PROCESO DE GENERALIZACION: UNA PERSPECTIVA DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA

ÁNYELA XIOMARA CORREDOR SANTOS
MÓNICA ADRIANA PINEDA BALLESTEROS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2014

PROCESO DE GENERALIZACION: UNA PERSPECTIVA DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA

ÁNYELA XIOMARA CORREDOR SANTOS
MÓNICA ADRIANA PINEDA BALLESTEROS

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciada en Matemáticas

Directora
Ph.D SOLANGE ROA FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2014

AGRADECIMIENTOS

A Dios por la vida y todas las bendiciones que me ha regalado y sobre todo la inteligencia y paciencia para poder culminar esta meta en mi vida.

A mis padres José Corredor y María Santos por estar siempre conmigo, ayudándome y guiándome por el buen camino lleno de valores, y creyendo siempre en mí.

A mis hermanos por estar conmigo incondicionalmente, y sobre todo por soportarme en los momentos que el estrés me dominaba y quería dejarlo todo, pero tenía que ser un buen ejemplo para ellos.

A mi directora de proyecto, la profesora Solange Roa, por su paciencia al momento de guiarme y corregirme en mis errores durante el proyecto; y al profesor Juan de Dios que nos guio y ayudo durante el servicio social. Además que nos incentivaron a seguir en el camino de la educación matemática.

A mi amiga y compañera Mónica Pineda por la constancia y exigencia en el proyecto, al trabajar juntas lográbamos grandes avances y obtuvimos muy buenos resultados para nuestra formación como personas e investigadoras.

Ányela Xiomara Corredor Santos

A Dios quien siempre me ha bendecido de muchas formas, quien me ha dado salud y fuerza para enfrentar este gran reto.

A mis padres Benjamín Pineda y Margarita Ballesteros que me dieron no solo la vida, sino los deseos de luchar por mis sueños y mantener en mi corazón la convicción de poder realizar lo que me propongo; ellos han sido el motor de mi vida y a ellos debo los valores que hacen de mí una mejor persona.

A mis hermanos Eliécer, Olinda, Consuelo, Mario, Cecilia, Alfonso y Bibiana Quienes han estado siempre dispuestos a ayudarme y apoyarme en cada etapa de mi vida.

A mi esposo Diego Mantilla porque su apoyo y comprensión fueron esenciales durante gran parte de mi carrera; su inagotable fe en mí ha sido fundamental para culminar esta etapa de mi vida.

A mi directora de proyecto Solange Roa por su dedicación, consejos, correcciones y paciencia durante el desarrollo del proyecto; al profesor Juan de Dios Urbina por su apoyo incondicional durante el servicio social y sus consejos tanto para la vida, como para mi desempeño profesional.

A mi amiga Xiomara Corredor porque gracias a ella emprendimos esta bonita y gratificante experiencia que nos ha brindado grandes satisfacciones profesionales.

Mónica Adriana Pineda Ballesteros

CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO: PROCESO DE GENERALIZACIÓN: UNA PERSPECTIVA DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA*.

AUTORES: CORREDOR SANTOS, Ányela Xiomara
PINEDA BALLESTEROS, Mónica Adriana**

PALABRAS CLAVES: Generalización, Patrones, Fases, Razonamiento Algebraico.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se analiza el desarrollo del proceso de generalización de estudiantes de básica primaria entre 9 y 12 años, a partir del estudio de situaciones sobre patrones en diferentes representaciones. Para esto se implementa una serie de actividades (Prueba diagnóstica, talleres y entrevista; con sus respectivos análisis "a priori" y "a posteriori"), donde se consideran las fases del proceso de generalización propuestas por el grupo de Azarquiel en 1993: Ver, Describir y Escribir.

Los resultados muestran que después de un proceso de instrucción, los estudiantes logran identificar algunos patrones en secuencias numéricas y geométricas, ayudándose de estrategias que les permiten percibir de manera más clara el patrón; sin embargo, los estudiantes tienen grandes dificultades con el paso de una fase a otra, especialmente de Describir a Escribir; pues les resulta complejo llegar a una generalización ya sea de manera verbal o mediante una expresión general.

Con esta investigación pretendemos que los resultados obtenidos a partir del trabajo hecho por los estudiantes durante la investigación, sirva de guía a los profesores para entender cómo afrontan los estudiantes este tipo de situaciones, y a su vez, estos resultados puedan propiciar en los profesores estrategias con las cuales puedan motivar en los estudiantes el razonamiento algebraico.

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph. D Solange Roa Fuentes

ABSTRACT

TITLE: GENERALIZATION PROCESS: A PERSPECTIVE OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS*

AUTHORS: CORREDOR SANTOS, Ányela Xiomara
PINEDA BALLESTEROS, Mónica Adriana**

KEYWORDS: Generalization, Patterns, Phases, Algebraic Reasoning.

DESCRIPTION:

This essay parses the developing of elementary school students between nine (9) and twelve (12) years old students starting with the study of situations about patterns in distinct renderings. For this is implemented a set of activities (diagnostic tests, workshops and interviews; with their respective analysis “a priori” and “a posteriori”), where is considered the phases of the generalization process proposed by Azarquiel group in 1993: See, Describe and Write.

The results evince that after an instruction process the students are able to identify some patterns in numerical and geometric sequences, helping of strategies that allow them to perceive clearly the pattern; however, students have difficulties with the transition from one phase to another, especially from Describe to Write, because they find complex get a generalization either verbally or by a general expression.

Our target with this research results, from the work done by students during the investigation, be useful to guide teachers to understand how students face such situations, and at the same time, these results may encourage strategies in teachers that can motivate the students’ algebraic reasoning. Our target with this research results, from the work done by students during the investigation, be useful to guide teachers to understand how students face such situations, and at the same time, these results may encourage strategies in teachers that can motivate the students’ algebraic reasoning.

---

* Bachelor Thesis
** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Ph. D Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente el estudio del álgebra, se ha relacionado con la habilidad de los estudiantes, para tratar expresiones algebraicas y ecuaciones. Es común que diferentes miembros de la sociedad (padres de familia, estudiantes e incluso maestros) consideren que el álgebra, se inicia en el tercer año de secundaria. Sin embargo, como se propone en los Principios y Estándares para la Educación Matemática de la NCTM (2000, National Council of Teachers of Mathematics, por sus siglas en inglés) el desarrollo del pensamiento algebraico debe iniciarse desde la etapa preescolar. Recientes investigaciones muestran que la propuesta de cambio curricular planteada por *Early Algebra* (Kaput, 2000; Blanton & Kaput, 2005; Vasco, 2007) responde a estas necesidades, ya que no se trata de introducir un curso de álgebra en los primeros años escolares, sino de promover una forma de pensar sobre las estructuras y relaciones entre objetos, que deben guiar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes desde los primeros años (Vergel, 2010).

El razonamiento algebraico y el proceso de generalización son aspectos que se complementan; según Godino y Font (2003) “el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas” (p.8); pues al abordar el estudio del álgebra estos aspectos, forman parte esencial del trabajo matemático que se lleva a cabo en el aula. Hace algunos años se ha venido hablando de la importancia de incluir pensamiento algebraico en el currículo escolar desde la básica primaria. Específicamente, Kaput (2000) propone esta inclusión como una vía para evitar que el álgebra se constituya en un factor de exclusión escolar.

Movidas por la necesidad de trabajar esta problemática, hemos planteado un trabajo que consiste en implementar una serie de actividades, cuyo objetivo es que un grupo de estudiantes de quinto primaria (con edades entre 9 y 12 años) logren familiarizarse con el proceso de generalización, como componente fundamental del razonamiento algebraico; identificando cuáles de las fases del proceso de generalización, propuestas por el Azarquiel (1993) (Ver, Describir y Escribir), logran desarrollar estos estudiantes; para este fin, nos enfocamos en desarrollar el siguiente estándar de la NCTM (2000), donde propone para la etapa 3-5 "el trabajo con variables y expresiones algebraicas a partir del estudio de patrones numéricos, geométricos, sus representaciones y las generalizaciones que un individuo puede lograr sobre ellos" (p. 162).

A continuación exponemos los principales elementos mediante los cuales se estructura esta investigación, a partir del estudio de trabajos previos que sobre el tema han sido desarrollados, los elementos teóricos que nos permiten comunicar nuestros datos y el método que guía nuestro trabajo. Finalmente proponemos una sección de conclusiones en donde de manera general presentamos los resultados obtenidos en nuestro estudio, además planteamos algunos caminos que pueden seguirse para afrontar la problemática expuesta.

1. ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos aspectos generales sobre el razonamiento algebraico y su desarrollo desde los primeros años escolares. Haciendo especial énfasis en la importancia de potenciar el proceso de generalización a partir del estudio de secuencias númericas y geométricas.

Generalmente el álgebra se asocia sólo con la manipulación de signos y símbolos, la solución de ecuaciones o la factorización de expresiones algebraicas. Sin embargo diversas investigaciones muestran la importancia de los procesos que están inmersos en el desarrollo del razonamiento algebraico. Estas investigaciones se relacionan con el paso de la aritmética al álgebra, el uso de la variable, el proceso de generalización y justificación, entre otros; estos aspectos han sido estudiados a través de los diferentes niveles escolares en diversos contextos y desde variadas perspectivas.

En este trabajo analizamos particularmente cómo se genera el proceso de generalización en estudiantes de básica primaria (con edades comprendidas entre 9 y 12 años). Los documentos que guian el desarrollo curricular en nuestro país (Lineamientos Curriculares y Estándares para Matemáticas diseñados por el Ministerio de Educación Nacional) y como menciona Lannin (2005) los documentos internacionales diseñados para guiar el desarrollo curricular en matemáticas en Australia, Estados Unidos y Gran Bretaña (Australian Education Council (1994), National Council of Teachers of Mathematics (2000), Department for Education ans Skills (2001), respectivamente) sugieren que los estudiantes de la escuela básica y media deben desarrollar el proceso de generalización a partir del estudio de patrones para dar el paso hacia el álgebra formal.

A continuación analizaremos algunos acercamientos a lo que podría ser la definición de álgebra escolar, plantearemos con detalle los aspectos presentados en la Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y finalmente mostraremos algunos resultados de investigación que hacen referencia al estudio de patrones numéricos y geométricos como iniciadores del proceso de generalización.

1.1 EL ÁLGEBRA ESCOLAR

Kieran (1996) caracteriza los alcances del álgebra escolar, al destacar como actividades algebraicas: el análisis de relaciones entre cantidades y de estructuras; el estudio del cambio o pensamiento funcional; la generalización; la resolución de problemas; las ecuaciones; la justificación y la predicción. Estos procesos son el fundamento principal para que un individuo se enfrente con éxito a situaciones que requieren el desarrollo de razonamiento algebraico; por tanto se constituyén en un camino potencialmente efectivo para la construcción de pensamiento matemático.

Por su parte Kaput (1998, tomado de Castro, 2011) identifica cinco formas específicas de definir el álgebra:

> … como una forma de generalizar y formalizar patrones y regularidades, en particular el álgebra como una aritmética generalizada; como una forma de manipulación simbólica, sintácticamente guiada; como el estudio de la estructura y los sistemas, abstraídos de los cálculos y las relaciones; como el estudio de las funciones, las relaciones, y la variación conjunta y finalmente, álgebra como modelación. (p.14)

Esta definición es muy relevante, pues aborda los diferentes aspectos en donde el razonamiento algebraico toma un rol fundamental en la construcción de diferentes conceptos y nociones matemáticas. Frente a estas formas de entender el álgebra, cabe destacar la importancia de desarrollar cada uno de los contenidos y procesos inmersos en las definiciones expuestas en los individuos desde los primeros años escolares. Frente a esto Jinfa y Knuth (2011) en la introducción del libro *Early Algebraization* presentan una pregunta que fundamenta el rumbo de nuestra investigación: ¿En qué consiste el razonamiento algebraico en los grados iniciales? a lo que ellos contestan:

> El razonamiento algebraico en los grados iniciales debería ir más allá del dominio de la aritmética y la fluidez de cálculos para atender de manera más profunda la estructura fundamental de las matemáticas. El desarrollo del pensamiento algebraico en grados iniciales requiere del desarrollo de caminos particulares de pensamiento, incluyendo el análisis de relaciones entre cantidades, notando la estructura, estudiando el cambio, generalizando, resolviendo problemas, modelando, justificado, probando, y prediciendo. Es decir, el aprendizaje del *Early Algebra* desarrolla no sólo nuevas herramientas para comprender las relaciones matemáticas, sino también nuevos hábitos de la mente. (p.ix)

Aunque el planteamiento de Jinfa y Knuth podría parecer pretencioso, investigaciones recientes muestran que el desarrollo de *Early Algebra*, podría lograr no sólo facilitar el posterior estudio del Álgebra sino promover en los estudiantes un aprendizaje con comprensión, más profundo y complejo de las matemáticas escolares.

Planteamos por tanto que es necesario generar espacios de reflexión más profundos en los primeros años escolares, con mayor grado de complejidad que prepare a los estudiantes en la construcción de las estructuras y relaciones que fundamentan las matemáticas. Como lo plantean los estándares de la NCTM, la iniciación en el desarrollo del pensamiento algebraico ayuda a los estudiantes a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra en los grados medio y superior" (p.37).

Durante el desarrollo de esta investigación, profundizaremos en un proceso particular que en las definiciones dadas se propone como fundamental dentro del razonamiento algebraico, *el proceso de generalización*.

En la tercera sección de este capítulo, analizaremos con detalle algunas definiciones y caracterizaciones que se han sido planteadas sobre este proceso.

1.2 PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Según lo planteado en los estándares de la NCTM (2000) el desarrollo del razonamiento algebraico ayuda a los estudiantes a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra en los grados medio y superior" (p.37). Esto nos muestra que el Álgebra requiere de una introducción temprana, donde se incentive a los estudiantes a desarrollar habilidades propias del razonamiento algebraico.

Podemos observar que evidentemente la propuesta planteada por la NCTM está encaminada a iniciar un trabajo temprano con los estudiantes, su propuesta es acertada, puesto que muestra específicamente una combinación entre lo algebraico y las bases elementales de la aritmética, que en últimas, es lo que se pretende hayan logrado asimilar los estudiantes. De otro lado tenemos una amplia gama de expectativas respecto al trabajo que se supone deberían haber desarrollado los estudiantes en la etapa 3-5 (tercero a quinto), pues no basta con manipular las operaciones básicas, es necesario que los estudiantes potencien su capacidad de análisis, interpretación y manejo de diferentes situaciones que requieran ir más allá de lo mecánico.

Específicamente para el Estándar de Álgebra la NCTM (2000) propone que los programas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar en cambio en diversos contextos. (NCTM, 2000, p.39)

Haciendo referencia al primer estándar, se plantea cómo el estudio desde los primeros años escolares de secuencias del tipo “rojo - azul - azul - rojo - azul - azul - rojo promueve la clasificación y ordenación de objetos de manera natural.” (p.40). A partir de este tipo de situaciones que cada vez pueden tornarse más complejas, es posible llevar a los estudiantes a la descripción de patrones, de aquello que se mantiene constante y/o aquello que varía, de forma verbal. Este es un camino para generar la noción de función, al establecer una relación directa entre el conjunto de los números naturales y cada elemento que hace parte de una secuencia.

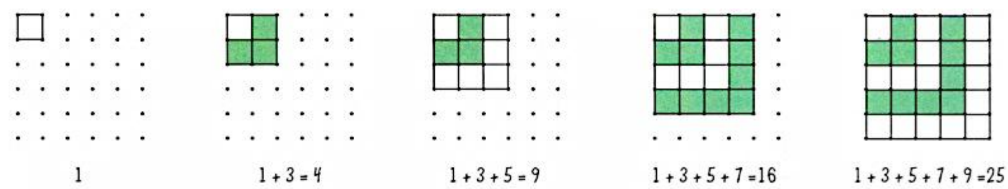
Mediante el estudio de secuencias geométricas y numéricas, es posible motivar el desarrollo de los estántares propuestos para Álgebra. En la siguiente tabla aparece cada una de las expentativas propuestas para cada estándar.

Tabla 1. Estándares para Álgebra, Expectativas para la etapa 3-5 (NCTM, p.162)

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:	Expectativas En la etapa 3-5, todos los estudiantes debería:
Comprender patrones, relaciones y funciones	• Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos; • Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.	• Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad, y emplearlas en el cálculo de números naturales. • Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o símbolo; • Expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	• Modelizar situaciones-problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en contextos diversos	• Investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable; • Identificar y describir situaciones con tasas de cambios constantes o variables, y compararlas.

Como se puede ver en la tabla 1, las Expectativas asociadas a cada estándar pueden traducirse como acciones específicas del tipo: describir, representar, analizar, generalizar, identificar, … Este tipo de acciones pueden motivarse a partir del estudio de secuencias.

Consideremos la siguiente situación que se propone en el documento de la NCTM (2000, p.163):



En esta secuencia de “cuadrados crecientes”, la NCTM (2000) plantea que: “[Los estudiantes] Deberían analizar su estructura y de qué forma aumenta o cambia, organizar sistemáticamente esta información y utilizar el análisis para desarrollar generalizaciones” (p.163). Allí se propone no sólo que los estudiantes debería expresar de manera verbal los elementos que son generalizables en la situación, sino además, expresarlos mediante símbolos. En esta situación en particular los estudiantes podrían ver que en cada una de las figuras que aparecen en la secuencia el número de cuadrados crece y determinar de qué forma lo hacen. En este caso la situación puede incluir determinar la figura siguiente y una figura en el paso 20 por ejemplo, en donde el estudiante necesite establecer un patrón general que le permita determinar el número de cuadrados que tendrá la figura, sin representala específicamente de manera gráfica.

La situación planteada muestra regularidades no sólo gráficas sino además, muestra la secuencia de números que se van generando a partir de la suma del número de cuadrados que se coloréan. Estas relaciones de tipo gráfico y numérico, son las que se espera los estudiantes del último año de primaria logren estudiar, incluso que lleguen a la generación de expresiones que de forma general describan las características de los elementos de la secuencia. En el capítulo final de nuestro trabajo mostraremos cuál es la realidad frente a estas expectativas en la población en que desarrollamos nuestra investigación.

A continuación mostraremos algunos elementos del proceso de generalización que ha sido analizado en otros trabajos.

1.3 EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN A PARTIR DEL ESTUDIO DE SECUENCIAS

El desarrollo del razonamiento algebraico es una de las principales propuestas que hoy en día circula en el área de la matemática educativa; en los últimos años se han planteado en diversas investigaciones que este pensamiento debe ser parte activa del currículo escolar. Los estudios realizados han coincidido en la importancia de introducir sus procesos desde edades tempranas, con el fin de potenciar en los estudiantes habilidades de tipo algebraico, que les permitan realizar un trabajo posterior de calidad.

Al respecto, Godino, Aké y Gonzato (2012) argumentan:

> El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas concebidas como la ciencia de los patrones y el orden, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos centrales de las matemáticas. (p.4)

Estudiar el razonamiento algebraico requiere un compromiso tanto de los estudiantes como de los profesores, para asimilar e integrar actividades en las que relacionen directa e indirectamente procesos matemáticos que estimulen su desarrollo. De acuerdo con Kieran (2004), el razonamiento algebraico en las primeras etapas del álgebra escolar,

> … incluye el desarrollo de formas de pensar [dentro del trabajo en actividades] … como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción. (p. 149)

Respecto al proceso de generalización, Kaput (1999) plantea tres acciones básicas que debe desarrollar un individuo para generalizar una situación: 1. Identificar similitudes en un conjunto de casos, 2. Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó y 3. Derivar resultados más amplios de casos particulares. Según el autor estas tres acciones garantizan el desarrollo eficaz del proceso de generalización. Sin embargo, el análisis de datos muestra que la mayoría de los estudiantes pueden identificar lo que se mantiene constante o lo que varía; pero un menor porcentaje logra describir verbalmente lo que ideintifica y, casi ninguno logra la tercera acción que básicamente requiere de una expresión algebraica. Por ejemplo Chalé (2013), muestra que estudiantes de secundaria tienen dificultades para generalizar aquello que visualmente resulta evidente. El paso de una acción a otra precere requerir de justificaciones matemáticas en cierto sentido formales, con las cuales los estudiantes no están familiarizados.

Cuando se habla de generalización, resulta casi imprescindible referirse al estudio de patrones en secuencias; identificar un patrón es una forma de generar una “generalización de un fenómeno”; respecto a esto Kaput (1999) menciona:

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificados

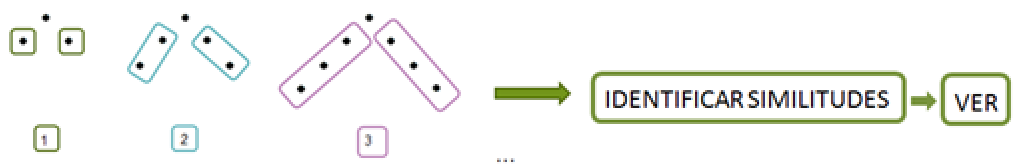
> explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación de un nivel donde el foco no son los casos o situaciones en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p. 136)

Azarquiel (1993), propone el desarrollo de tres fases para lograr el proceso de generalización, estas fases se asocian con las propuestas por Kaput haciendo alución a tres verbos específicos: Ver, Describir y Escribir. Para explicar mejor la relación entre estas dos categorizaciones y su relación analizaremos el siguiente ejemplo:

> Ejemplo: Muchas aves terrestres migran largas distancias. Los patrones más comunes involucran el vuelo al norte para reproducirse en los veranos en áreas templadas o árticas y el retorno a las áreas de invernada en regiones más cálidas del sur. Algunas de estas aves, se desplazan formando una "V" como se muestra en las imágenes. Diversos grupos de científicos han investigado esta organización, tratando de comprender cuáles son las posibles ventajas de este vuelo para tenerlas en cuenta en el diseño de los aviones.

> En la secuencia que aparece a continuación, cada figura representa una bandada de aves y cada punto un ave. El número de aves en cada figura va aumentando por la agregación de nuevas aves.

Kaput por su parte propone inicialmente “Identificar similitudes en un conjunto de casos”, que está íntimamente ligado con la primera fase propuesta Azarquiel “Ver” donde se busca que los estudiantes logren identificar aquello que varía y/o permanece constante en cada secuencia.



En el esquema anterior, explicamos una solución dada por uno de los estudiantes que hace parte de esta investigación; aquello que logra Ver:

> En cada posición hay un punto que permanece constante, este punto representa la primer ave de la bandada, y los puntos de los lados van variando a medida que se unen más aves.

Ahora, identificaremos la segunda actividad básica propuesta por Kaput (1999), y la segunda fase propuesta por el grupo Azarquiel (1993); donde podemos observar que las similitudes en los “pasos” para generalizar, aún se mantienen; Kaput en su segunda actividad, “Extender razonamiento” busca expresar verbalmente o por escrito, la regularidad percibida en la primera actividad, por su parte Azarquiel en la fase “Describir” consiste en comunicar de manera verbal o escrita aquello que es evidente en el patrón detectado.

A continuación se mostrarán algunas de las descripciones dadas por los estudiantes con los que trabajamos durante el desarrollo de esta investigación.

“El primer punto no se cuenta y atrás [haciendo referencia a las aves que están después de la primera] está el doble del número de la figura.”
“A los lados, sin contar el primer punto, eso me indica el número de la figura.”

→ EXTENDER RAZONAMIENTO → DESCRIBIR

Por último identificaremos la tercera actividad básica propuesta por Kaput (1999), seguido de la tercera fase propuesta por el grupo Azarquiel (1993); respecto a esta última fase, Kaput y Azarquiel proponen “pasos” para generalizar muy similares, como lo hemos observado hasta el momento en las anteriores; Kaput propone “Derivar resultados” donde se busca interpretar el patrón encontrado en los procesos anteriores, por medio de una expresión algebraica que le permita a los estudiantes identificar la cantidad de puntos en cualquier posición; de otro lado Azarquiel en la fase “Escribir” pretende llegar a la expresión escrita, en forma simbólica mediante una expresión algebraica.

$\square$ x2+1 → DERIVAR RESULTADOS → ESCRIBIR

Esta tercera descripción del proceso de generalizar se manifestó sólo en un estudiante quien intentó mediante el uso de un “cuadrado” expresar el valor desconocido, que está asociado con la posición de la secuencia y que permite determinar en número de aves.

Estas actividades específicas fundamentan el diseño de las situaciones propuestas en nuestra investigación y de manera natural, se perciben en el trabajo de los estudiantes una vez logran familiarizarse con situaciones relacionadas con secuencias geométricas y numéricas. El paso por cada actividad genera expresiones (gráficas o verbales) que les permiten predecir con precisión el comportamiento del patrón sin realizar una acción externa específica (realizar paso a paso).

En el Marco Conceptual profundizaremos un poco más sobre las fases del proceso de generalización, Azarquiel (1993); con base en dichas fases desarrollaremos el análisis a priori y a posteriori que hace parte del desarrollo del método de nuestra investigación.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

Con base en el panorama expuesto, nos interesa estudiar cómo estudiantes con edades comprendidas entre 9 y 12 años (en Colombia esta edad corresponde al último año de la formación Básica Primaria) desarrollan el proceso de generalización al estudiar patrones en secuencias numéricas y geométricas.

Por tanto nos planteamos las siguientes preguntas:

> ¿Qué tipo de fases (ver, describir y escribir) realizan estudiantes entre 9 y 12 años al abordar el estudio de patrones numéricos y geométricos?
>
> ¿Cómo dichas actividades potencian la construcción del proceso de generalización?

Nuestro interés se basa en estudiar con detalle estas preguntas en un contexto particular, una institución pública de la ciudad de Bucaramanga. Para esto, haremos un análisis de las actividades que han hecho parte de este trabajo a través de las fases descritas por el grupo Azarquiel (1993) y las estrategias que en cada fase puede desarrollar un individuo (Sánchez, García y Mora, 2008; Lannin, 2005).

A continuación planteamos el objetivo general y los objetivos específicos que guían nuestro trabajo de investigación.

Objetivo general

Analizar el desarrollo del razonamiento algebraico, centrándonos en el proceso de generalización a través del estudio de secuencias numéricas y geométricas.

Objetivos específicos

- Con la implementación de las actividades propuestas, buscamos que los estudiantes se familiaricen con el proceso de generalización, ya que estas actividades requieren de su parte un análisis interpretativo, con el cual podrían identificar patrones mediante secuencias numéricas y geométricas.

- Motivar la inclusión de actividades que promuevan el razonamiento algebraico en los estudiantes de básica primaria, ya que ellos cuentan con las capacidades necesarias para desarrollarlas.

- Hacer un primer acercamiento con grupos regulares de primaria, para estudiar el proceso de generalización que puede desarrollarse a partir de una secuencia.

- Analizar y desarrollar el primer estándar propuesto para Álgebra por la NCTM; este es: "Comprender patrones, relaciones y funciones" (NCTM, 2000, p.40).

- Basándonos en las fases de generalización propuestas por el grupo Azarquiel (1993) (Ver, Describir y Escribir) buscamos identificar cuáles de dichas fases son desarrolladas por los estudiantes y qué tipo de estrategias usan al afrontar una secuencia.

3. MARCO CONCEPTUAL

A continuación presentaremos los aspectos teóricos que fundamentan nuestro trabajo de investigación, donde describiremos de manera detallada, la definición de razonamiento algebraico, algunos ejemplos que dejan ver el proceso de generalización a partir de las fases propuestas por el grupo Azarquiel (1993), Ver, Describir y Escribir. Además mostraremos trabajos relacionados con estos aspectos que nos permiten evidenciar otros resultados obtenidos referente a nuestro tema de investigación.

3.1. RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

Introducir el razonamiento algebraico en la educación básica primaria, ha sido a lo largo de casi treinta años, el enfoque que los educadores colombianos han querido dar a la educación matemática, esto, desde el punto de vista de los Lineamientos Nacionales y los Estándares para la Educación Matemática de la NCTM (2000, National Council of Teachers of Mathematics, por sus siglas en inglés); la propuesta fundamental es la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación básica primaria. Al respecto Kaput (2000) propone la denominada "*algebra for all*", con la cual busca promover el álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas, en lugar de ser inhibidora. Esta propuesta de Kaput se ha llamado la "algebrización del currículo", la cual ha generado una visión ampliada sobre el álgebra escolar. A continuación mostraremos la definición que algunos autores hacen del razonamiento algebraico (Godino y Font, 2003; Castro y Godino, 2011). Además presentaremos algunas características del razonamiento algebraico, indispensables tanto para los niños como para los maestros.

Godino y Font (2003) afirman que:

> El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso de lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en el que formalizar y generalizar no sea central. (p.774)

Esta concepción de razonamiento algebraico, está en la misma dirección de nuestro enfoque, pues no buscamos centrarnos sólo en hacer una introducción temprana del álgebra como tal, sino, desde la misma temática con la que se trabaja la matemática en primaria, iniciar un acercamiento temprano al trabajo con patrones numéricos y geométricos, que permita en los estudiantes, desarrollar y potenciar habilidades propias del razonamiento algebraico, tales como generalizar, justificar y formalizar.

Al hablar de razonamiento algebraico, refiriéndonos específicamente al trabajo en básica primaria, Godino y Font (2003) proponen algunas características del razonamiento algebraico que según los autores son “sencillas de adquirir por los niños” pero que en la práctica parecen complejas incluso en estudiantes de grados superiores. Por tanto estas características deben ser no sólo conocidas por los maestros en formación sino además estudiadas con detalle, teniendo en cuenta las implicaciones conceptuales y didácticas que un estudiante debe afrontar para desarrollarlas. Estas características son definidas como:

> 1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
> 2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones usando símbolos.
> 3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
> 4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con el de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del segundo conjunto. Se puede expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. (p.776)

En este trabajo nos centramos en desarrollar actividades que se encuentran íntimamente relacionadas con las dos primeras características propuestas por Godino y Font (2003); estas actividades fueron diseñadas y aplicadas durante nuestra investigación, y cuentan con una serie de secuencias de tipo numérico y geométrico, mediante las cuales pretendemos motivar en un grupo regular de estudiantes de básica primaria el desarrollo del proceso de razonamiento algebraico, mediante la identificación de patrones y abstracción de generalidades.

Por otra parte, Castro y Godino (2011), consideran el razonamiento algebraico elemental como:

> …el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización,

> relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.) (p.94).

Es evidente que no existe una gran diferencia entre esta concepción y la que hemos tomado anteriormente de Godino y Font (2003); pues nuestro interés está en enfatizar la capacidad existente en los estudiantes de básica primaria para enfrentar de forma adecuada actividades que requieran de su parte implementar procesos propios del razonamiento algebraico elemental.

Ahora presentaremos uno de los pilares fundamentales de esta investigación, y complemento esencial del razonamiento algebraico, conocido como proceso de generalización, también mostraremos las fases que lo componen, según el grupo Azarquiel (1993), apoyadas de algunos ejemplos.

3.2. PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Para el desarrollo de este trabajo, se tendrán en cuenta las fases de la generalización propuestas por el grupo Azarquiel (1993): Ver, Describir y Escribir; nuestro interés de estudio se basa en observar la forma en que los estudiantes identifican patrones en secuencias numéricas y geométricas, centrándonos en las principales dificultades que se les presentan a la hora de generalizarlos, ya sea de forma verbal o mediante una expresión general.

Cuando se habla de generalización, resulta casi imprescindible referirse a los patrones, que según Castro (1995), es aquello que se repite con regularidad; además, identificar un patrón es una forma de generar una “generalización de un fenómeno”; al respecto Kaput (1999) presenta una definición profunda y completa de la generalización:

> … [Generalizar consiste en] extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p.136)

Esta concepción constituye una mirada bastante acertada sobre la generalización, ya que la concepción común de generalización está relacionada con la capacidad de un individuo de abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas.

Por otra parte, según Butto y Rojano (2009) el proceso de generalización:

> …trata de que los niños aprendan a percibir patrones y sean capaces de expresar y escribir el patrón mediante actividades que involucran el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras, entre otras actividades. En esta ruta, se espera que los niños puedan detectar similitudes, diferencias, recurrencias, así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares. (p.4)

Cuando un estudiante se enfrenta a un problema que requiere de su parte llevar a cabo un proceso de generalización, no necesariamente puede llegar de inmediato a un resultado, todo lo contrario, el estudiante debe superar una serie de etapas o fases mediante las cuales logre de manera exitosa a una respuesta; estas fases han sido trabajadas e investigadas de manera detallada por el grupo Azarquiel (1993).

3.2.1. Fases de Azarquiel (1993) ver, describir y escribir. Como analizaremos más adelante, los datos muestran que cada una de estas fases son necesarias para que un estudiante desarrolle el proceso de generalización, sin embargo, la dificultad radica en cómo generar o motivar el paso exitoso de una fase a otra. En el capítulo de conclusiones intentaremos ofrecer luces sobre este aspecto. A continuación se analizará el sentido de cada una de estas fases y las dificultades que los alumnos encuentran en ellas; dando algunas indicaciones que podrían favorecer su desarrollo.

Ver: según el grupo Azarquiel (1993), esta primera fase:

> …se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía. Se trata de encontrar lo que se mantiene en cada caso, los factores clave, y conseguir, mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resumirá todas las situaciones, que permita <<contar en general>> sin referencia a los casos concretos. (p.31)

Esta se considera la fase inicial del proceso de generalización, cuando un estudiante se enfrenta a un ejercicio que requiera generalizar una situación geométrica o numérica, por ejemplo una secuencia. La principal acción que realiza el estudiante, es observar en la secuencia dada, ya sea numérica o geométrica, aquellos elementos que varían o permanecen constantes en cada término; según nuestro concepto, es precisamente este primer acercamiento, el que define la efectividad con que se desarrollará la situación.

No obstante cabe resaltar, que hacer un primer acercamiento a ejercicios de este tipo, con estudiantes que no han tenido la oportunidad de trabajar bajo ninguna circunstancia con secuencias, resulta complicado; no precisamente por la falta de habilidades de su parte, sino, por el “miedo” a enfrentarse a temas nuevos que posiblemente requieren un mayor esfuerzo de su parte.

Nuestra experiencia de aula, nos dejó ver, que resulta menos complejo encontrar similitudes y diferencias en secuencias de tipo geométrico, comparado con la de tipo numérico; al respecto Azarquiel (1993) argumenta:

> En un conjunto de figuras geométricas, es a menudo más fácil <<manipular>> la información, reordenando, comparando partes equivalentes, recordando figuras similares, etc. Las figuras geométricas permiten poner en práctica capacidades de visualización y de organización espacial, que pueden facilitar la aparición de la estructura que conduce a la solución. (p.31)

Finalizada esta primera etapa, es necesario, para continuar con el proceso de generalización, seguir un proceso en el cual los estudiantes, que han venido analizando visualmente las características que componen una secuencia, logren hacer una abstracción de lo observado que les permita expresar verbalmente lo identificado; es por esto que se propone la siguiente fase, Describir.

Cabe resaltar que el paso de la fase Ver a Describir requiere de las primeras acciones por parte del estudiante para transitar de sus ideas informales a representaciones formales de aquello que caracteriza la secuencia.

Describir: Según el grupo Azarquiel (1993):

> Esta descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido.

> Con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto, la regularidad, el modelo detectado. (p.37)

Para continuar con el proceso, el estudiante necesita haber superado de manera eficaz la primera etapa, habiendo hecho una profunda observación de las características esenciales de la secuencia, para lograr abstraer, interpretar y expresar adecuadamente lo observado, logrando expresar de forma verbal sus apreciaciones, por muy personales que estas parezcan. Referente a lo anterior, el grupo Azarquiel comenta:

> Expresarse no es fácil. Es necesario que exista inicialmente un clima abierto en el que haya libertad total para formular cualquier conjetura por personal que sea, observar cualquier propiedad por accidental que parezca, hacer cualquier descripción de caso por particular que resulte. (p.38)

Finalmente se propone una tercera fase con la cual se pretende abstraer los elementos más relevantes que se observaron en las dos anteriores fases; y como resultado final, llevarlo a una expresión que nos permita hallar cualquier término de la secuencia trabajada; de esta necesidad, surge la siguiente fase.

Escribir: El grupo Azarquiel expone:

> La expresión escrita, el registro de las palabras y de las ideas, es una fase avanzada del proceso de generalización, y de todas las formas de expresar una regla por escrito, la simbólica suele ser la más difícil. Por ello esta es la última fase, tanto en el proceso que lleva a generalizar como en su aprendizaje. (p.39)

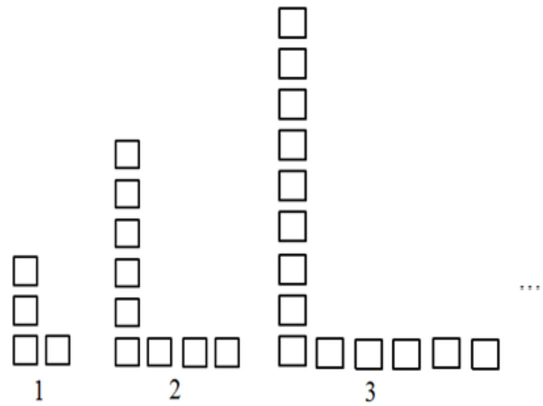
El que un estudiante haya avanzado hasta esta etapa, significa una gran ventaja, pues superar las anteriores, requiere un trabajo fuerte y significativo, que puede representar la llegada a la fase final, donde la abstracción de lo esencial representa haber culminado de manera exitosa el proceso de generalización; no obstante, el no haber alcanzado esta etapa final, no quiere decir que se haya fracasado en el proceso, todo lo contrario, esto quiere decir, que hay aún mucho trabajo por hacer y muy seguramente habrá que revisar y depurar los procesos anteriores. Por tanto, hay que poner especial atención a lo dicho por el grupo Azarquiel (1993); pues:

> Usar exclusivamente símbolos, por muy generales y correctos que sean, no es un índice absoluto de buen registro. Es necesario mantener expresiones intermedias e incluso cuando ya se manejen los símbolos, animar a los alumnos a traducir con palabras las expresiones simbólicas para enriquecer la expresión y reforzar el significado de los símbolos. (p.41)

Estas etapas encierran las condiciones necesarias y suficientes para desarrollar de manera adecuada el proceso de generalización, pues debemos ser conscientes de lo complejo que puede resultar este proceso en estudiantes que no hayan tenido un primer acercamiento con ejercicios que involucren secuencias; por tanto, como gestoras de un proyecto que busca hacer una introducción del proceso de generalización en estudiantes de básica primaria, consideramos como exitoso un proceso en el cual los estudiantes hayan alcanzado al menos la segunda fase, habiéndola realizado de forma satisfactoria, según lo referente a su edad y formación matemática.

A continuación mostraremos un ejemplo mediante el cual identificaremos las fases del proceso de generalización; además expondremos las principales estrategias que un estudiante puede emplear a la hora de desarrollar dicho proceso. Algunas de estas estrategias fueron planteadas e analizadas por Lannin (2005) y Sánchez, García y Mora (2009).

Observa la siguiente secuencia:

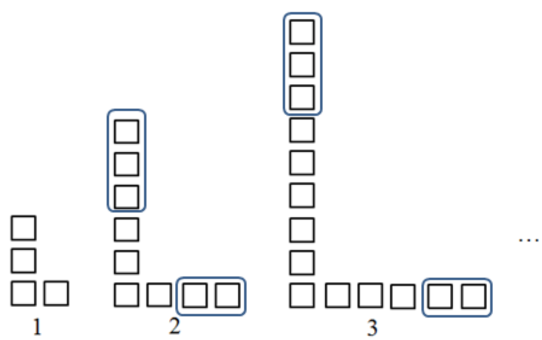


a. Representa la figura 4 y 5 de la secuencia.

b. ¿Cuantos cuadritos tendrá la figura de posición diez?

c. Escribe cómo le explicarías a un compañero, la variación del número de cuadritos que tiene la L en cada posición de la secuencia.

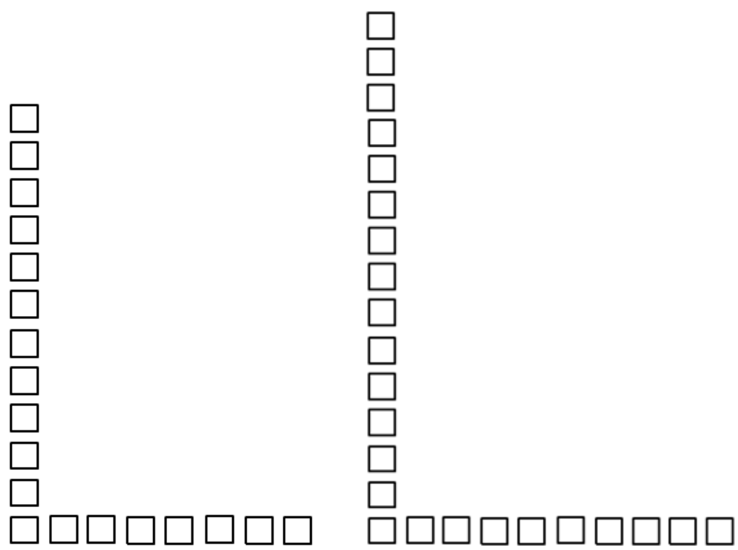
Ver: Identificar cómo varían los términos de la secuencia.



Notamos que la figura siempre forma una L y además va aumentando su longitud en cada iteración; al agrupar los cuadrados que aumentan en cada paso (señalados con color azul), vemos que siempre se agrega la misma cantidad, es decir, tres cuadritos arriba y dos en la parte inferior.

En esta secuencia los estudiantes pueden utilizar dos tipos de estrategias para identificar el patrón. La primera puede estar relacionada con la agrupación de cada conjunto de cuadraditos que se van agregando en cada paso; y la segunda con la comparación, entre dos figuras consecutivas.

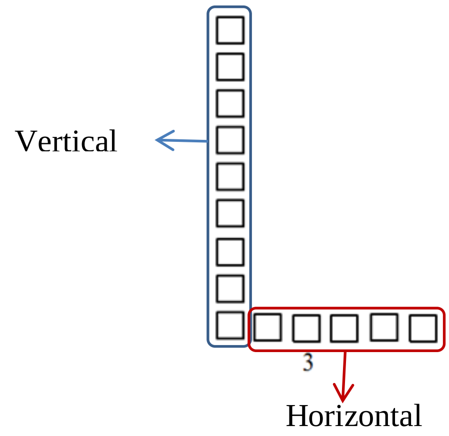
Identificando el patrón en la secuencia a partir de las estrategias descritas, los estudiantes podrán generar las siguientes dos figuras que corresponden a la posición 4 y 5.



4 5

Describir: Expresar verbalmente aquello que logró identificar en la fase anterior.

En esta fase el estudiante debe identificar la relación de la posición con el número de cuadrados de la figura, teniendo en cuenta la suma de los cuadrados horizontales, más los cuadrados verticales como se muestra a continuación:



La siguiente tabla muestra en detalle la secuencia desde la primera figura hasta la número cinco, donde se proporciona un patrón con el cual se puede hallar el número de cuadrados totales de cada figura según su posición.

Posición	**Vertical + Horizontal**	**Relación con la posición**	**Número de cuadrados**
1	3 + 1	$(3\cdot 1)+[(2\cdot 1)-1]$	4
2	6 + 3	$(3\cdot 2)+[(2\cdot 2)-1]$	9
3	9 + 5	$(3\cdot 3)+[(2\cdot 3)-1]$	14
4	12 + 7	$(3\cdot 4)+[(2\cdot 4)-1]$	19
5	15 + 9	$(3\cdot 5)+[(2\cdot 5)-1]$	24

Con ayuda de la anterior tabla, podemos encontrar el número de cuadrados de la posición diez, de la siguiente forma: $3\cdot 10 \;+\; 2\cdot 10 \;-1 \;=49$. El camino que acabamos de describir no es único pueden generarse otras formas que nos permitan determinar el número de cuadrados que conforman cada figura en cada paso, sin dibujar de manera explícita dicha figura.

Al desarrollar esta fase el estudiante puede ayudarse empleando estrategias que le permitan avanzar de manera ágil en el proceso de generalización; las estrategias recomendadas son: relacionar, organizar, comunicar, asignar, descomponer y suponer-comprobar. Del buen manejo que se le dé a estas estrategias y la recursividad del estudiante a la hora de aplicarlas, depende en gran parte el éxito de la actividad.

Escribir: En esta fase se pretende que el estudiante logre explicar el patrón que describe la secuencia. A partir de este proceso, podría hallar el número de cuadrados en cualquier posición. Una descripción adecuada, con la cual es posible interpretar el patrón que describe la secuencia sería:

> “Para hallar la cantidad de cuadrados que hay en la parte vertical, se multiplica tres por el número de la posición, y para hallar la cantidad de cuadrados de la parte horizontal multiplicamos por dos el número que me indica la posición y restamos uno, al resultado que obtenemos a partir de esa operación. El total de cuadrados se obtiene al sumar los valores encontrados.”

Por tanto una expresión algebraica que me permite hallar el total de cuadrados en cualquier posición es: $3n + [2n - 1] = 5n - 1$, tomando n como la posición de la figura.

En esta última fase, con la cual podríamos describir el proceso de generalización que surge a partir del problema propuesta, sería de gran ayuda para los estudiantes implementar algunas estrategias que les permita avanzar con mayor seguridad hacia una correcta solución de la situación; las estrategias sugeridas para esta fase son: asignar, comunicar e invertir.

Cabe resaltar que esta última fase donde se pretende que el estudiante logre llegar a una expresión algebraica, no aplica en nuestro caso, pues hemos trabajado con estudiantes de quinto primaria, quienes no habían tenido ningún tipo de formación respecto a este tema; sin embargo, los resultados obtenidos nos dejaron ver que ellos logran generalizar el patrón que compone la secuencia en de forma verbal.

Consideramos que en el estudio de los datos que hacen parte de nuestra investigación, podremos identificar cómo los individuos que hacen parte de nuestro trabajos logran Ver, Describir y Escribir frente a una situación matemática que requiere el desarrollo de un proceso de generalización.

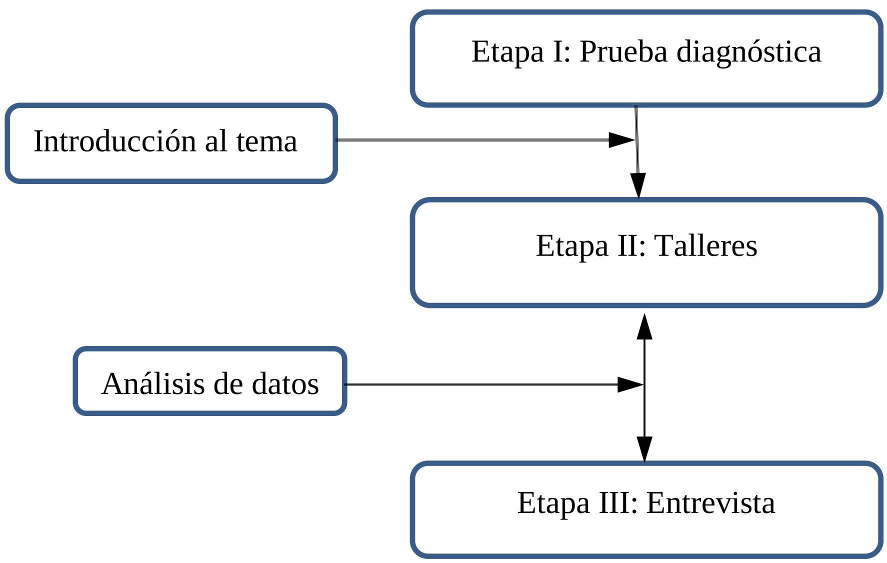
4. DISEÑO Y MÉTODO

Esta investigación es de orden cualitativo descriptivo ya que buscamos estudiar con detalle qué caracteriza el proceso de generalización mediante las fases de Azarquiel (1993), en un grupo de estudiantes (9-12 años).

Nuestro método está organizado en tres etapas: la primera consiste en la aplicación y análisis de una prueba diagnóstica; la segunda consiste en el diseño y aplicación de una secuencia de talleres con dos grupos regulares de estudiantes; la tercera y última etapa consiste en el diseño y aplicación de una entrevista a un grupo de cinco estudiantes que participaron en las etapas anteriores.

Las tres etapas de nuestro método se concatenan en un análisis centrado en la manera como los estudiantes pueden desarrollar el proceso de generalización a partir del estudio de secuencias geométricas y numéricas.

Figura 1. Estructura general del método



A continuación describiremos cada etapa teniendo en cuenta el grupo de estudiantes que hace parte de esta investigación.

1. *Prueba diagnóstica*: Esta etapa consiste en el diseño, análisis y aplicación de una prueba diagnóstica a dos grupos de estudiantes de quinto primaria (un total de 79 estudiantes). Con esta primera actividad buscábamos hacer un acercamiento inicial a un grupo regular de estudiantes con el fin de identificar sus fortalezas y debilidades, al estudiar secuencias numéricas y geométricas. Específicamente, nos interesó analizar si las fases del proceso de generalización (Ver, Describir, Escribir) estaban presentes en su trabajo.

2. *Diseño y desarrollo de una secuencia de enseñanza*: Teniendo en cuenta los resultados de la etapa anterior, diseñamos y aplicamos durante catorce horas, cuatro talleres, con dos cursos de quinto primaria. Cada uno de ellas cuenta con un análisis a priori y un análisis a posteriori. Estos análisis buscan determinar en qué fase del proceso de generalización se encuentran los estudiantes y cuáles son las estrategias que desarrollan en cada fase.

3. *Entrevista:* Con el diseño y desarrollo de esta entrevista, buscamos determinar de manera más específica las fases de la generalización que los estudiantes lograron alcanzar después de la etapa anterior; cabe resaltar que cada una fue grabada y transcrita con el fin de obtener mejores resultados. Esta entrevista constó de tres secuencias, dos de tipo geométrico y una de tipo numérico, que fueron implementadas, pensando en el proceso que se había realizado anteriormente. Esta entrevista fue desarrollada con cinco estudiantes que fueron seleccionados del grupo de trabajo, teniendo en cuenta su buen desempeño durante las actividades realizadas.

Cada una de las etapas desarrolladas durante nuestro trabajo de investigación, estuvo constituida por un análisis a priori y un análisis a posteriori, con los cuales damos a conocer la intensión de cada actividad y el análisis de los resultados que se obtuvieron al aplicarla. El análisis a priori, describe el tipo de acciones específicas, estrategias y solución que esperamos los estudiantes desarrollen en cada fase del proceso de generalización (Azarquiel, 1993): Ver, Describir y Escribir. Por otra parte, el análisis a posteriori, está compuesto por una introducción a los resultados y una descripción de las acciones que realizan los estudiantes mediante ejemplos, identificando cada una de las fases del proceso. Con este análisis buscamos identificar cuáles de dichas fases son desarrolladas por los estudiantes y qué tipo de estrategias usan al afrontar el análisis de una secuencia.

Cada uno de los resultados que se analizan para cada etapa son finalmente organizados y generalizados en el capítulo de conclusiones; a través de aquello que permaneció común durante todas las etapas de la investigación, así como de las dificultades que asociamos al paso de una fase a otra.

4.1. PRUEBA DIAGNÓSTICA

El objetivo principal de esta prueba es detectar la manera como los estudiantes abordan situaciones relacionadas con la identificación de patrones y relaciones. Como mostramos en los antecedentes de este trabajo el primer estándar en Álgebra que propone la NCTM contempla para el grupo de 3 a 5:

- Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos.
- Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas (p. 162).

En una experiencia previa con los grupos que hacen parte de esta investigación, se detectaron un conjunto de dificultades que tienen los estudiantes al resolver situaciones matemáticas; estas dificultades están relacionadas con la lectura comprensiva de un problema y su disposición para trabajar sobre las situaciones. La actitud de los estudiantes refleja su apatía hacia el estudio de las matemáticas, parecen estar familiarizados sólo con situaciones numéricas que no requieren de procesos propios de las matemáticas como: reflexionar, proponer, argumentar. Vemos que esto se da por la forma como enseñan sus profesores, como lo especifica Molina (2011)

> La capacidad de alumnos de educación básica de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos, sugiriendo que las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra pueden ser debidas, en gran parte, al tipo de enseñanza recibida. (p.4)

Con este panorama decidimos realizar una prueba diagnóstica que nos permitiera conocer de manera más sistemática el estado actual de los estudiantes, es decir: su aptitud para resolver una situación, el conocimiento matemático que ponen en juego y en general, el nivel de desarrollo que habían logrados de los estándares descritos.

La prueba diagnóstica está constituida por cuatro situaciones, que fueron presentadas de forma escrita a los estudiantes, para ser desarrolladas de manera individual en un tiempo máximo de 90 min. A continuación aparecen los problemas propuestos y un análisis sobre el tipo de solución que los estudiantes dieron, centrando nuestra atención, en las dos primeras situaciones.

Situación 1. Los siguientes números forman una secuencia, encuentra los números faltantes.

3, 5, 9, 15, ___, ___, 45, ___

Explica con tus propias palabras cómo encontraste los valores que faltaban.
Inventa dos secuencias diferentes, en donde no aparezcan algunos de sus valores. Imagina que eres un profesor o profesora de matemáticas y prepara esta actividad para tus estudiantes. Explica cuál es la clave para encontrar los valores en cada secuencia y cómo la construiste.

4.1.1 Análisis a priori

a. Un posible camino de solución

Esperábamos que en la primera situación los estudiantes identificaran el patrón mediante el cual se va generando cada uno de los términos de la secuencia geométrica.

3, 5, 9, 15, 23, 33, 45, 59

2 4 6 8 10 12 14

En esta secuencia, vemos que la variación de una posición a otra está relacionada con la siguiente ley de formación: al primer número se le sumas dos, al siguiente cuatro, y así sucesivamente se van sumando los múltiplos de dos, para poder hallar los términos faltantes.

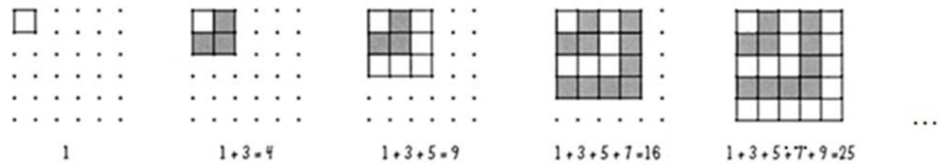
Al identificar el patrón de los ocho términos de la secuencia, los estudiantes deben expresar verbalmente la manera como cualquier término de la situación puede ser generado. Se espera que los estudiantes propongan nuevas secuencias en donde se identifique un patrón específico para cada una.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: En esta fase esperamos que los estudiantes encuentren la "ley" de formación que generaliza la secuencia numérica y además permite hallar los términos faltantes. Los estudiantes inicialmente tendrían que ver la diferencia que hay de un término a otro, y finalmente encontrar que esa diferencia corresponde a los múltiplos de dos. Las estrategias asociadas a esta fase son: Comparar, Diferenciar y Completar.

Describir: En esta fase esperamos que los estudiantes describan con sus propias palabras, la ley de formación que identificaron en la fase anterior, observando que la secuencia numérica va aumentando ya que se están sumando en cada iteración los múltiplos de dos, o de manera más sencilla, explicando con sus propias palabras las variaciones que logran identificar en la secuencia. Las estrategias recomendadas para esta fase son: Identificar, Relacionar y Comunicar.

Situación 2. Observa cuidadosamente la siguiente figura:



En ella aparecen cinco cuadrados diferentes que se han formado siguiendo un patrón. Dibuja los siguientes tres cuadrados y expresa el patrón en forma numérica tal como aparece en la parte inferior de cada cuadrado.

Explica con palabras en qué consiste el patrón, es decir, qué es lo que se repite que te permite conocer cómo se forma cada cuadrado y cómo se forma cada suma que aparece en la parte inferior.

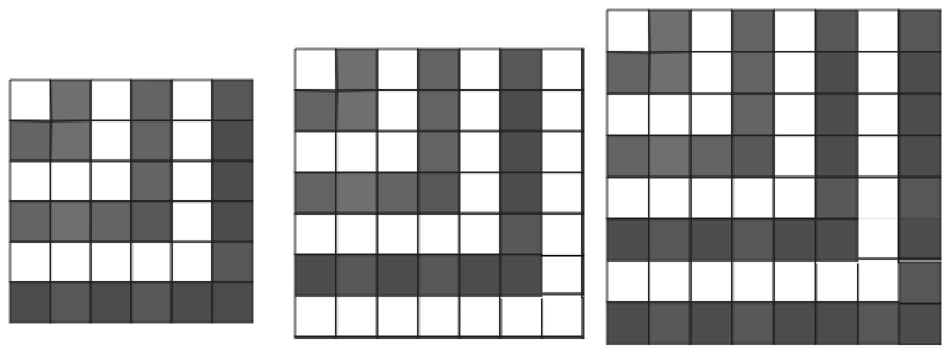
¿Por cuántos cuadrados pequeños estará formado el cuadrado que se obtiene al repetir el patrón 20 veces? ¿Cuál es la suma que resulta en ese cuadrado?

a. Un posible camino de solución

En esta situación consta de una secuencia geométrica y a la vez numérica, un posible camino para iniciar su análisis es:

Dibujar los siguientes tres cuadrados y expresar el patrón en forma numérica tal como aparece en la parte inferior de cada cuadrado; explica con palabras en qué consiste el patrón, es decir, qué es lo que se repite que permite conocer cómo se forma cada cuadrado y cómo se forma cada suma que aparece en la parte inferior.

En este ítem se espera que los estudiantes identifiquen la variación que hay de una figura a otra; notando que en la primera posición se tiene un solo cuadrado, en la segunda posición aparece el mismo cuadrado y la adición de tres más, para formar un cuadrado más grande; en la tercera posición se agregan cinco cuadrados; en la cuarta, siete y en la quinta nueve. Además, el número de cuadrados que se van agregando es el mismo número que se agrega en la secuencia numérica. Los estudiantes por medio del análisis anterior y la figura geométrica pueden hallar las tres siguientes figuras:



Al hallar la secuencia numérica, según el análisis anterior los números que se van añadiendo son los números impares; entonces los tres patrones siguientes serían:

La posición seis: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$
La posición siete: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$
La posición ocho: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$

¿Por cuántos cuadrados pequeños estará formado el cuadrado que se obtiene al repetir el patrón 20 veces? ¿Cuál es la suma que resulta en ese cuadrado?

En este ítem esperábamos que los estudiantes encontraran la relación del número de posición de cada figura de la secuencia, con el número de cuadrados pequeños; teniendo en cuenta que el total de la suma de los términos del patrón numérico, es el total de cuadrados en dicha posición. Aunque algunos estudiantes construirán la figura de la posición veinte, y contarán el total de cuadritos; y sumarán los veinte primeros números impares para obtener el patrón numérico.

Número Posición	Número cuadrados	Relación
1	1	$1 \cdot 1$
2	4	$2 \cdot 2$
3	9	$3 \cdot 3$
4	16	$4 \cdot 4$
5	25	$5 \cdot 5$
6	36	$6 \cdot 6$
7	49	$7 \cdot 7$
8	64	$8 \cdot 8$

Vemos que la relación del número de posición con el número de cuadrados es que la posición se multiplicaría por él mismo y obtenemos la cantidad total de cuadrados que tiene la figura correspondiente.

Para la posición veinte seria $20 \cdot 20 = 400$ y la suma de ese cuadrado también es cuatrocientos, el patrón numérico sería: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 = 400$.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: En esta fase esperamos que los estudiantes encuentren la variación de la secuencia y logren identificar la relación que hay entre el patrón numérico y el gráfico. Esperamos que vean que a medida que se agregan los cuadrados a cada figura, esa misma cantidad se agrega en la suma numérica inferior; y además esa cantidad corresponde siempre a un número impar. Otra característica importante de esta secuencia, que posiblemente puedan encontrar los estudiantes, es que la suma numérica inferior coincide con la cantidad de cuadrados que se encuentran al interior de la figura. Las estrategias que pueden darse en esta fase son: Identificar, Dibujar, Completar, Relacionar y Contar.

Describir: En esta fase esperamos que los estudiantes describan con sus propias palabras la variación que encontraron en la fase anterior. Buscamos que expresen verbalmente el patrón que describe tanto la secuencia numérica como la geométrica, observando que la suma de números impares es un cuadrado perfecto. Por otra parte los estudiantes podrían comparar las figuras ya dadas e identificar que el número de cuadrados en cada figura corresponde al número de la posición elevado al cuadrado. Las estrategias que podrían usarse en esta fase son: Comparar, Razonar y Comunicar.

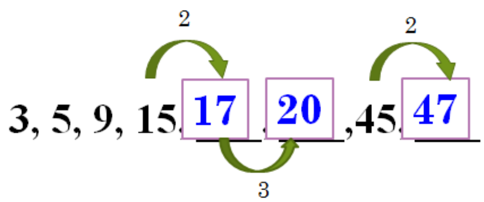
Escribir: En esta fase pretendemos que los estudiantes escriban o simbolicen aquello que han identificado en las dos fases anteriores, es posible que algunos estudiantes noten que si elevan al cuadrado el número que indica la posición, van a encontrar la cantidad de cuadrados que están al interior de la figura; y de esa manera lleguen a generalizar un patrón que les permita hallar el número de cuadrados en cualquier posición. Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Asignar e invertir.

4.1.2 Análisis a posteriori

Situación 1.

Ver: Cuando los estudiantes no logran identificar el patrón en todos los términos de la secuencia, generan patrones “sectorizados” donde sólo tienen en cuenta la regularidad que se da entre un subconjunto de los términos específicos de la secuencia; esto hace que los estudiantes propongan nuevas secuencias, por ejemplo:

EA42[1]**:**



También encontramos secuencias numéricas generadas por los estudiantes al determinar los términos de la secuencia, pero en estos casos no logran explicar su construcción. Por ejemplo:

ED12:

4, 8, 16, 32, <u>36</u>, 128, <u>132</u>

Mi secuencia va de cuatro en cuatro, y siempre voy a obtener números pares

Describir: Los estudiantes tienen una gran dificultad a la hora de expresar en palabras cuál es la forma en que se van generando los términos de la secuencia. Esto es, aunque logran encontrar correctamente los términos faltantes no logran expresar en palabra la forma como generaron dichos términos. Por ejemplo:

EA35: Sumándole a cada dígito de a dos veces hasta llegar al número final.

EA43: Porque primero va el tres, cinco, nueve, quince… Del tres al cinco son dos, del cinco al nueve son cuatro, del nueve al quince son seis, entonces del quince al veintitrés son ocho, del veintitrés al treinta y tres son diez, etc. <u>Y por eso van de dos en dos</u> 2-4-6-8-10-12 etc.

[1] **EA42** lo usaremos para referirnos a los estudiantes de forma abreviada; de tal manera que: **E** de Estudiante, **A** del curso que pertenece y **42** su código.

EA06: De dos en dos encontré los resultados.

Las anteriores expresiones por parte de los estudiantes nos permiten evidenciar su poca familiaridad con el tema, pues algunos estudiantes a pesar de que lograron ver el patrón que describía la secuencia, tienen muchas complicaciones a la hora de expresarlo de forma adecuada con los términos correspondientes.

Situación 2

Ver: Como planteamos en el análisis a priori esta situación pone en juego la identificación de un patrón gráfico que representa la suma de los primeros n números impares consecutivos cuya suma genera números cuadrados.

En esta situación esperábamos que gran parte de los estudiantes lograran identificar el patrón de manera gráfica, aunque no todos pudieran expresar los términos de la secuencia.

Los resultados muestran cómo la mayoría de los estudiantes, intenta identificar un patrón pero dada la complejidad que representa la situación, minimizan el nivel de abstracción reduciéndolo a patrones simples.

Por ejemplo EA26 describe el patrón como:

> El patrón consiste en que el primero es pequeño. El otro es más grande, el otro, otro poquito más grande. El otro también y el último es el más grande que los otros patrones que es en el inferior [Signos de puntuación agregados por las autoras]

Otro tipo de patrón es el descrito por EA21, quien identifica que en cada paso se agrega un cuadrado al lado del cuadrado. Al describir con palabras el patrón escribe:

> Cada cuadrado va aumentando, por ejemplo de 5x5 pasa a uno de 6x6

De la misma manera, EA20 escribe: “Porque yo multipliqué 7x7=49, 8x8=64, 6x6=36”.

Otros argumentos de este grupo de estudiantes tiene que ver con las *características estéticas* del dibujo resultante en cada paso. Por ejemplo EA18 escribe: “Hay que poner cuidado y siempre utilizar regla para hacer los cuadrados”.

Notamos que algunos estudiantes repiten los dibujos dados en la malla de puntos, al parecer al no encontrar un patrón o por la complejidad de la situación, dedican el tiempo de la prueba a repetir el planteamiento del problema; esta repetición no les permite ver el patrón gráfico o expresar con palabras aspectos claves del mismo.

También los estudiantes logran identificar el patrón de manera gráfica y asociarlo con el patrón numérico. En este grupo se destaca la descripción del patrón de manera más formal; por ejemplo la estudiante ED14 escribe: “Porque yo al sumar me di cuenta que cada uno de los números que yo sumaba que eran impares y que cada cuadrado llevaba un renglón por cada lado más que los anteriores” Los demás estudiantes de esta categoría identifican un “aumento” en el número de cuadrados pero no establecen la manera en que este cambio se da. Otro tipo de argumentos se relacionan con el número de cuadrados pequeños que se agregan en cada paso; por ejemplo ED20 identifica el patrón gráfico.

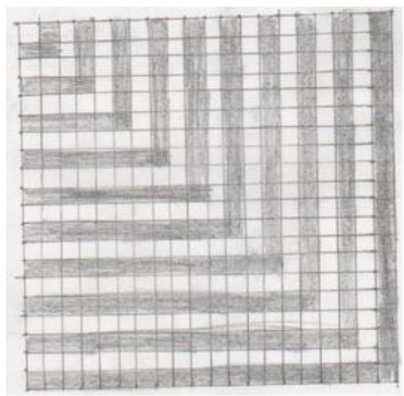
En este caso el estudiante identifica un patrón para generar cada cuadrado grande al ir aumentando en cada caso “un cuadrito” [con esto se refiere a construir una fila y una columna de cuadritos pequeños]. Pero al mismo tiempo determina el número de cuadrados específicamente que se agregan y mediante los cuales es posible escribir la expresión como la suma de los términos impares.

Describir: Otros estudiantes logran identificar el patrón de manera gráfica pero no pueden expresar la secuencia de términos, describir el patrón o generalizar cuál será el resultado de la suma en el paso 20. La descripción del patrón en palabras hace referencia sólo a la adición de un cuadrado pequeño sobre el lado del cuadrado grande. Por ejemplo EA08 escribe: “Consiste el patrón en: sumar un cuadrito más y así se va agrandando el cuadrado” o EA31 quien escribe: “Yo lo hice así porque cada vez se le suma un cuadrado” Los estudiantes no intentan determinar el número de cuadrados que se obtienen en el paso 20.

Son pocos los estudiantes que logran identificar el patrón gráficamente y expresar la representación que se da en la secuencia numérica. Por ejemplo EA33 logra seguir con los términos gráficos y algebraicos de los patrones dados, pero no puede describir con palabras cómo se generan dichos patrones, escribe: “Lo que yo hice fue que cada vez sume de a un cuadrado y me dio lo que necesitaba y después hice sumas y sume de a dos o sea 1+3+5+7+9+11+13+15=64 así fue como lo hice”. Los estudiantes en esta secuencia plantean que el patrón consiste en “aumentar en un número” es decir, se centran en la adición de un cuadrado pequeño sobre el cuadrado grande y no en la relación que se establece entre los cuadrados pequeños blancos y los negros.

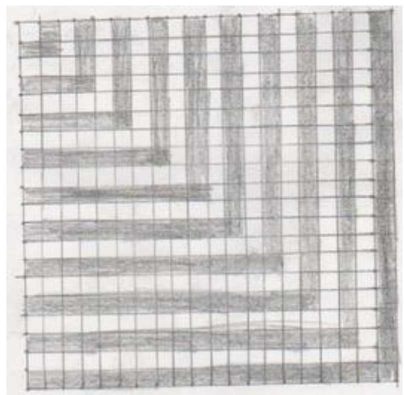
Un aspecto que llama nuestra atención es que ninguno de los estudiantes que participaron en la prueba hacen alusión a las características de los números que hacen parte de cada secuencia de términos, los números impares; ni al resultado de su suma, los número cuadrados, que quedan determinados al elevar al cuadrado el número de cuadrados pequeños que conforman el cuadrado grande.

Por otra parte en las últimas preguntas de este problema se perciben las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de las operaciones básicas suma y producto. Por ejemplo la estudiante EA06, dibuja la figura resultante después del paso 20; pero al calcular el número de cuadrados por el cual está formada la figura escribe: [20+20=40 en forma vertical].



En este caso suma el número de cuadritos pequeños que está formando cada fila del cuadrado grande, el número de veces correspondiente. Esta relación entre la generación del patrón mediante dos formas diferentes de representación, muestra cómo los estudiantes pueden estar más familiarizados con un tipo de representación y no con otra. El patrón que identifican de manera gráfica no pueden expresarlo en términos numéricos. Esta problemática generada por el tránsito entre un medio de representación y otro es común en los estudiantes. Quienes pueden encontrar la solución gráfica del problema pero no expresar en términos numéricos o de manera verbal cómo se generan las figuras.

Al realizar esta prueba, observamos que los estudiantes usaron diferentes estrategias que les facilitaba desarrollar el proceso de generalización. A continuación presentaremos alguna de esas estrategias acompañadas de ejemplos que las clarifican. Gran parte de los estudiantes inicialmente al afrontar las secuencias que componían la prueba, optaron por realizar las figuras de la secuencia, sin tener en cuenta lo extenso que podía llegar a ser este proceso, esto con el fin de observar las principales características que componían la secuencia. Por ejemplo EA06:



Otros estudiantes lograron identificar el patrón que podría facilitar el camino hacia la respuesta esperada. Este es el caso de EA33 quien escribe:

> "Lo que yo hice fue que cada vez sume de a un cuadrado y me dio lo que necesitaba y después hice sumas y sume de a dos o sea $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$ así fue como lo hice"

Finalmente y con mucho esfuerzo, una pequeña parte de los estudiantes logró comunicar de forma verbal los principales elementos, o más bien el patrón que describía la secuencia. Veamos a continuación lo escrito por ED14: "Porque yo al sumar me di cuenta que cada uno de los números que yo sumaba que eran impares y que cada cuadrado llevaba un renglón por cada lado más que los anteriores".

Los resultados obtenidos a partir de esta prueba, evidencian la poca o nula relación de los estudiantes con secuencias de tipo numérico, pues muy pocos estudiantes lograron ver el patrón que la describía. También fue evidente que los estudiantes tienden a hallar con más facilidad las características que describen el patrón de una secuencia geométrica. En lo referente al proceso de generalización la fase que mejor desarrollan es la de Ver, ya que visualmente advierten los principales cambios que ocurren de una iteración a otra.

4.2. TALLERES

El objetivo de estos talleres es desarrollar el proceso de generalización en los estudiantes que hacen parte de nuestro estudio, por medio del estudio de secuencias geométricas y numéricas teniendo en cuenta los elementos teóricos descritos en el Marco Conceptual. En cada taller buscamos intensificar el grado de dificultad de cada secuencia propuesta. Inicialmente trabajamos secuencias con las que hicimos una introducción a la generalización, cuyo objetivo era expresar el patrón en una expresión no necesariamente algebraica.

A continuación, mostraremos el objetivo que esperamos alcanzar con cada taller, así como el contexto en que cada uno se desarrolló con la población de estudio. Para esto hacemos referencia a los problemas que de cada Taller decidimos analizar para este trabajo. Para hacer esta selección tuvimos en cuenta aquellas situaciones en donde de manera más clara los estudiantes lograban desarrollar las fases, que consideramos para el desarrollo del proceso de generalización (En los anexos de este trabajo aparecen los talleres completos).

Taller 1. El objetivo de este taller, es hacer una introducción al proceso de generalización, mediante secuencias sencillas que nos permiten ver las principales características del tema; también buscamos que los estudiantes pierdan el “miedo” que pueda generar en ellos el enfrentarse con nuevas situaciones. Para el análisis, nos enfocaremos sólo en la primera situación propuesta.

Taller 2. Este taller consta de dos situaciones tomadas de Da Ponte, Matos y Branco (2009), las cuales muestran secuencias gráficas y numéricas. Con esta actividad buscamos que los estudiantes trabajaran de forma individual, para identificar las capacidades con las que cuentan respecto al tema; durante su desarrollo, hubo algunas intervenciones de tipo aclaratorio por parte de las profesoras encargadas (autoras de este trabajo), que en su debido tiempo se consideraron pertinentes.

La primera situación se desarrolló bajo la dirección de la profesora encargada y la participación de los estudiantes; en la segunda situación, algunos estudiantes trabajaron en grupo y llegaron a terminarla; otros estudiantes la desarrollaron como tarea, de tal manera que en el siguiente encuentro se socializó toda la actividad con el grupo completo.

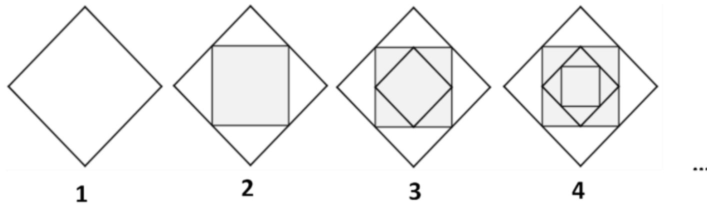
Taller 3. Este taller se desarrolló de forma individual como una evaluación de cada estudiante; al finalizar la prueba se realizó una socialización. El objetivo era ver los avances que se habían logrado en cada estudiante, en lo referente al proceso de generalización; para el análisis se tendrán en cuenta las dos situaciones que componen esta actividad.

Taller 4. Este taller cuenta con una característica que lo hace diferente a los demás, pues la secuencia que lo compone se encuentra en tercera dimensión, esta condición hace más difícil que los estudiantes logren visualizar los componentes de la misma. Por tanto, el objetivo de esta actividad, es motivar en los estudiantes, la necesidad de buscar un patrón, que les facilite encontrar la cantidad de cubos en cualquier posición de la secuencia; para el análisis se tendra en cuenta sólo la primera situación expuesta en el taller.

4.2.1. Taller 1

Situación 1.

Consideremos la siguiente secuencia.

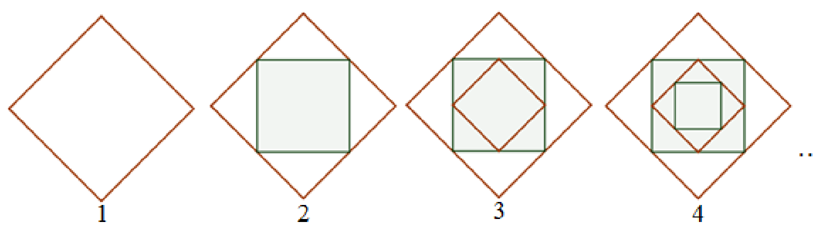


a. ¿Cuál sería la siguiente figura?
b. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura en la décima posición?

4.2.1.1 Análisis a priori

a. Un posible camino de solución

a) ¿Cuál sería la siguiente figura?



Se espera que los estudiantes encuentren la variación de la secuencia, notando que en la primera posición, se encuentra un rombo; en la segunda posición, dentro del rombo aparece un cuadrado; en la tercera posición, dentro del cuadrado se construye un rombo; y así sucesivamente. Es posible que algunos estudiantes logren observar, que los vértices de la nueva figura (cuadrado o rombo), tiene sus vértices en el punto medio de la figura agregada en el paso anterior.

Con el análisis realizado a la secuencia gráfica, los estudiantes deberían comprender el patrón y de esta forma, hallar fácilmente la siguiente figura; de tal manera que se podría generar la secuencia gráfica a partir del patrón: rombo-cuadrado-rombo-cuadrado-rombo...

5

b. *¿Cuántos triángulos tendrá la figura en la décima posición?*

En la primera posición tenemos un rombo, donde no se forma ningún triángulo, por lo tanto se tienen cero triángulos.

En la segunda posición, dentro del rombo está inscrito el cuadrado, donde la intersección entre ellos, forma cuatro triángulos que equivale al total de triángulos en esta figura. En la tercera posición, están los cuatro triángulos de la figura anterior, más los triángulos que se forman al inscribir el nuevo rombo dentro del cuadrado, donde se formarían cuatro nuevos triángulos; por lo tanto, tendremos ocho triángulos en total en la posición tres.

En la cuarta posición están los ocho triángulos de la figura anterior, más los nuevos triángulos que se forman al inscribir el nuevo cuadrado dentro del rombo, donde obtenemos cuatro triángulos más; en total se tienen doce triángulos. Y así sucesivamente se van aumentando cuatro triángulos en cada posición, hasta obtener la siguiente secuencia numérica:

$$\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{12}, \ldots$$

Al obtener la secuencia numérica, vemos que la relación de la posición con el número de triángulos se puede establecer de la siguiente manera:

En la primera posición son cero triángulos: $4 \cdot\ 1 - 1\ = 0$
En la segunda posición son cuatro triángulos: $4 \cdot\ 2 - 1\ = 4$
En la tercera posición son ocho triángulos: $4 \cdot\ 3 - 1\ = 8$
En la cuarta posición son doce triángulos: $4 \cdot\ 4 - 1\ = 12$

Según el análisis anterior en la décima posición la respuesta seria, $4 \cdot\ 10 - 1\ = 36$; por tanto habrán treinta y seis triángulos.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: Esta situación consiste en identificar cómo se va generando cada figura de la secuencia. Como mencionamos en párrafos anteriores ésta incluye la agregación de un cuadrado y un rombo (hacemos la diferenciación entre cuadrado y rombo para facilitar la explicación verbal por parte de los estudiantes; sin embargo, podrían referirse al rombo como un cuadrado rotado). Esperamos que algunos estudiantes logren identificar que los vértices de las figuras internas de cada elemento de la secuencia, parten de la mitad de los lados de la figura anterior. Las estrategias para identificar el patrón que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Comparar, Identificar y Dibujar.

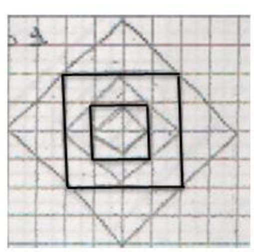
Describir: Para esta situación específica los estudiantes podrían expresar el patrón como: "rombo, cuadrado, rombo, cuadrado,…; teniendo en cuenta que la figura siguiente está dentro de la anterior". Además es importante que los estudiantes logren ver la relación entre la posición y el número de triángulos que tiene la figura; esto es, primero tendrán que hallar la secuencia numérica que representa la gráfica, determinando la variación y notando que “van a aparecer desde la segunda posición cuatro triángulos al introducir la figura (rombo o cuadrado)”. Las estrategias que podrán usar los estudiantes en esta fase son: Relacionar, Organizar y Comunicar.

Escribir: En esta situación no se llegará a ningún tipo de expresión, ya que nos interesa que los estudiantes encuentren la relación entre la posición y el número de triángulos. Cuando los estudiantes den respuesta al ítem b, van a identificar el patrón con sus propias palabras; un posible patrón sería “se multiplica, la posición menos uno, y se multiplica por cuatro” y así obtendremos la cantidad de triángulos en dicha posición. Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Asignar y Comunicar.

4.2.1.2 Análisis a posteriori El análisis de esta actividad fue realizado con base en el trabajo realizado por tres estudiantes, ya que en sus razonamientos encontramos evidencias que pueden asociarse con las fases del proceso de generalización.

Ver: En esta situación los estudiantes identificaron el patrón de la secuencia geométrica, buscando encontrar aquello que permanece constante, y lo que varía. En esta situación los estudiantes encontraron fácilmente el patrón de la secuencia y dibujaron la figura que aparece a continuación de manera correcta, tal y como lo habíamos previsto en el análisis a priori.

EA05:



Como puede verse en la figura el estudiante cinco logra identificar de manera gráfica la forma en que se generan los términos de secuencia.

Al expresar la forma en que se generan los términos de manera “verbal” este estudiante escribe el siguiente texto:

> EA05: La siguiente figura sería un rombo, luego viene un cuadrado, y luego otro rombo; después otro cuadrado, y otro rombo; yo lo descubrí, siguiendo la secuencia, de un rombo y un cuadrado, así sucesivamente.

A continuación expondremos la respuesta de otro estudiante, que identifica el patrón de la secuencia, pero en los dibujos que realiza muestra algunas confusiones:

> EA04: … en la secuencia es primero una figura con forma de rombo, después va un cuadrado, y así sucesivamente.

Es interesante que los estudiantes en la construcción de la figura, tuvieron en cuenta la segunda posible solución del análisis a priori, pero no lo mencionan en su razonamiento. Es decir, no manifiestan de manera explícita que las figuras se van construyendo con vértices que están sobre los puntos medio de la figura anterior. Esta es una característica que no todos los estudiantes logran identificar o tener en cuenta a la hora de continuar con la construcción de los términos de la secuencia.

Describir: Los estudiantes al identificar el patrón, lo transmiten por escrito o verbalmente. Tomando en cuenta el patrón identificado en la anterior actividad, los estudiantes deben relacionar el número de la posición con el número de triángulos que hay en la figura.

Algunos de los estudiantes hicieron la figura de la posición diez y contaron los triángulos que se formaban:

EA04:

El estudiante cuatro explica su respuesta de la siguiente forma: “El triángulo décimo [hace referencia a la figura que corresponde a la posición 10] tiene <u>24</u> triángulos, porque la secuencia es de rombos y cuadrados”

La solución dada por este estudiante no es la esperada, pues dibuja la figura de manera incorrecta, es decir, para su construcción no tiene en cuanta el patrón que describe la secuencia, esto lo conduce a una solución errónea.

Los otros dos estudiantes que hacen parte del análisis, hicieron un razonamiento correcto, tal y como lo habíamos supuesto en el análisis a priori; sus respuestas fueron:

EA05:

> Yo digo que en el décimo cuadro, hay 36 triángulos, porque en la guía que nos muestran, en el cuarto hay 12; yo creo que la secuencia sería de cuatro en cuatro. Y si a 12 le sumo 4 es igual a 16; $16 + 4 = 20$, $20 + 4 = 24$, $24 + 4 = 28$, $28 + 4 = 32$ y $32 + 4 = 36$.

ED09:

> $4 \cdot 9 = 36$. Como en la secuencia era rombo, cuadrado, rombo… y en la primera no habían triángulos sino un rombo, multiplico $4 \cdot 9 = 36$; cuatro porque, en la segunda era cuatro, en la tercera ocho, el cuarto doce, era obvio que la secuencia era de cuatro. Y nueve porque en el primero no hubo triángulos, o sino, hubiera sido multiplicado por diez.

Las respuestas dadas por estos estudiantes nos han dejado sorprendidas, pues a pesar de ser un taller introductorio, los estudiantes muestran un análisis bastante acertado, con el cual dejan ver sus habilidades respecto al tema.

Escribir: El objetivo de esta fase es llevar la secuencia a una expresión que me permita hallar la cantidad de triángulos en cualquier posición.

En esta situación no se pedía a los estudiantes encontrar una expresión, pero los estudiantes analizados lograron identificar una regularidad al solucionar el ítem b). Un ejemplo de esto, es el análisis hecho por el estudiante ED09, quien no solo se interesa por encontrar la cantidad de triángulos en la décima posición, sino, que además logra generalizarla para hallar la cantidad de triángulos en cualquier posición. Ya que él aclara que no se multiplica por diez, sino por nueve, porque en la primera posición no había ningún triangulo; y siempre por cuatro porque era lo que variaba en la secuencia. Así que en cualquier posición será “cuatro por, la posición menos uno”.

Esta actividad, nos permitió ver el tipo de estrategias que los estudiantes usan para llevar a cabo el proceso de generalización. Algunas de estas estrategias las expondremos a continuación, junto con ciertos ejemplos que evidencian su implementación. En la solución del primer ítem los estudiantes dejan ver cómo comparan las figuras que se les dan para identificar aquellos elementos que las definen; al respecto EA04 describe: **“**… en la secuencia es primero una figura con forma de rombo, después va un cuadrado, y así sucesivamente”; además los estudiantes logran representar de forma pictórica la siguiente figura de la secuencia guiados por los elementos que lograron identificar mediante la observación. Las soluciones dadas en el segundo ítem muestran que gran parte de los estudiantes logran relacionar la posición de la figura con el número de triángulos que la componen, identificando el patrón que describe la secuencia y comunicándolo de forma escrita. Por ejemplo ED09**:**

> $4 \cdot 9 = 36$. Como en la secuencia era rombo, cuadrado, rombo… y en la primera no habían triángulos sino un rombo, multiplico $4 \cdot 9 = 36$; cuatro porque, en la segunda era cuatro, en la tercera ocho, el cuarto doce, era obvio que la secuencia era de cuatro. Y nueve porque en el primero no hubo triángulos, o sino, hubiera sido multiplicado por diez.

Los resultados obtenidos a partir de esta actividad, generaron grandes expectativas, pues los estudiantes mostraron tener algunos conocimientos respecto al tema; esto motivó nuestra labor, para en adelante trabajar y potenciar esas habilidades; respecto al proceso de generalización hemos observado grandes avances, especialmente en el desarrollo de la primera etapa propuesta por Azarquiel (1993), pues los estudiantes mostraron identificar las principales características de la secuencia; la mayor dificultad identificada, radicó en que los estudiantes lograran expresar aquello que observaban, pues al expresarlo verbalmente no encontraban los términos que les permitiera dar a entender aquello que percibían.

4.2.2. Taller 2

Situación 1. Amelia fabricó el collar que aparece en el siguiente dibujo, para esto utilizó dos colores diferentes.

El patrón que Amelia utilizó para construir el collar es: Una perla negra y dos blancas, esto lo podríamos expresar como "Negra-Blanca-Blanca-Negra" o de manera más abreviada como NBBNBBNBBN… donde N significa Negra y B significa Blanca.

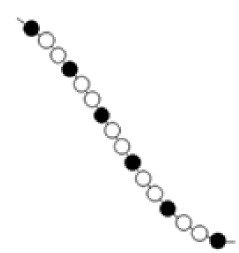
Con estos mismos colores construye tres collares que sigan patrones diferentes.

a. ¿Cuál es el patrón que seguiste en la construcción de cada collar?
b. ¿Cuál es el color que le corresponde a la bolita 50 de cada uno de los collares que fabricaste y del collar que fabricó Amelia? ¿Y a la 100?
c. Los collares que fabricaste, ¿tendrán siempre un número par o impar de bolitas? Recuerda que en la fabricación de los collares no se puede romper el patrón.

4.2.2.1 Análisis a priori

a. Un posible camino de solución

Con esta situación esperamos que los estudiantes diseñen tres collares con patrones diferentes al diseñado por Amelia.



Al observar el modelo de Amelia en el ejercicio, los estudiantes deben representar escrita y gráficamente tres modelos que sigan patrones diferentes.

(a) Los estudiantes deben crear nuevos diseños, y a su vez familiarizarse con el proceso de generalización identificando el patrón correspondiente a cada diseño.

(b) Esperamos que los estudiantes puedan mediante el dibujo realizado ver el patrón que describe el collar; además que logren identificar, haciendo uso de los múltiplos, el color de cualquier bolita en cualquier posición.

Ahora hallaremos el color de la bolita número cincuenta y la bolita número cien en el collar de Amelia.

El patrón que se observa en este collar es: una bolita negra y dos blancas; un bolita negra y dos blancas y así sucesivamente; esto nos indica que cada tres bolitas encontraremos una blanca, por tanto todas las bolitas que son múltiplos de tres serán de color blanco. Pero cincuenta no es múltiplo de tres, entonces se debe buscar un múltiplo de tres que esté cercano a cincuenta, en este caso es conveniente el número cuarenta y ocho. Entonces para llegar a cincuenta, sólo nos faltan dos bolitas que serán una negra y finalmente una blanca que se encuentra en la posición cincuenta.

El mismo análisis usado anteriormente nos servirá para hallar la bolita número cien; pues un múltiplo de tres que este próximo a cien es el noventa y nueve entonces la bolita cien será de color negro.

(c) Buscamos que los estudiantes continúen analizando el patrón de cada collar para identificar el patrón que lo describe y de esa forma puedan identificar si el total de bolitas en cada collar diseñado va a ser par o impar.

Un agregado muy importante en esta situación es el planteamiento de una forma de representar el patrón a partir de letras, esto es, N para asignar las bolitas de color negro y B para las de color blanco.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: Con esta fase buscamos que los estudiantes logren identificar el patrón que describe el collar que ellos mismos hayan diseñado y el diseñado por Amelia, observando la variación de cada collar. Algunas estrategias recomendadas para esta etapa son: Dibujar, Reconocer y Organizar.

Describir: Esta fase consiste en describir con sus propias palabras la variación que toma el collar de Amelia y los que cada estudiante haya diseñado, por ejemplo la descripción del collar de Amelia seria “una bolita Negra y dos Blancas, notando que cada tres bolitas se repite la de color Blanco, por tanto todos los múltiplos de tres serian de color Blanco”. Y de esta manera podría encontrar la relación del color con la posición de la bolita. Las estrategias recomendadas en esta fase son: Agrupar, Contar y Comunicar.

Escribir: Podemos observar que en esta situación se hace una introducción a la noción de patrones, pues al escribir la secuencia que guía cada collar, surge la necesidad de abreviarlo, colocando solo la primera inicial de cada color (por ejemplo en el collar de Amelia: NBBNBBNBB…). Este proceso puede clarificar en los estudiantes la idea de representación, pues la letra B significará que en esa posición el collar tendrá una bolita de color blanco. Algunas estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Asignar, Invertir y Descomponer.

Situación 2.

Muchas aves terrestres migran largas distancias. Los patrones más comunes involucran el vuelo al norte para reproducirse en los veranos en áreas templadas o árticas y el retorno a las áreas de invernada en regiones más cálidas del sur. Algunas de estas aves, se desplazan formando una "V" como se muestra en las imágenes. Diversos grupos de científicos han investigado esta organización, tratando de comprender cuáles son las posibles ventajas de este vuelo para tenerlas en cuenta en el diseño de los aviones.

En la secuencia que aparece a continuación, cada figura representa una bandada de aves y cada punto un ave. El número de aves en cada figura va aumentando por la agregación de nuevas aves.

a. ¿Cuántos puntos tiene la siguiente figura de la secuencia?

b. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 100 de esta secuencia?

c. ¿Existe una figura en esta secuencia que tenga 135 puntos? Si la figura existe, ¿cuál será la posición que tiene dentro de la secuencia?

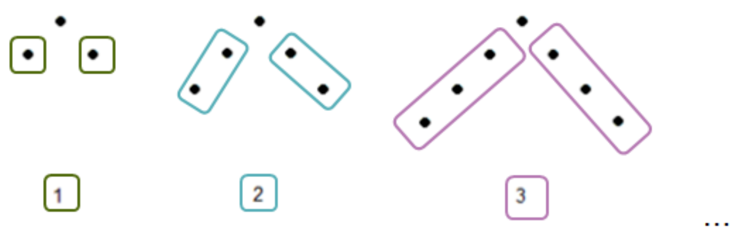
d. ¿Podrías describir un patrón, una regla general mediante la cual se van formando los términos de la secuencia? Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga la manera como las aves se van organizando en forma de "V" y cómo puedes determinar para cualquier figura que representa el vuelo, el número de aves.

a. Un posible camino de solución

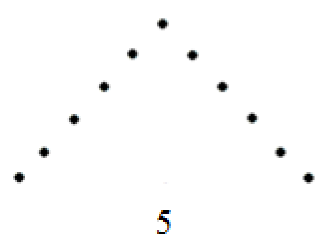
Para mostrar un posible camino de solución en esta situación, haremos un análisis para cada ítem, señalado a partir de la pregunta propuesta:

¿Cuántos puntos tiene la siguiente figura de la secuencia?

Esperamos que los estudiantes encuentren la variación de la secuencia, observando que siempre permanece un punto constante en la parte superior de la figura y los puntos que están a los lados van variando, de tal forma que siempre se añaden dos puntos a cada lado en cada iteración, como lo muestra la siguiente figura.



Por tanto la figura de la posición cinco es:



En esta posición la figura tiene once puntos.

¿Cuántos puntos tendrá la figura 100 de esta secuencia?

Esperamos que con la solución de la anterior actividad, los estudiantes hayan identificado el patrón que describe la secuencia, relacionando la posición de la figura con el número de aves que la componen. Esto permitirá a los estudiantes hallar el número de aves que tiene la figura cien, sin tener la necesidad de realizar el respectivo dibujo.

La tabla que presentaremos a continuación muestra en detalle la secuencia, de la figura número uno a la número cinco, esta tabla proporciona un patrón con el que se puede hallar el número total de puntos de cada figura según su posición.

Número de Posición	**Punto constante + Punto de los lados**	**Total de Puntos**	**Relación**
1	$1+2$	3	$1+(2.1)$
2	$1+4$	5	$1+(2.2)$
3	$1+6$	7	$1+(2.3)$
4	$1+8$	9	$1+(2.4)$
5	$1+10$	11	$1+(2.5)$

Ayudándonos con la información obtenida a partir de la anterior tabla, la cantidad de puntos en la figura de la posición cien es: $1+\ (2\cdot 100)=\ 201$ puntos.

¿Existe una figura en esta secuencia que tenga 135 puntos? Si la figura existe, ¿cuál será la posición que tiene dentro de la secuencia?

Esperamos que la solución de esta pregunta no genere mayor dificultad en los estudiantes, pues si lograron realizar un análisis de la secuencia como el mostrado en la anterior tabla, de seguro lograrán identificar cuál es la figura ciento treinta y cinco, guiados por la cantidad de puntos que indica el enunciado de la pregunta, sin tener la necesidad de realizar el dibujo; esto es, queremos hallar la posición que contiene ciento treinta y cinco puntos, sabemos que hay un punto constante y que la posición es la cantidad de puntos que hay a cada lado dividida por dos, entonces sería $135 - 1 = 134$ y $134 \div 2 = 67$. Luego la posición sesenta y siete es la que tendrá ciento treinta y cinco aves. Es posible que algunos estudiantes que no hayan identificado el patrón que describe la secuencia, logren encontrar la solución por medio de ensayo y error.

¿Podrías describir un patrón, una regla general mediante la cual se van formando los términos de la secuencia? Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga la manera como las aves se van organizando en forma de "V" y cómo puedes determinar para cualquier figura que representa el vuelo, el número de aves.

En este ítem se esperamos que los estudiantes tengan clara la relación de la posición con la cantidad de puntos de la figura, ellos podrían identificar el patrón de la secuencia de la siguiente manera: "siempre va a estar un punto constante, y el número de puntos de cada lado dividido en dos, representara la posición de la figura" o de forma más general "un punto constante y la posición se multiplica por dos".

Una explicación podría ser: "las aves siempre vuelan en forma de V, un ave se ubica como líder en la punta y las otras la van siguiendo, agregándose siempre dos aves a cada extremo".

b. Fases del proceso de generalización

Ver: En esta situación esperamos que los estudiantes encuentren la variación que existe en cada figura, que puedan identificar que un punto permanece constante en la parte superior y los puntos de sus extremos van variando. También podrían notar que siempre se van agregando dos puntos en cada iteración; al identificar estas características, los estudiantes podrán realizar con más destreza los siguientes ítems. Las estrategias recomendadas en esta fase son: Dibujar, Agrupar y Comparar.

Describir: Con esta fase buscamos que los estudiantes describan la relación que existe entre la posición y el total de puntos que compone la figura, tomando el análisis anterior de la variación de cada figura. Al desarrollar la anterior fase, esperamos que los estudiantes puedan notar que Invirtiendo la relación anterior, pueden encontrar la posición de la figura dado el número de puntos que la componen. Algunas de las estrategias recomendadas son: Organizar, Contar, Invertir y Comunicar.

Escribir: En esta fase, los estudiantes deberían haber identificado las características esenciales que componen la secuencia, esto con ayuda de las anteriores fases. Posiblemente los estudiantes no logren llegar a una expresión que les permita saber el número de aves en cualquier posición, pero al identificar el patrón que describe la secuencia, intuitivamente ya están generando una expresión. Las estrategias recomendadas son: Asignar y Relacionar.

4.2.2.2 Análisis a posteriori

Situación 1.

El trabajo en el primer ítem fue exitoso pues aproximadamente un 80% de los estudiantes logró el objetivo citado en el análisis a priori, que consistía en realizar el dibujo e identificar su respectivo patrón. A continuación mostraremos algunos de los razonamientos realizados por los estudiantes:

EA10:

> El patrón que yo utilicé para construir el collar es: una perla negra y una perla blanca. Esto lo podríamos expresar como (Negra-Blanca-Negra = N-B-N-B-N-B-N-B-N-B-N)

Gran parte de los estudiantes solo realizaron el dibujo y escribieron el patrón sin describirlo. Por ejemplo:

EA06:

NBNBNBNBNBNBNBNBNB… 

NNNBBBNNNBBBNNNBBB… 

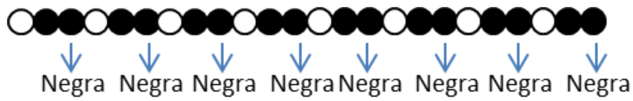
NBBBBBNBBBBBN…” 

Respecto al segundo ítem, encontramos algunos razonamientos generados por los estudiantes al determinar el color correspondiente a la bolita número cincuenta. En su mayoría, optaron por justificar su respuesta con base en los múltiplos, tal y como se predijo en el análisis a priori, esto dependiendo de la secuencia escogida, veamos algunos de esos razonamientos:

ED09:

> (Primer collar) Porque la posición 8 es blanca y 6x8=48, entonces faltan dos pepitas para completar las 50 y como las dos siguientes son negras entonces la bolita número 50 será negra (secuencia: NNBBNNBB…) [p8 significa la posición número ocho]

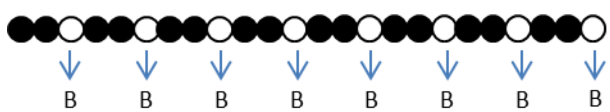
(Segundo collar) Porque cada 3 bolitas una es negra entonces 3x16=48 es negra, más 2, esto sería igual a blanca, negra, así que la bolita número 50 será negra (secuencia: BNNBNNBNNBNN…)



(Tercer collar) porque cada cinco bolitas hay una negra y 5x10=50, así que la bolita número 50 es negra (secuencia: BNNNNNBNNNNNBNNNNN…)

ED15:

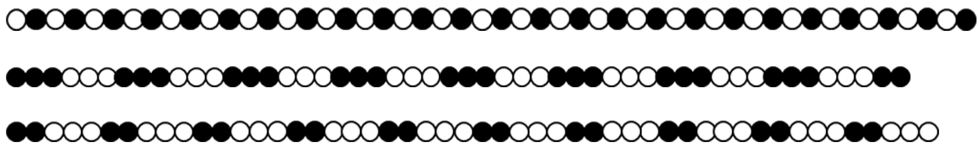
La bolita 50 es de color blanco porque cada tres pepitas encuentro una blanca, así que es múltiplo de 3 y un múltiplo de tres que se acerque a 50 es 48 que es blanca y le sumo 2 me da 50 que también es blanca (secuencia: NNBNNBNNB…)



Algunos estudiantes sólo escribieron el color de la bolita sin presentar algún razonamiento. Se dedicaron a realizar el collar hasta la bolita que se les pedía. Por ejemplo:

EA38:

> El color de la bolita 50 de cada collar es negro (secuencias: BNBNBNBNBN… NNNBBBNNNBBB… NNBBBNNBBBNN…)



Es evidente que el collar número 3 no cumple con las condiciones indicadas por el estudiante, pues siguiendo el patrón que él da, la bolita número cincuenta es blanca.

Logramos observar que aún existe dificultad por parte de los estudiantes a la hora de expresar en palabras los procesos realizados para justificar las respuestas. Para algunos estudiantes resultó difícil interpretar el enunciado, por ejemplo el ítem **(c)** donde se pedía ver si el collar fabricado tenía un número par o impar de bolitas, los estudiantes sólo colocaban la respuesta sin el razonamiento que los condujo a la misma, veámoslo:

EA10:

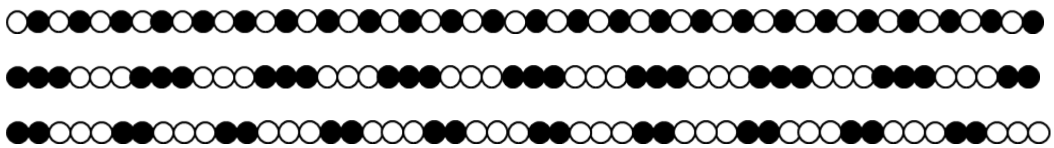
> Porque si el collar es de 10 bolitas significa que es par; porque si el collar es de 9 pepitas, significa que es impar.

EA06:

> El número de bolitas es par.

También encontramos algunas respuestas que mostraban más análisis e interpretación respecto al contenido de la pregunta, como ocurre en el siguiente caso:

EA38:

> Mi primer collar es par, porque el patrón se repite cada dos veces; mi segundo collar es impar, ya que el patrón se repite cada tres veces y mi último collar es par porque el patrón se repite cada seis veces
>
> 

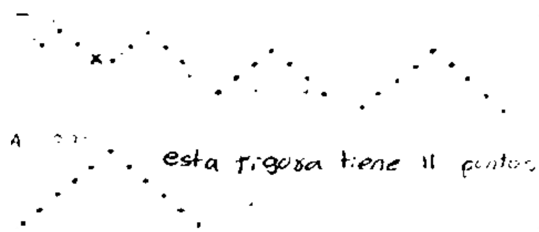
Esta pregunta en particular generó gran confusión en los estudiantes, a tal punto que fueron muy pocos los que intentaron resolverla y en menor cantidad los que lograron analizarla e interpretarla.

Situación 2.

En esta situación, algunos estudiantes trabajaron en grupo y llegaron a terminarla; otros estudiantes la desarrollaron como tarea, de tal manera que en el siguiente encuentro se socializó la actividad con el grupo completo.

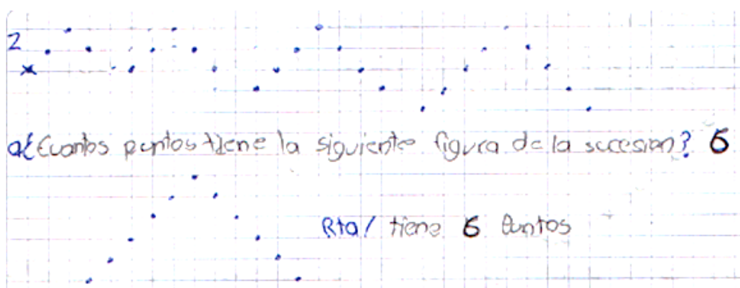
Con esta situación se realizó un trabajo muy interesante, pues casi todos los estudiantes lograron ver las características fundamentales de la secuencia, logrando identificar el patrón que la describe. A continuación mostraremos algunos de sus razonamientos acompañados de sus respectivos dibujos.

ED41:



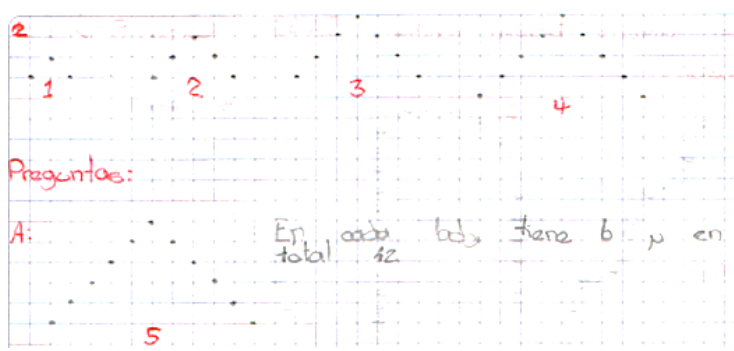
Con esta figura podemos ver que el estudiante logra identificar las principales características de la secuencia, ya que sus dibujos son correctos y logra llegar a la respuesta esperada.

ED03:



Este estudiante, también logra realizar exitosamente las figuras, pero al dar la respuesta se equivoca, esto indica una posible distracción de su parte, pues su respuesta que es seis puntos, corresponde a un extremo de la figura, incluido el de la punta y representa el ave líder.

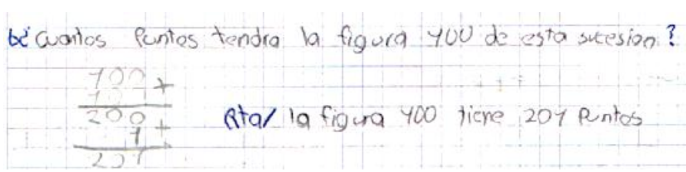
ED39:



Este estudiante al igual que el anterior realiza correctamente el dibujo pero al indicar el número de puntos que lo componen, dice que son doce puntos, aclarando que cada lado tiene seis; esta respuesta nos indica que el estudiante en su conteo toma en cuenta dos veces al punto que se encuentra en la punta y representa el ave líder.

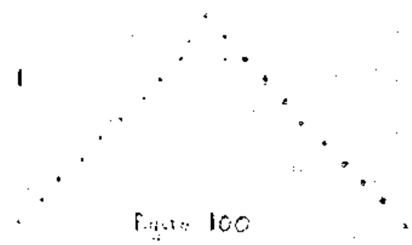
En la realización del segundo ítem, donde pedíamos encontrar el número de puntos que tenía la figura número cien, hubo elementos que llamaron nuestra atención. Algunos estudiantes que seguramente no habían logrado identificar el patrón que describe la secuencia en la solución del anterior ítem, construyeron la figura número cien y realizaron el conteo de puntos. También hubo estudiantes que desde el ítem anterior identificaron las características principales que componen la secuencia y realizaron de manera más rápida el proceso para saber la cantidad de puntos que compone la figura pedida. A continuación mostraremos algunas de sus respuestas.

ED03:



Este estudiante pudo encontrar de forma exitosa la relación que existe entre la posición de la figura y los puntos que la componen, tal y como lo predijimos en el análisis a priori; aunque el estudiante no muestra un razonamiento que justifique su proceso, logra llegar a la respuesta esperada.

ED28:



Este estudiante realiza una figura que no corresponde a la número cien e indica que es la figura cien, con esta respuesta deja claro que no ha interpretado correctamente la secuencia y tampoco logró encontrar el patrón que la describe.

ED39:

200 en cada lado y 400 en total

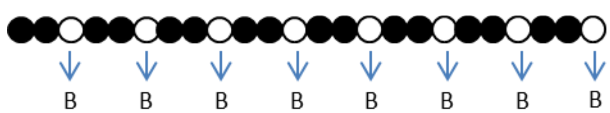
Este estudiante hace un intento por descifrar de forma escrita el patrón que describe la secuencia, pero es claro que no logra interpretarlo de manera correcta.

Los ítems *c* y *d* fueron trabajados por aproximadamente cinco estudiantes, pero en general ninguno logró interpretar lo que se les pedía; especialmente el ítem *c* generó gran confusión, pues a pesar que gran parte de los estudiantes lograron hallar el número de puntos que constituía la figura cien, al invertir de cierto modo la pregunta, dándoles la cantidad de puntos y pidiéndoles que hallaran la figura, esto los bloqueó y no les fue posible de ninguna forma (mediante dibujos o expresiones) hallar la respuesta esperada.

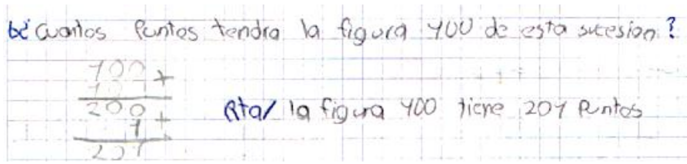
El ítem *d* no fue trabajado por ninguno, quizá por falta de tiempo o simplemente no lograron interpretar a qué nos referíamos con una “regla general que permita saber el número de puntos en cualquier término de la secuencia”. Estos últimos resultados nos han llevado a cuestionarnos el grado de dificultad de las actividades, pues al parecer es demasiado “fuerte” pedir una expresión que permita saber el número de puntos en cualquier posición, esto debido a que nuestros estudiantes están en quinto primaria y su formación matemática hasta el momento no les permite llegar a este tipo de generalidades. Por la situación anteriormente descrita, pensamos que era conveniente realizar una explicación general donde expusimos la solución mostrada en el análisis a priori a los ítems *c* y *d*.

A continuación mostraremos el tipo de estrategias que los estudiantes usaron en esta actividad para llevar a cabo el proceso de generalización. Algunas de estas estrategias serán presentadas con ciertos ejemplos que evidencian su implementación. Referente a la solución de la primera situación (collares), los estudiantes representan mediante dibujos el patrón que define el collar; luego, gran parte de ellos buscan los elementos que les permiten comunicar de manera verbal el patrón que describe cada collar y la estrategia que les permite saber el color de cada bolita, dada su posición. Al respecto **ED15** escribe:

> La bolita 50 es de color blanco porque cada tres pepitas encuentro una blanca, así que es múltiplo de 3 y un múltiplo de tres que se acerque a 50 es 48 que es blanca y le sumo 2 me da 50 que también es blanca (secuencia: NNBNNBNNB…)



Las soluciones dadas a la segunda situación (aves) evidencian la comparación que los estudiantes realizan entre las figuras dadas. Estas comparaciones les permite identificar aquellos elementos que describen la secuencia, y a su vez muestran la relación que hay entre la posición de la figura y el número de aves que la componen. Al respecto **ED03** responde:



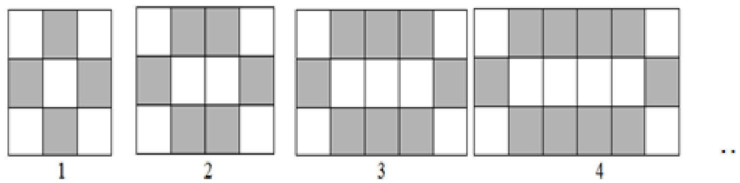
El desarrollo de estas actividades nos ha permitido observar algunos avances en los estudiantes, pues ya logran identificar las características esenciales que componen una secuencia, es decir, observan aquello que varía o permanece constante en cada una de ellas, especialmente si se trata de una secuencia geométrica, pues las figuras o dibujos ayudan a encontrar con mayor facilidad las variaciones de la secuencia.

Hemos detectado que la mayor dificultad presentada en los estudiantes al resolver este tipo de situaciones consiste en pasar de una fase a otra, pues a pesar de identificar visualmente los elementos de la secuencia, al expresarlo verbalmente o por escrito, tienden a confundirse. En cuanto a la actitud de algunos estudiantes, hemos visto ciertos cambios positivos, pues parecen estar más interesados en solucionar de forma adecuada los ejercicios, haciendo un esfuerzo por justificar y analizar desde varios enfoques la solución que pueden dar a un problema.

4.2.3. Taller 3

Situación 1

Sara construye una secuencia de figuras utilizando baldosas grises y blancas acomodándolas de la siguiente manera:



Responde las siguientes preguntas, explica todo tu razonamiento con tus propias palabras, con dibujos o cálculos.

a. Representa la 5ª y 6ª figura de la secuencia.
b. ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?
c. ¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?
d. Ayuda a Sara a completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta las figuras formadas con las baldosas.

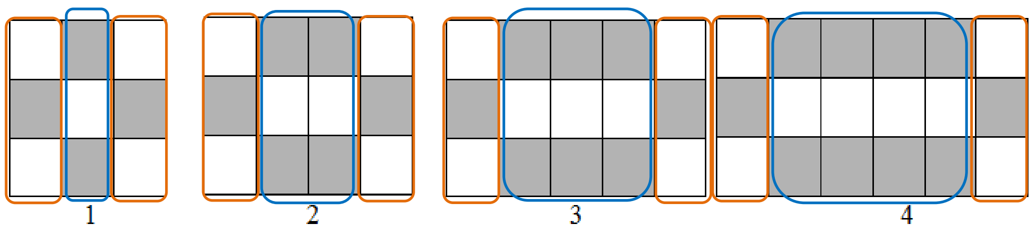
Número de la figura	Número de baldosas grises	Número de baldosas blancas	Total de baldosas
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
7			

Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.

4.2.3.1 Análisis a priori

a. Posibles caminos de solución

Primera solución:



Con esta parte de la actividad, se espera que los estudiantes puedan llegar a relacionar la posición de la figura con los cuadrados del centro (azul), teniendo en cuenta que el número de columnas centrales indica la posición y siempre se mantienen seis cuadrados constantes en los laterales (naranja).

Al realizar esta actividad, se solucionará el ítem *a) Representa la 5ª y 6ª figura de la secuencia;* Pues con el análisis realizado a la secuencia gráfica, se espera que todos los estudiantes comprendan el patrón y de esta forma, puedan hallar fácilmente las dos siguientes figuras.

En la primera posición: $(3 \cdot 1) + 6$ representa el total de cuadrados, ya que la tableta blanca, que representa el número de la posición, se repite tres veces y luego sumamos los seis cuadrados que van a permanecer siempre constantes.

En la segunda posición: $(3 \cdot 2) + 6$
En la tercera posición: $(3 \cdot 3) + 6$
En la cuarta posición: $(3 \cdot 4) + 6$

Mediante este proceso podemos observar que la variación corresponde específicamente a la posición de la figura.

(b) ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30? Según el análisis anterior sería: $3 \cdot 30 \ + 6 = 96$.

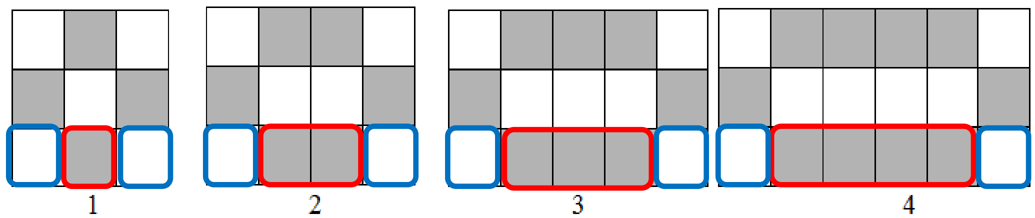
Se espera que las dos actividades anteriores, propicien en los estudiantes la capacidad para relacionar de forma ágil, las tabletas con el número de la posición y de esa forma les sea más sencillo responder a la tercera pregunta: *¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?*

Para la realización de este punto esperamos que los estudiantes inviertan el proceso que realizaron para el anterior ítem; $81 - 6 = 75$ y $75 \div 3 = 25$, la figura tendrá la posición 25.

Ayuda a Sara a completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta las figuras formadas con las baldosas. Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.

Esperamos que los estudiantes mediante la realización de la tabla y el análisis realizado en los anteriores ítems, puedan llegar sin mayor dificultad a las siguientes expresiones algebraicas: $3n + 6$ donde n representa la posición asociada al conjunto de los números naturales.

Segunda solución:



En esta solución se espera que los estudiantes logren relacionar la posición de la figura con las tabletas grises (rojo) y también observen que las dos tabletas blancas de los laterales permanecen constantes (azules). Tomando lo anterior como la base de un rectángulo cuya altura constante es de tres tabletas, los estudiantes podrán predecir la cantidad de tabletas en determinadas figuras.

Al realizar esta actividad, se solucionará el ítem *a)* pues con el análisis realizado a la secuencia gráfica, se espera que todos los estudiantes comprendan el patrón y de esta forma, puedan hallar fácilmente las dos siguientes figuras.

En la primera posición: $(1 + 2) \cdot 3$ Representa el total de cuadrados, en este patrón vemos que en la secuencia varía un solo término, que representa la posición de la figura, mientras que el tres y el dos permanecen constantes.

En la segunda posición: $(2 + 2) \cdot 3$
En la tercera posición: $(3 + 2) \cdot 3$
En la cuarta posición: $(4 + 2) \cdot 3 \ldots$

A continuación presentaremos las correspondientes respuestas a la pregunta *(b) ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?* Serán $30 + 2\ \cdot 3 = 96$ baldosas. Esperamos que los estudiantes lleguen a la respuesta, mediante ensayo y error:

$$23 + 2 \quad \cdot 3 = 75$$

$$25 + 2 \quad \cdot 3 = 81$$

Ayuda a Sara a completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta las figuras formadas con las baldosas. Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.

Esperamos que los estudiantes mediante la realización de la tabla y el análisis realizado en los anteriores ítems, puedan llegar sin mayor dificultad a la siguiente expresión algebraica: $(\mathrm{n} + 2) \cdot 3$

b. Fases del proceso de generalización

Ver: En esta situación consiste en que los estudiantes empiecen por identificar qué varía y qué se mantiene constante entre los términos dados de la secuencia gráfica, y mediante un análisis más a fondo de sus características, observen la relación existente entre la posición y la figura que se genera en cada paso de la secuencia. Tomando alguna de las dos posibles soluciones deben notar que las baldosas aumentan a medida que avanzan de posición. Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase serian: Dibujar, identificar, Comparar y Relacionar.

Describir: Los estudiantes deberán describir con sus propias palabras aquello que observaron, teniendo en cuenta la relación que existe entre la posición de la figura y el número de tabletas que la constituyen, por medio de la tabla podeos ver una mejor variación. Una buena descripción seria “que la cantidad total de baldosas es el número de la posición multiplicada por tres, más las seis que permanecen constantes” y con esa misma descripción podría invertir el resultado para poder hallar la posición con el total de baldosas. Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase serian: Relacionar, Invertir, Agrupar y Comunicar.

Escribir: En esta situación consiste en representar la secuencia por medio de una expresión algebraica; donde ya con ayuda de la tabla podría ver la variación de las baldosas blancas y grises con la posición de la figura. Para hallar las baldosas blancas tenemos "la posición más cuatro que permanecen constantes" y para las grises seria "el número de la posición por dos más dos que permanecen constantes" ya solamente tendrías que asignar un valor a la posición y aplicaría el patrón. Las blancas $n + 4$ y las Grises $2n + 2$. Que si sumariamos las dos obtendríamos el total de baldosas $3n + 6$. Las estrategias que podrían usar los estudiantes para esta fase serian: Asignar, Relacionar y comunicar.

4.2.3.2 Análisis a posteriori

Apenas terminamos esta actividad, y basadas en los datos suministrados por los estudiantes, centramos nuestra atención en identificar las tres fases de la generalización.

Para analizar esta actividad hemos tomado los datos de seis de los setenta y nueve estudiantes que participaron en el proceso de instrucción, teniendo en cuenta las evidencias que los estudiantes mediante su razonamiento realizaron y que pueden relacionarse con las fases del proceso de generalización.

Ver: Esta actividad fue diseñada para que los estudiantes fueran logrando de manera progresiva, identificar patrones geométricos a partir de aquello que se mantenía constante y/o variaba, según su punto de vista y la solución encontrada.

Tal y como lo predijimos en nuestro análisis a priori, todos los estudiantes lograron de manera satisfactoria realizar la quinta y sexta figura; unos con más precisión que otros, pero lo principal, es que los seis estudiantes analizados, en su totalidad lograron identificar las principales características de la secuencia; logrando identificar que las tabletas blancas del centro de la figura, coincidían con la posición de la misma. De esta manera hemos comprobado, que los estudiantes logran desarrollar sin ningún inconveniente la primera fase del proceso de generalización.

Describir: En esta actividad se pretendía que los estudiantes pudieran describir con sus propias palabras aquello que observaron en el anterior ítem y que les permitió hallar las figuras siguientes; en donde se busca expresar la regularidad percibida en un conjunto específico de términos de una secuencia. Azarquiel (1993), muestra que el primer paso hacia esta extensión se da al expresar la regularidad en un lenguaje natural y señala los diferentes grados de precisión que este lenguaje admite. En el análisis de los datos pudimos observar la gran dificultad que representa para los estudiantes expresar lo que inicialmente creen conocer; afrontar las contradicciones de sus propios razonamientos y las implicaciones sobre el problema. Un ejemplo de esto lo podemos evidenciar en ED20, quien realiza la primera actividad de generalización sin ningún problema, pero al tratar de hallar la cantidad de baldosas que contiene la figura treinta, realiza la multiplicación de treinta por tres $(30 \cdot 3)$, y no tiene en cuanta las seis baldosas que corresponden a los laterales. El estudiantes EA06, por su parte, muestra la multiplicación de treinta por dos $(30 \cdot 2)$ y especifÍca que hay 34 baldosas en total. El razonamiento de estos dos estudiantes podría implicar algún tipo de desconcentración, pues en los dos casos, lograron realizar correctamente los dibujos, identificando de manera gráfica las características de la secuencia; pero al parecer esta no fue base suficiente para realizar de manera acertada el siguiente ítem. El estudiante ED16 soluciona el ítem *b)* mediante una suma; donde primero suma treinta, más treinta, más treinta $30+30+30$ y luego al resultado obtenido, le suma tres, más tres $(3+3)$, obteniendo el resultado buscado (96). A continuación escribimos los resultados a los que llegan dos de los estudiantes:

ED09:

> Encontré esto porque en el número treinta me dice cuántas baldosas grises hay arriba, más las baldosas grises de abajo, esto es igual a sesenta; más las tres de cada lado, me da sesenta y seis, más las treinta blancas del medio, obtengo noventa y seis baldosas en total (al lado muestra las operaciones correspondientes).

EA05:

> La figura treinta tiene noventa y seis tabletas, porque en la figura treinta hay tres hileras de treinta y dos tabletas, y al multiplicar treinta y dos por tres $(32 \cdot 3)$ esto me da noventa y seis

Finalmente el estudiante EA13, también hace una correcta solución del ítem, pues realiza la suma $30 + 30 + 30 + 6$ de manera correcta, explicando al lado:

EA13:

> Los treinta son los que están por dentro del cuadrado y el seis lo obtengo de sumar tres más tres de los lados

Con lo mencionado podemos evidenciar que gran parte de la muestra de estudiantes analizados lograron llegar a una de las soluciones propuestas en el análisis a priori o a una nueva solución como es el caso del estudiante EA05.

Escribir: Otro de los objetivos propuestos para esta actividad es que los estudiantes mediante la realización de los anteriores ítems, logren representar el patrón encontrado por medio símbolo a través de una expresión algebraica. A continuación presentaremos algunos de los análisis que los estudiantes plasmaron, buscando dar respuesta al tercer ítem: *¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?* El estudiante ED16 hizo la figura y fue contando los cuadrados para finalmente concluir que la figura veintisiete es la que tiene 81 baldosas; a continuación escribimos explícitamente algunas de las respuestas dadas por los estudiantes:

EA05:

> La figura que tiene ochenta y un baldosas es la figura veinticinco, porque esa figura tiene tres hileras de veintisiete baldosas y al multiplicar veintisiete por tres $(27 \cdot 3)$ obtenemos como resultado ochenta y uno (81).

EA13:

> Es la figura veinticinco, pues la tercera parte de setenta y cinco es veinticinco, más seis me da ochenta y uno.

ED09:

> Es la posición veinticinco, porque veinticinco baldosas grises más dos, me da veintisiete, y veintisiete multiplicado por tres me da ochenta y uno.

Para finalizar este análisis, a continuación presentaremos las soluciones que los estudiantes observados dieron al cuarto ítem *(d) Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.*

En la solución de este ítem podemos observar que los estudiantes ED16, EA05, ED20 y ED09, quienes a pesar de haber realizado un buen trabajo en los anteriores ítems, no logran llegar a una expresión que modele la secuencia, es decir, cuando en la pregunta se les pide hallar una expresión que les permita saber la cantidad de baldosas en cualquier posición, los estudiantes, quizá tratando de evadir de algún modo la magnitud de la pregunta, acuden a tomar un ejemplo específico, dejando en claro que no logran interpretar a cabalidad la pregunta, como lo podemos ver a continuación:

ED16:

> De las baldosas grises, si está la figura seis, sume seis más seis y después, súmele dos, y de las blancas, seis más cuatro.

EA05:

> Para saber cuántas baldosas blancas y cuantas negras, es por el número de la figura que sigue, si es la cuatro, por ejemplo, se colocarían cuatro cuadritos negros y uno blanco a cada lado, y luego otra hilera, pero al revés, y luego otra hilera como lo habíamos hecho al principio.

ED20:

> Bueno Sara, vamos aumentando de tres en tres; Por ejemplo: Figura uno tenemos nueve y en la figura dos tenemos doce, la secuencia es la tabla del tres.

ED09:

> Muy fácil. Por ejemplo: la posición veinticinco tiene ochenta y una baldosas; esto significa que hay veinticinco tabletas grises arriba, más las veinticinco de abajo, me da cincuenta, más las de los lados me da ochenta y uno" [Este razonamiento va acompañado de su respectiva operación].

De otro lado están EA06 y EA13 quienes ni siquiera llegan a dar un ejemplo específico, tratando de dar una respuesta, ellos, simplemente dan una mirada muy general a cerca de lo que percibieron durante su experiencia previa. A continuación podremos observar sus respuestas:

EA06:

Pues suma todas las blancas y las grises al final.

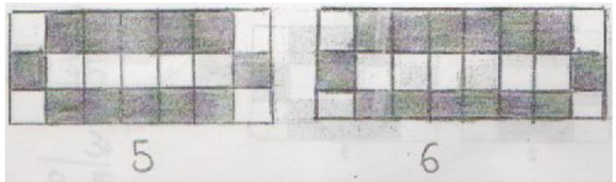
EA13:

A las grises le sumamos dos y a las blancas uno y se totaliza.

El desarrollo de esta experiencia nos permitió evidenciar que una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a este tipo situaciones, radica en representar una regla por escrito mediante los símbolos adecuados; estos resultados en realidad no son alarmantes, todo lo contrario, son los esperados, dadas las bases con las que cuentan los estudiantes. Sin embargo, cabe hacer énfasis en la importancia de hacer una introducción temprana del álgebra en el currículo escolar, pues estos primeros acercamientos van preparando al estudiante para lo que debe enfrentar en cursos más avanzados. Al respecto el grupo Azarquiel (1993) refiere: el principal objetivo de la generalización es: “la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan” (p.38).

Esta actividad nos permitió evidenciar el tipo de estrategias que los estudiantes usan para llevar a cabo el proceso de generalización. Expondremos algunas de estas estrategias complementadas con ciertos ejemplos que evidencian su uso. En el primer ítem los estudiantes comparan las figuras dadas, identificando los elementos que las caracterizan; representando de forma pictórica las figuras requeridas para continuar la secuencia. Este proceso lo realizan guiados por los elementos que lograron identificar mediante la observación. al respecto

ED09:

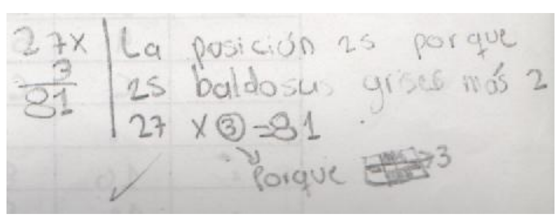


Las soluciones dadas en el segundo ítem muestran que gran parte de los estudiantes logran hallar la relación que existe entre la posición de la figura y el número de baldosas que la componen, identificando el patrón que describe la secuencia. Además los estudiantes dejan ver en su razonamiento que la posición de la figura coincide con el número de cuadrados blancos al interior de la misma, al comunicarlo de forma escrita. Por ejemplo EA05:

"La figura treinta tiene noventa y seis tabletas, porque en la figura treinta hay tres hileras de treinta y dos tabletas, y al multiplicar treinta y dos por tres $(32 \cdot 3)$ esto me da noventa y seis"

La solución del tercer ítem es sin duda una de las más complejas de realizar, pero a pesar de ello hubo estudiantes que lograron invertir el proceso hecho en el anterior ítem, llegando al resultado esperado, como lo mostraremos a continuación:

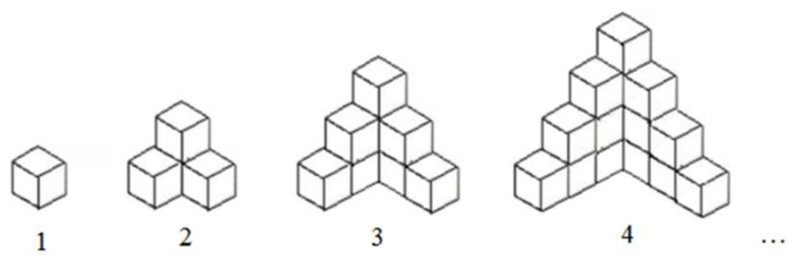
ED09:



A pesar de las dificultades encontradas respecto al desarrollo de esta actividad, nos reconforta el ver que ha habido un gran avance, sobre todo en lo referente a la implementación de diferentes estrategias que les permite a los estudiantes evidenciar con mayor precisión las características más relevantes de cada secuencia.

4.2.4. Taller 4

1) Considera la siguiente secuencia:



a) ¿Cuál sería la figura número seis?
b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura en la décima posición?
c) ¿Cuál sería la expresión que generaliza esa secuencia? ¿Por qué?

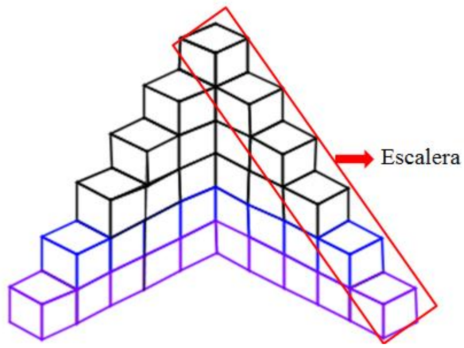
4.2.4.1 Análisis a priori

a. Un posible camino de solución

a) ¿Cuál sería la figura número seis?

Se observa que la variación existente en cada figura es el aumento de la base para formar las escaleras laterales que la conforman. Por tanto para encontrar las dos siguientes figuras debemos tener en cuenta la adición de los cubos en la base; esto es, en la posición dos se agregan tres cubos; en la posición tres, cinco cubos y en la posición cuatro, siete cubos. Para construir la figura de la posición cinco deben agregarse nueve cubos, ya que son los necesarios para completar la escalera. Finalmente para la posición seis debemos agregar once cubos teniendo en cuenta la anterior información.

La figura que se muestra a continuación es la correspondiente a la posición cinco cuya base es azul y la figura correspondiente a la posición seis que tiene base morada.



b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura en la décima posición?

c)

Si vemos el análisis del ítem anterior para dibujar las figuras de las dos siguientes posiciones, encontramos una secuencia numérica compuesta por números impares que se forma al ir añadiendo los cubos en la base.

La tabla que presentaremos a continuación muestra en detalle el análisis de la secuencia, de la figura número uno a la número seis, esta tabla proporciona un patrón con el que se puede hallar el número total de cubos en cada figura según su posición.

Posición de la figura	Cubos	Cubos añadidos	Total de cubos	Relación
1	0	1	1	$1 \cdot 1$
2	1	3	4	$2 \cdot 2$
3	4	5	9	$3 \cdot 3$
4	9	7	16	$4 \cdot 4$
5	16	9	25	$5 \cdot 5$
6	25	11	36	$6 \cdot 6$

Con ayuda de la información que contiene la tabla, la cantidad de cubos que tiene la figura de la posición diez es: $10 \cdot 10 = 100$. En total tiene100 cubos.

d) ¿Cuál sería la expresión que generaliza esa secuencia? ¿Por qué?

En este ítem podemos observar la relación que existe entre la posición de la figura y el número total de cubos que la componen; la tabla anterior nos permite ver que el número de cubos en cada figura, es el cuadrado de su posición. Por tanto, para encontrar la cantidad de cubos en cualquier posición se eleva al cuadrado la posición de la figura o se multiplica por sí misma.

De manera general, si queremos encontrar el número de cubos que componen la figura de la posición n, entonces procedemos de la siguiente forma: n^2 o $n \cdot n$.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: Para el desarrollo de esta fase, esperamos que los estudiantes encuentren la variación de la secuencia, notando que en cada iteración se van aumentando dos cubos en la base de cada figura; de tal manera que la figura geométrica va formando una escalera a lado y lado. Las estrategias recomendadas para el desarrollo de esta fase son: Construir (llevando en físico cubos de madera u otro material), Cambiar (pasar de segunda dimensión a tercera dimensión) y Comparar.

Describir: En esta fase esperamos que los estudiantes describan el patrón como una suma de números impares, refiriéndose al aumento de cubos en cada iteración. También que encuentren la relación de la posición con el número total de cubos, esto es: “El número total de cubos se obtiene al multiplicar la posición por sí misma”. Algunos estudiantes podrían identificar que: “El resultado de la suma de números impares, es un número cuadrado". Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Relacionar, Organizar y comunicar.

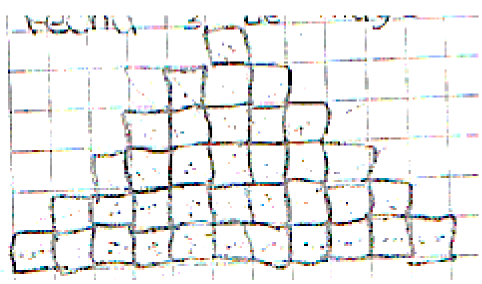
Escribir: En esta fase se pretende que los estudiantes logren una abstracción de lo esencial de la secuencia, es decir, una expresión que la generalice; Aunque este resultado posiblemente no se obtenga, debido a la formación académica y edad de los estudiantes, pero si es posible que ellos pueden describir el patrón de forma verbal. Las estrategias recomendadas en esta fase son: Asignar y descomponer.

4.2.4..2 Análisis a posteriori

Ver: Desarrollar esta fase en la secuencia dada, no resultó tan fácil como en las anteriores situaciones, pues ésta tenía un mayor grado de dificultad, debido a la representación de la escalera formada por cubos, esto hace que determianr las características mediante contéo sea más complicado para los estudiantes. Para que esta actividad transcurriera con éxito fue necesario utilizar cubos de madera, con el fin de que los estudiantes lograran ver las características de la secuencia. Después de la explicación que les dimos, los estudiantes se animaron a realizar las figuras y con ese proceso lograron identificar las características de la secuencia.

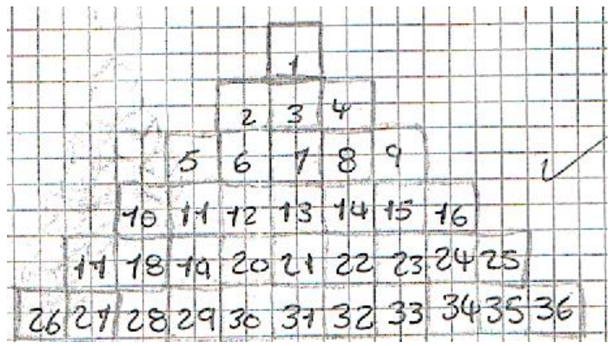
A continuación, mostramos algunas soluciones dadas por los estudiantes:

EA05:



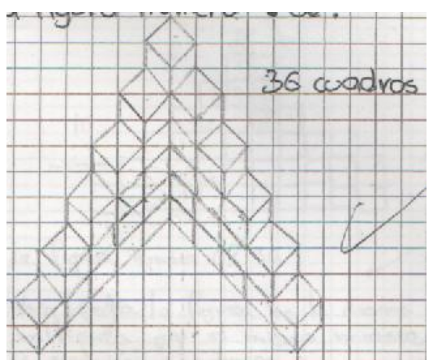
En respuesta al ítem *a,* el estudiante EA05 realiza el dibujo anterior, él verbalmente nos comentó que esta forma le permitía ver mejor las características de la secuencia. En efecto el dibujo realizado por el estudiante, cumple con las condiciones de la secuencia.

EA36:



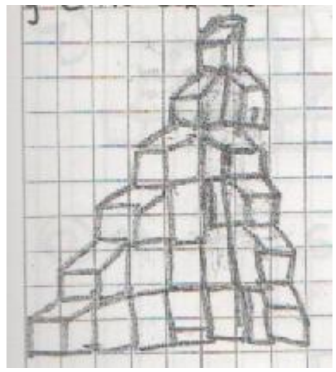
Este estudiante realiza una figura similar a la realizada por el estudiante 5, pero añade un elemento que posiblemente le permite observar con mayor claridad las características de la secuencia, pues enumera cada cuadro que la compone.

ED03:



El estudiante 3, también logra realizar exitosamente la figura correspondiente a la posición seis, pero en esta ocasión hay un nuevo elemento en relación a los dos estudiantes anteriores, pues el estudiante 3 intenta representar los cubos, lo cual representa un mayor esfuerzo de su parte, claro está, sin hacer demeritorio el buen trabajo y la recursividad de los otros compañeros.

EA04:



Este estudiante, hace un grán exfuerzo por realizar la figura en tercera dimensión, su resultado no es muy bueno, pero lo realmente importante es que interpreta correctamente el patrón y lo describe verbalmente de la siguiente forma: “La figura seis tendra 36 fichas, porque su secuencia es del mismo número y entonces sume y me dio 36 fichas”

Describir: En esta fase buscábamos que los estudiantes encontraran la relación que existe entre la posición de la figura y la cantidad de cubos que la componen, ayudándose con el análisis realizado en la fase anterior. Las respuestas que los estudiantes dan al ítem *b*, muestran el avance que han tenido en este tema; pues ocho de los nueve estudiantes analizados encontraron el patrón que describe la secuencia. A continuación presentaremos algunas sus respuestas.

ED17:

Porque yo multiplique $10 \cdot 10 = 100$.

ED09:

Porque $1 \cdot 1 = 1$ cubo, $2 \cdot 2 = 4$ cubos, $3 \cdot 3 = 9$ cubos, $4 \cdot 4 = 16$ cubos, entonces $10 \cdot 10 = 100$, entonces serian 100 cubos.

EA36:

La figura 10 tiene 100 cubos porque $10 \cdot 10$ da 100, se tiene que multiplicar por el mismo.

EA05:

La figura 10 tiene 100 cuadritos o cubos porque $10 \cdot 10 = 100$.

EA04:

La figura decima tendrá 100 fichas porque se multiplica $10 \cdot 10$ para que me dé el resultado.

EA25:

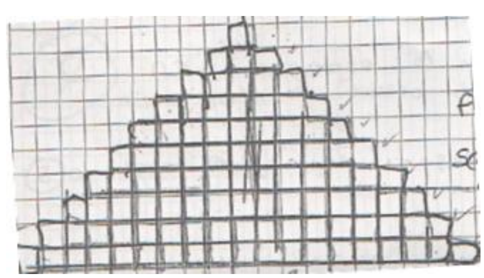
Cien, porque $10 \cdot 10 = 100$.

ED27:

Tendrá cien cubos, porque se multiplica por el mismo número.

EA38:

Porque se va multiplicando, $10 \cdot 10 = 100$", además hace la figura de posición diez.



ED03:

> La figura 10 tiene 52 cuadrados, para que me diera 52 en la figura, yo hice esto, sume 36 los cuadros de la posición 6, y 16 de la figura cuatro, entonces la suma me dio 52 cuadros.

Éste estudiante realiza un análisis diferente al presentado por sus otros compañeros, pues al intentar que el proceso sea más sencillo, suma la cantidad de cubos que pertenecen a dos posiciones diferentes (en este caso la de la posición cuatro y la de la posición seis). Esta es una estrategia trabajada por Lannin (2005): suponer - comprobar, pues el estudiante ED03 plateó una hipótesis, pero le faltó comprobarla mediante las figuras que ya tenía. Por ejemplo la figura uno y la dos suman cuatro cubos, pero la tres tiene nueve; por tanto esta solución, aunque es muy recursiva, no proporciona una respuesta correcta.

Escribir: Con esta fase buscábamos que los estudiantes lograran llegar a una expresión que generalizara el patrón de la secuencia. Los resultados que obtuvimos fueron muy cercamos a los propuestos en el análisis a priori; veámoslos a continuación:

ED17:

> $Z \cdot Z$ Porque yo mire la secuencia y $Z \cdot Z$ da el número de cubos.

ED09:

> $J \cdot J$ Porque se puede poner cualquier letra y vale un número

EA36:

> Pues fácil, lo multiplico por sí mismo y me daría un número y utilizaría una letra que representaría cualquier número

EA05:

Yo supe porque viendo las figuras de la guía, vi que en la figura 1 había 1; en la dos, cuatro cubos; y al multiplicar $1 \cdot 1 = 1$ y $2 \cdot 2 = 4$ cubos y si es la figura tres seria $3 \cdot 3 = 9$ y así sucesivamente. Por tanto es igual a $\mathrm{p} \cdot \mathrm{p} = \mathrm{p}^2$

EA04:

Mi expresión es que si la figura seis tiene treinta y seis fichas, y la cinco veinticinco, es que se multiplica el número que nos den por él mismo. Por ejemplo si nos dan encontrar la figura nueve entonces multiplico $9 \cdot 9 = 81$, entonces la figura nueve tiene ochenta y un fichas, que es igual a $9^2 = 81$

EA38:

Se multiplica por el mismo número, como en el ejemplo anterior [el estudiante se refiere al ítem b]

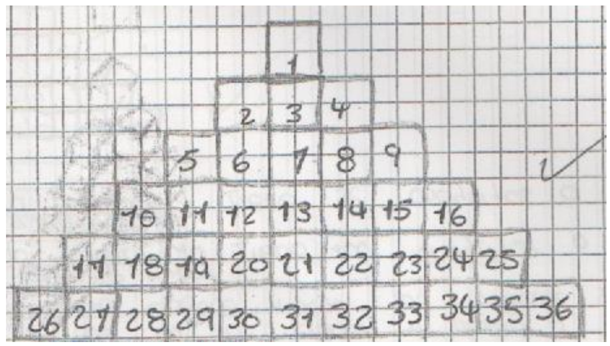
EA25:

$\mathrm{n} \cdot \mathrm{n}$ Porque el número que sea se multiplica por sí mismo seria el número total de cubos de la figura

ED27:

Multiplicar el número de la secuencia por el mismo y así nos da la respuesta. Porque en la figura cuatro me da dieciséis, y $4 \cdot 4 = 16$, entonces es por eso que se multiplica por el mismo número.

Las principales estrategias que los estudiantes usaron en esta actividad para llevar a cabo el proceso de generalización, serán presentadas a continuación junto con ciertos ejemplos que evidencian su aplicación. Solucionar el primer ítem no fue tan sencillo como en las anteriores actividades, pues los estudiantes tuvieron que ser más recursivos a la hora de identificar los elementos que caracterizan la secuencia debido a que se encuentra en tercera dimensión, los estudiantes tuvieron que representar la figura en dos dimensiones para continuar la secuencia y así poder identificar mediante la observación sus principales características. Por ejemplo EA36:



En el segundo ítem algunos estudiantes muestran que pueden hallar la relación que existe entre la posición de la figura y el número de cubos que la componen, identificando el patrón que describe la secuencia. Por ejemplo ED27:

> "Tendrá cien cubos, porque se multiplica por el mismo número".

Por último, las soluciones dadas en el tercer ítem muestran que gran parte de los estudiantes logran pasar de una secuencia geométrica a una numérica que les permite describir verbalmente el patrón que representa la secuencia. Al respecto EA04 explica:

> Mi expresión es que si la figura seis tiene treinta y seis fichas, y la cinco veinticinco, es que se multiplica el número que nos den por él mismo. Por ejemplo si nos dan encontrar la figura nueve entonces multiplico $9 \cdot 9 = 81$, entonces la figura nueve tiene ochenta y un fichas, que es igual a $9^2 = 81$

Estos razonamientos dados por los estudiantes, además de ser muy similares entre sí, son próximos a lo que esperábamos obtener, previsto en el análisis a priori, esto nos indica que en efecto los estudiantes logran llevar a cabo de forma satisfactoria y de acuerdo a su edad el proceso de generalización.

Al culminar el análisis de nuestros talleres, observamos con gran entusiasmo que los estudiantes lograron desarrollar el proceso de generalización, teniendo en cuenta las fases propuestas por el grupo Azarquiel (1993): Ver, Describir y Escribir. Además hemos evidenciado que los estudiantes usaron de forma adecuada diferentes estrategias que les eran de gran utilidad a la hora de identificar el patrón que describía cada secuencia.

4.3 ENTREVISTA

El objetivo de esta actividad es hallar los términos faltantes, se busca que los estudiantes mediante un análisis de los datos que se le suministran, puedan hacer una descripción verbal del proceso que tuvieron que llevar a cabo para encontrar la solución.

Situación 1.

Los siguientes números forman una secuencia, encuentra los números faltantes.

1, 3, 7, 15, ___, ___,127, ___

Explica con tus propias palabras cómo encontraste los números que faltaban.

4.3.1 Análisis a priori

a. Un posible camino de solución

1, 3, 7, 15, 31 , 63 ,127, 255 …

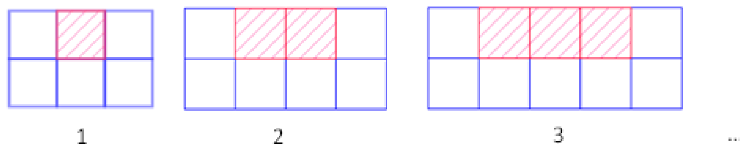
2 4 8 16 32 64 128

b. Fases del proceso de generalización

Ver: Esperamos que los estudiantes empiecen por identificar las variaciones de la secuencia, que observen la diferencia entre cada término y además puedan ver que los números van en aumento. Las estrategias que esperamos se evidencien en esta fase son: Diferenciar y Relacionar.

Describir: En esta fase buscamos que los estudiantes al analizar la diferencia entre cada par de números consecutivos, puedan identificar que su variación va aumentando a partir del número dos, y de ahí en adelante, esa diferencia se multiplica por sí misma para hallar el siguiente número de la secuencia, y así sucesivamente. En este punto los estudiantes deberían tener las bases suficientes para expresar verbalmente y por escrito el análisis llevado a cabo en la fase anterior para hallar la respuesta esperada. Las estrategias recomendadas en esta fase son: Asignar y Comunicar.

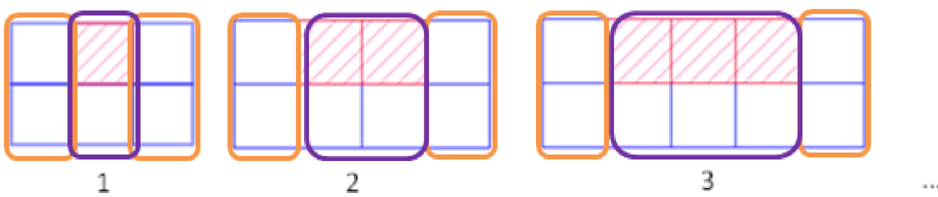
Situación 2.
Observemos la siguiente secuencia:



a) Dibuja las siguientes dos figuras.
b) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición siete?
c) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición cien?
d) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición ***n***?

a. Posibles caminos de solución

Primera solución:



En esta parte de la actividad se espera que los estudiantes puedan llegar a relacionar la posición de la figura con los cuadrados del centro (morado), teniendo en cuenta que el número de columnas centrales me está indicando la posición y siempre se mantienen cuatro cuadrados constantes (Naranja).

En la primera posición: $2 \cdot 1 + 4$ representa el total de cuadrados, ya que el cuadrado unitario, que representa el número de la posición se repite dos veces y luego sumamos los cuatro cuadrados que van a permanecer siempre constantes.

En la segunda posición: $2 \cdot 2 + 4$
En la tercera posición: $2 \cdot 3 + 4$
En la cuarta posición: $2 \cdot 4 + 4 \ldots$

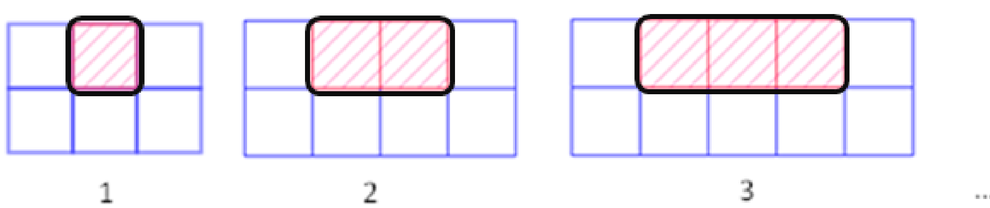
Con este proceso es fácil notar que está variando la posición de la figura.

Con esta actividad damos solución a la segunda y tercer pregunta: *¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición siete? Y ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición cien?* Esta es $2 \cdot 7 + 4 = 18$ y $2 \cdot 100 + 4 = 204$.

En esta pregunta se quiere lograr que los estudiantes mediante el proceso anteriormente mencionado, puedan llegar a generalizar, observando que representa más esfuerzo realizar las cien figuras, que hallar una generalización que les permita encontrar de manera más fácil los términos de una posición dada.

Con las dos actividades anteriores, se espera que los estudiantes sean capaces de relacionar el total de los cuadrados con el número de la posición y logren responder la cuarta pregunta: *Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición n.* Donde esperamos que ellos puedan llegar sin mayor dificultad a la siguiente expresión: $2n + 4$.

Segunda solución:



En esta solución se espera que los estudiantes relacionen la posición de la figura con los cuadrados “rayados” (negro) y lleguen a generar una nueva secuencia con los otros cuadrados. Esta nueva secuencia sería: 5, 6, 7…

Con la realización de esta actividad se da solución al ítem *a) Dibuja las siguientes dos figuras.* Pues con el análisis realizado a la secuencia gráfica, los estudiantes deben comprender el patrón y de esta forma, podrán hallar fácilmente las dos figuras siguientes.

En la primera posición: $1 + 5$ Representa el total de cuadrados, pero en este patrón vemos que la secuencia varían sus dos términos, ya que uno representa la posición y el otro representa los cuadrados sobrantes de la figura.

En la segunda posición: $2 + 6$
En la tercera posición: $3 + 7$
En la cuarta posición: $4 + 8\ldots$

Vemos que los cuadrados sobrantes van aumentando de uno en uno en cada posición, por tanto obtenemos la secuencia 5, 6, 7, 8…

Con esta actividad damos solución a la segunda y tercera pregunta *¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición siete? Y ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición cien?* Los estudiantes deben encontrar la relación de los cuadrados sobrantes con la posición de la figura, es decir: Para la primera posición el número de cuadrados es cinco, que sería $4 + 1$.

Para la segunda posición, el número de cuadrados es 6, que sería $4 + 2$; así sucesivamente tenemos para la figura de la séptima posición que el número de cuadrados sobrantes sería $4 + 7 = 11$; y en la posición 100 el número de cuadrados sería $4 + 100 = 104$. La cantidad de cuadrados en la posición siete y la posición cien sería: $7 + 11 = 18$ y $100 + 104 = 204$.

Con las dos actividades anteriores, se espera que los estudiantes sean capaces de relacionar el total de los cuadrados con el número de la posición y logren responder la cuarta pregunta: *Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición n.*

Esperamos que puedan llegar sin mayor dificultad a la siguiente expresión: $n + (n + 4) = 2n + 4$.

b. Fases del proceso de generalización

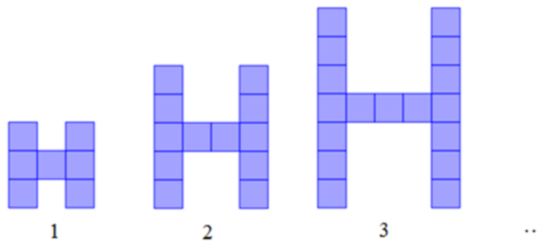
Ver: Esperamos que los estudiantes encuentren la variación de la secuencia, para poder construir las figuras de las siguientes posiciones. En cada iteración se aumenta una columna en el centro de la figura. Los estudiantes también podrían identificar mediante su observación que el cuadrado del centro de la figura (el de color rosado), representa la posición de la misma. Las estrategias que podrían usar los estudiantes en esta fase son: Comparar y Relacionar.

Describir: En esta actividad queremos que los estudiantes encuentren a partir de la secuencia gráfica, una numérica que determine la relación de la posición con el número total de cuadrados. Por tanto la relación que existe la podríamos describir como el número de la posición multiplicado por dos y al resultado que obtenemos de esta operación le sumamos cuatro. Las estrategias que podrían usar en esta fase son: Agrupar y Comprobar.

Escribir: En esta actividad pretendemos que los estudiantes logren llegar a una expresión que generalice el patrón de la secuencia, es decir que determine en cualquier posición la cantidad total de cuadrados. Ya con la fase anterior habíamos encontrado la relación, en esta fase tendríamos que llevarla a una expresión verbal más explícita como: "la posición multiplicada por dos y al resultado le sumamos cuatro". Las estrategias que podrían usar los estudiantes son: Asignar y Comunicar.

Situación 3.

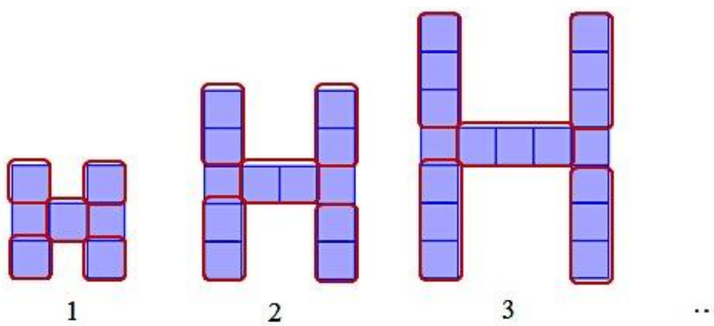
Observa la siguiente secuencia de figuras:



a. ¿Cuáles serían las dos siguientes figuras de la secuencia?
b. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura de la posición 10?
c. ¿Qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados?
d. Representa esta secuencia mediante una. expresión.

a. Posibles caminos de solución

Primera solución



Donde relacionan el número de la posición, con el número de cuadrados del centro y los laterales, dejando dos cuadrados constantes como se muestra en la figura.

Con la realización de esta actividad se da respuesta a la primera pregunta: *¿Cuáles serían las dos siguientes figuras?*, ya que con el análisis realizado a la secuencia gráfica, los estudiantes deben entender el patrón y de esta forma, hallar las figuras solicitadas.

En la primera posición: $5 \cdot 1 + 2$ representa el total de cuadrados, ya que el cuadrado unitario, que representa el número de la posición se repite cinco veces y luego sumamos los dos cuadrados que van a permanecer siempre constantes.

En la segunda posición: $5 \cdot 2 + 2$
En la tercera posición: $5 \cdot 3 + 2$
En la cuarta posición: $5 \cdot 4 + 2 \ldots$

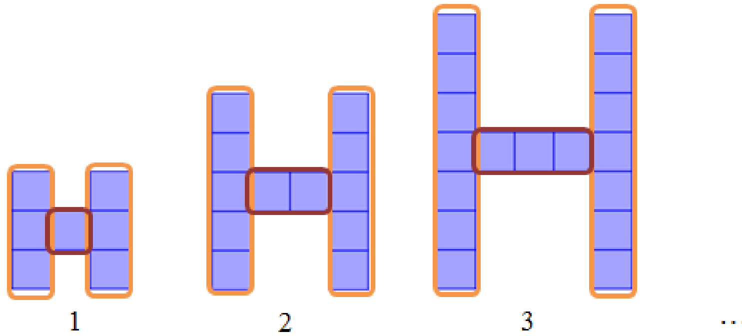
Con este proceso es fácil notar que está variando la posición de la figura.
Con esta actividad damos solución a la segunda pregunta *¿Cuántos cuadrados tendrá la figura de la posición 10?* Esto es $5 \cdot 10 + 2 = 52$, tendría cincuenta y dos cuadrados.

Con las dos actividades anteriores, se espera que los estudiantes sean capaces de relacionar los cuadrados con número de la posición y logren responder a la tercera pregunta *¿Qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados?*

Con este punto se espera que los estudiantes inviertan el proceso anteriormente realizado; $82 - 2 = 80$ y $80 \div 5 = 16$; la figura tendrá la posición dieciséis.

En la cuarta pregunta: *Representa esta secuencia mediante una expresión algebraica.* Se espera que los estudiantes mediante el proceso realizado puedan llegar sin mayor dificultad a la siguiente expresión: $5n + 2$.

Segunda solución



Los estudiantes pueden relacionar el número de la posición con el número de cuadrados que hay en el centro y los laterales los ven como una secuencia de números impares 3, 5, 7…

Con la realización de esta actividad se da respuesta a la primera pregunta: *¿Cuáles serían las dos siguientes figuras?*, ya que con el análisis realizado a la secuencia gráfica, los estudiantes deben entender el patrón y de esta forma podrán hallar fácilmente las dos figuras siguientes.

En la primera posición: $1 + (3 + 3)$ Representa el total de cuadrados, pero en este patrón vemos que en la secuencia varía el número de la posición de la figura y los números impares empezando con el 3.

En la segunda posición: $2 + (5 + 5)$
En la tercera posición: $3 + (7 + 7)$
En la cuarta posición: $4 + (9 + 9)\ldots$

Con esta actividad damos solución a la segunda pregunta: *¿Cuántos cuadrados tendrá la figura de la posición 10?*

Se espera que en la segunda solución los estudiantes encuentren la relación de los números impares con la posición de la figura es decir: Para la primera posición, el número impar es el tres, que sería $2 \cdot 1 + 1$; para la segunda posición, el número impar es el cinco, que sería $2 \cdot 2 + 1$, así sucesivamente tenemos para la figura de posición diez que el número impar sería $2 \cdot 10 + 1 = 21$. La solución por tanto es, $10 + \ (21 + 21) = 52$

Con las dos actividades anteriores, esperamos que los estudiantes sean capaces de relacionar los cuadrados con número de la posición y logren responder a la tercera pregunta *¿Qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados?* Se espera que los estudiantes realicen este proceso por ensayo y error:

$$14 + \ ((2 \cdot 14 + 1) \ + \ (2 \cdot 14 + 1)) \ = \ 72$$
$$16 + \ ((2 \cdot 16 + 1) \ + \ (2 \cdot 16 + 1)) \ = \ 82$$

En la cuarta pregunta: *Representa esta secuencia mediante una expresión algebraica.* Se espera que los estudiantes mediante el proceso realizado puedan llegar sin mayor dificultad a la siguiente expresión algebraica: $n + \ (2n + 1 + 2n + 1) = 5n + 2$.

b. Fases del proceso de generalización

Ver: En esta fase queremos que los estudiantes logren ver la variación de la secuencia para reconocer el patrón y construir las siguientes figuras. Esperamos que los estudiantes identifiquen que en cada iteración se va agregando un cuadrado a cada extremo y centro de la H; también podrían notar que el centro está indicando el número de la posición y en los laterales se van formando los números impares a partir del tres. Las estrategias que podría usar en esta fase son: Agrupar, Contar y Comparar.

Describir: En esta actividad queremos que los estudiantes logren describir con sus propias palabras aquellas variaciones que identificaron en la fase anterior. También esperamos que algunos de los estudiantes vean la relación que existe entre la figura y la cantidad de cuadros que la componen. Las estrategias que podrían usar en esta fase son: Agrupar y Comprobar.

Escribir: En esta fase pretendemos que los estudiantes logren superar la fase anterior y lleguen a identificar un patrón que les permita conocer el número de cuadrados en cualquier figura; es decir, que lleguen a obtener una expresión que generalice las variaciones identificadas en las fases anteriores. Las estrategias que podrían usar los estudiantes son: Asignar y Comunicar.

4.3.2 Análisis a posteriori El análisis lo hemos realizado tomando los datos de los cinco estudiantes entrevistados, agrupando las evidencias que en su razonamiento pueden asociarse con las actividades básicas del proceso de generalización.

Ver: Las actividades propuestas en la entrevista estaban diseñadas de tal manera que los estudiantes lograran progresivamente identificar patrones numéricos y geométricos a partir de aquello que se mantenía constante y/o variaba.

Aunque se esperaba que todos los estudiantes realizaran el primer problema sin dificultad, se pudo ver que dos de ellos inicialmente no identificaban el patrón y hacían reducción de los términos de la secuencia. Por ejemplo Emily[2] y Eddy buscan generar los elementos de la secuencia a partir de la suma de números pares, excluyendo el seis. Por ejemplo Emily menciona explícitamente que los

[2] Los nombres utilizados en este trabajo son ficticios, fueron asignados para respetar la privacidad de los estudiantes entrevistados.

términos se van generando a partir de la suma de la “tabla del dos, quitándole el seis”.

Emily:

> Umm… Como usted tiene esos números, y la diferencia entre cada dos es: dos, cuatro, ocho, diez… umm… Esa es la tabla del dos, pero no está el seis.

Emily hace otro intento sumando los primeros cuatro términos de la secuencia para generar el quinto valor; después de varios intentos durante la entrevista para llegar a la forma general en que se generan los términos Emily y Eddy encuentran los valores pedidos. En estos estudiantes las series numéricas representan un mayor grado de dificultad con relación a las geométricas. Azarquiel (1993), menciona que estas series necesitan un razonamiento numérico específico que requiere: “… percibir alguna característica de los números, una operación entre ellos, una ley numérica” (p.32). En nuestro caso los estudiantes hacen uso de expresiones como “la suma de pares”, “la tabla del dos”, “sumar dos” para hacer referencia a la ley numérica que en este caso corresponde a $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ para $n = 1,2,3, \ldots$ al generar cada término de la secuencia.

Por otra parte, los demás estudiantes pueden identificar la similitud entre los términos de la secuencia y encontrar los faltantes. Por ejemplo Mateo dice:

Mateo:

> La secuencia empieza a aumentar de dos en dos, cada vez se va aumentando el doble. Ejemplo, uno más dos, tres; tres más cuatro, siete; siete más ocho, quince; quince más dieciséis, treinta y uno; [va completando la secuencia]. Treinta y uno más treinta dos, sesenta y tres; sesenta y tres más… [Mateo estaba haciendo las operaciones

> mentales, y cuando llega al sesenta y tres se confunde, y empieza a escribir lo que estaba haciendo mentalmente].

1+2=3
3+4=7
7+8=15
15+16=31
31+32=63
63+64=127
127+128=255

En el desarrollo de este trabajo hemos detectado la manera como los estudiantes interpretan ciertas operaciones de manera equivocada como equivalentes, al expresarlas en lenguaje cotidiano. Por ejemplo “aumentar de dos en dos” y “aumentar el doble”.

El segundo problema plantea una secuencia geométrica, que fue diseñada con el fin de generar un mayor grado de dificultad en comparación al primero. Con este ejercicio se buscaba que gran parte de los estudiantes lograran identificar el patrón, mediante la construcción de las siguientes dos figuras de la secuencia.

A partir de la experiencia obtenida en el desarrollo de ese trabajo, se pudo detectar que para los estudiantes era menos complejo hallar las similitudes, lo que permanecía constante y lo que variaba en una secuencia geométrica, comparado con una secuencia numérica. Esto se relaciona con lo propuesto por Azarquiel (1993), donde se hace alusión a la forma de interpretar las secuencias geométricas así:

> En un conjunto de figuras geométricas, es a menudo más fácil “manipular” la información, reordenando, comparando partes equivalentes, recordando figuras similares, etc. Las figuras geométricas permiten poner en práctica capacidades de visualización y de

> organización espacial, que pueden facilitar la aparición de la estructura que conduce a la solución. (p.31)

Con el trabajo realizado por Emily y Eddy se pudo corroborar lo dicho por Azarquiel (1993), pues en los estudiantes surgió con más espontaneidad el análisis de la secuencia geométrica que de la numérica. Esto se puede ver específicamente a continuación:

Emily:

> En el primero hay sólo un cuadrito coloreado. Tengo seis cuadritos, y sólo se coloreo uno, en la segunda hay ocho cuadritos y se coloreó dos y en la tercera hay diez cuadritos y sólo se coloreó tres. O sea que es seis, ocho diez, o sea que la siguiente es… es esto… [Se queda pensativa].

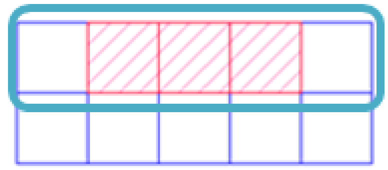
Eddy:

> Pues el uno tiene un cuadrito coloreado y dos al lado, el dos tiene dos cuadritos coloreados y otros dos al lado, el tres tiene tres cuadritos coloreados y otros dos al lado y así sucesivamente.

De otro lado Erick, quien hace una correcta descripción del patrón, sólo lo hace verbalmente y omite la construcción de las siguientes dos figuras de la secuencia. Su razonamiento es mental y logra expresarlo de la siguiente forma:

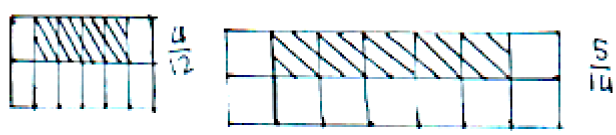
Erick:

> Se va aumentando de a uno; el tres tiene uno, dos, tres cuatro, cinco [contando los cuadrados de la posición tres como se muestra en la figura, con color azul]; va aumentando de a uno, entonces el cuatro tendría seis; el cinco, siete; el seis, ocho y el siete, nueve.



3

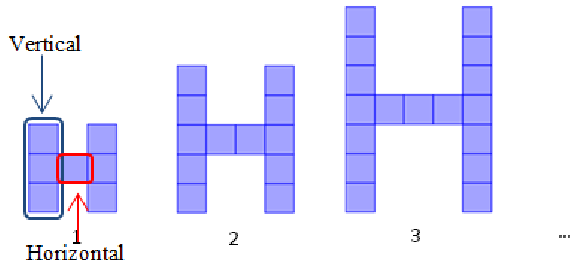
Aunque se observó con asombro que Mateo, quien tuvo un buen desempeño en el primer ejercicio, al inicio del segundo, no logró representar correctamente las dos siguientes figuras, pues su confusión radicó en asociar la figura con fracciones, haciendo alusión a: “Mateo: el primero es 1/6, luego son 2/8, luego son 3/10”; esto lo llevó a realizar la figura de forma incorrecta a pesar de que su interpretación usando fracciones inicialmente era correcta. Mateo logra identificar sus errores y corregirlos, analizando de forma adecuada lo que varía y permanece constante de la secuencia. La siguiente figura muestra la representación final que escribe Mateo de la posición cuatro y cinco. Claramente la representación que este estudiante hace está asociada con la representación que tradicionalmente se usa en la escuela para introducir el concepto de número racional como parte de un todo.



El tercer problema requería un mayor trabajo y análisis, aunque se observó que los estudiantes lograron identificar con mayor destreza las similitudes de la secuencia, esto se dio gracias al trabajo realizado en los ejercicios anteriores, pues los estudiantes fueron descubriendo que debían hallar, lo que permanecía constante y lo que variaba en cada secuencia.

Los cinco entrevistados construyeron de manera correcta las posiciones cuatro y cinco de la secuencia, encontrando la relación de la posición con la figura; por ejemplo Mary expresa: “En la parte vertical van aumentando cada vez dos y en la parte horizontal van aumentando según su posición”.

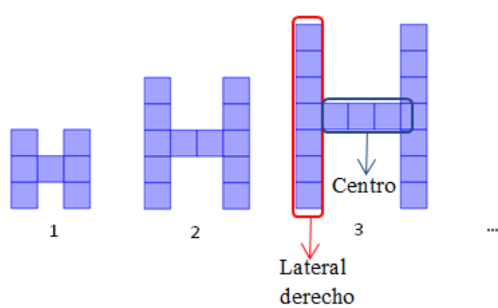
A continuación mostraremos el dibujo al que hace referencia Mary, indicando con algunos colores y flechas lo que ella quiere expresar.



Por otra parte Emily describe el proceso realizado de la siguiente forma:

Emily:

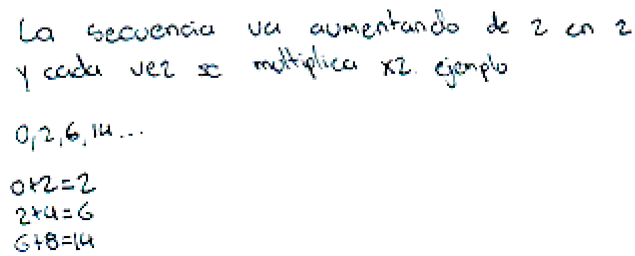
> Es que cada vez va aumentando… las dos siguientes figuras son la cuatro y la cinco. O sea la cuatro sería de… como en este [cuenta la lateral de la posición tres] hay uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete… entonces se le suman… El lateral de la primera figura tiene tres cuadros, al lateral de la segunda figura se le suman dos, o sea tiene cinco cuadrados y acá [señalando la figura de posición tres] se le suman cuatro, el lateral de la figura tres tiene siete cuadrados. Es decir, se suman de a dos cuadrados a cada posición.



Describir: Busca expresar la regularidad percibida en un conjunto específico de términos de una secuencia. Azarquiel (1993), muestra que el primer paso hacia esta extensión se da al expresar la regularidad en un lenguaje natural y señala los diferentes grados de precisión que este lenguaje admite.

> La necesidad de explicar hace aparecer las contradicciones y algunas hipótesis que mentalmente parecían correctas. El hecho de comunicar a sí mismo o a otro lo que se piensa constituye un reto, un compromiso y a la vez un estímulo para comprobar la adecuación de lo dicho a la realidad y para buscar la solución correcta. (p.38)

Esta dificultad de expresar lo que inicialmente se cree conocer, hace que los estudiantes afronten las contradicciones de sus propios razonamientos y sus implicaciones sobre el problema. Por ejemplo, aunque Mateo realiza la primera actividad de generalización sin problema, al expresar por escrito la forma en que se genera la secuencia de números escribe:



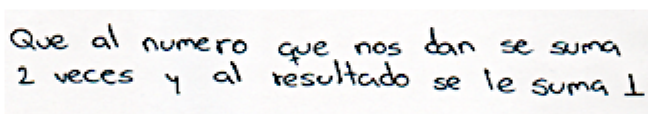
Como puede verse en la imagen anterior Mateo intenta explicar el patrón que observa en la secuencia mediante un ejemplo; en donde de manera numérica genera una nueva secuencia justificando el razonamiento previo.

Erick y Mary logran extender su razonamiento de manera adecuada al expresar por escrito el patrón que identifican en la secuencia numérica. Por ejemplo Erick inicialmente identifica el patrón de la secuencia para hallar los términos faltantes de la siguiente manera:

Erick:

> Entonces, este número [tomando el 1] se suma dos veces, da dos y se le suma otro número, el 1 y da tres. Al tres le sumo más tres, da seis, más uno [señalando el uno que le sumó al dos], da siete. Siete más siete, catorce, más uno, quince. Al quince le sumo quince [haciendo la suma] da treinta, más uno, me da treinta y uno. [hace los siguientes números en voz baja sin escribir, treinta y uno, y treinta y uno me da sesenta y dos, más uno, me da sesenta y tres; sesenta y tres más sesenta y tres, mmm…]

Con el razonamiento hecho por Erick, podemos observar que logra expresar correctamente por escrito el patrón que descubrió en la secuencia numérica. En su análisis plasma lo siguiente:


Que al numero que nos dan se suma
2 veces y al resultado se le suma 1.

En el segundo punto observamos que los estudiantes lograron realizar una descripción verbal del comportamiento del patrón que identificaron para realizar las figuras de la posición cuatro y cinco. Por ejemplo Eddy explica:

Eddy:

> Pues el uno tiene un cuadrito coloreado y dos al lado, el dos tiene dos cuadritos coloreados y otros dos al lado, el tres tiene tres cuadritos coloreados y otros dos al lado y así sucesivamente.

Este análisis fue la base fundamental para encontrar la cantidad de cuadrados total. Retomando el razonamiento de Eddy, al preguntarle por la cantidad de cuadrados que hay en la posición siete, él manifiesta que no es necesario construir la figura, mediante las siguientes expresiones:

Eddy:

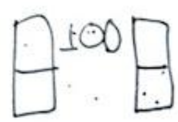
> Siete más siete me da catorce y los dos cuadritos que quedan a los lados que son cuatro, serían dieciocho cuadritos.

A partir del razonamiento anterior, Eddy y sus compañeros, lograron hallar el número de cuadrados de cada figura en cualquier posición.

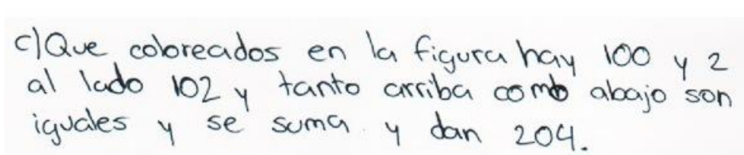
Los estudiantes encontraron diferentes formas para hallar la cantidad de cuadrados en cada figura, por ejemplo Mary comenta:

Mary:

> Cien más cien, da doscientos, entonces, son doscientos cuatro cuadrados; porque cien abajo más cien arriba y los dos que se encuentran a cada lado. [Mary indica la figura]

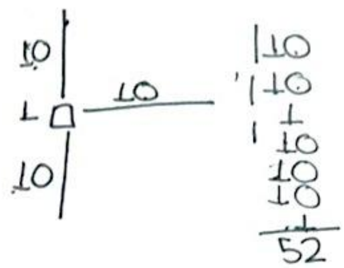


Erick:


c)Que coloreados en la figura hay 100 y 2 al lado 102 y tanto arriba como abajo son iguales y se suma y dan 204.

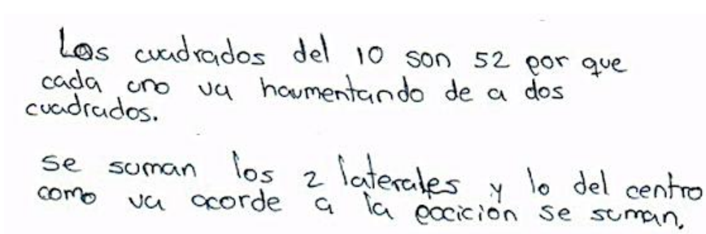
Como puede verse en el análisis a priori, los problemas dos y tres están muy relacionados en cuanto se presentan en un contexto geométrico. Con esto buscábamos que los estudiantes profundizaran sobre su análisis en este tipo de situaciones, buscando que lograran expresar en términos verbales o mediante una regla numérica aquello que reflejaban de forma geométrica.

En el problema tres, Mary logró identificar el patrón que representaba la secuencia, mostrando el siguiente análisis gráfico, logrando llegar de manera más fácil a la interpretación numérica.



En este análisis, podemos observar que Mary inicialmente realiza una abstracción gráfica del patrón de la secuencia, haciendo una relación entre la cantidad de cuadrados que hay en el lateral derecho y la posición de la figura; teniendo en cuenta que el centro de la figura también indica la posición y el lateral izquierdo contiene la misma cantidad de cuadrados que el derecho. Para saber la cantidad total de cuadrados de la figura en la posición diez, Mary realiza una suma que muestra su razonamiento inicial, pues suma un lateral, luego el centro de la figura y finalmente el otro lateral.

Erick muestra un razonamiento verbal donde describe el patrón que representa la secuencia; este estudiante, desde el inicio de la entrevista se mostró seguro en sus conocimientos, logrando expresar su interpretación de la siguiente manera:

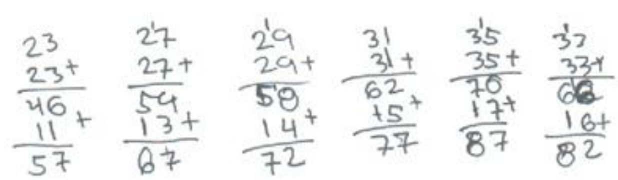


Erick primero analiza la cantidad de cuadrados que hay en los laterales y luego relaciona toda la figura, observando que el número de cuadrados del centro indica la posición.

En el ítem *3c*, además de hallar el número de cuadrados de algunas posiciones, se les pidió a los estudiantes encontrar la posición dada la cantidad de cuadrados; esta parte representó más dificultad, ya que esto les exigía una interpretación más profunda del problema y su estructura. Tres de los estudiantes llegaron a la solución de este problema por el método de ensayo y error, pues al interpretar lo que debían hacer empezaron a realizar multiplicaciones que los condujeran a la solución correcta. Los otros dos estudiantes realizaron una operación inversa, pues empezaron por hacer una división del número dado entre la cantidad de veces que se repetía la posición en el patrón, teniendo en cuenta que el residuo representaba la cantidad de cuadrados que permanecían constantes.

A continuación se presentará un ejemplo de cada una de las soluciones dadas:

En esta primera solución, Erick, debido a que ya conoce el número de cuadrados de la posición diez, inicia a partir de la figura de la posición once, pero como el resultado es menor que el buscado (ochenta y dos), entonces continúa con la figura de la posición trece, catorce, quince y diecisiete; pero el resultado que obtiene con esta última posición es mayor que el buscado, entonces decide tomar el anterior (dieciséis) que es finalmente la posición buscada.

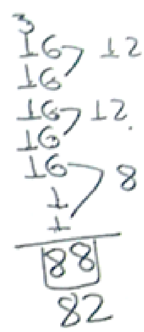


La segunda solución dada por Mary resulta muy interesante, pues ella se muestra muy segura de sus conocimientos y realiza rápidamente el siguiente razonamiento:

Mary:

> Ahora veamos la *c)* ¿qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados? mmm ochenta y dos cuadrados en total, mmm, espere a ver si me sale [hace la división]

> Estos dos que me sobran son los que van a los dos lados, serían dieciséis van acá, dieciséis van acá, dieciséis van acá, dieciséis van acá y acá los otros dieciséis, ahora miremos la suma a ver si me sale



> Y da ochenta y dos.

Escribir: En esta actividad se espera que los estudiantes logren interpretar el patrón encontrado en el proceso realizado durante las dos actividades anteriores, por medio de una expresión; a continuación se presentarán algunas concepciones que los estudiantes manifestaron al respecto:

Eddy:

Es como poner todos los números en letras…

Emily:

Si, digamos que coge un número, ¿sí?, que debe ser una letra que representa cualquier número, Por ejemplo, la x, pero… siempre debe tener un número.

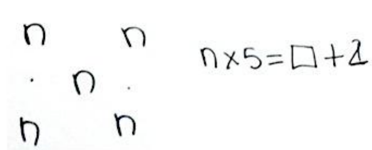
Mateo:

Es una donde aparece una letra que representa cualquier número.

Con esta experiencia pudimos corroborar que a los estudiantes se les dificulta en mayor grado, representar una regla por escrito mediante los símbolos adecuados; según Azarquiel (1993) el principal objetivo de la generalización es: “la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan” (p.38). Sin embargo, dada la experiencia de los estudiantes esto no es familiar ni necesario para ellos en una situación matemática.

Unas de las soluciones a las que llegaron los estudiantes respecto al segundo y tercer problema son las siguientes:

- Mary logró llegar a la siguiente expresión mediante un razonamiento que fue progresando a medida que avanzaba en el ejercicio. Pudimos ver un intento por encontrar una expresión general que modelara el patrón, podemos decir que esto obedece al nivel deseado para su edad.



- Erick por su parte expresa que inicialmente se suma un lateral, luego el siguiente lateral y finalmente los cuadros que están en el centro de la figura. A pesar de realizar un razonamiento correcto, se le dificulta la suma de variables, sumar letras está fuera de su interpretación, y pese a que consiguió llegar a una expresión no logra una interpretación correcta.

$$P+P+1+P+P+1+P = 5P+2$$

- Emily tuvo muchos ensayos antes de lograr llegar a una expresión correcta, pues no lograba unificar los valores de la expresión, es decir, ella tomaba dos variables y presentaba dificultades con la interpretación del signo igual, pues siempre buscaba darle un valor a la expresión. Su primer intento fue:

$$x+x+4+2=82$$

Finalmente, guiada por la entrevistadora (autoras del proyecto) logra llegar a una expresión que representa la generalización del patrón.

$$X+X+X+X+X+2 \Rightarrow E\times5+2$$

En la expresión final Emily vio la necesidad de cambiar la letra, pues la letra "X" le generaba confusión con el signo de multiplicación.

Azarquiel (1993) menciona las dificultades que los estudiantes pueden tener al enfrentarse a situaciones que les exija el uso de variables y una generalización de algún patrón ya sea numérico o geométrico, al respecto menciona: "En el momento de escribir letras y relaciones, es posible encontrar errores del tipo de los de traducción que aparecen cuando se simbolizan las expresiones verbales de los problemas" (p.49). Por ejemplo Mateo al momento de realizar una generalización en el ejercicio *3d* hace lo siguiente:

$$b = b \times 4 = c + b = N + 2 = z$$

Mateo inicialmente especifíca que la letra que va a representar cualquier número es la *b,* luego multiplica ese "número" (hace referencia a la letra *b*) por cuatro, (Mateo explica que indicó la operación de esa forma, debido a que la *b* se repite cuatro veces, dos en cada lateral). El resultado que Mateo obtiene a partir de esa operación, lo representa con la letra *c,* después suma nuevamente la letra *b,* que según su razonamiento representa la cantidad de cuadrados que tiene el centro de cualquier figura; el resultado que obtiene a partir de esta nueva operación lo llama *N;* a este último resultado le suma los dos cuadrados que identifica como constantes, y a la solución final le llama *z.*

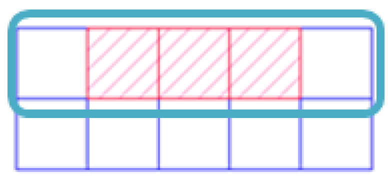
Con esta solución podemos evidenciar que en efecto Mateo tiene dificultades con la correcta aplicación del signo igual, pues como lo podemos ver en su expresión, iguala varios términos que claramente no son iguales, sin percatarse de ello. Respecto a este tipo de dificultades Azarquiel (1993) refiere:

> Ocurre a menudo que, en un problema en el que hay que realizar la operación de dividir 27 entre 3 y al resultado sumarle 5, se den respuestas como:
>
> $$27:3 = 9 + 5 = 14$$
>
> Y a pesar de haber escrito una expresión aritmética que es formalmente incorrecta el alumno llega a un resultado correcto…Para los alumnos esa incorrección no tiene mucha importancia, porque no se traduce en un resultado diferente.

Este tipo de procesos carecen de sentido cuando estamos tratando expresiones de tipo algebraico, ya que estos errores de notación pueden tener efectos en la respuesta final.

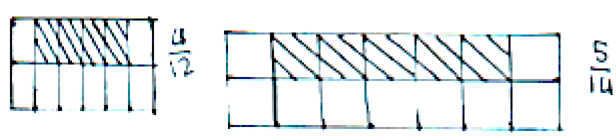
A continuación haremos un recuento de las principales estrategias que los estudiantes emplearon en esta actividad, para llevar a cabo el proceso de generalización; las cuales van a ser evidenciadas por medio de algunos ejemplos. En general, los estudiantes comenzaron por comparar las figuras dadas con el fin de identificar sus principales características; también realizaron representaciones pictóricas que les facilitaba hallar el patrón que definía cada secuencia; Al respecto Erick escribe:

> Se va aumentando de a uno; el tres tiene uno, dos, tres cuatro, cinco [contando los cuadrados de la posición tres como se muestra en la figura, con color azul]; va aumentando de a uno, entonces el cuatro tendría seis; el cinco, siete; el seis, ocho y el siete, nueve.

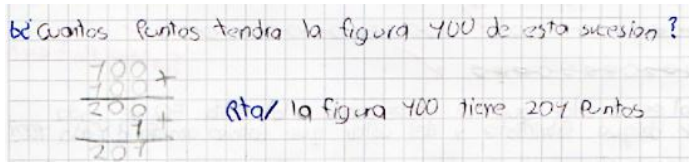


3

También observamos las diferentes representaciones que los estudiantes iban dando a la secuencia, con el fin de hallar la manera en que esta se generaba. Al respecto Por ejemplo, observemos la representación hecha por Mateo, haciendo uso de fracciones:



iferentes r la comparación que los estudiantes realizan entre las figuras dadas. Estas comparaciones les permite identificar aquellos elementos que describen la secuencia, y a su vez muestran la relación que hay entre la posición de la figura y el número de aves que la componen. Al respecto **ED3** responde:



Los resultados obtenidos a partir de esta actividad fueron gratificantes, pues los cinco estudiantes que hicieron parte de la entrevista tuvieron un buen desempeño en cada una de las situaciones trabajadas. Observamos que los estudiantes tienen gran destreza a la hora de desarrollar la fase de Ver, pues al ser la mayoría de las situaciones geométricas, se les facilitaba con la ayuda de las figuras identificar las variaciones en cada iteración. A pesar de que muchos de ellos lograban identificar visualmente el patrón que describía la figura, al expresarlo de forma verbal o escrita, les generaba mucha dificultad; es decir, el paso de una fase a otra generó en los estudiantes confusiones y dudas.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos el desarrollo del proceso de generalización de un grupo estudiantes y cómo dicho proceso se va generando a partir de las fases: Ver, Describir y Escribir. Además asociamos a estas fases las estrategias que motivan y promueven en los estudiantes el desarrollo e interiorización de las mismas. Enseguida comentaremos varios aspectos que logramos identificar durante la aplicación y el análisis de las actividades diseñadas para este trabajo.

1. En el transcurso del proyecto pudimos evidenciar que la mayor dificultad que enfrentan los estudiantes es encontrar la expresión que generaliza el patrón que describe cada secuencia. Los datos nos dejan ver que muy pocos estudiantes trabajaron en hallar la expresión, y cabe resaltar que quienes lo hicieron responden más a la motivación de nuestra parte como orientadoras, que a su propio razonamiento o análisis de la situación.

2. El éxito o fracaso en el análisis de las situaciones por parte de los estudiantes, en muchos casos se puede asociar a la falta de familiaridad con situaciones que promuevan el proceso de generalización, en particular con las estudiadas en esta investigación.

3. Las actividades desarrolladas nos permitieron verificar que las dos primeras fases del proceso de generalización se dan de manera concurrente, es decir, los estudiantes lograron Ver con facilidad las variaciones de una iteración a otra en cada secuencia trabajada, y además lograron Describir verbalmente aquellas variaciones observadas.

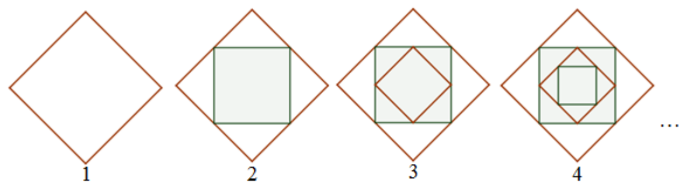
4. Durante el desarrollo de las diferentes actividades realizadas, pudimos ver que casi todos los estudiantes consideraron necesario pasar de una secuencia geométrica a una numérica, para de este modo encontrar la relación de la posición con la cantidad de elementos que componen cada figura. Al respecto el grupo Azarquiel mediante el ejemplo de las "L"; ejemplo que fue desarrollado en el Marco Conceptual, para mostrar el desarrollo de las fases, afirma: "todas las figuras tienen la misma forma, el análisis detallado de cada una de las partes correspondientes (en este caso los brazos de la L), le puede permitir después ser capaz de describir la regla de formación y, por último, averiguar el número de piezas de cualquier figura de la serie". (p. 32)

5. La mayor dificultad observada en el desarrollo de las actividades estudiadas, está asociada con el paso de una fase a otra. Por tanto surgen los siguientes interrogantes: ¿Cómo generar el paso de una fase a otra? Es decir ¿qué procesos o acciones debe realizar el estudiante (y motivar el profesor) para lograr describir lo que Ve y Escribir aquello que logra Describir?

6. El análisis que presentaremos a continuación, muestra cinco de las estrategias más usadas por los estudiantes al desarrollar las fases del proceso de generalización. Cada estrategia será definida en nuestros términos e identificada con los resultados obtenidos del análisis a posteriori.

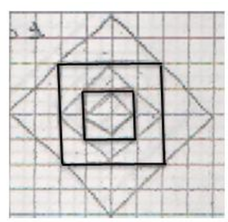
Comparar. Consiste en examinar o analizar las similitudes y diferencias de una iteración a otra, para encontrar con más detalle el cambio que tiene cada figura. Esta estrategia es usada por gran parte de los estudiantes, al identificar el patrón que describe cada secuencia.

Veamos la siguiente secuencia:



Donde al comparar cada iteración vemos que se va agregando una figura (rombo o cuadrado) en el centro.

Esto lo podemos ver en la solución que da **EA05:**



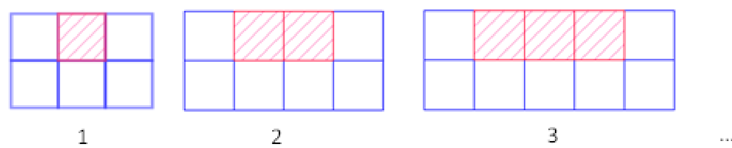
Cuyo razonamiento es:

> La siguiente figura sería un rombo, luego viene un cuadrado, y luego otro rombo; después otro cuadrado, y otro rombo; yo lo descubrí, siguiendo la secuencia, de un rombo y un cuadrado, así sucesivamente.

Es claro que esta estrategia es una de las más fáciles de adquirir, por tanto es usada frecuentemente por los estudiantes al interpretar las principales características de las secuencias geométricas.

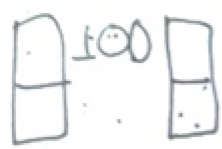
Representar. Esta estrategia consiste en hacer presente con palabras, números o figuras, aquello que se obtiene de la interpretación visual en una secuencia, es decir, el patrón que me permite identificar lo que varía y permanece constante.

Veamos el siguiente ejemplo:



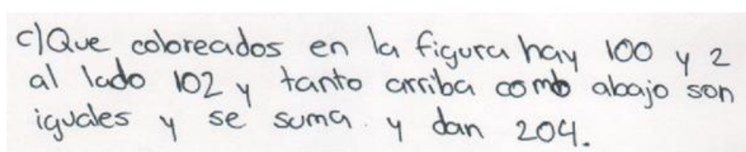
Mary hace una representación verbal y gráfica, para hallar la cantidad de cuadrados en la posición cien:

> [Mary]: Cien más cien, da doscientos, entonces, son doscientos cuatro cuadrados; porque cien abajo más cien arriba y los dos que se encuentran a cada lado. [Mary indica la figura]



Por su parte Erick hace una representación verbal del patrón que identifica en la secuencia.

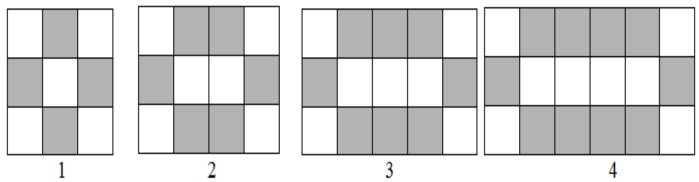
[Erick]:



Esta experiencia nos permitió observar la habilidad de los estudiantes al enfrentarse a este tipo de situaciones, pues lograron hallar dos o más patrones para describir una secuencia.

Relacionar. En esta estrategia los estudiantes además de encontrar aquello que varía y permanece constante, deben encontrar la relación de la posición con el número total de elementos. Es necesario encontrar la variación numérica que existe en cada iteración, para hallar el patrón que describe la secuencia.

Un ejemplo de esta estrategia lo vemos en la siguiente secuencia:



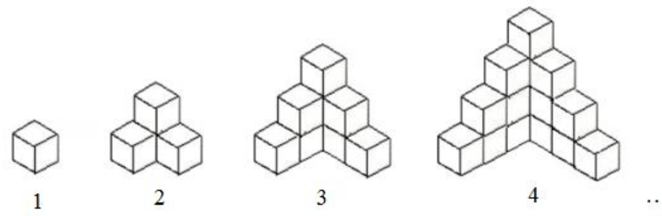
El estudiante **EA05** relaciona la cantidad de baldosas totales en la posición treinta de la siguiente manera:

> La figura treinta tiene noventa y seis tabletas, porque en la figura treinta hay tres hileras de treinta y dos tabletas, y al multiplicar treinta y dos por tres $(32 \cdot 3)$ esto me da noventa y seis.

Esta estrategia resulta compleja para algunos estudiantes, ya que deben haber desarrollado de manera exitosa las dos anteriores.

Comunicar. Esta estrategia resulta ser compleja. Los estudiantes tendrán que transmitir aquello que observan y relacionan de la secuencia en términos generales. Específicamente Azarquiel (1993) comenta: “la escritura exige un esfuerzo mayor que la expresión oral pero es más fácil de analizar y discutir y permite llegar a más personas”. Por eso, es necesario que al describir el patrón se deje clara la relación que existe.

Un ejemplo de esta estrategia lo podemos ver en la siguiente secuencia.



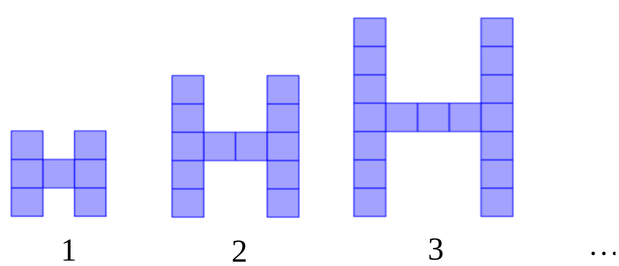
Donde el estudiante **ED27** da a conocer su patrón con la siguiente expresión:

> Multiplicar el número de la sucesión por el mismo y así nos da la respuesta. Porque en la figura cuatro me da dieciséis, y $4 \cdot 4 = 16$, entonces es por eso que se multiplica por el mismo número.

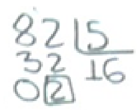
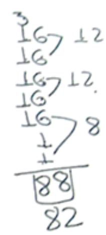
Desarrollar esta estrategia debería ser el mayor propósito de cada estudiante al abordar situaciones que requieran identificar las fases del proceso de generalización, pues cuando el estudiante logra comunicar el patrón que ha observado, logrará sin mayor esfuerzo llegar a una expresión que lo generalice.

Invertir. Esta estrategia puede ser desarrollada después de identificar el patrón que describe la secuencia, es decir, la relación entre la posición y la cantidad de elementos que componen la secuencia.

Un ejemplo del desarrollo de esta estrategia la damos a conocer en la siguiente secuencia:



La estudiante Mary utiliza la estrategia para contestar la siguiente pregunta ¿qué posición tendrá la figura que tiene 82 cuadrados?

> [Mary]: mmm ochenta y dos cuadrados en total, mmm, espere a ver si me sale [hace la división]
>
> 
>
> Estos dos que me sobran son los que van a los dos lados, serían dieciséis van acá, dieciséis van acá, dieciséis van acá, dieciséis van acá y acá los otros dieciséis, ahora miremos la suma a ver si me sale
>
> 
>
> Y da ochenta y dos.

7. Los datos recogidos durante todo el proceso desarrollado en nuestra investigación, muestran que contrario a lo propuesto en el análisis a priori, ninguno de los estudiantes usa tablas en sus respuestas. Por tanto, una de las recomendaciones que surge a partir de esta experiencia, es el uso de tablas en el aula como herramientas que pueden potenciar en los estudiantes la visualización del patrón que describe una secuencia.

8. Consideramos pertinente realizar un trabajo en el cual se haga un análisis detallado del tipo de actividades que promueven los textos guía y los documentos de apoyo que usan a diario los profesores de básica primaria, para potenciar y fortalecer las habilidades de tipo matemático en los estudiantes.

9. Esperamos que las ideas propuestas en este trabajo motiven otras investigaciones para hallar los elementos que guíen y generen el desarrollo del proceso de generalización como un proceso fundamental. También pretendemos que el análisis del trabajo hecho por los estudiantes durante la investigación, sirva de guía a los profesores para entender cómo afrontan los estudiantes este tipo de situaciones y a su vez, estos resultados puedan propiciar en los profesores estrategias con las cuales puedan motivar en los estudiantes el razonamiento algebraico.

BIBLIOGRAFIA

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5): 412-446.

Butto C. & Rojano M. (2009). Pensamiento algebraico temprano.

Cai, J. y Knuth E. (Eds.). (2011). Early Algebraization. New York: Springer.

Castro W., Godino J. Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matematica, 25, 73-88.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. (Tesis Doctoral). Granada: Comares.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Chalé, S. (2013). *El desarrollo del pensamiento algebraico, la visualización en el caso de los patrones.* (Tesis Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Godino J. & Font V. (2003). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf)

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias (en prensa).

Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: SINTESIS

Jacobs, J., Carpenter, T., Franke, M. L., & Battey, D. (2007). A large-scale study of professional development focused on children´s algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3): 258-288.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Kaput, J. (Ed.). (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of*

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, C. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), 8 th International Congress on

Mathematical Education: Selected lectures, 271-290. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231-258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching, 65-86.

mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum. Washington D.C: National

Molina M. (2011) integración del pensamiento algebraico en la Educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años.

National Council of Teacher of Mathematics. (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning, 5(1): 37-70.

Sanchez L, Garcia O & Mora L (2009). Ver describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagogica Nacional. G. Obando (Presidencia), *10° Encuentro Colombiano Matemática Educativa,* Nariño, Colombia.

Vasco, C. E. (2007). *Análisis semiótico del álgebra elemental*. En: Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital.

Vergel, C. (Octubre, 2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. G. Obando (Presidencia), *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa,* Bogotá, Colombia.

ANEXOS

Anexo A. Prueba diagnóstica

Institución Educativa las Américas

Licenciatura en Matemáticas

Escuela de Matemáticas - Universidad Industrial de Santander

Marzo 1 de 2013

Nombre: ____________________________________ **Edad:** _______ **Curso:** ______

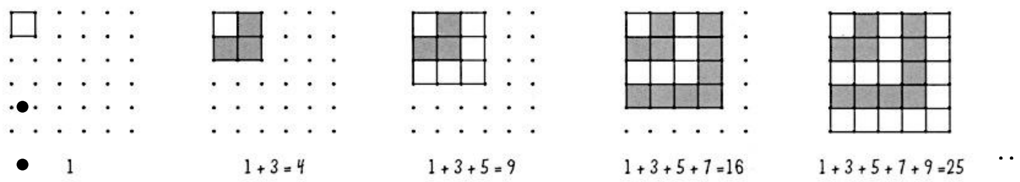
Situación 1. Los siguientes números forman una secuencia, encuentra los números faltantes.

3, 5, 9, 15, __, __, 45, __

- Explica con tus propias palabras cómo encontraste los valores que faltaban.

- Inventa dos secuencias diferentes, en donde no aparezcan algunos de sus valores. Imagina que eres un profesor o profesora de matemáticas y prepara esta actividad para tus estudiantes. Explica cuál es la clave para encontrar los valores en cada secuencia y cómo la construiste.

Situación 2. Observa cuidadosamente la siguiente figura:



- En ella aparecen cinco cuadrados diferentes que se han formado siguiendo un patrón. Dibuja los siguientes tres cuadrados y expresa el patrón en forma numérica tal como aparece en la parte inferior de cada cuadrado.

- Explica con palabras en qué consiste el patrón, es decir, qué es lo que se repite que te permite conocer cómo se forma cada cuadrado y cómo se forma cada suma que aparece en la parte inferior.

- ¿Por cuántos cuadrados pequeños estará formado el cuadrado que se obtiene al repetir el patrón 20 veces? ¿Cuál es la suma que resulta en ese cuadrado?

Situación 3.

Encuentra un número tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle él mismo número, dé como resultado 132.

Recuerda escribir todos los razonamientos que realices para resolver esta situación.

Inventa un problema similar, ¡más difícil!, escribe su respuesta y explica cómo lo inventaste.

Situación 4. El siguiente cuadrado formado por números se llama "MÁGICO" porque la suma de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal principal, es el mismo número (15 en este caso).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

El siguiente cuadrado también es mágico:

18		16
13	***C***	17
	19	

¿Cuál es el valor de ***C?*** ¿***El*** valor de ***C*** es único, o existe más de uno?

Anexo B. Taller 1

Institución Educativa Las Américas

Licenciatura en Matemáticas - Escuela de Matemáticas

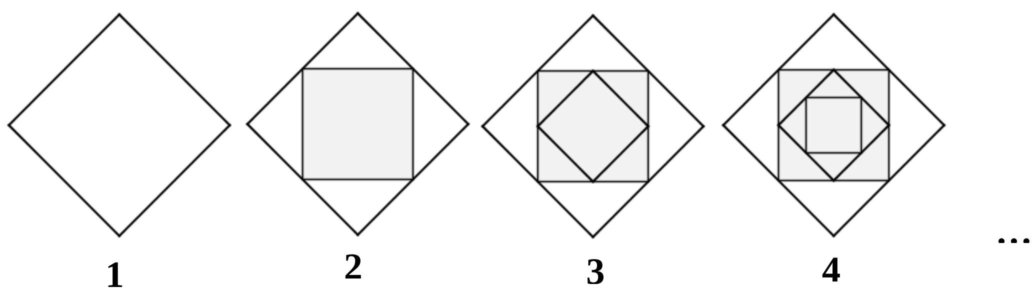
Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, marzo de 2013

Nombre_____________________________________Grado_______código_____

Nota: todas las respuestas deben tener su respectivo razonamiento.

1. Consideremos la siguiente secuencia.



- ¿Cuál sería la siguiente figura?
- ¿Cuántos triángulos tendrá la figura en la décima posición?

2. ¿Qué números deben ir en el siguiente recuadro?

7	**1**	**10**	**3**		
8	**0**	**11**	**2**		

Anexo C. Taller 2

Institución Educativa Las Américas

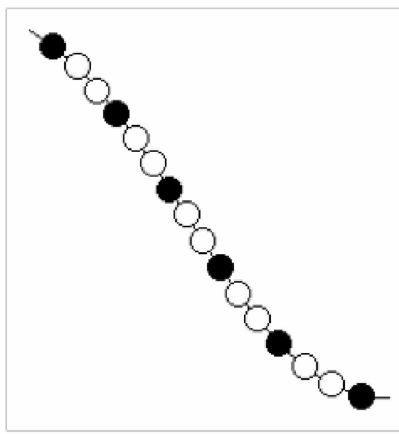
Licenciatura en Matemáticas - Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Abril 5 de 2013

Nombre____Grado_______código_____

Situación 1**.** Amelia fabricó el collar que aparece en el siguiente dibujo, para esto utilizó dos colores diferentes.



El patrón que Amelia utilizó para construir el collar es: Una perla negra y dos blancas, esto lo podríamos expresar como "Negra-Blanca-Blanca-Negra" o de manera más abreviada como NBBNBBNBBN… donde N significa Negra y B significa Blanca.

Con estos mismos colores construye tres collares que sigan patrones diferentes.

a) ¿Cuál es el patrón que seguiste en la construcción de cada collar?

b) ¿Cuál es el color que le corresponde a la bolita 50 de cada uno de los collares que fabricaste y del collar que fabricó Amelia? ¿Y a la 100?
c) Los collares que fabricaste, ¿tendrán siempre un número par o impar de bolitas? Recuerda que en la fabricación de los collares no se puede romper el patrón.

Situación 2. Muchas aves terrestres migran largas distancias. Los patrones más comunes involucran el vuelo al norte para reproducirse en los veranos en áreas templadas o árticas y el retorno a las áreas de invernada en regiones más cálidas del sur. Algunas de estas aves, se desplazan formando una "V" como se muestra en las imágenes. Diversos grupos de científicos han investigado esta organización, tratando de comprender cuáles son las posibles ventajas de este vuelo para tenerlas en cuenta en el diseño de los aviones.

En la secuencia que aparece a continuación, cada figura representa una bandada de aves y cada punto un ave. El número de aves en cada figura va aumentando por la agregación de nuevas aves.

a. ¿Cuántos puntos tiene la siguiente figura de la secuencia?
b. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 100 de esta secuencia?

c. ¿Existe una figura en esta secuencia que tenga 135 puntos? Si la figura existe, ¿cuál será la posición que tiene dentro de la secuencia?
d. ¿Podrías describir un patrón, una regla general mediante la cual se van formando los términos de la secuencia? Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga la manera como las aves se van organizando en forma de “V” y cómo puedes determinar para cualquier figura que representa el vuelo el número de aves.

Anexo D. Taller 3

Institución Educativa Las Américas

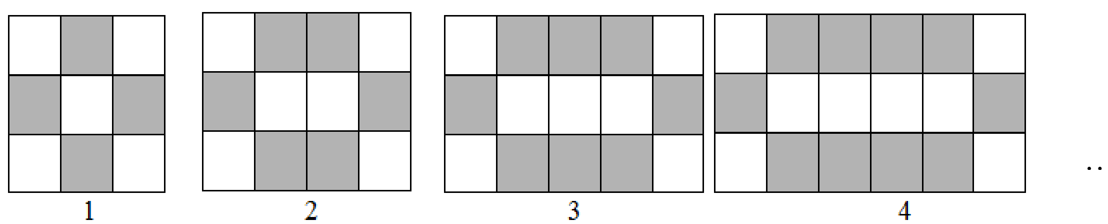
Licenciatura en Matemáticas - Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Abril 24 de 2013

Nombre______________________________________Grado_______código_____

1. Sara construye una secuencia de figuras utilizando baldosas grises y blancas acomodándolas de la siguiente manera:



Responde las siguientes preguntas, explica todo tu razonamiento con tus propias palabras, con dibujos o cálculos.

a. Representa la 5ª y 6ª figura de la secuencia.

b. ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?

c. ¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?

d. Ayuda a Sara a completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta las figuras formadas con las baldosas.

e.

Número de la figura	Número de baldosas grises	Número de baldosas blancas	Total de baldosas
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
7			

Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.

Anexo E. Taller 4

Institución Educativa Las Américas

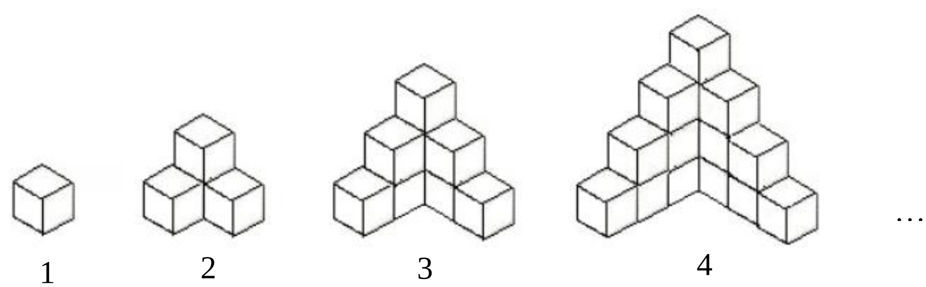
Licenciatura en Matemáticas - Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, mayo 3 de 2013

Nombre_____________________________________Grado_______código_____

1) Considera la siguiente secuencia:



a) ¿Cuál sería la figura número 6?

b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura en la décima posición?

c) ¿Cuál sería la expresión que generaliza esa secuencia? ¿Por qué?

2) Para cruzar el río, está disponible un pequeño bote en cada cruce, puede tener **un adulto** o **un niño** o **dos niños** (es decir, sólo hay tres posibilidades). El barco siempre tiene que ser conducido por un adulto o un niño.

Conteste las siguientes preguntas, mostrando sus razonamientos en palabras, esquemas, cálculos, o símbolos.

a) A un lado hay 6 adultos y 2 niños que quieren cruzar el río. ¿Cuál es el mínimo número de viajes que el bote tiene que hacer para pasar todos al otro lado?

b) ¿Qué sucede si quieren cruzar el río:
   - 8 adultos y 2 niños,
   - 15 adultos y 2 niños.

c) Describe cómo se puede resolver este problema si el grupo está compuesto por dos niños y cualquier número de adultos.

d) Escribe una expresión algebraica que representa el número mínimo de viajes a realizar para un grupo con A adultos y dos niños para cruzar al otro lado.

e) Se sabe que un grupo de adultos y dos niños debe realizar por lo menos 81 viajes para atravesar el río. ¿Cuántos adultos pertenecen a ese grupo?

f) ¿Qué sucede si el número de niños cambia? Identificar lo que se cambia en el razonamiento que se describe anteriormente, en las siguientes situaciones:
   - 6 adultos y 3 niños;
   - 6 adultos y 4 niños;
   - 8 adultos y 4 niños.

g) Escribe una expresión que representa el número mínimo de viajes necesarios para:
   - A adultos y 3 niños;
   - A adultos y 4 niños.

Anexo F. Entrevista

Institución Educativa Las Américas

Licenciatura en Matemáticas - Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, agosto 26 de 2013

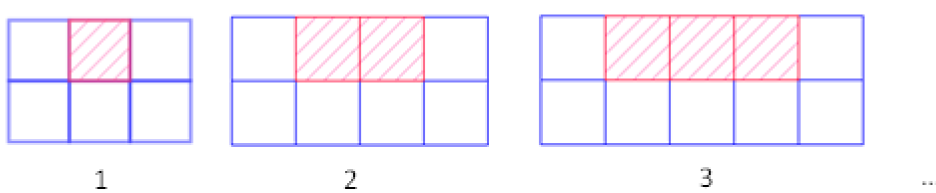
Nombre_____________________________________Grado_______código_____

1. Los siguientes números forman una secuencia, encuentra los números faltantes.

1, 3, 7, 15, ___, ___,127, ___

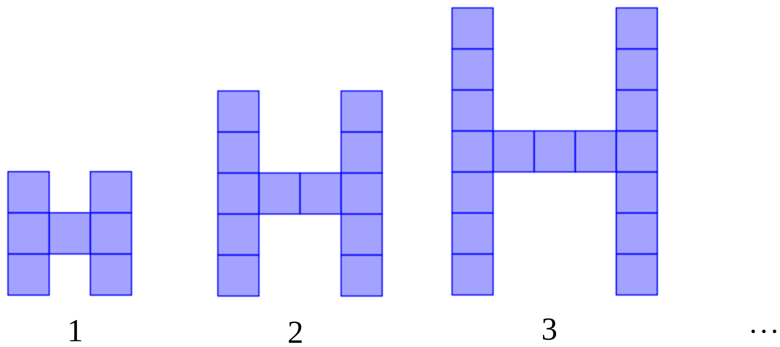
Explica con tus propias palabras cómo encontraste los números que faltaban.

2. Observemos la siguiente secuencia:



a. Dibuja las siguientes dos figuras.
b. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición 7?
c. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición 100?
d. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición ***n***?

3. Observa la siguiente secuencia de figuras:



a. ¿Cuáles serían las dos siguientes figuras?

b. ¿Cuántos cuadrados tendra la figura de la posición 10?

c. ¿Qué posición tendra la figura que tiene 82 cuadrados?

d. Representa esta secuencia mediante una expresión.