

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MATROIDES

Ivan Mauricio Rugeles Triana

Trabajo de Grado para optar al título de Matemático

Director

Wilson Olaya León

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

A Dios, mi familia, amigos y Slendy...

Agradecimientos

Las personas que han contribuido en el transcurso del desarrollo y conclusión de este proyecto, la paciencia y dedicación, dada las circunstancias por las que pasamos toda la humanidad viviendo una pandemia. Principalmente quiero agradecerle al Dr. Wilson Olaya León, director de esta tesis, por su paciencia, dedicación y conocimiento, que me fueron de gran ayuda para culminar este trabajo de grado. Además, agradezco a los profesores que aportaron en mi formación como persona y profesional; con sus conocimientos, sabiduría y motivación.

Le agradezco a mi familia por el apoyo y esfuerzo, que hacen por mi, permitiéndome cumplir una meta mas en mi vida. También quiero agradecer a Slendy por su apoyo incondicional, permitiéndome tener una estabilidad emocional y psicológica, dada las circunstancias que producía la pandemia, también por la motivación y los consejos.

Tabla de Contenido

	Pag.
Introducción	7
1. Preliminares	8
1.1. Teoría de grafos	8
1.2. Espacios vectoriales	29
1.3. Teoría de transversales	31
2. Definición de Matroides	45
2.1. Bases	51
2.2. Circuitos	57
2.3. Rango	62
3. Algoritmo voraz	67
Referencias Bibliográficas	84

Resumen

Título: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MATROIDES *

Autor: IVAN MAURICIO RUGELES TRIANA **

Palabras Clave: INDEPENDENCIA LINEAL, GRAFOS, TRANSVERSALES, MATROIDES, ALGORITMO VO-
RAZ.

Descripción: En este trabajo se hace una introducción a la teoría de Matroides. Se presentarán algunas de las definiciones más usadas para referirse a una matroide, donde se incluyen resultados de la teoría de grafos, transversales e independencia lineal, todas ellas como sistemas axiomáticos. Mostraremos que todas estas definiciones son equivalentes, fenómeno conocido como criptomorfismo. También se mostrará una aplicación de la teoría de Matroides para solucionar problemas de optimización sobre grafos (algoritmo Greedy).

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos, espacios vectoriales y teoría de transversales, estos resultados serán utilizados para definir Matroides; en el segundo capítulo mostraremos los diferentes modos de definir Matroides sin perder la esencia de la independencia lineal introducida por Whitney. Para finalizar, en el tercer capítulo, mostraremos la aplicación más conocida en la teoría de matroides, que permite solucionar algunos de los problemas de optimización sobre grafos, en este caso los problemas de optimización más usados son de maximizar o minimizar, donde el algoritmo que usaremos es óptimo cuando cumple los axiomas que definen a una matroide, en caso contrario el algoritmo no es óptimo.

La forma como organizamos la presentación de este trabajo permite comprender de una manera sencilla la noción del termino matroide y su importancia en aplicaciones de optimización sobre grafos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: INTRODUCTION TO MATROID THEORY *

Author: IVAN MAURICIO RUGELES TRIANA **

Keywords: LINEAR INDEPENDENCE, GRAPHS, TRAVERSALS, MATROIDS, GREEDY ALGORITHM.

Description: In this work an introduction to the theory of Matroids is made. We will present some of the most used definitions to refer to a matroid, including results from graph theory, transversals and linear independence, all of them as axiomatic systems. We will show that all these definitions are equivalent, a phenomenon known as cryptomorphism. We will also show an application of Matroid theory to solve optimization problems on graphs (Greedy algorithm).

In the first chapter the basic concepts of graph theory, vector spaces and transversal theory are presented, these results will be used to define Matroids; in the second chapter we will show the different ways of defining Matroids without losing the essence of linear independence introduced by Whitney. Finally, in the third chapter, we will show the best known application in matroid theory, which allows to solve some of the optimization problems on graphs, in this case the most used optimization problems are to maximize or minimize, where the algorithm that we will use is optimal when it fulfills the axioms that define a matroid, otherwise the algorithm is not optimal.

The way we organize the presentation of this work allows to understand in a simple way the notion of the term matroid and its importance in optimization applications on graphs.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Las matroides son objetos combinatorios abstractos y fueron descritos por primera vez en 1935 por Hassler Whitney (1907-1989), quien fue un matemático excepcional con un amplio interés en trabajos sobre topología algebraica, geometría diferencial y topología diferencial. Cuyo propósito fue su intento de introducir una relación entre álgebra lineal y la teoría de grafos, basándose en la esencia de manera abstracta sobre el concepto de dependencia.

Existen muchas maneras equivalentes de definir una matroide y muchos conceptos dentro de la teoría de matroides tienen formulaciones diferentes, dependiendo de cuán sofisticado sea el concepto. En este trabajo involucramos los conceptos de dependencia lineal, grafos, transversales y matrices. También se demostrará la equivalencia de las diversas formulaciones que definen a una matroide, este fenómeno es conocido como criptomorfismo. Es decir, una manera de establecer que dos sistemas de axiomas son equivalentes, donde a menudo se ven muy diferentes. El propósito de este trabajo es ilustrar esas equivalencias axiomáticas.

1. Preliminares

En este primer capítulo se presentan los conceptos básicos que son necesarios para comprender el concepto de matroide. El cual involucra temas de álgebra lineal, teoría de transversales y la teoría de grafos.

1.1. Teoría de grafos

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas que tiene sus fundamentos en las matemáticas discretas y las matemáticas aplicadas. Sus ideas básicas las introdujo el gran matemático Leonhard Euler en el siglo XVIII, donde implemento los grafos para solucionar el famoso problema de los puentes de Königsberg.

En esta sección los conceptos de grafos están referenciados en los libros Diestel, 2006 y Rosen, 2004. Donde definen a los grafos como estructuras discretas que constan de vértices y aristas. Los tipos de grafos se diferencian entre sí por el tipo y número de aristas que pueden conectar cada par de vértices.

Definición 1.1.1. Un grafo no dirigido es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V , es un conjunto finito no vacío de vértices o nodos, y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V . A los elementos del conjunto E se les llama aristas o líneas.

Denotaremos como $V(G)$ el conjunto de vértices y $E(G)$ conjunto de aristas del grafo G .

Ejemplo 1.1.2. En la figura 1, podemos observar el grafo G que está definido por el conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de aristas $E = \{e_1 = \{v_2, v_4\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 =$

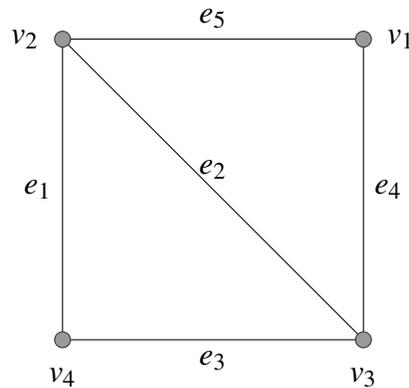


Figura 1. Grafo G

$$\{v_4, v_3\}, e_4 = \{v_3, v_1\}, e_5 = \{v_1, v_2\}.$$

Definición 1.1.3. Un grafo dirigido $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de aristas. Donde los elementos de E son pares ordenados de elementos de V .

Denotaremos la arista de un grafo dirigido como $e = (u, v)$ donde u y v son vértices del grafo, y para grafo no dirigido lo denotaremos como $e = \{u, v\}$ donde u y v son vértices del grafo.

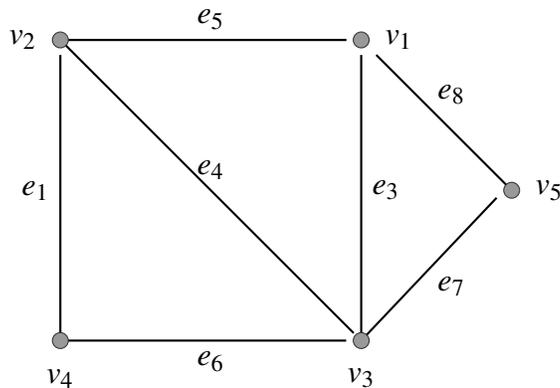


Figura 2. Grafo dirigido

Definición 1.1.4. Un multigrafo es un grafo $G = (V, E)$ junto con una función f de E en $\{\{u, v\} |$

$u, v \in V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

Ejemplo 1.1.5.

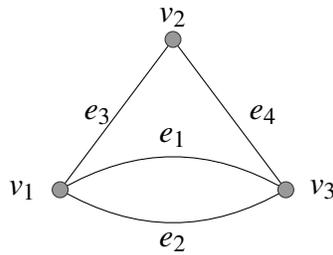


Figura 3. Grafo con e_1 y e_2 aristas múltiples o paralelas

Definición 1.1.6. Un pseudografo es un grafo $G = (V, E)$ junto con una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Una arista e es un bucle o lazo, si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

Ejemplo 1.1.7.

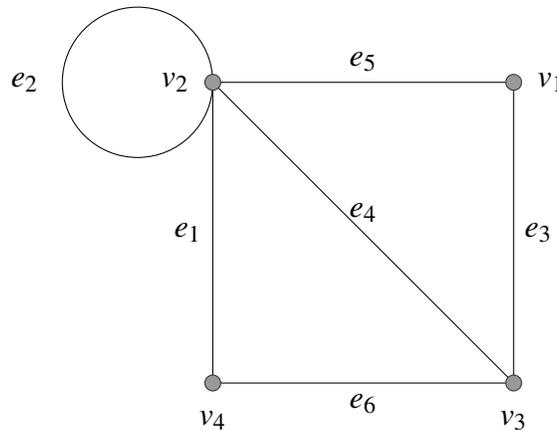


Figura 4. Grafo con e_2 siendo un bucle

Definición 1.1.8. Un multigrafo dirigido $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 , son aristas múltiples si $f(e_1) = f(e_2)$.

Definición 1.1.9. Un grafo simple es un grafo que no tiene bucles, y que no es un multígrafo.

Definición 1.1.10. Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido G son adyacentes (o vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G . Si $e = \{u, v\}$, se dice que la arista e es incidente con los vértices u y v . También se dice que la arista e conecta u y v . Se dice que los vértices u y v son extremos de la arista e .

Ejemplo 1.1.11.

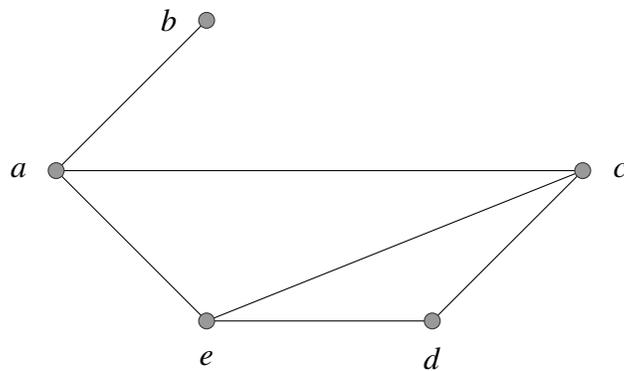


Figura 5. Grafo simple no dirigido

Vértices	Vértices adyacentes
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Definición 1.1.12. La vecindad de un vértice v , denotado como $N(v)$ está dado por todos los vértices adyacentes a v .

$$N(v) = \{x \in V_G | \{v,x\} \in E_G\}$$

de modo que el grado del vértice v es el número de vecinos que tiene $\delta(v) = |N(v)|$.

El siguiente teorema es conocido como teorema de los apretones de manos, este teorema se encuentre en el libro Rosen, 2004 en la página 511.

Teorema 1.1.13. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido simple con $m = |E|$ aristas. Entonces,

$$2m = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

Demostración. Como $\delta(v)$ es el número de aristas que tienen a v como uno de sus vértices, la suma cuenta el número de aristas del grafo, pero las aristas están contadas dos veces (una vez por cada vértice de la arista), luego la suma es el doble del número de aristas. La identidad se puede interpretar de la siguiente manera: los vértices son personas que están en una fiesta y una arista corresponde cuando dos de las personas se estrechan las manos (un apretón de manos), la identidad ayuda a contar el número de apretones de manos. \square

El siguiente teorema se encuentra en el libro Rosen, 2004 en la página 512.

Teorema 1.1.14. Todo grafo simple no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración. Sean V_1 el conjunto de vértices de grado par y V_2 el conjunto de vértices de grado

impar, respectivamente, de un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$. Sea $e = |E|$, entonces

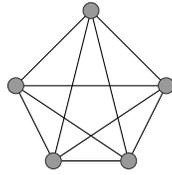
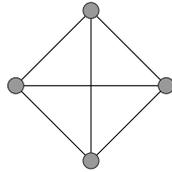
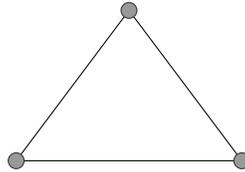
$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v).$$

Como $\delta(v)$ es par si $v \in V_1$, el primer sumando del término de la derecha de la última igualdad es par. Además, la suma de los dos sumandos de dicho término es par. Puesto que esa suma es $2e$ Por tanto, el segundo sumando es también par. Como todos los términos que se suman en ese segundo sumando son impares, tiene que haber un número par de ellos. Por tanto, hay un número par de vértices de grado impar. □

Definición 1.1.15. Si $e = (u, v)$ es una arista del grafo dirigido G , se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u . Al vértice u se le llama vértice inicial de (u, v) y a v se le llama vértice final o terminal de (u, v) . Los vértices inicial y final de un bucle coinciden.

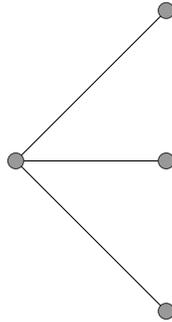
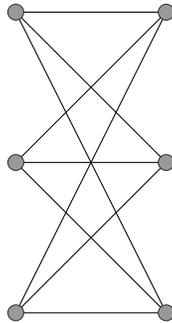
Definición 1.1.16. En un grafo dirigido, el grado de entrada de un vértice v , denotado por $\delta^-(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice final. El grado de salida de un vértice v , denotado por $\delta^+(v)$, es el número de aristas que tienen a v como vértice inicial (nótese que un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al grado de salida del vértice correspondiente).

Definición 1.1.17. Un grafo completo es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista. Un grafo completo de n vértices tiene $n(n-1)/2$ aristas, y se denota por K_n .

Ejemplo 1.1.18.*Figura 6. K_5* *Figura 7. K_4* *Figura 8. K_3* *Figura 9. K_2*

Definición 1.1.19. Se dice que un grafo simple G es bipartito si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice de V_1 , con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 , ni tampoco dos vértices de V_2).

Un grafo bipartito completo está formado por dos conjuntos disjuntos de vértices y todas las posibles aristas que unen esos vértices. El grafo completo bipartito con particiones de tamaño $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, es denotado como $K_{m,n}$.

Ejemplo 1.1.20.*Figura 10. $K_{1,3}$* *Figura 11. $K_{3,3}$*

Definición 1.1.21. Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $H = (W, F)$ con $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.

Definición 1.1.22. La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$. La unión de G_1 y G_2 se denota por $G_1 \cup G_2$.

Definición 1.1.23. Un recorrido $v_0 - v_n$ en un grafo no dirigido $G(V, E)$, es un subgrafo que es definido por una secuencia de vértices y aristas de manera consecutiva, el cual inicia con el vértice

v_0 y termina en el vértice v_n , es decir

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

donde $f(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ para $i = 1, \dots, n$. Un recorrido $v_0 - v_n$ con todos los vértices distintos es llamado camino $v_0 - v_n$, mientras que si está cerrado, es decir, $v_0 = v_n$, entonces se llama ciclo.

Un camino simple es aquel que no repite vértices en su recorrido y un ciclo simple es un ciclo que tiene como longitud al menos 3 y en el que no se repiten vértices.

Ejemplo 1.1.24.

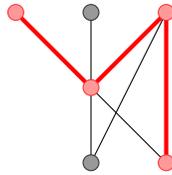


Figura 12. Un camino

Ejemplo 1.1.25.

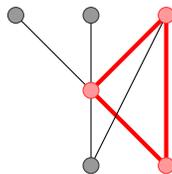


Figura 13. Un ciclo

Definición 1.1.26. Un recorrido $v_0 - v_n$ en un multigrafo dirigido $G(V, E)$, es un subgrafo que es definido por una secuencia de vértices y aristas de manera consecutiva, el cual inicia con el vértice

v_0 y termina en el vértice v_n , es decir,

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

donde $f(e_i) = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Un recorrido $v_0 - v_n$ con todos los vértices distintos es llamado camino $v_0 - v_n$, mientras que si está cerrado, es decir, $v_0 = v_n$, entonces se llama ciclo.

Definición 1.1.27. Un grafo se dice conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Si un grafo no es conexo, se dice desconexo. Se denomina componente conexo de un grafo a todo subgrafo conexo del mismo que tenga el mayor número posible de vértices. Los vértices aislados, que no tienen aristas incidentes, se consideran también componentes conexos del grafo. El número de componentes conexos de un grafo G se indicará mediante k_G .

Ejemplo 1.1.28.

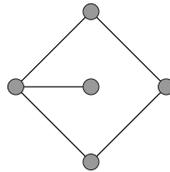


Figura 14. Grafo conexo

Ejemplo 1.1.29.

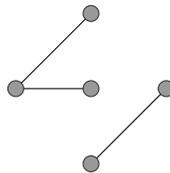


Figura 15. Grafo desconexo

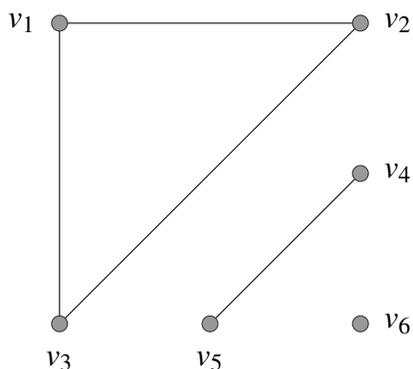
Ejemplo 1.1.30.

Figura 16. Grafo disconexo con 3 componentes conexas

El siguiente teorema se encuentra en el libro Rosen, 2004 en la página 533.

Teorema 1.1.31. Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conexo.

Demostración. Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conexo $G = (V, E)$. Como G es conexo, hay al menos un camino entre u y v . Sea x_0, x_1, \dots, x_n , con $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de longitud mínima. Este camino de mínima longitud es simple. Para verlo, supongamos que no es simple. Entonces, $x_i = x_j$ para algunos i y j con $0 \leq i < j$. Esto significa que hay un camino de u a v de menor longitud con secuencia de vértices $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n$ que se obtiene eliminando las aristas que corresponden a los vértices x_i, \dots, x_{j-1} . \square

Definición 1.1.32. Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si hay una función biyectiva f de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices $u, v \in V_1$, u y v son adyacentes en G_1 si, y sólo si, $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 . Se dice que esta función f es un isomorfismo.

Definición 1.1.33. Un ciclo euleriano de un grafo G es un ciclo simple que contiene a todas las aristas de G . Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de G .

Definición 1.1.34. La eliminación de una arista e de G es el subgrafo definido como $G \setminus \{e\} = (V(G), E(G) - \{e\})$.

El subgrafo de G obtenido por una serie de eliminaciones de las aristas $X \subseteq E(G)$ se denota por $G \setminus X$.

Ejemplo 1.1.35.

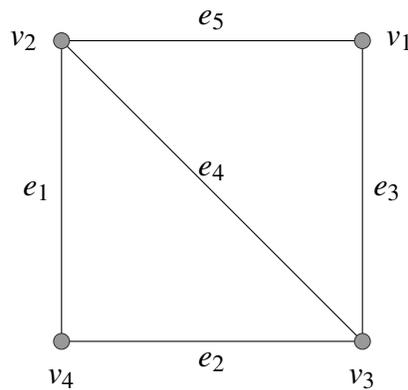


Figura 17. G

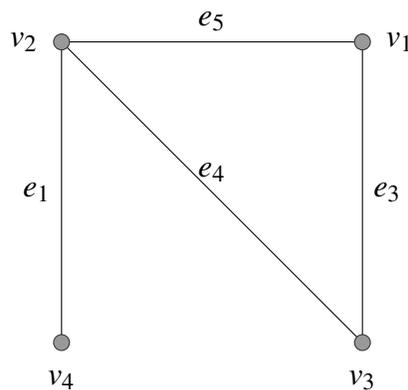


Figura 18. $G \setminus \{e_2\}$

Definición 1.1.36. La contracción de una arista $e = \{u, v\}$ de G , es el grafo $G/\{e\} = (V', E')$, donde $V' = V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$ y $E' = E \setminus \{\{x, u\}, \{x, v\} : x \in V\} \cup \{\{x, w\} : x \in V, \{x, u\} \in E \text{ o } \{x, v\} \in E\}$. Donde w es el nuevo vértice, que sera remplazado en las aristas que contengan a los vértices u y v . Una anotación para el vértice es $w = vu = uv$.

El subgrafo de G obtenido por una serie de contracciones de las aristas $Y \subseteq E(G)$ se denota por G/Y .

Ejemplo 1.1.37.

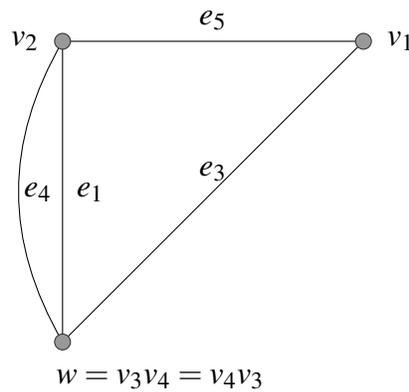


Figura 19. $G/\{e_2\}$

Ejemplo 1.1.38. Sea H el grafo

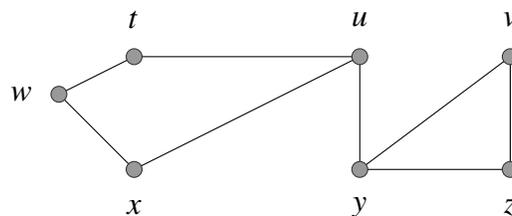


Figura 20. Grafo H

la contracción de la arista $\{u, y\}$ de H genera el grafo

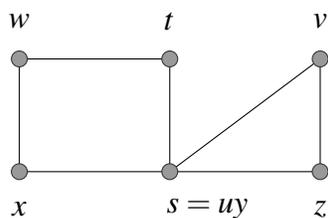


Figura 21. Grafo $H/\{\{u,y\}\}$

Definición 1.1.39. La eliminación de un vértice v de G es definido como la eliminación de todas las aristas incidentes a v y la eliminación de v en $V(G)$.

Definición 1.1.40. Cuando un grafo se puede dibujar en un plano sin que dos aristas se corten, se dice que es un grafo planar.

Ejemplo 1.1.41. Se dibujan tres casas y tres pozos. Todos los vecinos de las casas tienen el derecho de utilizar los tres pozos. Como no se llevan bien en absoluto, no quieren cruzarse jamás. ¿Es posible trazar los nueve caminos que juntan las tres casas con los tres pozos sin que existan cruces?

Cualquier disposición de las casas, los pozos y los caminos implica la presencia de al menos un cruce como se puede ver en la figura 11, suponiendo que los primeros 3 vértices que están en vertical son las casas y los segundos 3 vértices en vertical son los pozos.

El ejemplo anterior equivale a descubrir si el grafo bipartito completo $K_{3,3}$ es plano, es decir, si se puede dibujar en un plano sin que existan cruces, siendo la respuesta que no. En general, puede determinarse que un grafo no es plano, si en su diseño puede encontrarse una estructura análoga (conocida como menor) a K_5 o a $K_{3,3}$.

Definición 1.1.42. Un árbol es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos.

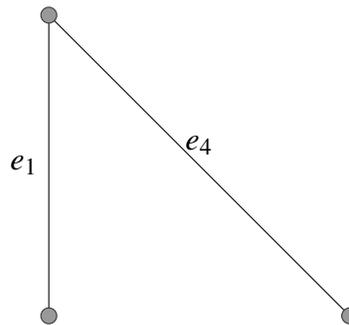
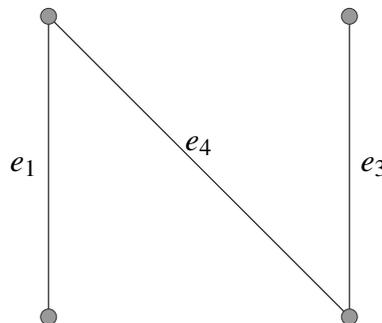
Ejemplo 1.1.43.

Figura 22. Árbol

Definición 1.1.44. Si G' es un subgrafo de G y $V(G') = V(G)$ entonces G' se llama un subgrafo de expansión de G .

Definición 1.1.45. Si un árbol es un subgrafo que se expande de un grafo, entonces se llama árbol de expansión.

Figura 23. Árbol de expansión del grafo G de la Figura 1

El siguiente teorema se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 9.

Teorema 1.1.46. Si T es un árbol, entonces $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Demostración. Prueba por inducción en $|V(T)|$. Para $|V(T)| = 1$ tenemos el grafo trivial sin aristas. Suponga que es válido para $|V(T)| < k$ y considere cualquier árbol T con $|V(T)| = k$ Para

algún $e \in E(T)$, el grafo $T \setminus \{e\}$ constará de dos árboles T_1 y T_2 , con $|V(T_i)| < k$ para $i = 1, 2$. Por la hipótesis de inducción tenemos $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 = |V(T)| - 1$$

□

Definición 1.1.47. Un bosque es un grafo disconexo que no contiene ciclos. También se puede definir como una unión disjunta de árboles, es decir, es un grafo disconexo cuyos componentes conexos son árboles.

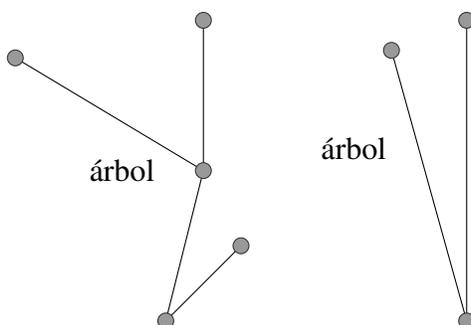


Figura 24. Bosque y bosque de expansión

Definición 1.1.48. Una unión de árboles de expansión de todos los componentes conexos en un grafo se denomina bosque expansivo.

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 9.

Proposición 1.1.49. Ningún bosque de expansión de un grafo G contiene otro bosque de expansión como un subgrafo.

Demostración. Es suficiente mostrar que ningún árbol de expansión T de algún grafo G contiene otro árbol de expansión T' como un subgrafo adecuado. Sea $|V(G)| = |V(T)| = |V(T')| = n$ el orden del grafo, mientras que para que T' sea un subgrafo adecuado de T debemos tener $E(T') \subset E(T)$. Por tanto, $|E(T')| < |E(T)| = n - 1$ que contradice el Teorema 1.1.46. \square

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 10.

Proposición 1.1.50. Si X es un bosque, entonces contiene al menos dos vértices de grado 1.

Demostración. Sea $v_0 - v_n$ un camino en un árbol T donde el número máximo de aristas es n . Entonces claramente $\delta_T(v_0) = \delta_T(v_n) = 1$ ($\delta_T(v_0)$ define la cantidad de vértices que son adyacentes a v_0 en un grafo T), ya que de lo contrario T contiene un ciclo o un camino con $n + 1$ aristas. \square

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 10.

Proposición 1.1.51. Si X y Y son dos bosques de un grafo G con $|E(X)| > |E(Y)|$, entonces si existe una arista $e \in E(X) - E(Y)$ entonces $Y \cup \{e\}$ también es un bosque de G .

Demostración. Suponga que $Y \cup \{e\}$ no es un bosque para todo $e \in E(X) - E(Y)$. Nosotros mostraremos que $|E(Y)| \geq |E(X)|$. Si Y no es un bosque con la adición de la arista $e = \{v, w\}$ entonces los vértices v, w deben pertenecer a la misma componente conexo de Y . Esto implica que $|V(X)| = |V(Y)|$ y cada componente conexo de X es un subgrafo de un componente de Y , lo que significa que

$$k_X \geq k_Y.$$

Por el Teorema 1.1.46 tenemos $|E(X)| = |V(X)| - k_X$ y $|E(Y)| = |V(Y)| - k_Y$, por lo tanto, combinando $k_X \geq k_Y$ tenemos

$$|E(Y)| \geq |E(X)|$$

lo cual es una contradicción. □

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 10.

Proposición 1.1.52. Si T_1 y T_2 son dos árboles de expansión de un grafo G , y $e \in E(T_1) - E(T_2)$, entonces existe una arista $f \in E(T_2) - E(T_1)$ tal que $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ también es un árbol de expansión de G .

Demostración. Observe que $T_1 \setminus \{e\}$ es un bosque de dos árboles no vacíos, digamos A y B . Ya que T_2 es un árbol de expansión, debe contener una arista f distinta de e , tal que $f = \{v, w\}$, $v \in V(A)$, $w \in V(B)$. Por lo tanto, el subgrafo $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ se expande para G ya que $V(A) \cup V(B) = V(G)$, además contiene un camino $v - w$ entre dos vértices cualesquiera v y w , y no contiene un ciclo, es decir, es un árbol de expansión para G . □

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 11.

Proposición 1.1.53. Si C_1, C_2 son ciclos distintos de un grafo G y $e \in E(C_1) \cap E(C_2)$, entonces el grafo $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ contiene un ciclo de G .

Demostración. Sea $G' = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ y $e = \{v, w\} \in E(C_1) \cap E(C_2)$. Si G' no contiene ningún ciclo entonces es un bosque, y $k_{G'} \geq 1$. Si los vértices finales de e residen en diferentes componentes conexas de G' , entonces $C_1 \cup C_2$ no contiene un ciclo, una contradicción. Por lo tanto, ambos

vértices finales de e están en la misma componente conexo de G' , digamos que T es un árbol. El grafo $T \cup \{e\}$ contiene un único ciclo, porque de lo contrario existen dos caminos distintos $v - w$ en T , lo que implica la existencia de un ciclo en T . Esto significa que $G' \cup \{e\} = (C_1 \cup C_2)$ debe contener un único ciclo, una contradicción.

□

Ahora introduciremos la noción de rango de un grafo. Considere cualquier grafo G de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ con k_G componentes conexos.

Definición 1.1.54. El rango de G se denota por $r(G)$, y es el número de vértices del grafo G menos el número de componentes conexos del grafo G , por lo tanto $r(G) = |V(G)| - k_G$.

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 11.

Proposición 1.1.55. Para un grafo G el rango satisface las siguientes:

$$(i) \quad 0 \leq r(G) \leq |E(G)|,$$

$$(ii) \quad \text{si } H \text{ es un subgrafo de } G \text{ entonces } r(H) \leq r(G),$$

(iii) para cualquier par de subgrafos H y K de G tenemos

$$r(H \cup K) \leq r(H) + r(K) - r(H \cap K). \quad (\text{Propiedad semimodular})$$

Demostración. Las dos primeras propiedades se derivan directamente de la definición del rango.

Nosotros demostraremos la tercera propiedad, que se llama semimodular de la función rango.

Podemos Identificar tres casos posibles. Si $V(H) \cap V(K) = \emptyset$ entonces $E(H) \cap E(K) = \emptyset$, significa que H y K son subgrafos disjuntos, por lo tanto

$$r(H \cup K) = |V(H)| + |V(K)| - (k_H + k_K) = r(H) + r(K)$$

donde k_H, k_K son el número de componentes conexas de H y K respectivamente. Si $V(H) \cap V(K) \neq \emptyset$ y $E(H) \cap E(K) = \emptyset$, entonces $V(H) \cap V(K)$ es un conjunto de vértices aislados, y el resultado sigue fácilmente. Considere ahora el caso donde $V(H) \cap V(K) \neq \emptyset$ y $E(H) \cap E(K) \neq \emptyset$. El subgrafo $H \cap K$ de G es diferente de vacío por hipótesis, supongamos T_1 es un bosque de expansión de $H \cap K$ y T_2 un bosque de expansión de H . Como $|E(H \cap K)| < |E(H)|$, entonces T_1 es un bosque de H , por la Proposición 1.1.51, T_1 puede extenderse a un bosque de expansión $T_1 \Delta T_2 = T_1 \cup T_2 - (T_1 \cap T_2)$. Este conjunto se puede extender en un bosque de expansión $(T_1 \Delta T_2) \Delta T_3$ de $H \cup K$ para T_3 un bosque de expansión de K . Entonces el subgrafo definido por $T_1 \cup T_3$ debe ser un bosque de K , pero no necesariamente máxima. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} r(H) + r(K) &\geq |E(T_1 \cup T_2)| + |E(T_1 \cup T_3)| \\ &= 2|E(T_1)| + |E(T_2)| + |E(T_3)| \\ &= |E(T_1)| + |E(T_1 \cup T_2 \cup T_3)| \\ &= r(H \cup K) + r(H \cup K). \end{aligned}$$

□

Definición 1.1.56. Sea G un grafo, entonces para cualquier partición $\{T, U\}$ de $V(G)$ donde T y U no son vacíos, se define un corte G , como el conjunto de aristas incidentes a un vértice en T y un vértice de U . Será denotado por $E(T, U) \subseteq E(G)$.

Definición 1.1.57. Una conexión o vínculo en un grafo G es un conjunto de aristas $Y \subseteq E(G)$ cuya eliminación aumenta el número de componentes conexos, y es mínimo con respecto a esa propiedad. Es fácil ver que si Y es un vínculo o conexión en G , entonces $k_{G \setminus Y} = k_G + 1$. Obsérvese que cualquier vínculo (o conexión) es un corte, pero no al revés. Dado que G es conexo, las dos componentes conexas de $G \setminus Y$ se llamarán los gráficos finales de Y .

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 12.

Proposición 1.1.58. Para cualquier bosque de expansión X de un grafo G ,

- (i) Si Y es una conexión de G , entonces $Y \cap E(X) \neq \emptyset$.
- (ii) Si C es un ciclo de G , entonces $E(C) \cap (E(G) - E(X)) \neq \emptyset$.

Demostración. (i) Sea $Y \cap E(X) = \emptyset$. Entonces X es también un bosque de expansión de $G \setminus Y$ con $|V(G)| - K_G$ aristas, lo cual es una contradicción ya que de acuerdo al teorema 1.1.46 debería tener $|V(G)| - k_{G \setminus Y}$ aristas, donde $k_{G \setminus Y} = K_G + 1$. (ii) Dado que C es un subgrafo de un componente conexo G_1 de G , solo consideramos el árbol de expansión T de G_1 . Si $E(C) \cap (E(G_1) - E(T)) = \emptyset$ entonces C está contenido en T , una contradicción ya que los árboles son acíclicos. \square

1.2. Espacios vectoriales

En esta sección presentaremos resultados elementales sobre espacios vectoriales de dimensión finita o finito dimensionales. Podemos tomar como referencia el libro Ron Larson, 2009. Se asume cierta familiaridad con la definición de un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} y las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar. Los elementos de un cuerpo se llaman escalares y escribiremos x , mientras que los de un espacio vectorial se llaman vectores y escribiremos \mathbf{x} . Dado un cuerpo \mathbb{F} y un conjunto de m vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ decimos que \mathbf{y} es una combinación lineal de los vectores \mathbf{x}_i si existen escalares $a_i \in \mathbb{F}$ tales que

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{x}_i.$$

Una relación lineal es una expresión entre los \mathbf{x}_i de la $\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{x}_i = 0$, donde $a_i \neq 0$ para algún i . Si $a_i = 0$ para todo i entonces decimos que es una relación lineal trivial. Un conjunto $\{\mathbf{x}_i\}$ de vectores se dice que es linealmente independiente en \mathbb{F} si no existe una relación lineal no trivial entre ellos, o de manera equivalente si $\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{x}_i = 0$ entonces $a_i = 0$ para todo i . Si un conjunto de vectores no es linealmente independiente, entonces decimos que es linealmente dependiente.

Teorema 1.2.1. Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ es linealmente dependiente si y solo si algún \mathbf{x}_k es combinación lineal de \mathbf{x}_i para $i < k$.

Definición 1.2.2. Sea X el conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{F}^n$. El generado de X , denotado por

$\langle X \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de X así

$$\langle X \rangle = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n : \mathbf{x} = \sum_i a_i \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \in X, \forall a_i \in \mathbb{F} \right\}.$$

Si para un espacio vectorial V y subconjunto X , si nosotros tenemos que $V = \langle X \rangle$, entonces nosotros decimos que X es un conjunto generador de V .

Teorema 1.2.3. Si $X \subseteq \langle Y \rangle$ y $Y \subseteq \langle Z \rangle$, entonces $X \subseteq \langle Z \rangle$.

Teorema 1.2.4. Si \mathbf{x}_k en $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ es linealmente dependiente en $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}\}$ entonces $\langle X \rangle = \langle X - \{\mathbf{x}_k\} \rangle$.

Teorema 1.2.5. Para cualquier subconjunto X de un espacio vectorial V , $\langle X \rangle = \langle \langle X \rangle \rangle$.

Corolario 1.2.6. Sea un conjunto de vectores $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es un conjunto generador de un espacio vectorial V , entonces para todo conjunto linealmente independiente en V contiene como máximo n elementos.

Teorema 1.2.7. En un espacio vectorial finitamente generado, toda base tiene el mismo número de elementos.

Teorema 1.2.8. Si V y W dos subespacios entonces

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$$

donde $V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$.

Teorema 1.2.9. Todo conjunto generador en un espacio vectorial contiene una base.

Teorema 1.2.10. Todo conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial puede ser extendido a una base.

Proposición 1.2.11. Si X y Y son un conjunto de vectores linealmente independiente en V con $|X| > |Y|$, entonces existe algún $\mathbf{x} \in X - Y$ tal que $Y \cup \{\mathbf{x}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente en V .

Proposición 1.2.12. Si B_1 y B_2 bases de V y $\mathbf{x} \in B_1$, entonces existe algún $\mathbf{y} \in B_2$ tal que $(B_1 - \{\mathbf{x}\}) \cup \{\mathbf{y}\}$ es una base de V .

Proposición 1.2.13. Si X y Y son dos conjuntos de vectores distintos linealmente dependientes mínimos en V y $\mathbf{z} \in X \cap Y$, entonces el conjunto $(X \cup Y) - \{\mathbf{z}\}$ contiene un conjunto mínimo de vectores linealmente dependiente en V .

1.3. Teoría de transversales

En esta sección presentaremos los resultados fundamentales de la teoría transversal finita.

Tomamos como referencia el artículo Mirsky, 1969 y el libro Pitsoulis, 2014.

Definición 1.3.1. Dado algún conjunto finito E y una familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E , una transversal de \mathcal{F} se determina como un conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|I|}\} \subseteq E$ de elementos distintos tales que $x_i \in S_i \forall i \in I$.

Ejemplo 1.3.2. Sea $E = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $S_1 = \{a, b, c, e\}$, $S_2 = \{b, c, d, e\}$ y $S_3 = \{e, f\}$. Entonces $\{a, d, f\}$ es una transversal de $\mathcal{F} = (S_1, S_2, S_3)$ dado que $a \in S_1$, $d \in S_2$ y $f \in S_3$.

Definición 1.3.3. Dado algún conjunto finito E y una familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E , una transversal de alguna subfamilia $(S_i : i \in J \subset I)$ se llamada transversal parcial de \mathcal{F} .

Ejemplo 1.3.4. Las transversales también se conocen en la literatura como sistemas de distintos representantes. Observe que para una transversal $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|I|}\}$ de $(S_i : i \in I)$ no tenemos información sobre donde pertenecen sus elementos con respecto a los subconjuntos S_i . Si deseamos especificar la procedencia de los elementos, podemos indizar a la transversal de acuerdo con I y obtener una familia de elementos de X , denotada por $X = \{x_i\}_{i \in I}$, donde $x_i \in S_i$ para todos los $i \in I$. Tenga en cuenta que una transversal se puede indizar en más de una forma, mientras que una transversal indizada corresponde a un transversal único. Los transversales parciales también se pueden indizar para especificar la procedencia de los subconjuntos de la subfamilia de subconjuntos correspondiente.

Ejemplo 1.3.5. Dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ considere los subconjuntos

$$S_1 = \{1, 3\}$$

$$S_2 = \{1, 2\}$$

$$S_3 = \{2\}$$

$$S_4 = \{2, 3\}$$

$$S_5 = \{1, 4, 5\}$$

y sea el conjunto de índices $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ no tiene una transversal, ya

que no podemos encontrar cinco elementos distintos de E con cada uno perteneciente de un subconjunto S_i . Pero \mathcal{F} tiene una transversal parcial, digamos que $X = \{1, 2, 3, 5\}$, es una transversal de la familia de subconjuntos $(S_i : i \in I - \{3\})$. También podemos indizar la transversal parcial y escribir $\{1_1, 2_2, 3_4, 5_5\}$ o bien $\{3_1, 1_2, 2_4, 5_5\}$.

Una forma equivalente de representar gráficamente las transversales es mediante el grafo bipartito. Dado un sistema de conjuntos (E, \mathcal{F}) donde $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$, construya el grafo bipartito $G(V_1 \cup V_2, E_G)$ donde $V_1 = E, V_2 = \mathcal{F}$ y $E_G = \{(i, j) : i \in E \text{ y } i \in S_j\}$. De modo que las aristas del grafo bipartito representen la pertenencia de los elementos de E sobre los subconjuntos de \mathcal{F} . El grafo bipartito correspondiente al sistema establecido en el Ejemplo 1.3.5 se muestra en la figura.

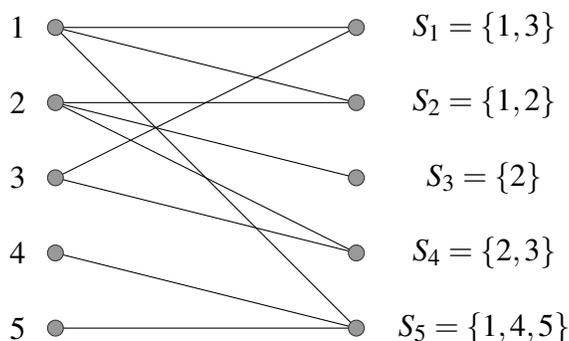


Figura 25. Grafo bipartito de un sistema de conjuntos

Un ajuste $M \subseteq E(G)$ en un grafo G es un conjunto de aristas no adyacentes, mientras que decimos que M es un ajuste de algunos $U \subseteq V(G)$ si cada vértice de U es un vértice extremo de una arista en M . Podemos ver que cualquier ajuste en un grafo bipartito de un sistema de conjuntos corresponde a una transversal parcial, y cualquier ajuste corresponde a una transversal.

La teoría transversal se ocupa de la cuestión de la existencia de transversales o transversales parciales en un sistema establecido, bajo algunas restricciones. Examinando la definición de

transversal, es trivial ver que si la familia $(S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E tiene una transversal, entonces la unión de cualesquiera k subconjuntos de \mathcal{F} contendrá al menos k elementos. El teorema clásico de Hall también establece la eficacia de esta condición.

El siguiente teorema es conocido como teorema de Hall (involucra la condición del matrimonio (1)) y se usa para verificar la existencia de transversales. Este teorema se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 18.

Teorema 1.3.6. (Hall 1935) La familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E tiene transversal si y solo si

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J|, \text{ para cada } J \subseteq I \quad (1)$$

Demostración. la condición necesaria es trivial, ya que se deriva de la definición de transversales. Para la demostración de la condición suficiente primero demostraremos la siguiente afirmación:

Si la condición de Hall en la inecuación (1) es verdadera para $(S_i : i \in I)$ y uno de los subconjuntos, digamos S_1 , contiene más de un elemento, entonces eliminar cualquier elemento de S_1 no hace que la condición sea falsa para la familia de subconjuntos resultante.

Suponga por contradicción que existen $x, y \in S_1$ tal que la eliminación de uno de estos elementos de S_1 hará la condición de la inecuación (1) falsa para la familia resultante de subconjuntos.

Por lo tanto habrá $I_x, I_y \subseteq I - \{1\}$, tal que para

$$P = \left(\bigcup_{i \in I_x} S_i \right) \cup S_1 - \{x\} \text{ y } Q = \left(\bigcup_{i \in I_y} S_i \right) \cup S_1 - \{y\}$$

tendremos

$$|P| < |I_x| + 1, \text{ y } |Q| < |I_y| + 1 \quad (2)$$

sigue que

$$|P \cup Q| = \left| \left(\bigcup_{i \in I_x \cup I_y} S_i \right) \cup S_1 \right| \quad (3)$$

$$|P \cap Q| = \left| \left(\bigcup_{i \in I_x \cap I_y} S_i \right) \cup S_1 - \{x, y\} \right| \geq \left| \bigcup_{i \in I_x \cap I_y} S_i \right|. \quad (4)$$

combinando la inecuación (2) y la Ecuación (3) tenemos

$$\begin{aligned} |I_x| + |I_y| &\geq |P| + |Q| \\ &= |P \cup Q| + |P \cap Q| \\ &\geq \left| \left(\bigcup_{i \in I_x \cup I_y} S_i \right) \cup S_1 \right| + \left| \bigcup_{i \in I_x \cap I_y} S_i \right| \\ &\geq |I_x \cup I_y| + 1 + |I_x \cap I_y| \\ &= |I_x| + |I_y| + 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Tenemos que la eliminación de cualquier elemento $x \in S_1$ no afectará que la condición (1) de Hall sea válida y queda probado la afirmación. Dada ahora una familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ que satisface (1), por una serie de eliminaciones podemos crear una familia $(S'_i : i \in I)$ que también satisface la condición de Hall y $|S'_i| = 1$ para todo $i \in I$, el cual es una transversal de \mathcal{F} . □

Veamos ahora las transversales parciales. Dado un sistema establecido (E, \mathcal{F}) si \mathcal{F} tiene una transversal obviamente tiene una transversal parcial, pero la existencia de una transversal parcial no implica necesariamente la existencia de una transversal de \mathcal{F} . El siguiente teorema de Ore generaliza el teorema de Hall, proporcionando una condición para la existencia de una transversal parcial de tamaño dado.

Ejemplo 1.3.7. Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere

$$\mathcal{F} = \{S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{3, 4, 5\}, S_4 = \{1, 3\}, S_5 = \{1, 2, 3\}\}.$$

Sea $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 = \{1, 2, 3\}$. Entonces usando el teorema de Hall (1.3.6), podemos concluir que \mathcal{F} no tiene transversal. Ya que $|\bigcup_{i \in I = \{1, 2, 3, 4, 5\}} S_i| = 3 < 5 = |I|$.

El siguiente teorema es conocido como teorema de Ore, este teorema es usado para encontrar transversales parciales de tamaño k donde $k \in \mathbb{N}$. Este teorema se puede encontrar en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 19.

Teorema 1.3.8. (Ore 1955) La familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E tiene una transversal parcial de tamaño k si y solo si

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J| + k - |I|, \text{ para cada } J \subseteq I. \quad (5)$$

Demostración. Para $k = |I|$ tenemos el teorema de Hall. Sea D un conjunto de E , tal que $D \neq \emptyset$ y

$|D| = |I| - k$. Considere ahora la familia de subconjuntos

$$\mathcal{F}^* = \{S_1 \cup D, S_2 \cup D, \dots, S_{|I|} \cup D\}.$$

Observe que \mathcal{F} tiene una transversal parcial de tamaño k si y solo si \mathcal{F}^* tiene una transversal.

Esto es así, si asumimos que T es una transversal de \mathcal{F}^* , entonces T puede tener a lo sumo $|I| - k$ elementos distintos de D lo cual implica que tiene al menos k elementos de los subconjuntos S_i , $i \in I$. Por lo tanto \mathcal{F} tiene una transversal parcial de tamaño como mínimo k .

Mostraremos otra forma de usar el mismo argumento. Ahora para que \mathcal{F}^* tenga una transversal debe satisfacer (1), para cualquier $J \subset I$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in J} (S_i \cup D) \right| &\geq |J| \Leftrightarrow \\ \left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| + |D| &\geq |J| \Leftrightarrow \\ \left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| &\geq |J| + k - |I| \end{aligned}$$

□

Para alguna familia $(S_i : i \in I)$ y X un transversal de $(S_i : i \in I_X)$ para algún $I_X \subseteq I$, decimos que S_j es representada por X si $j \in I_X$.

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 20. Esta ga-

garantiza la existencia de una transversal parcial partiendo de dos transversales parciales distintas.

Proposición 1.3.9. Si X y Y son transversales parciales de $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ con $|X| > |Y|$, entonces existe algún $x \in X - Y$ tal que $Y \cup \{x\}$ es una transversal parcial de \mathcal{F} .

Demostración. Dado X y Y transversales parciales de $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ existen $I_X, I_Y \subseteq I$ con $|I_X| > |I_Y|$, tal que X y Y son transversales de $(S_i : i \in I_X)$ y $(S_i : i \in I_Y)$ respectivamente. Mostraremos que para cualquier $x \in X - Y$ existe $I' \subseteq I_X \cup I_Y$ tal que $Y \cup \{x\}$ es una transversal de $(S_i : i \in I')$, es decir, una transversal parcial de \mathcal{F} .

Aplicando una indización arbitraria a los elementos de X e Y , obtenemos dos familias $X = \{x_i\}_{i \in I_X}$ e $Y = \{y_i\}_{i \in I_Y}$, además vamos a considerar una serie de pasos para concluir la demostración.

(Paso 1) consideremos cualquier $x_k \in X$ donde $k \in I_X - I_Y$, (implica que S_k no es representado por Y).

Entonces evaluamos los casos:

(Paso 2) Evaluar cual caso cumple x_k .

(caso 1) Si $x_k \neq y_i$ para todo $i \in I_Y$.

(caso 2) Si $x_k = y_i$ para algún $i \in I_Y$, entonces $x_k \neq y_j$ para todo $j \in I_Y$ diferente de i . Además

$$y_i \in S_k \text{ y } x_k \in S_i.$$

Si ocurre el (caso 1) entonces tome $x = x_k$, por lo tanto $Y \cup \{x_k\}$ será una transversal de $(S_i : i \in I_Y \cup \{k\})$.

Si ocurre el (caso 2) entonces Y es una transversal parcial de $(S_i : i \in (I_Y - \{i\}) \cup \{k\})$. Por lo tanto a I_Y reemplácelo por $(I_Y - \{i\}) \cup \{k\}$ y vuelva al paso 1.

La demostración se concluye cuando x_k no cumpla con el (caso 2). La cantidad de iteraciones es finita ya que $|X| > |Y|$ y $|I_x| > |I_y|$. Por lo tanto este algoritmo garantiza la existencia de $x \in X - Y$ tal que $Y \cup \{x\}$ es una transversal parcial. \square

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 20. Esta garantiza la existencia de una transversal partiendo de dos transversales distintas.

Proposición 1.3.10. Si X y Y son transversales de $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ y $x \in X - Y$, entonces existe $y \in Y - X$ tal que $(X - \{x\}) \cup \{y\}$ es una transversal de \mathcal{F} .

Demostración. Sea $|I| = n$, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ y $Y = \{y_i\}_{i \in I}$ dos indizaciones arbitrarias de las transversales X e Y respectivamente. Sin pérdida de generalidad sea $x = x_1$, y defina $X_1 = X - Y$, $X_2 = X - X_1$ e $Y_1 = Y - X$, $Y_2 = Y - Y_1$. Dado que los elementos de X_1 e Y_1 son distintos, tendremos $X_2 = Y_2$, y asumiremos que $X_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$. Reordenando los elementos de Y de tal manera que los últimos $n - k$ elementos serán Y_2 , podemos escribir los dos conjuntos como

$$X = \{\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}^{X_1}, \overbrace{x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n}^{X_2}\}$$

$$Y = \{\underbrace{y_1, y_2, \dots, y_k}_{Y_1}, \underbrace{y_{k+1}, \dots, y_{n-1}, y_n}_{Y_2}\},$$

donde $x_i = y_i$ para $j = k + 1, \dots, n$ y $|X_1| = |Y_1| \geq 1$ por supuesto. Tenga en cuenta que y_1 sería el elemento de Y que representa S_1 . Si $y_1 \in Y_1$, entonces $(X - \{x_1\}) \cup \{y_1\}$ es una transversal de

\mathcal{F} , ya que $y_l \neq x_l$ para $l = 2, \dots, n$ y todos los subconjuntos S_i están representados. Entonces, sea $y_1 \in Y_2$, y suponga que $i_n = 1$, es decir, su único elemento igual en X_2 es x_n . Entonces tendremos que $x_n = y_1$, por lo tanto $\{x_n, x_1\} \subseteq S_1$, lo que significa que existe una indización alternativa para X , donde los valores de x_1 y x_n se intercambian. Consideremos ahora el elemento y_n . Si $y_n \in Y_1$ entonces $(X - \{x_1\}) \cup \{y_n\}$ es una transversal de \mathcal{F} , ya que S_1 está representado por x_n y S_n es representado por y_n , y $y_n \neq x_l$ para $l = 2, \dots, n$. Si $y_n \in Y_2$, entonces podemos asumir que $i_{n-1} = n$, lo que implica que $x_{n-1} = y_n$ por lo tanto $\{x_{n-1}, x_n\} \subseteq S_n$. Como anteriormente, ahora consideramos y_{n-1} y si está contenido en Y_1 entonces $(X - \{x_1\}) \cup \{y_{n-1}\}$ es un transversal de \mathcal{F} , ya que S_1 está representado por x_n , S_n por x_{n-1} , S_{n-1} por y_{n-1} , mientras que todos los elementos son distintos. Dado que $Y_1 \neq \emptyset$, si continuamos este proceso eventualmente tendremos $y_k \in Y_1$ para algunos $k \in \{n, n-1, \dots, k+1\}$, y $(X - \{x_1\}) \cup \{y_k\}$ será una transversal de \mathcal{F} . \square

Definición 1.3.11. Un circuito transversal de alguna familia de subconjuntos $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de E , es cualquier $X \subseteq E$ que no es una transversal parcial, y $X - \{e\}$ es una transversal parcial para cualquier $e \in X$.

De la definición se deduce que un $X \subseteq E$ no es una transversal parcial si y solo si contiene un circuito transversal.

Ejemplo 1.3.12. Dado $E = \{1, 2, 3, 4\}$, considere

$$\mathcal{F} = (S_1 = \{1\}, S_2 = \{1, 2, 3\}, S_3 = \{1, 2, 4\}).$$

Entonces, para $X = \{2, 3, 4\} \subseteq E$ es fácil observar que no es una transversal parcial de \mathcal{F} , ya que

el conjunto S_1 no es representado por un elemento de X . Por lo tanto X es un circuito transversal de \mathcal{F} .

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 21.

Proposición 1.3.13. Si X, Y son circuitos transversales de $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$, $X \neq Y$ y $e \in X \cap Y$, entonces el conjunto $(X \cup Y) - \{e\}$ contiene un circuito transversal.

Demostración. Basta con mostrar que $C = (X \cup Y) - \{e\}$ no es una transversal parcial. Asumamos lo contrario, y asumamos que una indización arbitraria de C sea la siguiente:

$$C = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_m}\}$$

Para $I_X = \{i_1, \dots, i_n\}$ y $I_Y = \{j_1, \dots, j_m\}$ tenemos que $X = \{x_i\}_{k \in I_X} \cup \{e\}$ y $Y = \{y_{jk}\}_{k \in I_Y} \cup \{e\}$.

Así C es una transversal de $(S_j : j \in I_X \cup I_Y)$. Si $e \in S_k$ para algún $k \in I_Y$ o $k \in I_X$, entonces X o Y es una transversal de $(S_j : j \in I_X \cup \{k\})$ o $(S_j : j \in I_Y \cup \{k\})$ respectivamente. Si $e \in S_k$ para algún $k \in I - (I_X \cup I_Y)$ entonces tanto X y Y son transversales de $(S_j : j \in I_X \cup I_Y \cup \{k\})$. Tenemos que en todos los casos ya sea X o Y , o ambos, son transversales parciales de \mathcal{F} , lo cual es una contradicción. □

Ejemplo 1.3.14. Dado $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, considere

$$\mathcal{F} = (S_1 = \{a, b, c, d, e\}, S_2 = \{b, c, d, e\}, S_3 = \{e, f\}).$$

Sea $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{a, d, c\}$ dos circuitos transversales de \mathcal{F} , ya que ambos conjuntos no

tienen un elemento que represente a S_3 , por lo tanto no son transversales parciales de \mathcal{F} . Sabemos que $X \neq Y$, $X \cap Y = \{a, c\}$ y $X \cup Y = \{a, b, c, d\}$. Entonces, $X \cup Y - \{a\} = \{b, c, d\}$ y $X \cup Y - \{c\} = \{a, b, d\}$ son circuitos transversales de \mathcal{F} , ya que $X \cup Y - \{a\}$ y $X \cup Y - \{c\} = \{a, b, d\}$ no tienen un elemento que represente a S_3 . Entonces no son transversales parciales de \mathcal{F} .

Definición 1.3.15. Para un sistema de conjuntos (E, \mathcal{F}) , el rango de un conjunto $X \subseteq E$ está definido como el tamaño de la transversal parcial máxima contenida en X . Escribiremos $r(X)$.

Ejemplo 1.3.16. Dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere

$$\mathcal{F} = (S_1 = \{1, 3\}, S_2 = \{1, 2\}, S_3 = \{2\}, S_4 = \{2, 3\}, S_5 = \{1, 4\}).$$

Por el teorema de Hall (1.3.6) tenemos que \mathcal{F} no tiene transversal, ya que $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5| = 4 < |I| = 5$, entonces sabemos que $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ no es una transversal de \mathcal{F} , pero si tomamos $X = \{1, 2, 3, 4\} \subset Y$, tenemos que X es una transversal de la subfamilia (S_1, S_3, S_4, S_5) , tomando la indización $\{1_1, 2_3, 3_4, 4_5\}$ concluimos que es una transversal parcial de \mathcal{F} . Entonces el rango para el conjunto Y es $r(Y) = 4$.

La siguiente proposición se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 21.

Proposición 1.3.17. Dado un conjunto básico E y una familia $\mathcal{F} = (S_i : i \in I)$ de subconjuntos de E , la función rango $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ satisface:

- (i) $0 \leq r(X) \leq |X|$, para cualquier $X \subseteq E$;
- (ii) Si $X \subseteq Y$ entonces $r(X) \leq r(Y)$;

(iii) Para cualquier X, Y tenemos que $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Demostración. La demostración de la propiedad (i) y (ii) sigue de la definición de transversal parcial. Para (iii) definamos

$$I_X = \{i \in I : S_i \cap X \neq \emptyset\}, \quad I_Y = \{i \in I : S_i \cap Y \neq \emptyset\}$$

y $I_{X \cup Y} = I_X \cup I_Y, I_{X \cap Y} = I_X \cap I_Y$. Si $I_{X \cap Y} = \emptyset$ entonces $X \cap Y = \emptyset$ lo cual implica que $r(X \cap Y) = 0$ y la propiedad (iii) se mantiene con la igualdad. Por lo tanto, supongamos que $I_{X \cap Y} \neq \emptyset$. Consideremos cualquier $J \subseteq I_{X \cap Y}$, que también será un subconjunto de I_X, I_Y , y $I_{X \cup Y}$. Por la definición de rango y el Teorema 1.3.8 sabemos que si \mathcal{F} contiene una transversal parcial de tamaño $r(X)$ entonces

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J| + r(X) - |I_X| \quad (6)$$

Similarmente para $r(Y), r(X \cup Y)$, y $r(X \cap Y)$ tenemos

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J| + r(Y) - |I_Y| \quad (7)$$

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J| + r(X \cup Y) - |I_{X \cup Y}| \quad (8)$$

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J| + r(X \cap Y) - |I_{X \cap Y}| \quad (9)$$

Restando (6) y (7) de la suma de (8) y (9) obtenemos

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y) - |I_{X \cup Y}| - |I_{X \cap Y}| + |I_X| + |I_Y| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

□

2. Definición de Matroides

En esta sección se presentarán las distintas maneras de definir una matroide, tomando como referencias los libros Oxley, 1992, Gary Gordon, 2012 y Pitsoulis, 2014, donde se inicializa partiendo de la noción de dependencia e independencia lineal. Existen muchas maneras equivalentes de definir una matroide y muchos conceptos dentro de la teoría de matroides que tienen una serie de formulaciones diferentes, entre estas algunas de las definiciones más importantes están en forma de conjuntos independientes, circuitos, bases y funciones de rango.

La teoría de matroides es la abstracción de varias nociones muy importantes apoyadas en conceptos del álgebra lineal y la teoría de grafos.

Definición 2.0.1. Un sistema de independencia es un par ordenado (E, \mathcal{I}) . Donde E es un conjunto finito y \mathcal{I} es una colección de subconjuntos de E con las siguientes propiedades:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- (ii) Para cada $Y \subseteq X$, si $X \in \mathcal{I}$ entonces $Y \in \mathcal{I}$.

Definición 2.0.2. Una matroide M es un par ordenado (E, \mathcal{I}) , donde E es un conjunto finito de n elementos e \mathcal{I} una colección de subconjuntos de E , es decir $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$, que cumple las siguientes tres condiciones:

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$, (el vacío es independiente)
- (I2) Si $X \in \mathcal{I}$ y $X' \subseteq X$ entonces $X' \in \mathcal{I}$,

(I3) Si $X, Y \in \mathcal{I}$ y $|X| < |Y|$, entonces existe un elemento $x \in Y \setminus X$ tal que $X \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Se dice que E es el conjunto soporte de M y que $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide sobre E . Los elementos de \mathcal{I} son llamados conjuntos independientes, mientras que los subconjuntos de E que no son independientes son llamados dependientes. La colección de conjuntos independientes de algún $X \subseteq E$ será:

$$\mathcal{I}(X) = \{Y \subseteq X : Y \in \mathcal{I}\}.$$

Ejemplo 2.0.3. Sea $E = \{1, 2, 3, 4\}$, y la colección

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

Podemos observar que fácilmente el conjunto \mathcal{I} satisface (I1), (I2) y (I3) por lo tanto (E, \mathcal{I}) definen una matroide.

Ejemplo 2.0.4. Sea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y defina las colecciones

$$\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

La colección \mathcal{I}_1 no satisface (I2) de la Definición 2.0.2 dado que $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{I}_1$ y $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ pero $\{2, 3\} \notin \mathcal{I}_1$. Por lo tanto (E, \mathcal{I}_1) no define una matroide.

La colección \mathcal{I}_2 no satisface la condición (I1) e (I2), dado que $\emptyset \notin \mathcal{I}_2$, tenemos que \mathcal{I}_2 no

satisface (I1). Tomando $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{I}_2$ y $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, tenemos que $\{2, 3\} \notin \mathcal{I}_2$, por lo tanto \mathcal{I}_2 no satisface (I2). Entonces concluimos que (E, \mathcal{I}_2) no es una matroide.

El siguiente teorema se encuentra en el libro Gary Gordon, 2012 página 7 y en el libro Sánchez, 2010 página 2.

Teorema 2.0.5. Sea E el conjunto de columnas etiquetadas de una matriz A , de tamaño $m \times n$, con entradas en un cuerpo \mathbb{F} , y sea \mathcal{I} la colección de todos los subconjuntos de E que son linealmente independientes. Entonces, (E, \mathcal{I}) es una matroide, es decir \mathcal{I} satisface el conjunto de axiomas de independencia (I1), (I2) y (I3).

Demostración. Es fácil ver que \mathcal{I} satisface (I1) y (I2). Vamos a verificar que \mathcal{I} cumple con (I3), sean X y Y subconjuntos de E linealmente independientes tal que $|X| < |Y|$. Sea H el subespacio vectorial generado por $X \cup Y$. Entonces la dimensión de H es como mínimo $|Y|$. Supongamos que $X \cup \{x\}$ es linealmente dependiente para todo x en $Y \setminus X$. Entonces H está contenido en el generado de X . Por lo tanto $|Y| \leq \dim H \leq |X| < |Y|$, por lo tanto es una contradicción y concluimos que $Y \setminus X$ contiene un elemento x tal que $X \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, por lo tanto \mathcal{I} cumple con la Definición 2.0.2. \square

Ejemplo 2.0.6. Sea la matriz

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Entonces $E = \{1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de las columnas

etiquetadas de A , \mathcal{I} es la colección de subconjuntos de E para los cuales los vectores columna de la matriz A son un conjunto linealmente independiente en \mathbb{R}^2 . Entonces el conjunto

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$$

luego (E, \mathcal{I}) es una matroide.

El siguiente teorema se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 en la página 26. Este teorema garantiza la existencia de un conjunto independiente en una matroide utilizando dos conjuntos independientes de la matroide uno más grande que el otro.

Teorema 2.0.7. Suponga que X, Y son conjuntos independientes en una matroide $M(E, \mathcal{I})$ y $|X| > |Y|$. Entonces existe algún $Z \subseteq X - Y$ tal que $|Y \cup Z| = |X|$ y $Y \cup Z \in \mathcal{I}$.

Demostración. Sea $Z \subseteq X - Y$ un conjunto maximal tal que $Y \cup Z \in \mathcal{I}$ y suponga que $|Y \cup Z| < |X|$. Sabemos por (I3) que Z existe, al menos para $|Z| = 1$. Dado que tanto X como $Y \cup Z$ son independientes, existen algunos $x \in X - (Y \cup Z)$ tal que $(Y \cup Z) \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Dado que $x \notin Z$ implica que Z no es maximal, lo cual es una contradicción. \square

Definición 2.0.8. Dos matroides $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ son isomorfas y escribimos $M_1 \cong M_2$, si existe una función biyectiva $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $X \in \mathcal{I}_1$ si y solo si $\phi(X) \in \mathcal{I}_2$ para todo $X \subseteq E_1$.

Ahora estamos en condiciones de definir las tres clases principales de matroides que surgen de grafos, matrices y transversales.

Para la siguiente definición denotaremos como $M(G)$ a una matroide asociada a un grafo G y a $G[X]$ como un subgrafo de G , donde sus aristas son los elementos del conjunto X .

Definición 2.0.9. (Matroides de grafos) Una matroide isomorfa a la matroide $M(G)$ con conjunto básico $E = E(G)$ y familia de independencia

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : G[X] \text{ es un bosque}\}$$

para un grafo G , se llamará matroide de grafo.

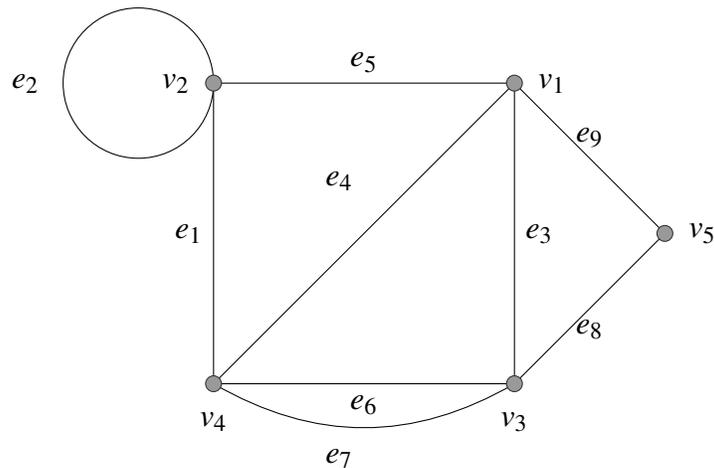


Figura 26. Grafo G

Ejemplo 2.0.10. Considere el grafo de la figura 26 y el conjunto soporte

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}.$$

Sea

$$\mathcal{I}_1 = \{X \subseteq E : G[X] \text{ no contiene ciclos}\},$$

entonces el sistema de conjuntos (E, \mathcal{I}_1) , trivialmente satisface (I1) y (I2), mientras que (I3) es la proposición 1.1.51, por lo tanto (E, \mathcal{I}_1) es una matroide. Sea ahora

$$\mathcal{I}_2 = \{X \subseteq E : \text{Los elementos de } X \text{ no son adyacentes en } G\}.$$

Se puede comprobar que (E, \mathcal{I}_2) satisface los axiomas (I1) e (I2). Sin embargo, el axioma (I3) no se cumple, ya que si tomamos $X = \{e_1, e_3\}$ y $Y = \{e_4\}$ tenemos que tanto $Y \cup \{e_1\}$ y $Y \cup \{e_3\}$ no están en \mathcal{I}_2 .

Definición 2.0.11. Una matroide isomorfa a la matroide $M[A]$ (es una matroide asociada a una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$) con conjunto básico $E = \{\text{conjunto de columnas de } A\}$ y familia de independencia

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ es un conjunto de vectores linealmente independientes en } \mathbb{F}\},$$

para una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ en algún cuerpo \mathbb{F} , se llamará \mathbb{F} -matroide representable o simplemente matroide representable.

Una matroide $M[A]$, para una matriz A con entradas en un cuerpo K .

- Si $K = \mathbb{Z}_2$ se denomina como matroide binaria.
- Si $K = \mathbb{Z}_3$ se denomina como matroide ternaria.

Ejemplo 2.0.12. Tomemos $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$, sea V el espacio vectorial de dimension-2 sobre \mathbb{F} y E el conjunto conformado por los vectores $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0), v_3 = (2, 2)$ y $v_4 = (1, 2)$. Entonces el

conjunto de vectores pueden verse como una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tomando a $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$, entonces $M[A]$ es una matroide representable sobre $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$.

Definición 2.0.13. (Matroides de transversales) Una matroide isomorfa a la matroide $M(E, \mathcal{F})$ (es una matroide asociada a un conjunto finito E y a una familia $\mathcal{F} = (S_i \subseteq E : i \in I)$ de subconjuntos de E) con familia de independencia

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ es una transversal parcial de } \mathcal{F}\},$$

para un sistema establecido (E, \mathcal{F}) , se llamará matroide de transversal.

2.1. Bases

Definición 2.1.1. (Bases) Dado un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) , los conjuntos independientes máximos se llamarán bases. La familia de bases se indicará con \mathcal{B} .

La colección de bases para algunos $X \subseteq E$ se indicará con $\mathcal{B}(X)$ y se define como

$$\mathcal{B}(X) = \{Y \subseteq X : Y \in \mathcal{I}, Y \cup \{x\} \notin \mathcal{I} \text{ para todo } x \in X - Y\}$$

De ello se deduce que $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}$.

Observe que las bases en los sistemas de independencia pueden tener diferentes cardinalidades. Considere, por ejemplo, $X = \{e_1, e_4, e_6\}$ para el sistema de independencia (E, \mathcal{I}_2) dado en Ejemplo 2.0.10, donde tenemos que las dos coincidencias máximas contenidas en X son

$$\mathcal{B}(X) = \{\{e_1, e_6\}, \{e_4\}\},$$

Como muestra el siguiente lema importante, la cardinalidad igual de bases es una condición necesaria y suficiente para que un sistema de independencia sea una matroide.

El siguiente lema se encuentra en el libro Sánchez, 2010 en la página 3 y en el libro Pitsoullis, 2014 página 27.

Lema 2.1.2. Un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) es una matroide si y solo si para cualquier $X \subseteq E$ todas las bases de X tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Sea (E, \mathcal{I}) una matroide y considere algún $X \subset E$. Suponga por contradicción que existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ con $|B_1| > |B_2|$. Como $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$ por axioma (I3) podemos encontrar algún $x \in B_1 - B_2$ tales que $B_2 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Por tanto, B_2 no es maximalmente independiente, lo cual es una contradicción.

Sea ahora (E, \mathcal{I}) un sistema de independencia, $X, Y \in \mathcal{I}$ con $|X| > |Y|$, y considere el conjunto $X \cup Y$. Suponiendo que todas las bases de $X \cup Y$ tienen el mismo tamaño, que es al menos $|X|$ ya que $X \in \mathcal{I}$. Esto implica que Y no es una base de $X \cup Y$, entonces existe algún $x \in (X \cup Y) - Y = X - Y$ tal que $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, que es el axioma (I3) de la Definición 2.0.2. \square

Definición 2.1.3. Una matroide M es un par (E, \mathcal{B}) , donde E es un conjunto finito no vacío y \mathcal{B} es una colección no vacía de subconjuntos de E (llamados bases) que satisface las siguientes condiciones:

(B1) \mathcal{B} es no vacía.

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $B_1 \subseteq B_2$ entonces $B_1 = B_2$.

(B3) Si B_1 y B_2 son bases y si e es cualquier elemento de $B_1 \setminus B_2$, entonces existe un elemento f de $B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ es también una base.

Ejemplo 2.1.4.

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

sobre el campo \mathbb{R} de los números reales. Entonces $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y tenemos que las bases de $M[A]$ son $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ donde (E, \mathcal{B}) es una matroide.

El siguiente teorema se encuentra en los libros Pitsoulis, 2014 página 27, Sánchez, 2010 página 3 y Bernabe, 2006 página 54.

Teorema 2.1.5. Una colección $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ es el conjunto de bases de un matroide $M(E, \mathcal{B})$ si y sólo si se cumple lo siguiente:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B3) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 - B_2$ entonces existe $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Demostración. Sea \mathcal{B} es el conjunto de bases de un matroide $M(E, \mathcal{I})$, donde \mathcal{I} (I1) – (I3) de la Definición 2.0.2. Mostraremos que \mathcal{B} satisface (B1) y (B3). Ya que por el axioma (I1) \mathcal{I} contiene al menos un elemento (el conjunto vacío), nosotros tenemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Considere ahora $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 - B_2$. Entonces $B_1 - \{x\} \in \mathcal{I}$ por los axiomas (I2) y (I3) existe algún $y \in B_2 - (B_1 - \{x\})$ tal que $B = (B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$. Por el lema 2.1.2 tenemos que $B \in \mathcal{B}$ donde todas las bases de la matroide tienen la misma cardinalidad y (B3) es demostrado. Sea $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ que satisface (B1) y (B3). Nosotros mostraremos que para

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } X \subseteq B\} \quad (10)$$

el sistema de conjuntos (E, \mathcal{I}) satisface los axiomas (I1) – (I3) de la definición 2.0.2. Los axiomas (I1) y (I2) se cumplen trivialmente.

Para demostrar (I3) consideremos $X, Y \in \mathcal{I}$ con $|X| > |Y|$. Tenemos que demostrar que existe $x \in X - Y$ tal que $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Dado $X, Y \in \mathcal{I}$, por (10) existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $X \subseteq B_1$ y $Y \subseteq B_2$. De todos los posibles pares B_1, B_2 , elija uno tal que $|B_1 \cap B_2|$ sea máxima. Si $B_2 \cap (X - Y) \neq \emptyset$ entonces ya hemos terminado, dado que para cualquier elemento x de este conjunto se tiene que $Y \cup \{x\} \subseteq B_2$, por lo que el conjunto $Y \cup \{x\}$ es independiente. Supongamos ahora por contradicción que $B_2 \cap (X - Y) = \emptyset$. Si $|B_1| > |B_2|$, entonces aplicando (B3) repetidamente podemos crear un conjunto $B = (B_1 \cap B_2) \cup S$ para algún $S \subseteq B_1 - B_2$, tal que $B \in \mathcal{B}$ y $B \subseteq B_1$. Esto contradice la maximalidad de $|B_1 \cap B_2|$ y debemos tener $|B_1| = |B_2|$. Particionaremos B_1 y B_2 como se ilustra en la Fig. 27, ordenando los subconjuntos de sus elementos como sigue. Que X y

Y en B_1 y B_2 respectivamente, aparezcan primero. Las áreas sombreadas indican subconjuntos de elementos comunes entre B_1 y B_2 . Ahora particionando B_2 , indicando primero los subconjuntos comunes $X \cup Y$, $B_2 \cap (X - Y)$ y $(B_1 - X) \cap (B_2 - Y)$. De la Fig. 27 ahora se desprende que si $B_2 \cap (X - Y) = \emptyset$ tendremos

$$\begin{aligned}
 |B_2| &= |X \cap Y| + |Y \cap (B_1 - X)| + |(B_1 - X) \cap (B_2 - Y)| + |Y - B_1| \\
 &\quad + |(B_2 - B_1) - Y| \\
 &= |B_1 \cap B_2| + |Y - B_1| + |(B_2 - B_1) - Y| \\
 &= |B_1|.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

De la Fig. 27 también podemos ver que si $B_2 \cap (X - Y) = \emptyset$ entonces

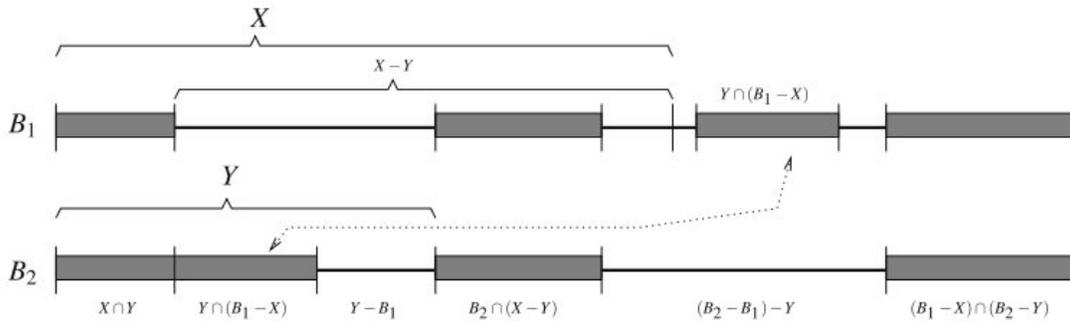


Figura 27. Los elementos de B_1 y B_2

$$|B_1| \geq |B_1 \cap B_2| + |X - Y|.
 \tag{12}$$

Combinando (11) y (12) obtenemos

$$|Y - B_1| + |(B_2 - B_1) - Y| \geq |X - Y|. \quad (13)$$

ya que $|X| > |Y|$ entonces tenemos

$$|X - Y| > |Y - X| \geq |Y - B_1|$$

el cual de (13) implica que $(B_2 - B_1) - Y \neq \emptyset$. Entonces, para algún $y \in (B_2 - B_1) - Y$ por axioma (B3) existe $x \in B_1 - B_2$ tal que $(B_2 - \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$, contradiciendo de que $|B_1 \cap B_2|$ es máxima. Por lo tanto, (E, \mathcal{I}) es una matroide.

Queda por demostrar que la familia de conjuntos independientes máximos de (E, \mathcal{I}) es en realidad \mathcal{B} , que se deriva directamente de la definición de \mathcal{I} en (10). Un conjunto B es máximamente independiente en (E, \mathcal{I}) si y solo si está contenido en un miembro de \mathcal{B} y $B \cup \{x\}$ no está contenido en ningún miembro de \mathcal{B} para todos los $x \in E - B$. Esto es equivalente a que $B \in \mathcal{B}$. \square

Definición 2.1.6. Si $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ y E es un conjunto finito de n elementos, $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Para una matroide sobre E tomando todo subconjunto de k elementos de E que sea base, entonces la colección de estas bases $\mathcal{B} = \{X \subseteq E : |X| = k\}$ cumple (B1) – (B3) de la definición 2.1.3, por lo tanto el conjunto de bases define una matroide (E, \mathcal{B}) . Esta matroide es conocida como la matroide uniforme de rango k denotada por $U_{k,n}$. Todas las matroides de rango por lo menos dos, se consideran simples. Claramente se tiene:

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E / |X| \leq k\}$$

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq E / |X| = k\}.$$

Ejemplo 2.1.7. Considérese $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ donde E es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V y que $\mathcal{B} = \{\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}\}$. Se puede verificar que E y \mathcal{B} satisfacen las condiciones (B1) – (B3) y por lo tanto en este caso, el par (E, \mathcal{B}) constituye una matroide. Esta matroide juega un papel importante en la teoría de matroides y se denota por $U_{2,4}$. Un aspecto interesante de $U_{2,4}$ lo proporciona el hecho de que no es una matroide gráfica, es decir, no puede ser representada mediante un grafo. La demostración de esta afirmación se pueden encontrar en el ejemplo 1.19 del libro Gary Gordon, 2012.

2.2. Circuitos

Definición 2.2.1. (Circuitos) Dado un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) , los conjuntos dependientes minimales se llamarán circuitos. La familia de circuitos se indicará con \mathcal{C} .

La colección de circuitos para algunos $X \subseteq E$ se indicará con $\mathcal{C}(X)$ y se define como

$$\mathcal{C}(X) = \{Y \subseteq X : Y \notin \mathcal{I}, Y - \{y\} \in \mathcal{I} \text{ para todo } y \in Y\},$$

Un singleton $\{e\} \in \mathcal{C}(E)$ que es un circuito, se llamará bucle de M . En otras palabras un circuito C en una matroide M es un subconjunto de E dependiente minimal, es decir, un conjunto dependiente cuyos subconjuntos propios son todos independientes.

El siguiente teorema se encuentra en los libros Pitsoulis, 2014 página 30, Bernabe, 2006

página 50 y Oxley, 2014 página 9.

Teorema 2.2.2. Una matroide M es un par (E, \mathcal{C}) , donde E es un conjunto finito no vacío y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de E , llamados circuitos, tales que:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) Si C_1, C_2 son circuitos de \mathcal{C} , con $C_1 \subseteq C_2$ entonces $C_1 = C_2$

(C3) Si C_1, C_2 son circuitos de \mathcal{C} , con $C_1 \neq C_2$ y $e \in C_1 \cap C_2$ entonces existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$. (Propiedad de eliminación).

Demostración. Sea \mathcal{C} el conjunto de circuitos de la matroide $M(E, \mathcal{I})$, donde \mathcal{I} satisface los axiomas (I1)-(I3) de la Definición 2.0.2. Demostraremos que \mathcal{C} satisface (C1)-(C3). El axioma (C1) se deduce del axioma (I1), mientras que (C2) es cierto ya que si $C_1 \neq C_2$ entonces C_2 no es minimalmente dependiente. Consideremos ahora cualquier $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2$ y $e \in C_1 \cap C_2$ y suponer por contradicción que $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ no contiene un miembro de \mathcal{C} . Por la Definición 2.2.1 debemos tener $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$. Dado que por (C2) ninguno de los C_1 y C_2 es un subconjunto del otro, tenemos que existen al menos dos elementos $x_2 \in C_2 - C_1$ y $x_1 \in C_1 - C_2$. Si tomamos el máximo subconjunto independiente X de $C_1 \cup C_2$, ya que X no puede contener a C_1 ni a C_2 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1, x_2 \in X$. Por lo tanto, tenemos

$$|X| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{x_1, x_2\}| < |(C_1 \cup C_2) - \{e\}|.$$

Aplicando el Axioma (I3) a los conjuntos independientes X y $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ obtenemos un sub-

conjunto independiente de $C_1 \cup C_2$ que es mayor que X , lo cual es una contradicción. Suponiendo ahora que $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ satisface (C1) – (C3), demostraremos que para

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : \text{no existe } Y \in \mathcal{C} \text{ tal que } Y \subseteq X\} \quad (14)$$

el sistema de conjuntos (E, \mathcal{I}) es una matroide. El Axioma (I1) se establece por (C1) y el hecho de que el conjunto vacío no contiene ningún miembro de \mathcal{C} . El Axioma (I2) se deduce directamente de la Definición de \mathcal{I} en 14. Por tanto, (E, \mathcal{I}) es un sistema de independencia. Ahora mostraremos que para cualquier $X \subseteq E$ las bases de X tienen la misma cardinalidad, por el Lemma 2.1.2, (E, \mathcal{I}) es una matroide. Consideremos cualquier $X \subseteq E$ y supongamos por contradicción que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{B}(X)$ tales que $|X_1| > |X_2|$, mientras que elegimos aquellos X_1 y X_2 tales que $|X_1 \cap X_2|$ es máxima. Tomemos cualquier $x \in X_1 - X_2$ y consideremos el conjunto $X_2 \cup \{x\}$. Ya que $X_2 \in \mathcal{B}(X)$ tenemos que $X_2 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$, lo que por (14) implica que contiene algún $C_x \in \mathcal{C}$, donde $x \in C_x$. Si existe algún C distinto de C_x tal que $C \in \mathcal{C}$ y $C \subseteq X_2 \cup \{x\}$, por (C3) tenemos que $(C \cup C_x) - \{x\}$ contiene un miembro de \mathcal{C} , lo cual es una contradicción ya que $(C \cup C_x) - \{x\} \subseteq X_2$. Podemos concluir que C_x es el único circuito en $X_2 \cup \{x\}$. Por lo tanto, si tomamos alguna $y \in C_x - X_1$ entonces $X_3 = (X_1 \cup \{x\}) - \{y\} \in \mathcal{I}$ ya que eliminamos el único circuito en $X_2 \cup \{x\}$. Ahora tenemos $|X_3 \cap X_1| > |X_2 \cap X_1|$, lo cual es una contradicción. Por tanto, (E, \mathcal{I}) es una matroide.

Queda por demostrar que la familia de conjuntos minimales dependientes de (E, \mathcal{I}) es en realidad \mathcal{C} . Esto se deduce de la definición de \mathcal{I} en (14), ya que C es un circuito de (E, \mathcal{I}) si y sólo si C contiene un miembro de \mathcal{C} mientras que $C - \{x\}$ no lo contiene, para cualquier $x \in C$,

que es equivalente a $C \in \mathcal{C}$. □

Ejemplo 2.2.3. Consideremos un grafo con 3 vértices y 5 aristas, podemos observarlo en la figura 28. Sea el conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ definido como las aristas del grafo G y sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos de E que no contienen a los ciclos de G . Los ciclos de G son:

$$\mathcal{C} = \{\{e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_5\}\}$$

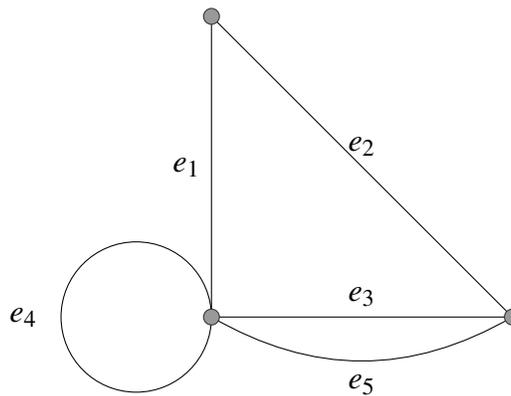


Figura 28. Grafo G

La prueba de que $M(G)$ es una matroide se puede hacer fácilmente probando que la colección de ciclos de G cumple el Teorema 2.2.2. En este caso, los conjuntos independientes de $M(G)$ son los conjuntos de aristas de G que no contienen ciclos, es decir los bosques y árboles de G .

Ejemplo 2.2.4.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Entonces $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$$

Así el conjunto de conjuntos dependientes de la matroide es

$$\{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \cup \{X \subset E : |X| \geq 3\}$$

y el conjunto de circuitos es

$$\mathcal{C} = \{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$$

La siguiente proposición se encuentre en el libro Pitsoulis, 2014 página 31 y en el libro Bernabe, 2006 página 51.

Proposición 2.2.5. Supongamos que I es un conjunto independiente en una matroide M y e es un elemento de M tal que $I \cup \{e\}$ es dependiente. Entonces M tiene un único circuito contenido en $I \cup \{e\}$ y este circuito contiene a e .

Demostración. Claramente $I \cup \{e\}$ contiene un circuito C . Supongamos por absurdo que $e \notin C$, si esto pasa entonces dicho circuito sería subconjunto de I , por lo tanto por (I2) este sería un conjunto independiente lo cual es una contradicción. Si C' es tal circuito y $C' \neq C$, entonces por (C3), $(C \cup C') - \{e\}$ contiene un circuito y como $(C \cup C') - \{e\} \subseteq I$, esto sería una contradicción.

Por lo que concluimos que C es único. \square

El siguiente lema se encuentra en el libro Pitsoulis, 2014 página 31.

Lema 2.2.6. Si M_1 y M_2 son dos matroides sobre el mismo conjunto soporte, tales que cualquier circuito de M_1 contiene un circuito de M_2 y viceversa, entonces $M_1 = M_2$.

Demostración. Si $X \in \mathcal{C}(M_1)$ existe un circuito $Y \in \mathcal{C}(M_2)$ tal que $X \subseteq Y$ y para Y existe un circuito $Z \in \mathcal{C}(M_1)$ tal que $Z \subseteq Y$. Tenemos $Z \subseteq Y \subseteq X$ y por el axioma (C2) debemos tener $Z = X$, lo que implica que $X = Y$. Del mismo modo, demostramos que cualquier circuito de M_2 es un circuito de M_1 , por tanto, las dos matroides tienen la misma familia de circuitos y son iguales. \square

2.3. Rango

Definición 2.3.1. (Rango) Dado un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) , la función rango $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ se define como

$$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\} \quad (15)$$

para cualquier $X \subseteq E$.

El siguiente teorema se encuentra en los libros Pitsoulis, 2014 página 32, Bernabe, 2006 página 61.

Teorema 2.3.2. Una función $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ es la función rango de una matroide $M(E, \mathcal{I})$ si y solo si satisface para todo $X, Y \subseteq E$:

(R1) Si $X \subseteq E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$

(R2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$ (Propiedad hereditaria).

(R3) Para todo X, Y en E se cumple $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ (Propiedad semimodular).

Demostración. Sea $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ la función rango de una matroide $M(E, \mathcal{I})$, donde \mathcal{I} satisface los axiomas (I1) – (I3) de la Definición 2.0.2. Por la Definición 2.3.1 r satisface trivialmente (R1) y (R2). Para (R3), obsérvese primero que por el Teorema 2.0.7 para cualquier $X \subseteq E$ si $Y \subseteq X$ tal que $Y \in \mathcal{I}$, entonces Y puede extenderse a una base de X . Consideremos ahora una base $A \in \mathcal{B}(X \cap Y)$. Entonces $A \in \mathcal{I}(X)$, así por el Teorema 2.0.7 tiene que existir algún $B \subseteq X$ tal que $A \cap B = \emptyset$ y $(A \cup B) \in \mathcal{B}(X)$. De forma similar, ya que $(A \cup B) \in \mathcal{I}(X \cup Y)$ debe existir algún $C \subseteq X \cup Y$, $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y $(A \cup B) \cup C \in \mathcal{B}(X \cup Y)$. Por lo tanto, $(A \cup C) \in \mathcal{I}$ y ahora podemos afirmar lo siguiente:

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |A \cup B| + |A \cup C| \\ &= 2|A| + |B| + |C| \\ &= |A \cup B \cup C| + |A| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y). \end{aligned}$$

Sea ahora $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ satisface (R1) – (R3). Mostraremos que para

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : r(X) = |X|\}, \tag{16}$$

el sistema de conjuntos (E, \mathcal{I}) es una matroide. Por la Definición 2.3.1 y (R1) tenemos que $r(\emptyset) =$

0 lo cual significa que $\emptyset \in \mathcal{S}$. Para (I2), tome cualquier $X \in \mathcal{S}$ y $Y \subseteq X$. Suponga por contradicción que $Y \notin \mathcal{S}$. Entonces por (R1) y (16) tenemos que $r(Y) < |Y|$. Por (R3) tenemos

$$\begin{aligned} r(X - Y) + r(Y) &\geq r((X - Y) \cup Y) + r((X - Y) \cap Y) \\ &= r(X). \end{aligned}$$

Como $X \in \mathcal{S}$ por suposición, y $r(X - Y) \leq |X - Y|$ por (R2), sustituyendo lo anterior obtenemos

$$|X - Y| + |Y| > r(X - Y) + r(Y) \geq r(X) = |X|,$$

lo cual es una contradicción. Para (I3), suponga por contradicción que existen $X, Y \in \mathcal{S}$, $|X| > |Y|$, tal que para todo $x \in X - Y$, $Y \cup \{x\} \notin \mathcal{S}$. Por (R1) y (16) tenemos que $r(Y \cup \{x\}) < |Y| + 1$ para todo $x \in X - Y$. Además, por (R2) tenemos que $r(Y \cup \{x\}) \geq r(Y)$, donde $r(Y) = |Y|$ ya que $Y \in \mathcal{S}$ por suposición. Por lo tanto, dado que r es una función entera, obtenemos

$$r(Y \cup \{x\}) = r(Y) = |Y|, \text{ para todo } x \in X - Y. \quad (17)$$

Considere ahora dos elementos distintos $x_1, x_2 \in X - Y$. Por (R3) tenemos

$$\begin{aligned} r(Y \cup \{x_1\}) + r(Y \cup \{x_2\}) &\geq r((Y \cup \{x_1\}) \cup (Y \cup \{x_2\})) + r((Y \cup \{x_1\}) \cap (Y \cup \{x_2\})) \\ &= r(Y \cup \{x_1, x_2\}) + r(Y) \end{aligned}$$

entonces por (17) y (R2)

$$|Y| \geq r(Y \cup \{x_1, x_2\}) \geq r(Y)$$

lo que implica que $r(Y \cup \{x_1, x_2\}) = |Y|$. Por lo tanto, mediante la aplicación repetida de (R3) obtendremos $r(Y \cup (X - Y)) = |Y|$, que es una contradicción ya que $Y \cup (X - Y) = X$. Para mostrar que la función $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisface (R1) – (R3), es la función de rango de (E, \mathcal{I}) como se indica en la Definición 2.3.1, tenemos que demostrar que

$$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, r(Y) = |Y|\}$$

para cualquier $X \subseteq E$. Dado cualquier $X \subseteq E$, por (R1) y (R2) tenemos que Y es el subconjunto máximo de X tal que $r(Y) = |Y|$ si y solo si para todo $x \in X - Y, r(Y) \leq r(Y \cup \{x\}) < |Y| + 1$, que es equivalente a $r(Y \cup \{x\}) = |Y|$. Mediante la aplicación repetida de (R3) como se hizo anteriormente, tenemos $r(X) = r(Y)$. □

Definición 2.3.3. (rango mínimo) Dado un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) , la función de rango

mínimo $lr : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ se define como

$$lr(X) = \text{mín}\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}, Y \cup \{x\} \notin \mathcal{I} \text{ para todo } x \in X - Y\}$$

para cualquier $X \subseteq E$.

Así, mientras que el rango se define como la cardinalidad de la base más grande de X , el rango mínimo es la cardinalidad de la base más pequeña. Nótese que $r(X) = |X| \Leftrightarrow lr(X) = |X|$, es decir, rango y rango mínimo son equivalentes cuando X es un conjunto independiente.

3. Algoritmo voraz

En esta sección tomaremos como principal referencia el libro Pitsoulis, 2014 en las páginas de la 38 a la 45, también nos soportaremos de los libros Gary Gordon, 2012 página 83, Sánchez, 2010 página 30 y Oxley, 2014 página 22. Donde proporcionaremos otra definición equivalente de matroide, está es única en el sentido de que no se basa en un conjunto de axiomas, sino más bien en la salida de un algoritmo a un problema de optimización para grafos. Hay muchos casos donde queremos conectar una colección de objetos (computadoras, casas, ciudades) de alguna manera óptima. Por ejemplo, cuando queremos conectar un grupo de computadoras y cables, si pensamos las computadoras como vértices y los cables como aristas. Entonces estamos buscando un grafo conexo óptimo.

Consideremos G un grafo conexo y supongamos que w es una función de $E(G)$ (conjunto de aristas de un grafo) en \mathbb{R} . La función w es llamada función peso en G , dado que para todo $X \subseteq E(G)$, definimos $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$. Para un grafo G y una función de peso w dadas, tenemos el problema de encontrar un árbol de expansión de G de mínimo peso. Para el ejemplo anterior a cada conexión por cable de computador a computador, le asociamos un costo, entonces la idea es generar una conexión de tal manera que todos los computadores se conecten y el costo sea mínimo.

Definición 3.0.1. Sea \mathcal{S} un conjunto de subconjuntos de un conjunto E que verifica las propiedades (I1) y (I2). Sea $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ donde $(w(e))$ es el peso del elemento e w es considerada la función peso. Sea $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$ para $X \subseteq E$, y $w(\emptyset) = 0$.

Un problema de optimización consiste en encontrar un conjunto maximal B de \mathcal{I} con peso máximo o mínimo.

Ejemplo 3.0.2. Consideremos algunos ejemplos de problemas de optimización en grafos:

- **Mínimo árbol expansivo.** Para alguna función peso $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ encontrar un árbol expansivo T de G tal que $w(E(T))$ sea mínimo. El conjunto $E = E(G)$ y $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : G[X] \text{ es un bosque}\}$.
- **Conexión de peso máximo.** Para alguna función peso $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ encontrar una conexión $M \subseteq E(G)$ tal que $w(M)$ es máximo. El conjunto $E = E(G)$ y $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ es una conexión}\}$.
- **Problema del vendedor ambulante.** Para alguna función de peso $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ encontrar un ciclo expansivo C de G tal que $w(E(C))$ es mínimo. El conjunto $E = E(G)$ y $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \subseteq E(C), C \text{ es un ciclo expansivo de } G\}$.
- **Problema de clics máximos.** Para una función de peso constante $w(v) = 1$ para todo $v \in V(G)$, encuentre $T \subseteq V(G)$ tal que $G[T]$ sea un grafo completo y $w(T)$ sea máximo. Establezca $E = V(G)$ y $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : G[X] = K_{|X|}\}$.

Para el problema del árbol de expansión mínimo, sabemos que el sistema de independencia correspondiente (E, \mathcal{I}) es una matroide de grafo, ya que \mathcal{I} satisface el axioma (I3). Sin embargo, para los otros problemas es fácil construir un contraejemplo en el que falla el axioma (I3), como hemos hecho en el Ejemplo 2.0.10 para el problema de conexión de peso máximo. Para aquellos sistemas independientes que no son matroides, también hemos definido el rango mínimo en la Definición 2.3.3, que es la cardinalidad de la base más pequeña de un conjunto. Considere ahora la proporción

$$q(E, \mathcal{I}) = \min_{X \subseteq E} \frac{lr(X)}{r(X)} \quad (18)$$

que se llamará cociente de rango de (E, \mathcal{I}) . El cociente de rango es directamente proporcional a la diferencia entre la base más pequeña y la más grande de un sistema independiente, por lo que, en ese sentido, podría utilizarse como una medida de lo cerca que está el sistema independiente de tener una estructura matroidal. Quizás el algoritmo más sencillo para resolver la Definición 3.0.1 es el llamado algoritmo voraz (o en inglés Greedy algorithm), que se describe como:

Algoritmo Voraz
Input : independence system (E, \mathcal{I}) , function $w : E \rightarrow \mathbb{R}$
Output: set $X \in \mathcal{B}$
1. Sort E such that $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_{ E })$
2. $X := \emptyset$;
3. for $i = 1, \dots, E \rightarrow$
4. if $X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \rightarrow$
5. $X := X \cup \{e_i\}$;
6. end if
7. end for
8. return X

En el caso de minimización se ordenan los elementos de la siguiente manera $w(e_i) \leq w(e_j)$ para $i \leq j$.

El hecho de que siempre produce una base de (E, \mathcal{I}) , es una consecuencia inmediata del axioma (I2) y de la línea 4 del algoritmo. Podemos ver que el algoritmo voraz parte de una solución vacía, que por el axioma (I1) es independiente, e inserta los mejores elementos en una solución parcial hasta que se se convierta en dependiente. El procedimiento es miope, en el sentido de que nunca retrocede. Aparentemente la parte más intensiva en el Algoritmo voraz está en la línea 4, donde tenemos que comprobar si algún conjunto X es independiente o no. El siguiente resultado demuestra que el rendimiento de aproximación del algoritmo voraz está limitado por el cociente del rango del sistema de independencia correspondiente.

Ejemplo 3.0.3. Una persona necesita contratar personal para su nuevo restaurante, decide entrevistar a 5 personas, $a = \text{"Alex"}$, $b = \text{"Brayan"}$, $c = \text{"Carlos"}$, $d = \text{"Diego"}$ y $e = \text{"Esteban"}$, dándoles una calificación de 1 a 5, siendo 5 la calificación más alta. Al dueño del restaurante le interesa contratar a 3 personas mejor calificadas para 3 puestos de trabajo: cocinero, mesero y lava platos, las calificaciones de las 5 personas entrevistadas se definen como una función peso $w: E = \{a, b, c, d, e\} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $w(a) = 1$, $w(b) = 4$, $w(c) = 5$, $w(d) = 1$ y $w(e) = 3$. Las personas que se entrevistaron para cocinero fueron $\{a, d\}$, las personas que se entrevistaron para mesero fueron $\{b, c, d\}$, las personas que se entrevistaron para lavador de platos fueron $\{e, d\}$ el cual se pueden observar en la figura 29.

Definimos la matroide transversal como $M(E, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F} = \{\{a, d\}, \{b, c, d\}, \{e, d\}\}$, $E = \{a, b, c, d, e\}$ y el sistema de independencia $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ es una transversal parcial de } \mathcal{F}\}$,

en este caso en \mathcal{I} están todos los singletons, todas las duplas excepto la dupla $\{b, c\}$ y todas las triplas excepto las que tienen contenido a $\{b, c\}$.

Aplicando el algoritmo voraz tenemos los siguientes pasos:

(Paso 1) $5 = w(c) > 4 = w(b) > 3 = w(e) > 1 = w(a) = w(d)$ (Ordena las calificaciones de mayor a menor)

(paso 2) Toma a $X = \emptyset$.

(paso 3) Como c es la persona con mayor calificación Se pregunta si $X \cup \{c\} \in \mathcal{I}$, en este caso es verdadero entonces $X = \{c\}$.

(paso 4) La siguiente persona con mayor calificación es b , entonces se pregunta si $X \cup \{b\} \in \mathcal{I}$, en este caso es falso, entonces deja $X = \{c\}$.

(paso 5) La siguiente persona con mayor calificación antes de b es e , entonces se pregunta si $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, en este caso es verdadero, entonces hace $X = \{c, e\}$.

(paso 6) La siguiente con mayor calificación antes de e es a y d , en este caso las personas a y d son igual de calificadas, entonces digamos que el algoritmo escoge a a , entonces se pregunta si $X \cup \{a\} \in \mathcal{I}$, para este caso es verdadero, entonces hace $X = \{a, c, e\}$.

(paso 7) Como ya no quedan personas, entonces el algoritmo retorna a $X = \{a, c, e\}$.

Por lo tanto mediante el algoritmo voraz se tiene a las 3 personas mejor calificadas para los 3 trabajos y que puedan hacerlo, en esta caso las personas contratadas son: *Alex* para cocinero, *Carlos* para mesero y *Esteban* para lavar platos.

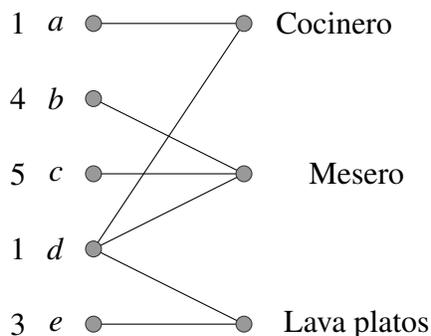


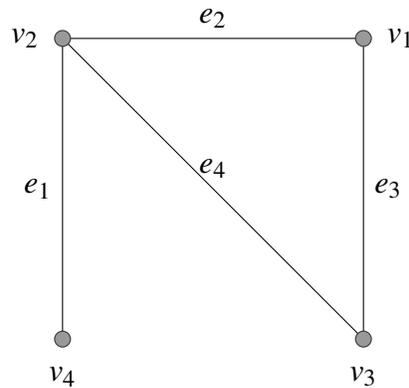
Figura 29. Grafo que modela la opción de asignación de trabajo

Ejemplo 3.0.4. En este ejemplo mostraremos que el algoritmo voraz falla cuando no se aplica sobre una matroide, en este caso consideraremos un conjunto independiente que no satisface el axioma (I3).

Sea $E = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$ un sistema de independencia con una función peso: $w(a) = 2$, $w(b) = 1$, $w(c) = w(d) = 3/4$. Aplicando el algoritmo voraz tenemos que:

- $w(a) > w(b) > w(c) = w(d)$ (organiza los pesos de cada elemento de E)
- Se pregunta si $\{a\} \in \mathcal{I}$, en este caso es verdad. Entonces como b es el siguiente elemento con peso máximo, se pregunta si $\{a, b\} \in \mathcal{I}$, lo cual es cierto. Por ultimo el algoritmo puede escoger entre c o d , para la siguiente iteración. Supongamos que escogió a c entonces el algoritmo se pregunta si $\{a, b, c\} \in \mathcal{I}$, esto es falso. Por lo tanto el algoritmo frena y me retorna o imprime el conjunto $\{a, b\}$.

Revisando el peso de cada conjunto perteneciente a \mathcal{I} , sabemos que el conjunto independiente con peso máximo es $\{a, c, d\}$ ya que la suma del peso de sus elementos es 3.5. Pero el algoritmo voraz

Figura 30. G

retorno el conjunto $\{a, b\}$ que la suma de los pesos de sus elementos es 3. Por lo tanto se concluye que la salida del algoritmo voraz no es la solución óptima. Ya que, como se dijo al principio, el sistema de independencia considerado no es una matroide. Pues podemos observar que para los conjuntos $\{a, c, d\}$ y $\{a, b\}$, no se cumple (I3) de la definición 2.0.2.

Ejemplo 3.0.5. Sea el grafo G en la figura 30, definimos $E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : G[X] \text{ es un bosque}\}.$$

Siendo más específico $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}\}$. Entonces $M(G) = (E, \mathcal{I})$ es una matroide, dado que \mathcal{I} fácilmente satisface (I1), (I2), mientras que (I3) es la proposición 1.1.51.

Podemos ver que el conjunto de ciclos es $\mathcal{C} = \{\{e_2, e_3, e_4\}\}$, ya que es el único ciclo que tiene el grafo G .

Definamos una función peso $W: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $w(e_1) = 1, w(e_2) = 3, w(e_3) = 6$ y

$w(e_4) = 2$. Entonces se requiere encontrar un bosque de tal manera que tenga peso máximo, para esto aplicamos el algoritmo voraz.

(paso 1) $w(e_3) > w(e_2) > w(e_4) > w(e_1)$ (se ordenan los pesos de mayor a menor).

(paso 2) Tome $X = \emptyset$

(paso 3) Como e_3 es la arista con peso máximo, entonces si $X \cup \{e_3\} \in \mathcal{I}$, para este caso es verdadero, entonces $X = \{e_3\}$.

(paso 4) Como e_2 es la siguiente arista con mayor peso, entonces se pregunta si $X \cup \{e_2\} \in \mathcal{I}$, para este caso es verdadero, entonces $X = \{e_3, e_2\}$.

(paso 5) como e_4 es la siguiente arista con mayor peso antes de e_2 , entonces se pregunta si $X \cup \{e_4\} \in \mathcal{I}$, en este caso es falso, ya que $\{e_3, e_2, e_4\}$ es un ciclo, entonces $X = \{e_3, e_2\}$ lo deja igual.

(paso 6) Por ultimo queda la arista e_1 , por lo tanto el algoritmo se pregunta si $X \cup \{e_1\} \in \mathcal{I}$, esto es verdadero, entonces $X = \{e_3, e_2, e_1\}$.

(paso 7) El algoritmo retorna $X = \{e_3, e_2, e_1\}$.

Se concluye que $X = \{e_3, e_2, e_1\}$ es el bosque que tiene peso máximo dado que $(E(G), \mathcal{I})$ define una matroide sobre un grafo.

Teorema 3.0.6. Sea (E, \mathcal{I}) un sistema de independencia y $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función de peso cualquiera. Si para el problema de maximización en la Definición 3.0.1 G es la solución encontrada

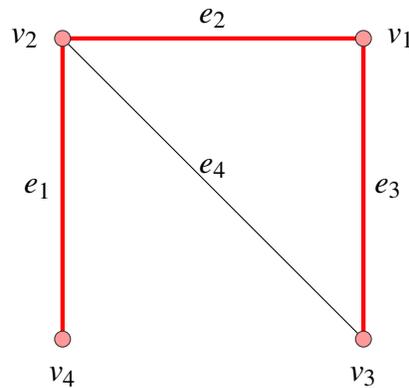


Figura 31. Grafo G y bosque X (en color rojo) con peso máximo

por el algoritmo voraz y O es la solución óptima entonces

$$q(E, \mathcal{S}) \leq \frac{w(G)}{w(O)} \quad (19)$$

Además, el límite es definido.

Demostración. Sea $E_i = \{e_k : k = 1, \dots, i\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Además, sea $O_i = O \cap E_i$ y

$G_i = G \cap E_i$, aunque se entiende que $O_n = O$ y $G_n = G$. Observe que

$$|G_i| - |G_{i-1}| = \begin{cases} 1 & \text{Si } e_i \in G \\ 0 & \text{lo contrario} \end{cases} \quad (20)$$

y de forma similar para O_i . Como $O_i \subseteq E_i$ and $O_i \in \mathcal{S}$ tenemos por la definición de la función de rango que

$$|O_i| = r(O_i) \leq r(E_i). \quad (21)$$

Por la línea 4 del Algoritmo voraz y Axioma (I2), G_i es una base de E_i para cada $i = 1, \dots, n$, por lo tanto,

$$|G_i| \geq \text{lr}(E_i) \quad (22)$$

Combinando las ecuaciones (20), (21) y (22), el hecho de que $w(e_i) - w(e_{i+1}) \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, y el ajuste $w(e_{n+1}) = 0$, podemos relacionar el peso total de G y O como sigue:

$$\begin{aligned} w(G) &= \sum_{i=1}^n (|G_i| - |G_{i-1}|) w(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |G_i| w(e_i) - \sum_{i=1}^n |G_{i-1}| w(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |G_i| w(e_i) - \sum_{i=1}^n |G_i| w(e_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n |G_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \text{lr}(E_i) (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq q(E, \mathcal{I}) \sum_{i=1}^n r(E_i) (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &\geq q(E, \mathcal{I}) \sum_{i=1}^n |O_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\ &= q(E, \mathcal{I}) \sum_{i=1}^n (|O_i| - |O_{i-1}|) w(e_i) \\ &= q(E, \mathcal{I}) w(O). \end{aligned}$$

Para demostrar que el límite es definido, tenemos que construir una función de peso $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ para cualquier sistema de independencia, tal que (19) se cumpla con la igualdad. Para cualquier (E, \mathcal{I}) tomar el conjunto $X \subseteq E$ responsable del valor del cociente de rango del sistema de inde-

pendencia, es decir, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ tales que

$$\frac{|B_1|}{|B_2|} = q(E, \mathcal{I}).$$

Basta con que B_1 sea la solución encontrada por el algoritmo voraz y B_2 el óptimo para el problema de maximización en la Definición 3.0.1. Esto se puede hacer fácilmente si consideramos la función de peso

$$w(e) = \begin{cases} 1 & \text{Si } e \in X \\ 0 & \text{lo contrario} \end{cases}$$

y tomar cualquier ordenación de E donde los primeros elementos sean los de B_1 . □

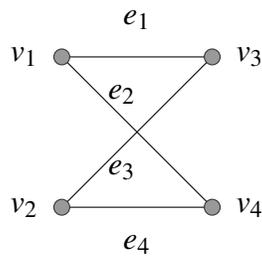


Figura 32. $K_{2,2}$

Ejemplo 3.0.7. Supongamos que estamos interesados en encontrar una conexión de peso máximo en el grafo bipartito $K_{2,2}$ ilustrado en la Fig. 32. El correspondiente sistema independiente será descrito por el conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y la familia de bases como

$$\mathcal{B} = \{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}\}$$

Si tenemos una función de peso $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $w(e_3) = 0$ y

$$w(e_2) \geq w(e_1) \geq w(e_4) \geq 0.$$

entonces la solución que dará el algoritmo voraz es $\{e_2, e_3\}$ con peso total

$$w(e_2) \geq \frac{1}{2}(w(e_1) + w(e_4))$$

Esto se debe a que para $X = \{e_1, e_2, e_4\}$ tenemos

$$\frac{lr(X)}{r(X)} = \frac{1}{2} = q(E, \mathcal{I})$$

mientras que se puede comprobar fácilmente que esto es así para cualquier $K_{n,n}$ ya que el tamaño de cualquier circuito en el sistema independiente correspondiente será dos. Cualquier conjunto de dos aristas que inciden en el mismo vértice es un circuito. Por otra parte, si estuviéramos interesados en encontrar una correspondencia de peso mínimo en el grafo $K_{2,2}$ de la Fig. 32, podemos ver que la relación entre la solución producida por el algoritmo voraz y la óptima no es acotada.

Teorema 3.0.8. (Edmonds (1971)) Un sistema de independencia (E, \mathcal{I}) es una matroide si y sólo si el algoritmo voraz es óptimo para el problema de maximización en la Definición (3.0.1).

Demostración. Si (E, \mathcal{I}) es una matroide, entonces por el Lema 3.1 tenemos $q(E, \mathcal{I}) = 1$, y por el Teorema 3.0.6 el algoritmo voraz es óptimo.

Sea $w(e) = 1$ para todo $e \in E$ y tomemos cualquier $X \subseteq E$. Se puede comprobar fácilmente que para $\mathcal{I}_X = \{Y \subseteq X : Y \in \mathcal{I}\}$ el sistema de conjuntos (X, \mathcal{I}_X) es un sistema de independencia. Consideremos ahora el algoritmo voraz para el problema de maximización en la Definición (3.0.1) para el sistema de independencia (X, \mathcal{I}_X) . Dado que la función de peso es constante, el conjunto base X puede ordenarse arbitrariamente, lo que implica que el algoritmo voraz puede proporcionar como solución cualquier base $B \in \mathcal{B}(X)$. Como el algoritmo voraz es óptimo, esto implica que todas las bases de X deben tener cardinalidad $r(X)$, y por el Lema 2.1.2 el sistema de independencia (E, \mathcal{I}) es una matroide. \square

El cociente de rango $q(E, \mathcal{I})$ de un sistema de independencia puede considerarse como una medida del grado de estructura matroidal que exhibe el sistema de independencia, y como se establece en el Teorema 3.0.6 proporciona una cota sobre la solución aproximada encontrada por el algoritmo voraz en el problema de maximización asociado. Sin embargo, en la ecuación (18) el Algoritmo voraz no parece ofrecer una forma directa de calcular eficientemente su valor para un sistema de independencia dado. En lo que sigue, proporcionaremos una cota sobre el cociente de rango que puede obtenerse fácilmente, una vez que el sistema de independencia se ha definido en términos de matroides. La siguiente proposición es fácil de demostrar.

Proposición 3.0.9. Dados las matroides M_1, \dots, M_n sobre un conjunto común E , el conjunto (E, \mathcal{I}) donde

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \in \mathcal{I}_{M_i}, i = 1, \dots, n\}$$

es un sistema de independencia. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide definimos $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}$.

Llamaremos al sistema de independencia (E, \mathcal{I}) la intersección de las matroides M_1, \dots, M_n y escribiremos $M_1 \cap \dots \cap M_n$. Resulta que cualquier sistema de independencia es la intersección de un número finito de matroides.

Proposición 3.0.10. Si (E, \mathcal{I}) es un sistema de independencia, entonces existen matroides M_1, \dots, M_n en E tales que para cualquier $X \subseteq E$

$$X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow X \in \mathcal{I}_{M_1 \cap \dots \cap M_n}$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ la familia de circuitos de (E, \mathcal{I}) y para cada $C_i \in \mathcal{C}$ defina la familia

$$\mathcal{I}_{C_i} = \{X \subseteq E : C_i \not\subseteq X\}$$

Demostraremos que el sistema de conjuntos (E, \mathcal{I}_{C_i}) es una matroide para cada $C_i \in \mathcal{C}$. Los axiomas de independencia (I1) y (I2) se satisfacen claramente. Para (I3) considere cualquier $X, Y \in \mathcal{I}_{C_i}$ con $|X| > |Y|$, y suponga que para todo $x \in X - Y, C_i \subseteq Y \cup \{x\}$. Tenemos que $X - Y \subseteq C_i$. Si $|X - Y| \geq 2$ entonces $C_i \not\subseteq Y \cup \{x\}$ para todo $x \in X - Y$, por lo tanto, $X - Y = \{e\}$. Entonces $C_i \subseteq Y \cup \{e\} = X$, una contradicción. Por lo tanto, $M_i = (E, \mathcal{I}_{C_i})$ es una matroide para $i = 1, \dots, n$, y tenemos

$$X \in \mathcal{I}_{(M_1 \cap \dots \cap M_n)} \Leftrightarrow X \text{ no contiene ningún circuito de } \mathcal{C} \Leftrightarrow X \in \mathcal{I}.$$

□

Teorema 3.0.11. Sea (E, \mathcal{I}) un sistema de independencia. Si para cada $X \in \mathcal{I}$ y $e \in E - X$ el

conjunto $X \cup \{e\}$ contiene a lo sumo p circuitos, entonces

$$q(E, \mathcal{I}) \geq \frac{1}{p}$$

Demostración. Considere cualquier $X \subseteq E$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$. tenemos que demostrar que

$$\frac{|B_1|}{|B_2|} \geq \frac{1}{p}.$$

Sea $B_1 - B_2 = \{b_1, \dots, b_t\}$. El conjunto $K_1 = B_2 \cup \{e_1\}$ contiene como máximo p circuitos por suposición y cada circuito debe contener a $\{e_1\}$ y al menos un elemento de $B_2 - B_1$ ya que $(B_1 \cap B_2) \cup \{e_1\} \in \mathcal{I}$. Denotado por $X_1 \subseteq B_2 - B_1$ el conjunto que contiene un elemento de cada circuito, donde tenemos que $|X_1| \leq p$, ya que de lo contrario $B_2 \cup \{e_1\}$ puede contener más de p circuitos. Ahora sea $K_i = (K_{i-1} - X_{i-1}) \cup \{e_i\}$ y X_i se calculará de la misma manera, para $i = 1, \dots, t$.

Tendremos

$$\begin{aligned} |B_2 - B_1| &= \left| \bigcup_{i=1}^t X_i \right| \leq pt = p|B_1 - B_2| \Rightarrow \\ |B_2| - |B_1 \cap B_2| &= |B_2 - B_1| \leq p(|B_1| - |B_1 \cap B_2|) \Rightarrow \\ |B_2| &\leq p|B_1| + |B_1 \cap B_2|(1-p) \leq p|B_1| \Rightarrow \\ &(|B_1|/|B_2|) \geq (1/p). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.0.12. Consideremos el problema de emparejamiento bipartito de peso máximo, una instancia del que se habló en el Ejemplo 3.0.7 Se nos da un grafo bipartito $G(V_1 \cup V_2, E)$ donde

$V(G) = V_1 \cup V_2$, y una función de peso no negativa $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Cada conjunto de vértices define una partición en las aristas del grafo. Sea la partición de E definida por el conjunto de vértices V_1 sea la familia $\mathcal{S} = (S_v : v \in V_1)$ donde

$$S_v = \{e \in E(G) : e \text{ incidente a } v\}$$

mientras que dejemos que la partición definida por V_2 sea la familia $\mathcal{T} = (T_v : v \in V_2)$ donde

$$T_v = \{e \in E(G) : e \text{ incidente a } v\}$$

De ello se deduce que el sistema de independencia que describe la conexión de peso máximo en $G(V_1, V_2, E)$, es la intersección de las matroides transversales (E, \mathcal{S}) y (E, \mathcal{T}) . Por lo tanto, como se ilustra en el Ejemplo 3.0.7, el algoritmo voraz tendrá una relación de aproximación de $\frac{1}{2}$.

Referencias Bibliográficas

- Bernabe, J. M. (2006). *Ideales tóricos de subanillos de gráficas y sus circuitos* (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional. México D.F.
- Diestel, R. (2006). *Graph Theory*. Springer.
- Gary Gordon, J. M. (2012). *Matroids a Geometric Introduction*. Cambridge University Press.
- Mirsky, L. (1969). *Transversal theory and the study of abstract independence*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X69902236>
- Oxley, J. (1992). *Matroid Theory*. Oxford University Press.
- Oxley, J. (2014). *What is a matroid?* <https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf>
- Pitsoulis, L. S. (2014). *Topics in Matroid Theory*. Springer.
- Ron Larson, D. C. F. (2009). *Elementary Linear Algebra*. Publishing Company.
- Rosen, K. H. (2004). *Matemática discreta y sus aplicaciones*. Companies Inc.
- Sánchez, W. P. (2010). *Temas de representabilidad de matroides sobre campos finitos e infinitos* (Tesis de maestría). Universidad Nacional De Colombia. Bogota, Colombia.