SOLUCIONES NO LINEALES DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE CAUCHY.

CARLOS FEDERICO CAMARGO ARIAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

SOLUCIONES NO LINEALES DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE CAUCHY.

CARLOS FEDERICO CAMARGO ARIAS

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

CARLOS ENRIQUE

UZCÁTEGUI AYLWIN

Dr. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

A mi madre Luz Nelly Arias y
mi padre Israel Camargo

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos

⋆ A Dios. Y a mis padres, **Luz Nelly Arias** e **Israel Camargo** que gracias a sus esfuerzos y sacrificio me han permitido ser un profesional.

⋆ A el profesor **Dr. Carlos Uzcátegui** que, como director de esta tesis, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.

⋆ Al grupo, **Begining Burbaky** conformado por:

- Jerson Perez.
- Andres Quintero.
- Edwar Ramirez.
- Gerardo Corredor.
- Javier Murgas.
- Luis David Ortiz.

Que durante los últimos cuatro años me brindaron su amistad, su apoyo moral y fuerzas en momentos difíciles. Gracias por todas las alegrías que pasamos. Mis mejores recuerdos de la universidad son gracias a ustedes. En especial quiero agradecer a **Jerson Perez** que tuvo una colaboración fundamental en la realización de este trabajo y **Andres Quintero** que fue un gran respaldo en mis cursos de pregrado.

⋆ A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemático.

Contenido

RESUMEN

TÍTULO: SOLUCIONES NO LINEALES DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE CAUCHY. [1]

AUTOR: CARLOS FEDERICO CAMARGO ARIAS [2]

PALABRAS CLAVES: ECUACIÓN FUNCIONAL DE CAUCHY, PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES NO LINEALES, BASE DE HAMEL.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo consiste en probar la existencia de las soluciones no lineales de la ecuación funcional de Cauchy para ello utilizaremos bases de Hamel. Las bases de Hamel juegan un papel muy importante en este trabajo ya que estas nos proporcionarán las soluciones no lineales de la ecuación funcional de Cauchy. Una vez probada su existencia estudiaremos varias propiedades que verifican las soluciones no lineales.

Para ello en el primer capítulo introduciremos los conceptos básicos que se necesitan para entender este trabajo los cuales hemos clasificado por campos de estudio los cuales son álgebra lineal, teoría de conjuntos, topología y teoría de categoría de Baire.

En el segundo capítulo proporcionaremos todos los resultados necesarios con respecto a las bases de Hamel, los cuales son la existencia de bases de Hamel y la cardinalidad de éstas. Una vez introducido los resultados acerca de las bases de Hamel, en el tercer capítulo trabajaremos con las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy, viendo propiedades básicas de las soluciones, caracterizaciones de las soluciones lineales y probando la existencia de soluciones no lineales.

Finalmente, en el cuarto capítulo probaremos varias de las propiedades que satisfacen las soluciones no lineales y además veremos que existen otros trabajos en los cuales se sigue estudiando las propiedades de las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy.

[1] Trabajo de grado

[2] Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Dr. en Matemáticas Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

ABSTRACT

TITLE: NON-LINEAR SOLUTIONS OF THE CAUCHY FUNCTIONAL EQUATION. [3]

AUTOR: CARLOS FEDERICO CAMARGO ARIAS. [4]

KEY WORDS: CAUCHY'S FUNCTIONAL EQUATION, PROPERTIES OF NON LINEAR SOLUTIONS, HAMEL BASE.

DESCRIPTION:

This work consists in proving the existence of non-linear solutions of the Cauchy functional equation, for this we will use Hamel bases. Hamel's bases play a very important role in this work since they will provide us with the non-linear solutions of the Cauchy functional equation. Once proven its existence we will study several properties that verify non-linear solutions.

For this, in the first chapter we will introduce the basic concepts that are needed to understand this work, which we have classified by fields of study which are linear algebra, set theory, topology and Baire category theory.

In the second chapter we will provide all the necessary results with respect to the Hamel bases, which are the existence of Hamel bases and its cardinality. Once introduced the results about the bases of hamel, in the third chapter we will work with the solutions of the functional equation of Cauchy, seeing basic properties of the solutions, characteristics of the linear solutions and proving the existence of non-linear solutions.

Finally, in the fourth chapter we will try several of the properties that satisfy the nonlinear solutions and we will see that there are other works in which the properties of the solutions of the Cauchy functional equation are still studied.

[3]Undergraduate thesis.

[4]School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Dr. in Mathematics Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

INTRODUCCIÓN

Agustin Cauchy (1789 - 1857) matemático francés, estudió una ecuación funcional la cual actualmente lleva su nombre. La ecuación funcional de Cauchy es considerada entre las más simples de representar, sin embargo, su solución sobre los números reales es extremadamente complicada. La ecuación es:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Las funciones que cumplen esta propiedad se les llaman funciones aditivas.

Note que las funciones de la forma $f(x) = cx$ para algún $c \in \mathbb{R}$ son aditivas. A estas funciones las llamaremos soluciones lineales y surge la pregunta natural ¿existen soluciones no lineales? La respuesta es que si existen, pero estas soluciones no lineales son un poco extrañas ya que su existencia es consecuencia del lema de Zorn y por lo tanto no tenemos una forma explícita de representarlas.

El problema de encontrar soluciones no lineales se reduce a encontrar bases para espacios vectoriales. A estas bases se les conoce actualmente como bases de Hamel. Este problema motivó la búsqueda de bases para espacios vectoriales. Georg Hamel (1877 - 1954) matemático alemán Hamel demuestra en 1905 que hay soluciones no lineales.

En este trabajo estudiaremos soluciones no lineales de la ecuación funcional de Cauchy las cuales llamaremos soluciones salvajes (ver [3]). Mostraremos que estas soluciones surgen a partir de la existencia de bases de Hamel y veremos que estas funciones tienen unas propiedades un tanto extrañas. Existen trabajos relativamente recientes sobre las propiedades de las soluciones no lineales, por ejemplo, estas funciones tienen gráficos que son densos en $\mathbb{R}^2$ como aparece en [3] y que toda función real puede ser escrita como la suma de dos funciones de Hamel como aparece en [4], donde una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es de Hamel, si el gráfico de f es una base de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{Q}$.

Capítulo

1

PRELIMINARES

Este capítulo está hecho con el fin de proporcionarle al lector algunos conceptos y resultados básicos de álgebra lineal, teoría de conjuntos, topología y la teoría de la medida. Estos conceptos y resultados son necesarios pues serán útiles en los siguientes capítulos.

A lo largo de este trabajo $\mathbb{K}$ denotará un campo arbitrario.

1.1 ÁLGEBRA LINEAL

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $D \subseteq V$. Se dice que D es un conjunto **linealmente independiente (l.i.)**, si dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

Entonces necesariamente $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

*Se dice que D es **linealmente dependiente** si existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ y escalares no todos iguales a cero $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

Definición 1.2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S \subseteq V$. El **espacio generado** por S está definido como la intersección W de todos los subespacios de V que* *contienen a S. Cuando S es un conjunto finito de vectores $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, simplemente llamaremos a W el espacio generado por los vectores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. El espacio generado por $S \subseteq V$ se denota por $span(S)$.*

Teorema 1.3. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S \subseteq V$ no vacío. El espacio generado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en S.*

Demostración. Sea $W = span(S)$ y L el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en S.

Claramente $L \subseteq W$, ya que $S \subseteq W$ y W es un subespacio de V.

Veamos que $W \subseteq L$. Note que $S \subseteq L$. Ahora, si tomamos x, y en L existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que x, y son de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

$$y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Donde $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^m \subseteq S$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{K}$.

Para cada escalar $c \in \mathbb{K}$, tenemos

$$cx + y = \sum_{i=1}^{n} (c\alpha_i) x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Por lo tanto $cx + y$ pertenece a L. Luego L es un subespacio de V. Como W es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S, entonces $W \subseteq L$. De esta manera hemos demostrado que $W = L$.

□

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que V es* ***finitamente generado*** *si existe un conjunto finito de vectores S, tal que $span(S) = V$. Se dice que S es un sistema de generadores de V.*

Definición 1.5. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B \subseteq V$. Se dice que B es una* ***base*** *para V, si B es un sistema de generadores linealmente independiente.*

El siguiente resultado lo enunciaremos sin demostración y lo utilizaremos para probar un teorema que nos ayudará a demostrar que todo par de bases tienen el mismo número de elementos en un espacio vectorial finitamente generado. La prueba de este resultado la podemos revisar en [Teorema 6, cap 1, [2]].

Teorema 1.6. *Si A es una matriz de $m \times n$ y $n > m$, entonces el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.*

Teorema 1.7. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente generado por el conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_m \in V$. Entonces, cualquier conjunto linealmente independiente de vectores en V es finito y no contiene más de m elementos.*

Demostración. Para probar el teorema es suficiente mostrar que todo subconjunto de V que contenga más de m vectores es linealmente dependiente. Sea S tal conjunto. Por lo tanto existen vectores distintos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ donde $n > m$. Como $x_1, x_2, \ldots, x_m$ generan V, existen escalares $\gamma_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} x_i, \text{ para todo } j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n.$$

Dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ escalares en $\mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} x_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\gamma_{ij}\alpha_j) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\alpha_j \right) x_i.\end{aligned}$$

La sumatoria $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\alpha_j$ con $1 \leq i \leq m$, se puede expresar como el producto de una matriz A de tamaño $m \times n$ por un vector v de $n \times 1$, por lo tanto al considerar el sistema homogéneo $Av = 0$, como $n > m$ podemos usar el Teorema 1.6. Esto implica que existe una solución no trivial, es decir, existen escalares no todos cero $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ en $\mathbb{K}$, tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\beta_j = 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

De esta manera hemos demostrado que la combinación lineal

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = 0,$$

donde no todos los escalares β_j son ceros, es decir, S es un conjunto linealmente dependiente. Por lo tanto, los únicos conjuntos linealmente independiente no contienen más de m elementos.

$\square$

1.2 TEORÍA DE CONJUNTOS

Lema 1.8. *Sean A, B, C, D conjuntos, entonces*

$$(A \cap B) \triangle (C \cap D) \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D).$$

Demostración. Sea $x \in (A \cap B) \triangle (C \cap D)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in A \cap B$ y $x \notin C \cap D$, entonces $x \notin C$ o $x \notin D$.

Si $x \notin C$, implica que $x \in A \triangle C$.

Si $x \notin D$, implica que $x \in B \triangle D$.

Por lo tanto $x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$. Análogamente si $x \in C \cap D$ y $x \notin A \cap B$, entonces $x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$.

$\square$

Lema 1.9. *Sean X e Y conjuntos, $f : X \to Y$ inyectiva y $A, B \subseteq X$, entonces*

$$f(A \triangle B) = f(A) \triangle f(B).$$

Demostración. $\subseteq)$

Sea $y \in f(A \triangle B)$, por lo tanto existe $x \in A \triangle B$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A \triangle B$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in A$ y $x \notin B$, esto implica que $y \in f(A)$ y note que $y \notin f(B)$, ya que si $y \in f(B)$ existe $z \in B$ tal que $f(z) = y$, luego $f(x) = f(z)$ y como f es inyectiva entonces $x = z$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $y \in f(A) \triangle f(B)$. Análogamente si $x \in B$ y $x \notin A$ obtenemos que $y \in f(A) \triangle f(B)$.

$\supseteq)$

Sea $y \in f(A) \triangle f(B)$, por lo tanto, sin pérdida de generalidad supongamos que $y \in f(A)$ e $y \notin f(B)$ entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $y \notin f(B)$

entonces $x \notin B$, de esta manera obtenemos que $x \in A \triangle B$, luego $f(x) = y \in f(A \triangle B)$. Análogamente si $y \in f(B)$ e $y \notin f(A)$ obtenemos que $y \in f(A) \triangle f(B)$.

$\square$

A continuación, veremos la definición de equipotencia, minuspotencia y numerabilidad que son importantes para comprender algunos de los resultados que mostraremos más adelante.

Definición 1.10. *Un conjunto A es **equipotente** con un conjunto B, si existe una función $f : A \to B$ biyectiva. Si A y B son equipotentes lo denotaremos $|A| = |B|$.*

Definición 1.11. *Un conjunto A es **minuspotente** con un conjunto B, si existe una función $f : A \to B$ inyectiva. Si A y B son minuspotentes lo denotaremos $|A| \leq |B|$.*

La relación ser minuspotente claramente es reflexiva y transitiva, pero la pregunta más interesante es ¿será anti simétrica? La respuesta es que sí y este resultado es uno de los teoremas más clásicos e importantes de la teoría de conjuntos, el teorema de Cantor - Bernstein - Schröder, el cual enunciaremos a continuación.

Teorema 1.12. *(Cantor - Bernstein - Schröder)*

Sean A y B conjuntos, si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.

Definición 1.13. *Se dice que un conjunto A es **numerable** si es equipotente a $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales.*

El lema de Zorn es un principio matemático muy importante ya que éste nos permite obtener resultados interesantes que sin la validez del mismo no serían posibles.

Antes de enunciar el lema de Zorn necesitamos unas definiciones previas como la de cadena, cota superior y elemento maximal.

Definición 1.14. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathbb{E}$. Se dice que A es una **cadena** de $\mathbb{E}$, si A es un conjunto totalmente ordenado (respecto al orden heredado).*

Definición 1.15. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathbb{E}$. Se dice que $a \in \mathbb{E}$ es una **cota superior** de A, si $x \leqslant a$ para todo $x \in A$.*

Definición 1.16. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathbb{E}$. Se dice que A está **acotado superiormente** si A tiene al menos una cota superior.*

Definición 1.17. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathbb{E}$. El **supremo** de A, si existe, es la menor de las cotas superiores de A. Al supremo de A se denota por $\sup(A)$.*

Definición 1.18. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado, se dice que $a \in \mathbb{E}$ es un **elemento maximal** de $\mathbb{E}$, si la condición $a \leqslant x$ para algún $x \in \mathbb{E}$, implica que, $a = x$.*

Definición 1.19. *Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathbb{E}$, se dice que $m \in E$ es el **mínimo** de A, si $m \leq a$ para todo $a \in A$ y $m \in A$. Al mínimo de A se denota por $\text{mín}(A)$.*

Lema de Zorn

Sea $(\mathbb{E}; \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena en $\mathbb{E}$ tiene una cota superior, entonces $\mathbb{E}$ tiene un elemento maximal.

Cabe resaltar que el lema de Zorn juega un papel bastante significativo en este trabajo, ya que a partir de éste encontraremos bases para cualquier espacio vectorial.

A continuación, enunciaremos el axioma de elección el cual es otro principio matemático que utilizaremos en este trabajo. Cabe resaltar que el axioma de elección y el lema de Zorn son equivalentes. Estos principios son un poco polémicos entre la comunidad matemática.

Axioma de elección

Dada una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ tales que I no es vacío y $A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

Ahora enunciaremos, en mi opinión, dos de los resultados más importantes y clásicos de las matemáticas, los cuales son el principio del buen orden y la propiedad Arquimediana. Dichos resultados nos ayudarán a probar un teorema que utilizaremos en repetidas ocasiones a lo largo de este trabajo, el cual es la densidad de los números racionales en el conjunto de los números reales.

Principio del buen orden para $\mathbb{N}$

Cualquier conjunto no vacío A de enteros positivos contiene un elemento mínimo.

Propiedad Arquimediana

Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

A continuación, introduciremos una notación muy útil para probar los siguientes resultados.

Sea A un conjunto infinito. Definimos por $A^{[<\omega]}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos en A, es decir, $A^{[<\omega]} = \{B \subseteq A : B \text{ finito}\}$. También definimos por $A^{[n]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, al conjunto de todos los subconjuntos finitos en A de n elementos, es decir, $A^{[n]} = \{B \subseteq A : |B| = n\}$.

Teorema 1.20. *Sea I un conjunto no vacío, λ un cardinal y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $|A_i| \leq \lambda$ para todo $i \in I$. Entonces*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |I| \cdot \sup_{i\in I} |A_i|.$$

Demostración. Sea U un conjunto tal que $|U| = \sup\limits_{i\in I} |A_i|$. Para cada $i \in I$, sea $\phi_i : A_i \to U$ una función inyectiva. Definimos

$$\phi : \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i \to I \times U$$

$$(i, a) \longmapsto (i, \phi_i(a)).$$

Observe que ϕ está bien definida, pues esta familia $\{\{i\} \times A_i\}_{i\in I}$ está conformada por conjuntos disjuntos dos a dos. Veamos que ϕ es inyectiva. En efecto, si $(i, \phi_i(a)) = (j, \phi_j(b))$ entonces $i = j$ y $\phi_i(a) = \phi_i(b)$, luego $a = b$ ya que ϕ_i es inyectiva. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

Ahora veamos que

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i\right|.$$

Para ello vamos a definir la siguiente función

$$\psi : \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$(i, a) \longmapsto a$$

Es fácil verificar que ψ es sobreyectiva, por lo tanto $\psi^{-1}(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in$

$\bigcup_{i\in I} A_i$. Además note que

$$\bigcup_{a\in\bigcup A_i} \psi^{-1}(a) = \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i$$

Usando el axioma de elección existe

$$\varphi : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i$$

tal que $\varphi(a) \in \psi^{-1}(a)$ para todo $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Veamos que φ es inyectiva.

Sean $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Por lo tanto $\varphi(a) \in \psi^{-1}(a)$ y $\varphi(b) \in \psi^{-1}(b)$, esto implica que $\psi(\varphi(a)) = a$ y $\psi(\varphi(b)) = b$, como por hipótesis $\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces $a = b$. De esta manera podemos concluir que

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i\right| \leq |I \times U| = |I| \cdot \sup_{i\in I} |A_i|.$$

$\square$

Lema 1.21. *Sea A un conjunto infinito, entonces $|A^{[n]}| = |A|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Procedamos por inducción.

Para $n = 1$, es claro que $|A^{[1]}| = |A|$.

Ahora, supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $|A^{[k]}| = |A|$. Veamos que esto también se cumple para $k + 1$.

Sea $C \in A^{[k]}$ y $A_C = \{C \cup \{a\} : a \in A \setminus C\}$ definimos

$$\phi_C : A_C \to A \setminus C$$

$$C \cup \{a\} \longmapsto a.$$

Claramente ϕ_C es biyectiva, entonces $|A_C| = |A|$ para todo $C \in A^{[k]}$. Además, note que

$$\bigcup_{C\in A^{[k]}} A_C = A^{[k+1]}.$$

Luego por el Teorema 1.20 se tiene que

$$\left|\bigcup_{C\in A^{[k]}} A_C\right| \leq |A|\cdot \sup_{C\in A^{[k]}} |A_C| = |A|\cdot|A| = |A|.$$

De esta manera acabamos de demostrar que $|A^{[k+1]}| \leq |A|$.

Ahora veamos que $|A| \leq |A^{[k+1]}|$. En efecto, fijemos $D_0 = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \in A^{[k]}$ y también $D_n \in A^{[k+1]}$ para $n = 1, 2 \ldots, k$, tales que $D_n \cap D_0 = \emptyset$ y $D_n \neq D_i$ para todo $i < n$.

Sea $\phi : A \to A^{[k+1]}$ tal que

$$\phi(d) = \begin{cases} D_0 \cup \{d\}, & si \quad d \notin D_0 \\ D_1, & si \quad d = d_1 \\ \vdots & \\ D_k, & si \quad d = d_k \end{cases}$$

Veamos que ϕ es inyectiva. Sea $a, b \in A$ tal que $\phi(a) = \phi(b)$.

Si $a, b \notin D_0$, claramente $a = b$.

Si $a \in D_0$ y $b \notin D_0$, entonces $D_i \cap D_0 \neq \emptyset$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, absurdo.

Si $a, b \in D_0$, entonces existe $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tales que $a = d_i$, $b = d_j$ y $D_i = D_j$, esto implica que $i = j$, por tanto $a = b$.

Acabamos de probar que $|A| \leq |A^{[k+1]}|$. De esta manera por el Teorema de Cantor-Bernstein (ver Teorema 1.12) obtenemos que $|A^{[k+1]}| = |A|$. Por lo tanto $|A^{[n]}| = |A|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 1.22. *Si A es infinito, entonces* $|A^{[<\omega]}| = |A|$

Demostración. Consideremos la familia de conjuntos $\{A^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Note que

$$A^{[<\omega]} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{[n]}$$

Por el Lema 1.21 $|A^{[n]}| = |A|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 1.20 se tiene que

$$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{[n]}\right| \leq |\mathbb{N}| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |A^{[n]}| = \aleph_0 \cdot |A| = |A|.$$

Por lo tanto $|A^{[<\omega]}| \leq |A|$. Ahora definimos la siguiente función

$$\phi : A \to A^{[<\omega]}$$

$$a \longmapsto \{a\}$$

Claramente ϕ es inyectiva, y así $|A| \leq |A^{[<\omega]}|$. De esta manera por el Teorema de Cantor-Bernstein (ver Teorema 1.12) se tiene que $|A^{[<\omega]}| = |A|$.

$\square$

1.3 TOPOLOGÍA

Definición 1.23. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es* ***continua en*** *$x_0 \in \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si f es continua para todo $x \in \mathbb{R}$, diremos que f es* ***continua****.*

Teorema 1.24. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *f es continua en x_0.*
2. *Para todo abierto V tal que $f(x_0) \in V$, existe un U abierto tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq V$.*
3. *Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*
4. *Para todo V abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto.*

Definición 1.25. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es un* ***homeomorfismo*** *si se cumple que*

1. *f es una biyeccion.*
2. *f es continua.*
3. *f^{-1} es continua.*

Definición 1.26. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que A es* ***denso*** *en $\mathbb{R}$ si para todo V abierto no vacío se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$.*

Teorema 1.27. *El conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Sea (x, y) un intervalo abierto arbitrario. Veamos que $(x, y) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x > 0$. Como $y - x > 0$, por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0(y-x) > 1$. Luego $n_0 y - 1 > n_0 x$. Consideremos el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : m > n_0 x\}$. Note que $A \neq \emptyset$ ya que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente sigue por el principio del buen orden que existe $m_0 = \min(A)$. Así $m_0 < n_0 y$ ya que de lo contrario, si $n_0 y \leq m_0$ obtenemos que $m_0 - 1 \geq n_0 y - 1$ y $n_0 y - 1 > n_0 x$. Por transitividad deducimos que $m_0 - 1 > n_0 x$, es decir $m_0 - 1 \in A$, lo cual es absurdo. Por lo tanto

$$n_0 x < m_0 < n_0 y \Rightarrow x < \frac{m_0}{n_0} < y.$$

De esta manera hemos probado que existe $q = m_0/n_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$.

$\square$

Corolario 1.28. *Sea* $V = (-a, a)$ *para algún* $a \in \mathbb{R}^+$*, entonces*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V + q.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos el intervalo $(x - a/2, x + a/2)$. Por la densidad de los números racionales (ver Teorema 1.27) existe $q' \in (x - a/2, x + a/2) \cap \mathbb{Q}$. Veamos que $x \in V + q' = (q' - a, q' + a)$. Note que

$$x - a < x - a/2 < q' \Rightarrow x < q' + a.$$

$$x + a > x + a/2 > q' \Rightarrow x > q' - a.$$

De esta manera hemos demostrado que existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in V + q'$, es decir $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V + q$.

$\square$

Lema 1.29. *Sea* U *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}$ *y* $g \in U$*, entonces* $U - g$ *es un abierto que contiene al* 0*.*

Demostración. Sea $g \in U$, entonces $0 \in U - g$. Ahora veamos que $U - g$ es abierto. En efecto, si $a \in U - g$, existe $y \in U$ tal que $a = y - g$. Como U es abierto y $y \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq U$. Veamos que lo anterior implica que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U - g$.

Sea $b \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, entonces $|b-a| < \varepsilon$, como $a = y-g$ de lo anterior podemos concluir que $b+g \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq U$ por lo tanto $b \in U-g$. De esta manera hemos demostrado que $U-g$ es abierto.

$\square$

Lema 1.30. *Sea $W \subseteq \mathbb{R}$ un abierto que contiene al 0, entonces existe $V \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $V - V \subseteq W$.*

Demostración. Como $0 \in W$ y W es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq W$. Sea $V = (-\delta/2, \delta/2)$. Probemos que $V - V \subseteq W$. Tomemos $x \in V - V$ por lo tanto existen $a, b \in V$ tales que $x = a - b$. Como $a, b \in V$ se tiene que $|a| < \delta/2$, $|b| < \delta/2$, esto implica que $|a| + |b| < \delta$. Por lo tanto $|a-b| < |a| + |b| < \delta$. De esta manera $x \in (-\delta, \delta) \subseteq W$.

$\square$

1.4 TEORÍA DE CATEGORÍA DE BAIRE

Definición 1.31. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que A es **nunca denso** si $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.*

Note que el conjunto $[0,1]$ no es un conjunto nunca denso ya que $\left(\overline{[0,1]}\right)^{\circ} \neq \emptyset$. Ahora un ejemplo clásico de un conjunto nunca denso es el conjunto de Cantor

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \wedge x_i \in \{0,2\} \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto es cerrado y no contiene ningún intervalo no degenerado, por lo tanto $(\overline{\mathcal{C}})^{\circ} = \emptyset$.

Definición 1.32. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice A es un **conjunto magro** si puede ser escrito como la unión numerable de conjuntos nunca densos.*

Por el Teorema de categoría de Baire (resultado que probaremos más adelante) se tiene que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es un conjunto magro. Cualquier conjunto numerable es magro como por ejemplo el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

Note que de la definición de conjunto magro es fácil deducir que la unión finita o numerable de conjuntos magros es magro.

Teorema 1.33. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo. Si U es magro entonces $f(U)$ es magro.*

Demostración. Como U es magro, existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos nunca densos tal que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Por lo tanto

$$f(U) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(U_n).$$

Para probar que $f(U)$ es magro basta probar que $f(U_n)$ es nunca denso para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y veamos que $f(U_k)$ es nunca denso. En efecto por propiedades de los homeomorfismos, siendo U_k un conjunto nunca denso, tenemos

$$\left(\overline{f(U_k)}\right)^{\circ} = \left(f(\overline{U_k})\right)^{\circ} = f\left((\overline{U_k})^{\circ}\right) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Por lo tanto $f(U)$ es magro.

□

Definición 1.34. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que A es un* ***conjunto Baire medible*** *si existe U abierto tal que $A \triangle U$ es magro.*

Note que todo conjunto abierto tiene la propiedad de Baire. Por ejemplo, el intervalo $(0,1)$ es Baire medible, ya que el abierto $U = (0,1)$ cumple que $(0,1) \triangle U$ es magro. Para construir ejemplos de conjuntos sin la propiedad de Baire hace falta el axioma de elección.

Definición 1.35. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es una* ***función Baire medible*** *si para todo U abierto se tiene que $f^{-1}(U)$ es Baire medible.*

Por lo mencionado anteriormente toda función continua es Baire medible, ya que la preimagen por una función continua de un conjunto abierto es abierto y los abiertos poseen la propiedad de Baire.

Teorema 1.36. *(Encaje de Cantor)*

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_{k+1} \subseteq U_k$, entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$$

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in U_n$ para todo $n \in N$. Como $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{x_n\}_{n\in N} \subseteq U_1$. Por la compacidad de U_1, existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en U_1, es decir, existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente tal que $x_{\varphi(n)} \to x$ con $x \in U_1$.

Note que $U_n = \overline{U_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Para ello probaremos que $x \in \overline{U_n} = U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario y $\varepsilon > 0$ dado. Demostraremos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap U_{n_0} \neq \emptyset$. Como $x_{\varphi(n)} \to x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{\varphi(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Ahora tomando $n > N$ y $n > n_0$, entonces $x_{\varphi(n)} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Como φ es creciente esto tenemos $n \leq \varphi(n)$, y asi $x_{\varphi(n)} \in U_{\varphi(n)} \subseteq U_n \subseteq U_{n_0}$. De esta manera hemos probado que para todo $n > N$ y $n > n_0$, se tiene que $x_{\varphi(n)} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap U_{n_0}$, es decir, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap U_{n_0} \neq \emptyset$ como queríamos demostrar.

□

Teorema 1.37. *(Categoría de Baire)*

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos densos no vacíos en $\mathbb{R}$, entonces

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Tomemos un abierto no vacío en $\mathbb{R}$ y veamos que este corta a U. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Como U_1 es denso se tiene que $A \cap U_1 \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $x_1 \in A \cap U_1$, y como A y U_1 son abiertos entonces $A \cap U_1$ es abierto. Luego existe $r_1 < 1$ tal que $\overline{V_1} = [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \subseteq A \cap U_1$.

Análogamente como $V_1 = (x_1 - r_1, x_1 + r_1)$ es abierto y U_2 es denso, existe $x_2 \in V_1 \cap A_2$ y siendo $V_1 \cap A_2$ abierto, existe $r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{V_2} \subseteq V_1 \cap U_2 \subseteq A \cap U_1 \cap U_2.$$

De forma inductiva se puede construir una sucesión de cerrados $\{\overline{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $r_n < 1/n$ y $\overline{V_n} \subseteq A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Si consideramos la familia de cerrados $\{\overline{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta cumple las hipótesis del Teorema de encaje de Cantor (ver Teorema 1.36) y por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$, luego $x \in A \cap U$.

□

Capítulo

$\boxed{2}$

BASES DE HAMEL

En este capítulo probaremos la existencia de bases de Hamel y estudiaremos la cardinalidad de dichas bases. Hecho lo anterior podremos definir el concepto de dimensión de un espacio vectorial. Cabe resaltar que las bases de Hamel juegan un papel muy importante en este trabajo ya que estas nos proporcionarán las soluciones no lineales de la ecuación funcional de Cauchy.

2.1 EXISTENCIA

A continuación demostraremos el Teorema de Hamel el cual es uno de los teoremas más importantes de este trabajo.

Teorema 2.1. *(Hamel)*

Todo espacio vectorial tiene una base.

Demostración. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Considere el conjunto $\mathbb{P} = \{S \subseteq V : S \text{ es l.i.}\}$. Ordenamos a $\mathbb{P}$ por $\subseteq$. Veamos que $\mathbb{P}$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn. En efecto, si $\{B_i\}_{i\in I}$ es una cadena de elementos de $\mathbb{P}$, entonces $\bigcup_{i\in I} B_i$ pertenece a $\mathbb{P}$. En efecto, tomemos $\{x_j\}_1^n \subseteq \bigcup_i B_i$ y $\{q_j\}_1^n \subseteq \mathbb{K}$ y supongamos

$$\sum_{j=1}^{n} q_j x_j = 0.$$

Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una cadena, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $\{x_j\}_1^n \subseteq B_{i_0}$. Por la independencia lineal de B_{i_0} tenemos $q_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Claramente $\bigcup_{i\in I} B_i$ es una cota superior para la colección $\{B_i\}_{i\in I}$. Luego $\mathbb{P}$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn. Por lo tanto, existe B un elemento maximal de $\mathbb{P}$. Afirmamos que B es una base. Ya que $B \in \mathbb{P}$ sigue que B es linealmente independiente. Veamos que B genera a V. En efecto, sea $x \in V$. Si x no pertenece a $span(B)$, entonces $B \cup \{x\}$ es linealmente independiente. Esto contradice la maximalidad de B.

□

2.2 DIMENSIÓN Y CARDINALIDAD

En esta sección veremos que todo par de bases en un espacio vectorial son equipotentes. Introduciremos el concepto de dimensión de un espacio vectorial y veremos que $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ tiene una base infinita no numerable.

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.7 es el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente generado. Entonces cualquier par de bases en V tiene la mismo número de elementos (finito).*

Demostración. Sean A, B dos bases para V con $|A| = a$ y $|B| = b$. Como A y B son conjuntos linealmente independientes que generan a V, aplicando el Teorema 1.7 tenemos que $b \leq a$ y $a \leq b$. Por lo tanto $a = b$.

□

Ahora mostraremos el caso general.

Teorema 2.3. *Todas las bases de Hamel de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean A y B dos bases de Hamel para V. Mostraremos que

$$|A| \geq |B|.$$

Si V es finitamente generado ya vimos en el Teorema 2.2 que $|A| = |B|$. Supongamos que V no es finitamente generado, por lo tanto A y B deben ser infinitas. Sean $A = \{a_i : i \in I\}$ y $B = \{b_j : j \in J\}$. Mostraremos que $|I| \geq |J|$.

Supondremos que $|I| < |J|$ y llegaremos a una contradicción. Para cada $j \in J$, existe un conjunto finito $F_j \subseteq I$ tal que $b_j \in span(\{a_i : i \in F_j\})$. Para cada $F \in I^{[<\omega]}$, consideremos

$$J_F = \{j \in J : F_j = F\}.$$

Observemos que

$$J = \bigcup_{F \in I^{[<\omega]}} J_F.$$

Ahora, por el Teorema 1.22 la familia de subconjuntos finitos de I tiene cardinalidad igual a la de I, es decir $|I^{[<\omega]}| = |I|$. Afirmamos que existe $F \in I^{[<\omega]}$ tal que J_F es infinito, De lo contrario tendríamos que para todo $F \in I^{[<\omega]}$, J_F es finito. Por lo tanto aplicando el Teorema 1.20 obtenemos que

$$|J| = \left| \bigcup_{F \in I^{[<\omega]}} J_F \right| \leq |I^{[<\omega]}| \cdot \sup_{i \in I^{[<\omega]}} |J_F| \leq |I| \cdot \aleph_0 = |I|.$$

Como $|I| < |J|$ obtenemos una contradicción.Luego existe $F \in I^{[<\omega]}$ tal que J_F es infinito. Es decir, $b_j \in span(\{a_i : i \in F\})$ para todo $j \in J_F$. Esto contradice el Teorema 1.7 pues los b_j forman un conjunto infinito linealmente independiente y $span(\{a_i : i \in F\})$ es finitamente generado. Por lo tanto $|I| \geq |J|$.

Por simetría del argumento podemos probar que $|I| \leq |J|$. Finalmente por el Teorema Cantor - Bernstein (ver Teorema 1.12) concluimos que $|I| = |J|$ es decir, $|A| = |B|$.

□

Habiendo demostrado que todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial admite una base de Hamel y todas las base de Hamel tienen la misma cardinalidad podemos definir el concepto de dimensión de un espacio vectorial.

Definición 2.4. *Sea V un espacio vectorial y B una base de Hamel para V. La **dimensión** de V se define como el cardinal de B. La dimensión de un espacio vectorial se denota por $dim(V)$.*

Se dice que V es de dimensión finita si V tiene una base finita.

Anteriormente vimos que todo espacio vectorial posee una base, en particular existe una base para $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Como la existencia de esta base es consecuencia del axioma de elección, entonces tal base no está representada de una forma explícita. En futuros capítulos utilizaremos esta base para construir nuestras soluciones no lineales a la ecuación funcional de Cauchy. El uso del axioma de elección es necesario ya que, como veremos más adelante, las soluciones no lineales resultan ser funciones que no son Baire medibles (ver Teorema 3.9). Es decir, esas funciones generan conjuntos sin la propiedad de Baire y dichos conjuntos no se pueden construir sin el axioma de elección.

Ahora mostraremos que la dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es infinita no numerable.

Teorema 2.5. *La dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es infinita no numerable.*

Demostración. Sea B una base para $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Veamos que B es infinita.

Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que B es finita es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Por lo tanto podemos definir la siguiente función

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^n$$

tal que $\phi(x) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, donde $x = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$.

Claramente ϕ es inyectiva, luego $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$ lo cual es absurdo, por lo tanto B es infinita.

Ahora, veamos que B es infinita no numerable. Para ello supongamos lo contrario, es decir, que B es infinita numerable o sea es de la forma $B = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos la siguiente función:

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^{[<\omega]}$$

tal que $\psi(x) = \{q_i\}_{i\in I}$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$ finito y $x = \sum_{i\in I} q_i x_i$.

Claramente ψ es inyectiva pero $\mathbb{Q}^{[<\omega]}$ es numerable por el Teorema 1.22, esto es absurdo.

□

Capítulo

3

ECUACIÓN FUNCIONAL DE CAUCHY

Consideremos la ecuación funcional de Cauchy sobre los números reales

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Todas las funciones que satisfacen la ecuación funcional de Cauchy las llamaremos **funciones aditivas**. Las funciones reales de la forma $f(x) = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ claramente son aditivas y a este tipo de soluciones se le conoce como soluciones lineales. La pregunta natural es ¿será que las únicas funciones aditivas son las lineales? La respuesta es no. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de las funciones aditivas, presentaremos algunas caracterizaciones de las soluciones lineales y veremos cómo surgen las soluciones no lineales a partir de la existencia de bases de Hamel.

A partir de este momento todas las funciones con las que trabajaremos serán funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, a menos que se diga otra cosa.

3.1 PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES ADITIVAS

Los siguientes resultados nos muestran algunas de las propiedades que poseen las funciones aditivas.

Lema 3.1. *Todas la funciones aditivas verifican que $f(0) = 0$.*

Demostración. Note que $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Luego $f(0) = 0$.

$\square$

Lema 3.2. *Todas las funciones aditivas son impares.*

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}$, por la propiedad aditiva y el Lema 3.1 se tiene que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. De lo anterior podemos concluir que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Lema 3.3. *Si f es aditiva, entonces $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Verificaremos esto por inducción matemática. Para $n = 1$ es claro que $f(1x) = 1f(x)$.

Ahora supongamos que el resultado se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir $f(kx) = kf(x)$. Veamos que esto también se cumple para $k + 1$. Usando la propiedad aditiva y la hipótesis de inducción obtenemos que

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x).$$

Por lo tanto $f(nx) = nx$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

El anterior resultado nos dice que podemos extraer números naturales fuera del argumento de una función aditiva. El siguiente resultado nos dice exactamente lo mismo pero con números racionales.

Lema 3.4. *Si f es aditiva, entonces $f(qx) = qf(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $q \in \mathbb{Q}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. Por tanto existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $q = \dfrac{n}{m}$. Entonces usando el Lema 3.3 obtenemos que

$$mf(qx) = mf(\frac{n}{m}x) = f(nx) = nf(x).$$

Luego, multiplicando todo por $\dfrac{1}{m}$ obtenemos que $f(qx) = qf(x)$. Esto muestra que $f(qx) = qf(x)$, para todo $q \in \mathbb{Q}^+$.

Por el Lema 3.2 f es impar, es decir $f(x) = -f(-x)$. Esto nos permite concluir que $f(qx) = qf(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}^-$ y $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f(qx) = qf(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R}$.

□

El lema anterior no implica que $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que si esto fuese cierto podríamos concluir que todas las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy son lineales, hecho que es falso ya que existen soluciones no lineales como veremos más adelante.

Usando la misma idea de la demostración anterior, podemos probar el siguiente teorema el cual caracteriza todas las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy con dominio en $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.5. *Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ aditiva, entonces $f(x) = \lambda x$ para algún λ.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Q}^+$ y $\lambda = f(1)$. Por lo tanto existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x = \dfrac{n}{m}$. Entonces usando el Lema 3.3 obtenemos que

$$mf(x) = mf\left(\frac{n}{m}\right) = f(n) = \lambda n$$

Luego, esto demuestra que $f(x) = \lambda x$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.

Por el Lema 3.2 f es impar, es decir $f(x) = -f(-x)$. Esto nos permite concluir que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{Q}^-$. Así $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

□

Con el teorema anterior podemos concluir que al restringir el problema al caso cuando f tiene dominio $\mathbb{Q}$, todas las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy son lineales.

3.2 CARACTERIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES LINEALES

En esta sección mostraremos que si a una función aditiva le agregamos otras condiciones se obtiene que dicha función es lineal.

Teorema 3.6. *(Cauchy, 1821)*

Sea f aditiva, f es continua, si y solo si, f es lineal.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda = f(1)$. Gracias a la densidad de los números raciones existe $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $x_i \to x$. Por el Lema 3.4 y la continuidad de f tenemos que

$$f(x) = f\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty} \lambda x_i = \lambda x$$

De esta manera hemos probado que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

El anterior teorema parece inofensivo pero no lo es. Este resultado prueba que las únicas soluciones continuas de la ecuación funcional de Cauchy son las funciones lineales. Esto descarta una vasta familia de funciones no lineales que no pueden ser aditivas ya que son continuas.

Veremos a continuación una generalización del teorema de Cauchy.

Teorema 3.7. *(Darboux, 1875)*

Sea f aditiva, f es continua en un punto, si y solo si, f es lineal.

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f es continua en x_0. Mostraremos que f es continua en todo punto y por el Teorema 3.6 (Cauchy) f es lineal.

Fijemos $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de x_0 en f, existe $\delta_0 > 0$, tal que si $\mid x - x_0 \mid < \delta_0$ se tiene que, $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon$. Tomemos $\delta = \delta_0$ y veamos que, si $\mid x - t \mid < \delta$ implica que $\mid f(x) - f(t) \mid < \varepsilon$, es decir que f es continua en t.

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mid x - t \mid < \delta$. Luego $\mid (x - t + x_0) - x_0 \mid < \delta$. Entonces por la definición de continuidad en x_0 se tiene que $\mid f(x - t + x_0) - f(x_0) \mid < \varepsilon$. Por la propiedad aditiva concluimos que $\mid f(x) - f(t) \mid < \varepsilon$. Por lo tanto f es continua.

□

Este teorema reduce las opciones de encontrar una función no lineal que sea aditiva, ya que este resultado nos dice que una condición necesaria para que una función no lineal sea aditiva es que esta función debe ser discontinua en todo $\mathbb{R}$.

Ahora veremos un teorema muy interesante acerca de las soluciones lineales, pero antes demostraremos el Teorema de Steinhaus que nos ayudara a demostrar dicho teorema. Cabe resaltar que los resultados que veremos a continuación están muy ligados a la Teoría de Categoría de Baire.

Teorema 3.8. *(Steinhaus)*

Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Baire y no es magro, entonces existe un abierto V tal que $0 \in V$ y $V \subseteq A - A = \{x - y : x, y \in A\}$.

Demostración. Por hipótesis A no es magro y tiene la propiedad de Baire, por lo tanto existe un abierto $U \neq \emptyset$ tal que $A \triangle U$ es magro. Fijemos $g \in U$. Entonces por el Lema 1.29, $U - g$ es un abierto que contiene al 0. Ahora por el Lema 1.30 existe V abierto tal que $V - V \subseteq U - g$. Veamos que $V \subseteq A - A$.

Sea $h \in V$ y verifiquemos que $g \in U \cap (U + h)$. En efecto, como $0 \in V$ y $-h \in -V$ tenemos que $-h \in V - V \subseteq U - g$, Así $g \in U + h$ y $U \cap (U + h) \neq \emptyset$. Por otra parte por el Lema 1.8 se tiene que

$$(A \cap (A + h)) \triangle (U \cap (U + h)) \subseteq (A \triangle U) \cup ((A + h) \triangle (U + h)).$$

Veamos que $(A \triangle U) \cup ((A + h) \triangle (U + h))$ es magro. En efecto sabemos $A \triangle U$ es magro entonces solo basta ver que $(A + h) \triangle (U + h)$ es magro ya que la unión de conjuntos magros es magra. Note que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = x + h$ es un homeomorfismo. Como $A \triangle U$ es magro, Sigue del Lema 1.9 se obtiene que

$$\varphi(A \triangle U) = \varphi(A) \triangle \varphi(U) = (A + h) \triangle (U + h)$$

y $\varphi(A \triangle U)$ es magro por el Teorema 1.33.

Ahora $A \cap (A + h) \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, si $A \cap (A + h) = \emptyset$ entonces

$$(A \cap (A + h)) \triangle (U \cap (U + h)) = U \cap (U + h).$$

Como $U \cap (U + h)$ es un abierto, obtenemos un abierto contenido en un conjunto magro esto contradice el Teorema de Categoría de Baire (ver Teorema 1.37). Como $A \cap (A + h) \neq \emptyset$ inmediatamente podemos deducir que $h \in A - A$.

□

A continuación probaremos otro de los teoremas fuertes de este trabajo, el Teorema de continuidad automática. Este teorema nos permite caracterizar las soluciones lineales.

Recordemos que una función es Baire medible si para todo U abierto se tiene que $f^{-1}(U)$ es Baire medible.

Teorema 3.9. *(Continuidad Automática)*

Sea f aditiva. Si f es Baire medible, entonces f es continua.

Demostración. Por el Teorema 3.7 para probar que f es continua es suficiente probar que f es continua en 0. Para ello probaremos que dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ que contenga a $f(0)$, existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a 0 tal que $f(W) \subseteq U$. En efecto sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto tal que $0 = f(0) \in U$. Por el Lema 1.30 existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ que contiene al 0 y tal que $V - V \subseteq U$. Por la densidad de los números racionales (ver Teorema 1.27) y el Corolario 1.28 se tiene que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V + q.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(V + q).$$

Gracias el Teorema de categoría de Baire (ver Teorema 1.37) $\mathbb{R}$ no es magro, por lo tanto existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $f^{-1}(V + q')$ no es magro. Además como f es Baire medible y $V + q'$ es abierto entonces $f^{-1}(V + q)$ tiene la propiedad de Baire, Luego por el Teorema de Steinhaus (ver Teorema 3.8) existe $W \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío tal que $W \subseteq f^{-1}(V + q) - f^{-1}(V + q)$ y $0 \in W$. Note que

$$f^{-1}(V + q) - f^{-1}(V + q) \subseteq f^{-1}(V - V) \subseteq f^{-1}(U).$$

Así $W \subseteq f^{-1}(U)$, esto implica que $f(W) \subseteq U$ tal como queríamos demostrar.

$\square$

Corolario 3.10. *Sea f aditiva. Si f es Baire medible, entonces f es lineal.*

3.3 EXISTENCIA DE SOLUCIONES NO LINEALES

Ahora surge la siguiente pregunta ¿existen soluciones no lineales? La respuesta es sí, pero a pesar de que la respuesta es afirmativa no es satisfactoria para todo público. Para ilustrar lo anteriormente dicho trataremos de construir una solución no lineal.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva. Trataremos de definir a f de tal manera que no sea lineal. A priori solo sabemos que $f(0) = 0$. Escojamos un valor para f, por ejemplo, $f(1) = 3$. Esto determina a f sobre todos los números racionales, es decir, $f(q) = 3q$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, pero las imágenes de f no están determinadas sobre ningún número irracional. Para solucionar esto asignaremos más imágenes, digamos que $f(\sqrt{2}) = \pi$. La propiedad aditiva nos permite concluir que $f(q_1 + q_2\sqrt{2}) = 3q_1 + \pi q_2$ para todo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Pero para un numero $x \in \mathbb{R}$ que no sea de esa forma no podemos determinar el valor de $f(x)$. De esta manera continuamos eligiendo cada vez más imágenes para f. Desafortunadamente, tenemos que hacer infinitas elecciones.

Al tratar de construir una solución no lineal nos damos cuenta que nuestro problema se reduce a encontrar una base de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.Por otro lado, no es posible obtener dicha base de forma explícita ya que la dimensión de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio es infinita no numerable (ver Teorema 2.5). Sin embargo, no todo está perdido, ya que gracias al Lema de Zorn podemos obtener una base (ver Teorema Hamel 2.1).

Teniendo una base para $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, la pregunta es ¿cómo a partir de una base de Hamel podemos encontrar todas las soluciones no lineales? O mejor aún ¿cómo a partir de la base de Hamel podemos caracterizar todas las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy? En el siguiente teorema daremos fin a la búsqueda de soluciones no lineales.

Teorema 3.11. *(Representación)*

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y $B = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base para $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Entonces f es aditiva si y solo si, es de la forma

$$f(x) = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha \lambda_\alpha$$

donde $\lambda_\alpha = f(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ y $x = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha$ es la representación de x en la base B.

Demostración. $\Rightarrow)$

Tomemos $x, y \in \mathbb{R}$, por lo tanto existe $\{q_\alpha\}_{\in I}$, $\{p_\alpha\}_{\in I} \subseteq \mathbb{Q}$, donde solo hay un numero finito de q_α y p_α distintos de cero, tales que

$$x = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha \Rightarrow f(x) = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha \lambda_\alpha.$$

$$y = \sum_{\alpha \in I} p_\alpha x_\alpha \Rightarrow f(y) = \sum_{\alpha \in I} p_\alpha \lambda_\alpha.$$

Ahora calculemos $f(x+y)$

$$f(x+y) = f\left(\sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} p_\alpha x_\alpha\right) = f\left(\sum_{\alpha \in I}(q_\alpha + p_\alpha)x_\alpha\right)$$

$$= \sum_{\alpha \in I}(q_\alpha + p_\alpha)\lambda_\alpha = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha \lambda_\alpha + \sum_{\alpha \in I} p_\alpha \lambda_\alpha = f(x) + f(y).$$

Por lo tanto f es aditiva.

$(\Leftarrow$

Para cada $\alpha \in I$, sea $\lambda_\alpha = f(x_\alpha)$. Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $\{q_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $x = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha$ donde solo un numero finito de racionales q_α no son cero. Luego por la propiedad aditiva y el Lema 3.4 tenemos que $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = f\left(\sum_{\alpha \in I} q_\alpha x_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha \lambda_\alpha.$$

$\square$

Observe que una función de la forma $f(x) = \sum_{\alpha \in I} q_\alpha \lambda_\alpha$ es lineal si $\lambda_\alpha / x_\alpha$ es constante para todo $\alpha \in I$.

Con esto finaliza nuestra búsqueda de funciones aditivas, pero las cosas no terminan aquí, ya que estas soluciones poseen propiedades muy extrañas, en particular las soluciones no lineales. En el siguiente capítulo estudiaremos más a fondo las propiedades de las soluciones no lineales.

Capítulo

4

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES NO LINEALES

4.1 QUÉ SIGNIFICA SOLUCIONES SALVAJES

En la introducción de este trabajo mencionábamos que las soluciones no lineales poseen propiedades topológicas un poco extrañas a tal punto de llamarlas soluciones salvajes. Pero la pregunta que surge es ¿qué hace salvaje a una función? Para ello hicimos una lista de algunas propiedades que hace salvaje a una función.

Teorema 4.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cualquier propiedad de esta lista implica las siguientes.*

1. *El gráfico de f, definido por $graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, es denso en $\mathbb{R}^2$.*
2. *f no está acotada superiormente en ningún intervalo abierto.*
3. *f no está acotada en ningún intervalo abierto.*
4. *f es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$.*
5. *f es discontinua.*
6. *f es no lineal.*

Demostración. $1. \Rightarrow 2.$

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $a, b, M \in \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $f(x) < M$.

Tomemos $K = (a, b) \times (M, +\infty)$ un abierto en $\mathbb{R}^2$. Gracias a la densidad de $graf(f)$ existe $(x_0, y_0) \in K \cap graf(f)$. De lo anterior podemos concluir que $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0) \in (M, +\infty)$.

En otras palabras, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > M$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto f no está acotada superiormente en ningún intervalo abierto.

$2. \Rightarrow 3.$

Es claro.

$3. \Rightarrow 4.$

Procedamos por el absurdo, supongamos que existe x_0 tal que f es continua en x_0.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces por la continuidad de x_0 en f, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se tiene que $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Esto es absurdo, ya que f no está acotada en ningún intervalo abierto.

$4. \Rightarrow 5.$

Es claro

$5. \Rightarrow 6.$

Es claro.

□

Algo importante de resaltar es que la cadena de implicaciones del teorema anterior se cumple siempre que f sea una función real, independientemente si es aditiva o no. Más adelante veremos que agregando la hipótesis de aditividad podremos concluir que las propiedades de la lista son todas equivalentes, pero antes de eso probaremos un par lemas.

Lema 4.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva. Entonces $graf(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Claramente $graf(f) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Veamos que dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in graf(f)$, se tiene que $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in graf(f)$.

Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in graf(f)$, entonces $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Además note que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$. Es decir $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in graf(f)$.

Veamos que dados $q \in \mathbb{Q}$ y $(x, y) \in graf(f)$, se tiene que $q(x, y) \in graf(f)$.

Sean $q \in \mathbb{Q}$ y $(x, y) \in graf(f)$. Luego $f(x) = y$ y $f(qx) = qf(x) = qy$ (ver Lema 3.4). Es decir $(qx, qy) \in graf(f)$.

□

El siguiente lema es una caracterización muy útil de las funciones lineales.

Lema 4.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces f es lineal, si y solo si, para todo $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es lineal entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto dados $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\frac{f(x)}{x} = \lambda = \frac{f(y)}{y}.$$

($\Leftarrow$ Veamos que f es lineal. Si $\lambda = f(1)$, entonces para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(1)}{1} = \lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x.$$

Entonces f es lineal.

□

El siguiente teorema es uno de los objetivos principales de este trabajo.

Teorema 4.4. *Sea f aditiva. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *El gráfico de f, definido por $graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, es denso en $\mathbb{R}^2$.*

2. *f no está acotada superiormente en ningún intervalo abierto.*

3. *f no está acotada en ningún intervalo abierto.*

4. *f es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$.*

5. *f es discontinua.*

6. *f es no lineal.*

Demostración. $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 5. \Rightarrow 6.$ por el Teorema 4.1

Veamos que $6. \Rightarrow 1.$

Como f es no lineal, por el Lema 4.3 existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ambos no nulos tales que

$$\frac{f(t_1)}{t_1} \neq \frac{f(t_2)}{t_2}.$$

Sea $B = \{(t_1, f(t_1)), (t_2, f(t_2))\}$. Veamos que B es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos tales que

$$a(t_1, f(t_1)) + b(t_2, f(t_2)) = 0.$$

De la anterior ecuación podemos concluir que

$$at_1 = -bt_2$$

$$af(t_1) = -bf(t_2)$$

Dividiendo la segunda expresión entre la primera obtenemos que

$$\frac{f(t_1)}{t_1} = \frac{f(t_2)}{t_2}.$$

Lo cual es absurdo. Por tanto B es un conjunto linealmente independiente de dos elementos. Como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, entonces B es una base para $\mathbb{R}^2$ (por el Teorema 1.7).

Finalmente veamos que $graf(f)$ es denso en $\mathbb{R}^2$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siendo B base para $\mathbb{R}^2$, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y) = a(t_1, f(t_1)) + b(t_2, f(t_2)).$$

Ahora por la densidad de los números racionales (ver Teorema 1.27), existen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ tales que $a_n \to a$ y $b_n \to b$. Por el Lema 4.2 podemos concluir que dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in graf(f)$ y $q, p \in \mathbb{Q}$ se tiene que

$$q(x_1, y_1) + p(x_2, y_2) \in graf(f).$$

Por lo tanto la siguiente sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$ satisface que

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq graf(f).$$

donde $z_n = a_n(t_1, f(t_1)) + b_n(t_2, f(t_2))$. Claramente $z_n \to (x, y)$. Luego $graf(f)$ es denso en $\mathbb{R}^2$.

$\square$

El siguiente ejemplo demuestra que sin la hipótesis de aditividad las propiedades del teorema anterior no son equivalentes. Para ello construiremos una función que verifique 5 pero que no verifique 6.

Ejemplo 4.5. *Construiremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no está acotada en ningún intervalo abierto y que su gráfico no es denso en $\mathbb{R}^2$.*

Etiquetemos el conjunto de los números racionales, es decir, sea $\mathbb{Q} = \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$ y definamos f tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \\ n, & si \quad x = q_n \in \mathbb{Q} \text{ para algun } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Claramente $graf(f)$ no es denso en $\mathbb{R}^2$, ya que $f(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Veamos que f no está acotada en ningún intervalo abierto. Tomemos un intervalo abierto (a, b) con $a < b$.

Como existen infinitos números racionales q_n en (a, b), entonces dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(q_{n_0}) = n_0 > M$. Por lo tanto f no está acotada superiormente en el intervalo (a, b).

Observe que las otras implicaciones son trivialmente estrictas.

4.2 RESULTADOS MAS RECIENTES

En esta sección comentaremos muy brevemente trabajos más recientes sobre bases de Hamel, con la intención de mostrar que los estudios acerca de la ecuación funcional de Cauchy no se reducen a los resultados vistos en este trabajo, sino al contrario, hay resultados mucho más potentes acerca de las funciones aditivas. Un claro ejemplo son los trabajos del Dr. K. Plotka [4] y [5] publicados en el 2003 y 2009 respectivamente, en los cuales introduce unos conjuntos muy interesantes que definiremos a continuación.

Definición 4.6. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de Hamel, si $graf(f)$ considerado como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, es una base para $\mathbb{R}^{n+1}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Al conjunto de todas las funciones de Hamel se le denota $HF(\mathbb{R}^n)$.*

Definición 4.7. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, si $graf(f)$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^{n+1}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. El símbolo $LIF(\mathbb{R}^n)$ representa la familia de todas las funciones linealmente independientes.*

De las anteriores definiciones podemos darnos cuenta que $HF(\mathbb{R}^n) \subseteq LIF(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.8. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función aditiva si es solución de la ecuación funcional de Cauchy. La familia de todas las funciones aditivas la denotaremos por $AD(\mathbb{R}^n)$.*

Las funciones linealmente independientes carecen de la propiedad aditiva, es decir $AD(\mathbb{R}^n) \cap LIF(\mathbb{R}^n) = \emptyset$, ya que dada $f \in AD(\mathbb{R}^n) \cap LIF(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $graf(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial entonces $graf(f)$ es un conjunto linealmente dependiente.

Además note que, $graf(f)$ no genera a todo $\mathbb{R}^{n+1}$, ya que si $graf(f)$ generara a todo $\mathbb{R}^{n+1}$ podríamos tomar $(x_1, \dots, x_n, y), (x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$, como $span(graf(f)) = \mathbb{R}^{n+1}$ y $graf(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces $(x_1, \dots, x_n, y), (x_1, \dots, x_n, z) \in graf(f)$ lo cual es absurdo, ya que f es función.

De esta manera podemos concluir que topológicamente el gráfico de las funciones aditivas genera todo el espacio, pero algebraicamente el gráfico de las funciones aditivas ni genera a todo el espacio, ni conforman un conjunto linealmente independiente.

Finalizaremos este trabajo enunciando uno de los resultados más importantes de los artículos del del Dr. K. Plotka.

Teorema 4.9. *(K. Plotka)*

Toda función real $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *puede ser representada como la suma de dos funciones de Hamel. En otras palabras*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} = HF(\mathbb{R}^n) + HF(\mathbb{R}^n).$$

REFERENCIAS

[1] Di Prisco, C y Uzcátegui C. Introducción a la teoría descriptiva de Conjuntos. Curso en la IV Escuela Venezolana de Matemáticas; Mérida (Venezuela), Septiembre 1991.

[2] Hoffman, K y Kunze, R., Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[3] Jakobsen, S. K., *Cauchy's functional equation*,

https://sunejakobsen.files.wordpress.com/2010/12/cauchy_eng4.pdf .

[4] Plotka, K., *On functions whose graph is a Hamel basis I*, Proc. Amer. Math. Soc., 131(4), 2003, Pages 1031 -1041.

[5] Plotka, K., *On functions whose graph is a Hamel basis II*, Canad. Math. Bull., 52(2), 2009, Pages 295–302.

[6] Uzcátegui, C., *Apuntes sobre las bases de Hamel*, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2017.

BIBLIOGRAFÍA

Di Prisco, C y Uzcátegui C. Introducción a la teoría descriptiva de Conjuntos. Curso en la IV Escuela Venezolana de Matemáticas; Mérida (Venezuela), Septiembre 1991.

Hoffman, K y Kunze, R., Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

Jakobsen, S. K., *Cauchy's functional equation*,

https://sunejakobsen.files.wordpress.com/2010/12/cauchy_eng4.pdf .

Plotka, K., *On functions whose graph is a Hamel basis I*, Proc. Amer. Math. Soc., 131(4), 2003, Pages 1031 -1041.

Plotka, K., *On functions whose graph is a Hamel basis II*, Canad. Math. Bull., 52(2), 2009, Pages 295–302.

Uzcátegui, C., *Apuntes sobre las bases de Hamel*, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2017.