \in \mathfrak{M}$ de coordenadas $x^\alpha(p)$. Similarmente en un segundo sistema de coordenadas la perturbación de q está dado por:

$$\delta \tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i) - q_0(\tilde{\eta}) \quad \text{evaluada en el mismo punto } p \in \mathfrak{M} \quad (2.10)$$

desde que q_0 es un función fija de coordenadas.

Exigiremos que q sea una cantidad física o invariante de gauge. Entonces, su cambio bajo la transformación de coordenadas (2.6) es:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i) &= q(\eta, x^i) \approx q(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i) - \frac{\partial q}{\partial \eta} \epsilon_0 - \frac{\partial q}{\partial x^i} \gamma^{ij} \epsilon_{|j} \\ &= q(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i) - q'_0 \epsilon_0 \quad , \text{ a primer orden} \end{aligned} \quad (2.11)$$

reemplazando este resultado en (2.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{q} &= q(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i) - q'_0 \epsilon_0 - q_0(\tilde{\eta}) \\ &\Rightarrow \delta \tilde{q} = \delta q - q'_0 \epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

esta es la regla de transformación para cualquier perturbación escalar bajo la transformación infinitesimal de coordenadas (2.6), y la usaremos más adelante.

Recordemos de nuevo el grupo de transformaciones de gauge. La libertad de escoger el gauge puede ser usado para imponer dos condiciones a las cuatro funciones ϕ , B , ψ y E , porque hay dos funciones ϵ_0 y ϵ que pueden ser escogidas apropiadamente. Nos interesa en particular, el *gauge longitudinal*, el cual está definido por las condiciones $B = E = 0$. De (2.7), se sigue que el gauge longitudinal fija totalmente las coordenadas, en cuanto a que ϵ_0 y ϵ quedan univocamente determinados.

Mediante las condiciones del gauge longitudinal la transformación infinitesimal de coordenadas (2.6) queda como:

$$\eta \rightarrow \eta_l = \eta - (B - E') , \quad x^i \rightarrow x_l^i = x^i + \gamma_{ij} E_{|j} . \quad (2.13)$$

y la métrica toma la forma:

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] \quad (2.14)$$

En el caso cuando la parte espacial del tensor energía-momentum es diagonal, osea $\delta T_{ij} \sim \delta_{ij}$, se sigue que $\phi = \psi$ [12]. Esto nos deja con una sola variable para las perturbaciones métricas la cual es una generalización del potencial gravitacional Newtoniano ϕ , razón por la cual el gauge longitudinal también se le conoce como gauge conformalmente-Newtoniano. Como podemos ver, en este sistema de coordenadas ψ o ϕ representa la amplitud de las perturbaciones métricas, y por lo tanto es la cantidad a estudiar, pero aún no es una invariante de gauge. Para darle una interpretación física, construiremos una cantidad invariante de gauge ζ a partir de ψ como:

$$\zeta = \psi + \frac{a'}{a} \left(\frac{\delta\rho}{\rho'_0} \right) \quad (2.15)$$

donde hemos introducido el escalar de densidad de energía ρ el cual puede ser descompuesto como:

$$\rho(\eta, x^i) = \rho_0(\eta) + \delta\rho(\eta, x^i) \quad \text{siendo } \rho_0 \text{ una función fija de coordenadas} \quad (2.16)$$

de manera tal que por las expresiones (2.7) y (2.12)

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\psi} + \frac{a'}{a} \left(\frac{\tilde{\delta\rho}}{\rho'_0} \right) = \psi + \frac{a'}{a}\epsilon_0 + \frac{a'}{a} \left[\frac{\delta\rho - \rho'_0\epsilon_0}{\rho'_0} \right] = \psi + \frac{a'}{a} \left(\frac{\delta\rho}{\rho'_0} \right) = \zeta$$

es verdaderamente una invariante de gauge. ζ es llamada la perturbación de la curvatura invariante de gauge, introducida inicialmente por Bardeen [14] y ψ representa la curvatura espacial intrínseca sobre hiper-superficies de tiempo constante.

Es importante resaltar que en la región de escalas de superhorizonte ($k \ll aH$) la conservación de ζ está garantizada siempre y cuando la presión P sea una única función de la densidad de energía ρ (condición adiabática). Esto se sigue de la siguiente ecuación local de conservación de energía a grandes escalas [15, 16, 17]

$$\dot{\rho}(t) = -3(H + \dot{\zeta})[\rho(t) + P(t, \mathbf{x})] . \quad (2.17)$$

Si P satisface la condición adiabática ζ se convierte en una invariante temporal del sistema después de salir del horizonte ($K = aH$),

$$\dot{\zeta} = 0 \quad (2.18)$$

Si P no satisface la condición adiabática, esto puede ser el resultado de la interacción de diferentes fluidos, y el valor de $\dot{\zeta}$ dependerá del modelo escogido para describir el contenido del Universo.

Con este último resultado se da por concluido la sección de las perturbaciones métricas. En la próxima sección se revisarán las perturbaciones en el tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}$.

2.3. Introducción a la teoría cuántica de campos en espacio curvo para describir las perturbaciones en el tensor energía-momentum

La relación entre densidad de energía y presión de un campo escalar es la explicación más sencilla de que el Universo primitivo se expandiera rápidamente y también de la aparición de las perturbaciones primordiales en la curvatura que darían origen a las estructuras del Universo.

La expansión inflacionaria se produce durante un deslizamiento lento de un campo escalar sobre su potencial, aumentando su velocidad solamente cuando el potencial se encuentra cerca a un mínimo. Cuando el campo escalar comienza a oscilar cerca de este mínimo comienza su proceso de decaimiento, lo que permite recalentar el Universo generando el estado de alta temperatura y densidad conocido como Big-Bang [1, 2, 3, 4]. Además, la mecánica cuántica predice la existencia de *fluctuaciones cuánticas* en los campos escalares, lo que de alguna manera explica por qué se generan las *inhomogeneidades* en la densidad de energía asociadas a dichos campos. En el Universo temprano, estas fluctuaciones cuánticas pueden dar origen a perturbaciones en la curvatura, las cuales plantan las semillas para el crecimiento de las macro-estructuras en el Universo.

2.3.1. El tensor energía-momentum

El contenido del Universo durante inflación, en el modelo más simple, se considera descrito por un campo escalar $\phi(x^\mu)$ prácticamente homogéneo, con un potencial $V(\phi)$ de la teoría fundamental de campos [18]. Dado que este es el único campo presente durante inflación, y que por lo tanto domina la densidad de energía del Universo, se le denomina a este campo el campo escalar del *inflatón*.

El tensor energía-momento se expresa en términos del campo escalar ϕ como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.19)$$

en donde definimos

$$\mathfrak{L}(x^\mu, \phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - V(\phi), \quad (2.20)$$

como la densidad lagrangiana.

Igualmente la Hamiltoniana \mathcal{H} se puede escribir como la integral espacial de la densidad de energía del Universo ρ ,

$$\mathcal{H} = \int_{vol} \rho \, dx^3, \quad (2.21)$$

en donde la densidad de energía se define a través del tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}$. En el caso que $T_{\mu\nu}$ sea isotrópico, la densidad de energía se puede expresar como $\rho = T_{00}$.

2.3.2. La ecuación de Klein-Gordon

La acción S se suele escribir en mecánica relativista como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - V(\phi) \right] = \int d^4x \bar{\mathfrak{L}}. \quad (2.22)$$

La generalización del principio de mínima acción en campos escalares, da como resultado las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange para la función que hemos denominado $\bar{\mathfrak{L}}$,

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0, \quad (2.23)$$

a partir de las cuales se obtiene la ecuación diferencial de Klein-Gordon (ver apéndice B.2),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = -V'(\phi), \quad (2.24)$$

en donde $V'(\phi)$ denota la derivada de V con respecto a ϕ . Esta ecuación describe completamente la forma funcional de ϕ , mientras que las ecuaciones de Einstein describen la relación entre ϕ y la métrica $g_{\mu\nu}$.

2.3.3. Las fluctuaciones cuánticas y las perturbaciones cosmológicas

El campo escalar ϕ es asumido prácticamente homogéneo, pero por el principio de incertidumbre de Heisenberg, debe presentar fluctuaciones cuánticas. Esto se puede modelar de manera análoga a como se hizo con la métrica, mediante pequeñas perturbaciones de un fondo homogéneo $\phi_0(t)$,

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \vec{x}) \quad , \text{ con } \delta\phi(t, \vec{x}) \ll \phi_0(t) \quad , \quad (2.25)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)}(\phi_0, \partial_\alpha \phi_0, g_{\mu\nu}^{(0)}) + \delta T_{\mu\nu}(\phi, \partial_\alpha \phi, g_{\mu\nu}) \quad , \quad (2.26)$$

en donde ϕ_0 , $g_{\mu\nu}^{(0)}$, $T_{\mu\nu}^{(0)}$ corresponden al modelo de fondo isotrópico y homogéneo.

Dado que ϕ es el único campo escalar existente durante inflación, es el encargado de generar no sólo la expansión acelerada sino también las perturbaciones primordiales en la curvatura ζ ,

$$\delta\phi \rightarrow \delta T_{\mu\nu} \rightarrow \delta\rho \rightarrow \delta g_{\mu\nu} \rightarrow \psi \rightarrow \dots \quad (2.27)$$

Así, el procedimiento a seguir es el siguiente: 1) se debe tratar de resolver las ecuaciones perturbadas de Einstein para encontrar la relación entre el campo ϕ y la cantidad escalar ψ utilizando la métrica más general $g_{\mu\nu}$ y, 2) se requiere introducir esta información en la ecuación de Klein-Gordon y resolverla para obtener las funciones de ϕ_0 y $\delta\phi$ de las coordenadas espacio-temporales, mediante las cuales se pueden obtener todas las expresiones necesarias para calcular la perturbación ζ de la curvatura que definimos en (2.15).

2.4. Conclusiones

Un primer vistazo al problema de calcular la perturbación ζ de la curvatura, nos muestra que debemos hallar la manera de resolver las ecuaciones perturbadas de Einstein y posteriormente la ecuación de Klein-Gordon, considerando perturbaciones en un único campo escalar (el inflatón) y la curvatura espacial K . Esto implica cálculos muy extensos, cuyos resultados no pueden ser claramente comparables con las observaciones, así que se escogerá una alternativa más didáctica en la que se ha relajado las condiciones usualmente impuestas sobre el campo escalar del inflatón considerando un modelo de dos campos escalares débilmente interactuantes: ϕ y σ . Así, el campo escalar del inflatón ϕ que domina la densidad de energía del Universo se encarga de generar todas las condiciones para el escenario inflacionario de la cosmología estándar, las cuales no se tratarán en este trabajo. Mientras, el campo escalar σ , conocido como el curvatón, el cual no domina la densidad de energía del Universo durante inflación, está relacionado únicamente con las perturbaciones primordiales en la curvatura ζ . Este campo al que será dedicado el siguiente capítulo, permitirá entender mejor el mecanismo de generación de las perturbaciones escalares en la curvatura.

Capítulo 3

El mecanismo del curvatón en espacio curvo para describir las perturbaciones primordiales en la curvatura

3.1. Introducción

Se comenzará por describir el modelo básico del curvatón junto con algunas condiciones sencillas que se han impuesto sobre el Universo temprano con curvatura espacial. Se analizará el comportamiento de los fluidos asociados al curvatón y el inflatón y su efecto en las perturbaciones primordiales de la curvatura espacial ζ . Finalmente, se abordará las perturbaciones en el campo escalar del curvatón descritas por la ecuación diferencial de Klein-Gordon.

3.2. Descripción del modelo del curvatón

Según el modelo estándar del curvatón [19, 20, 21], el Universo temprano se asume descrito por dos campos escalares: el campo del inflatón ϕ y el campo del curvatón σ . Los fluidos asociados a estos dos campos, son considerados todo el tiempo hasta el momento justo antes del decaimiento del curvatón como fluidos independientes, de suerte que se pueden desacoplar las ecuaciones de movimiento para el contenido del Universo, y estudiarse por separado para cada fluido ¹. De igual forma cada campo obedece una ecuación de Klein-Gordon, que se diferencia solamente por la forma de su correspondiente potencial. Sobre el potencial del inflatón se imponen las usuales condiciones de slow-roll (deslizamiento lento) necesarias para generar la expansión

¹Considerar independientemente los fluidos del curvatón y el inflatón también garantiza la conservación de las perturbaciones en la curvatura ζ_ϕ y ζ_σ a grandes escalas, debido a que permite despreciar los términos no-adiabáticos en las respectivas ecuaciones de continuidad.

acelerada como se pueden observar en la figura 3.1, mientras que las condiciones impuestas sobre el curvatón están orientadas a la generación de perturbaciones en la curvatura espacial.

Durante inflación, el modelo supone que el Universo es altamente isotrópico y homogéneo, debido a que las fluctuaciones cuánticas del campo dominante del inflatón *no* producen perturbaciones significativas en la curvatura y el campo del curvatón *no* domina la densidad de energía del Universo, así que las perturbaciones métricas netas son despreciables. Además, durante este período, los fluidos asociados a ambos campos se comportan como constantes cosmológicas, debido a que sus potenciales se mantienen casi constantes en el tiempo, y así mismo la densidad de energía del Universo. En el caso del inflatón esto es consecuencia directa de las condiciones de slow-roll, pero en el caso del curvatón, sólo se requiere que el campo se mantenga congelado en algún punto de su potencial, en una especie de movimiento sobre-amortiguado.

Terminando el periodo inflacionario, es de suponerse que el inflatón comience a oscilar alrededor de un mínimo de su potencial disipando mucha energía, y finalmente decae en un fluido de radiación compuesto por partículas ultra-relativistas, el cual domina la densidad de energía del Universo; sin embargo *no* produce perturbaciones apreciables en la curvatura. De igual manera, después del final de inflación, el curvatón debe comenzar su propio proceso de decaimiento, pero cuando $V''_{\sigma} \gg H^2$ éste comienza a oscilar alrededor de un mínimo de su potencial tan rápido comparado con el tiempo característico de expansión inflacionaria (1 e-fold), que se comporta como un fluido de materia, el cuál, a diferencia de la radiación está habilitado para producir perturbaciones importantes en la curvatura. En consecuencia, la densidad de energía de radiación heredada del inflatón ($\rho_r \propto a^{-4}$) decae más rápidamente que la densidad de energía de materia del curvatón ($\rho_{\sigma} \propto a^{-3}$), y en algún momento antes de que el curvatón decaiga completamente en radiación, su densidad de energía es lo suficientemente significativa comparada con la de la radiación para imprimir las perturbaciones primordiales en la curvatura espacial requeridas para la formación de las macro-estructuras del Universo, en la época posterior dominada por materia [19, 20, 21].

3.2.1. Configuración básica del potencial del curvatón

Con el fin de generar la perturbación en la curvatura observada se requiere que la razón de densidad $\rho_{\sigma}/\rho_{total}$ crezca sustancialmente después del final de inflación. Esto se obtiene solamente cuando el curvatón oscila alrededor de un potencial cuadrático durante la era de radiación. Para modelar esto se usa el potencial sencillo

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_{\sigma}^2\sigma^2, \quad (3.1)$$

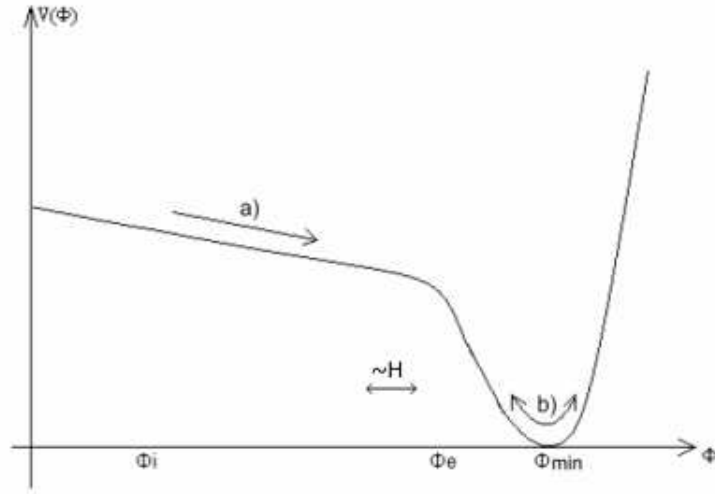


Figura 3.1: Forma del potencial del inflatón. Se muestran las etapas a) slow roll y b) oscilación alrededor del mínimo de potencial. Durante el tiempo en que ϕ evoluciona hasta ϕ_{min} , el Universo es dotado de una enorme energía del vacío. Cuando esta energía domina la densidad total del Universo, comienza la expansión exponencial.

en donde m_σ se denomina la masa del curvatón. Adicionalmente, en el modelo más simple considerado, este potencial debe satisfacer las siguientes condiciones [22]:

- $\sigma_* = \sigma_{osc}$, donde σ_* es el valor global del campo del curvatón a la salida del horizonte durante inflación y σ_{osc} es su valor global cuando éste comienza a oscilar. Esto significa que el campo σ inicialmente está congelado en algún punto de su potencial y allí permanece hasta el inicio de las oscilaciones de manera que el potencial no debería cambiar de forma en este periodo.
- $\tilde{m}_\sigma = m_\sigma$, en donde \tilde{m}_σ es la masa efectiva del curvatón después de comenzar las oscilaciones. Esto significa que el curvatón no aumenta su masa hasta el momento en que comienzan sus oscilaciones, hecho que podría afectar el momento el que las oscilaciones comienzan a presentarse, porque altera la condición inicial $V''_\sigma \ll H_*$.
- $m_\sigma \ll H_*$ o $V''_\sigma \ll H_*^2$, donde H_* es el parámetro de Hubble durante inflación. Esta es la condición de campo ligero, la cuál asegura que el campo del curvatón no comience a oscilar sino hasta después del final de inflación cuando el inflatón ya ha decaído en radiación.

3.3. Perturbación de la curvatura ζ después del decaimiento del inflatón

Como se mencionaba, después del final de inflación el contenido total del Universo está compuesto por dos fluidos independientes:

$$\rho_r = \rho_{r_0} + \delta\rho_r \rightarrow \text{Fluido de radiación heredado del inflatón} , \quad (3.2)$$

$$\rho_\sigma = \rho_{\sigma_0} + \delta\rho_\sigma \rightarrow \text{Fluido del curvatón.} \quad (3.3)$$

Cada fluido es asumido prácticamente homogéneo; sin embargo, debido a las fluctuaciones cuánticas de los campos escalares, ellos presentan pequeñas inhomogeneidades en su densidad de energía $\delta\rho$ que afectan el espacio-tiempo a su alrededor y pueden producir perturbaciones en la curvatura espacial, más intensas unas que otras, dependiendo del tipo de fluido.

Utilizando las expresiones para la densidad de energía y teniendo en cuenta que la densidad total del Universo es $[\rho_{total} = \rho_r + \rho_\sigma]$, es posible reescribir la perturbación de la curvatura invariante de gauge ζ (2.15) así,

$$\zeta = \psi + H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}_0} \right) = \psi + H \left(\frac{\delta\rho_r + \delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} \right) = \psi + H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{r_0}} \left(\frac{\dot{\rho}_{r_0}}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} \right) + H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma_0}} \left(\frac{\dot{\rho}_{\sigma_0}}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} \right) . \quad (3.4)$$

Siguiendo la misma estructura de ζ , se define las contribuciones de cada fluido a la perturbación total de la curvatura ζ como:

$$\zeta_r = \psi + H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{r_0}} \rightarrow \text{Radiación,} \quad (3.5)$$

$$\zeta_\sigma = \psi + H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma_0}} \rightarrow \text{Curvatón.} \quad (3.6)$$

Así podemos expresar ζ como,

$$\begin{aligned} \zeta &= \psi + (\zeta_r - \psi) \frac{\dot{\rho}_{r_0}}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} + (\zeta_\sigma - \psi) \frac{\dot{\rho}_{\sigma_0}}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} \quad \text{o bien,} \\ \zeta &= (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma , \quad r = \frac{\dot{\rho}_{\sigma_0}}{\dot{\rho}_{r_0} + \dot{\rho}_{\sigma_0}} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

En el modelo del curvatón se asume que al menos $\zeta_r \leq 10^{-2}\zeta_\sigma$, de manera que se pueda despreciar las perturbaciones en la curvatura ζ_r producidas por el fluido de radiación y la expresión anterior se reduce simplemente a

$$\zeta \approx r\zeta_\sigma . \quad (3.8)$$

Al salir del horizonte de partículas durante inflación, las fluctuaciones cuánticas del curvatón se convierten en clásicas y la perturbación ζ_σ se convierte en una invariante temporal del sistema, así que la perturbación total ζ dependerá solamente del

parámetro r , cuya evolución está dada por los fondos homogéneos $\rho_{r_0}(t)$ y $\rho_{\sigma_0}(t)$ para la radiación y el curvatón respectivamente. Se requiere, que este parámetro evolucione a un valor lo suficientemente grande para que el curvatón dé origen a las perturbaciones primordiales en la curvatura necesarias, las cuales son observadas hoy día a grandes escalas después de que reingresan al horizonte.

Lo anterior indica que debe existir una relación entre el parámetro r y el parámetro de densidad ρ_σ/ρ_{total} , desde que asumimos que sólo cuando la densidad de energía del curvatón comience a dominar la densidad de energía total del Universo, se pueden imprimir las perturbaciones de la curvatura espacial intrínseca ψ en el tensor métrico. Antes de que esto suceda, tenemos libertad de fijar ψ a cero, dado que las perturbaciones generadas en la curvatura son despreciables. Si así fuese, la métrica más general (2.14) se reduce simplemente a la métrica no perturbada de Friedman-Robertson-Walker,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2}{\gamma^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \equiv 0 . \quad (3.9)$$

3.4. El fluido del curvatón

Como es sabido, la ecuación de estado del fluido homogéneo de radiación es, $[P_r = \frac{1}{3}\rho_r]$ en unidades naturales ($c = \hbar = k_b = 1$), y la ecuación de continuidad arroja como resultado,

$$\dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + P_r) = 0 \rightarrow \dot{\rho}_r = 4H\rho_r \rightarrow \rho_r \propto a^{-4} . \quad (3.10)$$

Pero, cómo es el comportamiento del fluido del curvatón? Para empezar se usará la definición (2.19) para escribir el tensor de energía-momentum para el campo del curvatón σ ,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma - V(\sigma) \right] . \quad (3.11)$$

Hasta el comienzo de las oscilaciones rápidas del curvatón, el fluido de radiación aún domina la densidad de energía del Universo así que podemos fijar ψ a cero, y seguir considerando un Universo homogéneo e isotrópico de FRW sin perder validez. Además el campo σ puede ser descompuesto en un fondo homogéneo y sus pequeñas fluctuaciones cuánticas como,

$$\sigma(\vec{x}, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(\vec{x}, t) , \quad \delta\sigma \ll \sigma_0 . \quad (3.12)$$

Entonces si hacemos todas estas consideraciones, se pueden obtener directamente a partir del tensor energía-momentum las expresiones para la densidad de energía y

la presión del fluido del curvatón aproximadas a primer orden (ver apéndice B.1),

$$\rho_\sigma(\vec{x}, t) = T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma) , \quad (3.13)$$

$$P_\sigma(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \frac{\gamma^2}{a^2} Tr(T_{ij}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - V(\sigma) , \quad (3.14)$$

las cuales caracterizan por completo el fluido del curvatón. Para estudiar su comportamiento debemos recurrir a la ecuación de Klein-Gordon que describe el campo σ . Si consideramos la métrica imperturbada de FRW y el potencial definido en (3.1) la ecuación de Klein-Gordon (2.24) para σ se transforma en (ver apéndice B.2),

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left(\nabla^2 \sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \sigma \right) + m_\sigma^2 \sigma = 0 . \quad (3.15)$$

De nuevo, por conveniencia separaremos esta ecuación en dos ecuaciones diferenciales, una para el fondo homogéneo σ_0 y otra para las pequeñas fluctuaciones $\delta\sigma$, así

$$\ddot{\sigma}_0 + 3H\dot{\sigma}_0 + m_\sigma^2 \sigma_0 = 0 , \quad (3.16)$$

$$\delta\ddot{\sigma} + 3H\delta\dot{\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\nabla^2 \delta\sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta\sigma \right] + m_\sigma^2 \delta\sigma = 0 . \quad (3.17)$$

El fondo homogéneo σ_0 determina la evolución temporal del valor global del campo del curvatón, de manera que para estudiar el comportamiento del fluido del curvatón sólo se requiere estudiar por el momento la ec. (3.16).

Durante inflación, el parámetro de Hubble permanece aproximadamente constante y además como se exigió que $H_* \gg m_\sigma$, la ecuación (3.16) se reduce a,

$$\ddot{\sigma}_0 + 3H\dot{\sigma}_0 = 0 , \quad (3.18)$$

cuya solución es,

$$\sigma_0 = c_0 e^{-3H(t-t_i)} + c_1 = c_2 a^{-3} + c_1 \approx c_1 = \sigma_* \quad (3.19)$$

Como se esperaría, el campo σ_0 está congelado debido a que el factor de escala crece exponencialmente durante inflación, $a \approx a(t_i) e^{H(t-t_i)}$. En consecuencia, la densidad de energía y presión globales son constantes en tanto que,

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma_0}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\sigma}_0^2 + V(\sigma_0) = V(\sigma_*) , \\ P_{\sigma_0}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\sigma}_0^2 - V(\sigma_0) = -V(\sigma_*) , \\ \Rightarrow P_{\sigma_0} &= -\rho_{\sigma_0} . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Después del final de inflación, comienza la era de radiación y el parámetro de Hubble empieza a disminuir, hasta que en algún momento alcanza la condición

$H \sim m_\sigma$ y el campo comienza a oscilar. La ecuación (3.16) toma la forma límite cuando $H \ll m_\sigma$,

$$\ddot{\sigma}_0 + m_\sigma^2 \sigma_0 = 0 , \quad (3.21)$$

cuya solución bien conocida es,

$$\sigma_0 = \sigma_0^* \sin m_\sigma t \quad (3.22)$$

que corresponde al período de oscilaciones rápidas del curvátón [19, 20, 21]. Para entender por qué las oscilaciones del curvátón son rápidas, recuérdese el concepto del número de e-folds,

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) .$$

El tiempo característico de expansión inflacionaria Δt se define mediante 1 e-fold, como sigue,

$$\begin{aligned} 1 = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) &= \ln \left(\frac{t_f}{t_i} \right)^{1/2} ; \quad \text{para un Universo dominado por radiación} \\ &\Rightarrow e^2 = \ln \left(\frac{t_f}{t_i} \right) \rightarrow t_f - t_i = (e^2 - 1)t_i \rightarrow \Delta t \approx 6t_i ; \end{aligned}$$

pero,

$$t_i = (2H_i)^{-1} \Rightarrow \Delta t \approx 3H^{-1} . \quad (3.23)$$

El periodo de oscilación del curvátón es $T = \frac{2\pi}{m_\sigma}$, y dado que $m_\sigma \gg H$ esto implica que $T \ll \Delta t$, es decir, las oscilaciones del curvátón son muy rápidas comparadas con el tiempo característico de expansión inflacionaria Δt .

La ecuación armónica (3.22) permite calcular de forma sencilla la densidad de energía y la presión del fluido del curvátón durante el periodo de rápidas oscilaciones, como:

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma_0} &= \frac{1}{2} \dot{\sigma}_0^2 + V(\sigma_0) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \cos^2 m_\sigma t + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \sin^2 m_\sigma t \\ &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 [\cos^2 m_\sigma t + \sin^2 m_\sigma t] = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 , \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_0} &= \frac{1}{2} \dot{\sigma}_0^2 - V(\sigma_0) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \cos^2 m_\sigma t - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \sin^2 m_\sigma t \\ &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 [\cos^2 m_\sigma t - \sin^2 m_\sigma t] = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \cos 2m_\sigma t . \end{aligned} \quad (3.25)$$

y sus valores promediados en el tiempo para un ciclo de N periodos de oscilación T serán,

$$\langle \rho_{\sigma_0} \rangle = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 dt = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \rightarrow \text{Densidad promedio}, \quad (3.26)$$

$$\langle P_{\sigma_0} \rangle = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2 \cos 2m_\sigma t dt = 0 \rightarrow \text{Presión promedio}, \quad (3.27)$$

lo que significa que el fluido del curvatón tiene un comportamiento similar a un fluido de materia ($P = 0$) y sus fluctuaciones cuánticas $\delta\sigma$ representan inhomogeneidades en la densidad de energía de dicho fluido. La ecuación de continuidad en este caso arroja como resultado,

$$\dot{\rho}_{\sigma_0} + 3H(\rho_{\sigma_0} + P_{\sigma_0}) = 0 \rightarrow \dot{\rho}_{\sigma_0} = -3H\rho_{\sigma_0} \Rightarrow \rho_{\sigma_0} \propto a^{-3} . \quad (3.28)$$

En realidad la amplitud de las oscilaciones la cual hemos denotado como σ_* no es constante, como nos indica la ecuación de continuidad, aunque sí varía muy lentamente debido a que el curvatón oscila en un régimen sub-amortiguado como se observa en la ecuación de Klein-Gordon (3.16), en donde el término de disipación es $3H\dot{\sigma}_0$. En general podemos escribir la densidad de energía total y la presión total durante las oscilaciones rápidas como,

$$\rho_\sigma(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}m_\sigma\sigma_{osc}^2(\vec{x}, t) , \quad (3.29)$$

$$P_\sigma \approx 0 . \quad (3.30)$$

De esta manera, la densidad de energía total puede ser separada definiendo adecuadamente la densidad de energía de fondo y la densidad de energía de las perturbaciones como,

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2}m_\sigma[\sigma_0(t) + \delta\sigma(\vec{x}, t)]^2 = \frac{1}{2}m_\sigma[\sigma_0^2 + 2\sigma_0\delta\sigma + (\delta\sigma)^2] \\ &\approx \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + m_\sigma^2\sigma_0\delta\sigma = \rho_{\sigma_0} + \delta\rho_\sigma , \end{aligned} \quad (3.31)$$

en donde,

$$\rho_{\sigma_0} = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 , \quad \delta\rho_\sigma = m_\sigma\sigma_0\delta\sigma \quad (3.32)$$

evaluados durante el período de oscilaciones rápidas. Utilizando toda esta información, la perturbación de la curvatura producida por el curvatón definida en (3.6) puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \zeta_\sigma &= \left(\psi + H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma_0}} \right)_{osc} = \frac{Hm_\sigma^2\sigma_0\delta\sigma}{-3H\rho_{\sigma_0}} = -\frac{m_\sigma^2\sigma_0\delta\sigma}{\frac{3}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2} , \\ \Rightarrow \zeta_\sigma &= \frac{2}{3} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} , \end{aligned} \quad (3.33)$$

en donde se ha optado por escoger la notación de Bardeen, en donde ζ_σ es definida negativa y hemos fijado ψ a cero. Entonces, la perturbación total de la curvatura vendrá dada por,

$$\begin{aligned} \zeta &= r\zeta_\sigma = \frac{\dot{\rho}_{\sigma_0}}{\dot{\rho}_{\sigma_0} + \dot{\rho}_{r_0}} \left(\frac{2}{3} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right) = \frac{3H\rho_{\sigma_0}}{3H\rho_{\sigma_0} + 4H\rho_{r_0}} \left(\frac{2}{3} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right) \approx \frac{\rho_{\sigma_0}}{\rho_{\sigma_0} + \rho_{r_0}} \left(\frac{2}{3} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right) , \\ \zeta &\approx \frac{2}{3} \Omega_\sigma \left(\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right) , \quad \Omega_\sigma = \rho_{\sigma_0} / \rho_{total_0} . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para escalas de superhorizonte el término $\frac{\delta\sigma}{\sigma_0}$ es una invariante temporal, y por lo tanto la perturbación total de la curvatura evolucionará proporcionalmente al parámetro Ω_σ . Inicialmente, cuando la radiación domina la densidad de energía del Universo, el parámetro Ω_σ es muy pequeño y las perturbaciones en la curvatura son despreciables (de allí que fijemos $\psi \equiv 0$), pero se incrementa paulatinamente porque la densidad de energía de radiación decae más rápidamente que la del curvatón, y como consecuencia las perturbaciones en la curvatura se atenúan con el tiempo y finalmente quedan impresas en la métrica, cuando el curvatón decae completamente, y su parámetro de densidad final es igual al parámetro de decaimiento Ω_{dec} . En este momento, ζ es directamente proporcional a la cantidad ζ_σ , que depende de las fluctuaciones cuánticas $\delta\sigma$ las cuales se estudiarán en la próxima sección.

3.5. Las fluctuaciones en el campo escalar del curvatón

Análogamente a como sucede cuando se calcula el espectro de las fluctuaciones del campo escalar del curvatón en el Universo plano ($K = 0$), la consideración de la masa del curvatón en la ecuación de Klein-Gordon (3.17) conlleva a la aparición de un conjunto de índices espectrales, los cuáles no alteran la dependencia con respecto a la escala [22]. Dado que la intención es estudiar el efecto cualitativo de la curvatura espacial K en el espectro de las perturbaciones en la curvatura, no será considerada la masa del curvatón aquí.

Según esto, las perturbaciones escalares $\delta\sigma$ alrededor del fondo constante $\sigma_0(t)$ obedecen la ecuación de Klein-Gordon (KG) con $m_\sigma \equiv 0$,

$$\ddot{\delta\sigma} + 3H\dot{\delta\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\nabla^2 \delta\sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta\sigma \right] = 0 , \quad (3.35)$$

la cuál está completamente desacoplada del fondo y puede ser resuelta independientemente. Con la separación de variables

$$\delta\sigma(\vec{x}, t) = \delta\sigma_k(t) Q_k(\vec{x}) , \quad (3.36)$$

la ecuación de KG puede ser separada en

$$\ddot{\delta\sigma}_k + 3H\dot{\delta\sigma}_k + \frac{k^2}{a^2} \delta\sigma_k = 0 , \quad (3.37)$$

$$\left(\nabla^2 Q_k - \frac{K}{2\gamma} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} Q_k \right) \gamma^2 + k^2 Q_k = 0 , \quad (3.38)$$

en donde k^2 es una constante arbitraria que acopla ambas ecuaciones. Haciendo la transformación $d\eta = dt/a$ y $\chi(\eta, k) = a(\eta)\delta\sigma_k(\eta)$ se obtiene la ecuación de KG para $\chi(\eta, k)$

$$\chi'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) = 0 , \quad (3.39)$$

en donde una prima denota la derivada con respecto al tiempo conformal η (ver apéndice B.2).

La ecuación (3.38) para la parte espacial se puede reescribir en notación del Laplaciano covariante $D_i D^i$ en un espacio de FRW, como

$$D_i D^i Q(\vec{x}) + k^2 Q(\vec{x}) = 0 , \quad (3.40)$$

la cual es conocida como la ecuación generalizada de Helmholtz. Sus soluciones en coordenadas esféricas son las funciones armónicas espaciales [23, 24, 25],

$$Q_k(\vec{x}) = Q_\beta^{lm}(r, \theta, \phi) = \Phi_\beta^l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.41)$$

siendo $\Phi_\beta^l(r)$ las funciones hiperesféricas de Bessel, y Y_{lm} las funciones armónicas esféricas las cuales son estudiados con detalle en el apéndice C. $\beta = (k^2 + K)^{1/2}$ son los valores propios de la parte radial del laplaciano covariante con funciones propias dadas por las funciones hiperesféricas de Bessel. En el límite del universo plano $K \rightarrow 0$, las funciones propias radiales $\Phi_\beta^l(r) \rightarrow j_l(kr)$, que corresponden a las funciones esféricas de Bessel. Las funciones Q_β^{lm} satisfacen ciertas propiedades importantes, como son la *ortogonalidad*

$$\int \gamma^{-3} r^2 dr d\Omega Q_\beta^{lm}(r, \theta, \phi) Q_{\beta'}^{*l'm'}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\beta^2} \delta_{l'l'} \delta_{mm'} \delta_{\beta\beta'} , \quad (3.42)$$

en donde $\gamma = 1 + \frac{Kr^2}{4}$, y la *completez*

$$\sum_{l,m} \int \beta^2 d\beta Q_\beta^{lm}(r, \theta, \phi) Q_\beta^{*lm}(r', \theta', \phi') = \frac{\gamma^3}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') . \quad (3.43)$$

En caso del universo cerrado la integral sobre β es reemplazada por la suma sobre enteros de la forma $\beta/\sqrt{K} = 3, 4, 5, \dots$. Para los universos abiertos y planos β es una variable real no-negativa.

Dado que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon forman un conjunto completo ortonormal de funciones, la solución completa se puede expandir como,

$$\delta\sigma(\vec{x}, t) = \sum_k \frac{\chi(\eta, k)}{a(\eta)} Q_k(\vec{x}) , \quad (3.44)$$

en donde la suma se debe reemplazar por una integral en el caso de que k tome valores reales o continuos.

Se dejará el cálculo de la parte temporal $\delta\sigma_k(t)$ para el siguiente capítulo, donde se hará uso de las propiedades principales de las funciones armónicas espaciales Q_k para calcular el espectro de las perturbaciones en la curvatura.

3.6. Conclusiones

Relajar las condiciones sobre el inflatón considerando un segundo campo encargado exclusivamente de generar las perturbaciones primordiales en la curvatura, ofrece una alternativa más económica e inteligente para resolver las ecuaciones de Klein-Gordon, sin atender demasiado a las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden. En el modelo más simple del curvatón, las definiciones de presión y densidad de energía junto con la ecuación de Klein-Gordon para el fluido de fondo homogéneo permite entender mejor el mecanismo de la generación de las perturbaciones en la curvatura a través de las fluctuaciones cuánticas de un fluido que se comporta como materia en una era dominada por radiación. Además, con todas las consideraciones hechas, la ecuación de Klein-Gordon para las fluctuaciones en el campo del curvatón arroja soluciones exactas con propiedades muy importantes que nos facilitan el cálculo directo del espectro de las perturbaciones primordiales en la curvatura, información que será empleada en el próximo capítulo para obtener algunos resultados que comparados con las observaciones proveerán información relevante acerca de la topología de nuestro Universo observable.

Capítulo 4

Análisis del espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la Radiación Cósmica del Fondo

4.1. Introducción

Justo antes del decaimiento del curvatón, éste deja unas huellas en la métrica espacial en forma de pequeñas perturbaciones primordiales en la curvatura, las cuales dieron origen a las hoy en día observadas anisotropías en la temperatura $\frac{\delta T}{T}$ de la Radiación Cósmica de Fondo; radiación que se produjo hace mucho tiempo cuando el Universo era un plasma caliente de partículas en equilibrio termodinámico. Este capítulo está dedicado a calcular el espectro de las perturbaciones en la curvatura producidas por el curvatón $P_{\zeta\sigma}$ y analizar su relación con el espectro angular C_l de la anisotropía en la temperatura para encontrar los efectos que se puedan introducir al considerar la curvatura espacial K . Lo anterior puede brindar indicios acerca de la topología real del espacio de nuestro Universo.

4.2. Las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo

La radiación cósmica de fondo es una forma de radiación remanente del Universo temprano, que llena hoy en día todo el espacio y tiene características de radiación de cuerpo negro. La radiación cósmica de fondo observada hoy en día en el cielo proviene de una superficie esférica, llamada la superficie de la última dispersión, desde donde fueron emitidos los fotones cuando estos cesaron de interactuar con los electrones. Esto sucedió 380,000 años después del Big-Bang cuando el Universo era una plasma caliente con una temperatura de 3,000 grados Kelvin, lo cual correspon-

de a luz visible. Sin embargo, mientras la radiación viajaba desde la superficie de la última dispersión hasta ser captada por nosotros en la Tierra, debido a la expansión cosmológica, su temperatura disminuyó a unos 2,7 K lo cual significa que la longitud de onda aumentó y ahora corresponde a microondas.

Las perturbación de la curvatura invariante de gauge es una combinación de perturbaciones métricas y del curvatón, sin embargo, a escalas de super-horizonte está relacionada solamente con las fluctuaciones del curvatón como:

$$\zeta_{\vec{k}}(\vec{x}, \eta) \approx \Omega_{dec} \zeta_{\sigma_{\vec{k}}} = \frac{2}{3} \Omega_{dec} \left(\frac{\delta \sigma_{\vec{k}}}{\sigma_0} \right), \quad (4.1)$$

siendo $\Omega_{dec} = (\rho_{\sigma_0} / \rho_{total_0})_{dec}$, el parámetro de densidad de energía del curvatón justo antes de su decaimiento. Los modos en las perturbaciones de la curvatura ζ_{σ} generadas durante inflación (cuando $\psi \equiv 0$), salen en su mayoría del horizonte de partículas comóvil y permanecen invariantes hasta que aparecen como perturbaciones a gran escala cuando reingresan al horizonte en la era de radiación o materia. Dado que $\zeta \propto \zeta_{\sigma}$, la perturbación total de la curvatura también es una invariante temporal a escalas de superhorizonte, sin embargo no enfatizamos en ello porque estas realmente se originaron después del final de inflación.

A pesar de que la temperatura de la RCF es muy homogénea, las inhomogeneidades en la densidad de energía del Universo presentes en el tiempo en que fue emitida la RCF generaron un ligero efecto de corrimiento al rojo gravitacional en los fotones emitidos. Esta es la razón por la cual se detectan pequeñas fluctuaciones $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$, las cuales contrastan además con las perturbaciones en la densidad de materia observadas en la distribución de las galaxias hoy en día [5, 6, 7]. En consecuencia, se cree que las anisotropías de la RCF a grandes ángulos son causadas por las perturbaciones netas en la curvatura ζ que se encuentran sobre la superficie de la última dispersión (SUD) las cuales asumimos entran al horizonte en la era de materia. En la figura 4.1 se observa como las fluctuaciones cuánticas del curvatón además de generar las anisotropías en la temperatura de la RCF, permitieron la formación de las grandes estructuras del Universo actual.

El efecto Sachs-Wolfe [26] a grandes escalas, relacionada dichas fluctuaciones en la temperatura en la dirección \hat{n} observadas en algún punto del espacio-tiempo (\vec{x}_0, η_0) con las perturbación en la curvatura en otro punto (x_{UD}, η_{UD}) sobre la SUD,

$$\frac{\delta T(\hat{n})}{T} = \frac{1}{5} \zeta(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD}), \quad (4.2)$$

siendo $\vec{x}_{UD} = \hat{n}(\eta_{UD} - \eta_0)$.

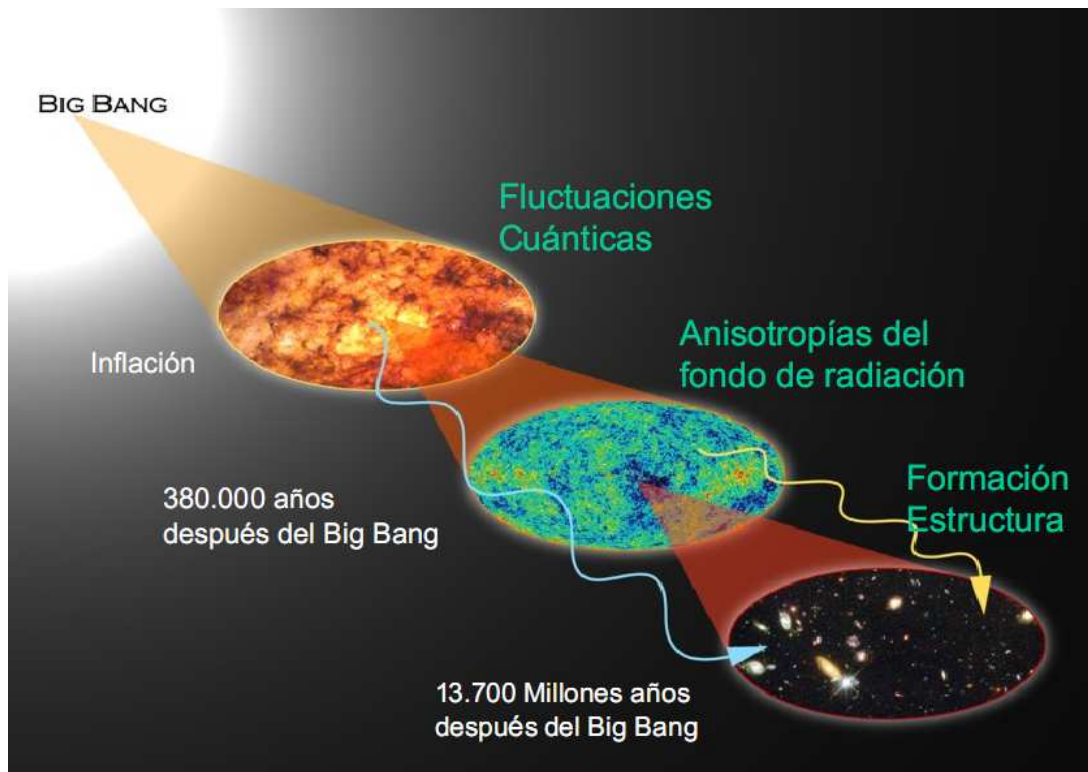


Figura 4.1: Observar más lejos es observar el pasado. Actualmente la radiación electromagnética más lejana que observamos es la proveniente del fondo de microondas de la radiación cósmica, emitida 380.000 años después del Big Bang y un tiempo después del momento de igualdad radiación-materia. Esto sucedió cuando el Universo era un plasma caliente y los fotones cesaron de interactuar con los electrones, haciendo posible observar dicha radiación. Las fluctuaciones en la temperatura observadas a grandes ángulos en el cielo corresponden a las perturbaciones primordiales sobre la superficie de la última dispersión cuando éstas entraron al horizonte de partículas en la era de materia. Con el tiempo las perturbaciones primordiales en la curvatura se intensificaron por la atracción gravitacional de las inhomogeneidades de materia existentes dando como resultado las grandes estructuras que componen el Universo de nuestro tiempo: estrellas, galaxias, cúmulos, etc.

4.3. Las perturbaciones primordiales en la curvatura

Usando la propiedad de completitud de $Q_\beta^{lm}(r, \theta, \phi)$, podemos expandir ζ sobre la superficie de la última dispersión como una suma sobre todos los modos propios,

$$\zeta(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD}) = \sum_{l,m} \int \beta^2 d\beta \frac{2}{3} \Omega_{dec} \left[\frac{\delta\sigma_\beta}{\sigma_0} \right]_{\eta=\eta_*} Q_\beta^{lm} . \quad (4.3)$$

Aquí hemos usado el hecho de que las fluctuaciones $\frac{\delta\sigma_\beta}{\sigma_0}$ no cambian después de que salen del horizonte durante inflación (a un tiempo conformal que hemos denotado como η_*). De la ec. (3.39) las funciones $\delta\sigma_\beta(\eta)$ durante inflación satisfacen las ecuaciones,

$$\delta\sigma_\beta(\eta) = \frac{\chi(\eta, k)}{a(\eta)} \quad (4.4)$$

en donde,

$$\chi'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) = 0 , \quad k \equiv \sqrt{\beta^2 - K} . \quad (4.5)$$

Así mismo, las ecuaciones de Friedman y de continuidad en tiempo conformal son (ver apéndice D)

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{\rho a^2}{3m_p^2} - K , \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{a'}{a} \right)' = -\frac{1}{6m_p^2} (\rho + 3P) a^2 . \quad (4.7)$$

Durante inflación, el universo se asume dominado por el campo del inflatón, cuya densidad de energía es prácticamente constante debido a las condiciones de slow-roll, entonces $\rho = \rho_\lambda = const$, luego $P = -\rho$. Usando las ecuaciones de Friedman y de continuidad en tiempo conformal se obtiene,

$$\frac{a''}{a} = \frac{2\rho_\lambda}{3m_p^2} a^2 - K \equiv 2a^2 H_\lambda^2 - K , \quad (4.8)$$

en donde se ha definido $H_\lambda = \sqrt{\frac{\rho_\lambda}{3m_p^2}}$ como el parámetro de Hubble durante inflación pura (despreciando la contribución de la curvatura $\frac{K}{a^2}$). Reemplazando este último resultado en la ec. (4.5) se obtiene,

$$\chi'' + \left(k^2 - 2a^2 H_\lambda^2 + K \right) = 0 . \quad (4.9)$$

A continuación se resolverá esta ecuación para los casos del Universo abierto y cerrado durante inflación.

- *Universo inflacionario cerrado.* Para este caso $K > 0$. De la ecuación de Friedman tenemos,

$$\dot{a} = \sqrt{a^2 H_\lambda^2 - K} \quad (4.10)$$

que puede ser integrada para dar las soluciones (ver apéndice D),

$$a(t) = \frac{\sqrt{K}}{H_\lambda} \cosh H_\lambda t, \quad (4.11)$$

$$a(\eta) = -\frac{\sqrt{K}}{H_\lambda} \csc \sqrt{K} \eta, \quad (4.12)$$

en tiempo cósmico t y tiempo conformal η respectivamente. Se ha considerado como condición inicial el momento cuando la densidad de energía comienza a dominar sobre la contribución de la curvatura, es decir, para $t = 0$ se tiene que $a(0) = \frac{\sqrt{K}}{H_\lambda}$. El tiempo conformal está dado por:

$$\eta(a) = \frac{-1}{\sqrt{K}} \arcsin \frac{\sqrt{K}}{a H_\lambda}. \quad (4.13)$$

El tiempo conformal varía en el intervalo $\eta = [-\pi/(2\sqrt{k}), 0)$, mientras que el factor escala a varía en $[\sqrt{K}/H_\lambda, \infty)$, así que para $K > 0$ las condiciones iniciales difieren del caso de la inflación estándar. La ecuación de KG en tiempo conformal (4.9) para el universo inflacionario cerrado toma la forma:

$$\chi''(\eta) + [k^2 - K(2 \csc^2 \sqrt{K} \eta - 1)]\chi(\eta) = 0. \quad (4.14)$$

La ecuación puede ser resuelta de forma exacta y las soluciones son:

$$\chi(\eta) = c_1 \left(-\sqrt{K} \cot \sqrt{K} \eta + i\beta \right) e^{i\beta\eta} + c_2 \left(-\sqrt{K} \cot \sqrt{K} \eta - i\beta \right) e^{-i\beta\eta}, \quad (4.15)$$

en donde se ha definido,

$$\beta = \sqrt{k^2 + K}. \quad (4.16)$$

Los modos $\beta \gg aH$ corresponden a las escalas de subhorizonte, que se pueden calcular como,

$$\beta \gg aH = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \Leftrightarrow \beta \gg -\sqrt{K} \cot \sqrt{K} \eta. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, en este límite las soluciones toman la forma,

$$\chi(\eta) \rightarrow ic_1 \beta e^{i\beta\eta} - ic_2 \beta e^{-i\beta\eta} \rightarrow \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}}, \quad (4.18)$$

en donde se han usado las condiciones iniciales de vacío dadas por Bunch-Davies [27, 28], las cuales son estudiadas en el apéndice E. De lo anterior se obtiene que,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{i}{\beta\sqrt{2\beta}} \quad (4.19)$$

Reemplazando las constantes en (4.15), finalmente se obtiene la solución

$$\chi(\eta) = -\frac{1}{\beta\sqrt{2\beta}}(i\sqrt{K} \cot \sqrt{K}\eta - \beta)e^{-i\beta\eta}. \quad (4.20)$$

- *Universo inflacionario abierto.* Ahora se considerará el caso en que $K < 0$. De la ecuación de Friedman se tiene,

$$\dot{a} = \sqrt{a^2 H_\lambda^2 + |K|}. \quad (4.21)$$

Esta expresión puede ser integrada para dar (ver apéndice D),

$$a(t) = \frac{\sqrt{|K|}}{H_\lambda} \sinh H_\lambda t, \quad (4.22)$$

$$a(\eta) = \frac{|K|}{H_\lambda} \operatorname{csch}(-\sqrt{|K|}\eta), \quad (4.23)$$

con la condición inicial $a(t=0) = 0$. El tiempo conformal es,

$$\eta(a) = \frac{-1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{|K|}}{aH_\lambda}. \quad (4.24)$$

El tiempo conformal varía en el intervalo $\eta = (-\infty, 0)$ mientras el factor de escala a varía en $(0, \infty)$. La ecuación de KG en tiempo conformal (4.9) para el universo inflacionario abierto toma la forma,

$$\chi''(\eta) + [k^2 - |K|(2\operatorname{csch}^2 \sqrt{|K|}\eta + 1)]\chi(\eta) = 0. \quad (4.25)$$

Esta ecuación tiene soluciones exactas

$$\chi(\eta) = c_1 \left(-\sqrt{|K|} \coth \sqrt{|K|}\eta + i\beta \right) e^{i\beta\eta} + c_2 \left(-\sqrt{|K|} \coth \sqrt{|K|}\eta - i\beta \right) e^{-i\beta\eta}, \quad (4.26)$$

en donde en este caso se define,

$$\beta = \sqrt{k^2 - |K|}. \quad (4.27)$$

Los modos de subhorizonte pueden ser calculados como,

$$\beta \gg aH = \frac{a'}{a} \Leftrightarrow \beta \gg -\sqrt{|K|} \coth \sqrt{|K|}\eta \quad (4.28)$$

en donde las soluciones toman la forma límite,

$$\chi(\eta) \rightarrow ic_1\beta e^{i\beta\eta} - ic_2\beta e^{-i\beta\eta} \rightarrow \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} \quad (4.29)$$

usando de nuevo las condiciones iniciales de vacío de Bunch-Davies. De esto se obtiene que,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{i}{\beta\sqrt{2\beta}}, \quad (4.30)$$

y reemplazando estas constantes en (4.26) finalmente se obtiene la solución,

$$\chi(\eta) = -(i\sqrt{|K|} \coth \sqrt{|K|}\eta - \beta) e^{-i\beta\eta}. \quad (4.31)$$

4.4. El espectro angular de las anisotropías en la temperatura

Durante inflación, y antes de salir del horizonte las fluctuaciones $\delta\sigma$ pueden ser consideradas como operadores cuánticos. Dado que se ha despreciado la masa del curvaton, estas fluctuaciones se comportan como un fluido no-interactuante. Entonces, para las escalas de sub-horizonte bajo las condiciones iniciales de Bunch-Davies se puede escribir el operador de la perturbación en el campo $\hat{\chi}(\vec{x}, \eta)$ en términos de los usuales operadores creación y destrucción usando la propiedad de completitud de las funciones $Q_\beta^{lm}(\vec{x})$,

$$\hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta) = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta \left[\hat{a}_{\beta lm} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \frac{e^{i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} \right]. \quad (4.32)$$

Si se exige que los resultados obtenidos con este planteamiento sean compatibles con los resultados conocidos de la teoría clásica de campos Minkoskiana, es decir, sin expansión y sin curvatura (ver apéndice E), los operadores creación y destrucción deben obedecer las siguientes relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l' m'}^\dagger] = \frac{1}{\beta^2} \delta(\beta - \beta') \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.33)$$

y en consecuencia sus autoestados y autovalores estarán definidos por:

$$\hat{a}_{\beta lm} |n_{\beta lm}\rangle = \sqrt{n_{\beta lm}} |n_{\beta lm} - 1/\beta^2\rangle, \quad (4.34)$$

$$\hat{a}_{\beta lm}^\dagger |n_{\beta lm}\rangle = \sqrt{n_{\beta lm} + 1/\beta^2} |n_{\beta lm} + 1/\beta^2\rangle. \quad (4.35)$$

De una discusión conocida de teoría cuántica de campos, es claro que β es el *momentum radial canónico* y las fluctuaciones cuánticas se convierten en clásicas cuando $\beta = aH$. Las propiedades estocásticas de $\frac{\delta T}{T}$ se describen en gran medida por el correlador de dos puntos $\langle \frac{\delta T(\hat{n}_1)}{T} \frac{\delta T(\hat{n}_2)}{T} \rangle$ dado que las perturbaciones $\frac{\delta T}{T}$ de la RCF son

altamente gaussianas [8]. Utilizando la relación de Sachs-Wolfe (4.2), este correlador estará dado por:

$$\left\langle \frac{\delta T(\hat{n}_1)}{T} \frac{\delta T(\hat{n}_2)}{T} \right\rangle = \left(\frac{2\Omega_{dec}}{15\sigma_0} \right)^2 \langle \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_1, \eta^*) \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_2, \eta^*) \rangle. \quad (4.36)$$

Luego, para describir las propiedades del espectro angular C_l sólo es necesario calcular el promedio estadístico $\langle \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_1) \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_2) \rangle$ sobre la superficie de la última dispersión en un tiempo conformal η_* durante inflación. El operador de las fluctuaciones en el campo $\hat{\delta}\sigma$ durante inflación se puede expandir como una suma sobre todos los modos usando como coeficientes los operadores $\hat{a}_{\beta lm}$ y $\hat{a}_{\beta lm}^\dagger$,

$$\hat{\delta}\sigma(\vec{x}, \eta) = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta [\hat{a}_{\beta lm} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \delta\sigma_\beta(\eta) + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) \delta\sigma_\beta^*(\eta)]. \quad (4.37)$$

La escogencia más razonable para el estado cuántico del Universo durante inflación es el estado de vacío $|0\rangle$ o estado donde no hay partículas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_1) \hat{\delta}\sigma(\vec{x}_2) | 0 \rangle = \\ \langle 0 | \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \beta^2 \beta'^2 d\beta d\beta' [Q_\beta^{lm}(\vec{x}_1) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}_2) \delta\sigma_\beta(\eta^*) \delta\sigma_{\beta'}(\eta^*) \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'} \\ + Q_\beta^{lm}(\vec{x}_1) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}_2) \delta\sigma_\beta(\eta^*) \delta\sigma_{\beta'}^*(\eta^*) \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \\ + Q_\beta^{*lm}(\vec{x}_1) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}_2) \delta\sigma_\beta^*(\eta^*) \delta\sigma_{\beta'}(\eta^*) \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'} \\ + Q_\beta^{*lm}(\vec{x}_1) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}_2) \delta\sigma_\beta^*(\eta^*) \delta\sigma_{\beta'}^*(\eta^*) \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Teniendo cuenta las propiedades de los operadores creación y destrucción,

$$\hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger = \frac{1}{\beta^2} \delta(\beta - \beta') \delta_{ll'} \delta_{mm'} + \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} \quad \text{y} \quad (4.39)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} | 0 \rangle = 0, \quad (4.40)$$

el promedio se reduce a,

$$\langle 0 | \delta\sigma(\hat{n}_1, x_{UD}, \eta^*) \delta\sigma(\hat{n}_2, x_{UD}, \eta^*) | 0 \rangle = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta Y_{lm}(\hat{n}_1) Y_{lm}^*(\hat{n}_2) |\Psi_\beta^l(x_{UD})|^2 |\delta\sigma(\eta^*)|^2. \quad (4.41)$$

La suma en m solo depende del ángulo $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$ entre los dos puntos de interés, debido a la propiedad de las funciones armónicas esféricas,

$$\sum_m Y_{lm}^*(\hat{n}_1) Y_{lm}(\hat{n}_2) = Y_{l0}^*(0) Y_{l0}(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2). \quad (4.42)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta\sigma(\hat{n}_1, x_{UD}, \eta^*) \delta\sigma(\hat{n}_2, x_{UD}, \eta^*) | 0 \rangle = \\ \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) \cdot \int \beta^2 d\beta |\Psi_\beta^l(x_{UD})|^2 |\delta\sigma(\eta^*)|^2 = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) C_l \end{aligned} \quad (4.43)$$

en donde se ha definido el espectro angular C_l de la anisotropía en la temperatura como:

$$C_l = 4\pi^2 \int \frac{d\beta}{\beta} P_{\delta\sigma}(\beta) |\Psi_\beta^l(x_{UD})|^2, \quad (4.44)$$

en donde,

$$P_{\delta\sigma}(\beta) = \frac{\beta^2}{4\pi^2} |\delta\sigma_\beta(\eta)|_{\eta=\eta_*}^2, \quad (4.45)$$

es el espectro escalar de potencias de las fluctuaciones en el campo del curvaton.

4.4.1. El espectro escalar de potencias

Se evaluará el espectro de potencias cuando las escalas cosmológicas relevantes salen del horizonte, empleando el hecho de que los modos no cambian después de que salen del horizonte de partículas durante inflación y hasta que reingresan al horizonte en la era de radiación o materia.

- *Universo cerrado* $K > 0$. En este caso se tiene,

$$\delta\sigma_\beta(\eta) = \frac{1}{a(\eta)\beta\sqrt{2\beta}} (\beta - i\sqrt{K}\cot\sqrt{K}\eta) e^{-i\beta\eta}, \quad \text{con } \beta = \sqrt{k^2 + K}, \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow |\delta\sigma_\beta(\eta)|^2 = \frac{1}{a^2(\eta)} \left(\frac{\beta^2 + K \cot^2 \sqrt{K}\eta}{2\beta^3} \right). \quad (4.47)$$

La condición a la salida del horizonte está dada por:

$$\beta = a_* H_* = a_* \sqrt{H_\lambda^2 - K/a_*^2} \quad \text{o bien}, \quad (4.48)$$

$$a_* = \frac{\sqrt{\beta^2 + K}}{H_\lambda}. \quad (4.49)$$

Ahora bien, el tiempo conformal es,

$$\begin{aligned} \eta_* &= \eta(a_*) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin \frac{\sqrt{K}}{a_* H_\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin \sqrt{\frac{K}{\beta^2 + K}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2/K}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \frac{\sqrt{K}}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Así,

$$\begin{aligned} |\delta\sigma_\beta(\eta)|_{\eta=\eta_*}^2 &= \frac{1}{a_*^2} \left(\frac{\beta^2 + K \cot^2 \sqrt{K}\eta_*}{2\beta^3} \right) = \frac{H_\lambda^2}{\beta^2 + K} \left(\frac{\beta^2 + K \cot^2[-\arctan(\sqrt{K}/\beta)]}{2\beta^3} \right) \\ &= \frac{H_\lambda^2}{\beta^2 + K} \left(\frac{\beta^2 + K(\beta^2/K)}{2\beta^3} \right) = \frac{H_\lambda^2}{\beta(\beta^2 + K)}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

y reemplazando este resultado en el espectro (4.45) se obtiene,

$$P_{\delta\sigma}(\beta) = \frac{\beta^3}{4\pi^2} \left(\frac{H_\lambda^2}{\beta(\beta^2 + K)} \right) \Rightarrow P_{\delta\sigma}(\beta) = \left(\frac{H_\lambda}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{K}{\beta^2}} \right). \quad (4.52)$$

- *Universo abierto* $K < 0$. En este caso se tiene,

$$\delta\sigma_\beta(\eta) = \frac{1}{a(\eta)\beta\sqrt{2\beta}} (\beta - i\sqrt{|K|} \coth \sqrt{|K|}\eta) e^{-i\beta\eta}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - |K|} \quad (4.53)$$

$$\Rightarrow |\delta\sigma_\beta(\eta)|^2 = \frac{1}{a^2(\eta)} \left(\frac{\beta^2 + |K| \coth^2 \sqrt{|K|}\eta}{2\beta^3} \right) \quad (4.54)$$

La condición a la salida del horizonte en este caso es,

$$\beta = a_* H_* = a_* \sqrt{H_\lambda^2 + |K|/a_*^2} \quad \text{o bien,}$$

$$a_* = \frac{\sqrt{\beta^2 - |K|}}{H_\lambda}. \quad (4.55)$$

y el tiempo conformal es,

$$\begin{aligned} \eta_* &= \eta(a_*) = -\frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{|K|}}{a_* H_\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{|K|}{\beta^2 - |K|}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2/|K| - 1}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{|K|}}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Así,

$$|\delta\sigma_\beta(\eta)|_{\eta=\eta_*}^2 = \frac{H_\lambda^2}{\beta^2 - |K|} \left(\frac{\beta^2 + |K| \coth^2(-\operatorname{arctanh} \sqrt{|K|}/\beta)}{2\beta^3} \right) = \frac{H_\lambda^2}{\beta(\beta^2 - |K|)}. \quad (4.57)$$

y usando este resultado en el espectro (4.45) se obtiene,

$$P_{\delta\sigma}(\beta) = \frac{\beta^3}{4\pi^2} \left(\frac{H_\lambda^2}{\beta(\beta^2 - |K|)} \right) = \left(\frac{H_\lambda}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{|K|}{\beta^2}} \right). \quad (4.58)$$

4.5. Los efectos de la curvatura en las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo

Como se comentaba en la introducción del trabajo de grado, dada la reducida región observable del espacio que heredamos de inflación, es difícil observar los efectos

de la curvatura espacial si es que existen. Sin embargo, esperamos encontrar algunos indicios analizando el espectro angular de la radiación cósmica de fondo en una región grande sobre la superficie de la última dispersión, la cual presentará una mayor desviación de la planitud; esto es cuando el momento multipolar l es muy pequeño que corresponde a grandes ángulos en el cielo y el momento radial $\beta \lesssim a_* H_*$, lo cual corresponden a los modos que están entrando al horizonte de partículas de hoy día, los cuales se asumen están sobre la SUD.

4.5.1. La supresión de los multipolos más bajos en el espectro angular

Los modos $\beta \lesssim a^* H^*$ que salieron del horizonte durante inflación y reingresaron posteriormente en la época de materia o radiación, son los mismos que se observan hoy día $\beta \lesssim a_0 H_0$, por lo tanto los espectros (4.52) y (4.58) para dichos modos se pueden escribir como,

$$P_{\delta\sigma}(\beta \lesssim a_0 H_0) \sim \left(\frac{H_\lambda}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2}}\right) \quad K > 0, \quad (4.59)$$

$$P_{\delta\sigma}(\beta \lesssim a_0 H_0) \sim \left(\frac{H_\lambda}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{|K|}{a_0^2 H_0^2}}\right) \quad K < 0. \quad (4.60)$$

Se observa que para el caso del universo cerrado con $K > 0$, el espectro de potencias se suprime ligeramente con respecto al espectro de potencias del universo plano con $K = 0$, debido a que el valor $\frac{K}{a_0 H_0}$ observado hoy día es muy pequeño. Para el caso del universo abierto, sucede lo contrario, el espectro de potencias se ve realzado ligeramente con respecto a aquél del universo plano.

En el espectro angular C_l definido en (4.44) el efecto de la supresión o realzamiento sólo es observable a grandes ángulos, multipolos bajos o l pequeño. Observacionalmente se advierte una ligera supresión a multipolos bajos, lo cuál sugiere que el universo es realmente cerrado [23, 33, 34] (ver figura 4.2).

4.5.2. Indicios en el índice espectral y su corrimiento

El índice espectral n_s se define a través del espectro de potencias como,

$$n_s \equiv \frac{d \ln P_\zeta}{d \ln \beta}. \quad (4.61)$$

Para calcular este índice se opta por normalizar la curvatura como $K = \pm 1$, de manera que los modos a la salida del horizonte estarán definidos por:

$$\beta^2 \lesssim \frac{a_0^2 H_0^2}{|K|} = |\Omega_K|^{-1} \approx 10^2, \quad (4.62)$$

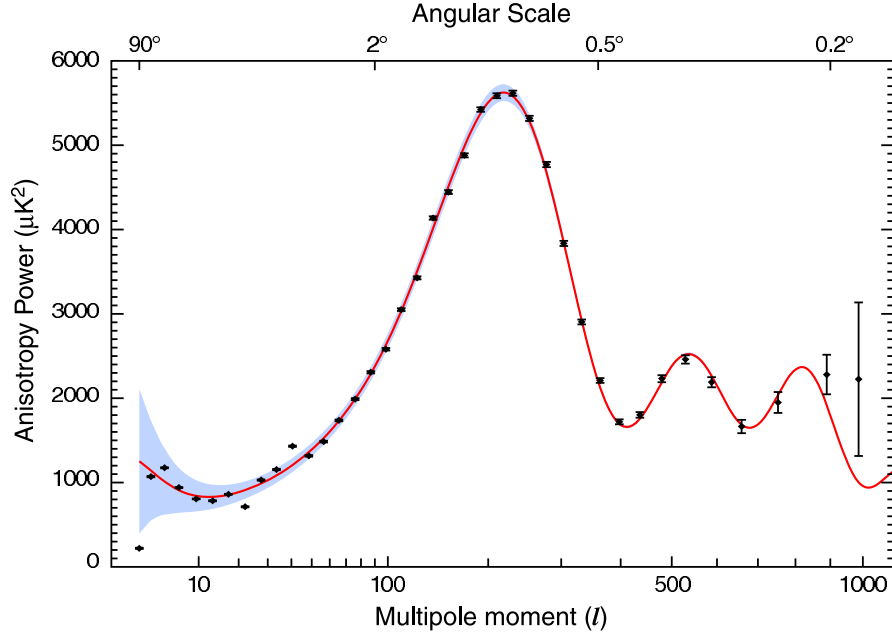


Figura 4.2: El espectro angular C_l que mide la anisotropía en la temperatura de la RCF. Mayores valores del momento multipolar l corresponden a pequeños ángulos o bien, escalas más pequeñas del Universo (Cortesía del equipo WMAP de la NASA [29]). La línea continua corresponde al mejor ajuste teórico asumiendo $K = 0$.

según las observaciones del parámetro de densidad de energía asociado a la curvatura Ω_K [8]. Entonces, para el caso del universo cerrado $K = 1$ se tiene,

$$P_\zeta \propto \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta^2}}, \quad (4.63)$$

luego,

$$\ln P_\zeta \propto -\ln(1 + 1/\beta^2) = -\ln(1 + e^{-2\ln\beta}), \quad (4.64)$$

entonces,

$$n_s \equiv \frac{d \ln P_\zeta}{d \ln \beta} = \frac{2(\frac{1}{\beta^2})}{1 + \frac{1}{\beta^2}} = \frac{2}{1 + \beta^2} = \frac{2}{1 + e^{2\ln\beta}} \gtrsim +0,02. \quad (4.65)$$

El corrimiento o *Running* del índice espectral se mide por la cantidad,

$$\frac{dn_s}{d \ln \beta} = -\frac{4\beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \quad \text{o bien,} \quad (4.66)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln \beta} = -\frac{4}{(\beta^2 + 1)(1 + \frac{1}{\beta^2})} = -\frac{2}{1 + \frac{1}{\beta^2}} n_s \lesssim -0,04. \quad (4.67)$$

Igualmente, para el caso del universo abierto $K = -1$ se tiene,

$$P_\zeta \propto \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta^2}}, \quad (4.68)$$

luego,

$$\ln P_\zeta \propto -\ln(1 - 1/\beta^2) = -\ln(1 - e^{-2\ln\beta}) , \quad (4.69)$$

entonces,

$$n_s \equiv \frac{d \ln P_\zeta}{d \ln \beta} = -\frac{2(\frac{1}{\beta^2})}{1 - \frac{1}{\beta^2}} = -\frac{2}{\beta^2 - 1} = -\frac{2}{e^{2\ln\beta} - 1} \gtrsim -0,02 , \quad (4.70)$$

y el corrimiento es,

$$\begin{aligned} \frac{dn_s}{d \ln \beta} &= \frac{4\beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \quad \text{o bien,} \\ \frac{dn_s}{d \ln \beta} &= \frac{4}{(\beta^2 - 1)(1 - \frac{1}{\beta^2})} = -\frac{2}{1 - \frac{1}{\beta^2}} n_s \lesssim +0,04 . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Según los datos del quinto año de observaciones del WMAP [8], los valores observados para el índice espectral y su corrimiento son:

$$-0,021 \leq n_s \leq 0,065 , \quad (4.72)$$

$$-0,053 \leq \frac{dn_s}{d \ln \beta} \leq -0,011 . \quad (4.73)$$

De nuevo, estas observaciones favorecen la existencia de un Universo cerrado. Sin embargo, dado que el rango de valores que toma el índice espectral puede variar un poco al considerar la masa del curvatón, no se descarta del todo el universo abierto con este análisis.

Un mejor análisis que tenga en cuenta todo el posible rango de valores para el índice espectral en cada caso se realiza encontrando la relación matemática entre el índice espectral y su corrimiento. La expresión general para el índice espectral se puede escribir como,

$$n_s = \frac{\pm 2}{e^{2\ln\beta} \pm 1} \Rightarrow \beta^2 \pm 1 = \pm \frac{2}{n_s} \Rightarrow \beta^2 = \pm \frac{2}{n_s} \mp 1 . \quad (4.74)$$

De esta manera se puede obtener una expresión para el corrimiento del índice espectral independientemente de la curvatura considerada,

$$\frac{dn_s}{d \ln \beta} = \mp \left(\pm \frac{2}{n_s} \mp 1 \right) n_s^2 = \left(-\frac{2}{n_s} + 1 \right) n_s^2 = n_s^2 - 2n_s = (n_s - 1)^2 - 1 . \quad (4.75)$$

El conjunto de valores para el índice espectral y su corrimiento están sobre una parábola. Dado que las cotas observacionales para el parámetro de curvatura son $[-0,0175 < \Omega_K < 0,0085]$ [8] se puede calcular los extremos más alejados de la

parábola permitidos por las observaciones. Estos corresponden al caso del Universo más cerrado con $\beta^2 \lesssim (0,0085)^{-1}$ a la salida del horizonte, en donde

$$n_s = \frac{2}{\beta^2 + 1} \gtrsim 0,0168 , \quad (4.76)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln \beta} = (n_s - 1)^2 - 1 \lesssim -0,0334 , \quad (4.77)$$

y el caso del Universo más abierto con $\beta^2 \lesssim (0,0175)^{-1}$ a la salida del horizonte, en donde

$$n_s = \frac{-2}{\beta^2 - 1} \lesssim -0,0356 , \quad (4.78)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln \beta} = (n_s - 1)^2 - 1 \gtrsim 0,0725 . \quad (4.79)$$

Como se muestra en la figura 4.3, el punto P_c corresponde al Universo más cerrado, y se encuentra dentro de las restricciones dadas por los datos observacionales de WMAP solamente y WMAP+BAO+SN. El punto correspondiente al Universo más abierto P_a está por fuera de la regiones restringida, y el rango de valores que pueden tomar el índice espectral y su corrimiento en este caso lo alejan aún más de dichas regiones.

4.6. Conclusiones

La supresión de los multipolos más bajos en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo se puede demostrar a través del modelo del curvatón considerando un Universo espacialmente cerrado. Este efecto solamente es observable a ángulos muy grandes debido a que ángulos más pequeños el espacio parece muy plano. Además la caída de los multipolos es un efecto muy sutil dado que el horizonte de partículas hoy en día donde se encuentran los objetos más lejanos observables conforma una región superficial (sobre la SUD) insuficiente para apreciar mejor la curvatura, lo cual es consecuencia directa de que la contribución de la curvatura $\frac{K}{a^2 H^2}$ a la densidad de energía del Universo observada actualmente sea despreciable. Adicionalmente, el análisis del par de valores del índice espectral y su corrimiento favorecen la existencia de un Universo cerrado según nuestro estudio, así como de un Universo plano según la literatura, descartando el Universo abierto. Luego este resultado sumado al de la supresión los multipolos más bajos, hacen más viable la suposición de un Universo cerrado.

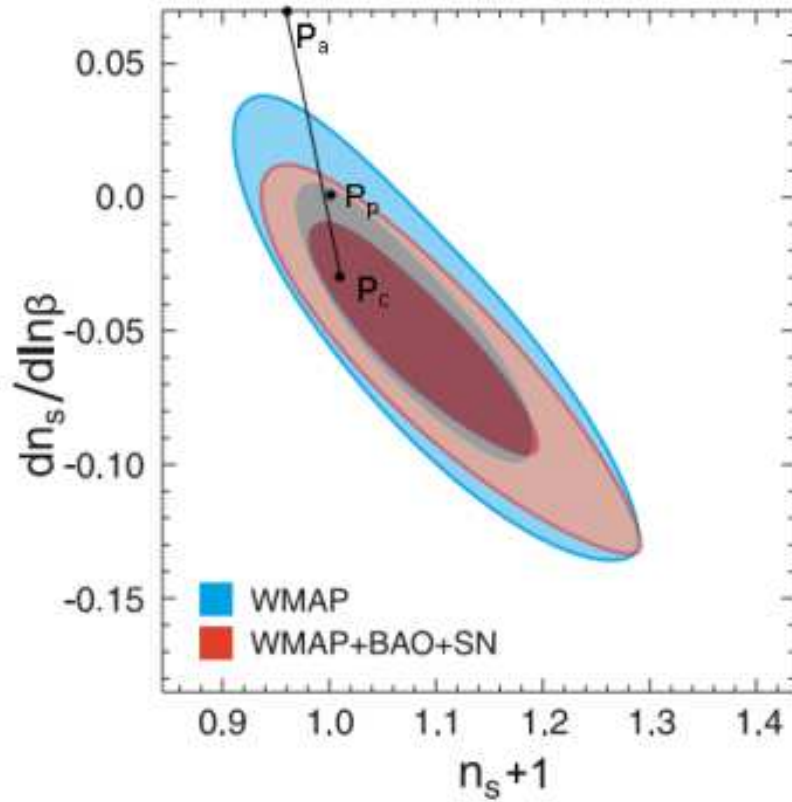


Figura 4.3: Representación bidimensional del índice espectral n_s y su corrimiento $\frac{dn_s}{d \ln \beta}$. Los contornos muestran el 68% y el 95% de nivel de confianza. El punto correspondiente al universo plano ($K = 0$) se denomina P_p . El rango de valores correspondientes al Universo curvo se encuentran sobre el segmento de parábola de color negro. El punto P_c corresponde al caso del Universo más cerrado, y se encuentra en buena medida dentro de la región restringida por los datos observacionales (región sombreada). Por el contrario el punto P_a que corresponde al caso del Universo más abierto, se encuentra bastante alejado de la región restringida, lo cual descarta en este análisis al Universo abierto como candidato para nuestro Universo observable [35].

Capítulo 5

Conclusiones generales

En este trabajo se logró demostrar que es posible considerar un Universo espacialmente cerrado compatible con las observaciones, empleando el modelo más simple del curvatón. Aunque las observaciones también están muy acordes al caso del Universo plano como lo indica la literatura, parece más viable y natural considerar al Universo cerrado, al menos que la caída en los multipolos se logre desvanecer con datos observacionales futuros o se encuentre una mejor explicación para este fenómeno. En todo caso, si se asume un Universo cerrado, la curvatura espacial parece ser muy pequeña llegando casi al límite plano, pero de signo positivo, lo cual como se estudió está acorde con las observaciones del espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la RCF a la salida del horizonte, y ratifica las observaciones a escalas más pequeñas las cuales se reproducen con sorprendente precisión al considerar un Universo plano como es bien sabido.

Es necesario aclarar, que se puede optar por estudiar modelos más rigurosos (aunque más complicados) mencionados en el trabajo, tales como el modelo puro del inflatón (donde se asume que el único campo presente durante inflación es el encargado de generar inflación así como también las perturbaciones primordiales en la curvatura) y los modelos más complejos del curvatón que involucran el estudio de parámetros adicionales (por ejemplo, el modelo simple del curvatón desarrollado en el trabajo, pero tomando en cuenta la masa del curvatón m_σ , lo que conlleva a la aparición de un conjunto de índices espectrales). Sin embargo, el modelo sencillo escogido resultó ser de utilidad para cumplir con los objetivos del trabajo, y es de esperarse que modelos más rigurosos conlleven a resultados similares.

Finalmente podemos concluir que, aunque realmente la curvatura K nunca se podrá conocer debido a que no es un parámetro físico, el parámetro de curvatura $\Omega_K = \frac{K}{a^2 H^2}$ es de mayor interés. Como se pudo apreciar, el valor del parámetro de curvatura repercute directamente en cualquier análisis que se haga para buscar indicios de la curvatura espacial, porque todo análisis de este tipo está completamente limitado al valor Ω_K observado actualmente. Aunque este valor es el mismo obser-

vado en algún tiempo durante inflación cuando las escalas relevantes salieron del horizonte, es imposible observar valores más grandes de Ω_K antes de dicho tiempo, porque dicha información está oculta de momento. Por lo tanto, el conocimiento obtenido de la geometría de nuestro Universo está limitado por la capacidad que se tiene de observarlo.

Apéndice A

Perturbaciones en la métrica de Friedman-Robertson-Walker

A.1. La métrica de Friedman-Robertson-Walker: algunas definiciones y observaciones

El elemento de línea espacial de Friedman-Robertson-Walker se puede escribir como:

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

Haciendo el cambio de variable $r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2}$, se tiene que:

$$dr = \frac{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 - \bar{r} \left(\frac{K\bar{r}}{2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}K\bar{r}^2}{\left(1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^2} d\bar{r}, \quad \text{luego: } dr^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^4} d\bar{r}^2,$$

sustituyendo r , $d\bar{r}^2$ en el elemento espacial de línea se obtiene:

$$\begin{aligned} d\bar{l}^2 &= a^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^4} \cdot \frac{d\bar{r}^2}{\left[1 - K \left(\frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2} \right)^2 \right]} + \frac{\bar{r}^2}{\left(1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2 \right)^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \\ &= a^2 \left[\frac{\left(1 - K\bar{r}^2/4 \right)^2 \left(1 + K\bar{r}^2/4 \right)^2 d\bar{r}^2}{\left(1 + K\bar{r}^2/4 \right)^4 \left[\left(1 + K\bar{r}^2/4 \right)^2 - K\bar{r}^2 \right]} + \frac{\bar{r}^2}{\left(1 + K\bar{r}^2/4 \right)^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \\ &= a^2 \left[\frac{d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{\left(1 + K\bar{r}^2/4 \right)^2} \right], \\ &\implies d\bar{s}^2 = dt^2 - d\bar{l}^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{\gamma^2(\bar{r})} (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en donde,

$$\bar{x} = \bar{r} \sin\theta \cos\phi, \quad \bar{y} = \bar{r} \sin\theta \sin\phi, \quad \bar{z} = \bar{r} \cos\theta, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{4} K \bar{r}^2.$$

De esta manera, el tensor métrico covariante de FRW puede escribirse en una forma más cómoda como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{a^2}{\gamma^2} & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

al igual que el tensor métrico contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\gamma^2}{a^2} & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

los cuales satisfacen claramente la condición métrica $g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha$. Así, con este cambio de variable el determinante de la métrica es simplemente,

$$\det(g_{\mu\nu}) = [\det(g^{\mu\nu})]^{-1} = - \left(\frac{a}{\gamma} \right)^6. \quad (\text{A.5})$$

A.2. La derivada covariante

La derivada covariante espacial D_i en el espacio curvo aplicada a un campo vectorial \vec{E} que pertenece a alguna variedad física \mathfrak{M} , se define como aquella calculada con respecto a un sistema de coordenadas espaciales x^i en \mathfrak{M} , sobre una hipersuperficie de tiempo constante caracterizada por el tensor métrico espacial γ_{ij} , es decir,

$$D_j(E_i) = \partial_j(E_i) - \Gamma_{ij}^k E_k, \quad \gamma_{ij} = \gamma^{-2} \delta_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

$$D_i B = \partial_i B, \quad (\text{A.7})$$

siendo B un campo escalar. Las conexiones métricas Γ_{ij}^k que aparecen arriba se calculan a partir de su definición usando la métrica γ_{ij} como sigue [13]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \gamma^{km} (\partial_i \gamma_{mj} + \partial_j \gamma_{mi} - \partial_m \gamma_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^2 \delta^{km} [\partial_i (\delta_{mj} \gamma^{-2}) + \partial_j (\delta_{mi} \gamma^{-2}) - \partial_m (\delta_{ij} \gamma^{-2})] \\ &= \frac{1}{2} \gamma^2 [\delta_j^k \partial_i (\gamma^{-2}) + \delta_i^k \partial_j (\gamma^{-2}) - \delta_{ij} \partial_k (\gamma^{-2})], \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{K}{2\gamma} [\delta_{ij} x^k - \delta_j^k x^i - \delta_i^k x^j]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por ejemplo, el laplaciano covariante de una función escalar Q se define como:

$$\begin{aligned}
D^i D_i Q &= \gamma^{ij} (D_j D_i Q) = \gamma^{ij} D_j (\partial_i Q) = \gamma^{ij} (\partial_j \partial_i Q - \Gamma_{ij}^k \partial_k Q) \\
&= \gamma^2 \delta^{ij} \left[\partial_j \partial_i Q - \frac{K}{2\gamma} (\delta_{ij} x^k - \delta_j^k x^i - \delta_i^k x^j) \partial_k Q \right] \\
&= \gamma^2 \left[\partial_i \partial_i Q - \frac{K}{2\gamma} (\delta_i^i x^k - \delta^{ki} x^i - \delta^{kj} x^j) \partial_k Q \right] \\
&= \gamma^2 \left[\partial_i^2 Q - \frac{K}{2\gamma} (3x^k - 2x^k) \partial_k Q \right] = \gamma^2 \left[\partial_i^2 Q - \frac{K}{2\gamma} x^k \partial_k Q \right] \\
&= \gamma^2 \left(\nabla^2 Q - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} Q \right) . \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Para el caso de un universo plano ($K = 0$), el laplaciano covariante se reduce al laplaciano ordinario, $D_i D^i Q = \nabla^2 Q$, como era de esperarse.

A.3. Transformaciones infinitesimales de coordenadas en el elemento de línea más general

La transformación infinitesimal de coordenadas más general en espacio curvo $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ considerando solamente grados de libertad escalares se define como:

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \eta + \epsilon_0(x^\mu) , \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij} \epsilon_{|j}(x^\mu) ; \tag{A.10}$$

en donde ϵ_0 , ϵ y sus derivadas son infinitesimalmente pequeñas y las derivadas espaciales covariantes son con respecto a la métrica espacial de fondo $\gamma^{ij} = \gamma^2 \delta^{ij}$. El elemento de línea de la ec. (2.4) visto en el capítulo 2 por convención debe permanecer invariante, y tendrá la siguiente forma en el nuevo sistema de coordenadas \tilde{x}^μ :

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{a}^2 \{ (1 + 2\tilde{\phi}) d\tilde{\eta}^2 - 2\tilde{B}_{|i} d\tilde{x}^i d\tilde{\eta} - [(1 - 2\tilde{\psi}) \tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{E}_{|ij}] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \} \tag{A.11}$$

Vamos a considerar que la métrica de fondo es una función fija de coordenadas, es decir que en un segundo sistema de coordenadas \tilde{x}^μ tendrá exactamente la misma dependencia funcional en \tilde{x}^μ . Entonces, regresando a las variables no-tildadas y aproximando a primer orden podemos escribir:

$$\tilde{a}^2 = a^2(\tilde{\eta}) = a^2(\eta + \epsilon_0) = [a^2(\eta)]' \epsilon_0 + a^2(\eta) = 2aa' \epsilon_0 + a^2 , \tag{A.12}$$

$$d\tilde{\eta} = (1 + \epsilon_0') d\eta + \partial_i \epsilon_0 dx^i ;$$

$$d\tilde{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial(\gamma^{ij} \epsilon_{|j})}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial(\gamma^{ij} \epsilon_{|j})}{\partial x^k} dx^k , \tag{A.13}$$

$$= dx^i + \gamma^2 \epsilon_{|i}' d\eta + \gamma^2 \partial_k (\epsilon_{|i}) dx^k + \gamma K x^k \epsilon_{|i} dx^k . \tag{A.14}$$

Reemplazando estos últimos resultados en el elemento de línea $d\tilde{s}^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 = (2aa'\epsilon_0 + a^2) & \left\{ (1 + 2\tilde{\phi}) [(1 + \epsilon'_0)^2 d\eta^2 + 2(1 + \epsilon'_0) \partial_i \epsilon_0 d\eta dx^i + (\partial_i \epsilon_0)^2 (dx^i)^2] \right. \\
& - 2\tilde{B}_{|i} [(1 + \epsilon'_0) d\eta + \partial_k \epsilon_0 dx^k] [dx^i + \gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta + \gamma^2 \partial_l (\epsilon_{|i}) dx^l + \gamma K x^l \epsilon_{|i} dx^l] \\
& - [(1 - 2\tilde{\psi}) \tilde{\gamma}^{-2} \delta_{ij} + 2\tilde{E}_{|ij}] [dx^i + \gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta + \gamma^2 \partial_k (\epsilon_{|i}) dx^k + \gamma K x^k \epsilon_{|i} dx^k] \\
& \left. \cdot [dx^j + \gamma^2 \epsilon'_{|j} d\eta + \gamma^2 \partial_l (\epsilon_{|j}) dx^l + \gamma K x^l \epsilon_{|j} dx^l] \right\} \text{A.15}
\end{aligned}$$

Despreciando los términos no-lineales de ϵ_0 , ϵ y sus respectivas derivadas en la expresión entre corchetes se obtiene

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 = (2aa'\epsilon_0 + a^2) & \left\{ (1 + 2\tilde{\phi}) [(1 + 2\epsilon'_0) d\eta^2 + 2\partial_i \epsilon_0 d\eta dx^i] \right. \\
- 2\tilde{B}_{|i} & [d\eta dx^i + \gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta^2 + \gamma^2 \partial_l (\epsilon_{|i}) d\eta dx^l + \gamma K x^l \epsilon_{|i} d\eta dx^l + \epsilon'_0 d\eta dx^i + \partial_k \epsilon_0 dx^k dx^i] \\
& - [(1 - 2\tilde{\psi}) \tilde{\gamma}^{-2} \delta_{ij} + 2\tilde{E}_{|ij}] [\gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta dx^j + \gamma^2 \partial_k (\epsilon_{|i}) dx^k dx^j + \gamma K x^k \epsilon_{|i} dx^k dx^j \\
& \left. + \gamma^2 \epsilon'_{|j} d\eta dx^i + \gamma^2 \partial_l (\epsilon_{|j}) dx^l dx^i + \gamma K x^l \epsilon_{|j} dx^l dx^i + dx^i dx^j] \right\} \text{A.16}
\end{aligned}$$

Despreciando ahora los términos no-lineales de ϵ_0 , ϵ , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\phi}$, \tilde{B} , \tilde{E} y sus respectivas derivadas, tendremos:

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 = (2aa'\epsilon_0 + a^2) & \left\{ (1 + 2\epsilon'_0) d\eta^2 + 2\partial_i \epsilon_0 d\eta dx^i + 2\tilde{\phi} d\eta^2 - 2\tilde{B}_{|i} d\eta dx^i + 2\tilde{\psi} \tilde{\gamma}^{-2} (dx^i)^2 \right. \\
& \left. - 2\tilde{E}_{|ij} dx^i dx^j - 2\tilde{\gamma}^{-2} [\gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta dx^i + \gamma^2 \partial_k (\epsilon_{|i}) dx^k dx^i + \gamma K x^k \epsilon_{|i} dx^k dx^i] - \tilde{\gamma}^{-2} (dx^i)^2 \right\} \text{A.17}
\end{aligned}$$

Así, reorganizando:

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 = (2aa'\epsilon_0 + a^2) & \left\{ (1 + 2\epsilon'_0 + 2\tilde{\phi}) d\eta^2 + 2(\partial_i \epsilon_0 - \tilde{B}_{|i}) d\eta dx^i - \tilde{\gamma}^{-2} (1 - 2\tilde{\psi}) (dx^i)^2 \right. \\
& \left. - 2\tilde{E}_{|ij} dx^i dx^j - 2\tilde{\gamma}^{-2} [\gamma^2 \epsilon'_{|i} d\eta dx^i + \gamma^2 \partial_k (\epsilon_{|i}) dx^k dx^i + \gamma K x^k \epsilon_{|i} dx^k dx^i] \right\} \text{A.18}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos $\tilde{\gamma}^{-2}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}^{-2} &= \gamma^{-2}(\tilde{x}^i) = \left[1 + \frac{1}{4}K \sum_i (\tilde{x}^i)^2 \right]^{-2} = \left[1 + \frac{1}{4}K \sum_i (x^i + \gamma^{ij}\epsilon_{|j})^2 \right]^{-2} \\
&= \left[1 + \frac{1}{4}K \sum_i [(x^i)^2 + 2x^i\gamma^2\epsilon_{|i}] \right]^{-2} = \left[1 + \frac{1}{4}K \sum_i (x^i)^2 + \frac{K}{2}\gamma^2 \sum_i x^i\epsilon_{|i} \right]^{-2} \\
&= \left(\gamma + \frac{1}{2}K\gamma^2 \sum_i x^i\epsilon_{|i} \right)^{-2} = \gamma^{-2} \left(1 + \frac{1}{2}K\gamma \sum_i x^i\epsilon_{|i} \right)^{-2} \\
&\approx \gamma^{-2} \left(1 + K\gamma \sum_i x^i\epsilon_{|i} \right)^{-1} \approx \gamma^{-2} \left(1 - K\gamma \sum_i x^i\epsilon_{|i} \right) \quad \text{a primer orden} \dots
\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en (A.18), y denotando las derivadas covariantes finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 &= (2aa'\epsilon_0 + a^2) \left\{ (1 + 2\epsilon'_o + 2\tilde{\phi})d\eta^2 + 2(\epsilon_{0|i} - \tilde{B}_{|i} - \epsilon'_{|i})d\eta dx^i - \right. \\
&2 \left[\frac{K}{\gamma}x^k\epsilon_{|i} + \partial_k(\epsilon_{|i}) \right] dx^k dx^i - 2\tilde{E}_{|ij}dx^i dx^j - \gamma^{-2}[1 - K\gamma x^k\epsilon_{|k} - 2\tilde{\psi}](dx^i)^2 \left. \right\} \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

De la invariancia del elemento de línea, sabemos que $ds^2 = d\tilde{s}^2$. Necesitamos comparar ambos lados de esta relación usando las ecs. (2.4) y (A.19) para obtener las reglas de transformación para la cantidades escalares $\tilde{\psi}$, $\tilde{\phi}$, \tilde{B} y \tilde{E} :

- Términos temporales con $d\eta^2$,

$$\begin{aligned}
(2aa' + a^2)(1 + 2\epsilon'_o + 2\tilde{\phi}) &= a^2(1 + 2\phi) , \\
2aa' + a^2 + 2a^2\epsilon'_o + 2a^2\tilde{\phi} &= a^2(1 + 2\phi) , \\
2\frac{a'}{a}\epsilon_0 + 2\epsilon'_o + 2\tilde{\phi} + 1 &= 1 + 2\phi , \\
\Rightarrow \tilde{\phi} &= \phi - \frac{a'}{a}\epsilon_0 - \epsilon'_o . \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

- Términos cruzados con $d\eta dx^i$,

$$\begin{aligned}
2(2aa'\epsilon_0 + a^2)(\epsilon_{0|i} - \epsilon'_{|i} - \tilde{B}_{|i}) &= -2a^2B_{|i} , \\
a^2(\epsilon_{0|i} - \epsilon'_{|i} - \tilde{B}_{|i}) &= -a^2B_{|i} , \\
\tilde{B}_{|i} &= B_{|i} + \epsilon_{0|i} - \epsilon'_{|i} ,
\end{aligned}$$

pero, $B_{|i} = \partial_i B = \tilde{\partial}_i B \cdot \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^i} = \tilde{\partial}_i B [1 + K\gamma x^i\epsilon_{|i} + \gamma^2\partial_i(\epsilon_{|i})] \approx \tilde{\partial}_i B$, a primer orden. Luego:

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_i B &= \tilde{\partial}_i (B + \epsilon_0 - \epsilon') , \\
\Rightarrow \tilde{B} &= B + \epsilon_0 + \epsilon' + \text{const.} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

- Términos espaciales $dx^i dx^j$,

$$\begin{aligned}
& -a^2\gamma^{-2}(1-2\psi)(dx^i)^2 - 2a^2E_{|ij}dx^i dx^j = (2aa'\epsilon_0 + a^2) \\
& \cdot \left\{ -2\left[\frac{K}{\gamma}x^k\epsilon_{|i} + \partial_k(\epsilon_{|i})\right]dx^i dx^k - \left[\gamma^{-2} - \frac{K}{\gamma}x^k\epsilon_{|k} - 2\gamma^{-2}\tilde{\psi}\right](dx^i)^2 - \tilde{E}_{|ij}dx^i dx^j \right\}, \\
& \Rightarrow a^2\gamma^{-2}(1-2\psi)(dx^i)^2 - 2a^2E_{|ij}dx^i dx^j = -(2aa'\epsilon_0 + a^2) \\
& \cdot \left\{ \gamma^{-2}(1-2\tilde{\psi})(dx^i)^2 + 2\partial_k(\epsilon_{|i})dx^k dx^i - \frac{K}{\gamma}[x^k\epsilon_{|k}(dx^i)^2 - 2x^k\epsilon_{|i}dx^i dx^k] \right. \\
& \left. + \tilde{E}_{|ij}dx^i dx^j \right\} \text{A.22)
\end{aligned}$$

Utilizando la expresión para las conexiones métricas (A.8), podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\gamma}[x^k\epsilon_{|k}(dx^i)^2 - 2x^k\epsilon_{|i}dx^i dx^k] &= \frac{k}{\gamma}[x^k\epsilon_{|k}(dx^i)^2 - x^i\epsilon_{|j}dx^i dx^j - x^j\epsilon_{|i}dx^i dx^j] \\
&= \frac{k}{\gamma}(\delta_{ij}x^k - \delta_j^k x^i - \delta_i^k x^j)\epsilon_{|k}dx^i dx^j \\
&= 2\Gamma_{ij}^k\epsilon_{|k}dx^i dx^j. \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Reemplazando esto último en (A.22), tendremos entonces:

$$\begin{aligned}
& a^2\gamma^{-2}(1-2\psi)(dx^i)^2 - 2a^2E_{|ij}dx^i dx^j = -(2aa'\epsilon_0 + a^2) \\
& \cdot \left\{ \gamma^{-2}(1-2\tilde{\psi})(dx^i)^2 + 2\partial_k(\epsilon_{|i})dx^k dx^i - 2\Gamma_{ij}^k\epsilon_{|k}dx^i dx^j + \tilde{E}_{|ij}dx^i dx^j \right\}.
\end{aligned}$$

esta relación se cumple si:

$$\begin{aligned}
\gamma^{-2}(2aa'\epsilon_0 + a^2)(1-2\tilde{\psi})(dx^i)^2 &= a^2\gamma^{-2}(1-2\psi)(dx^i)^2, \\
2aa'\epsilon_0 + a^2 - 2a^2\tilde{\psi} &= a^2 - 2a^2\psi, \\
\Rightarrow \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\epsilon_0. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
2a^2E_{|ij}dx^i dx^j &= 2(2aa'\epsilon_0 + a^2)[\partial_k(\epsilon_{|i}) - \Gamma_{ij}^k\epsilon_{|k} + 2\tilde{E}_{|ij}]dx^i dx^j, \\
a^2E_{|ij} &= a^2\partial_j(\epsilon_{|i}) - a^2\Gamma_{ij}^k\epsilon_{|k} + a^2\tilde{E}_{|ij}, \\
\tilde{E}_{|ij} &= E_{|ij} + \Gamma_{ij}^k\epsilon_{|k} - \partial_j(\epsilon_{|i}), \tag{A.25}
\end{aligned}$$

pero $E_{|ij} = D_i(D_j E) \approx \tilde{D}_j(\tilde{D}_i E)$ a primer orden, por tanto la expresión (A.25) se puede escribir en notación de derivada covariante como:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_j(\tilde{D}_i \tilde{E}) &= \tilde{D}_j(\tilde{D}_i E) - \underbrace{[\tilde{\partial}_j(\tilde{D}_i \epsilon) - \Gamma_{ij}^k \tilde{D}_k \epsilon]}_{\tilde{D}_j(\tilde{D}_i \epsilon)}, \\
&= \tilde{D}_j \tilde{D}_i (E - \epsilon), \\
\Rightarrow \tilde{E} &= E - \epsilon + \text{const.} \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Apéndice B

El campo escalar del curvatón

B.1. Definición de la densidad de energía y la presión del fluido del curvatón

Al comienzo de las oscilaciones dado que la radiación domina la densidad de energía del Universo tenemos libertad de fijar $\psi \equiv 0$. Así, podemos construir el tensor energía-momentum para el campo σ del curvatón usando la métrica no perturbada de FRW,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \sigma \partial_\beta \sigma - V(\sigma) \right] \\ &= \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{a^2} (\partial_i \sigma)^2 - v(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

El campo σ lo podemos descomponer en una parte homogénea y sus fluctuaciones cuánticas,

$$\sigma(\vec{x}, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(\vec{x}, t). \quad (\text{B.2})$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, podemos calcular la densidad de energía y la presión del fluido del curvatón apartir de las definiciones tradicionales usando el tensor energía-momentum:

- La densidad de energía del fluido del curvatón se define como:

$$\rho_\sigma = T_{00} = \dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{a^2} (\partial_i \sigma)^2 + V(\sigma) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{a^2} (\nabla \delta\sigma)^2 + V(\sigma), \quad (\text{B.3})$$

y a primer orden en las perturbaciones esta expresión se reduce a

$$\rho_\sigma(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma). \quad (\text{B.4})$$

- Para calcular la presión P , primero calcularemos la parte espacial del tensor energía-momentum,

$$T_{ij} = \partial_i \sigma \partial_j \sigma + \frac{a^2}{\gamma^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{a^2} (\nabla \delta \sigma)^2 - v(\sigma) \right] \delta_{ij} , \quad (\text{B.5})$$

y a primer orden esta expresión se reduce a

$$T_{ij} = \frac{a^2}{\gamma^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - v(\sigma) \right] \delta_{ij} = -P g_{ij} , \quad (\text{B.6})$$

usando la definición tradicional de la presión P dado que el tensor resultante es isotrópico. Para despejar P calculamos la traza denotada como Tr a ambos lados de la expresión anterior y obtenemos,

$$P_\sigma(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \frac{\gamma^2}{a^2} Tr(T_{ij}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - V(\sigma) . \quad (\text{B.7})$$

B.2. La ecuación diferencial de Klein-Gordon para el campo escalar del curvatón

La densidad de lagrangiana \mathfrak{L} en un espacio-tiempo arbitrario $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\mu)$ para un sistema cuyo contenido está descrito por el campo escalar $\sigma = \phi(x^\mu)$ se define como:

$$\mathfrak{L}(x^\mu, \sigma, \partial_\mu \sigma) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) . \quad (\text{B.8})$$

La acción correspondiente S es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{L}(x^\mu, \sigma, \partial_\mu \sigma) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\nu} - V(\sigma) \right] = \int d^4x \bar{\mathfrak{L}} . \quad (\text{B.9})$$

siendo $\int d^4x$ la integral sobre el cuatri-volumen de espacio-tiempo en el cuál está definido el campo σ . Mediante principios variacionales, se llega a las conocidas ecuaciones de campo de Euler-Lagrange [18],

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right] = 0, \quad \bar{\mathfrak{L}} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\nu} - V(\sigma) \right] . \quad (\text{B.10})$$

Calculemos cada término de arriba por separado reemplazando $\bar{\mathfrak{L}}$,

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma} = -\sqrt{-g} V'(\sigma) , \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (\partial_\alpha \sigma \partial_\beta \sigma)}{\partial (\partial_\mu \sigma)} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (2\delta_\alpha^\mu \partial_\beta \sigma) = \sqrt{-g} g^{\mu\beta} \partial_\beta \sigma, \quad (\text{B.12})$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right] = \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) , \quad (\text{B.13})$$

por lo tanto (B.10) queda como:

$$-\sqrt{-g} V'(\sigma) - \partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) = 0 \quad , \text{ o bien,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) = -V'(\sigma) \quad , \quad (\text{B.14})$$

conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Usando la notación $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ conocido como el operador D'Álembertiano (cuatri-operador relativista) podemos reescribir la ec. de Klein-Gordon (KG) de manera más compacta como

$$\square \sigma = -V'(\sigma) \quad . \quad (\text{B.15})$$

Ahora, consideremos un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico de Friedman-Robertson-Walker

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2/\gamma^2, -a^2/\gamma^2, -a^2/\gamma^2) \quad g = \frac{a^6}{\gamma^6} \quad . \quad (\text{B.16})$$

La ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar σ con potencial cuadrático $V(\sigma) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2$ se transforma en,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) &= \frac{\gamma^3}{a^3} \left[\partial_0 \left(\frac{a^3}{\gamma^3} \partial_0 \sigma \right) - \partial_i \left(\frac{a^3}{\gamma^3} \cdot \frac{\gamma^2}{a^2} \partial_i \sigma \right) \right] = -V'(\sigma) \\ &= \partial_0^2 \sigma + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 \sigma - \frac{\gamma^2}{a^2} \partial_i^2 \sigma + \frac{\gamma}{a^2} \left(\frac{K x_i}{2} \partial_i \sigma \right) = -V'(\sigma), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

o bien,

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left(\nabla^2 \sigma - \frac{K \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \sigma}{2\gamma} \right) + V'(\sigma) = 0 \quad . \quad (\text{B.18})$$

En el caso límite de un universo plano ($K = 0$, $\gamma = 1$), esta ecuación se reduce a la usual expresin utilizada en cosmología estndar,

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} - \frac{\nabla^2 \sigma}{a^2} + V'(\sigma) = 0$$

Descomponiendo el campo σ en una parte homogénea y sus pequeñas fluctuaciones cuánticas,

$$\sigma(\vec{x}, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(\vec{x}, t) \quad , \quad (\text{B.19})$$

la ecuación (B.18) se convierte en,

$$\ddot{\sigma}_0 + \ddot{\delta\sigma} + 3H(\dot{\sigma}_0 + \dot{\delta\sigma}) - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\nabla^2 \delta\sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta\sigma \right] + V'(\sigma_0 + \delta\sigma) = 0 \quad . \quad (\text{B.20})$$

El término $V'(\sigma)$ se puede expandir en una serie de Taylor alrededor del fondo homogéneo,

$$V'(\sigma_0 + \delta\sigma) = V'(\sigma_0) + V''(\sigma_0)\delta\sigma + \dots, \quad (\text{B.21})$$

entonces, para perturbaciones a primer orden, la ecuación de Klein-Gordon se separa en dos partes, una para el fondo homogéneo,

$$\ddot{\sigma}_0 + 3H\dot{\sigma}_0 + V'(\sigma_0) = 0, \quad (\text{B.22})$$

y otra para las perturbaciones escalares,

$$\delta\ddot{\sigma} + 3H\delta\dot{\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\nabla^2 \delta\sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta\sigma \right] + V''(\sigma_0)\delta\sigma = 0. \quad (\text{B.23})$$

Si suponemos un campo escalar sin masa, es decir, $V''(\sigma) = m_\sigma^2 = 0$, esta ecuación se transforma en:

$$\delta\ddot{\sigma} + 3H\delta\dot{\sigma} - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\nabla^2 \delta\sigma - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta\sigma \right] = 0 \quad (\text{B.24})$$

la cuál está desacoplada completamente del fondo homogéneo σ_0 y se puede resolver independientemente. Con la separación de variables,

$$\delta\sigma(\vec{r}, t) = \delta\sigma(t)Q(\vec{r}), \quad (\text{B.25})$$

se obtiene,

$$\delta\ddot{\sigma}(t)Q(\vec{r}) + 3H\delta\dot{\sigma}(t)Q(\vec{r}) - \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\delta\sigma(t)\nabla^2 Q(\vec{r}) - \frac{K}{2\gamma}\delta\sigma(t)\vec{r} \cdot \vec{\nabla} Q(\vec{r}) \right] = 0, \quad (\text{B.26})$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\delta\sigma(t)} [\delta\ddot{\sigma}(t) + 3H\delta\dot{\sigma}(t)] - \frac{\gamma^2}{Q(\vec{r})} \left[\nabla^2 Q(\vec{r}) - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} Q(\vec{r}) \right] = 0, \quad (\text{B.27})$$

la cual se cumple si ambos términos son iguales a una constante arbitraria positiva que denotaremos como k^2 . Así la ecuación (B.27) es separada en las ecuaciones

$$\delta\ddot{\sigma}_k + 3H\delta\dot{\sigma}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\sigma_k = 0 \quad \text{y}, \quad (\text{B.28})$$

$$\gamma^2 \left(\nabla^2 Q_k - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) Q_k + k^2 Q_k = 0. \quad (\text{B.29})$$

La primera ecuación para la parte temporal se puede reducir más haciendo la transformación $d\eta = dt/a$ y $\chi(\eta, k) = a(\eta)\delta\sigma_k(\eta)$, teniendo en cuenta que,

$$\delta\sigma_k = \frac{\chi}{a}, \quad (\text{B.30})$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'/a}{a} = \frac{a'}{a^2}, \quad (\text{B.31})$$

$$\dot{\sigma}_k = \frac{\partial\delta\sigma_k}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial\chi/a}{\partial\eta} = \frac{a\chi' - \chi a'}{a^3}, \quad (\text{B.32})$$

$$\delta\ddot{\sigma}_k = \frac{\partial\dot{\delta\sigma}_k}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{a\chi' - \chi a'}{a^3} \right] = \frac{a(a\chi'' - \chi a'') - 3a'(a\chi' - \chi a')}{a^5} \quad (\text{B.33})$$

Reemplazando estos resultados obtenemos,

$$\begin{aligned}
\delta\ddot{\sigma}_k + 3H\delta\dot{\sigma}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\sigma_k &= 0, \\
\frac{a(a\chi'' - \chi a'') - 3a'(a\chi' - \chi a')}{a^5} + 3\left(\frac{a'}{a^2}\right)\left(\frac{a\chi' - \chi a'}{a^3}\right) + \frac{k^2\chi}{a^3} &= 0, \\
\frac{a^2\chi'' - aa''\chi - 3aa'\chi' + 3a'^2\chi + 3aa'\chi' - 3a'^2\chi + k^2a^2\chi}{a^5} &= 0, \quad a \neq 0, \\
a^2\chi'' - aa''\chi + k^2a^2\chi &= 0, \quad \text{o bien,} \\
\chi'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\chi &= 0. \quad (\text{B.34})
\end{aligned}$$

en donde una prima denota la derivada con respecto al tiempo conformal η .

Apéndice C

Solución espacial de la ecuación de Klein-Gordon para las perturbaciones de un campo escalar sin masa no dominante

La solución espacial la componen las funciones espaciales armónicas $Q_k(\vec{r})$ las cuales son realmente soluciones de la ecuación de Helmholtz generalizada,

$$D^2 Q_k + k^2 Q_k = 0 , \quad (\text{C.1})$$

en donde $D^2 = D_i D^i = \gamma^2 (\nabla^2 - \frac{K}{2\gamma} \vec{r} \cdot \nabla)$ es el operador laplaciano covariante visto en el apéndice (A.2). Con el método de separación de variables en coordenadas esféricas,

$$Q_k(\vec{r}) = R_k(r) Y(\theta, \phi) , \quad (\text{C.2})$$

$$\nabla^2 Q_k = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Q_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Q_k}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \phi^2} , \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{\nabla} Q_k = \frac{\partial Q_k}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q_k}{\partial \phi} \hat{\phi} , \quad (\text{C.4})$$

la ecuación de Helmholtz generalizada se transforma en,

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_k - \frac{Kr}{2\gamma} \frac{\partial Q_k}{\partial r} &= -\frac{k^2}{\gamma^2} Q_k , \\ \Rightarrow \frac{Y}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 R'_k \right) + \frac{R_k}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R_k}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \frac{Kr}{2\gamma \Omega} \frac{\partial R_k}{\partial r} &= -\frac{k^2}{\gamma^2} R_k Y , \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

y separando las funciones según las variables,

$$\frac{r^2}{R_k} \left[\frac{(r^2 R'_k)'}{r^2} - \frac{Kr R'_k}{2\gamma} + \frac{k^2 R_k}{\gamma^2} \right] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] . \quad (\text{C.6})$$

Esta última ecuación se cumple siempre y cuando ambos miembros sean iguales a una constante positiva arbitraria la cual denotaremos por conveniencia como $l(l+1)$. Entonces, la ecuación anterior se puede separar en una parte angular y una parte radial,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \phi^2} + l(l+1)Y_l = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$(r^2 R_k^l)' - \frac{Kr^3}{2\gamma} R_k^l + \left(\frac{k^2 r^2}{\gamma^2} - l(l+1) \right) R_k^l = 0, \quad (\text{C.8})$$

en donde una prima en este caso denota la derivada total con respecto a r .

C.1. Solución angular: las funciones armónicas esféricas

Con la separación de variables,

$$Y_l(\theta, \phi) = \Theta_l(\theta)\Phi(\phi), \quad (\text{C.9})$$

la ecuación (C.7) se transforma en,

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_l}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta_l}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + l(l+1)\Theta_l\Phi = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{1}{\Theta_l \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_l}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + l(l+1) = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta_l} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_l}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (\text{C.12})$$

ecuación que se cumple siempre y cuando ambos miembros sean iguales a una constante positiva arbitraria que denotaremos como m^2 . Entonces, se obtienen dos ecuaciones, la primera para la parte azimutal,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (\text{C.13})$$

cuya solución es,

$$\Phi_m(\phi) = e^{\pm im\phi}, \quad m \in \mathbf{Z}^+, \quad (\text{C.14})$$

en tanto que Φ satisface las condición de periodicidad sobre la frontera [$\Phi_m(0) = \Phi_m(2\pi)$]

A partir de la segunda ecuación para la parte polar,

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Theta_l} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_l}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta_l \right] = m^2, \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_l}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_l = 0, \quad (\text{C.16})$$

que se reescribirá haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta$, teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{d\theta} = -(1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}, \quad (\text{C.17})$$

y se obtiene la ecuación de Legendre,

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta_l^m}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta_l^m = 0 \quad (\text{C.18})$$

cuyas soluciones son las funciones asociadas de Legendre P_l^m de grado l entero

$$\Theta(\theta) = P_l^m(\cos \theta), \quad l \in \mathbb{Z}^+, \quad -l \leq m \leq l, \quad (\text{C.19})$$

en tanto que Θ satisface las condiciones de regularidad en las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Recopilando todos estos resultados, la solución para la parte angular de la ecuación de Helmholtz generalizada se puede escribir como:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N e^{\pm im\phi} P_l^m(\cos \theta), \quad 0 \leq m \leq l, \quad (\text{C.20})$$

en donde ambas funciones Y_l^m y su conjugada son soluciones linealmente independientes. Las funciones Y_l^m se les denomina los armónicos esféricos y han sido muy estudiados en física-matemática [30]. Aquí N es una constante de normalización que satisface la condición

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \sin \theta Y_l^{m'}(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{C.21})$$

conocida como la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos. Utilizando esta propiedad se puede demostrar que los armónicos esféricos también son un conjunto completo. Si se escribe,

$$\begin{aligned} \int d\theta' d\phi' \sin \theta' \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{*m}(\theta', \phi') Y_l^{m'}(\theta', \phi') &= \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) \underbrace{\int d\theta' d\phi' \sin \theta' Y_l^{*m}(\theta', \phi') Y_l^{m'}(\theta', \phi')}_{\delta_{ll'} \delta_{mm'}} &= Y_l^{m'}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

que también se puede escribir como,

$$\int d\theta' d\phi' \sin \theta' Y_l^{m'}(\theta', \phi') \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{*m}(\theta', \phi') \right] = Y_l^{m'}(\theta, \phi), \quad (\text{C.23})$$

se ve que la expresión entre corchetes satisface la condición de un delta de Dirac,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{*m}(\theta', \phi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi'), \quad (\text{C.24})$$

conocida como la propiedad de completéz de los armónicos esféricos.

C.2. Solución radial: las funciones hiperesféricas de Bessel

La ecuación (C.8) para la parte radial de la ecuación de Helmholtz generalizada es la única que depende de la curvatura K y los valores propios k . Para empezar vamos a reducir esta ecuación a la forma usual de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables,

$$(r^2 R_k^{l'})' - \frac{Kr^3}{2\gamma} R_k^{l'} + \left(\frac{k^2 r^2}{\gamma^2} - l(l+1) \right) R_k^l = 0, \quad (\text{C.25})$$

$$r^2 R_k^{l''} + 2r R_k^{l'} - \frac{Kr^3}{2\gamma} R_k^{l'} + \left(\frac{k^2 r^2}{\gamma^2} - l(l+1) \right) R_k^l = 0, \quad (\text{C.26})$$

$$r^2 R_k^{l''} + \left(2r - \frac{Kr^3}{2\gamma} \right) R_k^{l'} + \left(\frac{k^2 r^2}{\gamma^2} - l(l+1) \right) R_k^l = 0 \cdot \gamma^2, \quad (\text{C.27})$$

$$\gamma^2 r^2 R_k^{l''} + \left(2r\gamma^2 - \frac{K\gamma r^3}{2} \right) R_k^{l'} + [k^2 r^2 - \gamma^2 l(l+1)] R_k^l = 0. \quad (\text{C.28})$$

Pero,

$$\begin{aligned} 2r\gamma^2 - \frac{K\gamma r^3}{2} &= 2r(1 + Kr^2/4)^2 - \frac{K(1 + Kr^2/4)r^3}{2} \\ &= 2r + Kr^3 + K^2 r^5/8 - Kr^3/2 - K^2 r^5/8 \\ &= 2r + Kr^3/2 = 2r(1 + Kr^2/4) = 2r\gamma, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

con lo cual, la ecuación (C.28) queda como,

$$\gamma^2 r^2 R_k^{l''} + 2r\gamma R_k^{l'} + [k^2 r^2 - \gamma^2 l(l+1)] R_k^l = 0. \quad (\text{C.30})$$

Antes de solucionar esta ecuación, veamos qué sucede en el límite de un Universo plano ($K \rightarrow 0$). Con el cambio de variable $u = kr$, teniendo en cuenta que,

$$R' = \frac{dR}{du} \frac{du}{dr} = kR'(u), \quad (\text{C.31})$$

$$R'' = \frac{kR'(u)}{du} \frac{du}{dr} = k^2 R''(u), \quad (\text{C.32})$$

la ecuación (C.30) se convierte en,

$$\gamma^2(u) u^2 R_l''(u) + 2u\gamma(u) R_l'(u) + [u^2 - \gamma^2(u)l(l+1)] R_l(u) = 0. \quad (\text{C.33})$$

Cuando $K \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$, esta ecuación se transforma en la ecuación diferencial de Bessel [30],

$$u^2 R_l''(u) + 2u R_l'(u) + [u^2 - l(l+1)] R_l(u) = 0, \quad u = kr, \quad (\text{C.34})$$

cuyas soluciones son las funciones esféricas de Bessel $j_l(u)$ y las funciones esféricas de Newmann $n_l(u)$ de orden l entero,

$$R_l(u) = A j_l(u) + B n_l(u) . \quad (\text{C.35})$$

Estas funciones se pueden obtener a partir de las siguientes fórmulas:

$$j_l(u) = (-u)^l \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^l \frac{\sin u}{u} , \quad (\text{C.36})$$

$$n_l(u) = -(-u)^l \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^l \frac{\cos u}{u} . \quad (\text{C.37})$$

Se puede demostrar que sólo las funciones esféricas de Bessel son regulares en el origen ($r = 0$, $u = 0$) mientras que las funciones esféricas de Newmann divergen al infinito de manera que la solución física requerida es simplemente,

$$R_l(kr) = j_l(kr) , \quad \text{cuando } K \rightarrow 0 , \quad (\text{C.38})$$

en donde las funciones j_l están normalizadas y satisfacen la propiedad de completez,

$$\int dk k^2 j_l(kr) j_l(kr') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') . \quad (\text{C.39})$$

De nuevo, usando la propiedad de completez se puede demostrar la propiedad de ortogonalidad (o viceversa) si se escribe,

$$\int dr' dk k^2 j_l(kr) j_l(kr') j_l(k'r') r'^2 = \int dr' r'^2 j_l(kr') \underbrace{\int dk k^2 j_l(kr) j_l(kr')}_{\frac{1}{r^2} \delta(r-r')} \quad (\text{C.40})$$

$$\int dr' j_l(k'r') \delta(r - r') = j_l(k'r) , \quad (\text{C.41})$$

que también se puede escribir como,

$$\int dk k^2 j_l(kr) \left[\int dr' r'^2 j_l(kr') j_l(k'r') \right] = j_l(k'r) , \quad (\text{C.42})$$

se vé que la expresión entre corchetes satisface la condición de un delta de Dirac,

$$\int dr' r'^2 j_l(kr') j_l(k'r') = \frac{1}{k^2} \delta(k - k') , \quad (\text{C.43})$$

conocida como la propiedad de ortogonalidad de las funciones esféricas de Bessel.

Retomando la ec. (C.30) y reescribiéndola de manera más compacta se obtiene:

$$\frac{\gamma^3}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\gamma} \frac{dR_k^l}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{\gamma^2 l(l+1)}{r^2} \right) = 0 . \quad (\text{C.44})$$

Cambiando la variable, definiendo:

$$\sin \xi = \frac{\sqrt{K}r}{\gamma} \quad \Rightarrow r^2 = \frac{\gamma^2 \sin^2 \xi}{K}, \quad (\text{C.45})$$

con lo que,

$$\cos \xi = \frac{\sqrt{\gamma^2 - Kr^2}}{\gamma} = \frac{\sqrt{1 + Kr^2/2 + K^2r^4/16 - Kr^2}}{\gamma} = \frac{\sqrt{(1 - Kr^2/4)^2}}{\gamma} = \frac{|2 - \gamma|}{\gamma}, \quad (\text{C.46})$$

se tiene entonces,

$$\frac{d \sin \xi}{dr} = \cos \xi \frac{d\xi}{dr} = \frac{|2 - \gamma|}{\gamma} \frac{d\xi}{dr}, \quad (\text{C.47})$$

$$\Rightarrow \sqrt{K} \left[\frac{\gamma - r(2(\gamma - 1)/r)}{\gamma^2} \right] = \frac{|2 - \gamma|}{\gamma} \frac{d\xi}{dr}, \quad (\text{C.48})$$

$$\sqrt{K} \left(\frac{2 - \gamma}{\gamma^2} \right) = \frac{|2 - \gamma|}{\gamma} \frac{d\xi}{dr} \Rightarrow \frac{d\xi}{dr} = \pm \frac{\sqrt{K}}{\gamma}. \quad (\text{C.49})$$

Luego,

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi} = \pm \frac{\sqrt{K}}{\gamma} \frac{d}{d\xi}. \quad (\text{C.50})$$

Usando las relaciones (C.45, C.49, C.50) en la ecuación (C.44), ésta es reemplazada por:

$$\begin{aligned} \frac{K\gamma^3}{\gamma^2 \sin^2 \xi} \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{K}}{\gamma} \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\gamma^2 \sin^2 \xi}{K\gamma} \cdot \pm \frac{\sqrt{K}}{\gamma} \frac{dR_k^l}{d\xi} \right) + \left(k^2 - \frac{K\gamma^2 l(l+1)}{\gamma^2 \sin^2 \xi} \right) R_k^l &= 0, \\ \Rightarrow \frac{K}{\sin^2 \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin^2 \xi \frac{dR_k^l}{d\xi} \right) + \left(k^2 - \frac{Kl(l+1)}{\sin^2 \xi} \right) R_k^l &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

y así se logra eliminar la variable γ de la ecuación diferencial. Ahora haciendo la separación

$$R_k^l = \Pi(\xi) \sin^{-\frac{1}{2}} \xi \quad (\text{C.52})$$

la ecuación (C.51) se convierte en,

$$\begin{aligned} \frac{K}{\sin^2 \xi} \frac{d}{d\xi} \left[\sin^2 \xi \left(\sin^{-\frac{1}{2}} \xi \frac{d\Pi}{d\xi} - \frac{\Pi}{2} \sin^{-\frac{3}{2}} \xi \cos \xi \right) \right] + \left(k^2 - \frac{Kl(l+1)}{\sin^2 \xi} \right) \Pi \sin^{-\frac{1}{2}} \xi &= 0, \\ \Rightarrow \frac{K}{\sin^{-\frac{3}{2}} \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin^{-\frac{3}{2}} \xi \frac{d\Pi}{d\xi} - \frac{1}{2} \Pi \sin^{\frac{1}{2}} \xi \cos \xi \right) + \left(k^2 - \frac{Kl(l+1)}{\sin^2 \xi} \right) \Pi &= 0, \\ -\frac{1}{2} \left[\sin^{\frac{1}{2}} \xi \cos \xi \frac{d\Pi}{d\xi} + \Pi \left(\frac{1}{2} \sin^{-\frac{1}{2}} \xi \cos^2 \xi - \sin^{\frac{3}{2}} \xi \right) \right] + \left(k^2 - \frac{Kl(l+1)}{\sin^2 \xi} \right) \Pi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

$$(\text{C.54})$$

Reduciendo y reagrupando términos,

$$\begin{aligned}
K \frac{d^2 \Pi}{d\xi^2} + \frac{K \cos \xi}{2 \sin \xi} \frac{d\Pi}{d\xi} + \left(\frac{K}{2} - \frac{K \cos^2 \xi}{4 \sin^2 \xi} + k^2 - \frac{Kl(l+1)}{\sin^2 \xi} \right) \Pi &= 0, \\
\frac{K}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin \xi \frac{d\Pi}{d\xi} \right) + \left[k^2 + \frac{K}{\sin^2 \xi} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \xi - \frac{1}{4} \cos^2 \xi - l(l+1) \right) \right] \Pi &= 0, \\
\frac{K}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin \xi \frac{d\Pi}{d\xi} \right) + \left[k^2 + \frac{K}{\sin^2 \xi} \left(\frac{3}{4} \sin^2 \xi - \frac{1}{4} - l(l+1) \right) \right] \Pi &= 0, \\
\frac{K}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin \xi \frac{d\Pi}{d\xi} \right) + \left[k^2 + \frac{3}{4}K - \frac{K}{\sin^2 \xi} \left(l(l+1) + \frac{1}{4} \right) \right] \Pi &= 0, \\
\frac{K}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\sin \xi \frac{d\Pi}{d\xi} \right) + \left(k^2 + \frac{3}{4}K - \frac{Kl(l+1)^2}{\sin^2 \xi} \right) \Pi &= 0.
\end{aligned} \tag{C.55}$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $x = \cos \xi$ y denotando las constantes:

$$\lambda(\lambda + 1) = k^2/K + 3/4, \tag{C.56}$$

$$\mu = l + \frac{1}{2}, \tag{C.57}$$

se obtiene la ecuación diferencial de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d\Pi_\lambda^\mu}{dx} \right) + \left(\lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Pi_\lambda^\mu = 0, \quad x = \cos \xi, \tag{C.58}$$

cuyas soluciones son las funciones asociadas de Legendre de primera clase y segunda clase P_λ^μ y Q_λ^μ de grado λ real y orden μ semientero [31],

$$\Pi_\lambda^\mu = AP_\lambda^\mu(\cos \xi) + BQ_\lambda^\mu(\cos \xi), \tag{C.59}$$

en donde,

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2} \pm (1 + k^2/K)^{1/2}, \tag{C.60}$$

$$\mu = \pm(l + 1/2). \tag{C.61}$$

Un resultado importante se desprende debido a que μ es un número semientero. Si usamos la propiedad,

$$P_\lambda^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma(\lambda - \mu + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + 1)} \left[P_\lambda^\mu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\mu\pi} \sin(\mu\pi) Q_\lambda^\mu(z) \right], \tag{C.62}$$

$$P_\lambda^{-(l+\frac{1}{2})}(\cos \xi) = \frac{\Gamma(\lambda - l + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + l + \frac{3}{2})} \left\{ P_\lambda^{l+\frac{1}{2}}(\cos \xi) - \frac{2}{\pi} e^{-i(l+\frac{1}{2})\pi} \sin[(l+1/2)\pi] Q_\lambda^{l+\frac{1}{2}}(\cos \xi) \right\}, \tag{C.63}$$

como l es un entero positivo, las funciones Q_λ^μ se pueden expresar como una combinación lineal de las funciones $P_l^{-\mu}$ y P_l^μ . Así escogiendo estas últimas como soluciones linealmente independientes, se obtiene que

$$\Pi_\lambda^l = AP_\lambda^{l+1/2}(\cos \xi) + BP_\lambda^{-(l+1/2)}(\cos \xi) . \quad (\text{C.64})$$

Dado que $P_\lambda^\mu = P_{-1-\lambda}^\mu$, o bien, $P_{\lambda_+}^\mu = P_{\lambda_-}^\mu$ se empleará $\lambda = \lambda_+$. La solución completa para la parte radial de la ecuación de Helmholtz generalizada la componen las denominadas *funciones hiperesféricas de Bessel* Ψ_λ^l [24, 25],

$$R_k^l = \frac{\Pi_\lambda^l(\cos \xi)}{\sin^{\frac{1}{2}}(\xi)} = \Psi_\lambda^{\pm l}(\cos \xi) = \frac{P_\lambda^{\pm(l+\frac{1}{2})}(\cos \xi)}{\sin^{\frac{1}{2}} \xi} . \quad (\text{C.65})$$

Las funciones P_λ^μ se definen mediante las siguientes fórmulas hipergeométricas:

$$P_\lambda^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{z+1}{z-1} \right]^{\frac{1}{2}\mu} \times F\left(-\lambda, 1+\lambda; 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right) , \quad (\text{C.66})$$

$$P_\lambda^{\pm(\frac{1}{2}+l)}(\cos \xi) = \frac{e^{\pm\frac{1}{2}i\pi(l+\frac{1}{2})}(\cot \xi/2)^{\pm(l+\frac{1}{2})}}{\Gamma(1 \mp (\frac{1}{2} + l))} \times F\left(-\lambda, 1+\lambda; 1 \mp (1/2 + l); \sin^2(\xi/2)\right) , \quad (\text{C.67})$$

de aquí que cuando $\xi \rightarrow 0$ (o $r \rightarrow 0$),

$$\Psi_\lambda^{\pm l} \propto \frac{(\cot \xi/2)^{\pm(l+\frac{1}{2})}}{\Gamma(1 \mp (\frac{1}{2} + l)) (\sin \xi/2)^{\frac{1}{2}}} , \quad (\text{C.68})$$

y como l es un entero positivo, sólo Ψ_λ^{-l} es regular en el origen, mientras que Ψ_λ^l diverge al infinito. Entonces la solución física requerida es,

$$R_k^l = \Psi_\lambda^{-l}(\cos \xi) = \frac{P_\lambda^{-(l+\frac{1}{2})}(\cos \xi)}{\sin^{\frac{1}{2}} \xi} . \quad (\text{C.69})$$

Las últimas condiciones de frontera dependen del tipo de curvatura escogida para el Universo. Para estudiar estas condiciones, por comodidad denotaremos un Universo *cerrado* mediante el parámetro de curvatura $K = 1$ y un Universo *abierto* mediante $K = -1$. La métrica en ambos casos será,

$$ds^2 = dt - \frac{a^2}{\gamma^2}(dr^2 - r^2 d\Omega^2) , \quad (\text{C.70})$$

en donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, $\gamma = 1+r^2/4$ para un Universo cerrado, y $\gamma = 1-r^2/4$ para un Universo abierto. Además, el subíndice λ que depende del término de la curvatura K y los valores propios k lo reescribiremos de manera más conveniente como:

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{K}} \quad \text{en donde,} \quad (\text{C.71})$$

$$\beta \equiv \sqrt{k^2 + K} . \quad (\text{C.72})$$

- Curvatura positiva ($K=1$) . En este caso,

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \beta , \quad (\text{C.73})$$

$$\beta = \sqrt{k^2 + 1} . \quad (\text{C.74})$$

Y la solución para la parte radial es:

$$R_k^l = \Psi_\beta^{-l}(\cos \xi) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+\beta}^{-l-\frac{1}{2}}(\cos \xi)}{\sin^{\frac{1}{2}} \xi} . \quad (\text{C.75})$$

La transformación $r \rightarrow 4/r$ deja la métrica (C.70) intacta. Esta simetría se debe a que la métrica entre el intervalo $0 < r < 2$ y la métrica entre el intervalo $2 < r < \infty$ son indistinguibles debido a que la una es meramente un remapeado de la otra ¹. Esto tiene interesantes consecuencias sobre las funciones trigonométricas,

$$\sin \xi = \frac{r}{\gamma} = \frac{r}{1 + r^2/4} , \quad (\text{C.76})$$

$$\cos \xi = \frac{|2 - \gamma|}{\gamma} = \frac{|1 - \frac{r^2}{4}|}{1 + \frac{r^2}{4}} \quad (\text{C.77})$$

donde $0 < \xi < \pi/2$ para todo $r \neq 0, 2$. Se puede observar que el espacio en el intervalo $0 < r < 2$ se reproduce cuando el ángulo hace un recorrido en sentido antihorario ó $\xi : 0 \mapsto \pi/2$, mientras que el espacio en el intervalo $2 < r < \infty$ se reproduce cuando el ángulo hace un recorrido en sentido horario ó $\xi : \pi/2 \mapsto 0$.

Además, de la propiedad de las funciones asociadas de Legendre,

$$P_\lambda^\mu(-z) = e^{\pm i\lambda\pi} P_\lambda^\mu(z) - \frac{2}{\pi} \sin[\pi(\lambda + \mu)] Q_\lambda^\mu(z) , \quad (\text{C.78})$$

$$P_{-\frac{1}{2}+\beta}^{-l-\frac{1}{2}}(-\cos \xi) = e^{\pm i(-\frac{1}{2}+\beta)\pi} P_{-\frac{1}{2}+\beta}^{-l-\frac{1}{2}}(\cos \xi) - \frac{2}{\pi} \sin[\pi(\beta - l - 1)] Q_{-\frac{1}{2}+\beta}^{-l-\frac{1}{2}}(\cos \xi), \quad (\text{C.79})$$

un argumento negativo corresponde realmente a una extrapolación al segundo cuadrante $\pi/2 < \xi < \pi$, en donde se exigirá que el resultado obtenido sea equivalente. Así la función Ψ_β^{-l} debe ser simétrica (o antisimétrica) alrededor de $\xi = \pi/2$ o $r = 2$ para que sea univaluada. Esto conduce a la condición de frontera,

$$\beta - l - 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \beta \geq l + 1 \Rightarrow \beta = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.80})$$

¹Nótese que $r = 2$ corresponde a la discontinuidad en la métrica espacial $\bar{r} = r/\gamma = 1$ siendo \bar{r} la variable radial ordinaria.

Se ha demostrado que los valores $\beta = 1$ y $\beta = 2$ corresponde a modos los cuales son términos de gauge puros [32, 14]. Así que los valores propios para $K = 1$ son

$$k^2 = \beta^2 - 1, \quad \text{con} \quad \beta = 3, 4, 5, \dots > l. \quad (\text{C.81})$$

- Curvatura negativa ($K = -1$). En este caso,

$$\lambda = -\frac{1}{2} - i\beta, \quad (\text{C.82})$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - 1}. \quad (\text{C.83})$$

Pero, $\sin \xi = \frac{ir}{1-Kr^2}$ es un numero imaginario. En tal caso, redefiniremos las funciones trigonométricas como,

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \sin(iy) = i \sinh y = i \left(\frac{r}{\gamma} \right) = i \left(\frac{r}{1-r^2/4} \right), \\ \Rightarrow \sinh y &= \frac{r}{1-r^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \cos(iy) = \cosh y = \frac{|2-\gamma|}{\gamma} = \frac{|1+r^2/4|}{1-r^2/4}, \\ \Rightarrow \cosh y &= \frac{1+r^2/4}{1-r^2/4}. \end{aligned} \quad (\text{C.85})$$

Así las funciones trigonométricas se han transformado en funciones hiperbólicas! En el universo abierto no se requiere ninguna condición de frontera, ya que no existe ninguna simetría en la métrica; entonces β puede ser cualquier valor real positivo. La solución para la parte radial es:

$$R_k^l = \Psi_\beta^{-l}(\cosh \xi) = \frac{P_{-\frac{1}{2}-i\beta}^{-l-\frac{1}{2}}(\cosh \xi)}{\sinh^{\frac{1}{2}} \xi}, \quad (\text{C.86})$$

en donde los valores propios están dados por,

$$k^2 = \beta^2 + 1; \quad \beta \geq 0. \quad (\text{C.87})$$

C.3. Principales propiedades de las funciones armónicas espaciales $Q_k(\vec{x})$

Las solución completa para las funciones radiales R_β^l aplicando los resultados obtenidos anteriormente, se describe a continuación:

$$R_\beta^l(\vec{x}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sinh y} \right)^{1/2} P_{-\frac{1}{2}-i\beta}^{-\frac{1}{2}-l}(\cosh y), & K = -1, \\ j_l(\beta y) Y_l^m(\theta, \phi) = j_l(kr), & K = 0, \\ \left(\frac{1}{\sin y} \right)^{1/2} P_{-\frac{1}{2}+\beta}^{-\frac{1}{2}-l}(\cos y), & K = +1, \end{cases} \quad (\text{C.88})$$

en donde $y = \int \frac{dr}{1+Kr^2/4}$ y $\beta = \sqrt{k^2 + K}$. Los valores propios β toman valores enteros $\beta = 3, 4, 5 \dots$ en el caso del Universo cerrado, y toman valores reales positivos en el caso del Universo plano y abierto. La solución completa para las funciones armónicas espaciales está compuesta por:

$$Q_{\beta}^{lm}(r, \theta, \phi) = R_{\beta}^l(r) Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (\text{C.89})$$

En el límite del universo plano ($K \rightarrow 0$), usando las propiedades (C.21) y (C.43) estas funciones satisfacen la propiedad de ortogonalidad,

$$\begin{aligned} \int dV Q_{\beta}^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) &= \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) j_l(k'r) Y_l^{*m'}(\theta, \phi) \\ &= \int r^2 dr j_l(kr) j_l(k'r) \int \sin\theta d\theta d\phi Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{*m'}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{k^2} \delta(k - k') \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Para el caso del Universo curvo ($K \neq 0$) esta propiedad puede ser extendida, teniendo en cuenta que el elemento de volumen en coordenadas esféricas en el espacio de FRW con curvatura es $dV = \frac{r^2 dr}{\gamma^3} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{r^2 dr}{\gamma^3} d\Omega$ y los valores propios $k \rightarrow \beta$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{r^2 dr}{\gamma^3} d\Omega Q_{\beta}^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) &= \int \frac{r^2 dr}{\gamma^3} d\Omega R_{\beta}^l(r) Y_l^m(\theta, \phi) R_{\beta'}^{*l'}(r) Y_l^{*m'}(\theta, \phi) \\ &= \int \frac{r^2 dr}{\gamma^3} R_{\beta}^l(r) R_{\beta'}^{*l'}(r) \int d\Omega Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{*m'}(\theta, \phi) \\ &= \delta(\beta, \beta') \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

Esta última es la propiedad de ortogonalidad de las funciones armónicas espaciales Q_{β}^{lm} . La función $\delta(\beta, \beta')$ se define como:

$$\delta(\beta, \beta') = \frac{1}{\beta^2} \delta(\beta - \beta') \quad \text{si } K = -1 \rightarrow \text{Delta de Dirac radial} , \quad (\text{C.92})$$

$$\delta(\beta, \beta') = \frac{1}{\beta^2} \delta_{\beta\beta'} \quad \text{si } K = +1 \rightarrow \text{Delta de Kronecker radial} . \quad (\text{C.93})$$

Para demostrar la propiedad de completez, se escribe la medida:

$$\int \frac{r'^2}{\gamma'^3} dr' \beta^2 d\beta R_{\beta}^l(r) R_{\beta}^{*l}(r') R_{\beta'}^l(r') = \int \beta^2 d\beta R_{\beta}^l(r) \underbrace{\left[\int \frac{r'^2}{\gamma'^3} dr' R_{\beta}^{*l}(r') R_{\beta'}^l(r') \right]}_{\delta(\beta-\beta')} = R_{\beta}^l(r) .$$

Esta expresión también se puede escribir como,

$$\int \frac{r'^2}{\gamma'^3} dr' R_{\beta'}^l(r') \left[\int \beta^2 d\beta R_{\beta}^l(r) R_{\beta}^{*l}(r') \right] = R_{\beta'}^l(r) . \quad (\text{C.94})$$

De aquí se vé que la expresión entre corchetes satisface la propiedad de un delta de Dirac,

$$\int \beta^2 d\beta R_\beta^l(r) R_\beta^{*l}(r') = \frac{\gamma^3}{r^2} \delta(r - r') , \quad (\text{C.95})$$

que es la propiedad de completez de las funciones hiperesféricas de Bessel. Combinando las propiedades (C.24) y (C.95) se obtiene la propiedad de completez de las funciones armónicas espaciales,

$$\sum_{l,m} \int \beta^2 d\beta Q_\beta^{lm}(r, \theta, \phi) Q_\beta^{*lm}(r', \theta', \phi') = \frac{\gamma^3}{r^2 \sin^2 \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') . \quad (\text{C.96})$$

Recuérdese que en el caso del Universo cerrado los resultados obtenidos son los mismos, pero dado que los valores propios en este caso son discretos la integral $\int \beta^2 d\beta \rightarrow \sum_{\beta=3}^{\infty} \beta^2$.

Apéndice D

Las Ecuaciones de Friedman y de continuidad durante inflación

Mediante la transformación $d\eta = dt/a$, la ecuación de Friedman se convierte en [23],

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= \frac{\rho a^2}{3m_p^2} - K \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

e igualmente la ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \Rightarrow \rho' + 3H(\rho + P)a = 0, \quad (\text{D.2})$$

en donde una prima denota la derivada con respecto al tiempo conformal η . Derivando la expresión (D.1) con respecto a η , se obtiene

$$\frac{2a'}{a} \left(\frac{a'}{a}\right)' = \frac{1}{3m_p^2}(\rho' a^2 + 2\rho a a'). \quad (\text{D.3})$$

Usando la expresión (D.2) se obtiene

$$\frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a}\right)' = \frac{1}{6m_p^2}[2\rho a a' - 3H(\rho + P)a^3] = \frac{1}{6m_p^2}[2\rho a a' - 3a' a(\rho + P)], \quad (\text{D.4})$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' = -\frac{1}{6m_p^2}(\rho a a' + 3P a a') \frac{a}{a'}, \quad (\text{D.5})$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' = -\frac{1}{6m_p^2}(\rho + 3P)a^2 \quad (\text{D.6})$$

Durante inflación, $\rho = \rho_\lambda$, es prácticamente constante y según la ecuación de continuidad, $P = -\rho$. Así las ecs. (D.1) y (D.6) se transforman en,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= \frac{\rho_\lambda a^2}{3m_p^2} - K, \\ \left(\frac{a'}{a}\right)' &= \frac{\rho_\lambda a^2}{3m_p^2},\end{aligned}\tag{D.7}$$

Si se restan las expresiones anteriores, tendremos

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a''a - a'^2}{a^2} - \frac{a'^2}{a^2} = K,\tag{D.8}$$

$$\Rightarrow \frac{a''}{a} = K + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = K + 2\left(\frac{\rho_\lambda a^2}{3m_p^2} - K\right),\tag{D.9}$$

$$\frac{a''}{a} = \frac{2\rho_\lambda}{3m_p^2}a^2 - K \equiv 2a^2 H_\lambda^2 - K,\tag{D.10}$$

en donde se ha definido $H_\lambda = \sqrt{\frac{\rho_\lambda}{3m_p^2}}$, el cuál es el parámetro de Hubble durante inflación pura (despreciando la contribución de la curvatura $\frac{K}{a^2}$). Este último resultado es útil porque al reemplazarlo en la ecuación de KG en tiempo conformal (B.34) esta última queda simplemente como,

$$\chi'' + \left(k^2 - 2a^2 H_\lambda^2 - K\right) = 0.\tag{D.11}$$

Se resolverá la ecuación de Friedman para los casos del Universo abierto y cerrado a continuación.

- Universo cerrado. En este caso $K > 0$. De la ecuación de Friedman se obtiene

$$H^2 = H_\lambda^2 - \frac{K}{a^2} \rightarrow \dot{a} = \sqrt{H_\lambda^2 a^2 - K} \rightarrow \frac{da}{H_\lambda \sqrt{a^2 - \frac{K}{H_\lambda^2}}} = dt,\tag{D.12}$$

la cuál integrando conduce a,

$$\text{arc cosh}\left(\frac{H_\lambda a}{\sqrt{K}}\right) = tH_\lambda + b_0.\tag{D.13}$$

Considerando como condición inicial el momento en que la densidad de energía comienza a dominar sobre la contribución de la curvatura, es decir, $\left[a(t=0) = \frac{\sqrt{K}}{H_\lambda}\right]$, lo cuál garantiza que $H^2 > 0$, entonces la solución requerida es:

$$a(t) = \frac{\sqrt{K}}{H_\lambda} \cosh H_\lambda t, \quad a \in [\sqrt{K}/H_\lambda, \infty).\tag{D.14}$$

El tiempo conformal η se puede calcular haciendo $dt = ad\eta$. Así

$$\frac{da}{a\sqrt{a^2 - \frac{K}{H_\lambda^2}}} = H_\lambda d\eta , \quad (\text{D.15})$$

la cual al integrar conduce a,

$$\frac{H_\lambda}{\sqrt{K}} \operatorname{arcsec} \frac{H_\lambda}{\sqrt{K}} a = H_\lambda \eta + b_1 . \quad (\text{D.16})$$

Con la condición inicial $[a \rightarrow \infty , \eta \rightarrow 0]$, $b_1 = \frac{H_\lambda}{\sqrt{K}}(\pi/2)$ entonces la solución es

$$a = \frac{\sqrt{K}}{H_\lambda \cos(\sqrt{K}\eta + \pi/2)} \quad \text{o bien} \quad a(\eta) = \frac{-\sqrt{K}}{H_\lambda \sin(\sqrt{K}\eta)} . \quad (\text{D.17})$$

Luego la dependencia del tiempo conformal en el factor de escala es,

$$\eta(a) = \frac{-1}{\sqrt{K}} \arcsin \frac{\sqrt{K}}{aH_\lambda} , \quad \eta \in [-\pi/(2\sqrt{K}), 0) . \quad (\text{D.18})$$

- Universo abierto. En este caso $K < 0$. De la ecuación de Friedman se obtiene,

$$\dot{a} = \sqrt{a^2 H_\lambda^2 + |K|} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{|K|}{H_\lambda^2}}} = H_\lambda dt , \quad (\text{D.19})$$

la cual al integrar conduce a,

$$\operatorname{arc} \sinh \frac{H_\lambda a}{\sqrt{|K|}} = H_\lambda t + b_2 , \quad (\text{D.20})$$

donde se ha trabajado con el valor absoluto de la curvatura, $|K| = -K$. Con la condición inicial $[a(t=0) = 0 , b_2 = 0]$ se obtiene,

$$a = \frac{\sqrt{|K|}}{H_\lambda} \sinh(H_\lambda t) \quad a \in [0, \infty) . \quad (\text{D.21})$$

Haciendo $dt = ad\eta$, se obtiene la expresión en tiempo conformal,

$$\frac{da}{a\sqrt{a^2 + \frac{|K|}{H_\lambda^2}}} = H_\lambda d\eta \quad (\text{D.22})$$

la cual integrando resulta en,

$$-\frac{H_\lambda}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arsch} \frac{H_\lambda a}{\sqrt{|K|}} = H_\lambda \eta + b_3 . \quad (\text{D.23})$$

Con la condición inicial $[a \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0]$, $b_3 = 0$ y la solución queda,

$$a(\eta) = \frac{\sqrt{|K|}}{H_\lambda \sinh \sqrt{|K|}\eta}. \quad (\text{D.24})$$

Luego la dependencia del tiempo conformal en el factor de escala es,

$$\eta(a) = \frac{-1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{|K|}}{H_\lambda a}, \quad \eta \in (-\infty, 0]. \quad (\text{D.25})$$

Apéndice E

Las condiciones iniciales de vacío de Bunch-Davies y la cuantización de las fluctuaciones en el campo del curvatón

En el capítulo 4 se escogieron apropiadamente las constantes de integración de las soluciones de la ecuación de KG en tiempo conformal para las fluctuaciones $\chi_\beta(\eta)$ en el campo σ , ahora demostraremos el significado físico de esta escogencia. Para comprobar la compatibilidad de la teoría cuántica y relativista de campos propuesta, con la teoría cuántica de campos tradicional (Minkoskiana), supondremos un espacio de FRW con curvatura espacial, pero sin expansión, esto se hace fijando el parámetro de escala $a \equiv 1$, de manera que la derivada con respecto al tiempo conformal η es igual a la derivada con respecto al tiempo cósmico t . Así, esperamos que se reproduzcan algunos resultados importantes de la teoría clásica de campos.

Durante inflación, y antes de salir del horizonte, las fluctuaciones en σ pueden ser consideradas como operadores cuánticos. Dado que se ha despreciado la masa del potencial para estudiar el campo de las fluctuaciones $\delta\sigma$ en la ecuación de KG, éste campo se comporta como un fluido no interactuante desacoplado del fondo y se puede escribir el operador del campo de las fluctuaciones $\hat{\delta}\sigma(\vec{x}, \eta)$ en términos de los usuales operadores creación y destrucción \hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k . En el límite de subhorizonte ($\beta \gg aH$) bajo las condiciones iniciales de vacío dadas por Bunch-Davies [27, 28] estos operadores se pueden escribir como,

$$\hat{\delta}\sigma_{BD}(\vec{x}, \eta) = \hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta) = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta \left[\hat{a}_{\beta lm} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) \frac{e^{i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} \right]. \quad (\text{E.1})$$

Recordando, que el principio de incertidumbre Heisenberg en la teoría cuántica de

partículas, se enuncia matemáticamente a través del conmutador,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad \hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (\text{E.2})$$

siendo \hat{p}_i el operador momentum definido a través de la lagrangiana L . De igual manera en teoría cuántica de campos se puede definir un momentum asociado al operador $\hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta)$, como:

$$\hat{\pi}_{BD}(\vec{x}, \eta) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\hat{\chi}_{BD})} \equiv \text{Momento canónicamente generalizado}, \quad (\text{E.3})$$

siendo \mathfrak{L} la densidad Lagrangiana. Entonces, de la definición del Lagrangiano en tiempo conformal, se obtiene

$$\hat{\pi}_{BD} = \frac{\partial(\frac{1}{2}\hat{\chi}^2 - \frac{1}{2}\gamma^2(\partial_i\hat{\chi})^2)}{\partial(\hat{\chi})} = \frac{\partial\hat{\chi}_{BD}}{\partial\eta}, \quad (\text{E.4})$$

y reemplazando la relación E.1,

$$\hat{\pi}_{BD}(\vec{x}, \eta) = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta \left[\hat{a}_{\beta lm} Q_{\beta}^{lm}(\vec{x}) \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (-i\beta) + \hat{a}_{\beta lm}^{\dagger} Q_{\beta}^{*lm}(\vec{x}) \frac{e^{i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (i\beta) \right]. \quad (\text{E.5})$$

Extendiendo el principio de incertidumbre de Heisenberg a un campo cuántico en un espacio de Friedman-Robertson-Walker sin expansión, se puede asumir una condición sobre el campo $\hat{\chi}$ similar a la que se aplica sobre partículas,

$$[\hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}_{BD}(\vec{x}', \eta)] = i\gamma^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{con} \quad \int dV \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = 1, \quad (\text{E.6})$$

siendo $dV = \frac{d^3\vec{x}}{\gamma^3}$ el elemento de volumen en el espacio de FRW. Usando las expresiones (E.1) y (E.5) se expandirá este conmutador para encontrar las respectivas relaciones de conmutación de los operadores creación y destrucción,

$$\begin{aligned} & [\hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}_{BD}(\vec{x}', \eta)] = i\gamma^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \beta^2 \beta'^2 d\beta d\beta' \left\{ Q_{\beta}^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}') \frac{e^{-i(\beta+\beta')\eta}}{2\sqrt{\beta\beta'}} (-i\beta') [\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l'm'}] \right. \\ & \quad + Q_{\beta}^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}') \frac{e^{-i(\beta-\beta')\eta}}{2\sqrt{\beta\beta'}} (i\beta') [\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l'm'}^{\dagger}] \\ & \quad + Q_{\beta}^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}') \frac{e^{i(\beta-\beta')\eta}}{2\sqrt{\beta\beta'}} (-i\beta') [\hat{a}_{\beta lm}^{\dagger}, \hat{a}_{\beta' l'm'}] \\ & \quad \left. + Q_{\beta}^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}') \frac{e^{i(\beta+\beta')\eta}}{2\sqrt{\beta\beta'}} (i\beta') [\hat{a}_{\beta lm}^{\dagger}, \hat{a}_{\beta' l'm'}^{\dagger}] \right\}. \quad (\text{E.7}) \end{aligned}$$

La expresión de arriba sólo se cumple si los operadores creación y destrucción satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l' m'}^\dagger] = \frac{1}{\beta^2} \delta(\beta - \beta') \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (\text{E.8})$$

$$[\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l' m'}] = [\hat{a}_{\beta lm}^\dagger, \hat{a}_{\beta' l' m'}^\dagger] = 0 , \quad (\text{E.9})$$

ya que de esta manera, utilizando la propiedad de completitud de las funciones armónicas (C.96),

$$[\hat{\chi}_{BD}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}_{BD}(\vec{x}, \eta)] = i \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta \{Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_\beta^{*lm}(\vec{x}')\} = i \gamma^3 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (\text{E.10})$$

de tal manera que el conmutador satisface la condición que se había impuesto.

E.1. Construcción del espacio de Fock

El operador número $\hat{N}_{\beta lm}$ se define como:

$$\hat{N}_{\beta lm} = \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} . \quad (\text{E.11})$$

Este es un operador hermítico que posee un conjunto completo de autoestados ortonormales con autovalores reales definidos mediante las relaciones:

$$\hat{N}_{\beta lm} |n_{\beta lm}\rangle = n_{\beta lm} |n_{\beta lm}\rangle , \quad (\text{E.12})$$

$$\langle n'_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = \delta_{nn'} , \quad (\text{E.13})$$

$$\sum_m |n_{\beta lm}\rangle \langle n_{\beta lm}| = 1 . \quad (\text{E.14})$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y las propiedades de conmutación de los operadores creación y destrucción se hallarán sus autestados y autovalores.

$$\begin{aligned} i) \hat{N}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger |n_{\beta lm}\rangle &= \{[\hat{N}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta lm}^\dagger] + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{N}_{\beta lm}\} |n_{\beta lm}\rangle \\ &= \{\hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger - \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{N}_{\beta lm}\} |n_{\beta lm}\rangle \\ &= \{\hat{a}_{\beta lm}^\dagger [\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta lm}^\dagger] + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{N}_{\beta lm}\} |n_{\beta lm}\rangle \\ &= \{\hat{a}_{\beta lm}^\dagger \frac{1}{\beta^2} + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{N}_{\beta lm}\} |n_{\beta lm}\rangle = \left(n_{\beta lm} + \frac{1}{\beta^2}\right) \hat{a}_{\beta lm}^\dagger |n_{\beta lm}\rangle . \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Así el estado,

$$\hat{a}_{\beta lm}^\dagger |n_{\beta lm}\rangle = c_+ |n_{\beta lm} + \frac{1}{\beta^2}\rangle , \quad (\text{E.16})$$

tambi3n es un autoestado de $\hat{N}_{\beta lm}$.

La constante c_+ se calcula mediante,

$$\begin{aligned} |c_+|^2 &= \langle n_{\beta lm} | \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger | n_{\beta lm} \rangle = \langle n_{\beta lm} | \frac{1}{\beta^2} + \underbrace{\hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm}}_{\hat{N}_{\beta lm}} | n_{\beta lm} \rangle \\ &= \frac{1}{\beta^2} + n_{\beta lm} \Rightarrow C_+ = \sqrt{n_{\beta lm} + 1/\beta^2} , \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

y por lo tanto los autoestados y autovalores del operador creaci3n est3n definidos por:

$$\hat{a}_{\beta lm}^\dagger | n_{\beta lm} \rangle = \sqrt{n_{\beta lm} + 1/\beta^2} | n_{\beta lm} + 1/\beta^2 \rangle . \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} ii) \hat{N}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle &= \{ [\hat{N}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta lm}] + \hat{a}_{\beta lm} \hat{N}_{\beta lm} \} | n_{\beta lm} \rangle \\ &= \{ \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm} - \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} + \hat{a}_{\beta lm} \hat{N}_{\beta lm} \} | n_{\beta lm} \rangle \\ &= \{ [\hat{a}_{\beta lm}^\dagger, \hat{a}_{\beta lm}] \hat{a}_{\beta lm} + \hat{a}_{\beta lm} \hat{N}_{\beta lm} \} | n_{\beta lm} \rangle \\ &= \left\{ -\frac{1}{\beta^2} \hat{a}_{\beta lm} + \hat{a}_{\beta lm} \hat{N}_{\beta lm} \right\} | n_{\beta lm} \rangle = \left(n_{\beta lm} - \frac{1}{\beta^2} \right) \hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle . \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

As3 el estado,

$$\hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = c_- | n_{\beta lm} - \frac{1}{\beta^2} \rangle \quad (\text{E.20})$$

tambi3n es un autoestado de $\hat{N}_{\beta lm}$.

La constante c_- se calcula mediante:

$$\begin{aligned} |c_-|^2 &= \langle n_{\beta lm} | \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = \langle n_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = n_{\beta lm} \\ \Rightarrow c_- &= \sqrt{n_{\beta lm}} . \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Entonces, el operador destrucci3n tiene autoestados y autovalores definidos por:

$$\hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = \sqrt{n_{\beta lm}} | n_{\beta lm} - 1/\beta^2 \rangle . \quad (\text{E.22})$$

Finalmente, de la definici3n usual del estado base, estado de vac3o o estado de 0 part3culas $|0\rangle$,

$$\hat{a}_{\beta lm} |0\rangle = 0 , \quad (\text{E.23})$$

se observa que el autovalor base es cero ya que $n_{\beta lm} \geq 0$ necesariamente. Luego, los dem3s autovalores construidos a partir del estado base ser3n de la forma,

$$n_{\beta lm} = \frac{n}{\beta^2} , \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+ . \quad (\text{E.24})$$

E.2. Construcción del operador Hamiltoniano

El operador Hamiltoniano \hat{H} asociado al campo σ durante inflación según su definición es:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{x}}{\gamma^3} T_{00} = \int \frac{d^3\vec{x}}{\gamma^3} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \eta} \right)^2 + \gamma^2 (D_i \hat{\chi})^2 \right]. \quad (\text{E.25})$$

Tratándose de inflación, los modos de subhorizonte o modos de Bunch-Davies definidos por $\beta \gg aH$, corresponden a escalas muy pequeñas del Universo donde el espacio localmente es prácticamente plano debido a que la contribución de la curvatura en $\beta = \sqrt{k^2 + K}$ es despreciable. Por esta razón para calcular el operador Hamiltoniano para los modos de Bunch-Davies se usará la aproximación de Universo plano $K \rightarrow 0$, donde se sabe que

$$Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \rightarrow j_l(\beta r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad \beta \rightarrow k, \quad \gamma \rightarrow 1. \quad (\text{E.26})$$

Entonces,

$$\hat{H}_{BD} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{\chi}_{BD}}{\partial \eta} \right)^2 + (D_i \hat{\chi}_{BD})^2 \right]. \quad (\text{E.27})$$

Ahora, se usará la expansión (E.1) para hallar cada uno de los términos de este Hamiltoniano. En el límite del Universo plano la ecuación de Helmholtz generalizada se puede escribir como:

$$D_i Q_\beta^{lm}(\vec{x}) = i\beta Q_\beta^{lm}, \quad \beta \rightarrow k. \quad (\text{E.28})$$

Así,

$$\begin{aligned} (D_i \hat{\chi}_{BD})^2 = & \left[\sum_{lm} \int \beta^2 \left[\hat{a}_{\beta lm} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (i\beta) + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) \frac{e^{i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (-i\beta) \right] \right]^2 = \\ & \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \beta^2 \beta'^2 \left[\frac{-\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) e^{-i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'} \right. \\ & + \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) e^{-i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger + \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) e^{i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'} \\ & \left. - \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) e^{i(\beta+\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \right]. \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

Integrando esta expresión en el espacio y despreciando los operadores $\hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}$ y $\hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger$ dado que,

$$\langle n_{\beta lm} | \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm} | n_{\beta lm} \rangle = \langle n_{\beta lm} | \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm}^\dagger | n_{\beta lm} \rangle = 0, \quad (\text{E.30})$$

se obtiene,

$$\int d^3\vec{x} \frac{1}{2} (D_i \hat{\chi}_{BD})^2 = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \frac{\beta^2 \beta'^2 \sqrt{\beta\beta'}}{2} \times \left[e^{-i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \int d^3\vec{x} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) + e^{i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'} \int d^3\vec{x} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) \right]. \quad (\text{E.31})$$

Con esta expresión, y usando la propiedad de ortogonalidad de las funciones hipersféricas de Bessel en el límite del Universo plano, se obtiene

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} (D_i \hat{\chi}_{BD})^2 &= \sum_{lm} \int \frac{\beta^5}{4\beta^2} [\hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm}] \\ &= \sum_{lm} \int \frac{\beta^3}{2} \left[\hat{N}_{\beta lm} + \frac{1}{2\beta^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \chi_{BD}}{\partial \eta} \right)^2 &= \left[\sum_{lm} \int \beta^2 \left[\hat{a}_{\beta lm} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) \frac{e^{-i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (-i\beta) + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) \frac{e^{i\beta\eta}}{\sqrt{2\beta}} (i\beta) \right] \right]^2 = \\ &\quad \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \beta^2 \beta'^2 \left[\frac{-\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) e^{-i(\beta+\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'} \right. \\ &\quad + \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) e^{-i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger + \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) e^{i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'} \\ &\quad \left. - \frac{\beta\beta'}{2\sqrt{\beta\beta'}} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) e^{i(\beta+\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Integrando esta expresión en el espacio y despreciando los operadores $\hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}$ y $\hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger$ se obtiene,

$$\int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\chi}_{BD}}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{lm} \sum_{l'm'} \int \int \frac{\beta^2 \beta'^2 \sqrt{\beta\beta'}}{2} \times \left[e^{-i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta' l'm'}^\dagger \int d^3\vec{x} Q_\beta^{lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{*l'm'}(\vec{x}) + e^{i(\beta-\beta')\eta} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta' l'm'} \int d^3\vec{x} Q_\beta^{*lm}(\vec{x}) Q_{\beta'}^{l'm'}(\vec{x}) \right]. \quad (\text{E.34})$$

la cual por la propiedad de ortogonalidad de las funciones hipersféricas de Bessel en el límite del Universo plano, conduce a:

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\chi}_{BD}}{\partial \eta} \right)^2 &= \sum_{lm} \int \frac{\beta^5}{4\beta^2} [\hat{a}_{\beta lm} \hat{a}_{\beta lm}^\dagger + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \hat{a}_{\beta lm}] \\ &= \sum_{lm} \int \frac{\beta^3}{2} \left[\hat{N}_{\beta lm} + \frac{1}{2\beta^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

Finalmente, combinando los resultados (E.32) y (E.35) en la expresión (E.27), el operador hamiltoniano del sistema queda,

$$\hat{H} = \sum_{lm} \int \beta \left[\beta^2 \hat{N}_{\beta lm} + \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{E.36})$$

Un nuevo operador número, definido como $\tilde{N} = \beta^2 \hat{N}_{\beta lm}$ poseerá autovalores enteros ya que,

$$\tilde{N} |n_{\beta lm} \rangle = \beta^2 \hat{N} |n_{\beta lm} \rangle = \beta^2 \left(\frac{n}{\beta^2} \right) |n_{\beta lm} \rangle = n |n_{\beta lm} \rangle, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (\text{E.37})$$

Así, el valor medio $\langle n_{\beta lm} | \hat{H} | n_{\beta lm} \rangle$ es interpretado como la energía total promedio de un sistema de n partículas no interactuantes en un estado $|n_{\beta lm}\rangle$, cada una de las partículas con un momentum β asociado a un modo de oscilación determinado del campo σ , lo cual es compatible con las observaciones del efecto foto-eléctrico y el efecto Compton [18]. Se denominará β como el *momentum radial canónico*, el cuál de su definición, toma valores reales o continuos positivos cuando el universo es abierto, o valores enteros o discretos positivos, cuando el universo es cerrado.

Bibliografía

- [1] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000).
- [2] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [3] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press (2003).
- [4] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley (1990).
- [5] C. L. Bennett *et. al.*, *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
- [6] O. Lahav *et. al.*, *The 2dF Galaxy Redshift Survey: the amplitude of fluctuations in the 2dFGRS and the CMB, and implications for galaxy biasing*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **333**, 961 (2002).
- [7] W. J. Percival *et. al.*, *Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the Sloan Digital Sky Survey and 2dF Galaxy Redshift Survey*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **381**, 1053 (2007).
- [8] E. Komatsu *et. al.*, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, arXiv:astro-ph/0803.0547 v1.
- [9] A. H. Guth, *The inflationary Universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [10] A. D. Linde, *A new inflationary Universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [11] J. Stewart, *Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models*, *Class. Quantum Grav* **7**, 1169 (1990).
- [12] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).

- [13] R. D' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992)
- [14] J. M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [15] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, JCAP **0505**, 004 (2005).
- [16] G. I. Rigopoulos and E. P. S. Shellard, *The separate universe approach and the evolution of nonlinear superhorizon cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **68**, 123518 (2003).
- [17] D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, and A. R. Liddle, *New approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*, Phys. Rev. D **62**, 043527 (2000).
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1975).
- [19] D. H. Lyth and D. Wands, *Generating the curvature perturbation without an inflaton*, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002).
- [20] T. Moroi and T. Takahashi, *Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background*, Phys. Lett. B **522**, (2001) 215; Erratum ibid B **539**, 303 (2002).
- [21] K. Enqvist and M. S. Sloth, *Adiabatic CMB perturbations in pre-Big-Bang string cosmology*, Nucl. Phys. B **626**, 395 (2002).
- [22] Y. Rodriguez, *The origin of the large-Scale structure in the Universe: theoretical and statistical aspects*, arXiv: astro-ph/0507701 v3.
- [23] E. Massó, S. Mohanty, A. Nautiyal, and G. Zsembinszki, *Imprint of spatial curvature on inflation power spectrum*, arXiv:astro-ph/0609349v4.
- [24] L. F. Abbott and R. K. Schaefer, *A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave anisotropy*, Astrophys. J. **308**, 546 (1986).
- [25] E.R. Harrison, *Normal Modes of Vibrations of the Universe*, Rev. Mod. Phys. Vol.**39**, 862 (1967)
- [26] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [27] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in De Sitter Space: Renormalization by Point-Splitting* Proc. R. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).

- [28] N. D. Birrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1982).
- [29] NASA's WMAP homepage: <http://wmap.gsfc.nasa.gov/>.
- [30] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, (2000)
- [31] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications (1965)
- [32] E. Lifshitz and I. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv. Phys **12**, 185 (1963)
- [33] G. Efstathiou, *Is the Low CMB Quadrupole a Signature of Spatial Curvature?*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **343**, L95 (2003).
- [34] G.A. Mariño and Y. Rodríguez, *Efecto de la curvatura espacial del Universo en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo*, sometido a la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias exactas, físicas y naturales (2008)
- [35] G. A. Mariño and Y. Rodriguez, to be submitted.