SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE GRUPOS DE SIMETRÍA

RAÚL VILLAMIZAR NAVARRO

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2010

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE GRUPOS DE SIMETRÍA

AUTOR:
RAÚL VILLAMIZAR NAVARRO
Trabajo de grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas.

DIRECTOR:
EDILBERTO JOSÉ REYES
Magister en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2010

Agradecimientos

A Dios por ser quien ha estado a mi lado en todo momento dándome la fuerza, la sabiduría y la fortaleza necesaria para continuar luchando día tras día y seguir adelante rompiendo todas las barreras que se me presentan.

A mis padres, ya que gracias al su apoyo incondicional he conseguido alcanzar este gran logro académico.

A mis hermanos, que a pesar de la distancia siempre estuvieron atentos y dispuestos a colaborar en mi formación.

Al profesor Edilberto José Reyes, director de proyecto, quien con su orientación, apoyo y confianza fue posible desarrollar este trabajo de grado.

A mis compañeros y amigos más cercanos, esos que me han acompañado y con los cuales he contado con su apoyo desde que los conocí.

A todos quienes de una u otra forma me colaboraron en mi formación académica mil y mil gracias.

Índice general

RESUMEN

TÍTULO: SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE GRUPOS DE SIMETRÍA*

AUTOR: RAÚL VILLAMIZAR NAVARRO**

PALABRAS CLAVES: Grupos de Lie, Simetrías, Trasformaciones infinitesimales, Coordenadas canónicas, Ecuaciones diferenciales.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo de monografía ha querido estudiar con mayor profundidad el artículo titulado “Solving Differential Equations by Symmetry Groups” publicado en la revista de la sociedad Norteamericana de Matemáticas “The American Mathematical Monthly” por el estadounidense John Starrett en el año 2002.

En el artículo el autor nos muestra que a partir de los grupos de Lie se pueden encontrar simetrías dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; y estas simetrías inducen a cambios de variables permitiendo transformar la ecuación diferencial en una ecuación en cuadraturas y así encontrar fácilmente la solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

La monografía está dividida en cuatro capítulos, el primero hace un breve resumen sobre evolución de la teoría de grupos en las ecuaciones diferenciales y además presenta los conceptos, definiciones y teoremas básicos abordados a lo largo del escrito. El capítulo dos describe los grupos de transformaciones de Lie, las transformaciones infinitesimales, las funciones invariantes y las coordenadas canónicas. En el capítulo tres se hace un análisis a las ecuaciones diferenciales, y se muestra la forma de encontrar simetrías haciendo uso de los grupos de Lie y las coordenadas canónicas. El último capítulo se encarga de mostrar la solución y la ejemplificación de algunos métodos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden utilizando las simetrías de Lie.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Mg Edilberto José Reyes Gonzales.

ABSTRACT

TITLE: SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS SYMMETRY GROUPS*

AUTHOR: RAÚL VILLAMIZAR NAVARRO**

KEY WORDS: Lie groups, symmetries, infinitesimal transformations, canonical coordinates, differential equations.

DESCRIPTION

This paper work has required further study with the article titled “Solving Differential Equations by Symmetry Groups” published in the Journal of the American Mathematical Society “The American Mathematical Monthly” by the American John Starrett in 2002.

In the article the author shows that from the Lie groups symmetries can be found in ordinary differential equations of first order and these symmetries lead to changes in variables allowing to transform the differential equation into an equation in quadratures and so find easily solving the ordinary differential equation of first order.

The monograph is divided into four chapters, the first a brief overview of the evolution of group theory in differential equations and also introduces the concepts, definitions and basic theorems discussed throughout the paper. Chapter two describes the Lie groups of transformations, the infinitesimal transformations, the invariant functions and the canonical coordinates. In chapter three provides an analysis of differential equations and shows how to find symmetries using Lie groups and canonical coordinates. The last chapter is about showing the solution and the exemplification of some methods of ordinary differential equations of first order using Lie symmetries.

*Degree work.

**Faculty of Science. School of Mathematics. Director: Mg Edilberto José Reyes Gonzales.

Introducción

Resolver Ecuaciones Diferenciales es considerado uno de los problemas más importantes de la matemática aplicada y particularmente la física - matemática. La enorme importancia de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas, y especialmente sus aplicaciones, se debe principalmente al hecho de que la investigación de muchos problemas de ciencia y tecnología se reducen al lenguaje de las ecuaciones diferenciales.

Además sucede con frecuencia que las leyes físicas que gobiernan un fenómeno se escriben en forma de ecuaciones diferenciales, por lo que éstas, en sí, constituyen una expresión cuantitativa de dichas leyes.

Ahora bien, este trabajo pretende llamar la atención sobre la extensa teoría de los grupos de Lie en relación con las ecuaciones diferenciales, que hoy en día constituyen una de las ramas de la matemática con gran proyección desde el punto de vista investigativo.

El principal objetivo de Sophus Lie fue crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales mediante la teoría de grupos, de manera análoga a la teoría de Galois para ecuaciones algebraicas.

Lie observó que los métodos clásicos de "resolución por cuadraturas" de una ecuación diferencial comparten una característica esencial: la invariancia de la ecuación frente a un grupo de transformaciones que depende continuamente de un parámetro; en otras palabras, diríamos que, en realidad, "no hay una multiplicidad de recetas" para resolver ecuaciones diferenciales sino que es posible distinguir una muy general "receta única".

Así que en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se pueden identificar simetrías, las cuales inducen cambios de variables y al hacer la clasificación de la ecuación diferencial es posible hallar las soluciones de forma analítica.

Capítulo 1

Preliminares

En esta introducción se hace un breve comentario sobre el surgimiento de los grupos de Lie en la solución de ecuaciones diferenciales, y se presentan los conceptos, definiciones y teoremas básicos que se necesitan para desarrollar esta monografía.

1.1. La evolución de la teoría de grupos en las Ecuaciones Diferenciales

1.1.1. La noción de grupo de Lie

La noción de grupo de transformaciones ha acompañado de forma implícita a la geometría a lo largo de todo su desarrollo histórico. Las nociones de semejanza entre figuras, presente desde el mismo origen de la geometría, presupone de algún tipo de transformaciones del espacio que las contiene. De esta manera, en el lenguaje actual hablamos de grupo de las semejanzas, y dos figuras se dicen semejantes si están relacionadas por alguna de ellas. Sin embargo, el estudio de los grupos, como estructura algebraica, no se sistematizó sino hasta el siglo XIX.

El matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) lleva la teoría de grupos del algebra a la geometría analítica a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX. Para estos efectos Lie se apoya sobre la geometría analítica.

La noción es simple. En una variedad diferenciable[1] en la que existen infinitas transformaciones biyectivas, el conjunto de estas transformaciones es de forma natural un grupo que a su vez contiene infinidad de grupos. La intuición de Lie fue transportar la geometría desde el espacio original al grupo de sus transformaciones. En

[1]Definición 1.4.

muchos casos, los grupos de transformaciones a considerar son de nuevo variedades diferenciables. Es decir grupos de Lie.

Uno de los hechos matemáticos que hace de los grupos de Lie potentes herramientas para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es que son *generadas infinitesimalmente.* Esto significa que existen ciertas *transformaciones infinitesimales* del espacio que generan al grupo. Una transformación infinitesimal no es otra cosa que una ecuación diferencial de primer orden.

1.1.2. Grupos de Lie en Ecuaciones Diferenciales

Una de las principales ideas de Lie era mostrar que los distintos métodos para resolver ecuaciones diferenciales pueden ser clasificados a través del estudio del carácter invariante de dichas ecuaciones por un grupo continuo de transformaciones. Esta filosofía ya aparecía en los trabajos pioneros de Felix Klein[2] que llegó a definir la geometría como el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes bajo un grupo dado de trasformaciones. Matemáticos y físicos pronto reconocieron la profunda relación entre el trabajo de Lie en ecuaciones diferenciales y las propiedades de simetrías en distintos modelos, y utilizando sus ideas y las de Hamilton, Noether y otros, se propusieron estudiar detalladamente los posibles resultados e implicaciones que estas tenían.

1.2. Aspectos generales de la teoría de Ecuaciones Diferenciales mediante simetrías

Definición 1.1. *Una función $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto x_0 con $x_0 \in U$ cuando las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

existen, y además, para todo vector $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que $x_0 + v \in U$, tenemos

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \alpha_n + r(v)$$

donde $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$.

El término $r(v)$ es llamado "resto" y esta definido de la siguiente manera

$$f(x_0 + v) - f(x_0) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \alpha_i.$$

[2]Matemático y Físico alemán (1849-1925)

Definición 1.2. *Una función real $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, se dice que es de clase C^1 cuando las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

existen en cada punto $x_0 \in U$ y las n funciones definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$$

son continuas.

Más generalmente, decimos que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^k cuando f posee derivadas parciales en todos los puntos de U y las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) : U \to \mathbb{R}$$

son de clase C^{k-1} con $k \in \mathbb{N}$.

Por definición podemos decir que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^0 condo es continua. También diremos que f es de clase C^∞ cuando f es de clase C^k para todo $k \geq 0$.

Definición 1.3. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ es un espacio de Hausdorff, si para cada x y cada y en $\mathcal{X}$, con $x \neq y$, existen V y W vecindades de x y y respectivamente, de tal manera que $V \cap W = \emptyset$.*

Definición 1.4. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ de Hausdorff se llama* ***variedad topológica*** *de dimensión n, si para cada punto p de $\mathcal{X}$ existe una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.5. *Una* ***variedad diferenciable*** *es una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable de clase C^∞; es decir todas sus derivadas existen y todas son funciones continuas.*

Definición 1.6. *Un* ***Grupo de Lie*** *es un grupo G con estructura de variedad diferenciable C^∞ que se encuentra dotada de las operaciones, un producto*

$$\begin{array}{ccc} G \times G : & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

y una inversa

$$\begin{array}{ccc} G: & \longrightarrow & G \\ a & \mapsto & a^{-1} \end{array}$$

y ambas operaciones son diferenciables C^{∞}.

Ejemplo 1.1. $G = \mathbb{R}^n$ con la operación suma de vectores es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.2. $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con la operación multiplicación de números reales es un grupo de Lie.

Definición 1.7. *Un objeto se dice que es* ***simétrico*** *si se puede someter a ciertas operaciones y el objeto permanece invariante después de cada una de las operaciones. Cada una de las operaciones se llama* ***simetría del objeto***.

Definición 1.8. *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* U *es un abierto de* $\mathbb{R}^n$*, si la función* f *tiene n-ésima derivada en un punto* x_0*, se puede construir un polinomio* P_n *de n-ésimo grado tal que* $P_n(x_0) = f(x_0)$ *y* $P_n^{(k)}(x_0) = f_n^k(x_0)$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$*. De hecho, el polinomio*

$$P_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

posee la propiedad de que él y sus derivadas hasta el orden n coinciden con la función f *y sus derivadas hasta el orden n, en el punto especificado* x_0*. Este polinomio* P_n *se llama el n-ésimo* ***polinomio de Taylor***[3] *para* f *en* x_0.

Para el caso en que $x_0 = 0$*, el polinomio de Taylor de orden n se convierte en el* ***polinomio de Maclaurin***[4] *de orden n, el cual da aproximaciones en las vecindades de* $x = 0$*, y tiene como fórmula general*

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n.$$

Ejemplo 1.3. El polinomio de Taylor de grado n-ésimo para la función $f(x) = e^x$, en torno a $x = 0$ se escribe de la forma

$$P_n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

[3] Matemático británico (1685-1731)
[4] Matemático escocés (1698-1746)

De esta expresión podemos escribir una aproximación para e^x como

$$P(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Teorema 1.1. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una funcion que tiene derivadas parciales hasta el orden n, que son continuas en I y donde $f^{(n+1)}$ esta definida en todo (a, b). Si $x_0 \in I$, entonces para cualquier x en I y $x \neq x_0$, existe un punto c ente x y x_0 tal que*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demostración. Sean x_0 y x puntos dados, y sea J el intervalo cerrado de los puntos terminales x_0 y x. Si definimos la función F en J por

$$F(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}, \quad para \quad t \in J.$$

Entonces calculando su derivada en el punto t se tiene

$$F'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}.$$

Si se define otra función R en el intervalo J por

$$R(t) := F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0), \quad para \quad t \in J,$$

entonces $R(x_0) = R(x) = 0$. Luego aplicando el teorema de Rolle, existe un punto c en el intervalo J tal que

$$0 = R'(c) = F'(c) + (n + 1)\frac{(x - c)^n}{(x - x_0)^{n+1}}F(x_0).$$

De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - c)^n}F'(c) \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - c)^n}\frac{(x - c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

lo cual implica el resultado del enunciado del teorema.■

Definición 1.9. *Sea f una función que tiene derivadas de orden $(n+1)$ continua en un cierto intervalo que contenga a un punto a. Entonces de la fórmula*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

el término $\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *es llamado* ***resto de la fórmula de Taylor****.*

Definición 1.10. *La notación o (o-minúscula[5]).*

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un cierto intervalo que contiene el punto a. Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en el intervalo donde se encuentra a, la notación

$$f(x) = o[g(x)] \quad \textit{cuando} \quad x \to a$$

significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La expresión $f(x) = o[g(x)]$ se lee "$f(x)$ es de orden inferior a $g(x)$", y tiene por objeto dar a entender la idea de que para x proximo a a, $f(x)$ es mucho mas pequeño que $g(x)$.

Ejemplo 1.4. $f(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$ significa que $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$ cuando $x \to 0$.

Una igualdad de la forma $f(x) = h(x) + o[g(x)]$ significa que $f(x) - h(x) = o[g(x)]$ o, dicho de otro modo,$\dfrac{f(x)-h(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to a$.

Ejemplo 1.5. sea $\sin(x) = x + o(x)$, entonces $\frac{\sin(x)-x}{x} = \frac{\sin(x)}{x} - 1 \to 0$ cuando $x \to 0$.

Nota. La fórmula de Taylor puede expresarse con la notación-o de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-a)^n\big) \quad \textit{cuando} \quad x \to a,$$

[5]En 1909 Edmundo Landau (1877-1938) matemático alemán, introdujo una notación especial muy apropiada cuando se utiliza en conexión con la formula de Taylor.

siempre que la derivada $f^{(n-1)}$ sea continua en un cierto intervalo que contenga el punto a.

Definición 1.11. *Una **ecuación diferencial** (ED) es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocidas de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama **ecuación diferencial ordinaria** (EDO). Si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama **ecuación en derivadas parciales** (EDP).*

Ejemplo 1.6. La ecuación,

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

es una ecuación diferencial ordinaria; mientras que la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

es una ecuación en derivadas parciales.

Definición 1.12. *Decimos que una función $y = \varphi(x)$ definida en un intervalo I (es decir, $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) es **solución** de una ecuación diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad. (En otras palabras, si satisface la ED). Una ecuación diferencial se dice **resoluble o integrable por cuadraturas** si su solución se puede expresar mediante integrales.*

Definición 1.13. *Sea $\mathfrak{R}$ un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, y M y N dos funciones que son continuas en $\mathfrak{R}$. La expresión $Mdx + Ndy$ es una **diferencial exacta** si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x,y)$ continuamente diferenciable.*

*Una ecuación escrita de la forma $Mdx + Ndy = 0$ se dice que es **exacta** si la expresión del lado derecho es una diferencial exacta.*

Teorema 1.2. *Sean M y N funciones continuamente diferenciables en un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $Mdx + Ndy$ sea una diferencial exacta es que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración. Sean M y N funciones con derivadas parciales de primer orden continua en $\mathbb{R}^2$. Si la expresión $Mdx + Ndy$ es exacta, entonces existe una función $f(x, y)$ continuamente diferenciable en $\mathfrak{R}$ para la cual la ecuación

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

se satisface en $\mathfrak{R}$. Por lo tanto,

$$M(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

están en $\mathfrak{R}$. Luego, por hipótesis y por el teorema de Clairaut obtenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.\blacksquare$$

Definición 1.14. *Supongamos que la ecuación $Mdx+Ndy = 0$ no es exacta, esto es $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Si $\mu(x, y)$ es una función que hace que la ecuación $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ sea exacta, la función $\mu(x, y)$ es llamado un **factor integrante** de la ED0.* [6]

Teorema 1.3. *Sean $\xi(x, y, z), \eta(x, y, z)$ y $\zeta(x, y, z)$ funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^3$. Entonces una solución general de la ecuación*

$$\xi(x, y, z)\frac{\partial Z}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial Z}{\partial y} = \zeta(x, y, z)$$

se puede obtener en la forma

$$\varphi(u, v) = 0,$$

donde φ es una función arbitraria, y

$$u(x, y, z) = k, \quad y \quad u(x, y, z) = k,$$

constituyen una solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{\xi(x, y, z)} = \frac{dy}{\eta(x, y, z)} = \frac{dz}{\zeta(x, y, z)}. \tag{1.1}$$

Demostración. La diferencial total de la ecuación $u(x, y, z) = k$ esta dada por

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0. \tag{1.2}$$

[6]Asumimos que $\mu \neq 0$.

De (1.1) tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y,z)}{\xi(x,y,z)} \quad y \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\zeta(x,y,z)}{\xi(x,y,z)}. \tag{1.3}$$

Luego si $u(x,y,z)$ es solución de (1.1), entonces al sustituir (1.3) en (1.2) obtenemos

$$\xi(x,y,z)u_x + \eta(x,y,z)u_y + \zeta(x,y,z)u_z = 0. \tag{1.4}$$

Si diferenciamos $v(x,y,z)$ de forma análoga a lo anterior tenemos

$$\xi(x,y,z)v_x + \eta(x,y,z)v_y + \zeta(x,y,z)v_z = 0. \tag{1.5}$$

Ahora resolviendo para $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$ y $\zeta(x,y,z)$ el sistema de ecuaciones (1.4) y (1.5), se obtiene

$$\frac{\xi(x,y,z)\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\eta(x,y,z)\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \frac{\zeta(x,y,z)\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \tag{1.6}$$

Por otro lado, si diferenciamos $\varphi(u,v) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\big(u_x + u_z z_x\big) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\big(v_x + v_z z_x\big) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\big(u_y + u_z z_y\big) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\big(v_y + v_z z_y\big) = 0.$$

Eliminando $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ de estas ecuaciones resulta que

$$z_x\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} + z_y\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{1.7}$$

Luego de la ecuación (1.6) tenemos que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \frac{\xi(x,y,z)}{\eta(x,y,z)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\zeta(x,y,z)}{\eta(x,y,z)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

Finalmente si sustituimos las dos ecuaciones anteriores en (1.7), multiplicado por $\eta(x,y,z)$ y dividiendo por $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, resulta

$$\xi(x,y,z)z_x + \eta(x,y,z)z_y = \zeta(x,y,z),$$

lo cual demuestra que $\varphi(u,v) = 0$ es solución de

$$\xi(x,y,z)\frac{\partial Z}{\partial x} + \eta(x,y,z)\frac{\partial Z}{\partial y} = \zeta(x,y,z),$$

bajo la hipótesis dada.■

Capítulo 2

Grupos de Transformaciones de Lie

2.1. Grupo de transformaciones

Definición 2.1. *Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con* $\mathbf{x}= (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}$, $\mathbf{x}^*= (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathcal{R}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *El conjunto de transformaciones*

$$\begin{array}{rccc} P_\lambda: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda) = \mathbf{x}^*, \end{array}$$

con la ley de composición aditiva de parámetros λ_1 y λ_2, denotada por $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ forman un ***grupo de transformaciones*** *sobre $\mathcal{D}$, si se satisface los siguientes axiomas.*

1. *P_λ es uno-uno y sobre.*
2. $P_{\lambda_2} \circ P_{\lambda_1} = P_{\lambda_2+\lambda_1}$, *es decir,* $\mathbf{X}\big(\mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda_1),\lambda_2\big) = \mathbf{X}\big(\mathbf{x};\phi(\lambda_2+\lambda_1)\big)$.
3. $P_0 = I$, *es decir,* $\mathbf{X}(\mathbf{x};0) = \mathbf{x}$.
4. *Para cada λ_1 existe un único $\lambda_2 = -\lambda_1$ tal que* $P_{\lambda_2} \circ P_{\lambda_1} = P_{\lambda_1+\lambda_2} = P_0 = I$, *es decir,* $\mathbf{X}\big(\mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda_1),\lambda_2\big) = \mathbf{X}(\mathbf{x};0) = \mathbf{x}$.

Definición 2.2. *Se llama* ***grupo de transformaciones de Lie de un parámetro****, a aquel grupo que además de satisfacer los axiomas de la definición anterior, cumple con los siguientes axiomas:*

1. *λ es un parámetro que varía continuamente.*

2. **X** *es infinitamente diferenciable con respecto a "x" y analítica con respecto a λ.*

3. *$\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ es una función analítica.*

Ejemplo 2.1. *Grupo de traslaciones en el plano.*

Consideremos el grupo de traslaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x + \lambda, \\ y^* &= y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces podemos definir la trasformación P_λ la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccl} P_\lambda : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^*, y^*) = (x+\lambda, y) \end{array}$$

Aquí vemos que $\phi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ ya que al iterar la operación se obtiene

$$\begin{aligned} x^{**} &= x^* + \lambda_2 = x + \lambda_1 + \lambda_2 = x + (\lambda_1 + \lambda_2), \\ y^{**} &= y. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. Dado el grupo

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{1-\lambda x}, \\ y^* &= \frac{y}{1-\lambda x}, \end{aligned}$$

definiendo la transformación P_λ tenemos:

$$\begin{array}{rccl} P_\lambda : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^*, y^*) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x}\right) \end{array}$$

donde

$$P_\lambda = \begin{cases} \lambda < \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ \lambda > \frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Al iterar la operación se obtiene

$$x^{**} = \frac{x^*}{1-\lambda_2 x^*} = \frac{\frac{x}{1-\lambda_1 x}}{1-\lambda_2\left(\frac{x}{1-\lambda_1 x}\right)} = \frac{x}{1-(\lambda_1+\lambda_2)x},$$

$$y^{**} = \frac{y^*}{1-\lambda_2 x^*} = \frac{\frac{y}{1-\lambda_1 x}}{1-\lambda_2\left(\frac{x}{1-\lambda_1 x}\right)} = \frac{y}{1-(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$

Por lo tanto, la operación entre parámetros es la adición; es decir, $\phi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1+\lambda_2$, teniendo de esta manera un grupo de Lie analítico.

2.2. Transformaciones Infinitesimales

Sean $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, λ en $\mathbb{R}$ y

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda),$$

un ***grupo de Lie de un parámetro***, tal que $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ para $\lambda = 0$ y para el que P_λ designa la operación entre valores del parámetro.

Luego por Definición 2.2 podemos expandir el grupo de Lie de un parámetro al rededor de $\lambda = 0$, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \lambda\left(\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right) + \frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right) + \ldots = \mathbf{x} + \lambda\left(\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right) + o(\lambda^2),$$

para lo cual definimos $\xi(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}$.

Por lo tanto, la transformación $\mathbf{x} + \lambda\xi(\mathbf{x})$ es llamada transformación infinitesimal del grupo de transformaciones de Lie, y las componentes de $\xi(\mathbf{x})$ son llamados ***infinitesimales*** del grupo de Lie de un parámetro.

Sobre $\mathbb{R}^2$, estas ecuaciones son escritas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= X(x,y;\lambda) = x + \lambda\xi(x,y) + o(\lambda^2),\\ \mathbf{y}^* &= Y(x,y;\lambda) = y + \lambda\eta(x,y) + o(\lambda^2).\end{aligned}$$

2.2.1. Generadores Infinitesimales

Definición 2.3. *El generador infinitesimal del grupo de transformaciones de Lie de un parámetro* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$ *esta dado por el operador*

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde ∇ *es el operador gradiente*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Para cualquier función diferenciable $F(\mathbf{x}) = F(x, y)$*, tenemos*

$$\mathcal{V}F(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Claramente observamos que $\mathcal{V}\mathbf{x} = \xi(\mathbf{x})$*.*

Sobre $\mathbb{R}^2$ el generador infinitesimal es expresado de la siguiente manera

$$\mathcal{V} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad con \quad \xi(x, y) = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda} \right) \bigg|_{\lambda=0} \quad y \quad \eta(x, y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) \bigg|_{\lambda=0}.$$

El siguiente teorema muestra el uso del generador infinitesimal $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$, que conduce a un algoritmo para encontrar la solución explícita del problema de valor inicial dado por

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\lambda} = \xi(\mathbf{x}^*),$$

con

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \qquad \text{para} \qquad \lambda = 0$$

Teorema 2.1. *El grupo de transformaciones de Lie de un parámetro* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$ *es equivalente a*

$$\mathbf{x}^* = e^{\lambda \mathcal{V}} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \lambda \mathcal{V} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathcal{V}^2 \mathbf{x} + \ldots = \left[1 + \lambda \mathcal{V} + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathcal{V}^2 + \ldots \right] \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{V}^k \mathbf{x},$$

donde el operador $\mathcal{V} = \mathrm{X}(\mathbf{x})$ *esta definido por* $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ *y el operador* $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^k(\mathbf{x})$ *esta dado por* $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}\mathcal{V}^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$. *En particular,* $\mathcal{V}^k F(\mathbf{x})$ *es la función obtenida por la aplicación del operador* $\mathcal{V}$ *a la función* $\mathcal{V}^{k-1} F(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \ldots,$ *con* $\mathcal{V}^0 F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$.

Demostración. Sean

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*}.$$

Si expandimos el grupo de transformaciones de Lie $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$ sobre $\lambda = 0$, tenemos

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\left. \frac{\partial^k \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\left. \frac{d^k \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)}{d \lambda^k} \right|_{\lambda=0} \right).$$

Para cualquier función diferenciable $F(\mathbf{x})$, obtenemos

$$\frac{d}{d\lambda} F(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{d x_i^*}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} = \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) F(\mathbf{x}^*).$$

Por lo tanto se deduce que

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\lambda} = \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^*,$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^*}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\mathbf{x}^*}{d\lambda} \right) = \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^* = \mathcal{V}^2(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^*,$$

y en general,

$$\frac{d^k \mathbf{x}^*}{d\lambda^k} = \mathcal{V}^k(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^*, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Consecuentemente, tenemos

$$\left.\frac{d^k\mathbf{x}^*}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=0} = \mathcal{V}^k(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

lo que lleva a

$$\mathbf{x}^* = e^{\lambda\mathcal{V}}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \lambda\mathcal{V}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2\mathbf{x} + ... = \left[1 + \lambda\mathcal{V} + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2 + ...\right]\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^k\mathbf{x}.\blacksquare$$

Corolario 2.1. *Si $F(\mathbf{x})$ es infinitamente diferenciable, entonces para el grupo de transformaciones de Lie $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)$ con generador infinitesimal $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$, tenemos*

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\lambda\mathcal{V}}\mathbf{x}) = e^{\lambda\mathcal{V}}F(\mathbf{x}).$$

Demostración. Sea

$$F(e^{\lambda\mathcal{V}}\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(\left.\frac{d^kF(\mathbf{x}^*)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=0}\right).$$

A partir de la relación

$$\frac{d}{d\lambda}F(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*}\frac{dx_i^*}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(\mathbf{x}^*)\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} = \mathcal{V}(\mathbf{x}^*)F(\mathbf{x}^*),$$

vemos que

$$\frac{d^k}{d\lambda}F(\mathbf{x}^*) = \mathcal{V}^k(\mathbf{x}^*)F(\mathbf{x}^*).$$

Así,

$$\left.\frac{d^k}{d\lambda}F(\mathbf{x}^*)\right|_{\lambda=0} = \mathcal{V}^k(\mathbf{x})F(\mathbf{x}).$$

De lo cual se concluye que

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\lambda\mathcal{V}}\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}(\mathbf{x})\right)F(\mathbf{x}) = e^{\lambda\mathcal{V}}F(\mathbf{x}).\blacksquare$$

Ejemplo 2.3. Consideremos el grupo de rotaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\lambda + y\sin\lambda, \\ y^* &= -x\sin\lambda + y\cos\lambda. \end{aligned}$$

En éste grupo el infinitesimal esta dado por

$$\xi(\mathbf{x}) = \Big(\xi_1(x,y), \xi_2(x,y)\Big) = \left(\frac{dx^*}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}, \frac{dy^*}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right) = (y, -x).$$

Por lo tanto, el generador infinitesimal se define como

$$\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\xi_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x.$$

Ahora, aplicando el Teorema 2.1 encontramos que la serie de Lie correspondiente al generador infinitesimal

$$\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x$$

esta dada por

$$(x^*, y^*) = \big(e^{\lambda\mathcal{V}}x, e^{\lambda\mathcal{V}}y\big),$$

donde

$$\mathcal{V}x = y, \quad \mathcal{V}^2x = \mathcal{V}y = -x,$$

y en general

$$\mathcal{V}^{4n}x = x, \quad \mathcal{V}^{4n-1}x = -y, \quad \mathcal{V}^{4n-2}x = -x, \quad \mathcal{V}^{4n-3}x = y, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{V}^{4n}y = y, \quad \mathcal{V}^{4n-1}y = x, \quad \mathcal{V}^{4n-2}y = -y, \quad \mathcal{V}^{4n-3}y = -x, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} x^* = e^{\lambda\mathcal{V}}x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^k x \\ &= x + \frac{\lambda}{1!}y - \frac{\lambda^2}{2!}x - \frac{\lambda^3}{3!}y + \frac{\lambda^4}{4!}x + \frac{\lambda^5}{4!}y + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)x + \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \ldots\right)y \\ &= x\cos\lambda + y\sin\lambda. \end{aligned}$$

Similarmente, para y^* tenemos

$$\begin{aligned}
y^* = e^{\lambda\mathcal{V}}y &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^k y \\
&= y - \frac{\lambda}{1!}x - \frac{\lambda^2}{2!}y + \frac{\lambda^3}{3!}x + \frac{\lambda^4}{4!}y - \frac{\lambda^5}{4!}x + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)y - \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \ldots\right)x \\
&= y\cos\lambda - x\sin\lambda.
\end{aligned}$$

2.2.2. Funciones Invariantes

Definición 2.4. *Una función $F(\mathbf{x})$ infinitamente diferenciable, es una función invariante del grupo de transformaciones de Lie $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)$ si y solo si, para cualquier grupo de transformaciones $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)$ se cumple que $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x})$.*

Teorema 2.2. *$F(\mathbf{x})$ es invariante bajo el grupo de transformaciones de Lie $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)$ si y solo si $\mathcal{V}F(\mathbf{x}) = 0$.*

Demostración. Por el Corolario 2.1, se tiene que

$$F(\mathbf{x}^*) = e^{\lambda\mathcal{V}}F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^k F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots,$$

y por hipótesis tenemos que $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x})$, entonces

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}^*) &= F(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots = F(\mathbf{x}) \\
&\Leftrightarrow \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) \\
&\Leftrightarrow F(\mathbf{x})\left[\lambda\mathcal{V} + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3\mathcal{V}^3 + \ldots\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow F(\mathbf{x})\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^k\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}^kF(\mathbf{x}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}F(\mathbf{x}) = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Para un grupo de transformaciones de Lie de un parámetro*

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda),$$

se cumple la identidad

$$F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + \lambda$$

si y solo si, $\mathcal{V}F(\mathbf{x}) = 1$.

Demostración. Como

$$F(\mathbf{x}^*) = e^{\lambda\mathcal{V}}F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathcal{V}^kF(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots$$

y por hipótesis tenemos que $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}^*) &= F(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots = F(\mathbf{x}) + \lambda \\
&\Leftrightarrow \lambda\mathcal{V}F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{V}^2F(\mathbf{x}) + \ldots = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) + \lambda \\
&\Leftrightarrow \lambda F(\mathbf{x})\left[\mathcal{V} + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{V}^2 + \frac{1}{3!}\lambda^2\mathcal{V}^3 + \ldots\right] = \lambda \\
&\Leftrightarrow F(\mathbf{x})\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!}\mathcal{V}^{k-1}\right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}^{k-1}F(\mathbf{x}) = 1, \qquad k = 2, 3, \ldots \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}F(\mathbf{x}) = 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2.3. Coordenadas Canónicas

Al hacer un cambio apropiado de coordenadas

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$$

para el grupo de transformaciones de Lie de un parámetro $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\lambda)$, el generador infinitesimal $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$ con respecto a la coordenada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se convierte en el generador infinitesimal $\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}$ con respecto a la coordenada $\mathbf{y} = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$. Entonces es necesario que $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{y})$ a fin de tener el mismo grupo de acción.

El infinitesimal con respecto a la coordenada esta dado por

$$\eta(\mathbf{y}) = \Big(\eta_1(\mathbf{y}), \eta_2(\mathbf{y}), \ldots, \eta_n(\mathbf{y})\Big) = \mathcal{V}(\mathbf{y})\mathbf{y}.$$

Al usar la regla de la cadena, tenemos

$$\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = \mathcal{V}(\mathbf{y}).$$

Por tanto, a fin de tener $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{y})$, es necesario que

$$\eta_i(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathrm{Y} y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 2.4. *Con respecto a la coordenada* $\mathbf{y} = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$*, el grupo de transformaciones de Lie de un parámetro* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$ *se convierte en*

$$\mathbf{y}^* = e^{\lambda \mathcal{V}(\mathbf{y})} \mathbf{y}.$$

Demostración. De la ecuaciones

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\lambda \mathcal{V}(\mathbf{x})} \mathbf{x}) = e^{\lambda \mathcal{V}(\mathbf{x})} F(\mathbf{x})$$

y

$$\mathbf{y} = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$$

obtenemos

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{Y}(\mathbf{x}^*) = e^{\lambda \mathcal{V}(\mathbf{x})} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = e^{\lambda \mathcal{V}(\mathbf{y})} \mathbf{y}. \blacksquare$$

Teorema 2.5. *Para todo grupo de transformaciones de de Lie de un parámetro* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$*, existe un conjunto de coordenadas canónicas* $\mathbf{y} = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$ *tal que las ecuaciones del grupo son equivalente a*

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ y_n^* &= y_n + \lambda. \end{aligned}$$

Demostración. Por Teorema 2.2 tenemos

$$y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x})$$

si y solo si

$$\mathcal{V}y_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Por lo tanto, $y_i(\mathbf{x})$ esta dada para cualquier solución particular $r(\mathbf{x})$ de la ecuación diferencial parcial no homogénea de primer orden

$$\mathcal{V}r(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_n} = 0,$$

de la cual resulta el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx_1}{\xi_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{\xi_2(\mathbf{x})} = \frac{dx_3}{\xi(\mathbf{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n(\mathbf{x})},$$

la cual posee $n-1$ soluciones, satisfaciendo la ecuación $y_i^* = y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Por el Teorema 2.3 se deduce que

$$y_n^* = y_n(\mathbf{x}^*) = y_n(\mathbf{x}) + \lambda.$$

si y solo si

$$\mathcal{V}y_n(\mathbf{x}) = 1.$$

Por lo tanto, $y_n(\mathbf{x})$ esta dada para cualquier solución particular $s(x)$ de la ecuación diferencial parcial no homogénea de primer orden

$$\mathcal{V}r(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial r}{\partial x_n} = 1.$$

Al resolver esta ecuación por el método de las características satisface la ecuación del grupo $y_n^* = y_n + \lambda$.$\blacksquare$

Teorema 2.6. *En términos de cualquier conjunto de coordenadas canónicas* $\mathbf{y} = \Big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})\Big)$*, el generador infinitesimal del grupo de trasformaciones de Lie de un parámetro* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \lambda)$ *se convierte en*

$$\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Demostración. Como $\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}$. Entonces en términos de coordenadas canónicas, para

$\mathcal{V}y_i(\mathbf{x}) = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad$ y $\quad \mathcal{V}y_n(\mathbf{x}) = 1 \quad$ se deduce que

$$\begin{aligned} \eta_i(\mathbf{y}) &= \mathcal{V}y_i = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \eta_n(\mathbf{y}) &= \mathcal{V}y_n = 1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \dfrac{\partial}{\partial y_n}$.■

Ejemplo 2.4. Consideremos el grupo

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\lambda}x, \\ y^* &= e^{2\lambda}y. \end{aligned}$$

El generador infinitesimal esta dado por $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Así que la coordenada canónica $r(x, y)$ satisface

$$\mathcal{V}r = x\frac{\partial r}{\partial x} + 2y\frac{\partial r}{\partial y} = 0,$$

resultando la ecuación característica $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y}$, que al solucionarla nos da la solución general

$$r(x, y) = \frac{y}{x^2} = C,$$

la cual satisface la igualdad

$$r(x^*, y^*) = \frac{y^*}{x^{*2}} = \frac{e^{2\lambda}y}{(e^{\lambda}x)^2} = \frac{y}{x^2} = r(x, y).$$

Por otro lado, la coordenada canónica $s(x, y)$ satisface

$$\mathcal{V}s = x\frac{\partial s}{\partial x} + 2y\frac{\partial s}{\partial y} = 1,$$

resultándonos la ecuación característica $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} = ds$; y solucionando $\dfrac{dx}{x} = ds$ obtenemos,

$$s(x, y) = \ln(x).$$

Verificándose

$$r(x^*, y^*) = \ln(x^*) = \ln(e^{\lambda}x) = \ln(x) + ln(e^{\lambda}) = \ln(x) + \lambda.$$

Por lo tanto, el grupo

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\lambda}x, \\ y^* &= e^{2\lambda}y, \end{aligned}$$

tiene coordenadas canónicas $\Big(r(x,y), s(x,y)\Big) = \Big(\frac{y}{x^2}, \ln(x)\Big)$.

Ejemplo 2.5. Consideremos el grupo de rotaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\lambda - y\sin\lambda, \\ y^* &= x\sin\lambda + y\cos\lambda. \end{aligned}$$

El generador infinitesimal para este grupo esta dado por $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Por tanto, la coordenada canónica $r(x,y)$ satisface

$$\mathcal{V}r = x\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

de la cual obtenemos la ecuación característica $\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dx}{-y}$, cuya solución puede escribirse como

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Esta solución verifica

$$\begin{aligned} r(x^*,y^*) = \sqrt{x^{*2}+y^{*2}} &= \sqrt{x^2\cos^2\lambda + x^2\sin^2\lambda + y^2\sin^2\lambda + y^2\cos^2\lambda} \\ &= \sqrt{x^2(\sin^2\lambda+\cos^2\lambda) + y^2(\sin^2\lambda+\cos^2\lambda)} = r(x,y). \end{aligned}$$

Para encontrar la segunda coordenada $s(x,y)$ consideramos

$$\mathcal{V}s = x\frac{\partial s}{\partial y} - y\frac{\partial s}{\partial x} = 1,$$

de la cual resulta la ecuación característica $\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dx}{-y} = ds$. Entonces una solución particular para la coordenada $s(x,y)$ estaría dada al solucionar $\dfrac{dy}{x} = ds$ y sería

$$s(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Por lo tanto, el grupos de rotaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\lambda - y\sin\lambda, \\ y^* &= x\sin\lambda + y\cos\lambda, \end{aligned}$$

tiene como coordenadas canónicas $\big(r(x,y), s(x,y)\big) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$.

Capítulo 3

Análisis de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante grupos de Lie

3.1. Simetrías de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer Orden.

Definición 3.1. *Los puntos de simetrías del grupo de Lie de un parámetro para las ecuaciones diferenciales ordinarias son de la forma*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = X(x, y; \lambda) &= x + \lambda\xi(x, y) + o(\lambda^2) \\ \mathbf{y}^* = Y(x, y; \lambda) &= y + \lambda\eta(x, y) + o(\lambda^2). \end{aligned}$$

Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = w(x, y),$$

dotada de la condición de simetría

$$\frac{dy^*}{dx^*} = w(x^*, y^*),$$

y y como función de x de las curvas solución, podemos prolongar la condición de simetría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{dy^*}{dx^*} &= \frac{d\big[Y(x,y;\lambda)\big]}{d\big[X(x,y;\lambda)\big]} = \frac{d\big[y+\lambda\eta(x,y)+o(\lambda^2)\big]}{d\big[x+\lambda\xi(x,y)+o(\lambda^2)\big]}\\
&= \frac{dy+\lambda\Big[\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy\Big]+o(\lambda^2)}{dx+\lambda\Big[\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy\Big]+o(\lambda^2)}\\
&= \frac{\frac{dy}{dx}+\lambda\Big[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{dy}{dx}+o(\lambda^2)\Big]}{1+\lambda\Big[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+o(\lambda^2)\Big]}\\
&= \frac{w(x,y)+\lambda\Big[\eta_x+w(x,y)\eta_y\Big]+o(\lambda^2)}{1+\lambda\Big[\xi_x+w(x,y)\xi_y\Big]+o(\lambda^2)}.
\end{aligned}$$

Pero como

$$\frac{w(x,y)+\lambda\Big[\eta_x+w(x,y)\eta_y\Big]+o(\lambda^2)}{1+\lambda\Big[\xi_x+w(x,y)\xi_y\Big]+o(\lambda^2)} = w(x^*,y^*),$$

al expandir el lado derecho de la ecuación anterior en una serie de Taylor, al rededor de $\lambda = 0$ obtenemos,

$$\frac{w(x,y)+\lambda\Big[\eta_x+w(x,y)\eta_y\Big]+o(\lambda^2)}{1+\lambda\Big[\xi_x+w(x,y)\xi_y\Big]+o(\lambda^2)} = w(x,y)+\lambda\Big[w_x(x,y)\xi+w_y(x,y)\eta\Big]+o(\lambda^2)$$

que al simplificarla nos da como resultado la EDP de primer orden

$$\eta_x + w(\eta_y - \xi_x) - w^2\xi_y - w_x\xi - w_y\eta = 0,$$

la cual es llamada ***condición de simetría linealizada*** para el grupo de trasformaciones de Lie, en la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

3.1.1. ¿Cómo encontrar las soluciones de la condición de simetría linealizada del grupo de transformaciones de Lie?

La ecuación en derivadas parciales

$$\eta_x + w(\eta_y - \xi_x) - w^2\xi_y - w_x\xi - w_y\eta = 0,$$

siempre tiene la solución

$$\eta(x,y) = \xi(x,y)w(x,y).$$

En efecto,

$$(\xi_x w + \xi w_x) + [(\xi_x w + \xi w_y)]w - \xi_y w^2 - \xi w_x - \xi w w_y = 0.$$

Por esta razón la expresión $\eta(x,y) = \xi(x,y)w(x,y)$ es llamada ***solución trivial del grupo de Lie de un parámetro.***

Las soluciones ***no triviales***[7] de la condición de simetría linealizada del grupo de transformaciones de Lie son encontradas hallando funciones $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ de modo que satisfagan la ecuación diferencial parcial de primer orden.

3.1.2. Coordenadas Canónicas para resolver EDO de primer Orden

Dado cualquier grupo de transformaciones de Lie de un parámetro con puntos de simetría

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\lambda) = x + \lambda\xi(x,y) + o(\lambda^2) \\ y^* &= Y(x,y;\lambda) = y + \lambda\eta(x,y) + o(\lambda^2), \end{aligned}$$

existen coordenadas canónicas $(r,s) = \big(r(x,y), s(x,y)\big)$ de modo que los puntos de simetría se convierten en el grupo de transformaciones

$$\begin{aligned} r^* &= r \\ s^* &= s + \lambda, \end{aligned}$$

en donde éstas coordenadas pueden encontrase al solucionar las ecuaciones en derivadas parciales

$$\mathcal{V}r = r_x\xi + r_y\eta = 0$$
$$\mathcal{V}s = s_x\xi + s_y\eta = 1.$$

Nota: Si $\xi(x,y) = 0$ o $\eta(x,y) = 0$ entonces podemos resolver el anterior sistema de EDP directamente para obtener $(r,s) = \left(x, \int \frac{dy}{\eta}\right)$ o $(r,s) = \left(y, \int \frac{dy}{\xi}\right)$, de lo contrario las EDP se resuelven por el método de las características.

Definición 3.2. *En términos de coordenadas canónicas una ecuación diferencial ordinaria de primer orden* $\dfrac{dy}{dx} = w(x,y)$ *admite la simetría*

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + w(x,y)s_y}{r_x + w(x,y)r_y},$$

[7]Para encontrar estas soluciones no hay un método estándar, por lo tanto es aconsejable buscar polinomios sencillos de una sola variable, y hacer las respectivas pruebas a mano. Otra forma más agradable y rápida es utilizar algún programa computacional.

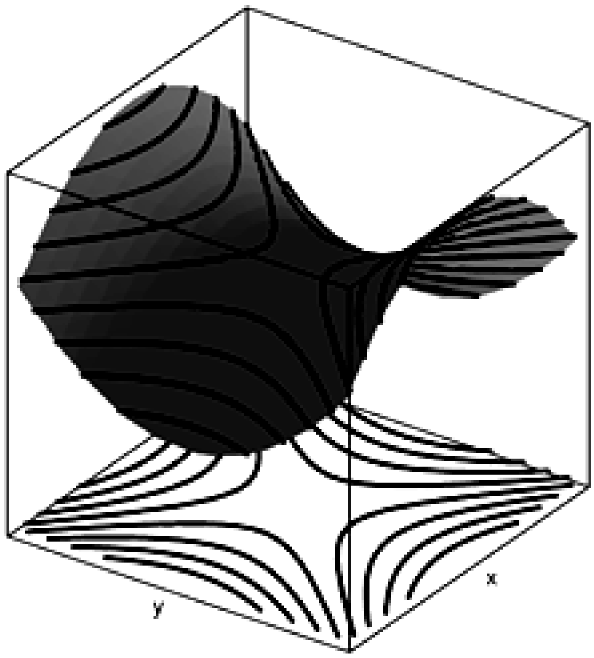

Figura 3.1: Soluciones de las EDP sobre el plano (x, y).

la cual se conoce como ***condición de simetría no lineal en coordenadas canónicas.***

3.1.3. Factor integrante de una EDO de primer orden

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = w(x, y)$ esta dada por la familia de curvas $t(x, y) = C$, con C constante. Entonces

$$\frac{dt}{dx} = t_x + t_y y' = 0.$$

Por lo tanto,

$$t_x + t_y w(x, y) = 0,$$

se encuentra sujeta para todas las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria.

Ahora, si suponemos que $\dfrac{dy}{dx} = w(x, y)$ admite puntos de simetría del grupo de transformaciones de Lie, (Definición 3.1) los cuales dejan invariante la familia de curvas solución $\dfrac{dy}{dx} = w(x, y)$, entonces se satisface

$$\mathcal{V}t = \xi(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 1 \quad con \quad \eta \neq \xi w.$$

Ahora despejando t_x de $t_x + t_y w(x,y) = 0$ y sustituyendo en $\mathcal{V}t = \xi(x,y)\dfrac{\partial t}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial t}{\partial y} = 1$ tenemos:

$$t_y = \frac{1}{\eta - \xi w},$$

y por tanto

$$t_x = -\frac{w}{\eta - \xi w}.$$

Finalmente sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en $\frac{dt}{dx} = t_x + t_y y' = 0$ se tiene que

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\eta - \xi w}(y' - w).$$

De este modo se define $\frac{1}{\eta - \xi w} = \mu(x,y)$, donde $\mu(x,y)$ es llamado ***factor de integración*** de la ecuación diferencial ordinaria.

Capítulo 4

Solución de algunas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden mediante Simetrías

4.1. Algoritmo y Ejemplos de algunas EDO de primer orden

4.1.1. Algoritmo para resolver EDO de primer orden

Para encontrar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden haciendo uso de la simetría de Lie se sigue el siguiente algoritmo.

1. Hallar las simetría de Lie utilizando la condición de simetría linealizada
$$\eta_x + w(\eta_y - \xi_x) - w^2\xi_y - w_x\xi - w_y\eta = 0.$$
2. Utilizar las soluciones de la condición linealizada de la simetría para encontrar un sistema de coordenadas canónicas en que las soluciones dependan de solo una de las variables. Para ello, se integra las ecuaciones características $\dfrac{dx}{\xi} = \dfrac{dy}{\eta}$ y $\dfrac{dx}{\xi} = \dfrac{dy}{\eta} = ds$.
3. Sustituir las coordenadas canónicas en la condición de simetría no lineal dada por
$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + w(x, y)s_y}{r_x + w(x, y)r_y},$$
y resolver la Ecuación Diferencial en el sistema de coordenadas canónicas.

4. Expresar la solución en las coordenadas originales.

4.1.2. Ecuaciones en cuadraturas

Decimos que una ecuación diferencial está en forma de cuadraturas cuando sucede alguna de las siguientes situaciones.

1. La EDO depende sólo de x; es decir,

$$\frac{dy}{dx} = F(x).$$

La simetría de ésta ecuación esta dada por

$$\eta_x + F(x)(\eta_y - \xi_x) - F(x)^2\xi_y - F'(x)\xi = 0,$$

cuya solución es

$$\xi = 0 \quad \eta = 1.$$

2. La EDO depende solo de $y(x)$; es decir,

$$\frac{dy}{dx} = F(y(x)).$$

La simetría de ésta ecuación esta dada por

$$\eta_x + F(y(x))(\eta_y - \xi_x) - F(y(x))^2\xi_y - F_y(x)\eta = 0,$$

cuya solución es

$$\xi = 1 \quad \eta = 0.$$

Ejemplo 4.1. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Si sustituimos la ecuación diferencial en la condición de simetría linealizada tenemos

$$\eta_x + y^2(\eta_y - \xi_x) - y^4\xi_y - 2y(x)\xi = 0,$$

y pot tanto

$$\xi = 1, \quad \eta = 0.$$

Ahora hallando el sistema de coordenadas canónica con la condición de simetría linealizada obtenemos

$$\Big(r(x,y), s(x,y)\Big) = \left(y, \int \frac{dx}{\xi}\right) = (y,x).$$

Luego, sustituyendo estas coordenadas canónicas en la condición de simetría no lineal se tiene

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + w(x,y)s_y}{r_x + w(x,y)r_y} = \frac{1+0}{o+y^2(1)} = \frac{1}{y^2}.$$

Expresando y^2 en términos de r o s nos resulta que $\dfrac{ds}{dr} = \dfrac{1}{r^2}$, e integrando tenemos $s = 2Lnr + C$, o lo que es lo mismo $r = Ce^{\frac{s}{2}}$.

Por último expresando la solución en las coordenadas originales se obtiene $y = Ce^{\frac{x}{2}}$ que fácilmente puede comprobarse que es una solución general de la EDO dada inicialmente.

4.1.3. Ecuaciones en variables separables

Una ecuación diferencial es separable si se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

En esta ocasión al método de Lie nos lleva a obtener la simetría

$$\eta_x + f(x)g(y)(\eta_y - \xi_x) - f(x)^2 g(y)^2 \xi_y - f'(x)g(y)\xi - f(x)g'(y)\eta = 0,$$

la cual posee soluciones tales como

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 & \eta &= g(y),\\
\xi &= \frac{1}{f(x)} & \eta &= 0,\\
\xi &= \frac{1}{f(x)} & \eta &= g(y),\\
\xi &= 0 & \eta &= e^{-\int f(x)dx}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x)y,$$

la condición de simetría linealizada para la EDO es

$$\eta_x - \sin(x)y(\eta_y - \xi_x) - \sin(x)^2 y^2 \xi_y + \cos(x)y\xi + \sin(x)\eta = 0,$$

arrojándonos las siguientes soluciones

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 & \eta &= y,\\
\xi &= \frac{1}{\sin(x)} & \eta &= 0,\\
\xi &= \frac{1}{\sin(x)} & \eta &= y\\
\xi &= 0, & \eta &= e^{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Tomando la simetría $\xi = \dfrac{1}{\sin(x)}$ $\quad \eta = y$, para encontrar las coordenadas canónicas tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}r &= \frac{1}{\sin(x)}\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} = 0\\
\mathcal{V}s &= \frac{1}{\sin(x)}\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} = 1.
\end{aligned}$$

Solucionando las ecuaciones diferenciales parciales obtenemos que

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= \ln(y) + \cos(x) = C,\\
s(x,y) &= -\cos(x) + C.
\end{aligned}$$

Sustituyendo las coordenadas canónicas en la condición no lineal obtenemos

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\sin(x) + \big(-\sin(x)y\big)(0)}{-\sin(x) + (-\sin(x)y(\frac{1}{y})} = -\frac{\sin(x)}{2\sin(x)} = -\frac{1}{2},$$

que al integrar nos da la solución $2s = -r + C$.

Finalmente, sustituimos la solución de las coordenadas canónicas a las coordenadas originales obtenemos la solución

$$\ln(y) = \cos(x) + C \Longrightarrow y = Ce^{\cos(x)}, \quad C > 0.$$

4.1.4. Ecuaciones Homogéneas

Una ecuación diferencial homogénea se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Conduciendo a la condición simetría linealizada

$$\eta_x + f\left(\frac{x}{y}\right)(\eta_y - \xi_x) - f\left(\frac{x}{y}\right)^2 \xi_y - f_x\left(\frac{x}{y}\right)\xi - f_y\left(\frac{x}{y}\right)\eta = 0,$$

donde algunas de las soluciones son

$$\xi = x \qquad \eta = y,$$
$$\xi = 0 \qquad \eta = -y + xf\left(\frac{x}{y}\right).$$

Ejemplo 4.3. Halla la solución de la EDO dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Pasando la ecuación diferencial a la simetría linealizada resulta

$$\eta_x + \left(\frac{x}{y} + e^{\frac{y}{x}}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(\frac{x}{y} + e^{\frac{y}{x}}\right)^2 \xi_y + \left(\frac{y}{x^2} + \frac{y}{x^2 e^{\frac{y}{x}}}\right)\xi - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)\eta = 0,$$

y hallándole algunas de las soluciones tenemos

$$\xi = 0 \qquad \eta = \frac{y}{x},$$
$$\xi = x \qquad \eta = y + xe^{\frac{y}{x}},$$
$$\xi = x \qquad \eta = y.$$

Ahora, considerando la simetría $\xi = x \quad \eta = y$, para encontrar el sistema de coordenadas canónicas resulta

$$\mathcal{V}r = x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} = 0,$$
$$\mathcal{V}s = x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} = 1.$$

Así las ecuaciones en derivadas parciales tienen como solución las siguientes igualdades

$$r(x, y) = \tfrac{x}{y} = C \qquad \text{y} \qquad s(x, y) = x + C.$$

Al sustituir las soluciones canónicas en la condición de simetría no lineal resultará que

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{y^2}{xe^{\frac{y}{x}}} = -\frac{s}{r^2 e^{\frac{1}{r}}},$$

que al integrar nos da la ecuación $\ln(s) = -e^{-u} + C$, y sustituyendo las variables originales en la solución canónica obtenemos $\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + C$, siendo está una solución a la EDO dada.

4.1.5. Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación lineal de primer orden tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

que al escribirla en la forma de Lie se tiene,

$$\eta_x + \big(-P(x)y + Q(x)\big)(\eta_y - \xi_x) - \big(-P(x)y + Q(x)\big)^2\xi_y + \big(-P'(x)y + Q'(x)\big)\xi - \big(-P(x)\big)\eta = 0,$$

la cual nos da algunas soluciones tales como

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \qquad \eta = \eta(x), \\ \xi &= 0 \qquad \eta = e^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4. Halle la solución de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y + 2.$$

Expresando la EDO aplicando la condición de simetría linealizada se tiene

$$\eta_x + \left(-\frac{1}{x}y + 2\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(-\frac{1}{x}y + 2\right)^2 \xi_y + \left(\frac{y}{x^2}\right)\xi - \left(-\frac{1}{x}\right)\eta = 0,$$

que posee soluciones tales como

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \qquad \eta = \frac{1}{x}, \\ \xi &= 0 \qquad \eta = x, \\ \xi &= x \qquad \eta = 2x - y. \end{aligned}$$

Tomando la simetría $\xi = 0 \quad \eta = x$ y encontrando el sistema de coordenadas canónicas nos resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}r &= x\frac{\partial r}{\partial y} = 0, \\ \mathcal{V}s &= x\frac{\partial s}{\partial y} = 1. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones parciales tenemos como solución $r(x,y) = x = C$ y $s(x,y) = xy + C$, que al sustituirlas en la condición de simetría no lineal nos resulta

$$\frac{ds}{dr} = 2x = 2r,$$

cuya solución es $s = r^2 + C$. Al sustituir esta solución en las coordenadas originales tenemos la solución de la EDO dada inicialmente, siendo $xy = x^2 + C$.

4.1.6. Ecuaciones Exactas

Una ecuación es exacta si se puede escribir de la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad o \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad con \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Reemplazando la EDO dentro de la condición de simetría linealizada tenemos

$$\eta_x + \left(-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)^2 \xi_y - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)\right)\xi - \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)\right)\eta = 0,$$

aportando algunas simetrías como

$$\begin{aligned} \xi &= P(x,y) \qquad & \eta &= 0 \\ \xi &= 0 \qquad & \eta &= \frac{1}{Q(x,y)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Encuentre la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2-1}$$

Reemplazando la EDO en la condición de simetría linealizada se obtiene

$$\eta_x + \left(-\frac{2xy}{x^2-1}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(-\frac{2xy}{x^2-1}\right)^2 \xi_y - \left(\frac{2x^2y-2y}{(x^2-1)^2}\right)\xi - \left(-\frac{2x}{x^2-1}\right)\eta = 0,$$

y solucionando la EDP obtenemos algunas soluciones tales como

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \qquad & \eta &= \frac{1}{x^2-1}, \\ \xi &= x^2-1 \qquad & \eta &= -2xy, \\ \xi &= \frac{1}{2xy} \qquad & \eta &= 1-x^2. \end{aligned}$$

Luego, tomando la simetría $\xi = 0 \quad \eta = \frac{1}{x^2-1}$ y hallando un sistema de coordenada canónicas nos resulta que $r(x,y) = x = C$ y $s(x,y) = x^2y - y + C_1$.

Ahora, remplazando las coordenadas canónicas en la condición de simetría no lineal nos resulta

$$\frac{ds}{dr} = \frac{2xy - 2xy}{1} = 0,$$

por consiguiente $ds = 0$; entonces $s = C$. Volviendo a las coordenadas originales, se obtiene $x^2y - y = C$, siendo ésta la solución genera de la EDO.

Teorema 4.1. *La ecuación $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ admite un grupo de Lie de un parámetro cuyo generador infinitesimal es $\mathcal{V} = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ si y solo si*

$$\mu = \frac{1}{\xi P(x,y) + \eta Q(x,y)}, \quad P(x,y) + \eta Q(x,y) \neq 0,$$

es un factor integrante de la ecuación dada[8]*.*

Demostración. La prueba de éste teorema, procede por la equivalencia de la ecuación de simetría linealizada

$$\eta_x + \left(-\tfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(-\tfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)^2 \xi_y - \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\left(-\tfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)\right)\xi - \left(\tfrac{\partial}{\partial y}\left(-\tfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)\right)\eta = 0,$$

y condición de integrabilidad de las ecuaciones exactas

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(x,y)}{\xi P(x,y) + \eta Q(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(x,y)}{\xi P(x,y) + \eta Q(x,y)}\right)\blacksquare.$$

4.1.7. Ecuación de Bernoulli

Se le llama ecuación de Bernoulli a la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Escribiendo ésta ecuación en la condición de simetría linealizada se tiene

$$\eta_x + \big(-P(x)y + Q(x)y^n\big)(\eta_y - \xi_x) - \big(-P(x)y + Q(x)y^n\big)^2 \xi_y - \big(-P'(x)y + Q'(x)y^n\big)\xi - \big(-P(x) + nQ(x)y^{n-1}\big)\eta = 0,$$

la cual posee algunas soluciones como

$$\xi = 0 \qquad \eta = y^n e^{(n-1)\int P(x)dx},$$
$$\xi = \frac{e^{(n-1)\int P(x)dx}}{Q(x)} \qquad \eta = \frac{yP(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}}{Q(x)}.$$

[8] Teorema factor integrante de Lie

Ejemplo 4.6. Hallar la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 ln(x) - y}{x}.$$

Escribiendo la EDO en la condición de simetría linea, y resolviendo la EDP resulta

$$\eta_x + \left(\frac{y^2 ln(x) - y}{x}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(\frac{y^2 ln(x) - y}{x}\right)^2 \xi_y - \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y^2 ln(x) - y}{x^2}\right)\xi - \left(\frac{2y ln(x)}{x}\right)\eta = 0,$$

que posee soluciones tales como

$$\begin{array}{ll} \xi = 0 & \eta = xy^2, \\ \xi = 0 & \eta = y^2 + y^2 ln(x) - y, \\ \xi = x & \eta = y^2 ln(x) - y, \\ \xi = -x & \eta = y^2. \end{array}$$

Tomando la simetría $\xi = 0 \quad \eta = xy^2$ para encontrar un conjunto de coordenadas canónicas tenemos que $r(x, y) = x$ y $s(x, y) = -\frac{1}{xy} + C$.

Ahora, sustituyendo las soluciones canónicas en la condición de simetría no lineal resulta

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ln(x)}{x^2} = \frac{ln(r)}{r^2}.$$

La solución de esta dada por $s = \frac{ln(r)}{r} - \frac{1}{r} + C$, y escribiendo la solución canónica en las coordenadas originales se obtiene $-\frac{1}{xy} = -\frac{ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C$.

4.1.8. Ecuación de Riccati

La ecuación diferencial de Reccatí es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

En esta ocasión el método de Lie no lleva a obtener la siguiente EDP a partir de la condición de simetría linealizada

$$\eta_x + \Big(P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)\Big)(\eta_y - \xi_x) - \Big(P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)\Big)^2 \xi_y - \\ \Big(P'(x)y^2 + Q'(x)y + R'(x)\Big)\xi - \Big(2yP(x) + Q(x)\Big)\eta = 0,$$

la cual una de sus posibles soluciones es

$$\xi = 0 \qquad \eta = e^{2y\int P(x)dx + \int Q(x)dx}.$$

Ejemplo 4.7. La ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$$

tiene como condición de simetría linealizada la ecuación

$$\eta_x + \left(\tfrac{y+1}{x} + \tfrac{y^2}{x^3}\right)(\eta_y - \xi_x) - \left(\tfrac{y+1}{x} + \tfrac{y^2}{x^3}\right)^2 \xi_y - \left(\tfrac{-1-y}{x^2} - \tfrac{3y^2}{x^4}\right)\xi - \left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{2y}{x^3}\right)\eta = 0,$$

la cual posee soluciones tales como

$$\begin{aligned} \xi &= 0 & \eta &= e^{-\frac{y^3}{x^2} + yln(x)}, \\ \xi &= x^2 & \eta &= xy, \\ \xi &= x^3 & \eta &= x^2(y+1)y^2, \\ \xi &= 0 & \eta &= x + \frac{y^2}{x}. \end{aligned}$$

Si tomamos la simetría $\xi = x^2 \quad \eta = xy$ y encontrando un sistema de coordenadas canónicas a partir de

$$\mathcal{V}r = x^2\frac{\partial r}{\partial x} + xy\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\mathcal{V}s = x^2\frac{\partial s}{\partial x} + xy\frac{\partial s}{\partial y} = 1,$$

tenemos que $r(x,y) = \frac{x}{y} = C$ y $s(x,y) = -\frac{1}{x} + C$.

Ahora, sustituyendo las ecuaciones canónicas en la condición de simetría no lineal se tiene

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x^2+0}}{\frac{1}{y} + (\frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x})(-\frac{x}{y^2})} = -\frac{y^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r^2+1}.$$

Finalmente, integrando la ecuación diferencial anterior tenemos como solución la familia de curvas

$$s = -\arcsin(r) + C,$$

que al escribir esta ecuación en las coordenadas originales nos resulta

$$-\frac{1}{x} = -\arcsin\left(\frac{x}{y}\right) + C$$

siendo esta la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

Comentarios finales

El método de simetrías de Lie para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un poco complicado de entender si no se ha estudiado con anterioridad algunos cursos tales como Análisis matemático, Topología, Geometría diferencial y Ecuaciones diferenciales parciales, pues se inicia con una simple EDO y posteriormente se pasa a resolver una EDP de primer orden. Es por ello que no es muy aconsejable este método para este tipo de EDO, sin embargo, funciona mejor en EDO de mayor orden, donde además suele haber menos simetrías.

Sin embargo, el método de Lie es muy valioso ya que brinda la posibilidad de obtener soluciones exactas de una gran cantidad de ecuaciones diferenciales de primer orden, y además; en algunas ecuaciones se reducen la cantidad de cálculo facilitando los procesos tradicionales.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G., *Introducción al Análisis Matemático*, Segunda edición, Ed Limusa, México, 1987.

[2] Belinchón, José Antonio., *Ecuaciones Diferenciales Mediante Simetrias*, Publicaciones Matemáticas, 2009.

[3] Blazquez, Sanz., *La evolución de la teoría de grupos en las ecuaciones diferenciales*, Lecturas matemáticas, Volumen 29, Número 2, 2008, páginas 83-93.

[4] Bluman, G W., and Anco, S.C., *Symmetries and Integration Methods for Differential Equations*, Springer Verlang (2002).

[5] Bluman, G. W., and Cole, J. D., *Similarity Methods for Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[6] Campos, Alberto., *Iniciación en el Análisis de Ecuaciones Diferenciales mediante Grupos de Lie*, Proyecto de investigación, Facultad de ciencia Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1995.

[7] Castro, F. Abel., *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Ed Iberoamericana, 1997.

[8] Hydon, P. E., *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[9] Lacomba, Ernesto., y Jiménez, P. Hugo., *Simetrías y Grupos de Lie*, Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, México.

[10] Lima, Elon Lages., *Curso de Análise*, Segunda Edición, Rio de Janeiro, 1985.

[11] Starrett, John., *Solving Differential Equations by Symmetry Groups*, American Mathematical Monthly, Volume 114, Number 9, 2007, pp. 778-792 (15).

[12] Zill, Dennis G., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Editorial Iberoamericana, Segunda Edición, México, 1988.