EL HIPERESPACIO DE COMPACTOS REGULARES

RAYMOND ALEXANDER MANSELL MUÑOZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

EL HIPERESPACIO DE CONTINUOS REGULARES

RAYMOND ALEXANDER MANSELL MUÑOZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Javier Enrique Camargo García
Doctorado en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mis padres por todo su apoyo incondicional y compañía que me permitieron culminar exitosamente mis estudios.

Al profesor Javier Enrique Camargo García por todo su tiempo, dedicación y recomendaciones que hicieron posible la realización de este trabajo.

Y a todos los que de alguna u otra forma aportaron algo a este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

pág.

RESUMEN

TÍTULO: EL HIPERESPACIO DE COMPACTOS REGULARES *

AUTOR: RAYMOND ALEXANDER MANSELL MUÑOZ **

PALABRAS CLAVE: CONTINUO, HIPERESPACIOS, SUBCONTINUOS REGULARES, COMPACTOS REGULARES.

DESCRIPCIÓN:
Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un subconjunto no vacío y cerrado A de un espacio topológico X se denomina cerrado regular si la clausura del interior de A es igual a A. Dado X un continuo, definimos el hiperespacio de subcontinuos regulares $D(X)$, como la familia de todos los subcontinuos cerrado regulares de X. Definimos también un hiperespacio más general, $R(X)$ como la familia de todos los subconjuntos compactos y cerrado regulares de X. En este trabajo estudiaremos la conexidad, compacidad y arcoconexidad de estos dos hiperespacios. También plantearemos algunas preguntas abiertas.

El trabajo se encuentra dividido en tres capítulos: En el Capítulo 1 se presentan las principales definiciones y las propiedades más relevantes sobre continuos e hiperespacios, enunciando a su vez algunos de los ejemplos más conocidos. En el Capítulo 2 estudiamos resultados conocidos sobre el hiperespacio $D(X)$. Veremos que no siempre es conexo, y mencionaremos algunas condiciones necesarias y suficientes para su conexidad, además caracterizaremos su compacidad. También veremos algunos ejemplos específicos de $D(X)$ cuando X es algún abanico. Finalmente, en el Capítulo 3 exploraremos el hiperespacio $R(X)$, generalizando algunos resultados previos sobre la conexidad de $D(X)$, y mostraremos que $R(X)$ nunca es compacto. De igual forma se presentan algunos ejemplos específicos de este hiperespacio para ciertos continuos y se plantean algunas otras preguntas abiertas.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctorado en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE HYPERSPACE OF REGULAR COMPACT SETS *

AUTHOR: RAYMOND ALEXANDER MANSELL MUÑOZ **

KEYWORDS: CONTINUUM, HYPERSPACES, REGULAR SUBCONTINUA, REGULAR COMPACT SUBSETS.

DESCRIPTION:

A continuum is a nonempty, connected, compact metric space. For a topological space X, we say that a nonempty closed subset A of X is regular closed provied that the closure of the interior of A is equal to A. Given a continuum X, we define the hyperspace of regular subcontinua $D(X)$ as the collection of all regular closed subcontinua of X. We also define $R(X)$, a more generalized hyperspace of X, as the collection of all compact regular closed subsets of X. In this work we study the connectedness, compactness, and arcwise connectedness of these hyperspaces. We will also propose some open questions.

Our work is divided in three chapters: In Chapter 1 we introduce the main definitions and the most relevant properties regarding continua and hyperspaces, listing some of the best known examples. In Chapter 2 we study known results of the hyperspace $D(X)$. We will show that it is not always connected. We will mention some neessary and sufficient conditions for its connectedness and we will characterize its compactness. We will also look at some specific examples of $D(X)$ when X is a fan. Finally, in Chapter 3 we will explore the hyperspace $R(X)$, generalizing some previous results from $D(X)$ and showing that $R(X)$ is never compact. We also present some specific examples of this hyperspace for certain continua and pose some other open questions.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctorado en Ciencias Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo, diferente del vacío. Dado un continuo X, diremos que un hiperespacio es una colección específica de subconjuntos de X, dotada con la métrica de Hausdorff presentada en la Definición 0.1 de [1]. Dentro de los hiperespacios más estudiados se encuentran: 2^X el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, $C(X)$ el hiperespacio de todos los elementos conexos de 2^X, y dado un entero positivo $n,$ $F_n(X)$ el n-ésimo producto simétrico que denota el hiperespacio de todos los conjuntos no vacíos con a lo más n puntos. Un subcontinuo es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Las propiedades topológicas de los hiperespacios está estrechamente relacionada con la estructura de los continuos. La teoría de hiperespacios provee la posibilidad de construir nuevos ejemplos de continuos y se enfoca a estudiar la topología de estas estructuras. La teoría de hiperespacios tuvo sus orígenes a comienzos del siglo XX con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. Durante el periodo comprendido entre 1920 y 1940, se establecieron los resultados fundamentales en la estructura de los hiperespacios. Se destaca el artículo de K. Borsuk y S. Mazurkiewicz de 1931, en el que se prueba que 2^X y $C(X)$ son arcoconexos, independientemente del continuo X. Otro resultado relevante se expone en el artículo de M. Wojdyslawski en 1939, en el que se prueba que 2^X y $C(X)$ son retractos absolutos siempre que X sea un continuo localmente conexo; este resultado es fundamental para mostrar que 2^X es el cubo de Hilbert para cualquier continuo de Peano X. Para más información rela-

---

[1] S.B. NADLER. *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. Aportaciones Matemáticas, México, 2006.

cionada con hiperespacios de continuos refiérase a [1] [2] [3].

Para introducir los hiperespacios que se exponen en este trabajo, recuerde que dado un espacio topológico X, decimos que un subconjunto cerrado A diferente del vacío es cerrado regular de X, si la clausura del interior de A es igual a A; es decir, si $A = \overline{A^{\circ}}$. Así, dado un continuo X, se define el hiperespacio de subcontinuos regulares de X, como

$$D(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es cerrado regular de } X\}.$$

También definimos el hiperespacio de compactos regulares de X como

$$R(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es cerrado regular de } X\}.$$

El hiperespacio $D(X)$ fue introducido y estudiado por N. Ordoñez en 2017 en "The hyperspace of regular subcontinua"[4]. En este libro estudiamos este artículo, introducimos el hiperespacio $R(X)$, presentamos algunos resultados relacionados con $R(X)$ y mostramos algunas preguntas abiertas.

---

2 S. MACÍAS. *Topics on continua*. 2 ed. Springer-Cham, 2018.

3 A. ILLANES y S.B. NADLER. *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math, México, 1999.

4 N. ORDOÑEZ. "The hyperspace of regular subcontinua". En: *Topology and its Applications* 234 (2018).

1. PRELIMINARES

En este capítulo introducimos los conceptos de continuo e hiperespacio, mencionando algunos ejemplos y definiendo la topología asociada a los hiperespacios (topología de Vietoris). Se define la métrica de Hausdorff y se establece su equivalencia con la topología de Vietoris. Finalmente se presentan algunas propiedades necesarias para los siguientes capítulos.

1.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE CONTINUOS

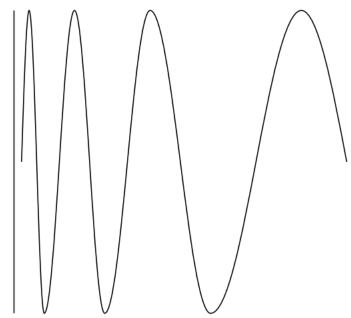
Definición 1.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

El intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo. Un *arco* es cualquier espacio homeomorfo a $[0,1]$. Además, si X es un arco y $h\colon [0,1] \to X$ es un homeomorfismo, entonces $h(0)$ y $h(1)$ los llamaremos puntos finales de X.

Ejemplo 1.1.2. Una *curva cerrada simple* es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejemplo 1.1.3. La *curva senoidal del topólogo* es un continuo, definida por $W = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \mathrm{sen}(1/x)$ y $x \in (0,1]\})$ (Figura 1).

Figura 1. Curva senoidal del topólogo.



1.2. HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

Si X es un espacio topológico con topología T, diremos que un *hiperespacio* de X es un subespacio de $CL(X)$, donde

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\},$$

dotada con la topología de Vietoris, que definimos a continuación.

Definición 1.2.1. Sea (X, T) un espacio topológico. La *topología de Vietoris* T_V para $CL(X)$ es la topología menos fina que cumple las siguientes propiedades:

$*$ $\{A \in CL(X) : A \subset U\} \in T_V$ para cada $U \in T$, y

$*$ $\{A \in CL(X) : A \subset B\} \in T_V$ es cerrado en T_V para cada B cerrado de X.

El siguiente teorema establece una base para la topología de Vietoris que puede verse en [3] Teorema 1.2.

Teorema 1.2.2. Sean (X, T) un espacio topológico, y

$$B_V = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle : U_i \in T \text{ para cada } i \text{ y } n < \infty\},$$

donde $\langle U_1, ..., U_n \rangle = \{A \subset CL(X) : A \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n\}\}$. Entonces B_V es una base para T_V.

Demostración. Veamos que para cualquier abierto U y cualquier cerrado B de (X,T), los conjuntos de la Definición 1.2.1 pueden expresarse en términos de B_V de la siguiente manera: $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\} = \langle U\rangle$ y como $\langle X, X \setminus B\rangle = \{A \in CL(X); A \cap X \setminus B \neq \emptyset\}$, se sigue que $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\} = CL(X) \setminus \langle X, X \setminus B\rangle$. Por definición, T_V es la topología más pequeña para $CL(X)$ que contiene a todos los conjuntos de la forma $\langle U\rangle$ y $\langle X, U\rangle$ con $U \in T$. Esto quiere decir que la familia de subconjuntos

$$S = \{\langle U\rangle : U \in T\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \in T\}$$

forma una subbase para T_V, y por ende, la familia de intersecciones finitas S^*, de elementos de S, forma una base para T_V. De esta manera, basta probar que $S^* = B_V$.

Probemos que $B_V \subseteq S^*$. Sea $\langle U_1, ..., U_k\rangle \in B_V$ con $k \in \mathbb{N}$, para algún $A \in \langle U_1, ..., U_k\rangle$, $A \subseteq \cup_{i=1}^k U_i$, luego $A \subseteq \langle \cup_{i=1}^k U_i\rangle$, además, $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$, por lo tanto $A \in \cap_{i=1}^k \langle X, U_i\rangle$, esto implica que $\langle U_1, ..., U_k\rangle \subseteq \langle \cup_{i=1}^k U_i\rangle \cap (\cap_{i=1}^k \langle X, U_i\rangle)$. Recíprocamente, sea $M \in \langle \cup_{i=1}^k U_i\rangle \cap (\cap_{i=1}^k \langle X, U_i\rangle)$, entonces $M \in \langle \cup_{i=1}^k U_i\rangle$, es decir $M \subseteq \cup_{i=1}^k U_i$, además $M \in \cap_{i=1}^k \langle X, U_i\rangle$, entonces $M \in \langle X, U_i\rangle$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$, es decir $M \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$, por lo tanto $\langle U_1, ..., U_k\rangle = \langle \cup_{i=1}^k U_i\rangle \cap (\cap_{i=1}^k \langle X, U_i\rangle)$, lo cual prueba que $B_V \subseteq S^*$.

Ahora veamos que $S^* \subseteq B_V$. Primero veamos que si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in B_V$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in B_V$. Sean $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_k\rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_m\rangle$, donde $U_i, V_i \in T$ y $k, m < \infty$. Sean $U = \cup_{i=1}^k U_i$ y $V = \cup_{i=1}^m V_i$. Veamos que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U_1 \cap V, ..., U_k \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U\rangle.$$

Sea $A \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, entonces $A \in \langle U_1, ..., U_k\rangle$ y $A \in \langle V_1, ..., V_m\rangle$, es decir $A \subseteq \cup_{i=1}^k U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq \cup_{i=1}^m V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$. Como $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq V$, entonces $(A \cap U_i) \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Análogamente, $A \cap V_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq U$, entonces $(A \cap V_i) \cap U \neq \emptyset$, entonces $A \cap (V_i \cap U) \neq \emptyset$ para cada $i \in$

$\{1, ..., m\}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \subseteq \langle U_1 \cap V, ..., U_k \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$. Recíprocamente, sea $M \in \langle U_1 \cap V, ..., U_k \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$, entonces $M \cap (U_i \cap U) \neq \emptyset$, en particular $M \cap U_i \neq \emptyset$. Por otro lado $M \subseteq \cup_{i=1}^{k} (U_i \cap V) = (\cup_{i=1}^{k} U_i) \cap V$. Por lo tanto $M \subseteq \cup_{i=1}^{k} U_i$. Así $M \in U$, analogamente tenemos $M \in V$. Por lo tanto $M \in U \cap V$. Esto muestra que

$$S = \{\langle U \rangle : U \in T\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in T\}.$$

Entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in B_V$. Finalmente, para mostrar que $S^* \subseteq B_V$, basta probar que la intersección de dos elementos arbitrarios de S es un elemento de B_V. En efecto, los posibles casos para estas intersecciones son:

1. $\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$;

2. $\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$;

3. $\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1 \cap U_2 \rangle$.

Esto muestra que $S^* \subseteq B_V$. $\square$

Ejemplo 1.2.3. Algunos de los hiperespacios más conocidos y usados a lo largo de este trabajo son:

- $2^X = \{A \in CL(X)$: A es compacto$\}$;
- $C(X) = \{A \in 2^X$: A es conexo$\}$.

Naturalmente, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son espacios topológicos como subespacios de $CL(X)$. En las siguientes secciones consideraremos los hiperespacios 2^X y $C(X)$ exclusivamente para los casos en los que X corresponde a un continuo.

Sea (X, d) un espacio métrico. Para todo $x \in X$ y para todo $A \in CL(X)$, sea

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Para todo $r > 0$ y para todo $A \in CL(X)$, sea

$$N_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Diremos que $N_d(r, A)$ es la *d-bola abierta en X con centro A y radio r*. Ahora introduciremos la métrica de Hausdorff y mostraremos su equivalencia con la topología de Vietoris para el hiperespacio 2^X, en el caso en el que X es un espacio topológico metrizable y compacto.

Definición 1.2.4. Sea (X, d) un espacio métrico acotado. La *métrica de Hausdorff* para $CL(X)$ inducida por d, y denotada por H_d se define como sigue: para todo $A, B \in CL(X)$,

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N_d(r, B) \text{ y } B \subseteq N_d(r, A)\}.$$

Primero veamos que H_d es efectivamente una métrica sobre $CL(X)$.

Teorema 1.2.5. Si (X, d) es un espacio métrico con métrica acotada, entonces H_d es una métrica de $CL(X)$.

Demostración. Debido a que d es una métrica acotada, tenemos que H_d es una función que toma valores reales no negativos, esto es $H_d(A, B) \geq 0$ para todo $A, B \in CL(X)$. A partir de la definición de H_d, es claro que $H_d(A, B) = H_d(B, A)$ para todo $A, B \in CL(X)$. Sean $A, B \in CL(X)$ tales que $H_d(A, B) = 0$ y veamos que $A = B$. Por la definición de H_d, tenemos que

$$A \subseteq N_d(r, B) \text{ para todo } r > 0.$$

Ahora, sea $p \in A$, luego $d(p, B) < r$ para todo $r > 0$, por lo tanto, para cada $r = 1/n, n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B$ tal que $d(p, b_n) < 1/n$. Como la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ converge a p y B es cerrado en X, entonces $p \in B$ y por lo tanto $A \subseteq B$. De forma análoga se muestra que $B \subseteq A$ y así $A = B$. Se sigue de la definición que para todo $A \in CL(X)$, $H_d(A, A) = 0$. Resta probar la desigualdad triangular para H_d. La siguiente afirmación resulta útil para probar la desigualdad triangular y se tiene como consecuencia de las definiciones.

Afirmación. Para cualesquiera K y L en $CL(X)$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que $K \subseteq N_d(H_d(K, L)+\varepsilon, L)$.

Sean A, B y C en $CL(X)$. Veamos que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Por la Afirmación, existe $b \in B$ tal que

1. $d(a, b) < H_d(A, B) + \varepsilon$.

Como $b \in B$, nuevamente, por la Afirmación, existe $c \in C$ tal que

2. $d(b, c) < H_d(B, C) + \varepsilon$.

Por (1) y (2), y la desigualdad triangular para d, tenemos que

3. $d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$.

Como a fue un punto arbitrario de A, tenemos

4. $A \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, C)$.

De forma similar, si empezamos con un punto de C, concluimos que

5. $C \subseteq N_d(H_d(C, B) + H_d(B, A) + 2\varepsilon), A$.

Ya vimos que H_d es simétrica, entonces es posible reescribir (5) como sigue:

6. $C \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, A)$.

Por $(4), (6)$ y por la Definición 1.2.4, tenemos $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$, y como ε fue arbitrario, concluimos que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. De lo anterior, H_d es una métrica de $CL(X)$. □

Lema 1.2.6. Sean (X, d) un espacio métrico. Si A_1, A_2, B_1 y B_2 son subconjuntos cerrados no vacíos de X, entonces

$$H_d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{H_d(A_1, B_1), H_d(A_2, B_2)\}.$$

Demostración. Sea $r = \text{máx}\{H_d(A_1, B_1), H_d(A_2, B_2)\}$. Tenemos que $A_i \subseteq N_d(r, B_i)$ y $B_i \subseteq N_d(r, A_i)$. Luego $N_d(r, B_1 \cup B_2) = N_d(r, B_1) \cup N_d(r, B_2) \supset A_1 \cup A_2$. Análogamente, $N_d(r, A_1 \cup A_2) \supset B_1 \cup B_2$. Por lo tanto $H_d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq r$. □

En los siguientes capítulos trataremos con los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y más subespacios de éstos. En varias ocasiones resulta conveniente manipular estos hiperespacios a través de la métrica de Hausdorff. El siguiente teorema extraido de [3] Teorema 3.2, verifica la metrizabilidad de estos hiperespacios por medio de la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.2.7. Si (X, T) es un espacio topológico metrizable y compacto, entonces $(2^X, T_V)$ es metrizable; más aún, si d es cualquier métrica en X que induce a T, entonces $T_V = T_{H_d}$.

Demostración. Primero mostraremos que $T_V \subseteq T_{H_d}$ En el Teorema 1.2.2 vimos que T_V es la topología para 2^X generada por los conjuntos $\langle U \rangle$, y $\langle X, U \rangle$ tales que $U \in T$ (donde T es la topología de X). Entonces para mostrar que $T_V \subseteq T_{H_d}$, basta ver que $\langle U \rangle, \langle X, U \rangle \in T_{H_d}$ para todo $U \in T$. Sea $U \in T$ y veamos que $\langle U \rangle \in T_{H_d}$. Note que si $U = X$, entonces $\langle U \rangle = 2^X$ y por lo tanto $\langle U \rangle \in T_{H_d}$. Suponga entonces que $U \neq X$ y sea $A \in \langle U \rangle$. Sea

$$\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \text{ínf}\{d(a, x) : a \in A \text{ y } x \in X \setminus U\}.$$

Note que ε existe ya que A y $X \setminus U$ son ambos distintos de vacío. Además, por la compacidad de A tenemos que $\varepsilon > 0$. Ahora, veamos que $B_{H_d}(\varepsilon, A) \subseteq \langle U \rangle$: si $B \in B_{H_d}(\varepsilon, A)$ entonces $H_d(A, B) < \varepsilon$ y $B \subseteq N_d(\varepsilon, A)$. Luego, por la forma en como se escogió ε tenemos que $B \subseteq U$, y $B \in \langle U \rangle$. Acabamos de probar que para un $A \in \langle U \rangle$, existe una bola $B_{H_d}(\varepsilon, A)$ con algún $\varepsilon > 0$ tal que $B_{H_d}(\varepsilon, A) \subseteq \langle U \rangle$, esto es:

1. $\langle U \rangle \in T_{H_d}$

Ahora mostremos que $\langle X, U \rangle \in T_{H_d}$. Sea $A \in \langle X, U \rangle$ y $p \in A \cap U$. Como $p \in U$ y $U \in T$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$N_d(\delta, \{p\}) \subseteq U.$$

Veamos que $B_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$. Sea $B \in B_{H_d}(\delta, A)$, entonces $H_d(A, B) < \delta$ y $A \subseteq N_d(\delta, B)$. Luego, como $p \in A$, existe un $b \in B$ tal que $d(b, p) < \delta$, y por la forma como se escogió δ tenemos que $b \in U$. Así, $B \cap U \neq \emptyset$ y por tanto $B \in \langle X, U\rangle$. Esto muestra que $B_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$. Acabamos de probar que para un $A \in \langle X, U\rangle$, existe una bola $B_{H_d}(\delta, A)$ con algún $\delta > 0$ tal que $B_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$, esto es:

2. $\langle X, U\rangle \in T_{H_d}$.

A partir de (1) y (2) tenemos que $T_V \subseteq T_{H_d}$. Ahora veamos que $T_{H_d} \subseteq T_V$. Por el Teorema 1.2.2 basta mostrar que para cada bola abierta $B_{H_d}(r, A)$, existe una cantidad finita de subconjuntos abiertos $U_1, ..., U_n$ de X tales que

$$A \in \langle U_1, ..., U_n\rangle \subseteq B_{H_d}(r, A).$$

Sean $A \in 2^X$ y $r > 0$. Como A es compacto y no vacío, entonces existen finitos abiertos $U_1, ..., U_n$ de X tales que satisfacen las siguientes condiciones:

3. $A \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$;

4. $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

5. diámetro$(U_i) < r$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

De (3) y (4) es claro que $A \in \langle U, ..., U_n\rangle$. Veamos que $\langle U_1, ..., U_n\rangle \subseteq B_{H_d}(r, A)$. Sea $K \in \langle U_1, ..., U_n\rangle$. Como $K \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$, se sigue de (4) y (5) que $K \subseteq N_d(r, A)$. Además, como $K \cap U_i \neq \emptyset$ para todo i, se sigue de $(1{,}3)$ y $(1{,}5)$ que $A \subseteq N_d(r, K)$, esto implica que $H_d(A, K) < r$ y $K \in B_{H_d}(r, A)$. Por lo tanto, $T_{H_d} \subseteq T_V$. $\square$

El siguiente teorema nos será de utilidad más adelante.

Teorema 1.2.8. Sean X un espacio T_1. Si $\mathcal{L} = \{A \subseteq X : |A| < \infty\}$, entonces $\mathcal{L}$ es denso en 2^X.

Demostración. Sea U un abierto básico de 2^X, $U = \langle U_1, ..., U_n \rangle$ para ciertos $U_i \in T$, con $i \in \{1, \ldots, n\}, n < \infty$. Sabemos que

$$\langle U_1, ..., U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \cup_{i=1}^n U_i,\ A \cap U_i \neq \emptyset,\ \forall i, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Sean $x_1, ..., x_n$ tales que $x_1 \in U_1, ..., x_n \in U_n$ y $F = \{x_1, ..., x_n\}$. Es claro que F es finito, y $F \subseteq 2^X$ pues X es T_1. Además $F \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$, luego $\mathcal{L} \cap U \neq \emptyset$, para todo abierto básico U de 2^X, esto es, $\mathcal{L}$ es denso en 2^X. $\square$

1.3. PROPIEDADES DE CONTINUOS

En esta sección se presentan algunas definiciones y propiedades generales de continuos a las que más nos estaremos refiriendo en los próximos capítulos.

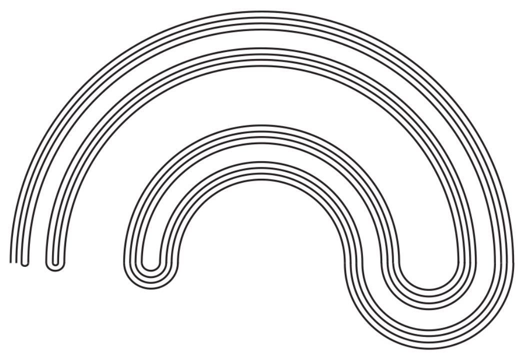
Definición 1.3.1. Un continuo X se dice:

- *localmente conexo* en un punto $p \in X$, si cualquier vecindad de p contiene una vecindad abierta y conexa de p. Si X es localmente conexo en todo punto, diremos que X es localmente conexo.
- *conexo en pequeño* en un punto $p \in X$, si cualquier vecindad de p contiene una vecindad conexa de p. Si X es conexo en pequeño en todo punto, diremos que X es conexo en pequeño.
- *descomponible* si X puede escribirse como la unión de dos subcontinuos propios.
- *indescomponible* si X no es descomponible.

El continuo de Knaster usualmente se presenta como el ejemplo más simple de un continuo indescomponible. A continuación presentamos su construcción.

Ejemplo 1.3.2. Considere la construcción clásica del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ sobre el intervalo $[0,1]$ en el eje x del plano $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{C}_0$ la familia de semicirculos por encima del eje x, centrados en $(1/2,0)$ y con extremos en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{C}_1$ la familia de semicirculos por debajo del eje x, centrados en el punto medio del intervalo $[2/3,1]$ y con extremos en $\mathcal{C}\cap[2/3,1]$. Sea $\mathcal{C}_i$ la familia de semicirculos por debajo del eje x, centrados en el punto medio del intervalo $[2/3^i,3/3^i]$ y con extremos en $\mathcal{C}\cap[2/3^i,3/3^i]$. Entonces la unión de todos los $\mathcal{C}_i$ es el continuo de Knaster (Figura 2).

Figura 2. Continuo de Knaster.



El siguiente lema muestra una forma de caracterizar los continuos indescomponibles por medio de subcontinuos propios con interior vacío.

Lema 1.3.3. Un continuo es indescomponible si, y solo si, todo subcontinuo propio tiene interior vacío.

Demostración. Sea X un continuo para el cual todo subcontinuo propio posea interior vacío y veamos que es indescomponible. Suponga que $X=A\cup B$ con A y B subcontinuos propios de X. Entonces $X\setminus B$ es un abierto con $X\setminus B\subseteq A$, luego $\mathrm{Int}(A)\neq\emptyset$. Ahora, si X es indescomponible, suponga que existe Z subconjunto propio de X con $\mathrm{Int}(Z)\neq\emptyset$. Si $X\setminus Z$ es conexo, entonces $X=(\overline{X\setminus Z})\cup Z$, luego X es descomponible. Ahora, si $X\setminus Z$ es disconexo, entonces $X\setminus Z=U\cup V$ con U,V

abiertos no vacíos y disjuntos. Note que $U \cup Z$ y $V \cup Z$ son subcontinuos propios de X tales que $(U \cup Z) \cup (V \cup Z) = X$, luego X es descomponible. $\square$

Definición 1.3.4. Una *métrica convexa* para un espacio X es una métrica d para X que induce la topología en X, la cual satisface que, para todo x, $y \in X$, existe un $z \in X$ tal que $d(x, z) = \frac{1}{2}d(x, y) = d(z, y)$.

Las métricas euclidianas usuales sobre la recta real o el plano $\mathbb{R}^2$, son ejemplos de métricas convexas.

Lema 1.3.5. Sea X un continuo con una métrica convexa d. Si $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $B_d(x, \varepsilon)$ es un abierto arcoconexo en X.

Demostración. Sea $x \in B_d(p, \varepsilon)$ y veamos que existe un arco J en $B_d(p, \varepsilon)$ con puntos finales x y p. Sean $m(1/2)$ el punto medio entre p y x, $m(1/4)$ el punto medio entre p y $m(1/2)$, y $m(3/4)$ el punto medio entre $m(1/2)$ y x. Ahora, sea $m(k/8)$ el punto medio entre $m([k-1]/8)$ y $m([k+1]/8)$, donde $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ y donde $m(0) = p$ y $m(1) = x$. Siguiendo este patrón, podemos construir de manera inductiva el siguiente conjunto $M \subseteq X$:

$$M = \{m(k/2^n) : n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\},$$

donde cada $m(k/2^n)$ es el punto medio entre $m([k-1]/2^n)$ y $m([k+1]/2^n)$. Sea $J = \overline{M}$. Ahora, consideremos $f\colon J \to [0, d(x, y)]$ definida para cada $z \in J$ por

$$f(z) = d(x, z), \text{ para todo } z \in J.$$

Se sigue que f es una isometría de J a $[0, d(p, x)]$, y por tanto, J es un arco con puntos extremos p y x en $B_d(p, \varepsilon)$. Como x fue un punto arbitrario de $B_d(p, \varepsilon)$, tenemos que el abierto $B_d(p, \varepsilon)$ es arcoconexo. $\square$

Como consecuencia del Lema 1.3.5, todo espacio con métrica convexa es localmente conexo. El siguiente teorema garantiza además, la existencia de una métrica convexa para todo continuo localmente conexo. La prueba de este teorema no resulta sencilla por lo cual no se incluye en este trabajo. Los detalles al respecto pueden encontrarse en [3] Teorema 10.3.

Teorema 1.3.6. Sea X un continuo. Entonces, X es localmente conexo si, y solo si, existe una métrica convexa sobre X.

La siguiente proposición nos será de utilidad en los siguientes capítulos y está muy relacionado con el Lema 1.3.5.

Proposición 1.3.7. Sea X un continuo con una métrica convexa d. Si $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces el abierto $N_d(\varepsilon, A)$ es un subconjunto arcoconexo de X.

Demostración. Sean $x, y \in N_d(\varepsilon, A)$. Entonces existen $a_x, a_y \in A$ tales que $d(x, a_x) < \varepsilon$ y $d(y, a_y) < \varepsilon$. Como A es conexo, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $a_x = a_1, a_y = a_n$ y $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por el Lema 1.3.5, existen arcos $J_0, \ldots, J_{n+1}$ en $N_d(\varepsilon, A)$ tales que J_0 tiene puntos finales x y a_1, J_i tiene puntos finales a_{i-1} y a_i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y J_{n+1} tiene puntos finales a_n y y. De lo anterior, $\bigcup_{j=0}^{n+1} J_j$ contiene un arco J en $N_d(\varepsilon, A)$ que une los puntos x y y. Así, $N_d(\varepsilon, A)$ es un subconjunto arcoconexo de X. $\square$

Sea X un continuo con métrica convexa y $A \in 2^X$. Entonces $\overline{N(\varepsilon, A)} = \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon$ para algún $a \in A\}$ por el Ejercicio 10.11 en [3], y además, por la proposición 0.65.3 en [1], tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.8. Sea X un continuo con una métrica convexa. La función $K : [0, 1] \times 2^X \to 2^X$ definida por $K((t, A)) = \overline{N, (t, A)}$ es continua.

A continuación presentamos otra caracterización de los continuos localmente conexos.

Lema 1.3.9. Sea X un espacio topológico, entonces X es localmente conexo si, y solo si, cada componente de cualquier abierto de X es abierta.

Demostración. Supongamos primero que X es localmente conexo. Sean U un abierto de X, C una componente de U. Veamos que C es abierta. Sea $x \in C$. Como X es localmente conexo en x, existe una vecindad abierta y conexa V de x en X tal que $V \subseteq U$. Como C es componente, $V \subseteq C$, y así C es abierta.
Recíprocamente, sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Si V es la componente de U que contiene a x, es claro que V es un abierto conexo y $V \subseteq U$. De lo que concluimos que X es localmente conexo en x. Como x fue un punto arbitrario, X es localmente conexo. $\square$

El siguiente lema muestra que la conexidad local y la conexidad en pequeño coinciden de forma general.

Lema 1.3.10. Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si, y solo si, X es conexo en pequeño.

Demostración. Se sigue de las definiciones que la conexidad local implica conexidad en pequeño. Luego, suponga que X es conexo en pequeño. Sean U un abierto en X y C una componente de U. Probemos que C es abierta. Sea $x \in C$. Como X es conexo en pequeño, existe una vecindad conexa N de x en X tal que $N \subseteq U$. Nótese que C es una componente, N es conexo y $N \cap C \neq \emptyset$. Así $N \subseteq C$. De esto $x \in N^\circ \subseteq C$. Con lo que concluimos que C es abierto. Por el Lema 1.3.9, X es localmente conexo. $\square$

El siguiente teorema establece una caracterización de conexidad local para los hiperespacios 2^X y $C(X)$, a través de la conexidad local del continuo X. Más información sobre la prueba se encuentra disponible en [5], Ejercicio 8.48.

---

[5] S.B. Jr. NADLER. *Continuum Theory: An introduction*. Marcel Dekker Inc, New York, 1992.

Teorema 1.3.11. Sea X un continuo. Son equivalente:

1. X es localmente conexo;

2. $C(X)$ es localmente conexo;

3. 2^X es localmente conexo.

Definición 1.3.12. Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces se dice que X es *localmente arcoconexo en p*, si toda vecindad de p contiene una vecindad arcoconexa de p. Además, X se dice que es *localmente arcoconexo* si X es localmente arcoconexo en todo punto.

Los siguientes lemas se presentan en los Teoremas 8.25 y 8.26 en [5]. En particular, los detalles de la prueba del Lema 1.3.13 pueden verse en el Teorema 8.25 de [5] junto a los conceptos necesarios para su demostración.

Lema 1.3.13. Todo subconjunto abierto de un continuo localmente conexo es localmente arcoconexo.

Lema 1.3.14. Todo subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arcoconexo.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo X, y supongamos que $U \neq \emptyset$. Sea $p \in U$, y defina E como sigue:

$$E = \{p\} \cup \{x \in U : \text{existe un arco en } U \text{ de } p \text{ a } x\}.$$

Como $p \in E$, $E \neq \emptyset$. Note además que como U es abierto en X, U es localmente arcoconexo por el Lema 1.3.13. Así, se tiene que E y $E \setminus U$ son subconjuntos abiertos de U. Finalmente, como U es conexo y $E \neq \emptyset$, tenemos que $E = U$. $\square$

La siguiente definición introduce la noción de arco de orden. Los arcos de orden son de gran utilidad para el estudio de los hiperespacios.

Definición 1.3.15. Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un subconjunto de 2^X. Un *arco de orden en* $\mathcal{H}$, es un arco α tal que para cualesquiera A y B en α, tenemos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Tomando $C([0,1])$, no es difícil ver que $\alpha = \{[0,t] : t \in [0,1]\}$ es un arco de orden.

Finalizamos este capítulo con un teorema que garantiza la existencia de arcos de orden en el hiperespacio $C(X)$. La demostración, aunque no es muy difícil, involucra muchos detalles que extendería demasiado este capítulo. La prueba se puede consultar en el Teorema 14.6 en [3]. En particular, este teorema implica que $C(X)$ siempre es arcoconexo.

Teorema 1.3.16. Sea X un continuo. Si $A, B \in C(X)$, son tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco de orden en $C(X)$ de A a B.

2. EL HIPERESPACIO DE SUBCONTINUOS REGULARES

En este capítulo presentamos el hiperspacio de subcontinuos regulares estudiado por N. ORDOÑEZ. “The hyperspace of regular subcontinua”. En: *Topology and its Applications* 234 (2018), junto con sus principales resultados de conexidad y compacidad, a su vez se plantean algunas preguntas abiertas y se muestran ejemplos puntuales de este hiperespacio para diferentes continuos.

2.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Para introducir los hiperespacios que se exponen en este trabajo, recuerde que dado un espacio topológico X, decimos que un subconjunto cerrado A diferente del vacío es *cerrado regular* si la clausura del interior de A es igual a A; es decir si $\overline{\mathrm{Int}(A)} = A$. Así, dado un continuo X, se define el *hiperespacio de subcontinuos regulares de X*, como

$$D(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es cerrado regular de } X\}.$$

Como $D(X) \subseteq C(X)$, consideraremos naturalmente $D(X)$ dotado de la topología generada por la métrica de Hausdorff, definida en el capítulo anterior.

Nótese que si U es abierto diferente del vacío, entonces $U \subseteq \mathrm{Int}(\overline{U})$ y por tanto, $\overline{U} \subseteq \overline{\mathrm{Int}(\overline{U})} \subseteq \overline{U}$. De lo anterior, $\overline{U}$ es cerrado regular para cualquier abierto U de X. Luego es clara la prueba del siguiente lema que usaremos con frecuencia en este capítulo.

Lema 2.1.1. Sea X un continuo. Si U es un subconjunto abierto y conexo de X, entonces $\overline{U} \in D(X)$.

Por la Proposición 1.3.7, tenemos que $N(\varepsilon, A)$ es abierto conexo siempre que el continuo X tenga una métrica convexa. Así, la prueba del siguiente resultado se sigue del Lema 2.1.1.

Lema 2.1.2. Sea X un continuo con una métrica convexa. Si $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\overline{N(\varepsilon, A)} \in D(X)$.

Este capítulo está dividido en dos secciones donde estudiaremos independientemente la conexidad y la compacidad del hiperespacio de subcontinuos regulares de X.

2.2. CONEXIDAD DE $D(X)$

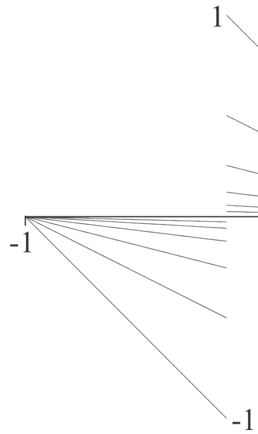
Como veremos más adelante, $D(X)$ es conexo para una clase de continuos con propiedades particulares. Comenzamos esta sección mostrando que $D(X)$ no siempre es conexo.

Proposición 2.2.1. Existe un continuo W tal que su hiperespacio de subcontinuos regulares $D(W)$, no es conexo.

Demostración. En el plano euclidiano, sea $L = [0,1] \times \{0\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n = \{(t, \frac{1-t}{n}) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$. Definamos $Y = L \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} L_n)$. Consideremos ahora el espacio W (ver Figura 3) dado por

$$W = Y \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x,-y) \in Y\}.$$

Figura 3. Continuo W.



Veamos que el hiperespacio $D(W)$ no es conexo. Para esto, mostraremos que el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in D(W) : A \subseteq Y\}$ está propiamente contenido en $D(W)$ y es simultáneamente abierto y cerrado. Como $\mathcal{A} = D(W) \cap C(Y)$ y $W \in D(W) \setminus \mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado propio de $D(W)$.

Veamos que $\mathcal{A}$ es abierto en $D(W)$. Sea $A \in \mathcal{A}$ y consideremos dos casos:

Caso 1. $(1, 0) \notin A$. Como las componentes de $Y \setminus \{(1, 0)\}$ están formadas por la colección $\{L_n \setminus \{(1, 0)\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{L \setminus \{(1, 0)\}\}$, y además $\mathrm{Int}(L \setminus \{(0, 1)\}) = \emptyset$, tenemos que $A \subseteq L_n \setminus \{(1, 0)\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además, como $L_n \setminus \{(1, 0)\}$ es un subconjunto abierto de W, podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que $B_{H_d}(\varepsilon, A) \subseteq L_n \setminus (1, 0)$. Así $A \in B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap D(W) \subseteq \mathcal{A}$.

Caso 2. $(1, 0) \in A$. Probaremos que $B_{H_d}(1/4, A) \cap D(W) \subseteq \mathcal{A}$. Sea $B \in B_{H_d}(1/4, A) \cap D(W)$. Como $B \subseteq N(\frac{1}{4}, A) \subseteq W \setminus \{(-1, 0)\}$, obtenemos que $B \subseteq Y \cup ((-1, 0] \times \{0\})$. Si $B \cap ((-1, 0] \times \{0\})$ es degenerado, entonces $B \cap ((-1, 0] \times \{0\}) = (0, 0)$ y $B \in \mathcal{A}$. Supongamos que $B \cap ((-1, 0] \times \{0\})$ es no degenerado, entonces todo punto $x \in B \cap ((-1, 0) \times \{0\})$ satisface que $x \notin \overline{\mathrm{Int}(B)} = B$. Lo cual es absurdo. Luego $B \in \mathcal{A}$ y tenemos que $A \in B_{H_d}(1/4, A) \cap D(W) \subseteq \mathcal{A}$.

Esto muestra que $\mathcal{A}$ es un subconjunto propio de $D(W)$ el cual es abierto y cerrado, y por lo tanto $D(W)$ no es conexo. $\square$

Del ejemplo anterior surge la siguiente pregunta.

Pregunta 2.2.2. ¿Para cuáles continuos X se tiene que el hiperespacio $D(X)$ es conexo?

A continuación daremos respuesta parcial a la Pregunta 2.2.2, mostrando que para los continuos localmente conexos, y para los continuos indescomponibles, $D(X)$ es conexo. También mostramos ejemplos de abanicos para los cuales $D(X)$ es arco-conexo.
En el Teorema 2.2.4 mostraremos que $D(X)$ es localmente conexo siempre que X se localmente conexo. Para esto, enunciaremos el siguiente resultado relacionado con métricas convexas que se sigue directamente de los lemas 1.3.8 y 2.1.2.

Proposición 2.2.3. Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in D(X)$ y $t \in [0,1]$, entonces $\alpha : [0,1] \to D(X)$ definida por $\alpha(s) = \overline{N(s \cdot t, A)}$ está bien definida y es continua, donde N utiliza una métrica convexa sobre X.

El siguiente resultado es uno de los teoremas importantes que probaremos en este capítulo.

Teorema 2.2.4. Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces $D(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Por el Teorema 1.3.6, podemos sin pérdida de generalidad suponer en esta prueba que X tiene métrica convexa. Mostraremos que $D(X)$ es conexo en pequeño en todo elemento y aplicaremos el Lema 1.3.10 para concluir que $D(X)$ es en efecto, localmente conexo.
Sean $A \in D(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.3.11, $C(X)$ es localmente conexo. Luego, existe un abierto conexo $\mathcal{V}$ de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq B_{H_d}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Sea $\mathcal{U} = \{\overline{N(t, B)} :$

$0 \leq t < \frac{\varepsilon}{2}$ y $B \in \mathcal{V}\}$. Por el Lema 2.1.2, tenemos que $\mathcal{U} \subseteq C(X)$. Como $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{V} \cap D(X) \subseteq \mathcal{U} \cap D(X)$; esto implica que $A \in \operatorname{Int}_{D(X)}(\mathcal{U} \cap D(X))$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{U} \cap D(X) \subseteq B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap D(X)$. Sea $E \in \mathcal{U} \cap D(X)$, entonces $E = \overline{N(t, B)}$ para algún $B \in \mathcal{V}$ y $0 \leq t < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathcal{V} \subseteq B_{H_d}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, tenemos que $H(B, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, del hecho de que $t < \frac{\varepsilon}{2}$, obtenemos que $\overline{N(t, B)} \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$ y como $B \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t, B)})$, concluimos que $H(B, \overline{N(t, B)}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego $H(A, E) < H(A, B) + H(B, \overline{N(t, B)}) < \varepsilon$. Esto muestra que $\mathcal{U} \cap D(X) \subseteq B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap D(X)$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{U} \cap D(X)$ es conexo. Sea $E \in \mathcal{U} \cap D(X)$; es decir, sean $B \in \mathcal{V}$ y $0 \leq t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ tales que $E = \overline{N(t_0, B)}$. Como $\mathcal{V}$ es un subconjunto abierto y conexo en un espacio localmente conexo, existe un encaje $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{V}$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, por el Lema 1.3.14. Consideramos dos casos:

Caso 1. $t_0 > 0$. Sea $\beta : [0, 1] \to \mathcal{U} \cap D(X)$ definida por $\beta(s) = \overline{N(st_0, \alpha(s))}$. Por el Lema 2.1.2 tenemos que β está bien definida y como $0 \leq st_0 \leq t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $s \in [0, 1]$, se tiene que por la continuidad de α y por el Lema 1.3.8 que β es continua. Del hecho de que $\beta(0) = \overline{N(0, A)} = A$ y $\beta(1) = \overline{N(t_0, B)} = E$, tenemos que $\beta([0, 1])$ es un camino conexo de A a E en $\mathcal{U} \cap D(X)$.

Caso 2. $t_0 = 0$. En este caso $E = \overline{N(0, B)} = B$. Sea t_1 tal que $0 < t_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ y sean $\beta, \gamma : [0, 1] \to \mathcal{U} \cap D(X)$ definidas por $\beta(s) = \overline{N(st_1, \alpha(s))}$ y $\gamma(s) = \overline{N(st_1, B)}$. Similar al caso 1, β y γ son funciones bien definidas y continuas tales que $\beta(0) = A$, $\beta(1) = \overline{N(t_1, B)}$,$\gamma(0) = E$, y $\gamma(1) = \overline{N(t_1, B)}$. Luego $\beta([0, 1]) \cup \gamma([0, 1])$ es un camino conexo de E a A contenido en $\mathcal{U} \cap D(X)$.

Esto concluye la prueba de que $\mathcal{U} \cap D(X)$ es un conjunto conexo. Así, hemos mostrado que $\mathcal{U} \cap D(X)$ es una vecindad conexa de A, contenida en $B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap D(X)$, lo cual muestra que $D(X)$ es conexo en pequeño en A, y como A fue arbitrario, se tiene que $D(X)$ es conexo en pequeño y por tanto, localmente conexo. □

En general un espacio localmente conexo no es conexo. Sin embargo, en el siguiente teorema mostramos que $D(X)$ además de ser localmente conexo, es arcoconexo.

Teorema 2.2.5. Si X es un continuo localmente conexo, entonces

1. $D(X)$ es denso en $C(X)$.

2. $D(X)$ es arcoconexo.

Demostración. Por el Teorema 1.3.6, podemos asumir que X admite una métrica convexa. Probemos ahora cada afirmación:

1. $D(X)$ es denso en $C(X)$. Sea $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.1.2 tenemos que $\overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)} \in D(X)$, y como $A \subseteq \overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)}$ se sigue que $H(A, \overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)}) < \varepsilon$, y así $\overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)} \in B_{H_d}(\varepsilon, A)$.

2. $D(X)$ es arcoconexo. Si $A \in D(X)$, defina $\alpha \colon [0,1] \to D(X)$ por $\alpha(t) = \overline{N(t, A)}$ para cada $t \in [0,1]$. Por la Proposición 2.2.3, α está bien definida y es continua. Note que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = X$. Así, α es un arco de A a X. Como A fue tomado arbitrariamente de $D(X)$, $D(X)$ es arcoconexo.

□

A continuación mostramos ejemplos de abanicos para los cuales su hiperespacio de subcontinuos regulares es arcoconexo.

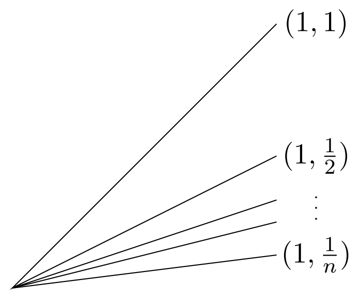
Definición 2.2.6. Un continuo X se dice *unicoherente* si satisface que $A \cap B$ es conexo, para todo A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$. Además, diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de X es unicoherente.

Dados un continuo X y $p \in X$ diremos que p es un *punto de ramificación* de X si existen tres arcos I, J y K en X, tales que p es punto final de cada arco y $(I \cap J) \cup (I \cap K) \cup (J \cap K) = \{p\}$.

Definición 2.2.7. Un continuo X se dice que es un *abanico* si X es hereditariamente unicoherente, arcoconexo con un único punto de ramificación, el cual es llamado vértice.

Ejemplos sencillos de abanicos son los n-odos simples que, dado un entero positivo n, es cualquier espacio homeomorfo a $T_n = \{t(1, 1/i) : t \in [0, 1]$ y $i \in \{1, \ldots, n\}\}$ como se muestra en la Figura 4.

Figura 4. n-odo simple.



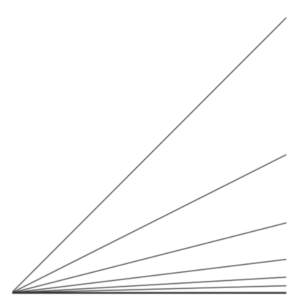
A continuación mostramos más ejemplos de abanicos. El siguiente se conoce como abanico armónico y se puede ver como una generalización de los n-odos simples.

Ejemplo 2.2.8. El conjunto F_H, definido por

$$F_H = \{t(1, 1/n) : t \in [0, 1] \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

se conoce como *abanico armónico*. Este continuo lo representamos en la Figura 5.

Figura 5. Abanico armónico.



A continuación mostramos que si a una función continua definida en el hiperespacio de los compactos no vacíos, le unimos una función constante, obtenemos nuevamente una función continua.

Lema 2.2.9. Sean X y Y continuos, y M un subconjunto compacto diferente de vacío de Y. Si $f\colon X \to 2^Y$ es una función continua, entonces $g\colon X \to 2^Y$ definida por $g(x) = M \cup f(x)$ para cada $x \in X$, es nuevamente una función continua.

Demostración. Denotaremos por d la métrica de X. Observe que

$$H(g(x), g(y)) = H(f(x) \cup M, f(y) \cup M) \leq H(f(x), f(y)),$$

para todo $x, y \in X$, por el Lema 1.2.6. Así, la continuidad de g se sigue claramente de la continuidad de f. □

La siguiente proposición muestra un continuo que no es localmente conexo y su hiperespacio de subcontinuos regulares es arcoconexo. En particular el siguiente resultado muestra que el recíproco del Teorema 2.2.5 no es cierto.

Proposición 2.2.10. Sea F_H el abanico armónico definido en el Ejemplo 2.2.8. Entonces, F_H no es localmente conexo y $D(F_H)$ es arcoconexo y denso en $C(F_H)$.

Demostración. Es claro que F_H no es localmente conexo. Veamos primero que $D(F_H)$ es arcoconexo. Sea $Z \in D(F_H)$. Mostremos que existe un arco en $D(F_H)$ de Z a F_H. Sea $J = [0, 1] \times \{0\}$ y $v = (0, 0)$. Como $Z \in D(F_H)$, entonces $Z \cap (F_H \setminus J) \neq \emptyset$. Sea $x \in Z \cap (F_H \setminus J)$. Definamos $g\colon [0, 1] \to C(F_H)$ por $g(t) = [(1 - t)x, x]$ para cada $t \in [0, 1]$. No es difícil ver que g es una función continua; además, si $h_1\colon [0, 1] \to C(F_H)$ la definimos por $h_1(t) = g(t) \cup Z$ para cada $t \in [0, 1]$, entonces h_1 es una función continua, por el Lema 2.2.9. Por otra parte definimos $h_2\colon [0, 1] \to C(F_H)$ por

$$h_2(t) = \{tx : x \in F_H\}, \text{ para cada } t \in [0, 1].$$

Observe que h_2 está bien definida y es continua tal que $h_2(0) = \{v\}$ y $h_2(1) = F_H$. Finalmente, definimos $h\colon [0,1] \to C(F_H)$ de la siguiente manera:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h_2(2t-1) \cup h_1(1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que usando nuevamente el Lema 2.2.9, tenemos la continuidad de h. Además, $h(0) = Z$, $h(1) = F_H$ y $h(t) \in D(F_H)$ para cada $t \in [0,1]$. De lo anterior, $D(F_H)$ es arcoconexo.

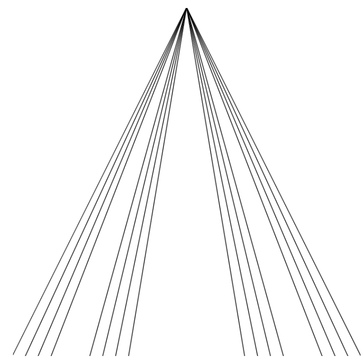
Finalmente, probemos que $D(F_H)$ es denso en $C(F_H)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y defina $L_n = \{(t, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$. Sean $A \in C(F_H)$ y $\varepsilon > 0$. Si $A \subseteq F_H \setminus (J \setminus \{v\})$, entonces $A \in D(F_H)$. Supongamos que $I_J = A \cap (J \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. Note que I_J es un arco en J. Sean a, b los puntos finales de I_J. Como $\lim_{n\to\infty} L_n = J$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(L_k, J) < \varepsilon$. Sea I_K un arco en L_k, isométrico a I_J, y con puntos finales p, q tal que $d(v,p) = d(v,a)$ y $d(v,q) = d(v,b)$. Como $H(L_k, J) < \varepsilon$, entonces $H(I_K, I_J) < \varepsilon$. Sea $M = A \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n) \cup I_K$. No es difícil ver que $M \in D(F_H)$. Note que $A = A \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} L_n) \cup I_J$. Luego por el Lema 1.2.6 tenemos que $H(A, M) < \varepsilon$. $\square$

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. El conjunto $F_{\mathcal{C}}$, definido como el espacio cociente:

$$F_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \times [0,1])/(\mathcal{C} \times \{1\})$$

se conoce como *abanico de Cantor*. Es posible mostrar que el abanico de Cantor se puede representar como subespacio de $\mathbb{R}^2$ como mostramos en la Figura 6.

Figura 6. Abanico de Cantor.



A continuación mostramos que el hiperespacio de subcontinuos regulares del abanico de Cantor es también arcoconexo.

Proposición 2.2.11. Sea $F_{\mathcal{C}}$ el abanico de Cantor. Entonces, el hiperespacio $D(F_{\mathcal{C}})$ es arcoconexo.

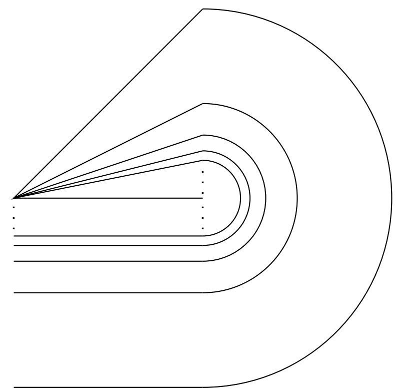
Demostración. Sea $Z \in D(F_{\mathcal{C}})$. Mostremos que existe un arco en $D(F_{\mathcal{C}})$ de Z a $F_{\mathcal{C}}$. Note que $v \in Z$. Defina $h(t)\colon [0,1] \to C(F_{\mathcal{C}})$ por $h(t) = A_t \cup Z$, donde $A_t = \{tx : x \in F_{\mathcal{C}}\}$. Por el Lema 2.2.9, h es continua. Luego $h([0,1])$ es un arco de Z a $F_{\mathcal{C}}$. $\square$

Consideramos naturalmente la siguiente pregunta:

Pregunta 2.2.12. ¿Existe un abanico X tal que el hiperespacio de subcontinuos regulares $D(X)$ no sea arcoconexo?

En particular no sabemos si $D(X)$ es arcoconexo para el abanico definido como $H = F_H/\sim$, donde $(x,0) \sim (1-x,0)$ para cada $x \in [0,1]$. En la Figura 7 representamos el abanico H.

Figura 7. Abanico doblado.



El siguiente ejemplo muestra un continuo W no arcoconexo, tal que $D(W)$ es arcoconexo.

Proposición 2.2.13. Sea W la curva senoidal del topólogo ([Definición 1.1.3]), entonces $D(W)$ es arcoconexo.

Demostración. Sean $R = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ y $J = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$. Así, $W = J \cup R$. Note que un subcontinuo de W es regular sí, y solo si, no está propiamente contenido en J. Sea $\mathcal{Z} = \{A \in C(W) : A \subsetneq J\}$, por lo dicho anteriormente, $D(W) = C(W) \setminus \mathcal{Z}$. Sea $E \in D(W)$ Por el Teorema 1.3.16, existe un arco de orden en $C(W)$ de E a W. No es difícil ver que éste también es un arco de orden en $C(W) \setminus \mathcal{Z}$ de E a W y por lo tanto $D(W)$ es arcoconexo. $\square$

El siguiente resultado se sigue directamente del Lema 1.3.3. Muestra en particular que $D(X)$ es conexo si X es un continuo indescomponible.

Teorema 2.2.14. Sea X un continuo. Si X es indescomponible, entonces $D(X) = \{X\}$.

Con base en el Teorema 2.2.14, es posible preguntarse si existe algún continuo descomponible X tal que $D(X) = \{X\}$. En efecto existe un ejemplo y se presenta a continuación.

Ejemplo 2.2.15. Sean $\mathcal{C}$ el conjunto canónico de Cantor contenido en $[0,1]$ y Y' el continuo de Knaster contenido en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ el cual se construye sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ y cuyo punto final es $(0,0,0)$ como se muestra en Ejemplo 1.3.2. Sea

$$Y = \{(x, y-1, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,0) \in Y' \text{ y } y \leq 0\} \cup \{(x, y+1, 0) \in \mathbb{R}^3 : \\ (x,y,0) \in Y' \text{ y } y \geq 0\} \cup \{(c,t,0) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathcal{C}, t \in [-1,1]\}.$$

Note que Y es un continuo de Knaster que naturalmente contiene al cilindro $Z = \{(c,t,0) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathcal{C}, t \in [-1,1]\}$. Para cada $c \in \mathcal{C}$, sea

$$Y_c = \{(c,y,x) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,0) \in Y\}$$

y

$$L_c = \{(c,t,0) \in \mathbb{R}^3 : t \in [-1,1]\}.$$

Note que para cada $c \in \mathcal{C}$ tenemos que

- Y_c es una copia de Y en el plano $x = c$;
- L_c es un arco;
- $Y \cap Y_c = L_c$.

Con la notación anterior, definimos el continuo X en $\mathbb{R}^3$ como

$$X = Y \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c \right).$$

Por la construcción de X obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.16. El continuo X definido en el Ejemplo 2.2.15, satisface las siguientes propiedades:

a. X es descomponible.

b. $Y_c \cap Y_v = \emptyset$, para todo $c, v \in \mathcal{C}$ y $c \neq v$.

c. $\mathrm{Int}(Y_c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$.

d. Si $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, para algún $c \in \mathcal{C}$, entonces $\lim_{n\to\infty} Y_{c_n} = Y_c$.

e. $X \setminus Y$ es abierto pero no conexo, más aún, sus componentes son los conjuntos $Y_c \setminus L_c$, donde $c \in C$.

Observación 2.2.17. Note que en el continuo X, la intersección de dos subcontinuos resulta nuevamente en un continuo. Los detalles de esta afirmación, se presentan en las Proposiciones 5.3 y 5.4 en [4].

El objetivo de la definición del continuo X es mostrar que a pesar que X es descomponible, su hiperespacio $D(X)$ es trivial, como mostramos en el Teorema 2.2.21. Los resultados que presentamos a continuación hacen referencia a la construcción de este continuo.

Proposición 2.2.18. Si A es un subcontinuo regular de X, entonces $Y \subseteq A$.

Demostración. Por la Proposición 5.3 de [4], $B = A \cap Y$ es un subcontino de Y, por lo tanto B es un subcontinuo de X. Si $B \cap (Y \setminus \bigcup_{c\in\mathcal{C}} Y_c) = \emptyset$, entonces A es un subcontinuo propio de Y, o $A \subseteq Y_c$ para algún $c \in \mathcal{C}$. En ambos casos tenemos que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$, lo cual es absurdo. Sea $x \in B \cap (Y \setminus \bigcup_{c\in\mathcal{C}} Y_c)$. Como $\bigcup_{c\in\mathcal{C}} Y_c$ es cerrado en X, existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \cap \bigcup_{c\in\mathcal{C}} Y_c = \emptyset$. Como $x \in A = \overline{\mathrm{Int}(A)}$, existe $y \in U \cap \mathrm{Int}(A)$. Luego $W = U \cap \overline{\mathrm{Int}(A)}$ es un abierto no vacío de X tal que $W \subseteq B$. Luego B es un subcontinuo de Y con interior no vacío en Y, lo cual implica que $Y = B$. $\square$

Proposición 2.2.19. Sea A un subcontinuo de X y $c \in \mathcal{C}$. Si $\mathrm{Int}(A) \cap (Y_c \setminus L_c) \neq \emptyset$, entonces $Y_c \subset A$.

Demostración. Por la Proposición 5.4 de [4], $B = A \cap Y_c$ es un subcontinuo de Y_c. Sean $x \in \mathrm{Int}(A) \cap (Y_c \setminus L_c) \neq \emptyset$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U \subseteq A$ y $U \cap Y \neq \emptyset$. Entonces $U \cap Y_c$ es un abierto no vació de Y_c contenido en B, lo cual muestra que B es un subcontinuo con interior no vacío en Y_c, por lo tanto tenemos que $Y_c = B$. □

Proposición 2.2.20. Si A es un subcontinuo regular de X, entonces $\mathcal{D} = \{c \in \mathcal{C} : Y_c \subseteq A\}$ es denso en $\mathcal{C}$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.18, tenemos que $Y \subseteq A$. Sea $c \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $x \in L_c$ tal que $x \in \mathrm{Int}(\bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$. Como A es regular, entonces existe $y \in \mathrm{Int}(A) \cap B_d(\varepsilon, x) \cap \mathrm{Int}(\bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$. Como $y \in \mathrm{Int}(\bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$, existe un $c_1 \in \mathcal{C}$ tal que $y \in Y_{c_1}$. Luego Y_{c_1} es un subcontinuo de X tal que $\mathrm{Int}(A) \cap (Y_{c_1} \setminus L_{c_1}) \neq \emptyset$ y por la Proposición 2.2.19 tenemos que $Y_{c_1} \subseteq A$. Sean $t, s \in [0, 1]$ tales que $x = (c, t, 0)$ y $y = (c_1, s, 0)$. Como $y \in B_d(\varepsilon, x)$, tenemos que $|c - c_1| \leq d(x, y) < \varepsilon$. Esto muestra que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{C}$. □

Teorema 2.2.21. El continuo X no contiene subcontinuos regulares propios, en otras palabras $D(X) = \{X\}$.

Demostración. Sea A un subcontinuo regular de X. Por la Proposición 2.2.18, tenemos que $Y \subseteq A$, y por la Proposición 2.2.20, tenemos que $\{c \in \mathcal{C} : Y_c \subseteq A\}$ es denso en $\mathcal{C}$, lo cual implica que A es denso en X. Luego $A = X$. □

Finalizamos esta sección planteando otra pregunta que está propuesta en [4], Problema 5.9.

Pregunta 2.2.22. ¿Existe un continuo hereditariamente descomponible X tal que su hiperespacio de subcontinuos regulares $D(X) = \{X\}$?

2.3. COMPACIDAD DE $D(X)$

El propósito de esta sección es mostrar que $D(X)$ es compacto, solamente si $D(X)$ es finito. Naturalmente, diremos que un subconjunto Y de X es *regular* si $\overline{Y}$ es un subconjunto cerrado regular de X.

Las propiedades enunciadas en el siguiente resultado se pueden demostrar fácilmente. El lector puede probarlo sin dificultad.

Proposición 2.3.1. Sean X un continuo y A y B subconjuntos no vacíos de X.

a. Si A es cerrado, entonces $\mathrm{Int}(A \cup B) \subseteq A \cup \mathrm{Int}(B)$ y $\mathrm{Int}(B \setminus A) = \mathrm{Int}(B) \setminus A$.

b. A es regular si, y solo si, $\overline{A}$ es regular.

c. Si A y B son cerrado regulares, entonces $A \cup B$ es cerrado regular.

d. Si A y B son cerrados y C es un subconjunto cerrado de $B \setminus A$, entonces $A \cup C$ es cerrado en X.

La siguiente proposición nos será de utilidad en el desarrollo de los principales resultados de esta sección.

Proposición 2.3.2. Sean X un continuo y B un subconjunto regular de X. Si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $B \setminus A$ es regular.

Demostración. Supongamos que $B \setminus A$ es no vacío. Solo debemos mostrar que $\overline{B \setminus A} \subseteq \overline{\mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})}$. Sean $x \in \overline{B \setminus A}$ y U un abierto de X con $x \in U$. Nótese que existe $b \in U$ tal que $b \in B$ y $b \notin A$. Como A es cerrado, $W = U \cap (X \setminus A)$ es un subconjunto abierto no vacío tal que $b \in W$. Además, $W \cap \mathrm{Int}(\overline{B}) \neq \emptyset$, pues $b \in B \subseteq \overline{B} = \overline{\mathrm{Int}(\overline{B})}$. Sea $b_1 \in W \cap \mathrm{Int}(\overline{B})$. Tenemos por la Proposición 2.3.1 (a), que $b_1 \in \mathrm{Int}(\overline{B}) \setminus A = \mathrm{Int}(\overline{B} \setminus A)$. Veamos que $\mathrm{Int}(\overline{B} \setminus A) \subseteq \mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})$. Mostraremos que $\overline{B} \setminus A \subseteq \overline{B \setminus A}$, es decir $\overline{B} \cap (X \setminus A) \subseteq \overline{B \cap (X \setminus A)}$. Sea $y \in \overline{B} \cap (X \setminus A)$ y $r > 0$. Como $X \setminus A$ es abierto, existe $s < r$ tal que $B_d(s, x) \subseteq X \setminus A$, y $B_d(s, x) \cap B \subseteq X \setminus A$. Luego

$B_d(s,x) \cap (B \cap (X \setminus A)) \neq \emptyset$, por lo tanto $B_d(r,x) \cap (B \cap (X \setminus A)) \neq \emptyset$. Esto implica que $y \in \overline{B \cap (X \setminus A)}$. Así, $\overline{B} \setminus A \subseteq \overline{B \setminus A}$ y por tanto $\mathrm{Int}(\overline{B} \setminus A) \subseteq \mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})$. En conclusión, $b_1 \in \mathrm{Int}(\overline{B} \setminus A) \subseteq \mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})$, esto muestra que $b_1 \in U \cap \mathrm{Int}(\overline{B \setminus A}) \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in \overline{\mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})}$ y tenemos que $\overline{B \setminus A} \subseteq \overline{\mathrm{Int}(\overline{B \setminus A})}$ como se queríamos mostrar. $\square$

Corolario 2.3.3. Sean X un continuo y B un subconjunto regular de X. Si V es un subconjunto abierto de X, entonces $B \cap V$ es un subconjunto regular de X.

Demostración. Basta tomar el cerrado $X \setminus V$, y aplicar la Proposición 2.3.2. $\square$

Proposición 2.3.4. Sean X un continuo y Y y C dos subconjuntos de X tales que:

1. Y y $Y \cup C$ son cerrados;
2. $Y \cap C = \emptyset$; y
3. C no es regular.

Entonces $Y \cup C$ no es regular.

Demostración. Como C no es regular, $\overline{\mathrm{Int}(\overline{C})} \neq \overline{C}$. Nótese que $\overline{\mathrm{Int}(\overline{C})} \subseteq \overline{C}$. Luego $\overline{C} \not\subseteq \overline{\mathrm{Int}(\overline{C})}$. Sean $x \in \overline{C} \setminus \overline{\mathrm{Int}(\overline{C})}$ y U subconjunto abierto de X con $x \in U$ tal que $U \cap \mathrm{Int}(\overline{C}) = \emptyset$. Como $x \in \overline{C}$, $C \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in C \cap U$. Como $Y \cap C = \emptyset$, tenemos que $y \notin Y \cup \overline{\mathrm{Int}(\overline{C})}$. Por la Proposición 2.3.1 (a), tenemos que

$$\overline{\mathrm{Int}(Y \cup \overline{C})} \subseteq \overline{Y \cup \mathrm{Int}(\overline{C})} = Y \cup \overline{\mathrm{Int}(\overline{C})}.$$

Luego, $y \notin \overline{\mathrm{Int}(Y \cup \overline{C})}$. Del hecho de que $y \in Y \cup \overline{C}$, obtenemos que $Y \cup \overline{C} \not\subseteq \overline{\mathrm{Int}(Y \cup \overline{C})}$, y por lo tanto $Y \cup C$ no es regular. $\square$

2.3.1. Regularidad y componentes En esta sección mostramos en la Proposición 2.3.1.5 una condición suficiente para que el hiperespacio $D(X)$ no sea compacto.

A continuación introducimos la notación que usaremos. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, definimos

$$\mathrm{Com}(A) = \{C \subseteq A : C \text{ es una componente de } A\}.$$

Dada $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de un espacio topológico X, definimos

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Lema 2.3.1.1. Sea X un continuo. Si A es un subconjunto de X no conexo y $A = U' \cup V'$ es una separación de A, entonces existen dos subconjuntos no vacíos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Com}(A)$; y dos subconjuntos disjuntos U y V de X tales que:

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$,
2. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathrm{Com}(A)$,
3. $\mathcal{A}^* \subseteq U$ y $\mathcal{B}^* \subseteq V$,
4. $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$.

Demostración. Como X es un espacio métrico, existen dos subconjuntos abiertos y disjuntos U y V de X, tales que $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$. Defina $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como sigue:

$$\mathcal{A} = \{C \in \mathrm{Com}(A) : C \subseteq U\} \text{ y } \mathcal{B} = \{C \in \mathrm{Com}(A) : C \subseteq V\}.$$

No es difícil ver que $U, V, \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ satisfacen las condiciones que necesitamos. □

Proposición 2.3.1.2. Sean A un subconjunto regular de X y $A = U' \cup V'$ una separación de A. Si $C \in \mathrm{Com}(A)$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathrm{Com}(A)$ tal que:

1. $C \in \mathcal{A}$;

2. $\mathcal{A}^* \cap U' \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}^* \cap V' \neq \emptyset$;

3. $\mathcal{A}^*$ es cerrado en A;

4. $\mathcal{A}^*$ es regular.

Entonces existe un subconjunto $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ tal que:

a. $C \in \mathcal{A}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}$,

b. $\mathcal{A}_1^*$ es cerrado en A,

c. $\mathcal{A}_1^*$ es regular.

Demostración. La condición (2) implica que $\mathcal{A}^*$ no es conexo. Por el Lema 2.3.1.1, existen dos subconjuntos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Com}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}$ y dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que:

1. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$,

2. $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$,

3. $\mathcal{A}_1^* \subseteq U$ y $\mathcal{B}_1^* \subseteq V$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \in \mathcal{A}_1$. Como $\mathcal{B}_1$ es no vacío y $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$, la condición (a) se satisface. Del hecho de que $X \setminus V$ es cerrado en X y $\mathcal{A}^*$ es cerrado en A, obtenemos que $\mathcal{A}_1^* = A \cap (X \setminus V) \cap \mathcal{A}^*$ es cerrado en A. Luego la condición (b) se satisface. Finalmente, como $\mathcal{A}_1^*$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}^*$ y U es un subconjunto abierto de X, tenemos por el Corolario 2.3.3, que $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}^* \cap U$ es un subconjunto regular de X y la condición (c) también se satisface. $\square$

El siguiente teorema se conoce como el Teorema de reducción de Brouwer. Refiérase al Teorema 11.1 en [6] para detalles de la demostración.

Teorema 2.3.1.3. Sean Y un espacio topológico segundo numerable y Z una familia no vacía de subconjuntos cerrados de Y. Si cada sucesión decreciente de elementos en Z satisface que su intersección pertenece a Z, entonces Z tiene elementos minimales.

Teorema 2.3.1.4. Sean A un subconjunto regular diferente del vacío y C una componente de A. Si C no es regular, entonces existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathrm{Com}(A)$ tal que:

1. $C \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathcal{B}_{n+1} \subsetneq \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
3. $\mathcal{B}_n^*$ es regular para cada $n \in \mathbb{N}$;
4. $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en A para cada $n \in \mathbb{N}$;
5. $\mathcal{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es un subconjunto de $\mathrm{Com}(A)$ tal que $\mathcal{B}^*$ es cerrado en A pero no es regular.

Demostración. Sea

$$\mathcal{Z} = \{\mathcal{B}^* \subseteq A : C \in \mathcal{B} \subseteq \mathrm{Com}(A), \mathcal{B}^* \text{ es cerrado en } A \text{ y regular en } X\}.$$

Consideramos los siguientes casos:

Caso 1. Toda sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$ satisface que su intersección pertenece a $\mathcal{Z}$. Por el Teorema 2.3.1.3, existe un elemento minimal $\mathcal{B}^*$ en $\mathcal{Z}$. Luego $\mathcal{B}^*$ es un

[6] G.T. WHYBURN. *Analytic Topology*. Vol. 28. American Mathematical Society, 1948.

subconjunto regular de X tal que $C \in \mathrm{Com}(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$ es cerrado en A y $\mathcal{B}^*$ es un subconjunto regular.

Como $C \in \mathrm{Com}(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}$ y C no es regular, se sigue que $\mathcal{B}^*$ no es conexo (si $\mathcal{B}^*$ fuera conexo, se tendría $C = \mathcal{B}^*$, un absurdo), luego existen dos subconjuntos no vacíos U' y V' de $\mathcal{B}^*$ tales que $\mathcal{B}^* = U' \cup V'$ es una separación de $\mathcal{B}^*$. Por la Proposición 2.3.1.2, existe un subconjunto propio $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}$ tal que $C \in \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}_1^*$ es regular.

Note que $C \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathrm{Com}(A)$. Como $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en $\mathcal{B}^*$, el cual es cerrado en A, obtenemos que $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en A. Finalmente, tenemos que $\mathcal{B}_1^*$ es regular, lo que muestra que $\mathcal{B}_1^* \in \mathcal{Z}$. Pero $\mathcal{B}_1^*$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}^*$, debido a que $\mathcal{B}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$, lo cual contradice la minimilidad de $\mathcal{B}^*$ en $\mathcal{Z}$. Esto muestra que el Caso 1 no es posible.

Caso 2. Existe una sucesión decreciente $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{Z}$, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* \notin \mathcal{Z}$. Note que la sucesión $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ debe tener una cantidad infinita de elementos distintos, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{B}_{n+1}^* \subsetneq \mathcal{B}_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión en $\mathrm{Com}(A)$ inducida por $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Vamos a mostrar que $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface el teorema.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_n^* \in \mathcal{Z}$, tenemos que $C \in \mathcal{B}_n \subseteq \mathrm{Com}(A)$, $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en A y regular en X. Luego las condiciones $(1), (3)$ y (4) se satisfacen. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{B}_{n+1}^* \subsetneq \mathcal{B}_n^*$, existe $y \in \mathcal{B}_n^* \setminus \mathcal{B}_{n+1}^*$. Si F es la componente de A que contiene a y, entonces $F \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n+1}$. Esto muestra que la condición (2) se satisface.

Probemos la condición (5). Sea $\mathcal{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Es claro que $\mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$. Note que $C \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ es un subconjunto cerrado de A, debido a que $\mathcal{B}_n^*$ es un subconjunto cerrado de A para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, del hecho de que $\mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* \notin \mathcal{Z}$, tenemos que $\mathcal{B}^*$ no es un subconjunto regular de X. Esto finaliza la prueba del teorema. $\square$

Proposición 2.3.1.5. Sean A y B dos elementos de $D(X)$. Si $C \subseteq B \setminus A$ es una componente la cual no es regular, entonces $D(X)$ no es cerrado.

Demostración. Sea C una componente que no es regular de $B \setminus A$. Por el Corolario 2.3.3, tenemos que $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ es regular de X, y por el Teorema 2.3.1.4, existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathrm{Com}(B \setminus A)$ tal que:

1. $C \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

2. $\mathcal{B}_{n+1} \subsetneq \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

3. $\mathcal{B}_n^*$ es regular para cada $n \in \mathbb{N}$;

4. $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en $B \setminus A$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

5. $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es un subconjunto de $\mathrm{Com}(B \setminus A)$ tal que $\mathcal{B}^*$ es cerrado en $B \setminus A$ pero no es regular.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = A \cup \mathcal{B}_n^*$ y $K = A \cup \mathcal{B}^*$. Por el Corolario 5.9 de [5], tenemos que K y K_n son continuos y en consecuencia conexos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por la Proposición 2.3.1 (d), se sigue que K y K_n son cerrados en X.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_n^*$ es regular, tenemos que $\overline{\mathcal{B}_n^*}$ es cerrado regular, y por la Proposición 2.3.1 (c), obtenemos que $K_n = A \cup \mathcal{B}^* = A \cup \overline{\mathcal{B}_n^*}$ es regular y seguidamente por la Proposición 2.3.4, tenemos que K no es regular. Como $A \cup \mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \cup \mathcal{B}_n^*$, tenemos que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$; y por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Luego, hemos mostrado que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ donde $K \notin D(X)$, lo cual muestra que $D(X)$ no es cerrado. $\square$

2.3.2. Elementos límite minimales de $D(X)$ Un elemento $B \in C(X)$ es llamado *elemento límite minimal de* $D(X)$ si B es un punto de acumulación de $D(X)$ y para todo punto de acumulación A de $D(X)$ con $A \subseteq B$, tenemos que $A = B$.

Lema 2.3.2.1. Sea X un continuo tal que $D(X)$ es compacto. Si $A \in D(X)$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $D(X)$ tal que :

1. A_n es un subconjunto propio de A, para cada $n \in \mathbb{N}$, y

2. $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Entonces, A no es un elemento límite minimal de $D(X)$.

Demostración. Como $A_1 \in D(X)$, tenemos que $\mathrm{Int}(A_1) \neq \emptyset$, luego como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \cap A_1 \neq \emptyset$ para todo $m \geq N_1$. Consideramos tres casos:
Caso 1. $A_1 \cup A_m$ es un subconjunto propio de A para todo $m \geq N_1$.
Sea K_{N_1} una componente de $A \setminus (A \cup A_{N_1})$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 2.3.1.5, tenemos que K_{N_1} es regular y por (b) de la Proposición 2.3.1 tenemos que $\overline{K}_{N_1}$ es regular.
Suponga que existen números naturales $N_1 < N_2 < \cdots < N_{t-1}$ con la propiedad de que para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$ existe una componente K_{N_i} de $A \setminus (A_1 \cup A_{N_i})$, tal que $\overline{K}_{N_i}$ es regular y $\overline{K}_{N_i} \neq \overline{K}_{N_j}$, para cada $i, j \in \{1, ..., t-1\}$ con $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe $N_t > N_{t-1}$ tal que $\mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$ es un subconjunto abierto no vacío de X para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$.

Probemos la Afirmación 1. Note que $\mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$ es un subconjunto abierto no vacío de X contenido en A para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, podemos escoger $N_t \in \mathbb{N}$ tal que $N_t > N_{t-1}$ y $A_{N_t} \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$. Sea $i \in \{1, ..., t-1\}$ y $x \in A_{N_t} \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$. Como $A_{N_t} \in D(X)$ y $x \in \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$, tenemos que $\mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i} \neq \emptyset$. Esto finaliza la prueba de esta afirmación.
Como $A_1 \cup A_{N_t}$ es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_t} de $A \setminus (A_1 \cup A_{N_t})$. Por la Proposición 2.3.1.5, tenemos que K_{N_t} es regular y por (b) de la Proposición 2.3.1, obtenemos que $\overline{K}_{N_t}$ es regular.

Afirmación 2. $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$.

Probamos esta última afirmación. Sea $i \in \{1, ..., t-1\}$. Como $K_{N_t} \subseteq A \setminus (A_1 \cup A_{N_t})$, tenemos que $K_{N_t} \subseteq A \setminus \mathrm{Int}(A_{N_t})$, y luego $\overline{K}_{N_t} \subseteq A \setminus \mathrm{Int}(A_{N_t})$. Por la Afirmación 1, tenemos que $U_i = \mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$ es un subconjunto abierto no vacío de X tal que $U_i \cap \overline{K}_{N_t} = \emptyset$. Como $U_i \subseteq \overline{K}_{N_i}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ y terminamos con la prueba de la Afirmación 2.

Inductivamente existe una sucesión de subconjuntos regulares $\{\overline{K}_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos, tales que K_{N_i} es una componente de $A \setminus (A_1 \cup A_{N_i})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim \overline{K}_{N_i} = K$ para algún $K \in C(X)$. Esto implica que K es un punto de acumulación de $D(X)$ y por construcción tenemos que $K = \lim \overline{K}_{N_i} \subseteq A \setminus \mathrm{Int}(A_1)$. Como $\mathrm{Int}(A_1) \neq \emptyset$, obtenemos que K es propio en A y por lo tanto A no puede ser un punto límite minimal de $D(X)$. Esto finaliza el Caso 1.

Caso 2. $A_1 \cup A_K = A$ para una cantidad finita de elementos en $\{m \in \mathbb{N} : m \geq N_1\}$.

Sea $N_1 = \max\{m \in \mathbb{N} : A_1 \cup A_m = A\}$. Entonces $A_1 \cup A_m$ es un subconjunto propio de A para cada $m \geq N_1$ y aplicamos el Caso 1.

Caso 3. $A_1 \cup A_{m_i} = A$ para alguna subsucesión $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{m_i\}_{m=N_1}^{\infty}$.

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $A_1 \cup A_m = A$ para cada $m \geq N_1$. Como A_{N_1} es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_1} de $A \setminus A_{N_1} \subseteq A_1$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 2.3.1.5, tenemos que K_{N_1} es regular y por (b) de la Proposición 2.3.1, obtenemos que $\overline{K}_{N_1}$ es regular.

Suponga que existen números naturales $N_1 < N_2 < \cdots < N_{t-1}$ con la propiedad de que para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$ existe una componente K_{N_i} de $A \setminus A_{N_i}$, tal que $\overline{K}_{N_i}$ es regular y $\overline{K}_{N_i} \neq \overline{K}_{N_j}$, para cada $i, j \in \{1, ..., t-1\}$ con $i \neq j$.

Afirmación 3. Existen $N_t > N_{t-1}$ tales que $\mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_1})$ es un subconjunto no vacío de X para cada $i \in \{1, ..., t_1\}$.

Probamos la afirmación: Note que $\mathrm{Int}(\overline{K}_{N_1})$ es un subconjunto abierto no vacío de X para cada $i \in \{1, ..., t_1\}$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N_t \in \mathbb{N}$ tal que $N_t > N_{i-1}$ y $A_n \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N_t$. Sea $i \in \{1, ..., t-1\}$ y $x \in A_{N_t} \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$. Como $A_{N_t} \in D(X)$ y $x \in \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$, tenemos que $\mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_1}) \neq \emptyset$. Esto finaliza la

prueba de la Afirmación 3.
Como A_{N_t} es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_t} de $A \setminus A_{N_t}$. Por la Proposición 2.3.1.5, tenemos que K_{N_t} es regular y por (b) de la Proposición 2.3.1, tenemos que $\overline{K}_{N_t}$ es regular.

Afirmación 4. $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ para cada $i \in \{1, ..., t-1\}$

. Probamos la afirmación anterior: Sea $i \in \{1, ..., t-1\}$. Como $K_{N_t} \subseteq A \setminus A_{N_t}$, tenemos que $K_{N_t} \subseteq A \setminus \mathrm{Int}(A_{N_t})$, y luego $\overline{K}_{N_t} \subseteq A \setminus \mathrm{Int}(A_{N_t})$. Por la Afirmación 3, tenemos que $U_i = \mathrm{Int}(A_{N_t}) \cap \mathrm{Int}(\overline{K}_{N_i})$ es un subconjunto abierto no vacío de X tal que $U_i \cap \overline{K}_{N_t} = \emptyset$. Como $U_i \subseteq \overline{K}_{N_i}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ y terminamos con la prueba de la Afirmación 4.
Inductivamente existe una sucesión de subconjuntos regulares $\{\overline{K}_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos, tales que K_{N_i} es una componente de $A \setminus A_{N_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim \overline{K}_{N_i} = K$ para algún $K \in D(X)$. Note que, si $i \in \mathbb{N}$, entonces $K_{N_i} \subseteq A_1$, luego tenemos que $\lim \overline{K}_{N_i} = K \subseteq A_1$. Como K es un punto de acumulación de $D(X)$, obtenemos que A no es minimal.
Esto finaliza la prueba de este lema. $\square$

Lema 2.3.2.2. Si $D(X)$ tiene una cantidad infinita de elementos, entonces $D(X)$ tiene un punto límite minimal.

Demostración. Sean A un punto de acumulación de $D(X)$ y

$$\mathcal{Z} = \{B \in C(X) : B \subseteq A \text{ y } B \text{ es un punto de acumulación de } D(X)\}.$$

Note que $A \in \mathcal{Z}$. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$. Podemos sin pérdida de generalidad suponer que $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ en $D(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n^m = A_m$, donde $A_j^m \neq A_k^m$ para cada $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$.

Sea $A_{N_1}^1$ un elemento de la sucesión $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H(A_1, A_{N_1}^1) < 1$. Suponga que para $m \in \mathbb{N}$ se satisface que para todo $i \in \{1, ..., m\}$ existe un elemento $A_{N_i}^i$ de la sucesión $\{A_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H(A_i, A_{N_i}^i) < \frac{1}{i}$ y $A_{N_j}^j \neq A_{N_k}^k$ para todo $j, k \in \{1, ..., m\}$ con $j \neq k$. Es posible escoger un elemento $A_{N_{m+1}}^{m+1}$ de la sucesión $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H(A_{m+1}, A_{N_{m+1}}^{m+1}) < \frac{1}{m+1}$ y $A_{N_{m+1}}^{m+1} \neq A_{N_i}^i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$. De esta forma se ha construido inductivamente una sucesión $\{A_{N_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$, donde $A_{N_j}^j \neq A_{N_k}^k$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$ tal que $H(A_m, A_{N_m}^m) < \frac{1}{m}$. Si $B = \cap_{m=1}^{\infty} A_m$, entonces $\lim_{m \to \infty} A_m = B$, y por lo tanto $\lim_{m \to \infty} A_{N_m}^m = B$. Esto muestra que B es un punto de acumulación de $D(X)$, lo cual implica que la intersección de cada sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$ pertenece a $\mathcal{Z}$. Por el Teorema 2.3.1.3, obtenemos que $\mathcal{Z}$ tiene elementos minimales. Esto muestra que $D(X)$ tiene elementos límite minimales. □

2.3.3. Teorema principal A continuación mostramos el resultado principal relacionado con la compacidad del hiperespacio $D(X)$ donde probamos que si $D(X)$ es infinito, entonces el hiperespacio $D(X)$ no es compacto.

Teorema 2.3.3.1. Sea X un continuo. Si $D(X)$ es compacto, entonces $D(X)$ es finito.

Demostración. Sea X un continuo tal que $D(X)$ es compacto. Por el Lema 2.3.2.2, existe un elemento límite minimal $Y \in D(X)$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D(X) \backslash Y$ tal que $\lim_{n \to \infty} A_n = Y$. Por el Lema 2.3.2.1 y (e) de la Proposición 2.3.1, podemos suponer que $A_n \nsubseteq Y$ y $A_n \cap Y \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea K_1 una componente de $A_1 \setminus Y$. Por la Proposición 2.3.1.5 y por (b) de la Proposición 2.3.1, tenemos que $\overline{K_1}$ es regular. Como $K_1 \subseteq A_1 \setminus Y$, tenemos que $\overline{K_1} \cap \operatorname{Int}(Y) \neq \emptyset$.

Suponga que $t \in \mathbb{N}$ es tal que para todo $i \in \{1, ..., t-1\}$ existe una componente K_{n_i} de $A_{n_i} \setminus Y$ tal que $\overline{K_{n_i}}$ es regular, $\overline{K_{n_i}} \cap \operatorname{Int}(Y) = \emptyset$ y también $\overline{K_{n_i}} \neq \overline{K_{n_j}}$ para todo $i, j \in \{1, ..., t-1\}$ con $i \neq j$.

Afirmación. Existe $n > n_{t-1}$ y una componente K_{n_t} de $A_{n_t} \setminus Y$ tal que:

1. $\overline{K}_{n_t}$ es regular,

2. $\overline{K}_{n_t} \cap \operatorname{Int}(Y) = \emptyset$, y

3. $\overline{K}_{n_t} \neq \overline{K}_{n_i}$ para cada $i \in \{i, ..., t-1\}$.

Probemos la Afirmación. Supongamos que para todo $n > n_{t+1}$, la clausura de cada componente de $A_n \setminus Y$ no satisface alguna de las condiciones nombradas. Analizamos cada caso:

Si $n > n_{t+1}$ y K_n es una componente de $A_n \setminus Y$, entonces, como $D(X)$ es cerrado, tenemos por la Proposición 2.3.1.5 y por (b) de la Proposición 2.3.1 que $\overline{K}_n$ es regular. Esto muestra que la condición (1) siempre se satisface.

Como $K_n \subseteq A_n \setminus Y$, entonces $K_n \subseteq A_n \setminus \operatorname{Int}(Y_n)$ y por lo tanto tenemos que $\overline{K}_n \subseteq A_n \setminus \operatorname{Int}(Y)$. Esto muestra que la condición (2) siempre se satisface.

Luego, para todo $n > n_{t-1}$, la clausura de cada componente de $A_n \setminus Y$ es igual a $\overline{K}_i$, para algún $i \in \{1, ..., T-1\}$. Así, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para todo $n > n_{t-1}$, la clausura de cualquier componente de $A_n \setminus Y$ es igual a $\overline{K}_1$, lo que implica que $\overline{K}_1 \subseteq A_n$ para todo $n > n_{t-1}$. Ahora, note que $\overline{K}_1 \subseteq \lim_{n\to\infty} A_n = Y$, lo cual es absurdo pues $K_1 \subseteq X \setminus Y$. Esto finaliza la demostración de la Afirmación.

Inductivamente, construimos una sucesión $\{\overline{K}_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ en $D(X)$ tal que $\overline{K}_{n_i} \cap \operatorname{Int}(Y) = \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\overline{K}_{n_i} \neq \overline{K}_{n_j}$ con $i \neq j$. Como $D(X)$ es cerrado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lim_{i\to\infty} \overline{K}_{n_i} = K$, donde $K \in D(X)$. Luego, K es un punto de acumulación de $D(X)$.

Del hecho de que $\overline{K}_{n_i} \subseteq A_{n_i}$ y $\lim_{i\to\infty} A_{n_i} = Y$, tenemos que $K \subseteq Y$ y como Y es un elemento límite minimal de $D(X)$, obtenemos que $K = Y$. Pero $\overline{K}_{n_i} \cap \operatorname{Int}(Y) = \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y por (e) de la Proposición 2.3.1, tenemos que $Y \notin D(X)$, lo cual es una contradicción. Esto finaliza la demostración del teorema. □

Proposición 2.3.3.2. Si $D(X)$ es compacto, entonces no es localmente conexo en ningún punto.

Demostración. Suponga que X es localmente conexo en un punto p. Para cada abierto V que contiene a p, existe U abierto y conexo tal que $p \in U \subseteq V$. Por el Lema 2.1.1, $\overline{U} \in D(X)$. Considere una sucesión decreciente $\{\overline{U}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(X)$ de estos abiertos conexos, tal que $\lim_{n\to\infty} \overline{U}_n = \{p\}$. Como $D(X)$ es cerrado, tendríamos que $\{p\} \in D(X)$, lo cual es absurdo. □

Como un corolario del Teorema 2.3.3.1 tenemos la siguiente caracterización de compacidad para $D(X)$:

Corolario 2.3.3.3. Sea X un continuo. Entonces, $D(X)$ es compacto si, y sólo si, $D(X)$ es finito.

Como vimos en el Teorema 2.2.14, si X es un continuo indescomponible, entonces $D(X)$ tiene un único elemento $\{X\}$. Además, si A_1 y A_2 son continuos indescomponibles tales que $A_1 \cap A_2 = \{p\}$ para algún punto p, entonces no es difícil ver que $D(A_1 \cup A_2) = \{A_1 \cup A_2, A_1, A_2\}$; es decir, $D(A_1 \cup A_2)$ tiene tres puntos.
En la siguiente proposición generalizamos tres maneras de unir una cantidad finita de continuos indescomponibles por medio de puntos, con el objetivo de contar los elementos de su hiperespacio de subcontinuos regulares.

Proposición 2.3.3.4. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_n$ continuos indescomponibles y $p_i \in A_i$ tales que $p_i \neq p_j$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$. Sea $X = A_1 \cup ... \cup A_n$.

1. Si $A_i \cap A_j = \{p_i\}$ si, y sólo si, $|i-j| = 1$, entonces $D(X)$ tiene $n+(n-1)+...+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

2. Si $A_i \cap A_j = \{p_i\}$ si, y sólo si, $|i-j| = 1$ o $|i-j| = n-1$, entonces $D(X)$ tiene $n(n-1)+1$ elementos.

3. Si $A_i \cap A_j = \{p_1\}$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$, entonces $D(X)$ tiene $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$.

A partir de este resultado surge la pregunta: ¿Existe un continuo X tal que $D(X)$ tenga dos elementos? De manera general tenemos la siguiente pregunta.

Pregunta 2.3.3.5. ¿Para cuál entero positivo n, existe un continuo X tal que $D(X)$ tenga exactamente n elementos?

3. COMPACTOS REGULARES

El objetivo de este capítulo es el de extender el hiperespacio $D(X)$, considerando subconjuntos compactos y cerrado regulares en X, no necesariamente conexos. Se compararán resultados de conexidad y compacidad obtenidos previamente para el hiperespacio $D(X)$.

Este capítulo lo dividiremos en dos secciones. En la primera mostraremos algunas propiedades generales del hiperespacio $R(X)$ y en la segunda presentaremos los resultados que pudimos deducir de la conexidad de este hiperespacio.

3.1. EL HIPERESPACIO DE COMPACTOS REGULARES

Definición 3.1.1. Sea X un continuo, definimos el *hiperespacio de compactos regulares de X* como

$$R(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es cerrado regular en } X\}$$

Naturalmente, $R(X)$ lo tomaremos con la métrica de Hausdorff como subespacio de 2^X.

De la misma manera como argumentamos el Lema 2.1.1, tenemos el siguiente resultado que usaremos en este capítulo.

Lema 3.1.2. Sea X un continuo. Si U es un subconjunto abierto de X entonces $\overline{U} \in R(X)$.

Este capítulo es muy corto y pretende dejar un tema de investigación abierto. Planteamos algunas preguntas y esperamos sea de utilidad para una futura investigación en hiperespacios de continuos.

Empezando mostramos que $\overline{R(X)} = 2^X$ para cualquier continuo X.

Teorema 3.1.3. Sea X un continuo. El hiperespacio $R(X)$ es un subconjunto denso en 2^X.

Demostración. Sean d la métrica de X, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos que $A \subseteq \bigcup_{a\in A} B^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$. Como A es compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$. Sea $B = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^n B^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i))$. Por el Lema 3.1.2, tenemos que $B \in R(X)$. Veamos que $H(B, A) < \varepsilon$. Es claro que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$. Probamos que $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. Sea $x \in B$. Existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in \overline{B^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)}$, luego $d(x, a_k) < \varepsilon$, es decir $x \in N(\varepsilon, A)$. De lo anterior concluimos que $H(A, B) < \varepsilon$.
Como A se tomó de manera arbitraria en 2^X tenemos que $\mathrm{cl}_{2^X}(R(X)) = 2^X$ y $R(X)$ es denso en 2^X. □

Como consecuencia del Teorema 3.1.3, tenemos el siguiente resultado relacionado con la compacidad de $R(X)$.

Teorema 3.1.4. Sea X un continuo. Entonces, el hiperespacio $R(X)$ no es compacto.

Demostración. Como $\{p\} \in 2^X \setminus R(X)$ para todo $p \in X$, tenemos que $R(X) \neq 2^X$ para cualquier continuo X. Así, $R(X)$ no es cerrado, por el Teorema 3.1.3. Luego, $R(X)$ no es compacto. □

A continuación mostramos que además, $R(X)$ tiene interio vacío.

Proposición 3.1.5. Sea X un continuo. Entonces $R(X)$ tiene interior vacío como subespacio de 2^X.

Demostración. Sea $F(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es finito}\}$. Es claro que $R(X) \cap F(X) = \emptyset$. Veamos que $F(X)$ es denso. Sean $A \in 2^X$ y $r > 0$. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n$ en A tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_r(a_i)$. Es claro que $H(\{a_1, \ldots, a_n\}, A) < r$ y $\{a_1, \ldots, a_n\} \in F(X)$. Así, $\mathrm{cl}_{2^X}(F(X)) = 2^X$. Lo anterior muestra que $\mathrm{int}_{2^X}(2^X \setminus F(X)) = \emptyset$. Como $R(X) \subseteq 2^X \setminus F(X)$, $R(X)$ tiene interior vacío. □

Dado un espacio topológico X y $Z \subseteq X$. Diremos que Z es un F_σ-conjunto si existe una sucesión de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Además, diremos que Z es un G_δ-conjunto si existe una cantidad numerable de abierto $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $Z = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Por los resultados presentados en esta sección tenemos que $R(X)$ nunca es abierto ni cerrado, sin embargo, tenemos naturalmente la siguiente pregunta:

Pregunta 3.1.6. Dado un continuo X. ¿El hiperespacio $R(X)$ es un F_σ-conjunto o un G_δ-conjunto?

3.2. CONEXIDAD

El principal resultado de esta sección es el Teorema 3.2.2 donde mostramos que el hiperespacio $R(X)$ es localmente conexo, siempre que X sea un continuo localmente conexo.

Dados un continuo X, A un cerrado de X y $r > 0$, tenemos que $\mathrm{cl}_X(N(r, A))$ es un punto de $R(X)$ por el Lema 3.1.2. Así, fijando $A \in R(X)$ y $t \in [0, 1]$, la función $\alpha \colon [0, 1] \to R(X)$ definida por $\alpha(s) = \overline{N(s \cdot t, A)}$ para cada $s \in [0, 1]$ está bien definida.

La prueba de la siguiente proposición se sigue del Lema 1.3.8.

Proposición 3.2.1. Sea X un continuo localmente conexo con métrica convexa. Si $A \in R(X)$ y $t \in [0, 1]$, entonces $\alpha \colon [0, 1] \to R(X)$ definida por $\alpha(s) = \overline{N(s \cdot t, A)}$ está bien definida y es continua.

A continuación presentamos el principal resultado de esta sección.

Teorema 3.2.2. Si X es un continuo localmente conexo, entonces $R(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Por el Teorema 1.3.6 supondremos en esta prueba que X admite una métrica convexa. Por el Lema 1.3.10, es suficiente mostrar que $R(X)$ es conexo en pequeño en todo elemento. Sea $A \in R(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.3.11, tenemos que 2^X es localmente conexo, luego existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{V}$ de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq B_{H_d}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Sea

$$\mathcal{U} = \left\{\overline{N(t,B)} : 0 \leq t < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } B \in \mathcal{V}\right\}.$$

Es claro que $\mathcal{U} \subseteq 2^X$. Como $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{V} \cap R(X) \subset \mathcal{U} \cap R(X)$, lo cual implica que $A \in \mathrm{Int}_{R(X)}(\mathcal{U} \cap R(X))$.

Veamos que $\mathcal{U} \cap R(X) \subseteq B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap R(X)$. Sea $E \in \mathcal{U} \cap R(X)$. Tenemos que $E = \overline{N(t_0, B)}$ para algún $B \in \mathcal{V}$ y $0 \leq t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathcal{V} \subseteq B_{H_d}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, tenemos que $H(B, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, del hecho de que $t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $\overline{N(t, B)} \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$. Como $B \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t, B)})$, $H(B, \overline{N(t, B)}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego $H(A, E) < H(A, B) + H(B, \overline{N(t, B)}) < \varepsilon$. Esto muestra que $\mathcal{U} \cap D(X) \subseteq B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap D(X)$.

Nos resta mostrar que $\mathcal{U} \cap R(X)$ es conexo. Sea $E \in \mathcal{U} \cap R(X)$; es decir, $E = \overline{N(t_0, B)}$, para algunos $B \in \mathcal{V}$ y $0 \leq t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathcal{V}$ es un subconjunto abierto y conexo en un espacio localmente conexo, existe un encaje $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{V}$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, por el Lema 1.3.14.

Consideramos dos casos:

Caso 1. $t_0 > 0$. Sea $\beta : [0,1] \to \mathcal{U} \cap R(X)$ definida por $\beta(s) = \overline{N(st_0, \alpha(s))}$. Por el Lema 3.1.2 tenemos que β está bien definida y como $0 \leq st_0 \leq t_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $s \in [0,1]$, se tiene que por la continuidad de α y por el Lema 1.3.8 que β es continua. Del hecho de que $\beta(0) = \overline{N(0, A)} = A$ y $\beta(1) = \overline{N(t_0, B)} = E$, tenemos que $\beta([0,1])$ es un camino conexo de A a E en $\mathcal{U} \cap R(X)$.

Caso 2. $t_0 = 0$. En este caso $E = \overline{N(0, B)} = B$. Sea t_1 tal que $0 < t_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ y sean $\beta, \gamma : [0,1] \to \mathcal{U} \cap R(X)$ definidas por $\beta(s) = \overline{N(st_1, \alpha(s))}$ y $\gamma(s) = \overline{N(st_1, B)}$. Similar al caso 1, β y γ son funciones bien definidas y continuas tales que $\beta(0) = A$, $\beta(1) = \overline{N(t_1, B)}$, $\gamma(0) = E$ y $\gamma(1) = \overline{N(t_1, B)}$. Luego $\beta([0,1]) \cup \gamma([0,1])$ es un camino conexo de E a A contenido en $\mathcal{U} \cap R(X)$.

Esto concluye la prueba de que $\mathcal{U} \cap R(X)$ es un conjunto conexo.

Así, hemos mostrado que $\mathcal{U} \cap R(X)$ es una vecindad conexa de A, contenida en $B_{H_d}(\varepsilon, A) \cap R(X)$, lo cual muestra que $R(X)$ es conexo en pequeño en A, y como A fue arbitrario, se tiene que $R(X)$ es localmente conexo, por el Lema 1.3.10. $\square$

Con el mismo argumento que usamos en la prueba del Teorema 2.2.5, podemos mostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces $R(X)$ es arcoconexo.

Finalizamos este trabajo mostrando que el recíproco del Teorema 3.2.3 no es en general cierto.

Proposición 3.2.4. Si W es la curva senoidal del topólogo (ver Definición 1.1.3), entonces $R(W)$ es arcoconexo.

Demostración. Sea $M \in R(W)$, si $M \in D(W)$, existe un arco de M a W en $R(W)$ por la Proposición 2.2.13. Suponga que $M \notin D(W)$, entonces M tiene por lo menos una componente $E \in D(W)$. Por la Proposición 2.2.13, existe una función continua $\alpha\colon [0,1] \to D(W)$ tal que $\alpha(0) = E$ y $\alpha(1) = W$. Definamos $\gamma\colon [0,1] \to R(W)$ dada por $\gamma(t) = \alpha(t) \cup M$. γ está bien definida, pues la unión de compactos regulares es nuevamente un compacto regular, y por el Lema 2.2.9, γ también es continua. Además, $\gamma(0) = M$ y $\gamma(1) = W$. De esto se concluye que $R(W)$ es arcoconexo. $\square$

Pregunta 3.2.5. Sea X un continuo. ¿Si $R(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo? En particular, ¿es $R(W)$ localmente conexo?

BIBLIOGRAFÍA

ILLANES, A. y S.B. NADLER. *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math, México, 1999 (vid. págs. 11, 13, 18, 23, 26).

MACÍAS, S. *Topics on continua*. 2 ed. Springer-Cham, 2018 (vid. pág. 11).

NADLER, S.B. *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. Aportaciones Matemáticas, México, 2006 (vid. págs. 10, 11, 23).

NADLER, S.B. Jr. *Continuum Theory: An introduction*. Marcel Dekker Inc, New York, 1992 (vid. págs. 24, 25, 47).

ORDOÑEZ, N. “The hyperspace of regular subcontinua”. En: *Topology and its Applications* 234 (2018) (vid. págs. 11, 27, 39, 40).

WHYBURN, G.T. *Analytic Topology*. Vol. 28. American Mathematical Society, 1948 (vid. pág. 45).