

**ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN DE PASOS DE RAZONAMIENTO EN EL
PROCESO DE JUSTIFICACIÓN TEÓRICA EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE GEOMETRÍA.**

JESÚS DAVID BERRÍO VALBUENA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2016**

**ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN DE PASOS DE RAZONAMIENTO EN EL
PROCESO DE JUSTIFICACIÓN TEÓRICA EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE GEOMETRÍA.**

JESÚS DAVID BERRÍO VALBUENA

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Educación Matemática

Director:

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
Doctor en Didáctica de la Matemáticas

Co-director:

MARTIN EDUARDO ACOSTA GEMPELER
Doctor en Didáctica de la Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2016

Agradecimientos

A Dios por permitirme sobreponerme a todas las dificultades, por brindarme la salud, la sabiduría y el entendimiento que se consagran en este trabajo; por mi familia y por las personas que pone en mi camino.

A mi madre y a mi padre por todas las enseñanzas y consejos que han hecho de mí una persona de bien; a mis hermanos que me han permitido vivir la mejor de las infancias y una adolescencia llenas de anécdotas que, al recordarlas, me llenan de mucha alegría.

A mi tía y segunda madre, Sonia Valbuena el empujón que siempre he necesitado me lo ha dado con mucho amor y con el fin único de verme ser mejor cada día, larga vida y muchas bendiciones para ella, para que pueda disfrutar todo lo que merece después de tanto trabajo y tanto altruismo.

A Juan Pablo y a Ángel Martín que son el motor de mi vida y la razón por la que me esmero a ser mejor cada día. A Maribell que hoy en día me acompaña por este largo camino de la vida

Al profesor Martín Acosta Gempeler por brindarme la oportunidad de trabajar junto a él, por permitirme auscultar una mente llena de grandes conocimientos matemáticos y científicos. Guardo gran admiración por su persona y sus conocimientos

Al profesor Jorge Fiallo por su labor altruista, por tener mucha paciencia en el dificultoso camino que recorrí elaborando este trabajo. Por sus enseñanzas y sobre todo por enseñarme a ver las ideas de los demás desde un punto de vista diferente sin descalificarlas. También debo agradecer porque me dio la oportunidad de conocer a la Doctora Bettina Pedemonte que con sus ideas me permitió vislumbrar muchos aspectos de este trabajo que me eran indiferentes.

A la profesora Solange Roa por su sensibilidad y grandes conocimientos, por brindarme apoyo y ánimo cuando había desaparecido el ímpetu de trabajo que me acompañaba.

Al profesor Bernardo Mayorga. No me quedan sino palabras de admiración para una gran persona y un sabio en todo el sentido de la palabra. En las palabras de Bertrand Rusell, que conocí gracias a él, "Ésta ha sido mi vida. La he hallado digna de vivirse, y con gusto volvería a vivirla si se me ofreciese la oportunidad" y también querría poder encontrarlo nuevamente en mi vida académica.

A Nathalia, Caro, Daniel Moreno, Danny Luz, Diana, Karina, Luzdari, Luis Ángel, Dúwang, Daniel, Jhean, Cristian, Lucho, Diego, Yenny, Adriana, Jairo y a todos los que compartieron conmigo estos años de estudio, seminarios, hamburguesas, chocolistas y humaredas.

A Claudita Garavito una gran amiga y un apoyo constante en todo lo que necesitaba. También a Rosalbita por su ayuda en todo lo que necesité y por ser una gran deportista.

Tabla de contenido

Introducción	21
Entornos Tecnológicos, Sistemas Tutoriales, Ambientes de Aprendizaje y Resolutores Inteligentes de Problemas de Demostración.	28
2.1. Asistente de demostración.....	31
Marco teórico.	69
3.1. Constructivismo.	70
3.1.1. La perspectiva sociocultural del desarrollo.....	71
3.1.2. El origen social de las funciones mentales.....	72
3.1.3. Interiorización.....	73
3.1.4. Zona de desarrollo real y zona de desarrollo potencial.	74
3.1.5. El andamiaje.	75
Metodología	77
4.1. Panorama general del estudio.	77
4.2. Descripción de la muestra.	77
4.3. Diseño de las actividades.	77
4.3.1. Diseño de la primera actividad.	78
4.3.2. Diseño de la segunda actividad.....	78
4.3.3. Diseño de la tercera actividad.	80
4.4. La implementación de las actividades y la recolección de la información.	81
4.4.1. Análisis a priori.	81
4.5. Instrumentos de recolección de datos.	81
4.5.1. Las videograbaciones.	81
4.5.2. La entrevista clínica.....	82
Análisis a priori de las actividades demostrativas.	84

5.1.	Análisis a priori actividad demostrativa uno.	84
5.1.1.	Problema.	84
5.1.2.	Objetivo.	85
5.1.3.	Descripción.	85
5.2.	Análisis a priori actividad demostrativa dos.	110
5.2.1.	Problema.	110
5.2.2.	Objetivo.	110
5.2.3.	Descripción.	110
5.3.	Análisis a priori actividad demostrativa tres.	129
5.3.1.	Problema.	130
5.3.2.	Objetivo.	130
5.3.3.	Descripción.	130
	Análisis A posteriori y Conclusiones	145
6.1.	Análisis a posteriori local de la primera intervención.	145
6.1.1.	Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la primera intervención.	146
6.1.2.	Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la primera intervención.	150
6.1.3.	Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la primera intervención.	155
6.1.4.	Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la primera intervención.	159
6.2.	Conclusiones del análisis a posteriori local en la primera intervención.	162
6.3.	Análisis a posteriori local de la segunda intervención.	163
6.3.1.	Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la segunda intervención. ..	163
6.3.2.	Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la segunda intervención. ..	170
6.3.3.	Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la segunda intervención. ..	177
6.3.4.	Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la segunda intervención. ..	186

6.4. Conclusiones del análisis a posteriori local en la segunda intervención.	191
6.5. Análisis a posteriori local de la tercera intervención.	192
6.5.1. Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la intervención final	192
6.5.2. Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la intervención final.	198
6.5.3. Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la intervención final.	204
6.5.4. Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la intervención final.	212
6.6. Conclusiones del análisis a posteriori local en la tercera intervención.....	218
6.7. Análisis a posteriori global.	219
Conclusiones de la investigación	227
Conclusiones. Acerca de la caracterización del uso del asistente de demostración.	
227	
Conclusiones acerca del abandono del uso del asistente de demostración.	231
Conclusiones acerca de las estrategias de validación.....	232
7.1. Recomendaciones	233
7.2. Limitaciones de la investigación.....	234
Bibliografía.....	235

Lista de tablas

Tabla 1. Tabla comparativa de las acciones del cada estudiante por intervención.	221
--	-----

Tabla de figuras

Figura 1. Entrada de datos del asistente de demostración.	33
Figura 2. Ingreso de datos del problema.....	33
Figura 3. Interfaz para la construcción de pasos de razonamiento en el asistente de demostración.	34
Figura 4. Filtros de búsqueda.....	35
Figura 5. Base de datos de reglas teóricas.....	35
Figura 6. Usando los filtros de búsqueda.....	36
Figura 7. Casilla de construcción de paso de razonamiento.....	36
Figura 8. Listado de pasos de razonamiento.	37
Figura 9. Afirmaciones demostradas vs afirmaciones por demostrar.....	38
Figura 10. Enunciado Q demostrado.	38
Figura 11. Enunciados Q y R por demostrar.....	38
Figura 12. Enunciado Q demostrado.	39
Figura 13. Enunciados Q y R demostrados.....	39
Figura 14. Enunciado R demostrado con condición Q no justificada.	39
Figura 15. Enunciados Q y R justificados.	40
Figura 16. Ingreso de datos del problema.....	41
Figura 17. Construcción de pasos de razonamiento.....	41
Figura 18. Filtros de búsqueda, esquema de análisis.....	42
Figura 19. Elección de la regla teórica. Esquema de análisis.....	44
Figura 20. Opción símbolos de la regla teórica.....	44
Figura 21. Homologación de los datos.....	45
Figura 22. Enunciados añadidos a la casilla de las afirmaciones por demostrar.	45
Figura 23. Botón de verificación de paso del paso de razonamiento.....	46
Figura 24. Primera pregunta de la validación del paso de razonamiento.....	46
Figura 25. Segunda pregunta de la validación del paso de razonamiento.....	47
Figura 26. Paso de razonamiento válido construido.	47
Figura 27. Paso agregado a lista de pasos construidos.....	47

Figura 28. Enunciado “triángulo ABC es equilátero” demostrado con condiciones sin justificar.	48
Figura 29. Construcción de un nuevo paso de razonamiento.	48
Figura 30. Búsqueda de reglas teóricas por el antecedente. Esquema de síntesis.	49
Figura 31. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	51
Figura 32. Homologación de las proposiciones.....	52
Figura 33. Paso de razonamiento construido.....	53
Figura 34. Verificación del paso de razonamiento construido.....	53
Figura 35. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento.	54
Figura 36. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento.....	54
Figura 37. Paso de razonamiento válido construido.	54
Figura 38. Paso de razonamiento válido agrega al listado de pasos.	55
Figura 39. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.	55
Figura 40. Construcción de un nuevo paso de razonamiento.	56
Figura 41. Búsqueda de reglas teóricas por el consecuente. Esquema de análisis.	56
Figura 42. Elección de la regla teórica según el esquema de análisis.	58
Figura 43. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	58
Figura 44. Homologación de proposiciones.	59
Figura 45. Homologación de las proposiciones.....	59
Figura 46. Homologación de la información de las proposiciones.	59
Figura 47. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.	60
Figura 48. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	60
Figura 49. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	61
Figura 50. Paso de razonamiento válido construido.	61

Figura 51. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos.	62
Figura 52. Enunciado justificado que ha pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.	62
Figura 53. Construcción de un nuevo paso de razonamiento partiendo de la conclusión.....	62
Figura 54. Búsqueda de reglas teóricas por el consecuente. Esquema de análisis.	63
Figura 55. Regla teórica elegida mediante el esquema de análisis.	64
Figura 56. Opción símbolos de la regla teórica escogida.....	64
Figura 57. Homologación de las proposiciones.....	64
Figura 58. Homologación de las proposiciones.....	65
Figura 59. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.	65
Figura 60. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento.	66
Figura 61. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento.....	66
Figura 62. Paso de razonamiento válido construido.	66
Figura 63. Aviso de verificación de la conclusión de la demostración.....	67
Figura 64. Justificación de todos los pasos de razonamiento.	67
Figura 65. Todos los enunciados demostrados han pasado a la casilla afirmaciones demostradas.....	68
Figura 66. Demostración concluida.....	68
Figura 67. Esquema del marco teórico.	69
Figura 68. Construcción en Cabri para la segunda actividad.....	79
Figura 69. Construcción de pasos de razonamiento.	86
Figura 70. Filtros de búsqueda, esquema de análisis.	86
Figura 71. Elección de la regla teórica. Esquema de análisis.	87
Figura 72. Opción símbolos de la regla teórica.	87
Figura 73. Homologación de los datos.	88
Figura 74. Enunciados añadidos a la casilla de las afirmaciones por demostrar. .	88
Figura 75. Botón de verificación de paso del paso de razonamiento.	88

Figura 76. Primera pregunta para la validación del pasos de razonamiento construido.	89
Figura 77. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	89
Figura 78. Paso de razonamiento válido construido.	90
Figura 79. Paso de razonamiento construido añadido al listado de pasos de razonamiento construido.....	90
Figura 80. Enunciado “triángulo ABC es equilátero” demostrado con condiciones sin justificar.	91
Figura 81. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.....	91
Figura 82. Búsqueda de regla teórica por el antecedente. Esquema de síntesis..	92
Figura 83. Regla teórica elegida según el esquema de las síntesis.....	93
Figura 84. Homologación de las proposiciones.....	93
Figura 85. Paso de razonamiento construido.....	94
Figura 86. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.	94
Figura 87. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	95
Figura 88. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	95
Figura 89. Paso de razonamiento válido construido.	96
Figura 90. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento construidos.....	96
Figura 91. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.	96
Figura 92. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema del análisis.....	97
Figura 93. Búsqueda de una regla teórica. Esquema del análisis.....	98
Figura 94. Regla teórica elegida según el esquema del análisis.....	98
Figura 95. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	99

Figura 96. Homologación de las proposiciones.....	99
Figura 97. Homologación de las proposiciones.....	100
Figura 98. Homologación de las proposiciones.....	100
Figura 99. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.	101
Figura 100. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	101
Figura 101. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	102
Figura 102. Paso de razonamiento válido construido.	102
Figura 103. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.	103
Figura 104. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.	103
Figura 105. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema del análisis.....	103
Figura 106. Búsqueda de la regla teórica por el consecuente. Esquema del análisis.....	104
Figura 107. Elección de la regla teórica según el esquema del análisis.	105
Figura 108. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	105
Figura 109. Homologación de las proposiciones.....	105
Figura 110. Homologación de las proposiciones.....	106
Figura 111. Botón para verificar la validez del paso de razonamiento.	106
Figura 112. Primera pregunta para la verificación de la validez del paso de razonamiento construido.....	107
Figura 113. Segunda pregunta para la verificación de la validez del paso de razonamiento construido.....	107
Figura 114. Paso de razonamiento válido construido.	107
Figura 115. Mensaje de verificación de la conclusión de la demostración.....	108
Figura 116. Todos los enunciados han sido justificados.	108

Figura 117. Los enunciados justificados han pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.....	109
Figura 118. Demostración concluida.....	109
Figura 119. Construcción en Cabri para el problema de la segunda actividad. ..	110
Figura 120. Construcción de un paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.	111
Figura 121. Búsqueda de la regla teórica. Esquema de la síntesis.....	112
Figura 122. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	113
Figura 123. Comparación entre los datos del problema y el antecedente de la regla teórica.	113
Figura 124. Homologación de las proposiciones.....	114
Figura 125. Verificación de las proposiciones faltantes.	114
Figura 126. Mensaje de verificación sobre la evidencia de los enunciados añadidos como afirmaciones demostradas.....	115
Figura 127. Enunciados añadidos para completar las condiciones de la regla teórica.	115
Figura 128. Proposiciones añadidas a la casilla uno, condiciones necesarias, de paso de razonamiento.	115
Figura 129. Construcción de recta auxiliar sobre la construcción del problema.	116
Figura 130. Enunciados añadidos a la casilla de afirmaciones por demostrar....	116
Figura 131. Botón para la verificación de la validez.	117
Figura 132. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	117
Figura 133. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	118
Figura 134. Paso de razonamiento válido construido.	118
Figura 135. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.	119
Figura 136. Enunciados justificados que han pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.	119

Figura 137. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.....	120
Figura 138. Búsqueda de reglas teóricas por el antecedente. Esquema de la síntesis.....	121
Figura 139. Opción símbolos de la regla teórica elegida.	121
Figura 140. Homologación de las proposiciones.....	122
Figura 141. Enunciado agregado a la casilla de afirmaciones por demostrar.	122
Figura 142. Botón para la verificación de la validez del paso de razonamiento. .	122
Figura 143. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	123
Figura 144. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	123
Figura 145. Paso de razonamiento válido construido.	123
Figura 146. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.	124
Figura 147. Enunciado justificado que ha pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.	124
Figura 148. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.....	125
Figura 149. Búsqueda de la regla teórica por el antecedente. Esquema de la síntesis.....	125
Figura 150. Opción símbolos de la regla teórica escogida según el esquema de la síntesis.....	126
Figura 151. Botón para verificar la validez del paso de razonamiento.	126
Figura 152. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	127
Figura 153. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.	127
Figura 154. Paso de razonamiento válido construido.	127

Figura 155. Mensaje de verificación de la justificación de todos los enunciados por demostrar.....	128
Figura 156. Listado con todos los pasos de razonamiento construidos.	128
Figura 157. Todos los enunciados han pasado a la casilla de afirmaciones por demostrar.....	129
Figura 158. Demostración concluida.....	129
Figura 159. Búsqueda en Google con el criterio "simetría central".	133
Figura 160. Simetría central según Wikipedia.....	134
Figura 161. Simetría central según vitutor.com.....	134
Figura 162. Primer paso de razonamiento construido, con la regla teórica construida.	135
Figura 163. Segundo paso de razonamiento construido.....	136
Figura 164. Tercer paso de razonamiento construido.....	136
Figura 165. Cuarto paso de razonamiento construido.	137
Figura 166. Quinto paso de razonamiento construido.....	137
Figura 167. Sexto paso de razonamiento construido.....	138
Figura 168. Pasos de razonamiento opción dos de demostración.....	138
Figura 169. Pasos de razonamiento opción tres de demostración.....	139
Figura 170. Pasos de razonamiento opción cuatro de demostración.....	140
Figura 171. Demostración concluida, opción uno.	141
Figura 172. Demostración concluida, opción dos.....	142
Figura 173. Demostración concluida, opción tres.	143
Figura 174. Demostración concluida, opción cuatro.	144
Figura 175. Demostración presentada por el estudiante 1 en el problema 2.	170
Figura 176. Demostración presentada por el estudiante dos en el problema dos.	176
Figura 177. Demostración presentada por el estudiante 3 en el problema 2.	185
Figura 178. Demostración presentada por el estudiante 4 en el problema 2.	190
Figura 179. Búsqueda practicada por el estudiante 1 en el problema 3.	194

Figura 180. Paso de razonamiento no válido construido por el estudiante 1 en el problema 3.....	194
Figura 181. Dibujo realizado por el estudiante 1 en el problema 3.	196
Figura 182. Demostración presentada por el estudiante 1 en el problema 3.	198
Figura 183. Paso de razonamiento válido construido por el estudiante 2 en el problema 3.....	200
Figura 184. Demostración presentada por el estudiante 2 en el problema 3.	204
Figura 185. Demostración presentada por el estudiante 3 en el problema 3.	212
Figura 186. Paso de razonamiento construido por el estudiante 4 en el problema 3.....	215
Figura 187. Demostración presentada por el estudiante 4 en el problema 3.	218

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN DE PASOS DE RAZONAMIENTO EN EL PROCESO DE JUSTIFICACIÓN TEÓRICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA*

AUTOR: JESÚS DAVID BERRÍO VALBUENA**

PALABRAS CLAVES: Actividad demostrativa, Asistente de demostración, Exploración de la teoría, Interiorización.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo de investigación estudia el uso de un software matemático computacional llamado asistente de demostración, este software es utilizado en la actividad de exploración de teoremas, definiciones y postulados de la geometría euclidiana, en el proceso de construcción de demostraciones deductivas formales por estudiantes de un curso de geometría euclidiana de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Planteamos la hipótesis de investigación de que, “el uso del asistente de demostración, caracterizado por procesos de razonamiento deductivo y abductivo, se irá transformando progresivamente en propiedad del individuo”. Para obtener información que nos permitiera vislumbrar evidencias para verificar o falsar nuestra hipótesis se trazó como objetivo general: estudiar el impacto del uso del software “asistente de demostración” como andamiaje para el desarrollo de exploración de la teoría. Mostramos el análisis a priori como el camino de ideal de solución de tres problemas de construcción y demostración, y el análisis a posteriori (análisis a posteriori local por estudiante, análisis a posteriori local por cada una de las tres intervenciones y análisis a posteriori global) de los resultados de la aplicación de los tres problemas de demostración. Los análisis practicados y la aplicación de doce entrevistas clínicas, permitieron identificar y caracterizar algunos de los usos dados al asistente de demostración por los estudiantes durante el planteamiento de la conjetura y la construcción de una justificación teórica para cada problema, así como también los momentos en los cuales se abandona el uso de este software.

* Proyecto de Grado.

** Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Dr. Jorge Fiallo Leal. Co-Director: Martín Acosta Gempeler.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF CONSTRUCTION OF REASONING STEPS IN THE PROCESS OF THEORETICAL JUSTIFICATION IN GEOMETRY PROBLEMS*

AUTHOR: JESÚS DAVID BERRÍO VALBUENA**

KEYWORDS: Demonstrative activity, Proof Assistant, Exploration of the theory, Internalization.

DESCRIPTION:

This research studies the use of mathematical computing software called proof assistant, this software used in exploration activity of theorems, definitions and postulates of Euclidean geometry, in the process of building formal deductive proof by students in a course of euclidean geometry of the Bachelor in Mathematics at the Universidad Industrial de Santander. Our research hypothesis is, "the use of proof assistant, characterized by deductive and abductive reasoning process, is going to become the property of the individual gradually." For getting information that would allow us to see evidence to verify or falsify our research hypothesis, our general aim was: studying the impact of using "proof assistant" software as a scaffold for the development of exploration of the theory. We show a priori analysis as the ideal way of solving of three construction and demonstration problems, and a posteriori analysis (a posteriori local analysis by each student per intervention, a posteriori local analysis by each of the three interventions and global a posteriori analysis) of the results of the implementation of three proof and construction problems. Analyzes carried out and the application of twelve clinical interviews, allowed us to identify and characterize some of the proof assistant's uses for the approach of conjecture and construction of a theoretical justification and also moments when the proof assistant ceases to be used.

*Project Degree.

** Industrial University of Santander. Sciences Faculty. School of Mathematics. Master in Mathematics Education. Director: Dr.Jorge Fiallo Leal. Co-Director: Dr Martín Acosta Gempeler.

Introducción

El curso de Geometría Euclidiana de la Universidad Industrial de Santander se fundamenta en dos interrogantes: ¿Cómo producir una construcción exacta? y ¿Cómo justificar que esa construcción está bien? Que bien podrían traducirse en los objetivos primordiales de la asignatura.

En el intento por responder al primer interrogante nace el primer reto para el estudiante consistente en diferenciar cuándo una construcción es exacta y cuándo es solo un dibujo. Se hace necesario entonces, el uso de una fuente teórica que permita justificar las propiedades involucradas en la producción de dicha construcción. El estudiante notará que hay dos tipos de propiedades: las propiedades que han sido realizadas en la construcción (con el uso de herramientas de construcción) y las propiedades que son producto de la conjugación de dos o más propiedades construidas.

Las propiedades producto de otras propiedades (es posible identificarlas mediante la exploración de la construcción realizada) se presentan como implicaciones lógicas, es decir, **si** se cumplen las propiedades A, B, C, ..., M **entonces** se cumple la propiedad X. La justificación de estas propiedades plantea la necesidad de construir una demostración.

¿Qué es demostrar?

Para tener un acercamiento a lo que se entiende por demostrar nos referimos a la línea de investigación histórico-epistemológica¹ propuesta por Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) cuyo interés es buscar respuestas a los interrogantes ¿Qué es la demostración? y ¿Cuáles son sus funciones? Esta línea halla sustento en Balacheff quien propone que las diferentes concepciones sobre la demostración matemática deben ser explicadas y relacionadas para lograr una comprensión global acerca de

¹ La línea de investigación histórico-epistemológica es una de las cinco grandes líneas de investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración que fueron propuestas por Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013).

la naturaleza de la demostración, y distingue cinco posiciones diferentes acerca del estatus conferido a la demostración por diferentes investigadores (Balacheff, 2008 citado por Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013).

1. La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación de conocimiento: Debido a la estrecha relación entre la demostración y la lógica, ésta podría verse como un proceso de validación en otros ámbitos y como un claro ejemplo de racionalidad.
2. La demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica y particular, ligada al contenido matemático: Los esquemas de demostración de un individuo son construcciones intrínsecas y varían entre individuos.

Por ejemplo, Duval (1991, 2000) señala que aunque pareciera haber una continuidad entre argumentación y demostración hay un distanciamiento entre ellas, tanto de carácter lógico como de carácter cognitivo. La argumentación no traza un camino para llegar a la demostración, cada una requiere de aprendizajes distintos por parte de los estudiantes. De la misma forma, Larios (2000) no considera a la argumentación como una vía hacia la demostración, ya que cada una tiene objetivos diferentes. La demostración es un razonamiento válido, mientras que la argumentación no cuenta con vínculos de validez, sino de pertinencia. Es decir, la demostración, a través de la lógica, busca determinar el valor de la verdad de una afirmación; la argumentación solo busca credibilidad y el convencimiento de una o varias personas.

Balacheff (1988), considera que la interacción social tiene una importancia relevante, ya que a través de ésta es que los estudiantes pueden plantear argumentos para convencerse unos a otros.

Para Harel y Sowder (1998) *“lo que constituye la persuasión y comprobación en dicha persona”* (pág. 245), es llamado esquema de prueba de una persona. Hay tres categorías: esquema de prueba de convicción externa (ritual, autoritaria y simbólica); esquemas de prueba empíricos (inductivo y perceptual); y, los esquemas de prueba analíticos (transformacionales y axiomáticos); en esta última categoría la demostración formal es incluida como una forma de demostración.

3. La demostración es una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de la matemática misma: La demostración es propia del pensamiento matemático; el proceso de construcción de una demostración es complejo y riguroso, y consiste en que mediante el uso de esquemas de razonamiento lógico se asuma o deduzca información a partir de unos datos conocidos y unas leyes generales que permite transformar la información inicial.

Algunos investigadores consideran la prueba como una de las más importantes herramientas de la geometría (Hanna, 2000; Martin y Harel, 1989; Senk, 1985; Recio y Godino, 2001). La prueba ha sido identificada en términos de explicación, argumentación y demostración. Sin embargo, la idea de justificar o validar una proposición proporcionando justificaciones o argumentos es común en todas estas circunstancias (Godino y Recio, 1997).

Para Camargo, Samper y Perry (2006) la demostración formal es una justificación en la cual, a medida que se van deduciendo afirmaciones, se dan las correspondientes razones, teniendo como referencia el sistema axiomático establecido.

4. La demostración es una herramienta necesaria para las matemáticas, cuya utilidad se percibe en sus aplicaciones: La demostración adquiere significado

en la relación dialéctica entre formular una demostración y comunicar su significado.

En este caso, Tall (1999) describe diferentes formas de probar que dependen del contexto y del estado del desarrollo cognitivo del estudiante. Estas son: las pruebas de acción, son las que requieren de una actividad física; las pruebas visuales, que involucran imágenes y gráficas; las pruebas aritméticas o de comprobación; las pruebas algebraicas o de demostración por manipulación; las pruebas euclidianas en donde se traslada una prueba visual a una representación verbal; y las pruebas formales, que involucran a todas las demostraciones lógicas basadas en axiomas y encadenamientos deductivos.

5. La demostración es un campo autónomo específico de las matemáticas: La organización teórica de las matemáticas está basada en los axiomas, definiciones y teoremas.

Como se señala en la obra de los Elementos de Euclides (325 aC–265 aC), la demostración es lo más potente de la geometría; es el razonamiento deductivo basado en axiomas inquebrantables, definiciones y teoremas. La demostración se describe como argumentos que consisten en deducciones lógicamente estrictas desde la hipótesis a los resultados (NCTM, 2000).

¿Qué es demostrar?: Nuestra postura.

Basados en la tercera posición acerca del estatus concedido a la demostración, que considera a la misma como una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de la matemática, cuyo objetivo es validar enunciados, definimos el término *demostración* como el *proceso de justificación de enunciados usando únicamente reglas teóricas*.

Reglas teóricas.

Una regla teórica es una proposición de la forma si-entonces que representa una ley general de la geometría euclidiana. Por ejemplo, una definición, un teorema o un postulado. Las reglas teóricas permiten construir pasos de razonamiento.

Paso de razonamiento.

Un paso de razonamiento es una relación ternaria entre unas condiciones iniciales - regla teórica - conclusión. Se dice que el paso de razonamiento es válido si se logra establecer una correspondencia total entre todas las condiciones iniciales y el antecedente de la regla teórica, y una correspondencia total entre el consecuente de la regla teórica y los enunciados que se desean justificar.

Una secuenciación de pasos de razonamiento válidos lleva a la construcción de una demostración deductiva.

La exploración de la teoría.

Las acciones involucradas en la construcción de pasos de razonamiento y a su vez en la construcción de demostraciones deductivas, objeto de estudio en esta investigación, corresponden a lo que denominamos **exploración de la teoría**. Con este término se hace referencia a la realización de una serie de acciones externas al individuo consistentes en:

1. Realizar búsquedas de reglas teóricas que:
 - a. Su antecedente contengan palabras claves referentes a los datos dados en el problema de demostración. Es decir, que correspondan a las propiedades construidas.
 - b. Su consecuente contengan palabras claves referentes a las conclusiones que se desean obtener. Es decir, indagar por propiedades que sean el producto de una o más propiedades construidas.

2. Validar pasos de razonamiento, esto corresponde a:
 - a. Establecer una correspondencia total entre la condición del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica, y si ésta permite concluir las afirmaciones deseadas o establecer si son afirmaciones que deben ser demostradas.
 - b. Establecer una correspondencia total entre la conclusión del paso de razonamiento y el consecuente de la regla teórica, y conocer las condiciones que bien pueden ser datos del problema o ser afirmaciones que deban ser demostradas.

De acuerdo a lo anterior, nuestra **hipótesis de investigación** es que *el individuo interioriza la exploración de la teoría mediada por el uso del asistente de demostración, que se comporta como un andamiaje caracterizado por procesos de razonamiento deductivo y abductivo.*

Para obtener información que nos permita vislumbrar evidencias para verificar o falsar nuestra hipótesis se traza el siguiente objetivo general.

1. Estudiar el impacto del uso del software “asistente de demostración” como andamiaje para el desarrollo de exploración de la teoría.

Para alcanzar este objetivo, se plantean los siguientes objetivos específicos.

1. Diseñar e implementar situaciones problema donde el uso del asistente de demostración facilite la consecución de la solución del problema.
2. Caracterizar el uso que le da el estudiante al asistente de demostración durante la construcción de conjeturas y la construcción de una justificación teórica
3. Identificar y caracterizar los momentos en los que el estudiante abandone el uso del asistente de demostración durante la construcción de la justificación teórica.

4. Establecer de qué manera contribuye el uso del asistente de demostración en la construcción del conocimiento de los estudiantes del curso de Geometría euclidiana.

A continuación se describen brevemente los siete capítulos que componen este documento.

En el segundo capítulo se da una perspectiva general acerca de las investigaciones referentes al uso de entornos tecnológicos, sistemas tutoriales y ambientes de aprendizaje y resolutores inteligentes de problemas de demostración, también se describe el asistente de demostración y se introduce su uso. En el tercer capítulo se aborda la perspectiva sociocultural del desarrollo, las funciones mentales superiores, y especialmente los términos interiorización y zona de desarrollo próximo y la formulación del andamiaje desde esta perspectiva. En el capítulo 4 se describe la metodología usada. En el capítulo 5 se muestran los análisis a priori de las situaciones problemas propuestas. En el capítulo seis se muestran los análisis a posteriori, en el último capítulo aparecen las conclusiones, las limitaciones y las recomendaciones de la investigación, y finalmente encontramos las referencias bibliográficas y los anexos.

Entornos Tecnológicos, Sistemas Tutoriales, Ambientes de Aprendizaje y Resolutores Inteligentes de Problemas de Demostración.

Diversos estudios acerca de la resolución de problemas de demostración en geometría, entendida como la interacción entre procesos de visualización (ligados al pensamiento espacial) y procesos de justificación (ligados al pensamiento deductivo), han desembocado en el uso de aplicaciones instrumentales para resolver dichos problemas.

Dentro de estas aplicaciones instrumentales se destaca: el uso de tutores (automatizados) de demostración como colaboradores en el aprendizaje, entornos informatizados para favorecer los procesos de exploración de figuras y sus propiedades, sistemas tutoriales inteligentes (resolutores expertos de problemas) y programas computacionales consistentes en asistentes de tutorías.

Algunos de estos estudios y sus respectivas aplicaciones son:

1. Ambientes de aprendizaje.

Vanda Luengo (1997) en su tesis doctoral expone un ambiente de aprendizaje para la demostración en geometría basado en una sistematización y formalización de los resultados de la didáctica usando la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la teoría de los agentes semi-empíricos. Allí realiza un prototipo de tutor de demostración que permite al usuario hacer confrontaciones entre las hipótesis adoptadas y su aplicación sobre el campo. Luengo (1997) defiende que la idea central del aprendizaje colaborativo es que el alumno y el computador pueden

contribuir juntos para resolver el problema. En esta interacción, hay un proceso de adaptación de cada participante con el fin de alcanzar los objetivos de cada uno.

2. Entornos tecnológicos.

Ilana Lavy (2006) presenta una descripción de los diferentes tipos de argumentos que surgieron de dos estudiantes que trabajan en un entorno informatizado. La investigadora manifestaba que cuando una imagen de la pantalla es parte de los datos, se podría decir que es una parte integral del "conocimiento externo" para el estudiante y el objetivo es que durante el proceso de exploración, él interiorice este conocimiento. Después de que los estudiantes hayan formulado una conjetura, y en el proceso de razonamiento hayan utilizado ejemplos concretos, se podría decir que estos ejemplos concretos ya no son "conocimiento externo", sino que han sido internalizados.

3. Sistemas tutoriales inteligentes.

Los investigadores Cobo y Fortuny (2005) presentan *AGENTGEOM* un sistema tutorial inteligente que incorpora un análisis a priori de los procedimientos a seguir en la construcción de una demostración deductiva formal, es decir, es un resolutor experto que puede conducir al usuario a resolver el problema propuesto. En el análisis de las interacciones, los autores muestran que el estudiante llega a apropiarse de habilidades estratégicas y argumentativas en la resolución de problemas, allí observaron que dicha apropiación era consecuencia de las formas de comunicación que se establecían de la forma alumno- *AGENTGEOM*.

En un trabajo de investigación más completo Richard y Fortuny (2007) tratan de mostrar cómo los alumnos de secundaria pueden mejorar sus habilidades de argumentación con la ayuda de sistemas de tutoría destinados para el aprendizaje de la geometría. Usan un programa computacional consistente en un sistema de tutorías llamado *TURING* (acrónimo de TUtoRiel INtelligent en Géométrie).

Los sistemas tutoriales *AGENTGEOM* y *TURING* utilizan la construcción de una figura geométrica para generar interacciones entre el estudiante y el medio, incluso

si, en su declaración, la situación del problema no está modelada por una figura geométrica. Dentro de las características de los sistemas tutoriales tenemos: la contextualización, la transferencia o la aceptación de la naturaleza contextual de la construcción del conocimiento. A partir de estas características, Richard y Fortuny (2007) suponen que los conocimientos del alumno no dependen sólo de los conocimientos previos, sino que también dependen de las características del entorno con el que interactúa y habilidades que pueden ejercer sobre su actuar.

Matsuda y VanLehn (2005) estudian el impacto de un sistema tutorial inteligente (Advanced Geometry Tutor, AGT) que facilita la escritura de una demostración, a partir de la construcción, en la selección de la estrategia de resolución del problema. Es decir, si el uso de la construcción en este tutor inteligente favorece lo que ellos denominan “*forward chaining (FC)*” o “*backward chaining (BC)*”. Esto hace referencia a si el estudiante se vale de procesos de razonamiento deductivo a abductivo para escribir la demostración.

4. Resolutores inteligentes de problemas de demostración.

Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos y Chostoulakis (2007) muestran un estudio realizados con dos grupos de estudiantes de primer semestre universitario de distintos centros educativos de Atenas. Con un grupo practicaron la construcción de demostraciones deductivas mediante el uso de un programa llamado “*Reasoning Control Matrix for the Proving Process (RECOMPP)*” y con el otro usaron métodos tradicionales.

RECOMPP es un programa que a partir de la identificación de la hipótesis y la conclusión de un problema de demostración, facilita el encadenamiento de proposiciones (algunas veces usando construcciones) para vislumbrar una prueba de la conclusión.

Resulta interesante mencionar que Matsuda y VanLehn (2005) y Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos y Chostoulakis (2007) manifiestan que AGT y RECOMPP son andamiajes usados por los docentes que bien pueden ayudar a obtener una

lista de reglas teóricas que favorecerían la justificación de ciertos enunciados, o que guían al estudiante en el encadenamiento de pasos de razonamiento.

Una herramienta, con algunas características similares a las expuestas en los estudios anteriormente mencionados, es diseñada por Martín Acosta y recibe el nombre de *Asistente de Demostración*.

2.1. Asistente de demostración.

El asistente de demostración es un programa matemático computacional que comprende una base de datos de ciento setenta (170) registros con los postulados, definiciones y teoremas a estudiar en el curso de Geometría Euclidiana (correspondientes al libro de Geometría de Clemens, O'Daffer & Cooney (1998)); éste es una herramienta de carácter dinámico que le ayuda al individuo en la construcción de pasos de razonamiento para la escritura de una demostración formal deductiva a tres columnas (condiciones – regla teórica – conclusiones).

El asistente de demostración explicita tres procesos que identificamos como necesarios en la construcción de una demostración deductiva:

1. La construcción de pasos de razonamiento, que hace referencia al establecimiento de una relación ternaria entre las condiciones dadas o datos del problema, una regla teórica y las conclusiones ligadas a las dos anteriores.
2. La adquisición de un control lógico para la enunciación de pasos de razonamiento. Es decir, validar el paso de razonamiento mediante la homologación del antecedente de la regla teórica con los datos el problema, y la del consecuente con las proposiciones a demostrar.

3. La flexibilidad en el proceso de producción de pasos de razonamiento (incluyendo las estrategias de análisis² y síntesis³), para hacer referencia a que durante el proceso de construcción de la demostración deductiva no es necesario llevar un orden estricto en la producción de los pasos de razonamiento, sino que pueden elaborarse pasos de razonamiento válidos usando proposiciones que no han sido demostradas pero que posteriormente serán debidamente justificadas.

Los procesos de construcción de pasos de razonamiento y validación de los mismos desembocan en lo que denominamos anteriormente como exploración de la teoría, que es la acción que permite encontrar definiciones, postulados o teoremas susceptibles de justificar las afirmaciones que se quieren demostrar. Esta acción es la que determina los criterios de búsqueda de reglas teóricas en el asistente de demostración.

A continuación, se procede a mostrar el funcionamiento del asistente de demostración.

Dados unos datos (P, Q, R, S,...) que son las condiciones de la construcción hecha o datos del problema y una proposición por demostrar que es la conjetura planteada X. Estos datos son introducidos en la primera interfaz del asistente de demostración, que corresponde a dos cuadrículas para la inserción de dichos datos.

² La estrategia del análisis está enmarcada dentro del razonamiento abductivo y consiste en razonar hacia una hipótesis, esto es conocido como abducción y se refiere a que a partir de los hechos se busca una hipótesis que señale su causa (Fann, 1970; Beuchot, 1998; Ferrando, 2007).

³ La estrategia de la síntesis está enmarcada dentro del razonamiento deductivo y consiste en razonar desde la hipótesis.

Figura 1. Entrada de datos del asistente de demostración.

Ingreso del Problema

The screenshot shows a window titled 'Ingreso del Problema'. At the top left is a 'Terminar' button. Below it are two large rectangular input areas. The left area is labeled 'Dado' and contains a blue 'Agregar' link. The right area is labeled 'Demostrar' and also contains a blue 'Agregar' link.

Damos clic en agregar del recuadro llamado Dado y escribimos las proposiciones dadas en la construcción, y la conjetura planteada la agregamos en la cuadrícula llamada Demostrar.

Figura 2. Ingreso de datos del problema

Ingreso del Problema

The screenshot shows the same 'Ingreso del Problema' window. The 'Dado' box now contains the text 'P', 'Q', 'R', and 'S' stacked vertically. The 'Demostrar' box contains a blue horizontal input field with the letter 'X' below it. The 'Terminar' button remains at the top left.

Damos clic en el botón terminar, eso nos lleva a la segunda interfaz del asistente de demostración, que cuenta con los siguientes elementos:

Figura 3. Interfaz para la construcción de pasos de razonamiento en el asistente de demostración.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	<input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/>
En el antecedente	
En el consecuente	

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Postulado de la hipótesis	Si una propiedad está declarada en la hipótesis entonces es verdadera	Si una propiedad está declarada en la hipótesis	entonces es verdadera
Postulado de la construcción	Si una propiedad está declarada en la construcción entonces es verdadera	Si una propiedad está declarada en la construcción	entonces es verdadera
Teorema 1 perpendiculares y paralelas	Si dos rectas son perpendiculares al mismo objeto entonces son paralelas	Si dos rectas son perpendiculares al mismo objeto	entonces son paralelas

Mostrando 1 a 170 de 170 registros

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Regla Teórica	Regla Teórica	Conclusión
Limpiar Necesarias	Limpiar	Limpiar	Limpiar
	3		
	Nombre	Lengua Natural	Símbolos

Afirmaciones Demostradas

Agregar

5

- 1. P
- 2. Q
- 3. R
- 4. S

Listado de pasos de razonamiento

Condiciones	Regla Teórica	Regla Teórica	Conclusión
Necesarias	4		

Afirmaciones por Demostrar

Agregar

5

1. X

1. Filtros de búsqueda, que corresponden a tres entradas mediante las cuales se descartan automáticamente reglas teóricas que no contengan las palabras (por lo general, usaremos palabras claves para realizar las búsquedas de las reglas teóricas) escritas, bien sea en el nombre, en el antecedente o en el consecuente de la regla teórica.

Figura 4. Filtros de búsqueda

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	
En el antecedente	
En el consecuente	

- Base de datos de reglas teóricas, que corresponde a ciento setenta (170) registros. Es decir, definiciones, teoremas y postulados.

Figura 5. Base de datos de reglas teóricas

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
isósceles	entonces tiene dos lados iguales	isósceles,	lados iguales
Definición de triángulo isósceles	Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces es isósceles	Si un triángulo tiene dos lados iguales	entonces es isósceles
Definición de triángulos congruentes	Si dos triángulos son congruentes entonces sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes son iguales	Si dos triángulos son congruentes	entonces sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes son iguales
Definición de	Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes y sus	Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes y	entonces son

Mostrando 1 a 170 de 170 registros

Esta base de datos está relacionada con los filtros de búsqueda. Esto es, cuando se agrega una palabra en alguno de los filtros automáticamente el listado de reglas teóricas se reducirá a la cantidad de registros que contenga el criterio de búsqueda.

Por ejemplo, si se filtran las reglas por el consecuente con la palabra cuadrado (es decir, se buscan reglas teóricas que contengan en su consecuente la palabra cuadrado) se obtendrán solo tres reglas teóricas con estas características.

Figura 6. Usando los filtros de búsqueda

Buscar en

En el nombre

En el antecedente

En el consecuente

Texto a buscar

cuadrado

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de cuadrado	Si un rectángulo tiene sus cuatro lados iguales entonces es un cuadrado	Si un rectángulo tiene sus cuatro lados iguales	entonces es un cuadrado
Teorema 7.1 teorema de pitágoras	Si el triángulo XYZ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos	Si el triángulo XYZ es un triángulo rectángulo,	entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos
Teorema 10.18 segmento	Si un segmento tangente y uno secante a un círculo tienen un	Si un segmento	entonces el cuadrado de la longitud del segmento

Mostrando 1 a 3 de 3 registros (filtrado de un total de 170 registros)

3. Paso de razonamiento, que corresponde a un recuadro con tres columnas. Es aquí donde se construyen los pasos de razonamiento como una relación entre los datos (pueden ser datos o proposiciones por justificar), una regla teórica y una proposición a demostrar.

Figura 7. Casilla de construcción de paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento

Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

En la parte inferior se encuentra el botón “Verificar Paso de Razonamiento”. Este nos permite hacer la validación del paso de razonamiento construido. Es decir, contrastar las condiciones del paso de razonamiento con las condiciones del antecedente de la regla teórica, y las conclusiones del paso de razonamiento con el consecuente de la regla teórica.

En dado caso, las proposiciones contrastadas sean equivalentes se responderá afirmativamente; el paso de razonamiento quedará validado y el recuadro se coloreará de verde. Si no corresponden las proposiciones o no son equivalentes se responde negativamente y se procederá a hacer las correcciones necesarias para encontrar equiparabilidad entre las proposiciones del paso de razonamiento y de la regla teórica.

4. Listado de pasos de razonamiento, que corresponde a un recuadro donde se enlistan todos los pasos de razonamiento que han sido validados. Se da clic sostenido sobre el recuadro verde y se suelta encima de éste.

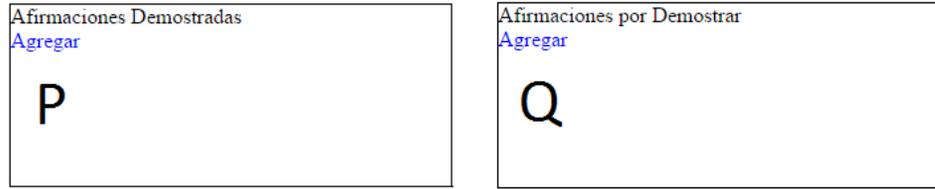
Figura 8. Listado de pasos de razonamiento.

Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión

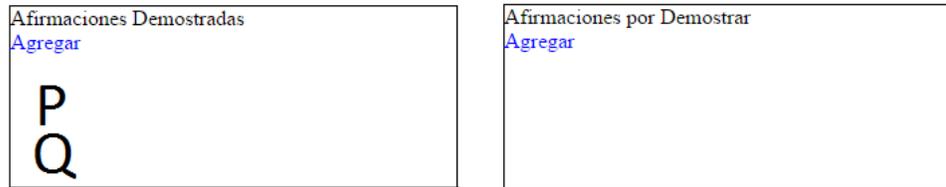
5. Afirmaciones demostradas versus afirmaciones por demostrar, que corresponden a las casillas donde están los datos del problema y las proposiciones por demostrar respectivamente. Si tenemos la proposición “Si P, entonces Q”. Es decir, tenemos como dato P y queremos demostrar Q, aparecerá así.

Figura 9. Afirmaciones demostradas vs afirmaciones por demostrar



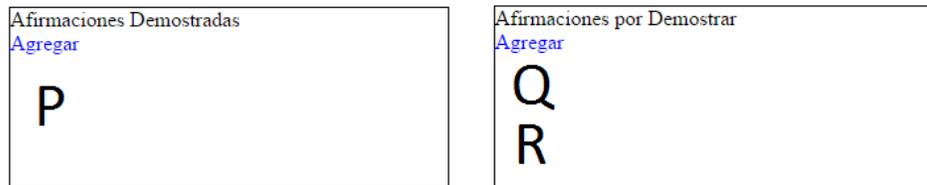
Una vez se ha construido el paso de razonamiento valido para justificar Q, esta afirmación hará parte de las afirmaciones demostradas y pasará automáticamente a ese recuadro.

Figura 10. Enunciado Q demostrado.



Si tenemos como dato P y se pretende demostrar R. Pero, el dato necesario para justificar R es Q y a su vez Q es consecuencia de P (es decir, “si P, entonces Q” y “si Q, entonces R”) se obtendría lo siguiente.

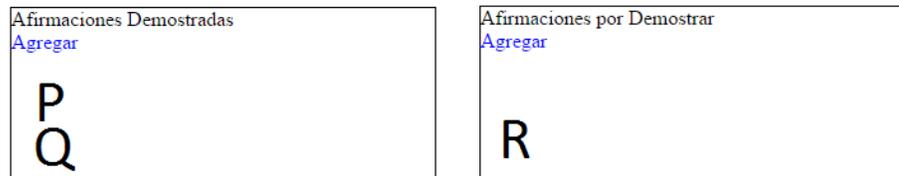
Figura 11. Enunciados Q y R por demostrar



Vale la pena aclarar que la proposición Q no necesariamente ha de estar en esa casilla desde el principio, esta puede ser agregada durante la construcción del paso de razonamiento en la segunda interfaz del asistente de demostración.

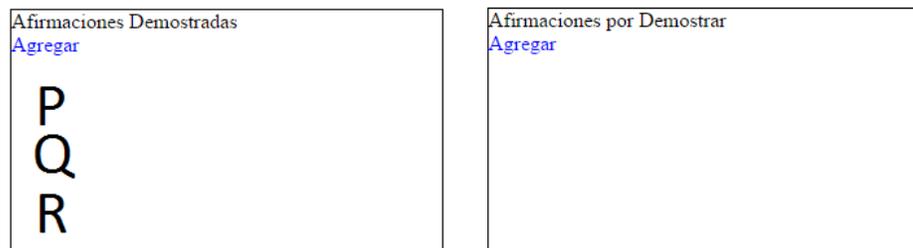
Aquí pueden suceder dos cosas: Primero, que se construya el paso de razonamiento para justificar Q usando el dato P, y que Q pase a la casilla de afirmaciones demostradas.

Figura 12. Enunciado Q demostrado.



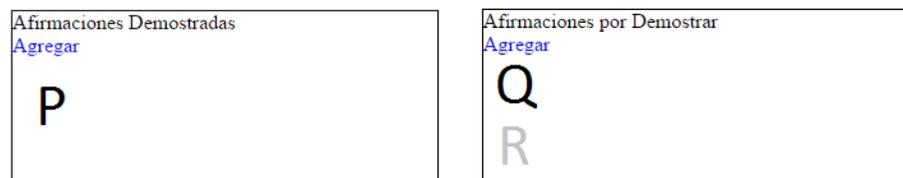
Y de manera análoga justificando R usando el dato Q (ya fue demostrado).

Figura 13. Enunciados Q y R demostrados



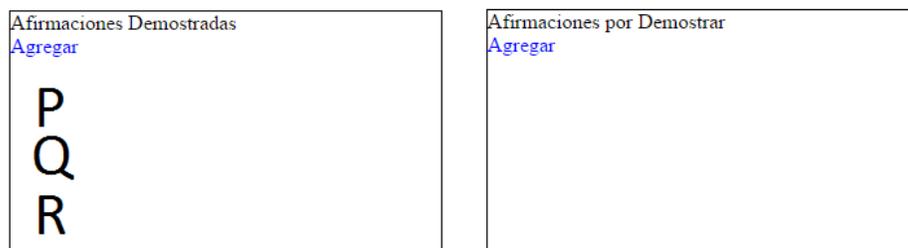
Y segundo que se justifique R usando un dato adicional Q. En este caso R no pasará a la casilla de afirmaciones demostradas, pero si cambiará a color gris. Este cambio indica que a pesar de haber sido justificado hay elementos usados en el paso de razonamiento que aún no han sido validados.

Figura 14. Enunciado R demostrado con condición Q no justificada.



El dato faltante es precisamente Q, que al ser justificado usando P (dato del problema) provocará el traslado de las dos proposiciones a la casilla de afirmaciones demostradas.

Figura 15. Enunciados Q y R justificados.



Para mostrar el uso del asistente de demostración en la solución de un problema se propone que: Se realice una construcción en un software de geometría dinámica, acto seguido se realizan cuestionamientos que desemboquen en el planteamiento de una conjetura y posteriormente se usa el asistente en la construcción de una justificación teórica de la conjetura planteada.

Ejemplo: Realice la siguiente construcción, y responda que clase de triángulo es el triángulo ABC.

1. Segmento \overline{AB}
2. Circunferencia c con centro en A que pasa por B .
3. l mediatriz de \overline{AB} .
4. C , punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia c .
5. Triángulo ABC .

La respuesta esperada es que el triángulo ABC es equilátero; esta será la conjetura a demostrar. De esta manera los datos del problema y la conjetura quedarían así.

Figura 16. Ingreso de datos del problema.

Ingreso del Problema

Terminar

Dado

Agregar

Segmento AB
Circunferencia c con centro en A que pasa por B
l mediatriz de AB
C punto de intersección entre la mediatriz
Triángulo ABC

Demostrar

Triángulo ABC es equilátero

Pasando a la segunda interfaz del asistente de demostración procedemos a construir los pasos de razonamiento.

1. Llevamos el enunciado “Triángulo ABC es equilátero” a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento. Se realiza primero esta acción puesto que esta forma nos indicará el criterio de búsqueda que se debe usar. Debemos considerar que es posible colocar la proposición en la casilla de las condiciones, aunque esto corresponda a un proceso erróneo. Teniendo en cuenta que esta propiedad es la que se desea justificar y no un dato del problema.

Figura 17. Construcción de pasos de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
			Triángulo ABC es equilátero
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

- 1.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder a la afirmación que se quiere demostrar,

buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener, en su consecuente, afirmaciones que correspondan a “es un triángulo equilátero”. Entonces, escribimos en el filtro en el consecuente: “equilátero”. Aparece una única regla teórica.

Figura 18. Filtros de búsqueda, esquema de análisis.

Buscar en		Texto a buscar	
En el nombre		<input type="text"/>	
En el antecedente		<input type="text"/>	
En el consecuente		<input type="text" value="equilátero"/>	

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de triángulo equilátero	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales entonces es equilátero	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales	entonces es equilátero

1.1.1. Es posible también hacer una búsqueda de reglas teóricas usando el filtro “en el nombre” con la palabra **equilátero** o **triángulo equilátero**. Este tipo de búsqueda no muestra evidencia del establecimiento de una relación, bien sea entre las condiciones del problema y una regla teórica o el enunciado a demostrar y una regla teórica. Probablemente, es solo búsqueda de información con respecto a la palabra buscada.

Las reglas teóricas encontradas son:

- Definición de triángulo equilátero: Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus lados son iguales.
- Definición de triángulo equilátero: Si un triángulo tiene todos sus lados iguales entonces es equilátero
- Teorema 6.2 triángulo equilátero –equiángulo: Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo

- Teorema 6.5 ángulos triángulo equilátero: Si un triángulo es equilátero, entonces sus ángulos miden 60°

1.1.2. También es posible realizar la búsqueda de reglas teóricas usando el filtro “en el antecedente” con la palabra **equilátero** o **triángulo equilátero**. Cuando el estudiante hace una búsqueda usando este filtro, muy probablemente, ha establecido una relación entre las condiciones del problema y una regla teórica. Es decir, hace uso de la técnica de síntesis.

En este caso, no está estableciendo una relación entre las condiciones del problema y una regla teórica. Pues, “ser triángulo equilátero” es el enunciado que espera demostrar.

Las reglas teóricas encontradas son:

- Definición de triángulo equilátero: Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus lados son iguales.
- Teorema 6.2 triángulo equilátero –equiángulo: Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo
- Teorema 6.5 ángulos triángulo equilátero: Si un triángulo es equilátero, entonces sus ángulos miden 60°

1.2. Arrastramos a la segunda casilla del paso de razonamiento (la regla teórica encontrada en 1.1). Dando clic sostenido y soltamos en la casilla del medio.

Figura 19. Elección de la regla teórica. Esquema de análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Regla Teórica		Conclusión
Limpiarse Necesarias	Limpiarse	Limpiarse	Limpiarse
	Definición de triángulo equilátero		Triángulo ABC es equilátero
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

1.3. Para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente damos clic en la pestaña símbolos.

Figura 20. Opción símbolos de la regla teórica.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Regla Teórica		Conclusión
Limpiarse Necesarias	Limpiarse	Limpiarse	Limpiarse
	si	Entonces	Triángulo ABC es equilátero
	XY=YZ	triángulo XY Z es equilátero	
	XY=XZ		
	YZ=XZ		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Aquí debemos hacer una comparación entre el consecuente de la regla teórica y la conclusión del paso de razonamiento. Notamos que en el consecuente el triángulo es nombrado XYZ, mientras que en la conclusión recibe el nombre de ABC, lo que hacemos es relacionar letra a letra los dos nombres de los triángulos.

Figura 21. Homologación de los datos.



- 1.4. Reemplazamos estas letras en las afirmaciones del antecedente de la regla teórica, obteniendo $AB=BC$, $AB=AC$ y $AC=BC$, afirmaciones que escribimos en la lista de afirmaciones por demostrar. Como se mencionó anteriormente, existe la posibilidad de que nuevas proposiciones sean agregadas en la segunda interfaz del asistente de demostración. Es decir, en la etapa de la construcción de los pasos de razonamiento.

Figura 22. Enunciados añadidos a la casilla de las afirmaciones por demostrar.

Afirmaciones por Demostrar
<input type="text"/>
1. $BC=AC$
2. $AB=AC$
3. $AB=BC$
4. Triángulo ABC es equilátero

- 1.5. Posteriormente, las arrastramos a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 23. Botón de verificación de paso del paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento

Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar Regla Teórica	Limpiar Conclusión								
$BC=AC$ $AB=AC$ $AB=BC$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">si</td> <td>Entonces</td> </tr> <tr> <td>$XY=YZ$</td> <td>triángulo XY Z es equilateralo</td> </tr> <tr> <td>$XY=XZ$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$YZ=XZ$</td> <td></td> </tr> </table>	si	Entonces	$XY=YZ$	triángulo XY Z es equilateralo	$XY=XZ$		$YZ=XZ$		Triángulo ABC es equilateralo
si	Entonces									
$XY=YZ$	triángulo XY Z es equilateralo									
$XY=XZ$										
$YZ=XZ$										
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Nombre</td> <td style="width: 33%;">Lengua Natural</td> <td style="width: 33%; background-color: #90EE90;">Simbolos</td> </tr> </table>	Nombre	Lengua Natural	Simbolos						
Nombre	Lengua Natural	Simbolos								

←

- 1.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 24. Primera pregunta de la validación del paso de razonamiento.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
Triángulo ABC es equilateralo	triángulo XY Z es equilateralo

- 1.7. En este caso, previamente hicimos la comparación de los triángulos ABC y XYZ y notamos que los dos enunciados son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta

acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 25. Segunda pregunta de la validación del paso de razonamiento.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
BC=AC AB=AC AB=BC	XY=YZ XY=XZ YZ=XZ
<input type="checkbox"/> Si <input type="checkbox"/> No	

Previamente, establecimos la relación entre los nombres de los triángulos y en consecuencia los nombres de los lados. Luego, respondemos sí al segundo cuestionamiento y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 26. Paso de razonamiento válido construido.

Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
BC=AC AB=AC AB=BC	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así. Damos clic sostenido y soltamos sobre el recuadro de listado de pasos de razonamiento.

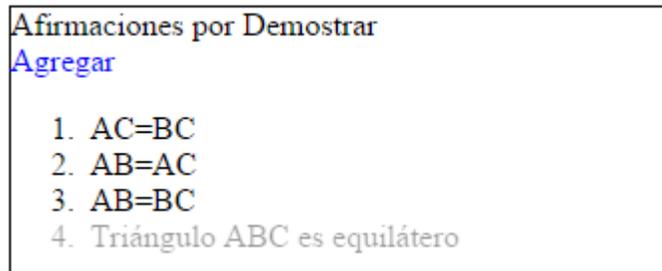
Figura 27. Paso agregado a lista de pasos construidos.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	BC=AC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

Notamos que en cada uno de los enunciados usados como condiciones aparece “(?)”. Esto indica que cada una de estas proposiciones debe tener un paso de razonamiento que la justifique.

Además, notamos que, en la casilla de Afirmaciones por Demostrar, la proposición “Triángulo ABC es equilátero” cambió de color negro a gris, esto indica que a pesar de que ya se ha demostrado esta proposición se han usado proposiciones para su justificación que aún no han sido validadas. Se espera que una vez validadas dichas proposiciones, “Triángulo ABC es equilátero” pase a la lista de afirmaciones demostradas.

Figura 28. Enunciado “triángulo ABC es equilátero” demostrado con condiciones sin justificar.



2. Ahora arrastramos el enunciado “l mediatriz de AB” a la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento. No es posible colocar este enunciado en la casilla de la conclusión.

Figura 29. Construcción de un nuevo paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Necesarias l mediatriz de AB			
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

2.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del antecedente de la

regla teórica debe corresponder a las condiciones del problema, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su antecedente afirmaciones que correspondan a “es mediatriz”. Entonces, escribimos en el filtro en el consecuente: “mediatriz”.

Figura 30. Búsqueda de reglas teóricas por el antecedente. Esquema de síntesis.

Buscar en		Texto a buscar
En el nombre		<input type="text"/>
En el antecedente		<input type="text" value="mediatriz"/>
En el consecuente		<input type="text"/>

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de mediatriz	Si una recta es mediatriz de un segmento, entonces es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio	Si una recta es mediatriz de un segmento,	entonces es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio
Teorema 6.10 mediatriz	Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y	Si un punto está sobre la mediatriz de XY	entonces equidista de X y Y
Teorema 10.5 mediatriz de una cuerda	Si una recta es mediatriz de una cuerda de un círculo entonces contiene al centro del círculo	Si una recta es mediatriz de una cuerda de un círculo	entonces contiene al centro del círculo

Mostrando 1 a 3 de 3 registros (filtrado de un total de 170 registros)

2.1.1. Es posible también hacer una búsqueda de reglas teóricas usando el filtro “en el nombre” con la palabra **mediatriz**. Este tipo de búsqueda no muestra evidencia del establecimiento de una relación, bien sea entre las condiciones del problema y una regla teórica o el enunciado a demostrar y una regla teórica. Probablemente, es solo búsqueda de información con respecto a la palabra buscada.

Las reglas teóricas encontradas son:

- Definición de Mediatriz: Si una recta es mediatriz de un segmento, entonces es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.
- Definición de Mediatriz: Si una recta es perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio, entonces es mediatriz del segmento
- Teorema 6.10 mediatriz: Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y.
- Teorema 6.10 mediatriz: Si un punto Z equidista de un par de puntos X y Y, entonces Z está sobre la mediatriz del segmento XY.
- Teorema 10.5 mediatriz de una cuerda: Si una recta es mediatriz de una cuerda de un círculo entonces contiene al centro del círculo

2.1.2. También es posible realizar la búsqueda de reglas teóricas usando el filtro “en el consecuente” con la palabra **mediatriz**. Cuando el estudiante hace una búsqueda usando este filtro, muy probablemente, ha establecido una relación entre la conclusión del problema y una regla teórica. Es decir, hace uso de la técnica de análisis.

En este caso, no está estableciendo una relación entre la conclusión del problema y una regla teórica. Pues, “mediatriz” hace parte de los datos provistos por el problema.

Las reglas teóricas encontradas son:

- Definición de Mediatriz: Si una recta es perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio, entonces es mediatriz del segmento.

- Teorema 6.10 mediatriz: Si un punto Z equidista de un par de puntos X y Y, entonces Z está sobre la mediatriz del segmento XY.

2.2. Dentro las tres opciones que me ofrece la búsqueda practicada en 2.1, debo escoger cual es la regla teórica que me permita construir un paso de razonamiento ajustándose a los enunciados que deben ser justificados. Haciendo una lectura de las tres reglas teóricas, nos inclinamos por el teorema 6.10 mediatriz, ya que las otras reglas teóricas no concluyen con datos que aporten a la solución del problema. Además el término equidistancia permite establecer alguna relación con las igualdades entre los lados del triángulo, y es la razón que lleva a escoger esta regla teórica. Llevamos esta regla teórica a la casilla correspondiente del paso de razonamiento y damos clic en la pestaña símbolos con el fin de obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente.

Figura 31. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Limpia	Regla Teórica	Limpia Conclusión
I mediatriz de AB	si	Entonces	
	Z está sobre la mediatriz de XY	$XZ=YZ$	
	Nombre	Lengua Natural	Símbolos

2.3. Con este procedimiento podemos notar si las condiciones están completas o si se debe incluir otras y si el consecuente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que quiero demostrar. Relacionamos el segmento AB de nuestro problema con el segmento XY de la regla teórica.

Figura 32. Homologación de las proposiciones.



En las condiciones podemos notar que, además de tener que l es mediatriz de AB debemos tener un punto sobre la mediatriz.

Dentro de nuestras condiciones tenemos el enunciado “ C punto de intersección entre l y d ”; que C sea punto de intersección de l (mediatriz) y d (círculo) involucra implícitamente el hecho de que C está sobre la mediatriz y está sobre el círculo, entonces C es nuestro punto sobre la mediatriz y corresponde al punto Z de la regla teórica.

La aceptación de la proposición “ C punto de intersección entre l y d ” como proposición equivalente a “ C está sobre la mediatriz de AB ” depende del contrato didáctico acerca del rigor que se ha pactado en la clase de geometría. Para nuestro caso, las aceptaremos como proposiciones equivalentes. Por lo tanto, la incluimos en la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

- 2.4. En la comparación del numeral anterior notamos que $A=X$ y $B=Y$, también aceptamos que el punto Z de la regla teórica es el homólogo del punto C que tenemos en nuestras condiciones necesarias. De esta manera, obtendremos las siguientes igualdades $AC=XZ$ y $BC=YZ$. Por lo tanto, la conclusión de la regla teórica es que $AC=BC$, entonces agregamos este dato en la casilla de la conclusión del paso de razonamiento.

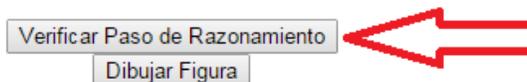
Figura 33. Paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento				
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica		Limpiar Conclusión
I mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c		Teorema 6.10 mediatriz		AC=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

2.5. Ahora damos clic en el botón verificar paso de razonamiento.

Figura 34. Verificación del paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento				
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica		Limpiar Conclusión
I mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c		Teorema 6.10 mediatriz		AC=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	



2.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 35. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
AC=BC	XZ=YZ

Sí No

2.7. En este caso, nos anticipamos en la comparación de las igualdades entre las ecuaciones $AC=BC$ y $XZ=YZ$ y notamos que los dos enunciados son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 36. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
l mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c	Z está sobre la mediatriz de XY

Sí No

Previamente, establecimos la relación entre los nombres de los triángulos y en consecuencia los nombres de los lados. Luego, respondemos sí al segundo cuestionamiento y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 37. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
l mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c		Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el listado de pasos de razonamiento queda así.

Figura 38. Paso de razonamiento válido agrega al listado de pasos.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	AC=BC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	El triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC

Notamos que en algunos de los enunciados usados como condiciones aparece “(?)”. Esto indica que cada una de estas proposiciones debe tener un paso de razonamiento que la justifique. Mientras que en otros aparece “(D)” indicando que dicha afirmación es un dato dado.

2.8. Notamos también que la afirmación “AC=BC”, que en 1.4 añadimos a la lista de afirmaciones por demostrar, ahora aparece en la lista de afirmaciones demostradas junto los datos dados del problema.

Figura 39. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. c círculo con centro en A que pasa por B
2. C punto de intersección entre l y c
3. l mediatriz de AB
4. Segmento AB
5. Triángulo ABC
6. AC=BC

3. Colocamos “AB=AC” en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento.

Figura 40. Construcción de un nuevo paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
			AB=AC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

3.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder a las conclusiones del problema, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su consecuente afirmaciones que correspondan a “equidista”. Entonces, escribimos en el filtro del consecuente “equidista” (puede escribirse “igual”, “igualdad”, o incluso “=” pero ninguna de estas lleva a una regla teórica que se ajuste a los datos del problema ni a lo que se pretende demostrar, por tal motivo se usa la palabra equidista que es un sinónimo de los términos anteriormente mencionados).

Figura 41. Búsqueda de reglas teóricas por el consecuente. Esquema de análisis.

Buscar en

En el nombre

En el antecedente

En el consecuente

Texto a buscar

equidista

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de círculo	Si dos puntos están sobre un mismo círculo, entonces equidistan del centro	Si dos puntos están sobre un mismo círculo,	entonces equidistan del centro
Teorema 6.10 mediatriz	Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y	Si un punto está sobre la mediatriz de XY	entonces equidista de X y Y
Teorema 7.5 mediatrices de un triángulo	Si tres rectas son mediatrices de un triángulo entonces se cortan en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo	Si tres rectas son mediatrices de un triángulo	entonces se cortan en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo

Mostrando 1 a 6 de 6 registros (filtrado de un total de 170 registros)

- 3.1.1. Es posible realizar la búsqueda de “igual”, “igualdad”, “=” o incluso “equidista” en el filtro del nombre de la regla teórica. Esta búsqueda arroja tres teoremas de equidistancia. Como bien sabemos, este tipo de búsqueda no muestra evidencia del establecimiento de una relación, bien sea entre las condiciones del problema y una regla teórica o el enunciado a demostrar y una regla teórica. Probablemente, es solo búsqueda de información con respecto a la palabra buscada.
- 3.1.2. También podría realizarse esta búsqueda usando el filtro “en el antecedente”. Se obtienen cuatro resultados. Pero como ya hemos mencionado, esta estrategia no es correcta, pues la proposición es una afirmación dada y no una afirmación por demostrar.
- 3.2. Dentro de los seis registros que me ofrece la búsqueda practicada en 3.1, debo escoger cual es la regla teórica que me permita construir un paso de razonamiento ajustándose a los enunciados que deben ser justificados. Haciendo una lectura de estas reglas teóricas nos inclinamos por la “Definición de círculo”, ya que las otras reglas teóricas no concluyen con datos que aporten a la solución del problema. Además el término equidistancia permite establecer alguna relación con las igualdades entre los lados del triángulo, y es la razón que lleva a escoger esta regla teórica.

Figura 42. Elección de la regla teórica según el esquema de análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Regla Teórica		Conclusión Limpiar
	Definición de círculo		AB=AC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

3.3. Y escogemos la regla teórica: definición de círculo. Después de llevarla a la casilla de la regla teórica damos clic en símbolos para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y el consecuente.

Figura 43. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Regla Teórica		Conclusión Limpiar
	si	Entonces	AB=AC
	X está sobre el círculo w	XZ=YZ	
	Y está sobre el círculo w		
	Z centro de w		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Con este procedimiento podemos notar si la conclusión está completa o si se debe incluir otros enunciados y si el antecedente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que tengo como datos o si debo agregar alguna afirmación, ya sea evidente o por demostrar.

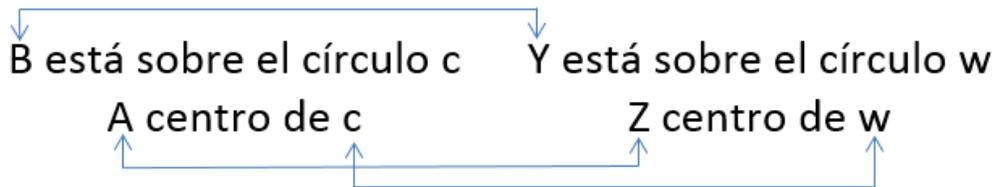
Relacionamos la igualdad $XZ=YZ$ de la regla teórica con $AB=AC$ de nuestro problema

Figura 44. Homologación de proposiciones.



3.4. Teniendo en cuenta el análisis anterior y que el enunciado “c círculo con centro en A que pasa por B” dice de manera implícita que “B está sobre el círculo c” y que “A centro de c”. Tenemos que este enunciado es equivalente a “Y está sobre el círculo w” y “Z centro de w”.

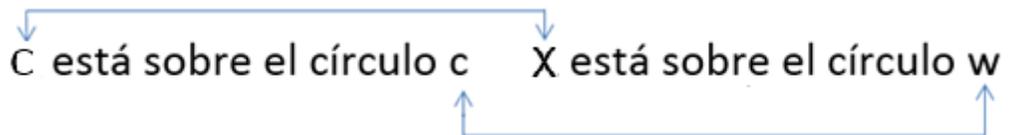
Figura 45. Homologación de las proposiciones.



Concluimos entonces que, $Y=B$, $A=Z$ y que $c=w$.

Hace falta la afirmación “X está sobre el círculo w”. Haciendo una revisión dentro de nuestros datos notamos que tenemos la expresión “C punto de intersección entre l y c” que indica de manera implícita que el punto C hace parte tanto de la mediatriz l como del círculo c. Es decir, “C está sobre el círculo c.

Figura 46. Homologación de la información de las proposiciones.



Y se concluye que $C=X$.

3.5. Arrastramos las afirmaciones “C punto de intersección entre l y c” y “c círculo con centro en A que pasa por B” a la casilla de las condiciones necesarias. Y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 47. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Circunferencia d con centro en A que pasa por B C punto de intersección entre l y c	si	Entonces	$AB=AC$
	X está sobre el círculo w Y está sobre el círculo w Z centro de w	$XZ=YZ$	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos



3.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 48. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
$AB=AC$	$XZ=YZ$

Sí No

3.7. En este caso, previamente hicimos la comparación (numeral 3.3) de los enunciados y notamos que son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 49. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
Circunferencia d con centro en A que pasa por B	X está sobre el círculo w Y está sobre el círculo w
C punto de intersección entre l y c	Z centro de w

Sí No

En el numeral 3.4 nos anticipamos a este control de validez, y concluimos que los enunciados de las condiciones necesarias con equivalentes a las afirmaciones del antecedente de la regla teórica. Por ende, respondemos afirmativamente a la pregunta y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 50. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Limpia Regla Teórica	Limpia Conclusión	
Circunferencia d con centro en A que pasa por B C punto de intersección entre l y c	Definición de círculo	$AB=AC$	

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así.

Figura 51. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	AC=BC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC
3	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	AB=AC

Notamos que en algunos de los enunciados usados como condiciones aparece “(D)” indicando que dichas afirmaciones son datos dados.

3.8. Como la afirmación “AC=BC” ha sido justificada pasa a la casilla de afirmaciones demostradas.

Figura 52. Enunciado justificado que ha pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. Segmento AB
2. c círculo con centro en A que pasa por B
3. l mediatriz de AB
4. C punto de intersección entre l y c
5. Triángulo ABC
6. AC=BC
7. AB=AC

4. Colocamos el enunciado “AB=BC” en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento.

Figura 53. Construcción de un nuevo paso de razonamiento partiendo de la conclusión.

Condiciones Necesarias	Regla Teórica			Conclusión
Limpiar	Limpiar	Limpiar	Limpiar	Limpiar
				AB=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

4.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder con los enunciados del problema que se quieren demostrar, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su consecuente afirmaciones que correspondan a una igualdad entre segmentos. Entonces, escribimos en el filtro del consecuente “=” (También puede escribirse “igual”, esta búsqueda también arroja los resultados, veintiuno en total, de la búsqueda realizada con la palabra “igualdad”, pero ninguna de estas lleva a una regla teórica que se ajuste a los datos del problema ni a lo que se pretende demostrar, por tal motivo se usa “=” que es el símbolo usado en el enunciado que queremos justificar).

Figura 54. Búsqueda de reglas teóricas por el consecuente. Esquema de análisis.

Buscar en

En el nombre

En el antecedente

En el consecuente

Texto a buscar

=

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Teorema 9.4 proporciones	Si $(a/b) = (c/d)$ entonces $(a/c) = (b/d)$	Si $(a/b) = (c/d)$	entonces $(a/c) = (b/d)$
Teorema 9.5 proporciones	Si $ad = bc$, entonces $(a/b) = (c/d)$	Si $ad = bc$,	entonces $(a/b) = (c/d)$
Transitividad de la igualdad	Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$	Si $x = y$ y $y = z$	entonces $x = z$
Teorema 11.3 fórmula de Herón	Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b, c y perímetro $2s$ entonces su área satisface la igualdad $[A(x)]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$	Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b, c y perímetro $2s$	entonces su área satisface la igualdad $[A(x)]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Mostrando 1 a 12 de 12 registros (filtrado de un total de 170 registros)

4.1.1. Podríamos realizar búsquedas como las realizadas en (1.1), (2.1) y (3.1) pero como es sabido, estas estrategias no corresponden a estrategias correctas.

4.2. Dentro de las reglas teóricas sugeridas por el asistente de demostración escogemos la propiedad transitiva de la igualdad, pues los otros registros se refieren a operaciones entre segmentos y proporcionalidad

y por ende no ofrecen ningún tipo de relación con respecto al enunciado que se desea demostrar.

Figura 55. Regla teórica elegida mediante el esquema de análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
	Transitividad de la igualdad		AB=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

- 4.3. Después de llevarla a la casilla de la regla teórica damos clic en símbolos para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y el consecuente.

Figura 56. Opción símbolos de la regla teórica escogida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
	si	Entonces	AB=BC
	x=y y=z	x=z	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Con este procedimiento podemos notar si la conclusión corresponde con el consecuente e la regla teórica, si el antecedente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que tengo como datos o si debo agregar alguna afirmación, ya sea evidente o por demostrar.

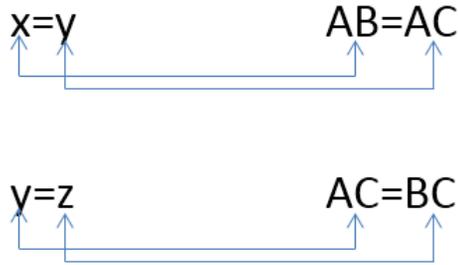
Relacionamos la igualdad $x=z$ de la regla teórica con $AB=BC$ de nuestro problema

Figura 57. Homologación de las proposiciones.



4.4. Teniendo en cuenta la relación $x=AB$ y $z=BC$, el antecedente de la regla teórica usada y los enunciados que “ $AB=AC$ ” y “ $AC=BC$ ” podemos concluir que:

Figura 58. Homologación de las proposiciones.



De esta manera tenemos que $y=AC$

4.5. Arrastramos entonces los enunciados “ $AB=AC$ ” y “ $AC=BC$ ” a la casilla de las condiciones necesarias y damos clic en el botón verificar del paso de razonamiento.

Figura 59. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar
Limpiar	Necesarias		Conclusión
AC=BC	si	Entonces	AB=BC
AB=AC	x=y	x=z	
	y=z		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Verificar Paso de Razonamiento

Dibujar Figura



4.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 60. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
AB=BC	x=z

Si No

4.7. Respondemos afirmativamente a esta pregunta dado que dicha comparación fue la conclusión que se obtuvo en el numeral 4.3. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 61. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
AC=BC AB=AC	x=y y=z

Si No

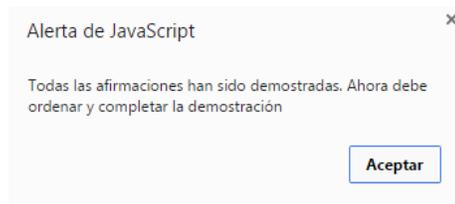
En el numeral 4.4 nos anticipamos a este control de validez, y concluimos que los enunciados de las condiciones necesarias con equivalentes a las afirmaciones del antecedente de la regla teórica. Por ende, respondemos afirmativamente a la pregunta y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 62. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia r Necesarias	Limpia r Regla Teórica	Limpia r Conclusión	
AC=BC AB=AC	Transitividad de la igualdad	AB=BC	

El enunciado “ $AB=BC$ ” era la última afirmación que debíamos demostrar. Entonces, el asistente de demostración nos informa que ya hemos justificado todo, y solo es cuestión de ordenar los pasos de razonamiento y cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el que ha sido justificada dicha afirmación para obtener una demostración deductiva formal del problema planteado.

Figura 63. Aviso de verificación de la conclusión de la demostración.



Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así.

Figura 64. Justificación de todos los pasos de razonamiento.

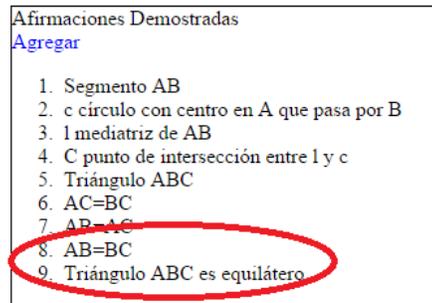
Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	$AC=BC$ (?) $AB=AC$ (?) $AB=BC$ (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	$AC=BC$
3	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	$AB=AC$
4	$AC=BC$ (?) $AB=AC$ (?)	Transitividad de la igualdad	$AB=BC$

4.8. Notamos también que la afirmación “ $AB=BC$ ”, que en 1.4 añadimos a la lista de afirmaciones por demostrar, ahora aparece en la lista de afirmaciones demostradas junto con la afirmación “Triángulo ABC es

equilátero” (que en un principio solo pasó de color negro a gris) y los datos dados del problema.

Figura 65. Todos los enunciados demostrados han pasado a la casilla afirmaciones demostradas.



5. Después de cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el cual fue justificado. Ordenamos el listado de los pasos de razonamiento teniendo en cuenta que una afirmación no puede ser presentada como condición necesaria de un paso de razonamiento si no se ha justificado en un paso anterior o si no es un dato del problema. Copiamos nuestro de listado a Word.

Figura 66. Demostración concluida.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	AB=AC
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC
3	AC=BC (2) AB=AC (1)	Transitividad de la igualdad	AB=BC
4	AC=BC (2) AB=AC (1) AB=BC (3)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

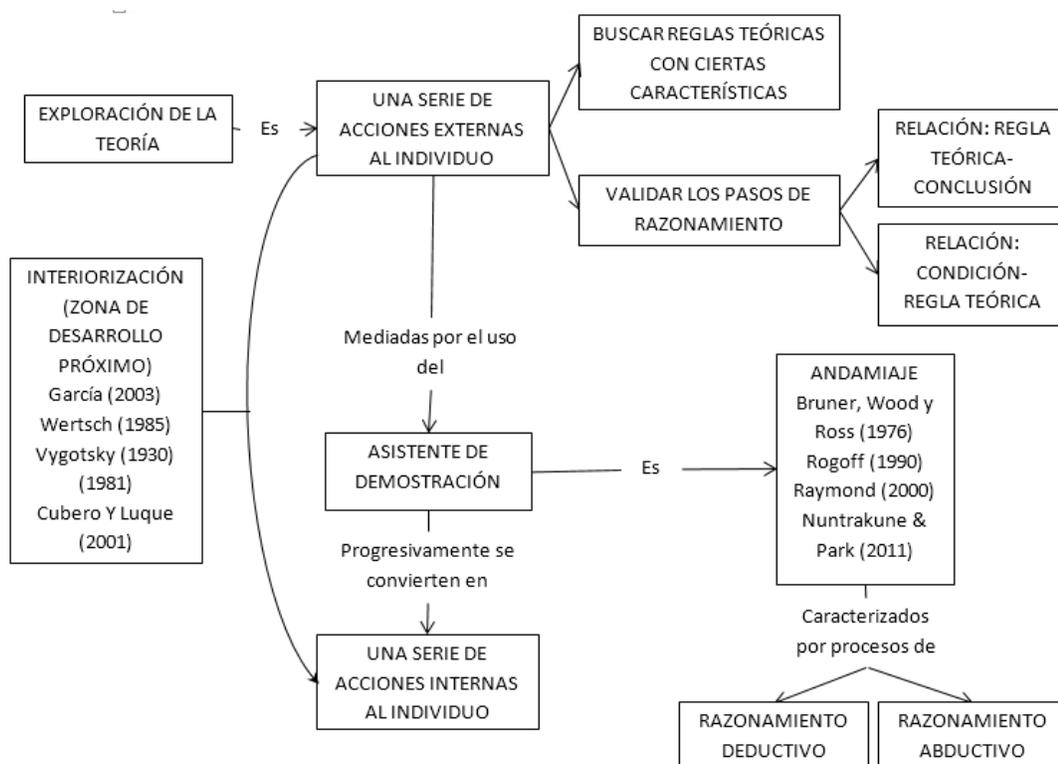
De esta manera se concluye le demostración del ejemplo planteado.

Marco teórico.

La presente investigación pretende estudiar la adquisición de habilidades en la construcción de demostraciones deductivas y su interiorización progresiva a lo largo de un semestre académico en estudiantes que participan del curso de Geometría Euclidiana. Este estudio es de corte cualitativo dado que se pretende conocer la forma en las que los estudiantes se enfrentan a problemas de demostración, con distintos niveles de complejidad, en tres tiempos distintos del semestre.

El sustento teórico de esta investigación debe explicar claramente cómo las operaciones intrasicológicas apoyadas en agentes externos, que se irán retirando de manera contingente, son reconstruidas a nivel intrasicológico. Esto lo sintetizamos en la siguiente gráfica.

Figura 67. Esquema del marco teórico.



3.1. Constructivismo.

El punto de divergencia entre las tres principales corrientes (conductismo, cognitivismo y constructivismo) radica en la manera como es concebido el conocimiento. En el conductismo, el conocimiento es considerado como una respuesta inconsciente y automática a estímulos o agentes externos al individuo. En el cognitivismo se concibe el conocimiento como el resultado de un proceso de modificación (de manera interna) de significados producidos por la interacción entre información del medio y el individuo. Mientras que en el constructivismo, como la misma palabra lo indica, el conocimiento es algo que está en construcción y se da de manera personal. Por lo tanto, es una elaboración subjetiva y de naturaleza variable.

El postulado fundamental del constructivismo es que los individuos, a través de la experiencia, construyen su conocimiento. No solo como un proceso de recepción de información procesada para su comprensión y uso (este hecho distancia a esta corriente de las corrientes conductistas), sino también de creación de modelos mentales (es debido a la existencia de estas funciones mentales que el constructivismo es asociado frecuentemente a las corrientes cognitivistas) que deben evolucionar de acuerdo a la situación a la que se enfrenta el individuo.

Cada individuo construye su propio conocimiento, sus propias directrices y los modelos mentales que le dan sentido y significado a sus experiencias y acciones. Dicho de otra manera, para el constructivismo el aprendizaje es el proceso de ajuste de las estructuras mentales de cada individuo para interpretar e interactuar con el medio.

Una clasificación general del constructivismo se deriva en dos tipos de teorías: las teorías con orientación psicológica o cognitiva, con Jean Piaget (1896-1980) como máximo exponente. Y las teorías de orientación social, con Lev Vygotsky (1896-1934) como principal representante.

3.1.1. La perspectiva sociocultural del desarrollo.

El fundamento del enfoque vygotskyano consiste en considerar al individuo como el resultado de un proceso histórico y social donde el lenguaje juega un papel esencial. Para Vygotsky, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio tanto físico como social (Vygotsky, 1978).

Según Vygotsky (1978) el quid de la comprensión de las acciones del individuo reside en la relación dialéctica que el medio guarda con estas. No solo el medio influye en las acciones del individuo, éste modifica y crea sus propias condiciones de desarrollo. Dando lugar a la necesidad de encontrar un método que permita estudiar las relaciones del sujeto sobre el medio y las relaciones del medio sobre el sujeto.

El estudio de la evolución de los procesos psicológicos pone al descubierto su naturaleza y es a través del análisis de esta evolución que se vislumbra su significado. Es esto a lo que llamó Vygotsky (1978), estudiarlo en su proceso de cambio.

Vygotsky se interesó especialmente en los procesos de reconstrucción interna de una actividad externa, a esto le llamó *interiorización*. Es decir, la transformación de procesos interpersonales en procesos intrapersonales. Las funciones aparecen dos veces, primero a nivel social (entre personas) y posteriormente a nivel personal (en el interior del individuo). De aquí que las funciones superiores tienen su origen en las relaciones entre individuos. El proceso de interiorización implica que el individuo reconstruirá mediante su propia actividad mental los procesos que previamente se daban en la interacción social. De esta manera, se puede apreciar que el individuo hace suyo lo que en momentos anteriores solo fue posible gracias a la interacción con agentes externos (1978).

3.1.2. El origen social de las funciones mentales.

Con el fin de dar a conocer una propuesta amplia sobre el origen social de las funciones mentales de los individuos, Vygotsky se basó en la “ley genética general del desarrollo cultural” del psicólogo y psiquiatra francés Pierre Janet (1859-1947).

Toda función en el desarrollo cultural del niño aparece dos veces. Primero aparece en el plano social, y después en el plano psicológico. Primero aparece entre personas, como una categoría interpsicológica, y luego dentro del niño, como una categoría intrapsicológica. Esto resulta igualmente válido en relación a la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos y el desarrollo de la voluntad (...). Se sobreentiende que la internalización transforma al proceso mismo, y cambia su estructura y sus funciones. Las relaciones sociales o relaciones entre personas subyacen en todas las funciones superiores y sus relaciones. (Vygotsky, 1981, p. 163).

Según Vygotsky (1981) existen dos tipos de funciones mentales: las funciones mentales inferiores y las superiores. Las funciones mentales inferiores están determinadas genéticamente y son condicionadas por la competencia de cada individuo.

Las funciones mentales superiores se consiguen a través de la interacción social y su evolución se da de la misma manera. Éstas son moldeadas por la forma de ser de la sociedad y la cultura en la cual se encuentra inmersa: las funciones mentales superiores están mediadas culturalmente y el comportamiento frente a éstas ofrece un abanico amplio de posibilidades. El conocimiento es el resultado de la interacción social; en la interacción con agentes externos el individuo adquiere conciencia de sí mismo lo que le permite desarrollar formas de pensar cada vez más complejas.

Para dilucidar como ocurre la transición de lo social a lo individual, en que consiste dicha transición y cuál es la relación entre ambos niveles, definiremos interiorización (internalización) y zona de desarrollo próximo.

3.1.3. Interiorización.

Para Vygotsky la interiorización o internalización (de acuerdo a la traducción) es la reconstrucción a nivel intrapsicológico de una operación interpsicológica. No como una réplica de la acción a nivel individual, sino como un proceso que conlleva transformaciones en las estructuras mentales e interiorización de funciones, entendiéndose como el proceso en el cual se constituye el nivel intrapsicológico (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1985).

Según Vygotsky (1978) el proceso de interiorización consiste en una serie de transformaciones:

- a. *Una operación que inicialmente representa una actividad externa es reconstruida y empieza a ocurrir internamente.* Es sumamente importante para el desarrollo de los procesos mentales superiores la transformación de la actividad inicial.
- b. *Un proceso interpersonal es transformado en un proceso intrapersonal.* Cada función aparece dos veces: primero, en el nivel social, y posteriormente, en el nivel individual; primero, en la interacción social (interpsicológico), y luego de manera interna (intrapsicológico). Todas las funciones mentales superiores, son de hecho, originadas por las relaciones entre individuos.
- c. La transformación de un proceso interpersonal en uno intrapersonal es el resultado de una serie de eventos de desarrollo. El proceso inicial, a pesar de estar transformándose, sigue existiendo como externo hasta cuando no sea definitivamente transformado en un proceso interno. La transición de algunas funciones es un proceso inacabado, es decir, esa es su fase final. De igual manera existen funciones que se convierten gradualmente

en internas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que estas funciones internas pueden cambiar de acuerdo a las modificaciones que se den en las leyes que rigen dicha actividad; incorporándose a un nuevo sistema con leyes propias.

Una vez caracterizado el funcionamiento de la transición del nivel social al nivel personal a través del concepto de interiorización, se tratará de esclarecer la dinámica entre el plano interpsicológico y el plano intrapsicológico refiriéndonos a dos conceptos clásicos vygotksyanos: zona de desarrollo real y zona de desarrollo próximo.

3.1.4. Zona de desarrollo real y zona de desarrollo potencial.

En la concepción clásica de Vygotsky (1978) la zona de desarrollo real se refiere a lo que está en la competencia del individuo; es decir, lo que puede hacer sin ayuda de agentes externos. Mientras que la zona de desarrollo potencial (ZDP) se define como la distancia o la diferencia que existe entre las acciones que el individuo puede realizar por sí mismo y aquellas que puede hacer con la ayuda de uno o más individuos con un nivel mayor de competencia sobre dichas acciones.

A partir de este concepto de ZDP, Vygotsky (1978) concluye que el desarrollo no se debe al esfuerzo personal de redescubrimiento de cada individuo, sino el resultado de interacción social, y mediante este el individuo se apropia de la cultura de su entorno social. En esta ZDP, los agentes activos (externos) no solo incluirán a personas, sino también artefactos como libros, videos, software, etc. (García, 2003).

Las investigaciones de Wertsch (1985) y Cubero y Luque (2001) permiten destacar las siguientes características de la zona de desarrollo próximo.

- a. La ZDP hace parte del nivel de desarrollo del individuo y del plano interpsicológico al mismo tiempo (refiriéndose a las formas de instrucción implicadas en el desarrollo de la actividad). Es decir, las actividades

educativas son las que generan la zona de desarrollo próximo (Wertsch, 1985).

- b. La ZDP supone una conciencia generalizada sobre los participantes acerca de la realización de una actividad en la que colaboran en la búsqueda de la solución de un problema. Aunque puede suceder que en un principio la definición de la actividad sea variable entre los participantes la interacción permitirá unificar criterios con respecto a las actividades realizadas.
- c. “La zona de desarrollo próximo no es una zona estática, sino dinámica, donde cada paso es una construcción interactiva específica de ese momento, que abre, a su vez, distintos cursos de evolución futuros” (García, 2003, p.77). Desde este enfoque (Wood, Bruner & Ross, 1976) formulan el concepto de *andamiaje* –que refleja este carácter dinámico y sugiere que el apoyo que se le proporciona al individuo, es aquel que se ajusta a sus competencias en cada momento y que va variando a medida que éste puede tener más responsabilidad en la actividad.

García (2003) defiende del enfoque socio-cultural de Vygotsky, que el conocimiento es construido a partir de la experiencia, y debe primar el desarrollo de actividades de laboratorio, experimentación y solución de problemas; donde el ambiente de aprendizaje tiene mayor relevancia que la explicación o mera transmisión de información. En el aprendizaje o la construcción de los conocimientos, la búsqueda, la indagación, la exploración, la investigación y la solución de problemas pueden jugar un papel importante.

3.1.5. El andamiaje.

Para Wood, Bruner & Ross (1976) el andamiaje es el término que describe la estructura de apoyo que el maestro, los padres y agentes externos le ofrecen al

individuo durante el proceso de aprendizaje. El andamiaje comprende una variedad de ayudas físicas y/o verbales, con el objetivo de facilitar el progreso de los estudiantes hacia la competencia (Rogoff, 1990) Estos apoyos tendrán un carácter transitorio y se irán retirando de manera contingente.

El andamiaje le permite al estudiante completar tareas que no podría realizar por si solo porque estimula la actividad del estudiante en la zona de desarrollo próximo. El andamiaje le proporciona al estudiante una estructura de apoyo que le permite ir más allá del nivel de lo que pueden hacer individualmente (Raymond, 2000).

Para Nuntrakune & Park (2011) desde el punto de vista didáctico, el andamiaje permite construir nuevos conocimientos de manera cooperativa; los conceptos no definidos o incorrectos pueden ser cambiados o corregidos y el conocimiento olvidado puede aparecer nuevamente.

Metodología

4.1. Panorama general del estudio.

La población de nuestro estudio está conformada por un grupo de estudiantes, de la Universidad Industrial de Santander, del curso de geometría euclidiana⁴ que trabajan bajo la metodología mencionada en el capítulo uno. Son estudiantes de las carreras de Licenciatura en Matemática y Matemáticas de primer, segundo, tercer y cuarto nivel. Es decir, estudiantes que ven la asignatura por primera vez y estudiantes que están repitiendo la materia por primera, segunda o tercera vez respectivamente.

Algunos de los estudiantes repitentes no han trabajado con la metodología de clase expuesta, pues en otros cursos impartidos en la universidad no se usa la misma metodología de clase. Mientras que otros, ya han visto la asignatura con las características que ya se mencionaron en el primer capítulo.

4.2. Descripción de la muestra.

Para nuestro estudio se tomó como muestra cinco estudiantes de primer nivel, es decir, estudiantes que ven por primera vez la asignatura. El criterio de elección de estos estudiantes viene dado por el desempeño mostrado en el primer examen (en la asignatura de Geometría Euclidiana). Se decide escoger al azar estudiantes con desempeño alto, medio y bajo.

4.3. Diseño de las actividades.

Esta etapa consiste en el planteamiento de problemas de demostración, similares a los trabajados en el curso de Geometría Euclidiana, que remitan al estudiante al

⁴ La duración del curso de geometría euclidiana es de dieciséis semanas.

uso de software de geometría dinámica para la construcción y la exploración gráfica y al asistente de demostración para la exploración de la teoría.

4.3.1. Diseño de la primera actividad.

En esta primera intervención se propone el siguiente problema.

Realice la siguiente construcción, y responda que clase de triángulo es el triángulo ABC .

1. Segmento \overline{AB}
2. Circunferencia c con centro en A que pasa por B .
3. l mediatriz de \overline{AB} .
4. C , punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia c .
5. Triángulo ABC .

Después de hacer la construcción y responder la pregunta se le solicita que realice la demostración de su afirmación utilizando el asistente de demostración. La intención es que demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

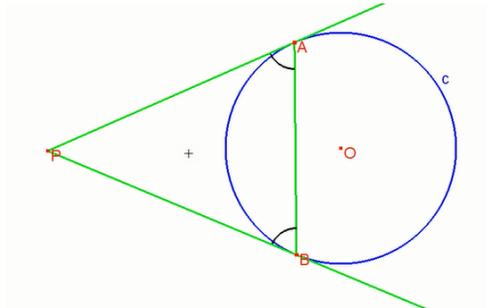
La hipótesis que se plantea con respecto a la aplicación de esta actividad es que estudiante le dará prioridad a los conocimientos previos e intentará usarlos en la solución del problema. Una de las razones que permiten prever esto se remite al hecho de que el proceso de familiarización con el asistente de demostración está en su fase inicial, el estudiante conoce algunas características y el funcionamiento del asistente pero no a profundidad. Se puede sugerir que esta actividad, que es aplicada en la cuarta semana del semestre, es el primer acercamiento al uso del asistente que será observado.

4.3.2. Diseño de la segunda actividad.

En la segunda intervención se propone el siguiente problema.

A partir de la construcción dada

Figura 68. Construcción en Cabri para la segunda actividad.



1. Círculo c con centro en O .
2. PA es tangente a c .
3. PB es tangente a c

Demuestre que $\angle PBA = \angle PAB$.

La intención de esta actividad es generar en el estudiante la necesidad por el uso reglas teóricas que en la décima semana de clase aún no son estudiadas. Se espera que el estudiante construya objetos auxiliares que le permitan visualizar la teoría en la construcción hecha.

Las hipótesis con respecto a esta intervención son:

1. El estudiante hará uso de la exploración de la teoría para encontrar la regla teórica desconocida (Teorema de los segmentos tangentes desde un punto exterior: Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto).
2. El estudiante mostrará evidencias de la interiorización de reglas teóricas; él usará el asistente solo para comprobar o verificar si los pasos de razonamiento que construye mentalmente son correctos. Las reglas teóricas en mención son las relativas a las propiedades de los triángulos.
3. El estudiante mostrará que sus estrategias a la hora de construir el paso de razonamiento están basadas en el análisis y en la síntesis, y además tratará

de anticiparse a los controles de validez de los pasos de razonamiento que construye.

4.3.3. Diseño de la tercera actividad.

En esta primera intervención se propone el siguiente problema.

Realice la siguiente construcción, y responda que clase de cuadrilátero es $ABDC$.

1. Dados tres puntos A, B y C
 2. Halle M , punto medio de BC .
 3. Construya el punto D , haciendo simetría central de A con respecto a M .
- ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABDC$?

La intención es que el estudiante demuestre que el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo.

Con esta actividad se espera generar en el estudiante la necesidad por el uso reglas teóricas que no son estudiadas en el curso de geometría euclidiana, y por ende no aparecen en el asistente de demostración. Esta intervención será implementada en la décimo sexta y última semana del semestre.

Las hipótesis con respecto a esta intervención son:

1. Ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración, el estudiante se remitiría a búsquedas en internet o en libros para construir la solución del problema.
2. El estudiante mostrará evidencias de la interiorización de reglas teóricas; él usará el asistente solo para comprobar o verificar si los pasos de razonamiento que construye mentalmente son correctos.

4.4. La implementación de las actividades y la recolección de la información.

El objetivo de la investigación hace necesaria la recolección de cierta cantidad de información de determinada naturaleza. Nos interesa saber qué hace, qué dice y que piensa el estudiante mientras está resolviendo el problema de demostración. Para atender estas necesidades se propone la videograbación y la entrevista clínica como instrumentos de recolección de datos.

Se propone la implementación de un análisis a priori de cada una de las actividades. De tal manera que, tras la ejecución de las situaciones problema, la información recogida permita establecer unas relaciones con las hipótesis establecidas previamente. Esta información puede ser o no, similar a la esperada por el investigador y constituir una fuente de información a posteriori que contraste el conocimiento anterior (Orús, 1986).

4.4.1. Análisis a priori.

El análisis a priori permite poner de manifiesto relaciones a priori entre las variables en función de sus características y contrastarlas con el resultado de la experimentación (Orús, 1986). Con el análisis a priori se explicitarán previamente los procesos de razonamiento, los esquemas de uso del asistente de demostración y las estrategias de solución en la construcción de los pasos de razonamiento que se espera aparezcan durante la construcción de la solución del problema (véase capítulo 5).

4.5. Instrumentos de recolección de datos.

4.5.1. Las videograbaciones.

Para poner de manifiesto qué hace y qué dice el estudiante mientras resuelve los problemas propuestos se harán videograbaciones. Se harán dos tipos de

grabaciones: una de ellas corresponde a lo que hace el estudiante sobre la construcción en Cabri y sobre el asistente de demostración. Es decir, se grabará lo que ocurre en la pantalla del computador. La segunda grabación se hace para capturar lo que el estudiante dice, señala, muestra o gesticula con respecto a las tareas realizadas en el computador.

El enfoque clínico desde la perspectiva de Hunting (1997), quien manifiesta que este tipo de enfoque permite al investigador ampliar su experiencia acerca de cómo trabaja matemáticamente la mente del individuo, permite transformar las ideas del estudiante en material oral y gesticular que mediante las videograbaciones podrá ser capturada para analizarse. Los videos se usarán para elaborar las transcripciones de los episodios que el investigador considere susceptibles de ser analizados para obtener sustento que permita validar o falsar la hipótesis de investigación.

4.5.2. La entrevista clínica.

La entrevista clínica es una técnica para estudiar la forma de las estructuras de conocimiento y los procesos de razonamiento, este tipo de entrevistas permite recopilar y analizar datos sobre los procesos mentales en el plano de las ideas auténticas de un sujeto y sus significados, ayuda a exponer las estructuras y procesos ocultos en el pensamiento del sujeto que no pueden ser detectados con las demás técnicas (Hunting, 1997; Clement, 2000).

Diseño de las entrevistas clínicas.

La entrevista clínica no tiene una estructura determinada pues su desarrollo depende de las respuestas de los participantes (Fernández, 2002).

Para que el desarrollo de la entrevista clínica pueda ser provocado intencionadamente, Hunting (1997) y Zazkis & Hazzan (1999) aseguran que las preguntas de la entrevista se deben caracterizar por:

1. Ser abiertas para que el estudiante tenga total libertad de escoger la forma en la que quiere responder.
2. Maximizar la oportunidad de discusión o diálogo para que los procesos de pensamiento puedan ser revelados.
3. Permitir tanto al estudiante como al investigador reflejar sus propios procesos de pensamiento.
4. Ser diseñadas para corresponder a un enfoque teórico de tal manera que las respuestas de los estudiantes sirvan como identificadores de los diferentes aspectos o etapas presentadas por la teoría.

Teniendo en cuenta estas directrices y unos análisis a priori más extensos y completos que los presentados en el siguiente capítulo, se procede a elaborar interrogantes que permitan poner en evidencia los procesos de pensamiento, ideas, significados, estrategias de solución y demás procesos ocultos en el pensamiento del estudiante.

Análisis a priori más extensos y completos se refiere a la primera versión de los análisis a priori, donde no solo se tenía en cuenta la solución ideal del problema, sino todas las posibles acciones en las que podría incurrir el estudiante cuando se enfrentará a la situación problema planteada. Anticipar que haría el estudiante, independientemente de si es correcto o no, nos permitiría controlar más efectivamente el rumbo de la entrevista.

La implementación de las entrevistas clínicas se da de manera concomitante a la aplicación de las actividades.

Análisis a priori de las actividades demostrativas.

En este capítulo se muestra el análisis a priori de cada una de las actividades demostrativas. Se presentan los caminos ideales para las construcciones de los pasos de razonamiento y de las demostraciones deductivas, usando para éstas la exploración de la teoría y los correspondientes esquemas de uso del asistente de demostración y la validación de los pasos de razonamiento construidos.

5.1. Análisis a priori actividad demostrativa uno.

A continuación presentamos el análisis de un problema donde el estudiante debe hacer una construcción en un software de geometría dinámica, formular una conjetura sobre la forma del triángulo obtenido y demostrar esta conjetura usando el asistente de demostración. Se le plantea el siguiente problema al estudiante

5.1.1. Problema.

Realice la siguiente construcción, y responda que clase de triángulo es el triángulo ABC .

1. Segmento \overline{AB}
2. Circunferencia c con centro en A que pasa por B .
3. l mediatriz de \overline{AB} .
4. C , punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia c .
5. Triángulo ABC .

Después de hacer la construcción y responder la pregunta se le solicita que realice la demostración de su afirmación utilizando el asistente de demostración.

5.1.2. Objetivo.

Verificar el dominio teórico del asistente de demostración y si utiliza de manera espontánea la exploración de la teoría para demostrar que el triángulo ABC es equilátero.

5.1.3. Descripción.

Esta experimentación se lleva a cabo después de la cuarta semana de clase. Los estudiantes están apropiándose del uso del asistente de demostración y no han trabajado con reglas teóricas referentes a la mediatriz.

A continuación presentamos las hipótesis sobre las posibles estrategias que pueden presentarse.

Respecto a la conjetura sobre la forma del triángulo: se espera que los estudiantes reconozcan que el triángulo es equilátero. Sin embargo, es posible que algunos estudiantes afirmen que es un triángulo isósceles. En este caso, el profesor le solicitará que mida los lados del triángulo para verificar su conjetura. Se espera que al tener las tres medidas en la pantalla el estudiante reformule su conjetura para decir que el triángulo es equilátero.

Respecto a las estrategias del uso del asistente de demostración para la construcción de la demostración, el camino ideal es:

1. Llevamos el enunciado “Triángulo ABC es equilátero” a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento.

Figura 69. Construcción de pasos de razonamiento.

Paso de Razonamiento

Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar Regla Teórica			Limpiar Conclusión
				Triángulo ABC es equilateral
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

- 1.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder a la afirmación que se quiere demostrar, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener, en su consecuente, afirmaciones que correspondan a “es un triángulo equilateral”. Entonces, escribimos en el filtro en el consecuente: “equilateral”. Aparece una única regla teórica.

Figura 70. Filtros de búsqueda, esquema de análisis.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	<input type="text"/>
En el antecedente	<input type="text"/>
En el consecuente	<input type="text" value="equilateral"/>

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
<u>Definición de triángulo equilateral</u>	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales entonces es equilateral	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales	entonces es equilateral

- 1.2. Ahora la arrastramos a la segunda casilla del paso de razonamiento.

Figura 71. Elección de la regla teórica. Esquema de análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Regla Teórica		Conclusión
Limpiarse Necesarias	Limpiarse	Limpiarse	Limpiarse
	Definición de triángulo equilátero		Triángulo ABC es equilátero
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

- 1.3. Para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente damos clic en la pestaña símbolos.

Figura 72. Opción símbolos de la regla teórica.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Regla Teórica		Conclusión
Limpiarse Necesarias	Limpiarse	Limpiarse	Limpiarse
	si	Entonces	Triángulo ABC es equilátero
	XY=YZ	triángulo XY Z es equilátero	
	XY=XZ		
	YZ=XZ		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Aquí debemos hacer una comparación entre el consecuente de la regla teórica y la conclusión del paso de razonamiento. Notamos que en el consecuente el triángulo es nombrado XYZ, mientras que en la conclusión recibe el nombre de ABC, lo que hacemos es relacionar letra a letra los dos nombres de los triángulos.

Figura 73. Homologación de los datos.



- 1.4. Reemplazamos estas letras en las afirmaciones del antecedente de la regla teórica, obteniendo $AB=BC$, $AB=AC$ y $AC=BC$, afirmaciones que escribimos en la lista de afirmaciones por demostrar.

Figura 74. Enunciados añadidos a la casilla de las afirmaciones por demostrar.

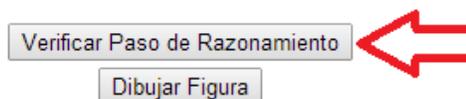
Afirmaciones por Demostrar

1. $BC=AC$
2. $AB=AC$
3. $AB=BC$
4. Triángulo ABC es equilátero

- 1.5. Posteriormente, las arrastramos a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 75. Botón de verificación de paso del paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpia	Regla Teórica	Limpia Conclusión
BC=AC AB=AC AB=BC	si XY=YZ XY=XZ YZ=XZ	Entonces triángulo XY Z es equilátero	Triángulo ABC es equilátero
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos



- 1.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 76. Primera pregunta para la validación del pasos de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
Triángulo ABC es equilátero	triángulo XY Z es equilátero

Sí No

- 1.7. En este caso, previamente hicimos la comparación de los triángulos ABC y XYZ y notamos que los dos enunciados son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 77. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
BC=AC AB=AC AB=BC	XY=YZ XY=XZ YZ=XZ

Sí No

Previamente, establecimos la relación entre los nombres de los triángulos y en consecuencia los nombres de los lados. Luego, respondemos sí al

segundo cuestionamiento y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 78. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
BC=AC AB=AC AB=BC		Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así.

Figura 79. Paso de razonamiento construido añadido al listado de pasos de razonamiento construido.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	BC=AC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

Notamos que en cada uno de los enunciados usados como condiciones aparece “(?)”. Esto indica que cada una de estas proposiciones debe tener un paso de razonamiento que la justifique.

Además, notamos que, en la casilla de Afirmaciones por Demostrar, la proposición “Triángulo ABC es equilátero” cambió de color negro a gris, esto indica que a pesar de que ya se ha demostrado esta proposición se han usado proposiciones para su justificación que aún no han sido validadas. Se espera que una vez validadas dichas proposiciones, “Triángulo ABC es equilátero” pase a la lista de afirmaciones demostradas.

Figura 80. Enunciado “triángulo ABC es equilátero” demostrado con condiciones sin justificar.

Afirmaciones por Demostrar
Agregar
1. $AC=BC$
2. $AB=AC$
3. $AB=BC$
4. Triángulo ABC es equilátero

2. Ahora arrastramos el enunciado “l mediatriz de AB” a la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

Figura 81. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Limpiar Necesarias			
l mediatriz de AB			
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

- 2.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del antecedente de la regla teórica debe corresponder a las condiciones del problema, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su antecedente afirmaciones que correspondan a “es mediatriz”. Entonces, escribimos en el filtro en el consecuente: “mediatriz”.

Figura 82. Búsqueda de regla teórica por el antecedente. Esquema de síntesis.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	<input type="text"/>
En el antecedente	<input type="text" value="mediatriz"/>
En el consecuente	<input type="text"/>

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de mediatriz	Si una recta es mediatriz de un segmento, entonces es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio	Si una recta es mediatriz de un segmento,	entonces es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio
Teorema 6.10 mediatriz	Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y	Si un punto está sobre la mediatriz de XY	entonces equidista de X y Y
Teorema 10.5 mediatriz de una cuerda	Si una recta es mediatriz de una cuerda de un círculo entonces contiene al centro del círculo	Si una recta es mediatriz de una cuerda de un círculo	entonces contiene al centro del círculo

Mostrando 1 a 3 de 3 registros (filtrado de un total de 170 registros)

2.2. Dentro las tres opciones que me ofrece la búsqueda practicada, debo escoger cual es la regla teórica que me permita construir un paso de razonamiento ajustándose a los enunciados que deben ser justificados. Haciendo una lectura de las tres reglas teóricas nos inclinamos por el teorema 6.10 mediatriz, ya que las otras reglas teóricas no concluyen con datos que aporten a la solución del problema. Además el término equidistancia permite establecer alguna relación con las igualdades entre los lados del triángulo, y es la razón que lleva a escoger esta regla teórica.

Llevamos esta regla teórica a la casilla correspondiente del paso de razonamiento y damos clic en la pestaña símbolos con el fin de obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente.

Figura 83. Regla teórica elegida según el esquema de las síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpia	Regla Teórica	Limpia Conclusión
Limpia Necesarias			
I mediatriz de AB	si	Entonces	
	Z está sobre la mediatriz de XY	$XZ=YZ$	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

2.3. Con este procedimiento podemos notar si las condiciones están completas o si se debe incluir otras y si el consecuente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que quiero demostrar. Relacionamos el segmento AB de nuestro problema con el segmento XY de la regla teórica.

Figura 84. Homologación de las proposiciones.



En las condiciones podemos notar que, además de tener que I es mediatriz de AB debemos tener un punto sobre la mediatriz.

Dentro de nuestras condiciones tenemos el enunciado “C punto de intersección entre I y d”; que C sea punto de intersección de I (mediatriz) y d (círculo) involucra implícitamente el hecho de que C está sobre la mediatriz y está sobre el círculo, entonces C es nuestro punto sobre la mediatriz y corresponde al punto Z de la regla teórica.

La aceptación de la proposición “C punto de intersección entre I y d” como proposición equivalente a “C está sobre la mediatriz de AB” depende del contrato didáctico acerca del rigor que se ha pactado en la clase de geometría. Para nuestro caso, las aceptaremos como proposiciones

equivalentes. Por lo tanto, la incluimos en la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

2.4. En la comparación del numeral anterior notamos que $A=X$ y $B=Y$, también aceptamos que el punto Z de la regla teórica es el homólogo del punto C que tenemos en nuestras condiciones necesarias. De esta manera, obtendremos las siguientes igualdades $AC=XZ$ y $BC=YZ$. Por lo tanto, la conclusión de la regla teórica es que $AC=BC$, entonces agregamos este dato en la casilla de la conclusión del paso de razonamiento.

Figura 85. Paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Regla Teórica	Conclusión	
I mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

2.5. Ahora damos clic en el botón verificar paso de razonamiento.

Figura 86. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Regla Teórica	Conclusión	
I mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos



- 2.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 87. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
AC=BC	XZ=YZ

Sí No

- 2.7. En este caso, nos anticipamos en la comparación de las igualdades entre las ecuaciones $AC=BC$ y $XZ=YZ$ y notamos que los dos enunciados son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 88. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
l mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c	Z está sobre la mediatriz de XY

Sí No

Previamente, establecimos la relación entre los nombres de los triángulos y en consecuencia los nombres de los lados. Luego, respondemos sí al segundo cuestionamiento y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 89. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
l mediatriz de AB C punto de intersección entre l y c		Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el listado de pasos de razonamiento queda así.

Figura 90. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento construidos.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	AC=BC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	El triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC

Notamos que en algunos de los enunciados usados como condiciones aparece “(?)”. Esto indica que cada una de estas proposiciones debe tener un paso de razonamiento que la justifique. Mientras que en otros aparece “(D)” indicando que dicha afirmación es un dato dado.

2.8. Notamos también que la afirmación “AC=BC”, que en 1.4 añadimos a la lista de afirmaciones por demostrar, ahora aparece en la lista de afirmaciones demostradas junto los datos dados del problema.

Figura 91. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. c círculo con centro en A que pasa por B
2. C punto de intersección entre l y c
3. l mediatriz de AB
4. Segmento AB
5. Triángulo ABC
6. AC=BC

3. Colocamos “AB=AC” en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento.

Figura 92. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema del análisis.

Paso de Razonamiento				
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica		Limpiar Conclusión
				AB=AC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

3.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder a las conclusiones del problema, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su consecuente afirmaciones que correspondan a “equidista”. Entonces, escribimos en el filtro del consecuente “equidista” (puede escribirse “igual”, “igualdad”, o incluso “=” pero ninguna de estas lleva a una regla teórica que se ajuste a los datos del problema ni a lo que se pretende demostrar, por tal motivo se usa la palabra equidista que es un sinónimo de los términos anteriormente mencionados).

Figura 93. Búsqueda de una regla teórica. Esquema del análisis.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	<input type="text"/>
En el antecedente	<input type="text"/>
En el consecuente	<input type="text" value="equidista"/>

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de círculo	Si dos puntos están sobre un mismo círculo, entonces equidistan del centro	Si dos puntos están sobre un mismo círculo,	entonces equidistan del centro
Teorema 6.10 mediatriz	Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y	Si un punto está sobre la mediatriz de XY	entonces equidista de X y Y
Teorema 7.5 mediatrices de un triángulo	Si tres rectas son mediatrices de un triángulo entonces se cortan en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo	Si tres rectas son mediatrices de un triángulo	entonces se cortan en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo

Mostrando 1 a 6 de 6 registros (filtrado de un total de 170 registros)

3.2. Dentro de los seis registros que me ofrece la búsqueda practicada, debo escoger cual es la regla teórica que me permita construir un paso de razonamiento ajustándose a los enunciados que deben ser justificados. Haciendo una lectura de estas reglas teóricas nos inclinamos por la “Definición de círculo”, ya que las otras reglas teóricas no concluyen con datos que aporten a la solución del problema. Además el término equidistancia permite establecer alguna relación con las igualdades entre los lados del triángulo, y es la razón que lleva a escoger esta regla teórica.

Figura 94. Regla teórica elegida según el esquema del análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
		Definición de círculo	AB=AC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

3.3. Y escogemos la regla teórica: definición de círculo. Después de llevarla a la casilla de la regla teórica damos clic en símbolos para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y el consecuente.

Figura 95. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar Regla Teórica	Limpiar Conclusión	
	si	Entonces	AB=AC
	X está sobre el círculo w Y está sobre el círculo w Z centro de w	XZ=YZ	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Con este procedimiento podemos notar si la conclusión está completa o si se debe incluir otros enunciados y si el antecedente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que tengo como datos o si debo agregar alguna afirmación, ya sea evidente o por demostrar.

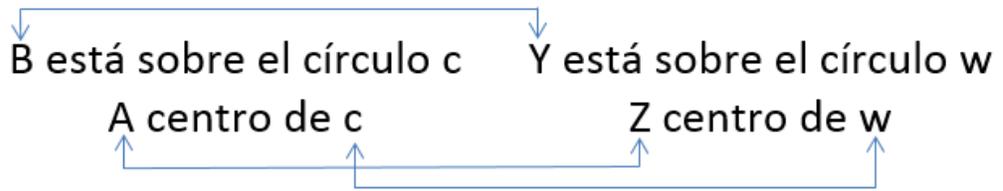
Relacionamos la igualdad $XZ=YZ$ de la regla teórica con $AB=AC$ de nuestro problema

Figura 96. Homologación de las proposiciones.



3.4. Teniendo en cuenta el análisis anterior y que el enunciado “c círculo con centro en A que pasa por B” dice de manera implícita que “B está sobre el círculo c” y que “A centro de c”. Tenemos que este enunciado es equivalente a “Y está sobre el círculo w” y “Z centro de w”.

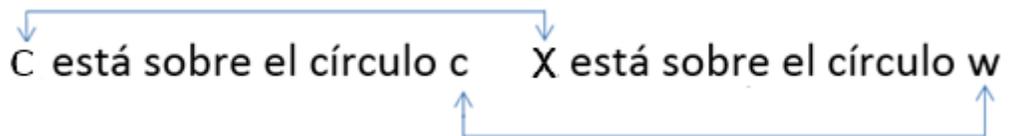
Figura 97. Homologación de las proposiciones.



Concluimos entonces que, $Y=B$, $A=Z$ y que $c=w$.

Hace falta la afirmación “X está sobre el círculo w”. Haciendo una revisión dentro de nuestros datos notamos que tenemos la expresión “C punto de intersección entre l y c” que indica de manera implícita que el punto C hace parte tanto de la mediatriz l como del círculo c. Es decir, “C está sobre el círculo c.

Figura 98. Homologación de las proposiciones.



Y se concluye que $C=X$.

3.5. Arrastramos las afirmaciones “C punto de intersección entre l y c” y “c círculo con centro en A que pasa por B” a la casilla de las condiciones necesarias. Y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 99. Verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Circunferencia d con centro en A que pasa por B C punto de intersección entre l y c	si	Entonces	AB=AC
	X está sobre el círculo w Y está sobre el círculo w Z centro de w	XZ=YZ	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Verificar Paso de Razonamiento

Dibujar Figura



- 3.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 100. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
AB=AC	XZ=YZ

Si No

- 3.7. En este caso, previamente hicimos la comparación (numeral 3.3) de los enunciados y notamos que son equivalentes, entonces damos clic en sí. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 101. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
Circunferencia d con centro en A que pasa por B	X está sobre el círculo w Y está sobre el círculo w
C punto de intersección entre l y c	Z centro de w

Si No

En el numeral 3.4 nos anticipamos a este control de validez, y concluimos que los enunciados de las condiciones necesarias con equivalentes a las afirmaciones del antecedente de la regla teórica. Por ende, respondemos afirmativamente a la pregunta y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 102. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Circunferencia d con centro en A que pasa por B C punto de intersección entre l y c		Definición de círculo	$AB=AC$

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así.

Figura 103. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	AC=BC (?) AB=AC (?) AB=BC (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC
3	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	AB=AC

Notamos que en algunos de los enunciados usados como condiciones aparece “(D)” indicando que dichas afirmaciones son datos dados.

3.8. Como la afirmación “AC=BC” ha sido justificada pasa a la casilla de afirmaciones demostradas.

Figura 104. Enunciado demostrado que ha pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. Segmento AB
2. c círculo con centro en A que pasa por B
3. l mediatriz de AB
4. C punto de intersección entre l y c
5. Triángulo ABC
6. AC=BC
7. AB=AC

4. Colocamos el enunciado “AB=BC” en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento.

Figura 105. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema del análisis.

Condiciones Necesarias	Regla Teórica			Conclusión
Limpiar	Limpiar	Limpiar	Limpiar	Limpiar
				AB=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

4.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica debe corresponder con los enunciados del problema que se quieren demostrar, buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener en su consecuente afirmaciones que correspondan a una igualdad entre segmentos. Entonces, escribimos en el filtro del consecuente “=” (También puede escribirse “igual”, esta búsqueda también arroja los resultados, veintiuno en total, de la búsqueda realizada con la palabra “igualdad”, pero ninguna de estas lleva a una regla teórica que se ajuste a los datos del problema ni a lo que se pretende demostrar, por tal motivo se usa “=” que es el símbolo usado en el enunciado que queremos justificar).

Figura 106. Búsqueda de la regla teórica por el consecuente. Esquema del análisis.

Buscar en

En el nombre

En el antecedente

En el consecuente

Texto a buscar

=

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Teorema 9.4 proporciones	Si $(a/b) = (c/d)$ entonces $(a/c) = (b/d)$	Si $(a/b) = (c/d)$	entonces $(a/c) = (b/d)$
Teorema 9.5 proporciones	Si $ad = bc$, entonces $(a/b) = (c/d)$	Si $ad = bc$,	entonces $(a/b) = (c/d)$
Transitividad de la igualdad	Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$	Si $x = y$ y $y = z$	entonces $x = z$
Teorema 11.3 fórmula de Herón	Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b, c y perímetro $2s$ entonces su área satisface la igualdad $[A(x)]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$	Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b, c y perímetro $2s$	entonces su área satisface la igualdad $[A(x)]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Mostrando 1 a 12 de 12 registros (filtrado de un total de 170 registros)

4.2. Dentro de las reglas teóricas sugeridas por el asistente de demostración escogemos la propiedad transitiva de la igualdad, pues los otros registros se refieren a operaciones entre segmentos y proporcionalidad y por ende no ofrecen ningún tipo de relación con respecto al enunciado que se desea demostrar.

Figura 107. Elección de la regla teórica según el esquema del análisis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Limpiar Necesarias			
		Transitividad de la igualdad	AB=BC
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

4.3. Después de llevarla a la casilla de la regla teórica damos clic en símbolos para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y el consecuente.

Figura 108. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Limpiar Necesarias			
	si	Entonces	AB=BC
	x=y	x=z	
	y=z		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

Con este procedimiento podemos notar si la conclusión corresponde con el consecuente e la regla teórica, si el antecedente de esta regla teórica es acorde a los enunciados que tengo como datos o si debo agregar alguna afirmación, ya sea evidente o por demostrar.

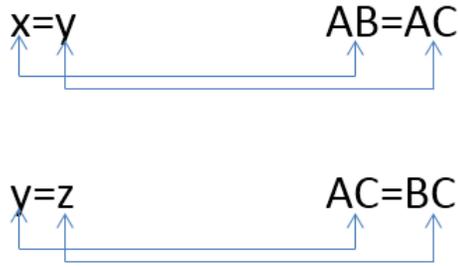
Relacionamos la igualdad $x=z$ de la regla teórica con $AB=BC$ de nuestro problema

Figura 109. Homologación de las proposiciones.



4.4. Teniendo en cuenta la relación $x=AB$ y $z=BC$, el antecedente de la regla teórica usada y los enunciados que “ $AB=AC$ ” y “ $AC=BC$ ” podemos concluir que:

Figura 110. Homologación de las proposiciones.



De esta manera tenemos que $y=AC$

- 4.5. Arrastramos entonces los enunciados “ $AB=AC$ ” y “ $AC=BC$ ” a la casilla de las condiciones necesarias y damos clic en el botón verificar del paso de razonamiento.

Figura 111. Botón para verificar la validez del paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento

Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar	Conclusión
AC=BC AB=AC	si	Entonces		AB=BC
	x=y y=z	x=z		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos	

- 4.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 112. Primera pregunta para la verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
AB=BC	x=z

Si No

4.7. Respondemos afirmativamente a esta pregunta dado que dicha comparación fue la conclusión que se obtuvo en el numeral 4.3. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 113. Segunda pregunta para la verificación de la validez del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
AC=BC AB=AC	x=y y=z

Si No

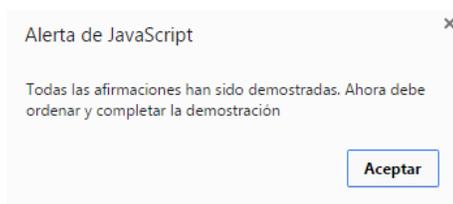
En el numeral 4.4 nos anticipamos a este control de validez, y concluimos que los enunciados de las condiciones necesarias con equivalentes a las afirmaciones del antecedente de la regla teórica. Por ende, respondemos afirmativamente a la pregunta y aparecerá con los bordes verdes el paso de razonamiento construido.

Figura 114. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Limpia Regla Teórica	Limpia Conclusión	
AC=BC AB=AC	Transitividad de la igualdad	AB=BC	

El enunciado “ $AB=BC$ ” era la última afirmación que debíamos demostrar. Entonces, el asistente de demostración nos informa que ya hemos justificado todo, y solo es cuestión de ordenar los pasos de razonamiento y cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el que ha sido justificada dicha afirmación para obtener una demostración deductiva formal del problema planteado.

Figura 115. Mensaje de verificación de la conclusión de la demostración.



Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el paso de razonamiento queda así.

Figura 116. Todos los enunciados han sido justificados.

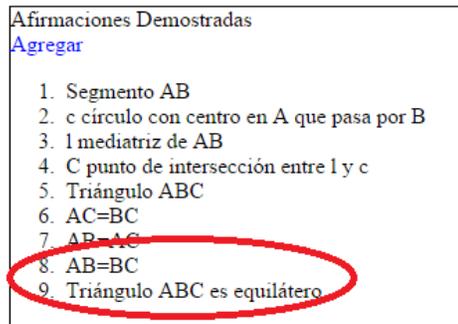
Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	$AC=BC$ (?) $AB=AC$ (?) $AB=BC$ (?)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	$AC=BC$
3	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	$AB=AC$
4	$AC=BC$ (?) $AB=AC$ (?)	Transitividad de la igualdad	$AB=BC$

4.8. Notamos también que la afirmación “ $AB=BC$ ”, que en 1.4 añadimos a la lista de afirmaciones por demostrar, ahora aparece en la lista de afirmaciones demostradas junto con la afirmación “Triángulo ABC es

equilátero” (que en un principio solo pasó de color negro a gris) y los datos dados del problema.

Figura 117. Los enunciados justificados han pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.



5. Después de cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el cual fue justificado. Ordenamos el listado de los pasos de razonamiento teniendo en cuenta que una afirmación no puede ser presentada como condición necesaria de un paso de razonamiento si no se ha justificado en un paso anterior o si no es un dato del problema. Copiamos nuestro de listado a Word.

Figura 118. Demostración concluida.

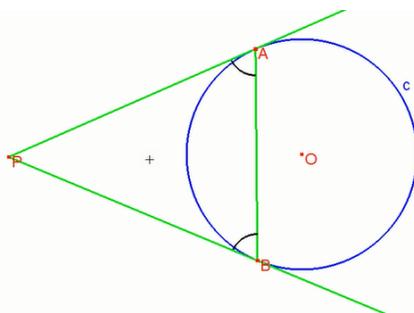
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	Circunferencia d con centro en A que pasa por B (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Definición de círculo	AB=AC
2	l mediatriz de AB (D) C punto de intersección entre l y c (D)	Teorema 6.10 mediatriz	AC=BC
3	AC=BC (2) AB=AC (1)	Transitividad de la igualdad	AB=BC
4	AC=BC (2) AB=AC (1) AB=BC (3)	Definición de triángulo equilátero	Triángulo ABC es equilátero

5.2. Análisis a priori actividad demostrativa dos.

A continuación, presentamos el análisis a priori de un problema donde el estudiante debe construir una demostración deductiva formal; haciendo uso de la exploración de la teoría como la acción que le permitirá obtener definiciones, postulados o teoremas susceptibles de justificar las afirmaciones que quiere demostrar.

5.2.1. Problema.

Figura 119. Construcción en Cabri para el problema de la segunda actividad.



1. Círculo c con centro en O .
2. PA es tangente a c .
3. PB es tangente a c

Demuestre que $\angle PBA = \angle PAB$.

5.2.2. Objetivo.

Verificar el dominio teórico del asistente de demostración y si realiza un uso espontáneo de la exploración de la teoría para demostrar que el ángulo PBA es congruente con el ángulo PAB .

5.2.3. Descripción.

Esta experimentación se lleva a cabo después de la décima semana de clase. Se presume que los estudiantes ya se han apropiado del uso del asistente de

demostración y en cierta medida de la exploración de la teoría y también de algunas reglas teóricas (Postulados de congruencia de triángulos, paralelismo, triángulos, cuadriláteros y postulados de semejanza). Vale la pena anotar que en la clase no se han trabajado las reglas teóricas referentes a las rectas tangentes.

A continuación presentamos las hipótesis sobre las posibles estrategias que pueden presentarse.

Respecto a las estrategias del uso del asistente de demostración para la construcción de la demostración, el camino ideal es:

Después de revisar la construcción en Cabri:

1. Llevamos el enunciado “ PA es tangente a c ” ó “ PB es tangente a c ” (en este caso tomamos el primer enunciado) a la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

Figura 120. Construcción de un paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia Necesarias	Limpia Regla Teórica	Limpia Conclusión	
PA es tangente a c			
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

- 1.1. Anticipando el primer control de validación de un paso de razonamiento, según el cual una de las afirmaciones del antecedente de la regla teórica debe corresponder con las afirmaciones de los datos del problema. Buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener, en su antecedente, afirmaciones que correspondan a segmentos tangentes a círculos. Entonces, escribimos en el filtro en el antecedente: “tangente”.

Figura 121. Búsqueda de la regla teórica. Esquema de la síntesis.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	
En el antecedente	tangente
En el consecuente	

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
10.10 recta tangente	tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo	perpendicular a una tangente en un punto del círculo,	entonces la recta contiene al centro del círculo
Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une el centro con el punto	Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior	entonces son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une el centro con el punto
Teorema 10.15 ángulo	Si un ángulo está formado por una	Si un ángulo está formado por una	

Mostrando 1 a 8 de 8 registros (filtrado de un total de 170 registros)

1.2. Dentro las ocho opciones que me ofrece la búsqueda practicada, debo escoger cual es la regla teórica que, además de tener en su antecedente afirmaciones que correspondan a segmentos tangentes a círculos, me permita construir un paso de razonamiento ajustándose a los enunciados que deben ser justificados.

Haciendo una lectura de las ocho reglas teóricas nos inclinamos por el teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior, notando que nuestra construcción cuenta con las características dadas en el antecedente de esta regla teórica y asumiendo que se puede construir la recta que va desde el punto exterior P al centro O del círculo c.

Llevamos esta regla teórica a la casilla correspondiente del paso de razonamiento y damos clic en la pestaña símbolos con el fin de obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente.

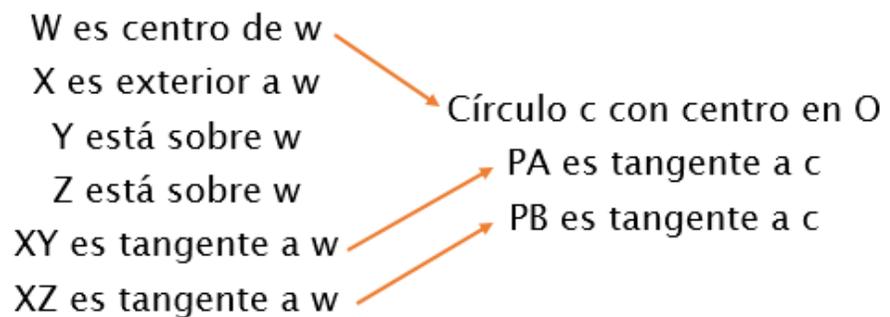
Figura 122. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones		Regla Teórica	
Limpiarse	Necesarias	Limpiarse	Conclusión
PA es tangente a c		si	Entonces
		W es centro de w	
		X es exterior a w	$XY=XZ$
		Y está sobre w	$\angle WXY = \angle WXZ$
		Z está sobre w	
		XY es tangente a w	
		XZ es tangente a w	
Nombre	Lengua Natural	Símbolos	

1.3. Aquí debemos hacer una comparación entre el antecedente de la regla teórica y la conclusión del paso de razonamiento. Notamos que el antecedente, de la regla teórica elegida, tiene seis enunciados y en nuestras condiciones necesarias tenemos un enunciado y en los datos del problema dos enunciados más.

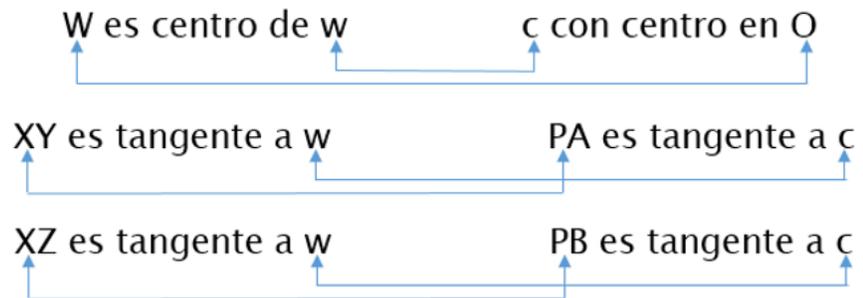
1.3.1. Comparamos los enunciados que tenemos, como datos dados, con las condiciones del paso de razonamiento.

Figura 123. Comparación entre los datos del problema y el antecedente de la regla teórica.



Posteriormente, hacemos una comparación entre las letras usadas en los enunciados para de esta manera poder identificar los homólogos de las letras usadas en el problema.

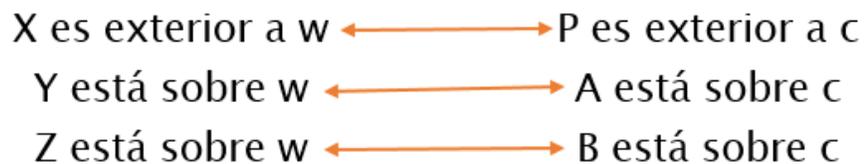
Figura 124. Homologación de las proposiciones.



Concluimos entonces que $X=P$, $Y=A$, $Z=B$, $W=O$ y $w=c$.

1.3.2. Observamos entonces que los enunciados faltantes son.

Figura 125. Verificación de las proposiciones faltantes.

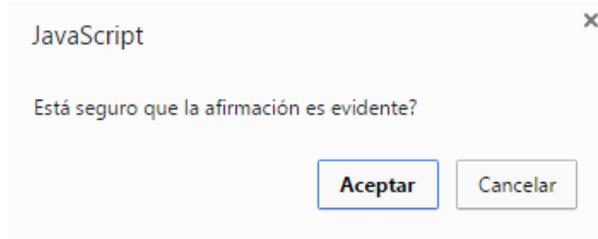


Debemos agregar estas proposiciones teniendo en cuenta si estos enunciados son evidentes o si deben ser justificados.

1.4. De acuerdo a la construcción evidenciamos que las afirmaciones “A está sobre c ” y “B está sobre c ” son implícitamente dadas en los enunciados “PA es tangente a c ” y “PB es tangente a c ”. Y el enunciado “P es exterior a x ” aunque no es dado, sabemos que hace parte de la construcción. Por lo tanto agregamos dichas afirmaciones en la casilla de afirmaciones demostradas.

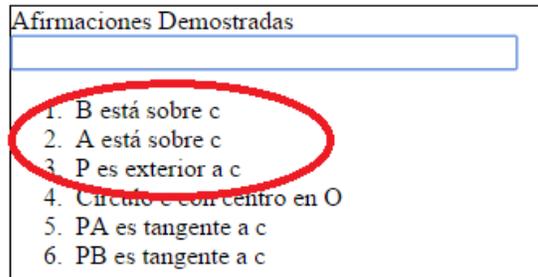
Damos clic en agregar y escribimos los enunciados antes mencionados. Una vez damos clic en aceptar el asistente de demostración pregunta si la afirmación incluida es evidente. Aceptamos. Pues previamente nos anticipamos a este control.

Figura 126. Mensaje de verificación sobre la evidencia de los enunciados añadidos como afirmaciones demostradas.



De inmediato aparecerán en nuestra lista de afirmaciones demostradas los enunciados incluidos.

Figura 127. Enunciados añadidos para completar las condiciones de la regla teórica.



Arrastramos estas afirmaciones a la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

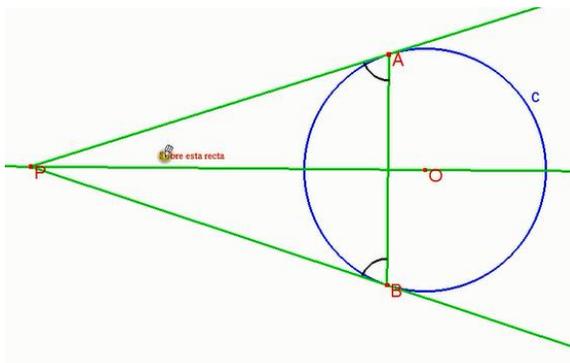
Figura 128. Proposiciones añadidas a la casilla uno, condiciones necesarias, de paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA es tangente a c	si	Entonces	
Círculo c con centro en O	W es centro de w	$XY = XZ$ $\angle WXY = \angle WXZ$	
B está sobre c	X es exterior a w		
A está sobre c	Y está sobre w		
P es exterior a c	Z está sobre w		
PB es tangente a c	XY es tangente a w		
	XZ es tangente a w		
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

1.5. Observamos que esta regla teórica nos permite demostrar que los segmentos tangentes PA y PB son iguales y que los ángulos que se forman

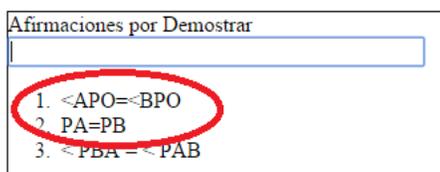
con dichos segmentos y la recta que va del punto exterior al centro del círculo son congruentes. Notamos que debemos construir la recta OP como objeto auxiliar. (esto lo hacemos en Cabri).

Figura 129. Construcción de recta auxiliar sobre la construcción del problema.



A partir de esta observación y del consecuente de la recta teórica se concluye que se deben incluir las afirmaciones “ $PA=PB$ ” y “ $\angle APO=\angle BPO$ ” en la casilla de afirmaciones por demostrar.

Figura 130. Enunciados añadidos a la casilla de afirmaciones por demostrar.



Arrastramos estos enunciados a la casilla de las conclusiones y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 131. Botón para la verificación de la validez.

Paso de Razonamiento

Condiciones Limpiar Necesarias		Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA es tangente a c Círculo c con centro en O B está sobre c A está sobre c P es exterior a c PB es tangente a c	si W es centro de w X es exterior a w Y está sobre w Z está sobre w XY es tangente a w XZ es tangente a w	Entonces XY=XZ $\angle WXY = \angle WXZ$	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

1.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 132. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
PA=PB $\angle APO = \angle BPO$	XY=XZ $\angle WXY = \angle WXZ$

Si No

1.7. En el numeral 1.5 nos anticipamos a este control de validación y encontramos la relación de los enunciados que quiero demostrar y los enunciados del consecuente de la regla teórica. Por lo tanto, respondemos afirmativamente. Automáticamente, aparece una segunda pregunta

acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 133. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
PA es tangente a c	W es centro de w
Círculo c con centro en O	X es exterior a w
B está sobre c	Y está sobre w
A está sobre c	Z está sobre w
P es exterior a c	XY es tangente a w
PB es tangente a c	XZ es tangente a w

Si No

Previamente establecimos las relaciones entre las condiciones necesarias del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica y también agregamos algunas afirmaciones evidentes, razón por la cual respondemos afirmativamente. Y aparecerá el paso de razonamiento construido con bordes de color verde.

Figura 134. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA es tangente a c Círculo c con centro en O B está sobre c A está sobre c P es exterior a c PB es tangente a c		Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el listado de pasos de razonamiento queda así.

Figura 135. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PA es tangente a c (D) Círculo c con centro en O (D) B está sobre c (E) A está sobre c (E) P es exterior a c (E) PB es tangente a c (D)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$

Notamos que en algunos de los enunciados usados como condiciones aparece “(E)”. Esto indica que cada una de estas proposiciones no es un dato del problema y han sido incluidas dentro del este listado teniendo en cuenta que son afirmaciones evidentes. Mientras que en otros aparece “(D)” indicando que dicha afirmación es un dato dado.

- 1.8. Notamos que las afirmaciones “PA=PB” y “ $\angle APO = \angle BPO$ ” que fueron incluidas en el numeral 1.5 han pasado de la casilla de afirmaciones por demostrar a la casilla de afirmaciones demostradas.

Figura 136. Enunciados justificados que han pasado a la casilla de afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. B está sobre c
2. A está sobre c
3. P es exterior a c
4. Círculo c con centro en O
5. PA es tangente a c
6. PB es tangente a c
7. PA=PB
8. $\angle APO = \angle BPO$

2. Como recientemente se estudiaron reglas teóricas relativas a los triángulos y sus propiedades (en el desarrollo del programa del curso de geometría euclidiana), es natural que como estudiantes tratemos de seguir el siguiente camino: tomar a PA y PB como lados del triángulo APB y sabiendo que PA=PB para concluir

que el triángulo APB es isósceles y por lo tanto los ángulos de su base son congruentes.

Aunque es probable que los estudiantes dejen de usar el asistente de demostración para construir estos pasos de razonamiento, lo usaremos para marcar la misma tendencia en cuanto a la exploración de la teoría y la construcción de pasos de razonamiento.

Llevamos el enunciado “PA=PB” a la casilla de condiciones necesarias del paso de razonamiento.

Figura 137. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA=PB			
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

2.1. Anticipándonos al primer control sobre la validez del paso de razonamiento según el cual una de las afirmaciones del antecedente de la regla teórica debe corresponder con las afirmaciones de los datos del problema. Buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener, en su antecedente, afirmaciones que correspondan a lados iguales de un triángulo. Entonces, escribimos en el filtro en el antecedente: “lados iguales”.

Figura 138. Búsqueda de reglas teóricas por el antecedente. Esquema de la síntesis.

Buscar en	Texto a buscar
En el nombre	
En el antecedente	lados iguales
En el consecuente	

Reglas Teóricas

Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Definición de triángulo equilátero	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales entonces es equilátero	Si un triángulo tiene todos sus lados iguales	entonces es equilátero
Definición de triángulo isósceles	Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces es isósceles	Si un triángulo tiene dos lados iguales	entonces es isósceles
Definición de triángulos congruentes	Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes iguales y sus ángulos correspondientes iguales, entonces son congruentes	Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes iguales,	entonces son congruentes

Mostrando 1 a 7 de 7 registros (filtrado de un total de 170 registros)

2.2. De antemano previmos que la regla teórica a usar era la definición de triángulo isósceles. Llevamos esta regla teórica a la casilla correspondiente del paso de razonamiento y damos clic en la pestaña símbolos con el fin de obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente.

Figura 139. Opción símbolos de la regla teórica elegida.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA=PB	si	Entonces	
	XY=YZ	triángulo XYZ es isósceles en Y	
	Nombre	Lengua Natural	Símbolos

2.3. Aquí debemos hacer una comparación entre el antecedente de la regla teórica y la conclusión del paso de razonamiento. Notamos que el antecedente, de la regla teórica elegida y las condiciones del problema tienen la misma afirmación.

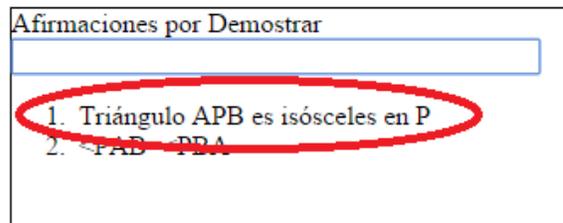
Figura 140. Homologación de las proposiciones.



Concluimos que $P=Y$, $A=X$ y $Z=B$.

2.4. Según el numeral anterior la afirmación por demostrar en este paso de razonamiento sería: “triángulo APB es isósceles en P”. Agregamos este enunciado en la casilla de afirmaciones por demostrar.

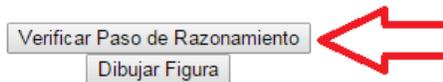
Figura 141. Enunciado agregado a la casilla de afirmaciones por demostrar.



2.5. Arrastramos esta afirmación a la casilla de las conclusiones y damos clic en verificar paso de razonamiento.

Figura 142. Botón para la verificación de la validez del paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
PA=PB	si	Entonces	Triángulo APB es isósceles en P
	XY=YZ	triángulo XYZ es isósceles en Y	
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos



2.6. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica

con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 143. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
Triángulo APB es isósceles en P	triángulo XYZ es isósceles en Y

Sí No

2.7. En el numeral 2.4 nos anticipamos a este control de validación y encontramos la relación de los enunciados que quiero demostrar y los enunciados del consecuente de la regla teórica. Por lo tanto, respondemos afirmativamente. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 144. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
PA=PB	XY=YZ

Sí No

Previamente establecimos las relaciones entre las condiciones necesarias del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica, razón por la cual respondemos afirmativamente. Y aparecerá el paso de razonamiento construido con bordes de color verde.

Figura 145. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpia	Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
PA=PB		Definición de triángulo isósceles	Triángulo APB es isósceles en P

Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el listado de pasos de razonamiento queda así.

Figura 146. Paso de razonamiento válido construido y añadido al listado de pasos de razonamiento.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	P es exterior a c (E) A está sobre c (E) B está sobre c (E) PA es tangente a c (D) PB es tangente a c (D) Círculo c con centro en O (D)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$
2	PA=PB (?)	Definición de triángulo isósceles	Triángulo APB es isósceles en P

Notamos que en el enunciado usado como condición del paso de razonamiento 2 aparece “(?)”. Esto indica que no se ha especificado en que paso de razonamiento ha sido justificada esta afirmación.

2.8. Notamos que la afirmación “triángulo APB es isósceles en P” que fue agregada en el numeral 2.4 ha pasado de la casilla afirmaciones por demostrar a la casilla afirmaciones demostradas.

Figura 147. Enunciado justificado que ha pasado a la casilla de las afirmaciones demostradas.

Afirmaciones Demostradas
Agregar
1. P es exterior a c
2. A está sobre c
3. B está sobre c
4. PA es tangente a c
5. PB es tangente a c
6. Círculo c con centro en O
7. PA=PB
8. $\angle APO = \angle BPO$
9. Triángulo APB es isósceles en P

3. Como mencionamos en el numeral 2. Ya habiendo demostrado que el triángulo APB es isósceles podemos mostrar que los ángulos de su base son congruentes.

Llevamos la afirmación “triángulo APB es isósceles en P” a la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento.

Figura 148. Construcción de un nuevo paso de razonamiento. Esquema de la síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Triángulo APB es isósceles en P			
	Nombre	Lengua Natural	Simbolos

3.1. Anticipándonos al primer control sobre la validez del paso de razonamiento según el cual una de las afirmaciones del antecedente de la regla teórica debe corresponder con las afirmaciones de los datos del problema. Buscamos todas las reglas teóricas susceptibles de contener, en su antecedente, afirmaciones que correspondan a triángulo isósceles. Entonces, escribimos en el filtro en el antecedente: “isósceles”

Figura 149. Búsqueda de la regla teórica por el antecedente. Esquema de la síntesis.

Buscar en

En el nombre

En el antecedente

En el consecuente

Texto a buscar

Reglas Teóricas			
Nombre de la regla	Si-Entonces	Antecedente	Consecuente
Teorema 4.2 triángulo isósceles-mediana	Si XYZ es un triángulo isósceles entonces la mediana del lado desigual forma un par de triángulos congruentes	Si XYZ es un triángulo isósceles	entonces la mediana del lado desigual forma un par de triángulos congruentes
Teorema 6.1 triángulo isósceles	Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes	Si un triángulo es isósceles,	entonces los ángulos de su base son congruentes
Teorema 8.13 trapecio isósceles	Si un trapecio es isósceles entonces los ángulos de la base y las diagonales son congruentes	Si un trapecio es isósceles	entonces los ángulos de la base y las diagonales son congruentes

Mostrando 1 a 4 de 4 registros (filtrado de un total de 170 registros)

3.2. Se había previsto que la regla teórica a usar debería ayudarme a mostrar la congruencia de los ángulos de la base del triángulo. Por ello escogemos el “Teorema 6.1 triángulo isósceles” y lo llevamos a la casilla correspondiente del paso de razonamiento y damos clic en la pestaña

símbolos con el fin de obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente.

Figura 150. Opción símbolos de la regla teórica escogida según el esquema de la síntesis.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Triángulo APB es isósceles en P	si	Entonces	
	triángulo XYZ es isósceles en Y	$\angle YXZ = \angle YZX$	
	Nombre	Lengua Natural	

3.3. Aquí debemos hacer una comparación entre el antecedente de la regla teórica y la conclusión del paso de razonamiento. Notamos que el antecedente, de la regla teórica elegida y las condiciones del problema tienen la misma afirmación. La cual ya fue homologada en el numeral 2.4

3.4. A partir de dicha homologación se concluye que la afirmación por demostrar en este paso de razonamiento será $\angle PAB = \angle PBA$. Esta afirmación es la que se añadió a la casilla de afirmaciones por demostrar desde el inicio del problema. Entonces, la agregamos a la casilla de la conclusión y damos clic en el botón verificar paso de razonamiento.

Figura 151. Botón para verificar la validez del paso de razonamiento.

Paso de Razonamiento			
Condiciones Limpiar Necesarias	Limpiar	Regla Teórica	Limpiar Conclusión
Triángulo APB es isósceles en P	si	Entonces	$\angle PAB = \angle PBA$
	triángulo XYZ es isósceles en Y	$\angle YXZ = \angle YZX$	
	Nombre	Lengua Natural	

Verificar Paso de Razonamiento 

Dibujar Figura

3.5. El asistente de demostración mostrará una pregunta acompañada de un recuadro donde se pueden comparar el consecuente de la regla teórica

con el enunciado a demostrar. Se debe responder sí o no, según corresponda.

Figura 152. Primera pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?

Afirmación	Consecuente
$\angle PAB = \angle PBA$	$\angle YXZ = \angle YZX$

Sí No

3.6. En el numeral 3.4 nos anticipamos a este control de validación y encontramos la relación de los enunciados que quiero demostrar y los enunciados del consecuente de la regla teórica. Por lo tanto, respondemos afirmativamente. Automáticamente, aparece una segunda pregunta acompañada también de un cuadro que compara esta vez las condiciones del antecedente con las condiciones necesarias.

Figura 153. Segunda pregunta para la validación del paso de razonamiento construido.

Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?

C. Necesarias	Antecedente
Triángulo APB es isósceles en P	triángulo XYZ es isósceles en Y

Sí No

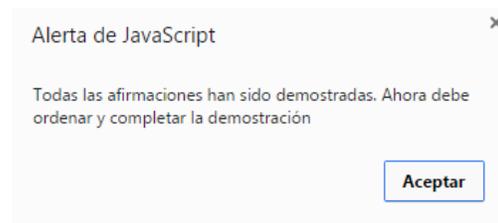
Previamente establecimos las relaciones entre las condiciones necesarias del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica, razón por la cual respondemos afirmativamente. Y aparecerá el paso de razonamiento construido con bordes de color verde.

Figura 154. Paso de razonamiento válido construido.

Paso de Razonamiento		
Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
Triángulo APB es isósceles en P	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PAB = \angle PBA$

El enunciado " $\angle PAB = \angle PBA$ " era la última afirmación que debíamos demostrar. Entonces, el asistente de demostración nos informa que ya hemos justificado todo, y solo es cuestión de ordenar los pasos de razonamiento y cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el que ha sido justificada dicha afirmación para obtener una demostración deductiva formal del problema planteado

Figura 155. Mensaje de verificación de la justificación de todos los enunciados por demostrar.



Ahora lo arrastramos al listado de pasos de razonamiento. De esta manera, el listado de pasos de razonamiento queda así.

Figura 156. Listado con todos los pasos de razonamiento construidos.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	P es exterior a c (E) A está sobre c (E) B está sobre c (E) PA es tangente a c (D) PB es tangente a c (D) Círculo c con centro en O (D)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$
2	PA=PB (?)	Definición de triángulo isósceles	Triángulo APB es isósceles en P
3	Triángulo APB es isósceles en P (?)	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PAB = \angle PBA$

3.7. Notamos que la afirmación " $\angle PAB = \angle PBA$ " ya aparece en la lista de afirmaciones demostradas

Figura 157. Todos los enunciados han pasado a la casilla de afirmaciones por demostrar.

Afirmaciones Demostradas	
Agregar	
1.	P es exterior a c
2.	A está sobre c
3.	B está sobre c
4.	PA es tangente a c
5.	PB es tangente a c
6.	Círculo c con centro en O
7.	PA=PB
8.	$\angle APO = \angle BPO$
9.	Triángulo APB es isósceles en P
10.	$\angle PAB = \angle PBA$

4. Después de cambiar los signos (?) por el número del paso de razonamiento en el cual fue justificado. Ordenamos el listado de los pasos de razonamiento teniendo en cuenta que una afirmación no puede ser presentada como condición necesaria de un paso de razonamiento si no se ha justificado en un paso anterior o si no es un dato del problema. Copiamos nuestro de listado a Word

Figura 158. Demostración concluida.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	P es exterior a c (E) A está sobre c (E) B está sobre c (E) PA es tangente a c (D) PB es tangente a c (D) Círculo c con centro en O (D)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA=PB $\angle APO = \angle BPO$
2	PA=PB (1)	Definición de triángulo isósceles	Triángulo APB es isósceles en P
3	Triángulo APB es isósceles en P (2)	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PAB = \angle PBA$

5.3. Análisis a priori actividad demostrativa tres.

A continuación presentamos el análisis de un problema donde el estudiante debe hacer una construcción en un software de geometría dinámica, formular una conjetura sobre la forma del cuadrilátero obtenido y demostrar esta conjetura usando el asistente de demostración. Se le plantea el siguiente problema al estudiante

5.3.1. Problema.

1. Dados tres puntos A, B y C
2. Halle M , punto medio de BC .
3. Construya el punto D , haciendo simetría central de A con respecto a M .
¿Qué clase de cuadrilátero es $ABDC$?

5.3.2. Objetivo.

Que el estudiante haga uso de la exploración de la teoría (en el asistente de demostración, en libros o internet) para demostrar que el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo.

5.3.3. Descripción.

Esta experimentación se lleva a cabo la última semana de clase. Se presume que los estudiantes ya se han apropiado del uso del asistente de demostración, de la estructura de la exploración de la teoría y también de algunas reglas teóricas (Postulados de congruencia de triángulos, paralelismo, triángulos, cuadriláteros, tangentes y postulados de semejanza). Vale la pena anotar que en la clase no se han trabajado las reglas teóricas referentes a las transformaciones en el plano, y que estas tampoco hacen parte de la base de datos del asistente de demostración. Además también se espera que para la escritura de la demostración no se haga uso del asistente; y que su uso se reduzca a la búsqueda de reglas teóricas.

En este informe presentamos el análisis de un problema donde el estudiante debe hacer una construcción en un software de geometría dinámica, tratará de responder un interrogante que le orientará en la búsqueda de reglas teóricas. Haciendo uso de la exploración de la teoría como la acción que le permitirá obtener definiciones, postulados o teoremas susceptibles de justificar las afirmaciones que se quieren demostrar.

A continuación presentamos las hipótesis sobre las posibles estrategias que pueden presentarse.

Respecto a las estrategias del uso del asistente de demostración para la construcción de la demostración, el camino ideal es:

Después de realizar la construcción en Cabri:

1. El estudiante dice que el cuadrilátero construido es: un cuadrado, un rombo, un rectángulo o un paralelogramo. Para los tres primeros casos se debe demostrar que el cuadrilátero construido es también un paralelogramo; ese es el objetivo del problema planteado. Se le pide al estudiante que demuestre su afirmación.

La solución para este problema de demostración requiere del uso de reglas teóricas que se estudian sólo al final del curso de geometría euclidiana. Además, no están en el asistente de demostración; por lo tanto, el estudiante debe hacer una exploración de la teoría (en bases de datos diferentes a la proporcionada por el asistente de demostración) en libros e internet.

En estas instancias del curso los estudiantes ya reconocen las condiciones necesarias para demostrar que un cuadrilátero es un paralelogramo. Es probable que se concentren solo en encontrar información con respecto a la simetría central.

- 1.1. Se realiza una búsqueda en el Asistente de Demostración.

- 1.1.1. Se practica una búsqueda de información (reglas teóricas) usando los filtros “en el antecedente” y “en el consecuente” con la palabra “**simetría**” o “**simetría central**”.

Es probable que el estudiante realice estas búsquedas dado que no conoce reglas teóricas que involucren transformaciones en el plano. El asistente de demostración no le mostrará resultados en ninguna de las búsquedas. Incluso tampoco, en el filtro “en el nombre” del cual se espera el estudiante también haga uso.

Como no es posible encontrar, en el asistente de demostración, las reglas teóricas o información que resuelva sus dudas con respecto a la simetría central; caben dos opciones, recurrir a un libro de geometría o a la búsqueda en internet. Nos inclinaremos por la segunda.

- 1.2. Hacemos una búsqueda en internet.

- 1.2.1. Independientemente del motor de búsqueda usado. Se hace una búsqueda usando la palabra simetría central como la palabra clave.

Figura 159. Búsqueda en Google con el criterio "simetría central".

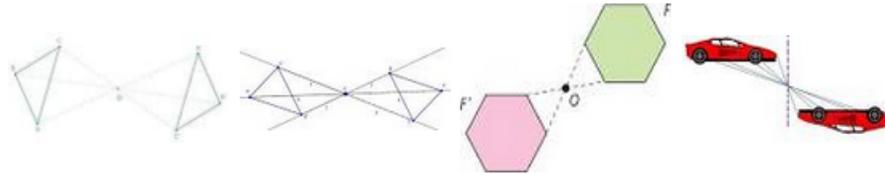
[Simetría central - Wikipedia, la enciclopedia libre](#)

es.wikipedia.org/wiki/Simetría_central

Dos puntos P y P' son **simétricos** respecto del centro de **simetría** O cuando O es el punto medio del segmento. La **simetría** respecto de un punto se llama ...

Visitaste esta página el 13/03/13.

[Imágenes de simetría central](#) - Informar sobre las imágenes



[Simetría central - Vitutor](#)

www.vitutor.com/geo/vec/c_4.html

Simetría **central**, coordenadas mediante una **simetría** de centro el origen, coordenadas mediante una **simetría** de centro distinto al origen, composición de ...

Visitaste esta página el 13/03/13.

[Simetría central](#)

www.disfrutalasmaticas.com/geometria/simetría-central.html

La **simetría central** pasa cuando cada parte tiene otra que le corresponde: a la misma distancia del punto central; pero en la dirección contraria. (Nota: es lo ...

[Definición: Simetría Central](#)

www.disfrutalasmaticas.com/definiciones/simetría-central.html

Es probable que, el estudiante oriente la búsqueda hacia reglas teóricas que relacionen la simetría central con paralelismo, paralelogramos o diagonales

Encuentra la definición de simetría central y algunas propiedades. Por ejemplo: en http://es.wikipedia.org/wiki/Simetr%C3%ADa_central encontramos

Figura 160. Simetría central según Wikipedia.

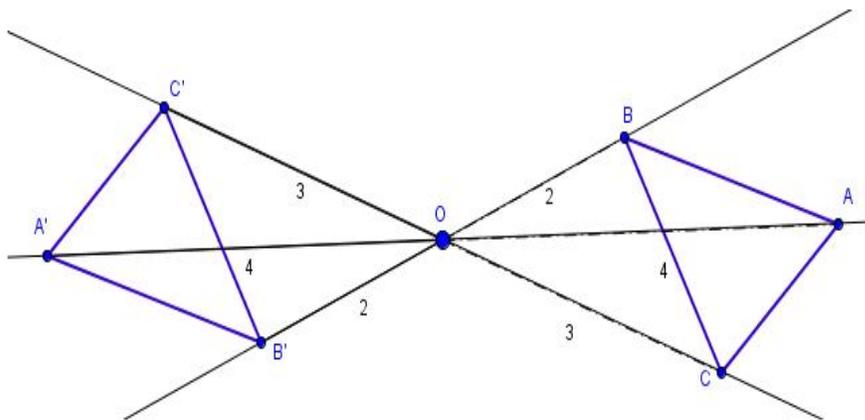
Dos puntos P y P' son simétricos respecto del centro de simetría O cuando O es el punto medio del segmento.

La simetría respecto de un punto se llama **simetría central** y los puntos correspondientes, **homólogos**.

En una simetría central, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también son iguales.

Ejemplo 1:

Dibuja el triángulo simétrico respecto del centro O del triángulo dado ABC .

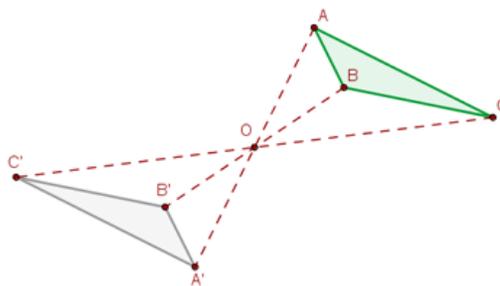


Cualquier punto cumple las dos siguientes condiciones:

- A y A' están alineados: la recta que los une pasa por O .
- La distancia de O al punto A es igual que la de O al transformado A'

En http://www.vitutor.com/geo/vec/c_4.html encontramos

Figura 161. Simetría central según vitutor.com.



Una **simetría central**, de centro el punto O , es un movimiento del plano con el que a cada punto P del plano le hace corresponder otro punto P' , siendo O el punto medio del segmento de extremos P y P' .

Lo que se espera con esta búsqueda es que el estudiante note que M es el punto medio del segmento que va desde el punto A hasta su simétrico D . Luego, $AM =$

MD . Si el estudiante no logra llegar a esta conclusión, se le debe orientar para que lo obtenga. La regla teórica es:

“Si D es el punto simétrico del punto A con respecto al punto M , entonces D, A y M son colineales y M es punto medio de AD ”

En esta ocasión no se le sugiere al estudiante el uso del asistente de demostración para que realice la construcción de la demostración. Se espera que él, de manera espontánea, haga uso de éste para la búsqueda de reglas teóricas, mas no, para la escritura de la demostración.

Figura 162. Primer paso de razonamiento construido, con la regla teórica construida.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
D es el simétrico de A con respecto a M	Definición de simetría central	D, A y M son colineales. M punto medio de AD

2. Se espera que el estudiante construya un paso de razonamiento en donde concluya que A y D equidistan de M . De igual manera, para M punto medio de BC . Es probable que no use el asistente de demostración para buscar la regla teórica.

2.1. Es posible que el estudiante llene la casilla condiciones con los enunciados “ M punto medio de BC ” o “ M punto medio de AD ” y busque en el filtro “en el antecedente” del asistente de demostración la palabra “punto medio” para usar la “**Definición de punto medio**” en la construcción de los pasos de razonamiento.

Figura 163. Segundo paso de razonamiento construido.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
M punto medio de AD	Definición de punto medio	AM=MD

Si el estudiante no usa el asistente de demostración, como una herramienta, para validar el paso de razonamiento; se debe cuestionar por los controles para la verificación de la validez de los pasos de razonamiento.

3. Se presume que el estudiante mostrará que los triángulos que se forman con las diagonales y los lados del cuadrilátero son congruentes. El estudiante intentará, entonces, construir un paso de razonamiento para justificar la igualdad de los ángulos que se forman con las diagonales del cuadrilátero.

- 3.1. El estudiante llena la casilla de las condiciones con el enunciado “ CB y AD se cortan en M ”. Busca reglas teóricas cuyo antecedente contenga la palabra “**rectas**”, “**cortan**” o “**rectas y cortan**” con el fin de encontrar el “**teorema de los ángulos opuestos por el vértice**”, y poder usarlo para construir el paso de razonamiento.

Figura 164. Tercer paso de razonamiento construido.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
CD y AB se cortan en M	Teorema 4.9 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.	$\angle AMB = \angle CMD$ $\angle CMA = \angle DMB$

4. Ahora el estudiante construirá un paso de razonamiento para justificar que los triángulos CMD y AMB y los triángulos CMA y BMD son congruentes entre sí.

- 4.1. El estudiante llena la casilla de las conclusiones con el enunciado " $\Delta CMA = \Delta BMD$ " o " $\Delta AMB = \Delta DMC$ ". Busca reglas teóricas cuyo consecuente contenga las palabras "**triángulos**", o "**triángulos congruentes**" con el fin de encontrar el "**Postulado de la congruencia LAL**", y poder usarlo para construir el paso de razonamiento.

Figura 165. Cuarto paso de razonamiento construido.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
$AM = MD$ $CM = MB$ $\angle AMB = \angle CMD$ $\angle AMC = \angle BMD$	Postulado de la congruencia LAL	$\Delta CMA = \Delta BMD$ $\Delta AMB = \Delta DMC$

5. Ahora, el estudiante construirá un paso de razonamiento para justificar la congruencia de las partes correspondientes de cada par de triángulos congruentes.

- 5.1. El estudiante llena la casilla de las condiciones con los enunciados " $\Delta CMA = \Delta BMD$ " " $\Delta AMB = \Delta DMC$ ". Busca reglas teóricas cuyo antecedente contenga las palabras "**triángulo**" o "**congruentes**" con el fin de encontrar la "**Definición de triángulos congruentes**", y poder usarlo para construir el paso de razonamiento.

Figura 166. Quinto paso de razonamiento construido.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
$\Delta CMA = \Delta BMD$ $\Delta AMB = \Delta DMC$	Definición de triángulos congruentes	$CD = AB$ $CA = DB$ $\angle CDM = \angle ABM$ $\angle DCM = \angle BAM$ $\angle CAM = \angle BDM$ $\angle ACM = \angle DBM$

6. Una vez concluidos estos pasos de razonamiento el estudiante tiene cuatro caminos diferentes para completar la justificación teórica del problema propuesto. Solo resta conjugar las propiedades obtenidas de manera que coincidan con las condiciones necesarias de la regla teórica que se use.

6.1. Usa la igualdad de los lados opuestos del cuadrilátero para demostrar que este es un paralelogramo.

Figura 167. Sexto paso de razonamiento construido.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
$CD = AB$ $CA = DB$	Teorema 8.4 lados opuestos de un paralelogramo	$ABDC$ es un paralelogramo

6.2. Usa la congruencia de los ángulos alternos internos para mostrar que los lados del cuadrilátero son paralelos. Además, usa la igualdad de ese par de lados y concluye que el cuadrilátero es un paralelogramo

Figura 168. Pasos de razonamiento opción dos de demostración.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
CB corta a CD y a AB $\angle MBA$ y $\angle DCM$ son alternos internos $\angle MBA = \angle DCM$	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	AB es paralela CD
$CD = AB$ AB es paralela CD	Teorema 8.5 lados opuestos de un paralelogramo	$ABDC$ es un paralelogramo

- 6.3. Usa, dos veces, la congruencia de los ángulos alternos internos para mostrar que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

Figura 169. Pasos de razonamiento opción tres de demostración.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
CB corta a CA y a BD $\angle CBA$ y $\angle DBC$ son alternos internos $\angle CBA = \angle DCB$	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	AB es paralela CD
CB corta a CD y a AB $\angle ACB$ y $\angle DBC$ son alternos internos $\angle ACB = \angle DBC$	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	CA es paralela DB
CA es paralela DB AB es paralela CD	Definición de paralelogramo	<i>ABDC</i> es un paralelogramo

- 6.4. Usando la regla teórica de la suma de ángulos para mostrar que los ángulos opuestos del cuadrilátero son congruentes.

Figura 170. Pasos de razonamiento opción cuatro de demostración.

Condiciones	Regla teórica	Conclusión
$\angle CBA = \angle DCB$ $\angle ACB = \angle DBC$	Teorema 4.3 suma de ángulos iguales	$\angle DBA = \angle DCA$
$\angle CAD = \angle ADB$ $\angle CDA = \angle DAB$	Teorema 4.3 suma de ángulos iguales	$\angle CDB = \angle CAB$
$\angle CDB = \angle CAB$ $\angle DBA = \angle DCA$	Teorema 8.6 ángulos opuestos de un paralelogramo	<i>ABDC</i> es un paralelogramo

7. Una vez que ya han sido justificadas, usando solo reglas teóricas, todas las afirmaciones se espera que el estudiante organice los pasos de razonamiento y complete la demostración.

7.1. demostración usando el **Teorema 8.4 lados opuestos de un paralelogramo**

Figura 171. Demostración concluida, opción uno.

	Condiciones	Regla teórica	Conclusión
1	D es el simétrico de A con respecto a M (D)	Definición de simetría central	M punto medio de AD
2	M punto medio de AD (1)	Definición de punto medio	AM=MD
3	M punto medio de BC (D)	Definición de punto medio	BM=MC
4	CD y AB se cortan en M (D)	Teorema 4.9 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.	$\angle AMB = \angle CMD$ $\angle CMA = \angle DMB$
5	$AM = MD$ (2) $CM = MB$ (3) $\angle AMB = \angle CMD$ (4) $\angle AMC = \angle BMD$ (4)	Postulado de la congruencia LAL	$\triangle CMA = \triangle BMD$ $\triangle AMB = \triangle DMC$
6	$\triangle CMA = \triangle BMD$ (5) $\triangle AMB = \triangle DMC$ (5)	Definición de triángulos congruentes	$CD = AB$ $CA = DB$
7	$CD = AB$ (6) $CA = DB$ (6)	Teorema 8.4 lados opuestos de un paralelogramo	ABDC es un paralelogramo

7.2. demostración usando el **Teorema 8.5 lados opuestos de un paralelogramo (un par de lados opuestos paralelos y congruentes)**

Figura 172. Demostración concluida, opción dos.

	Condiciones	Regla teórica	Conclusión
1	D es el simétrico de A con respecto a M (D)	Definición de simetría central	M punto medio de AD
2	M punto medio de AD (1)	Definición de punto medio	AM=MD
3	M punto medio de BC (D)	Definición de punto medio	BM=MC
4	CD y AB se cortan en M (D)	Teorema 4.9 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.	$\angle AMB = \angle CMD$
5	$AM = MD$ (2) $CM = MB$ (3) $\angle AMB = \angle CMD$ (4)	Postulado de la congruencia LAL	$\triangle AMB = \triangle DMC$
6	$\triangle AMB = \triangle DMC$ (5)	Definición de triángulos congruentes	$CD = AB$ $\angle CDM = \angle ABM$ $\angle DCM = \angle BAM$
7	CB corta a CD y a AB (E) $\angle MBA$ y $\angle DCM$ son alternos internos (E) $\angle MBA = \angle DCM$ (6)	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	AB es paralela CD
8	$CD = AB$ (6) AB es paralela CD (7)	Teorema 8.5 lados opuestos de un paralelogramo	ABDC es un paralelogramo

7.3. demostración usando el **Definición de paralelogramo**

Figura 173. Demostración concluida, opción tres.

	Condiciones	Regla teórica	Conclusión
1	D es el simétrico de A con respecto a M (D)	Definición de simetría central	M punto medio de AD
2	M punto medio de AD (1)	Definición de punto medio	AM=MD
3	M punto medio de BC (D)	Definición de punto medio	BM=MC
4	CD y AB se cortan en M (D)	Teorema 4.9 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.	$\angle AMB = \angle CMD$ $\angle CMA = \angle DMB$
5	$AM = MD$ (2) $CM = MB$ (3) $\angle AMB = \angle CMD$ (4) $\angle AMC = \angle BMD$ (4)	Postulado de la congruencia LAL	$\triangle CMA = \triangle BMD$ $\triangle AMB = \triangle DMC$
6	$\triangle CMA = \triangle BMD$ (5) $\triangle AMB = \triangle DMC$ (5)	Definición de triángulos congruentes	$CD = AB$ $CA = DB$ $\angle CDM = \angle ABM$ $\angle DCM = \angle BAM$ $\angle CAM = \angle BDM$ $\angle ACM = \angle DBM$
7	CB corta a CD y a AB (E) $\angle MBA$ y $\angle DCM$ son alternos internos (E) $\angle MBA = \angle DCM$ (6)	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	AB es paralela CD
8	CB corta a CD y a AB (E) $\angle ACM$ y $\angle DBM$ son alternos internos (E) $\angle ACM = \angle DBM$ (6)	Teorema 5.2 ángulos alternos internos iguales	CA es paralela DB
9	CA es paralela DB (8) AB es paralela CD (7)	Definición de paralelogramo	ABDC es un paralelogramo

7.4. demostración usando el **Teorema 8.5 ángulos opuestos de un paralelogramo**

Figura 174. Demostración concluida, opción cuatro.

	Condiciones	Regla teórica	Conclusión
1	D es el simétrico de A con respecto a M (D)	Definición de simetría central	M punto medio de AD
2	M punto medio de AD (1)	Definición de punto medio	AM=MD
3	M punto medio de BC (D)	Definición de punto medio	BM=MC
4	CD y AB se cortan en M (D)	Teorema 4.9 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.	$\angle AMB = \angle CMD$ $\angle CMA = \angle DMB$
5	$AM = MD$ (2) $CM = MB$ (3) $\angle AMB = \angle CMD$ (4) $\angle AMC = \angle BMD$ (4)	Postulado de la congruencia LAL	$\triangle CMA = \triangle BMD$ $\triangle AMB = \triangle DMC$
6	$\triangle CMA = \triangle BMD$ (5) $\triangle AMB = \triangle DMC$ (5)	Definición de triángulos congruentes	$CD = AB$ $CA = DB$ $\angle CDM = \angle ABM <$ $\angle DCM = \angle BAM <$ $\angle CAM = \angle BDM <$ $\angle ACM = \angle DBM$
7	$\angle MBA = \angle DCM$ (6) $\angle ACM = \angle DBM$ (6)	Teorema 4.3 suma de ángulos iguales	$\angle DBA = \angle DCA$
8	$\angle CAM = \angle MDB$ (6) $\angle CDM = \angle MAB$ (6)	Teorema 4.3 suma de ángulos iguales	$\angle CDB = \angle CAB$
9	$\angle CDB = \angle CAB$ (8) $\angle DBA = \angle DCA$ (7)	Teorema 8.6 ángulos opuestos de un paralelogramo	ABDC es un paralelogramo

Análisis A posteriori y Conclusiones

En este capítulo se presentan los análisis a posteriori de las intervenciones realizadas con los estudiantes. Presentaremos los análisis a posteriori local, es decir, el análisis de cada uno de los cuatro estudiantes en cada una de las intervenciones, luego las conclusiones de los análisis a posteriori locales por cada una de las intervenciones y finalmente el análisis a posteriori global. Luego de la presentación de todos los análisis cerramos con las conclusiones de la investigación.

6.1. Análisis a posteriori local de la primera intervención.

Los análisis presentados a continuación tienen como objetivo explicitar los procesos de razonamiento detectados, las estrategias de solución propuestas y las acciones realizadas en comparación a los datos previstos en el análisis a priori.

Se usan extractos de las transcripciones realizadas a partir de las videograbaciones y son llamados *episodios*.

Las convenciones usadas en estos episodios son:

- Las oraciones escritas en negro indican los que dice el investigador (Inv) y el estudiante.
- Las oraciones escritas en rojo corresponden a lo que hace el estudiante sin decir nada.
- Las oraciones escritas en azul indican las acciones comentadas. Es decir, lo que hace un estudiante mientras habla o explica que está haciendo.

- *Las frases escritas en negro, cursiva y encerradas en paréntesis indican observaciones del investigador.*

6.1.1. Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la primera intervención.

Episodio 1.

[12] **Escribe la palabra radio en el consecuente.**

[13] Inv: ¿Por qué hace esa búsqueda? ¿Qué espera encontrar con esta búsqueda?

[14] AF: Pues espero encontrar que me diga que estos lados (señala los lados AB y AC) sean radios. Quiero concluir que estos lados son radios. Los dos son radios entonces son congruentes. ¿Sí?

[15] Inv: Si eso es lo que quiere concluir por qué no ha colocado nada en las casillas del paso de razonamiento.

[16] AF: Porque primero quiero saber... o sea, qué características tiene el radio y ahí si poner en las condiciones lo que necesito para que me concluya que es radio.

[17] Inv: Ok.

No coloca ningún enunciado en las casillas del paso de razonamiento. Pero, con la respuesta que da en [14] y la forma de búsqueda planteada en [12] al parecer hace un *análisis* pues dice que lo hace para saber las condiciones que necesita para poder concluir que los segmentos son radios. Está realizando el análisis mentalmente y usa el asistente para confirmar.

Episodio 2.

[18]AF: Lee las reglas teóricas que aparecieron. ¿puedo abrir otro? o sea es para ver en símbolos, porque luego no sé si lo puedo quitar o borrar (haciendo referencia a que si selecciona una regla teórica tal vez no pueda borrarla posteriormente).

[19] Inv: Claro, la puede borrar.

[20] AF: **Selecciona y arrastra la definición de radio y da clic a la opción símbolos. Arrastra, a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento, la condición: " d circunferencia con centro en A que pasa por B". Y agrega en las afirmaciones por demostrar el enunciado: "AB es radio" y lo arrastra a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento. ¿Se puede dejar así como lo tengo, AB es radio? o sea ¿no hay necesidad que yo diga que es el radio de la circunferencia d?**

[21]AF: Da clic en el botón verificar paso de razonamiento y responde sí, a la primera pregunta (¿Alguna de las afirmaciones del consecuente de la regla teórica corresponde a la afirmación que usted quiere demostrar?). Lee la segunda pregunta (¿Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?) y responde sí. Agrega el paso de razonamiento construido al listado de pasos de razonamiento.

Como se indicó en el análisis a priori, para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente, la estudiante da clic en la pestaña símbolos. Usa esto para decidir sobre la pertinencia del uso o no de la regla teórica.

Dado que la estudiante comienza a construir el paso de razonamiento por la casilla de la regla teórica y posteriormente llena la casilla de las condiciones, lo que al parecer era un esquema de uso del asistente de demostración basado en el análisis pierde toda validez. No hace análisis ni síntesis, comienza por la regla teórica; el asistente no le sirve para construir el paso sino para escribirlo dado que en su cabeza ya lo hizo.

Cuando va al proceso de validación del paso de razonamiento responde afirmativamente a la pregunta sobre la relación entre el consecuente y el enunciado que desea demostrar. Esto, porque ya ha mencionado qué es lo que quiere demostrar y lo refuerza con el hecho de que ha incluido el enunciado por demostrar de acuerdo a lo que le indicó la regla teórica. Con respecto a la segunda pregunta, podemos decir que leyó la pregunta y la pensó, pero queda la duda de si respondió afirmativamente convencida de lo que había escrito o si solo respondió por responder.

Episodio 3.

[22]... Va a Cabri y señala, insistentemente, el segmento AC en la construcción. Vuelve al asistente de demostración y escribe en el filtro en el antecedente: "equidi"

[23] Inv: ¿Por qué está buscando esa palabra?

[24] AF: Va a Cabri. Porque hay un teorema, no me acuerdo bien, que dice: que un punto sobre la mediatriz equidista de los extremos del segmento (señala el punto C y los extremos del segmento AB).

[25] Inv: sí.

[26] AF: Entonces... con eso compruebo que esos dos son congruentes (señala los segmentos CB y AC).

El estudiante ya sabe la regla teórica que debe usar, el uso del asistente de demostración es simplemente para escribir el paso de razonamiento.

Muestra una estrategia de construcción del paso de razonamiento basado en el análisis; pero nótese que a pesar de manifestar cual es el enunciado que quiere demostrar, hace una búsqueda de reglas teóricas donde las equidistancia entre puntos no sea una conclusión si no una condición. Esta acción evidencia que no se hace un uso correcto del asistente de demostración por lo tanto no está referenciada en el análisis a priori.

Episodio 4.

[31] Inv: Usted dio clic en el filtro en el antecedente ¿Por qué?

[32] AF: En que tengo... o sea que yo sé que C es el punto de intersección entre d y l y que l es la mediatriz. o sea, ya tengo el punto en la mediatriz. entonces, eso está en el antecedente.

[33] Inv: ¿No sería bueno ir agregando eso en las condiciones del paso de razonamiento?

[34] AF: Bueno, sí. **Arrastra los enunciados de la casilla de las afirmaciones demostradas a la casilla de las condiciones de paso de razonamiento y escribe en el antecedente: "equidista". Ojea las reglas teóricas que arroja la búsqueda (se detiene en el teorema 6.10, este es el reciproco de la regla teórica que está buscando) y luego borra "equidista" del antecedente. Ahora escribe "equidistan" en el consecuente. Nuevamente borra lo que ha escrito y una vez más escribe "equidista" en el antecedente, borra y ahora da clic en el filtro en el nombre y escribe "mediatriz".**

[35] Inv: ¿Qué espera encontrar con esas búsquedas que está haciendo?

[36] AF: Lo que pasa es que este teorema... poniendo aquí "equidistante" (señala el filtro del antecedente) me daba solamente lo que quería concluir. Luego lo puse en el consecuente (la palabra equidistan) para que me diera lo que quería concluir. Ahora lo pongo en el nombre para que me de las dos opciones (se refiere a tratar de encontrar el reciproco de la regla teórica que leyó anteriormente). Porque lo puse aquí en el consecuente y no lo vi, no lo encontré.

[37] Inv: Tal vez no lo buscó bien.

[38] AF: **Borra lo que escribió en el nombre y escribe en el consecuente "equidista". Aparece una lista de reglas teóricas.**

[39] Inv: Entonces me dice que escribe aquí esa palabra porque... ¿Qué quiere encontrar?

[40] AF: Porque quiero que concluya esto (señala el consecuente de la segunda regla teórica que aparece en la lista, Teorema 6.10 Mediatriz). O sea que el punto C equidista de A y de B, entonces son congruentes. Pero sí está, es que no la había visto. **Arrastra la regla teórica a su casilla correspondiente en el paso de razonamiento y le da clic en botón símbolos. (Esto lo hace para saber que escribir en las afirmaciones por demostrar) escribe $AC=CB$ y lo lleva a la casilla de las conclusiones.**

[41] AF: **Da clic en el botón verificar paso de razonamiento. Responde sí al primer cuestionamiento (es el enunciado que agregé en afirmaciones por demostrar). Luego, después de unos segundos contemplando la segunda pregunta (tal vez se detiene porque sus condiciones no son exactamente iguales a las de la regla teórica, pero son equivalentes) y responde sí. Agrega este paso de razonamiento al listado de pasos de razonamiento.**

El estudiante sabe cuáles son las condiciones del paso de razonamiento (línea [32]). Por sugerencia del investigador, el estudiante explicita la estrategia de construcción del paso de razonamiento. Se esperaba que esto le ayudara a establecer el criterio de búsqueda correcto y corrigiera el error que presentó en el episodio tres.

En [34] se evidencia que el estudiante no corrige inicialmente el criterio de búsqueda. El estudiante encuentra el recíproco de la regla teórica que debe usar, y esto le hace notar que la búsqueda practicada es incorrecta. Una vez corregida la búsqueda, al parecer no hace una lectura detenida de las reglas teóricas sugeridas y pasa por alto la que debe usar. Posteriormente practica una nueva búsqueda (usando el filtro nombre y con la condición “mediatriz”). Manifiesta espera encontrar una más reglas teóricas.

En el análisis a priori no se previó este tipo de acciones; se estableció que la búsqueda de las reglas teóricas debía manifestarse de acuerdo a la necesidad de la búsqueda. Si parto de las condiciones, debo buscar reglas teóricas por el antecedente; si parto del enunciado que se quiere demostrar, la búsqueda de reglas teóricas debe usar el filtro del consecuente.

El estudiante sabe cuáles son las condiciones del paso de razonamiento, sabe qué es lo que quiere demostrar y tiene conocimiento de una regla teórica que le permite hacerlo. El asistente de demostración no le sirve, solo le está causando

inconvenientes para comprobar si lo que él piensa es correcto. Lo que en principio se manifestó como una estrategia basada en el análisis terminó en sentido opuesto. Es decir, un esquema de construcción basado en la síntesis.

Conclusiones Análisis Local

La hipótesis prevista con respecto a la aplicación de esta intervención era que los estudiantes mostrarían dificultades en el uso del asistente de demostración debido a que el proceso de familiarización con éste apenas está empezando. Aunado a esto, también se planteó que el estudiante daría prioridad a conocimientos adquiridos previamente. Es decir, prevalecen las reglas teóricas que ha aprendido anteriormente.

El estudiante logra construir dos pasos de razonamiento válidos. En uno de ellos concluye que AC y AB son radios de la circunferencia pero no usa estos hechos para nada, queda inconcluso el procedimiento. El otro paso de razonamiento construido es válido pero se evidenció que el estudiante no tiene claro como establecer los criterios de búsqueda de reglas teóricas (ver líneas [22] y [24] del episodio 3).

Se verifica la hipótesis porque lo que hace el estudiante no está previsto en el análisis a priori (líneas [15] y [16] del episodio 1, líneas [20] y [21] del episodio 2 y líneas [32] y [33] del episodio 4), y tiene errores de búsqueda (líneas [22], [24] y [26] del episodio 3). Además, el estudiante construye en su cabeza los pasos de razonamiento y lo corrobora con el asistente (episodio 2).

6.1.2. Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la primera intervención.

Episodio 1

Sin haber colocado alguna proposición en las casillas de condiciones o conclusiones del paso de razonamiento.

[10]JH: Construye el punto de intersección entre el segmento AB y la mediatriz l. Abre el asistente de demostración.

[11]JH: Escribe las afirmaciones dadas y la afirmación por demostrar. El asistente pasa a la sección de los pasos de razonamiento.

[12] JH: Arrastra las condiciones "D círculo con centro en A que pasa por B" y "C punto de intersección entre d y l" a la casilla de las condiciones en el paso de razonamiento. Tengo que decir que este (señala con el dedo el segmento AB) y este (señala con el dedo el segmento AC) son radios.

[13] Inv: ¿Para qué quiere decir que son radios?

[14] JH: Para decir que son congruentes... Listo, entonces veamos. Escribe "radio" en el consecuente.

[15] Inv: ¿Por qué busca esa palabra en el consecuente?

[16] JH: Porque es donde quiero llegar. Quiero decir que son radios, que son congruentes.

[17] Inv: ¿Quiere decir que son radios o que son congruentes?

[18] JH: No. Que son radios, para luego decir que son congruentes.

Según lo planteado en el análisis a priori, el estudiante está previendo una estrategia de construcción del paso de razonamiento basado en la síntesis, pues comienza a construirlo a partir de las condiciones del problema (véase [12]). Lo que se esperaría según el análisis a priori, es que el estudiante realice una búsqueda de reglas teóricas cuyo antecedente corresponda a las condiciones usadas previamente. Esto no ocurre; el estudiante busca la palabra radio en el consecuente de las reglas teóricas (línea [14]). Esto desvirtúa la apreciación inicial de un proceso de razonamiento deductivo. Pues intenta, en segunda instancia, a partir de una conclusión encontrar las condiciones que mejor explican el hecho en el que un segmento es un radio.

Se puede notar, según [12] y [14], que el estudiante ya sabe que paso de razonamiento hacer y que usa el asistente de demostración para intentar escribirlo. Tal y como se manifiesta en el análisis a priori, el asistente solo le sirve para confirmar o corroborar lo que ya sabe de reglas teóricas ajenas a la base de datos del asistente de demostración y no para construir un paso de razonamiento válido.

Episodio 2.

Con la búsqueda realizada en [14], aparecen dos reglas teóricas...

[20]JH: Lee en voz alta las dos reglas teóricas (definición de radio y teorema de la recta tangente a un círculo) que le arrojó su búsqueda. No, no me sirve ninguna. Revisa las condiciones que colocó en la casilla del paso de razonamiento. Aquí ya están diciendo que AB es un radio (señala esta condición)

[21] Inv: Si, usted dijo que AB era un radio.

[22] JH: Lee, nuevamente, la definición de radio. Pero C es punto de intersección de la mediatriz y d (Círculo). ¿Si nos sirve eso? ¿Si está bien?

[23]Inv: ¿Qué opina usted?

[24] JH: Limpia la casilla de las condiciones del paso de razonamiento. Lee una vez más la definición de radio. Esto no me cuadra, voy a buscarla aquí y da clic en el filtro en el antecedente y escribe "radio"

Al realizar una lectura de las reglas teóricas filtradas tras la búsqueda practicada (como ya se mencionó, sin ninguna relación a las condiciones usadas para comenzar a construir el paso de razonamiento) el estudiante nota que no le es posible establecer una conexión entre el antecedente de estas reglas teóricas y los datos del problema. Intenta reconfigurar la búsqueda (con un presunto esquema de uso basado en la síntesis), pero cae nuevamente en un error; usa como palabra clave para la búsqueda un término que espera haga parte del consecuente de una regla teórica y no del antecedente. Lo que aparentemente se había convertido en una anticipación al control sobre la validez del paso de razonamiento es otra muestra del uso azaroso del asistente de demostración.

Episodio 3.

[24]JH: Limpia la casilla de las condiciones del paso de razonamiento. Lee una vez más la definición de radio. Esto no me cuadra, voy a buscarla aquí y da clic en el filtro en el antecedente y escribe "radio"; borra y escribe "circun", al notar que no aparece nada vuelve a borrar.

[25] Inv: Recuerde que puede buscar también la palabra círculo.

[26]JH: Escribe "círculo" y lee la primera de las reglas teóricas que aparecen: la definición de círculo. Vuelve a colocar en la casilla de las condiciones los enunciados que había borrado (D círculo con centro en A que pasa por B" y "C punto de intersección entre d y l). Va a Cabri y señala los segmentos AB y AC y vuelve al asistente de demostración. Allí, lee las condiciones y decide tomar la definición de círculo, como la regla teórica, para construir el paso de razonamiento. Luego, agrega en afirmaciones por demostrar " $AC=AB$ " y lo lleva a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento. Da clic en símbolos y observa los

enunciados que ha colocado. Tal vez quiere saber si los enunciados usados le sirven para validar el paso de razonamiento. Da clic en verificar paso de razonamiento y lee la pregunta acerca de la relación entre el consecuente de la regla teórica y la conclusión y responde afirmativamente; la segunda pregunta al parecer le genera algunas dudas (probablemente porque los enunciados no son idénticos).

- [27] Inv: ¿Qué pasa con eso? (hago referencia a la pregunta de la relación entre las condiciones del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica)
- [28] JH: Que lo que tengo yo no concuerda con el antecedente.
- [29] Inv: ¿Por qué no concuerda?
- [30] JH: Porque tengo que C es punto de intersección de l y de d, y que X está sobre el círculo w.
- [31] Inv: Si
- [32] JH: O sea C también está sobre el círculo d.
- [33] Inv: Si.
- [34] JH: Eso está bien. La circunferencia d con centro en A y radio AB. Cuando digo radio AB estoy diciendo que B también está sobre la circunferencia.
- [35] Inv: Si.
- [36] JH: Entonces, está bien. Responde sí al segundo cuestionamiento. Arrastra el paso de razonamiento construido al cuadro de listado de pasos que está en la parte inferior. Listo, ya queda demostrado que AB y AC son congruentes.

Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	C PUNTO DE INTERSECCIÓN DE L Y D (D) CIRCUNFERENCIA D CON CENTRO EN A Y RADIO AB (D)	Definición de círculo	AC = AB

Tal y como se describió en el análisis a priori, el estudiante muestra un esquema de uso del asistente de demostración basado en la síntesis; comienza a construir el paso de razonamiento a partir de las condiciones del problema y realiza una búsqueda de reglas teóricas cuyos antecedentes correspondan a los enunciados llevados a la casilla de condiciones necesarias. En este caso la palabra clave en la búsqueda fue “círculo” (véase [26]).

Según lo expuesto en [26] podemos hipotetizar que el estudiante da clic en el botón símbolos para anticiparse al segundo control sobre la validez del paso de razonamiento. Acto seguido, incluye en la casilla de afirmaciones por demostrar el

enunciado quería demostrar; esto confirma la hipótesis de la anticipación al control de la validez.

El estudiante da clic en verificar, y responde afirmativamente al control sobre la relación entre el consecuente y el enunciado que quiere demostrar. Se esperaba que sucediera esto pues en el párrafo anterior se mencionó que ya había una anticipación a este control. La dificultad se presenta en el segundo control de validez (recordemos que el estudiante buscó reglas teóricas que contuviesen la palabra círculo y escogió la definición de círculo. Queda la duda si lo hizo de manera consciente o no) donde el estudiante manifiesta que al parecer no hay correspondencia entre los datos y el antecedente de la regla teórica usada. Como se evidencia en [30], [32] y [34] tras una reinterpretación de las proposiciones usadas como condiciones (esta reinterpretación de las proposiciones, con el fin de homologarlas con el antecedente de la regla teórica, se plantea en el análisis a priori como una de las acciones necesarias para validar el paso de razonamiento) el estudiante ha construido un paso de razonamiento válido.

Quedan algunas dudas con respecto a, si el estudiante realizó todas las acciones de manera consciente o si contó con un poco de suerte en la construcción del paso de razonamiento. Cualquiera que hubiese sido el caso, se siguieron las acciones que se manifestaron previamente en el análisis a priori.

Conclusiones Análisis Local

Aunque en algunos apartes de la intervención es posible ratificar la hipótesis que el estudiante le daría prioridad a los conocimientos previos e intentaría usarlos en la solución del problema, se encontró evidencia que el estudiante logró construir un paso de razonamiento válido con una regla teórica del asistente de demostración. El estudiante inicialmente planteó construir el paso de razonamiento con reglas teóricas, de su base de datos mental, que le permitieran concluir que los radios de una circunferencia son congruentes (véase [12] y [14]). Ante la imposibilidad de corroborar la existencia de dichas reglas teóricas (en los términos en los cuales él

hace alusión a ellas) hace uso del asistente de demostración y este le sugiere la definición de círculo como la regla teórica que le permitirá construir el paso de razonamiento válido. El asistente de demostración actuó como un agente externo que le sugirió un apoyo al estudiante en la consecución de una parte de la tarea asignada.

El estudiante muestra un esquema de uso del asistente de demostración basado en la síntesis. Es decir, a partir de los datos practica una búsqueda para encontrar reglas teóricas cuyo antecedente tenga relación con las condiciones del problema. La realización de este tipo de acción le permite desarrollar una validación anticipada sobre los controles de validez del paso de razonamiento (véase [26]), y también la reinterpretación y posterior homologación de proposiciones equivalentes para validar como tal los pasos de razonamiento (véase [30], [32] y [34]).

6.1.3. Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la primera intervención.

Episodio 1

Sin haber colocado alguna proposición en las casillas de condiciones o conclusiones del paso de razonamiento.

[6] JC: **Escribe radio en el antecedente.**

[7] Inv: Radio. ¿Por qué hace esa búsqueda? ¿Por qué busca radio en el antecedente?

[8] JC: **Va a Cabri.** En la construcción tengo que este segmento (señala el segmento AB) es el radio de la circunferencia. Está dado por construcción, me dice: circunferencia d con centro en A y radio AB. Entonces, ya sé que AB es el radio de la circunferencia. **Va al asistente de demostración.** Entonces, voy a concluir que por la definición de radio que: si un segmento es radio de un círculo entonces sus extremos son el centro y un punto de círculo (*lee la definición de radio, que fue una de las reglas teóricas que le arrojó la búsqueda realizada*). **Arrastra la definición de radio a la casilla de regla teórica del paso de razonamiento.**

Según lo planteado en el análisis a priori, el estudiante hace uso errático del asistente de demostración. Aparentemente, el estudiante manifiesta que quiere

demostrar lo que ya sabe que es correcto y que además es una condición del problema y no una conclusión, esto se ve claramente en [6] y [8].

El estudiante no muestra indicios de tener en mente alguna estrategia de construcción del paso de razonamiento dado que no manifiesta ningún esquema de uso del asistente de demostración. Esto se pone de manifiesto en el momento en el que el estudiante no muestra anticipación al primer control de validación de un paso de razonamiento. Es decir, que a partir de las condiciones busque reglas teóricas con ciertas características en el antecedente, o a partir de las conclusiones busque reglas teóricas con ciertas características en el consecuente.

Episodio 2.

[19]JC: Necesito decir que este (señala el segmento AB) es congruente con este (señala el segmento AC). Ahora puedo concluir que... Ya tengo que esto (señala la mediatriz y el segmento AB) pasa por el punto medio y que aquí hay un corte (señala la intersección de la mediatriz y la circunferencia). Ah ya, como AB es radio de la circunferencia, AC también es radio de la circunferencia. Entonces, este (señala el segmento AB) es congruente con este (señala el segmento AC). Estos dos son congruentes. La unión de los dos es congruente, o sea, este (señala el segmento BC) también es congruente.

[20] Inv: ¿Por qué?

[21]JC: Porque... Ahí puedo aplicar el teorema que dice: que si tengo dos lados congruentes (señala los segmentos AB y AC) y el ángulo comprendido (señala el $\angle CAB$) entre los dos entonces este (señala el segmento BC) también es congruente. Para concluir que el triángulo es congruente.

[22]Inv: Bueno. Entonces, vamos a los pasos de razonamiento.

[23] JC: Bueno, ya tengo que AB y AC son radios de la circunferencia. Entonces, ahora por el postulado... lado-ángulo-lado. **Escribe en el antecedente "postulado" pero no aparece ninguna regla teórica con estas características. Borra y escribe "lal" en el mismo filtro y nuevamente se queda sin resultados la búsqueda.** Tengo un ángulo en común, entonces... **escribe "ángulo" en el antecedente y ojea algunas de las 79 reglas teóricas que arrojó esta búsqueda.**

[24] Inv: ¿Qué busca?

[25] JC: Para encontrar el teorema. Entonces, tengo que decir que tengo un ángulo en común. Que tengo el ángulo comprendido entre estos dos lados (señalando los segmentos AB y AC). O sea tengo dos lados congruentes y un ángulo entre esos dos, que es el postulado lado-ángulo-lado.

[26] Inv: Pero, ¿Esos postulados no se usan es cuando estamos comparando dos triángulos?

[27] JC: Ah sí.

Una de las hipótesis tras la aplicación de esta actividad es que los estudiantes darán prioridad a lo que ya saben e intentarán relacionarlo que alguna manera con la solución del problema. Esto se evidencia claramente en este episodio, el estudiante nombra varias reglas teóricas (no del asistente de demostración) y las relaciona con los datos del problema como se ve en [19] y [21].

En primera instancia, se ve un razonamiento correcto (ver línea [19]) partiendo de los datos e intentando concluir algo a partir de ellos, pero el estudiante no escribe nada, ni construye el paso de razonamiento, simplemente lo dice. Posteriormente, pretende usar el postulado lado-ángulo-lado sin ningún tipo de control lógico acerca de las condiciones de esta regla teórica. Se puede leer en [21], [26] y [27] que evidentemente hace la comparación con un solo triángulo. Además hace la búsqueda mostrada en [23] del nombre de la regla teórica usando el filtro del antecedente, lo que reconfirma que no hay una anticipación a los controles sobre la validez de los pasos de razonamiento tal y como se estableció en el análisis a priori.

Episodio 3.

[30] **Escribe en el filtro para hacer búsquedas por el nombre de las reglas teóricas "tran"**

[31] Inv: ¿Qué va a buscar?

[32] JC: La transitividad.

[33] Inv: ¿La transitividad?

[34] JC: Sí. Para decir que si X y Y son iguales y Y igual a Z son iguales entonces $X=Z$. Que es lo mismo que quiero decir aquí, que si AC es igual a AB entonces BC es igual a AB a AC y AB.

[35] Inv: ¡Comience a armar los pasos de razonamiento!

[36] JC: **Va al asistente de demostración.** Sí, aquí puedo usar la transitividad, **arrastra la regla teórica "transitividad del paralelismo" hasta la casilla de regla teórica del paso de razonamiento**, para decir que tengo este lado (señala el segmento BC) congruente con este (señala el segmento AC) y este lado (señala el segmento AB) congruente con este lado (señala el segmento AC). Entonces, ya tengo los tres lados congruentes. **Va al asistente de demostración.** Entonces, al colocar aquí en el consecuente "lados iguales". **Escribe en el consecuente "lados iguales"**. Entonces, tengo que por definición de triángulo equilátero, si un triángulo es equilátero entonces todos sus lados son iguales. Entonces ya puedo llegar a esto: "que el triángulo ABC es equilátero".

[37] Inv: ¿Listo?

[38] JC: Sí.

Según lo expuesto en [34], el estudiante tiene una estrategia basada en la síntesis, dado que menciona los datos y a partir de estos menciona una regla teórica que le ayudaría a justificar esta proposición. Una vez más notamos que se mencionan reglas teóricas que no han sido extraídas del asistente de demostración y que el uso de éste es para escribir el paso de razonamiento.

En [36] se puede apreciar que el estudiante usa el asistente de demostración para intentar escribir el paso de razonamiento sin importar si la regla teórica escogida correspondía o no a las condiciones del problema y a los enunciados que se deseaban demostrar. No hay anticipación a los controles de validación del paso de razonamiento, tal y como se describió en el análisis a priori.

Conclusiones Análisis Local

La hipótesis prevista con respecto a la aplicación de esta intervención era que los estudiantes mostrarían dificultades en el uso del asistente de demostración debido a que el proceso de sensibilización y acercamiento al programa apenas inicia. También se planteó que el estudiante daría prioridad a conocimientos adquiridos previamente. Es decir, prevalecen las reglas teóricas que ha aprendido anteriormente. Esto se ve reflejado en la medida en la que el estudiante no usa los esquemas de búsqueda de reglas teóricas de acuerdo a la necesidad que se manifiesta a la hora de construir pasos de razonamiento (esto es, buscar reglas teóricas de acuerdo a los datos del problema o de acuerdo a los enunciados que se desean demostrar). El asistente solo les sirve para corroborar si lo que piensan o dicen es correcto.

Como se aprecia en [6], [8], [19], [21] y [23] el estudiante muestra estrategias de justificación caracterizadas por procesos de razonamiento deductivo. Aunque intenta consolidar esquemas de uso basados en la síntesis no anticipa el primer

control sobre la validez del paso de razonamiento al momento de elegir la regla teórica que usará.

El estudiante no intentó en ningún momento construir un paso de razonamiento completo. Es decir, nunca llegó a la instancia donde el asistente le permitía hacer una comparación, asistida y cuestionada, entre las condiciones del problema y el antecedente de la regla teórica. No se evidenció ningún acercamiento, ni anticipación a los controles de validez; esto se puede observar en [36] donde usa la regla teórica “transitividad del paralelismo” para justificar la transitividad de la igualdad. Quedan dudas acerca de si el estudiante ejecuta este tipo de acciones por desconocimiento de la transitividad como propiedad de otros tipos de relaciones diferentes a la igualdad, o si simplemente escoge una regla teórica (sin importar la naturaleza de la misma) para pretender mostrar una apropiación del uso del asistente de demostración.

6.1.4. Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la primera intervención.

Episodio 1.

Después del cuestionamiento acerca de la clase del triángulo construido...

- [1] ... ¿Qué clase de triángulo es el triángulo ABC?
- [2] LI: Esto... Equilátero
- [3] Inv: Demuéstrelo. Demuestre que el triángulo ABC es equilátero.
- [4] LI: Ah bueno, voy al asistente de demostración. **Abre el asistente de demostración.**
- [5] LI: **Comienza a agregar la descripción de la construcción en el asistente de demostración. Escribe en afirmaciones por demostrar “ABC es equilátero”.**
- [6] LI: Bueno... **Va a Cabri, abre la construcción.** No, este triángulo no es equilátero, es isósceles. Creo. Es isósceles porque...
- [7] Inv: Mida los lados del triángulo.
- [8] LI: O los ángulos porque si es equilátero es equiángulo. **Mide los lados y nota que son iguales.** Entonces, si es equilátero. Como es equilátero tiene que ser equiángulo.

En el análisis a priori se consideró la posibilidad de que el estudiante afirmara que el triángulo construido era isósceles, y también se consideró invitar al estudiante a

verificar su respuesta usando la herramienta de medida de Cabri. Como se había previsto, hay una rectificación en el planteamiento de la conjetura.

Se evidencia en [8] que aparecen reglas teóricas que el estudiante ya sabe e intenta relacionarlas con la solución del problema. Esto pudo ser anticipado en el análisis a priori como la preferencia por el uso de reglas teóricas ya conocidas.

Episodio 2.

[10] LI: ¡No sé cómo demostrar! **Observa las condiciones escritas en las afirmaciones demostradas y por demostrar.** No se profe, sería como empezar, o sea, digamos, diciendo que bueno... l es la mediatriz de AB para demostrar, digamos que... que AC , que A ... ¡ay es que no me acuerdo! **Va a Cabri.** Ah pero es igual (señalando el segmento AC). Yo voy a mostrar que este triángulo (señala el triángulo que se forma con los puntos A , C y el punto de intersección de l y AB) es congruente con este triángulo (señala el triángulo que se forma con los puntos B , C y el punto de intersección de l y AB). Podría ser.

En el análisis a priori se pronosticó que primaría el uso de reglas teóricas conocidas. Esto se hace evidente en este episodio donde expresiones como “¡Ay, es que no me acuerdo!” Permitiría suponer que está tratando de recordar algo que ya conoce.

El estudiante pretende demostrar (al parecer, usando una estrategia basada en la síntesis) mediante postulados de congruencia que los triángulos ADC y BDC son congruentes. Esto reafirma la hipótesis sobre el uso preferencial de reglas teóricas ya conocidas y su posible aplicación a la solución del problema.

Episodio 3.

[14]LI: Sí. **Construye el punto de intersección.** Ah, a esto le doy nombre, “ D ”. (*se refiere al punto de intersección*).

[15] Inv: Si quiere puede borrar esas medidas. Ya sabe que los lados son iguales.

[16] LI: **Va al asistente de demostración.** Entonces, agregó aquí... **Agrega en afirmaciones demostradas el enunciado “ D punto de intersección de l y AB ”.** El asistente de demostración le pregunta: ¿Está seguro que la afirmación es evidente? **La lee...**

[17] Inv: ¿Está segura que D es un punto de intersección de l y AB ?

[18] LI: Si, yo le di entre mediatriz y segmento (señala el punto de intersección).

Esta acción en particular no se tuvo en cuenta en el análisis a priori. Vale la pena resaltar que es un procedimiento correcto dado que la afirmación que se agregó (véase [16]) hace parte de un elemento adicional dibujado sobre la construcción original. El interrogante que respondió el estudiante corresponde a un control con respecto al enunciado agregado que consiste en establecer, si la proposición es un dato evidente o si ha de ser demostrado.

Episodio 4.

[20]LI: Bueno, ahora sí... Aquí debo agregar lo que voy a demostrar, ¿No? (señala el cuadro de las afirmaciones por demostrar). Bueno voy a demostrar que AC... digamos que AD es congruente con DB, ¿Sí?

[21] Inv: Sí.

[22] LI: Entonces ¿Aquí debo agregarlo?

[23] Inv: Sí.

[24] LI: **Agrega en afirmaciones por demostrar el enunciado "AD=DB". Listo. Arrastra a la casilla de las condiciones del asistente de demostración el enunciado "D punto de intersección de l y AB" y arrastra a la casilla de las conclusiones el enunciado "AD=DB". Luego se va a los filtros de búsqueda y escribe, en el filtro en el nombre, la palabra "punto medio"**

En [20], al parecer el estudiante planea implementar una estrategia caracterizada por un razonamiento abductivo. Agrega correctamente la afirmación en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento, pero lleva una afirmación a la casilla de las condiciones desconociendo si existe alguna regla teórica que permita relacionar estas y luego realiza la búsqueda de reglas teóricas usando el filtro del nombre; cuando lo previsto en el análisis a priori es que posterior a la ubicación de la afirmación en la casilla de las conclusiones se realice la búsqueda de reglas teóricas susceptibles de justificar el enunciado y posteriormente identificar los datos que permiten dicha conexión.

Conclusiones Análisis Local

La hipótesis prevista con respecto a la aplicación de esta intervención era que los estudiantes mostrarían dificultades en el uso del asistente de demostración debido a que el proceso de familiarización con éste apenas está empezando. Aunado a

esto, también se planteó que el estudiante daría prioridad a conocimientos adquiridos previamente. Es decir, prevalecen las reglas teóricas que ha aprendido anteriormente. Esto se ve reflejado en la medida en la que el estudiante no usa los esquemas de búsqueda de reglas teóricas de acuerdo a la necesidad que se manifiesta a la hora de construir pasos de razonamiento (esto es, buscar reglas teóricas de acuerdo a los datos del problema o de acuerdo a los enunciados que se desean demostrar). El asistente solo les sirve para corroborar si lo que piensan o dicen es correcto.

El estudiante se da por vencido considerando que no recuerda muy bien las reglas teóricas que ha aprendido con anterioridad.

[37]...¡Ay! no sé profe, no sé cómo demostrar esto.

[38] Inv: ¿No sabe cómo demostrarlo?

[39] LI: No, profe la verdad, no.

[40] LI: Es que no recuerdo muy bien esto. La verdad.

[41] Inv: No importa. Está bien

Esto confirma que el estudiante no ve el asistente de demostración como una herramienta para construir pasos de razonamiento válidos sino como un instrumento que le permite verificar si existe por lo menos una regla teórica que tenga una características que permita relacionarla con la regla que él menciona.

En los episodios analizados no se logran identificar momentos en los cuales haya algún tipo de validación o de anticipación de la validación sobre la construcción de un paso de razonamiento dado que el estudiante apunta a la escritura de un paso de razonamiento que ya ha mencionado (véase [10]). Más si se pudo evidenciar un control de validación sobre la inserción de elementos auxiliares que favorecieran bien sea la interpretación de una regla teórica o el complemento de la construcción para visualizar propiedades (véase [16], [17] y [18]).

6.2. Conclusiones del análisis a posteriori local en la primera intervención.

- Podemos decir que en general se pudo verificar la hipótesis de que los estudiantes mostrarían dificultades en el uso del asistente de demostración debido a que el proceso de familiarización con éste apenas está empezando.
- Se planteó que el estudiante daría prioridad a conocimientos adquiridos previamente. Es decir, que prevalecerían las reglas teóricas que ha aprendido anteriormente. Este supuesto también fue corroborado en todas las intervenciones de los estudiantes.
- Los estudiantes no identifican los esquemas de uso del asistente de demostración: Buscar reglas teóricas por el antecedente a partir de las condiciones del problema o buscar reglas teóricas por el consecuente a partir de los enunciados que se desean demostrar.
- Los estudiantes identifican el funcionamiento de la pestaña símbolos como la opción que permite obtener el antecedente y el consecuente de una regla teórica representados simbólicamente.
- Aunque podría pensarse que en esta primera intervención el asistente de demostración representa un impedimento para que el estudiante presente su solución del problema. En ningún momento, ninguno de los estudiantes propuso construir la demostración sin usar el asistente, todo lo contrario el estudiante lo tenía a la mano porque sabía que era una potencial herramienta para la verificación de cualquier regla teórica que pudiera recordar.
- Ninguno de los estudiantes presentó una solución al problema de demostración.

6.3. Análisis a posteriori local de la segunda intervención.

6.3.1. Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la segunda intervención.

Episodio 1.

[21]AF: Va al asistente de demostración. Escribe "tangen" en el filtro en el antecedente, sin escribir nada en las casillas del paso de razonamiento.

[22]Inv: ¿Por qué busca esa palabra en el antecedente?

[23]AF: Porque tengo que hay tangentes de un círculo (señala los datos). Entonces, no se que me pueda servir para lo que estoy buscando. Entonces, pongo solamente la tangente en el antecedente que es lo que tengo, es lo que pueden ser condiciones, para buscar la regla teórica o una conclusión que me ayude para hacer la demostración.

[24]Inv: Correcto.

Aunque no escribe nada en la casilla de las condiciones del paso de razonamiento es evidente que el esquema de uso del asistente está basado en la síntesis (véase [23]). El estudiante se anticipa al primer control de validez del paso de razonamiento; él busca reglas teóricas cuyo antecedente corresponda con las condiciones iniciales del problema. Este tipo de estrategia es referenciada en el análisis a priori; y cuando esto sucede decimos que el estudiante está haciendo una exploración de la teoría.

Episodio 2.

[38]Inv: ¿Usted está buscando la palabra tangente, cierto? Pero no ha llenado nada en las casillas del paso de razonamiento. Entonces, llene con las condiciones que tiene para hacer esa búsqueda.

[39]AF: Arrastra los enunciados "PA tangente a c" y "PB tangente a c" a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento.

[40]Inv: Realice nuevamente la búsqueda. O relea las reglas teóricas que ya había leído, a ver si de pronto le da nuevas luces.

[41]AF: Lee las reglas teóricas... Arrastra el teorema 10.11 (Segmentos tangentes desde un punto exterior) a la casilla de regla teórica de paso de razonamiento y le da clic en símbolos.

[42]Inv: ¿Por qué escogio esa regla teórica?

[43]AF: Porque dice que si "dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto". Pero entonces no lo entiendo.

[44]Inv: ¿Qué no entiende? Lealo una vez más.

[45]AF: Lee la regla teórica. ¿Esto es lo que hay que demostrar?

[46]Inv: ¿Cómo?

[47]AF: ¿Esta es la regla teórica que hay que demostrar?

[48]Inv: No.

[49]AF: Ya la entendí.

[50]Inv: ¿Ya la entendió?

[51]AF: Con los simbolos ya la entendí. Me dice que X es exterior.

[52]Inv: ¿Cuál sería X en la construcción?

[53]AF: Sería el punto P y dice que Y y Z están sobre w, esos serían A y B. Luego dice que, "XY es tangente a w" y tengo que "PA es tangente a c" y "PB es tangente a c" (mientras señala "XZ es tangente a w"). Entonces, sería que estas dos (señala los enunciados "PA es tangente a c" y "PB es tangente a c") son congruentes...

Lo que se indica en el análisis a priori, es que primero se llena la casilla de las condiciones y de acuerdo a esta acción se realiza la búsqueda. Es decir, buscar reglas teóricas con ciertas características en sus antecedentes. Esto es lo que denominamos la exploración de la teoría. Notamos en [39], [41] y [43] que tener en cuenta las condiciones necesarias para la construcción del paso de razonamiento da una mejor orientación a la exploración de la teoría llevando exitosamente al hallazgo de las reglas teóricas necesarias para resolver el problema.

Como se indicó en el análisis a priori, para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente, la estudiante da clic en la pestaña símbolos (véase [41]). Usa esto para obtener la regla teórica en términos matemáticos y decidir sobre la pertinencia o no de su uso como se evidencia en [51] y [53]. Este uso del asistente también le permite al estudiante validar el paso de razonamiento mientras está en la fase de construcción.

También se indica en el análisis a priori que el uso de los símbolos le permite al estudiante hacer una homologación entre los datos del problema y el antecedente de la regla teórica elegida. En [53] podemos notar que el estudiante hace este proceso de homologación mentalmente y lo explicita de manera oral que la conclusión es que los segmentos PA y PB son congruentes.

Episodio 3.

[69]AF: **Va al asistente de demostración. Agrega los enunciados, en la casilla de los datos: "O es centro de c" y "P es exterior a c", responde afirmativamente a la pregunta ¿son evidentes estas afirmaciones? y los arrastra a la casilla de condiciones del paso de razonamiento.**

[70]Inv: Usted agregó unas cosas allí. "O es centro de c" y "P es exterior a c" ¿Eso es evidente?

[71]AF: Si, pero el "O" ya lo teníamos acá; círculo c con centro en O... Eso es evidente y lo necesito para las condiciones. **Agrega el enunciado "A y B están sobre c".**

[72]Inv: A y B están sobre c, ¿Segura?

[73]AF: **Abre Cabri.** Si. Están sobre el círculo.

En el episodio 2, el estudiante nota que hay algunos enunciados que no hacen parte de las condiciones iniciales y que deben ser agregados. Como se observa en este episodio el estudiante agrega estos enunciados como datos y los evalúa como evidentes con las razones expuestas en [71]. Esta acción estaba prevista en el análisis a priori.

Episodio 4.

[80]AF: **Va al asistente de demostración. Arrastra a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento el enunciado "A y B están sobre c". En Afirmaciones por demostrar agrega "PA=PB" y " $\angle OPA = \angle OPB$ " y los arrastra a las casilla de las conclusiones. Da clic en el botón verificar paso de razonamiento, y responde afirmativamente a las preguntas sobre la relación entre el antecedente y el consecuente con las condiciones y conclusiones, correspondientemente, del paso de razonamiento. Arrastra el paso de razonamiento construido al listado de pasos de razonamiento.**

1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) P es exterior a c (E) O es centro de c (E) A y B están sobre c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	$\angle OPA = \angle OPB$ PA = PB
---	--	--	--------------------------------------

El estudiante usó la opción símbolos para verificar los enunciados que le hacían falta para llenar las casillas uno y tres. Es evidente que de esta manera anticipó las preguntas de los controles de validación del asistente. Esto es un indicio de que el estudiante comienza a interiorizar el funcionamiento del asistente y fue previsto en el análisis a priori.

El esquema de uso del asistente de demostración se basó en la síntesis. Notamos cómo el uso de los datos del problema como condiciones necesarias condujo a la construcción del paso de razonamiento válido.

Episodio 5.

El estudiante acaba de construir un paso de razonamiento donde ha concluido que $PA=PB$ y que $\angle OPA=\angle OPB$.

[81]AF: Arrastra el enunciado " $PA=PB$ ", que acaba de demostrar, a la casilla de las conclusiones.

[82]Inv: ¿Para qué agregó eso en las condiciones?

[83]AF: No contesta al cuestionamiento. Borra " $PA=PB$ " de la casilla de las condiciones y agrega en afirmaciones por demostrar "Triángulo BPA es isósceles" y la arrastra a la casilla de las conclusiones. Luego, se dispone a buscar reglas teóricas por el consecuente; escribe, en este filtro, "isósceles" y selecciona la única regla teórica que aparece, definición del triángulo isósceles", y la arrastra a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. Da clic en símbolos. Lee cuales son las condiciones que necesita para usar esa regla teórica y arrastra el el enunciado " $PA=PB$ " a la casilla de las condiciones. Luego, da clic en el botón de verificación del paso de razonamiento. ¿Hay necesidad de especificar que es isósceles en...? (Señala que el consecuente de la regla teórica se dice en que vértice el triángulo es isósceles)

[84]Inv: ¿En donde es isósceles?

[85]AF: Abre Cabri. Sería en el punto P. ¿No?

[86]Inv: Si usted lo sabe, no veo ningún problema con eso.

[87]AF: Va al asistente de demostración. Responde afirmativamente a las preguntas que le permiten validar el paso de razonamiento.

2	$PA = PB$ (?)	Definición de triángulo isósceles	triángulo BPA es isósceles
---	---------------	-----------------------------------	----------------------------

Teniendo en cuenta lo observado en este episodio y en el episodio cuatro, donde el estudiante construyó dos pasos de razonamiento válidos siguiendo en uno el esquema de la síntesis y en otro el esquema del análisis afirmamos que el estudiante ha interiorizado el proceso de la exploración de la teoría y el funcionamiento del asistente de demostración, anticipando correctamente los controles de validación.

Episodio 6

[92]AF: Arrastra el enunciado "Triángulo BPA es isósceles" a la casilla de las condiciones. Luego, busca reglas teóricas cuyo antecedente contenga la palabra "isó". Selecciona la

regla teórica, "teorema 6.1 triángulo isósceles. Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos de su base son congruentes", y la lleva a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. También arrastra el enunciado " $\angle PBA = \angle PAB$ " a la casilla de las conclusiones.

[93]Inv: ¿Por qué uso esa regla teórica?

[94]AF: Yo la busque por las condiciones porque... O sea, no sabia bien si podía concluir, directamente, esto (señala el enunciado " $\angle PBA = \angle PAB$ "). Entonces, busqué por las condiciones que ya tenía; triángulo isósceles. Y encontré que: "Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos de su base son congruentes".

[95]Inv: y ¿Le sirve eso para demostrar lo que necesita?

[96]AF: Sí. Porque, está sería la base del triángulo isósceles (señala la cuerda AB) y estos son los lados congruentes (señala las tangentes PA y PB).

[97]Inv: Ok.

[98]AF: **Da clic en el botón de verificar paso de razonamiento. El asistente le pregunta si corresponden las conclusiones con el consecuente de la regla teórica y responde afirmativamente.**

[99]Inv: ¿Corresponden las afirmaciones de la regla teórica con lo que usted quiere demostrar?

[100] AF: Sí corresponden... **Responde afirmativamente a la segunda pregunta de la validación de pasos de razonamiento. Arrastra el paso de razonamiento al listado.**

3	Triángulo BPA es isósceles (?)	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PAB = \angle PBA$
---	--------------------------------	---------------------------------	---------------------------

De acuerdo a lo descrito en [92], el estudiante indicó cual era la regla teórica que usaría, manifestó que no estaba seguro de como concluiría el paso de razonamiento. Por ello, recurre a la exploración de la teoría. Es decir, busca reglas teóricas cuyas condiciones necesarias coincidan con los enunciados condición del problema, y que le permitan justificar teóricamente el enunciado que señala.

Al igual que en el episodio dos el estudiante muestra esquemas de uso del asistente de demostración basados en la síntesis; muestra también control sobre la validez de los pasos de razonamiento, incluso de manera anticipada; y también da evidencias de haberse apropiado de algunas reglas teóricas. Lo que indica que hay una evolución con respecto a lo observado en la primera intervención.

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis con respecto a la segunda intervención eran:

1. El estudiante hará uso de la exploración de la teoría para encontrar la regla teórica desconocida (Teorema de los segmentos tangentes desde un punto exterior: Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto).
2. El estudiante mostrará evidencias de la interiorización de reglas teóricas; él usará el asistente solo para comprobar o verificar si los pasos de razonamiento que construye mentalmente son correctos. Las reglas teóricas en mención son las relativas a las propiedades de los triángulos.
3. El estudiante mostrará que sus estrategias a la hora de construir el paso de razonamiento están basadas en el análisis y en la síntesis, y además tratará de anticiparse a los controles de validez de los pasos de razonamiento que construye.

Notamos que las hipótesis planteadas en el análisis preliminar de esta intervención han sido corroboradas en los episodios analizados. En los episodios 2, 3 y 4 se describe como el estudiante construye un paso de razonamiento válido usando la exploración de la teoría para encontrar una regla teórica desconocida para él. En los episodios 5 y 6, se evidencia como el estudiante ha adquirido y mejorado las habilidades de: búsqueda de reglas teóricas con determinadas características y la anticipación de la validación de pasos de razonamiento.

Aunque desde la primera intervención este estudiante mostró ciertas habilidades para adaptarse a los esquemas de uso del asistente de demostración, en los episodios 5 y 6 hay evidencia de la evolución de dichas habilidades.

Este estudiante logró construir todos los pasos de razonamiento necesarios para justificar todas y cada una de las afirmaciones por demostrar. Posteriormente, ordenó estos pasos de razonamiento y presentó la siguiente demostración como solución del problema sugerido.

Figura 175. Demostración presentada por el estudiante 1 en el problema 2.

Listado de pasos de razonamiento			
	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) P es exterior a c (E) O es centro de c (E) A y B están sobre c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	$\angle OPA = \angle OPB$ $PA = PB$
2	$PA = PB$ (1)	Definición de triángulo isósceles	triángulo BPA es isósceles
3	triángulo BPA es isósceles (2)	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PAB = \angle PBA$

Como se indicó en el análisis a priori el estudiante escribió los números correspondientes al paso de razonamiento donde ha sido justificado cada enunciado.

6.3.2. Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la segunda intervención.

Episodio 1.

- [5] JH: Sin escribir nada en la casilla de las condiciones del paso de paso de razonamiento comienza a buscar reglas teóricas cuyo antecedente contenga la palabra "tangente".
- [6] Inv: ¿Por qué busca esa palabra ahí?
- [7] JH: Porque, eh, esto, voy a mirar si existe una regla que... no se, me hable de lo que quiero demostrar.
- [8] Inv: ¿Usted quiere demostrar que algo es tangente a algo?
- [9] JH: No, eso es lo que tengo.
- [10] Inv: Ah, eso es lo que tiene.
- [11] JH: Sí.
- [12] Inv: Entonces, ¿Esas son condiciones?
- [13] JH: ¿Cómo?
- [14] Inv: ¿Son condiciones del problema?
- [15] JH: Sí.

[16]Inv: Bueno, y ¿Por qué no las agrega en las condiciones en el paso de razonamiento?

[17]JH: Porque, todavía no conozco la regla, voy a leerla primero para saber si las condiciones que tengo me sirven, y así... Simplemente voy a mirar.

Aunque no escribe nada en la casilla de las condiciones del paso de razonamiento es evidente que el esquema de uso del asistente está basado en la síntesis (véase [5] y [9]). El estudiante se anticipa al primer control de validez del paso de razonamiento; él busca reglas teóricas cuyo antecedente corresponda con las condiciones iniciales del problema. Este tipo de estrategia es referenciada en el análisis a priori.

Episodio 2.

[27]JH: **Lee las reglas teóricas que arrojó la búsqueda realizada. Selecciona y arrastra el teorema 10.11 (Segmentos tangentes desde un punto exterior) y da clic en símbolos. Ahora lee las condiciones y las conclusiones.** Si W es centro de... ¿w?

[28]Inv: W mayúscula es un punto; el centro, w minúscula es el círculo.

[29]JH: X es exterior a w. **Abre Cabri.** Tenemos P que es exterior a w. **Vuelve al asistente de demostración.** Tenemos "Y está sobre w" y "Z está sobre w". **Abre Cabri.** En nuestra construcción tenemos a A y a B. **Vuelve al asistente de demostración.** y "XY es tangente a w". **Va a Cabri.** Este es tangente (señala la tangente AP) a este (señala el círculo w) y este (señala la tangente BP) es tangente a este (señala, otra vez, el círculo w). **Vuelve al asistente de demostración.** Entonces "XY es congruente con XZ" y "WXY es congruente con VXZ". **Abre nuevamente Cabri.** W (señala el punto O) ... X (señala el punto P)... Y (señala el punto A) ¿Sí?

[30]Inv: ¿Qué tiene? ¿Qué le ofrece esa regla teórica? ¿Qué puede concluir con ella?

[31]JH: **Abre Cabri.** Que este (señala la tangente AP) es congruente con este (señala la tangente BP)...

Como se indicó en el análisis a priori, para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente, la estudiante da clic en la pestaña símbolos (véase [27]). Usa esto para decidir sobre la pertinencia o no de su uso. Este uso del asistente también le permite al estudiante anticiparse a la validación del paso de razonamiento mientras está en la fase de construcción.

También se indica en el análisis a priori que el uso de los símbolos le permite al estudiante hacer una homologación entre los datos del problema y los enunciados

que desea demostrar con el antecedente y el consecuente de la regla teórica elegida. En [29] podemos notar que el estudiante hace este proceso de homologación y lo explicita de manera oral.

Episodio 3.

- [41] Va al asistente de demostración. Arrastra, a la casilla de las condiciones, los enunciados "PA tangente a c", "PB tangente a c" y "c círculo con centro en O". Además, agrega en afirmaciones por demostrar, "PA=PB" y " $\angle OPA = \angle OPB$ " y las lleva a la casilla de las conclusiones. Da clic en el botón de verificar los pasos de razonamiento. Responde afirmativamente a la pregunta con respecto a la relación entre el consecuente de la regla teórica y las conclusiones que quiere demostrar. Mira las condiciones del antecedente y las condiciones necesarias.
- [42] Inv: ¿Corresponden? (refiriendome a las condiciones del antecedente y las condiciones necesarias).
- [43] JH: Bueno. O centro del círculo; X es exterior a w...
- [44] Inv: ¿Tiene eso?
- [45] JH: ¿X exterior a w?
- [46] Inv: Sí. ¿Dentro de las condiciones necesarias? Ahí le pregunta, mire la pregunta que le hace el asistente, dice: ¿Todas las condiciones del antecedente están en las condiciones necesarias?
- [47] JH: "PA tangente al círculo" y "PB tangente al círculo". Listo (señala las condiciones del antecedente "XZ tangente a w" y "XY tangente a w"). "Z está sobre w" y "Y está sobre w". Me faltan estas dos.
- [48] Inv: ¿Cuántas condiciones hay en el antecedente?
- [49] JH: Aquí hay tres (señala las condiciones que colocó en la casilla del paso de razonamiento) y aquí hay seis (señala las condiciones del antecedente de la regla teórica).
- [50] Inv: ¿Cuántas le hacen falta?
- [51] JH: Me faltan tres.
- [52] Inv: Entonces, ¿Corresponden?
- [53] JH: No. (Responde "no" a la pregunta del asistente de demostración).
- [54] Inv: No.
- [55] JH: O es centro del círculo, ese sí está.
- [56] Inv: Sí.
- [57] JH: X es exterior a w. No está este, voy a agregarlo acá. **Agrega en afirmaciones demostradas "P es exterior a c".**
- [58] Inv: ¿Está seguro de que eso es evidente?
- [59] JH: Si. Bueno, "P es exterior a c". **Arrastra este enunciado a la casilla de las condiciones.** Eh, A y B están sobre el círculo. **Abre Cabri.**

[60]Inv: ¿Seguro?

[61]JH: Sí, son dos puntos de círculo. Porque estas son tangentes, y la definición de tangentes dice que: "la tangente cortan al círculo solo en un punto"

[62]Inv: Entonces, ¿Puede usar la definición de tangente para demostrar que esos puntos están sobre el círculo?

[63]JH: Ah, pues si. Pero, ¿Es necesario?

[64]Inv: ¿Usted qué considera?

[65]JH: Yo considero que ahí están diciendo, que como es tangente, por la definición de tangente, pues esta sobre el círculo ¿No? *(Esto muestra que si es claro, para el estudiante, que los extremos de la cuerda están sobre el círculo).*

[66]Inv: Y ¿No se podría demostrar?

[67]JH: Sí, pero no se.

[68]Inv: Lo que usted considere está bien.

[69] **Agrega en afirmaciones demostradas "A y B están sobre c" y la arrastra a la casilla de las condiciones. Verifica que esten todas las condiciones, del paso de razonamiento, en concordancia con las condiciones del antecedente de la regla teórica. Da clic en verificar paso de razonamiento y responde afirmativamente las dos preguntas para validar el paso de razonamiento. Arrastra el paso construido al listado de pasos de razonamiento.**

[70]Inv: ¿Ahora si corresponden las condiciones?

[71]JH: Sí, listo.

1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) P es exterior a c (E) O es centro de c (E) A y B están sobre c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	$\angle OPA = \angle OPB$ $PA = PB$
---	--	--	--

Aquí se hace evidente el uso consciente de los controles lógicos sobre la enunciación de pasos de razonamiento. El estudiante nota que las condiciones que colocó en el casilla uno son menos que las del antecedente de la regla teórica que ha escogido. Hace una revisión de las condiciones y tal como se indica en el análisis a priori, escribe las condiciones que le hacen falta y las toma como evidentes con las razones expuestas en [55], [57], [59] y [61].

Como el estudiante usó la opción símbolos y a partir de esta información completó los enunciados que necesitaba acorde al antecedente y el consecuente de la regla teórica, es evidente que el control de validación sobre la enunciación del paso de

razonamiento sigue siendo externo. A pesar de que el estudiante no anticipa el control, sí lo realiza en el momento en el que el asistente le hace la pregunta sobre la correspondencia entre las condiciones y el antecedente de la regla teórica.

Afirmamos entonces que el control de la validación de los pasos de razonamiento está empezando a ser interiorizado por parte del estudiante.

El esquema de uso del asistente de demostración se basó en la síntesis. Notamos como el uso de los datos del problema como condiciones necesarias para la construcción del paso de razonamiento y la exploración de la teoría le permitieron al estudiante encontrar la regla teórica para construir un paso de razonamiento válido.

Episodio 4.

[78]Ah, claro. Pero yo tengo que este triángulo PAB tiene dos lados congruentes (señala las tangentes AP y BP). Cuando tiene dos lados congruentes ¿No es un isósceles?

[79]Inv: Sí.

[80]JH: Como es isósceles, hay un teorema que dice que los ángulos de su base son congruentes.

En este episodio, el estudiante recuerda una regla teórica que le permite anticipar el siguiente paso de razonamiento conectándolo con la afirmación que le piden demostrar. Está usando una estrategia de construcción del paso de razonamiento basada en la síntesis (línea [78]: yo tengo que este triángulo PAB tiene dos lados congruentes). Como se puede notar en las líneas [78] y [80] el estudiante ya sabe cuáles son los pasos de razonamiento que le hacen falta para finalizar la tarea; los hace mentalmente y los explicita de manera oral. Es probable que a partir de este momento use el asistente de demostración para corroborar o verificar lo que está pensando o para escribir los pasos de razonamiento.

Episodio 5.

[86]JH: Sí. **Agrega en afirmaciones por demostrar "Triángulo PBA es isósceles"**. Esto es lo que quiero demostrar, entonces escribo aquí, en el filtro en el consecuente, "isósceles".

Arrastra la única regla teórica de la lista: definición de triángulo isósceles, a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento y da clic en símbolos. Lee la regla teórica y arrastra el enunciado "AP=BP" a la casilla de las condiciones.

[87]Inv: Y ¿Por qué no agrega lo que quiere demostrar?

[88]JH: **Agrega el enunciado "Triángulo PBA es isósceles" a la casilla de las conclusiones.**

Verifiquemos. **Da clic en verificar paso de razonamiento. Al leer la primera pregunta...**

¿Isósceles en Y? ¿Qué quiere decir eso?

[89]Inv: Eso quiere decir que Y es el vértice que une los dos lados iguales.

[90]JH: Como P. ¿Aquí diría, triángulo PAB isósceles en P?

[91]Inv: Exacto.

[92]JH: **Responde afirmativamente a las dos preguntas de la validación del paso de razonamiento y arrastra el paso construido al listado de pasos de razonamiento.**

2	PA = PB (?)	Definición de triángulo isósceles	triángulo PBA es isósceles
---	-------------	-----------------------------------	----------------------------

El estudiante realiza un análisis. A pesar de no haber colocado nada en la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento, escribió el enunciado "Triángulo PBA es isósceles" en la lista de las afirmaciones por demostrar (línea [86]). Además el esquema de uso del asistente es el esperado: determina la afirmación que quiere demostrar, hace una búsqueda de reglas teóricas por el consecuente, elige la regla teórica a utilizar, muestra los enunciados simbólicos del antecedente y del consecuente y finalmente llena la casilla de condiciones.

El estudiante muestra habilidades más refinadas en cuanto al uso del asistente de demostración con respecto a lo observado en la primera intervención.

Conclusiones Análisis Local

La hipótesis principal planteada para esta segunda intervención era que el estudiante recurriría a la exploración de la teoría para encontrar una regla teórica, desconocida para él, que le permitiera construir un paso de razonamiento válido para justificar la congruencia de los segmentos tangentes. Esta hipótesis es confirmada en los episodios 1, 2, 3 y 4.

Otra de las hipótesis con respecto a la segunda intervención fue: el estudiante mostrará que sus estrategias a la hora de construir el paso de razonamiento están basadas en el análisis y en la síntesis, y además tratará de anticiparse a los controles de validez de los pasos de razonamiento que construye. Se puede observar el estudiante ha desarrollado habilidades de búsqueda de reglas teóricas con determinadas características: búsqueda en el antecedente cuando realiza una síntesis y busca en el consecuente cuando realiza un análisis. Aunque no anticipa los controles de validez si los realiza de manera consciente cuando el asistente se lo solicita.

Este estudiante logró construir todos los pasos de razonamiento necesarios para justificar todas y cada una de las afirmaciones por demostrar. Posteriormente, presentó la siguiente demostración como solución del problema sugerido llenando los paréntesis con los números del paso de razonamiento donde había sido justificado.

Figura 176. Demostración presentada por el estudiante dos en el problema dos.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) C círculo con centro en O (D) P es exterior a C (E) A Y B están sobre el círculo c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA =PB $\angle OPA = \angle OPB$
2	PA =PB (1)	Definición de triángulo isósceles	triángulo PBA es isósceles
3	triángulo PBA es isósceles (2)	Teorema 6.1 triángulo isósceles	$\angle PBA = \angle PAB$

6.3.3. Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la segunda intervención.

Episodio 1.

[5] JC: **Escribe la palabra "tangente" en la casilla de búsqueda por el antecedente.**

[6] Inv: ¿Qué va a buscar?

[7] JC: Tangente.

[8] Inv: Tangente ¿Por qué va a buscar tangente en el antecedente?

[9] JC: Porque en la construcción me dan que PB es tangente al círculo.

Aunque no escribe nada en la casilla de las condiciones del paso de razonamiento es evidente que el esquema de uso del asistente está basado en la síntesis (véase [5], [7] y [9]). El estudiante anticipa el primer control de validez del paso de razonamiento: busca reglas teóricas cuyo antecedente corresponda con las condiciones iniciales del problema. Este tipo de estrategia es referenciada en el análisis a priori.

Episodio 2.

[12]JC: ¡Ah, ya! **Arrastra el enunciado "PB es tangente a c" a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento. Lee las reglas teóricas que arroja la búsqueda realizada y desplaza la lista hacia arriba buscando las siguientes reglas.** Entonces, dice que si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

[13]Inv: Y ¿Eso le sirve?

[14]JC: Sí, si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior **(Abre Cabri y señala el punto P)** entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto. Esto no me sirve.

[15]Inv: ¿Por qué no le sirve?

[16]JC: Porque me dice que... Si, tengo las dos rectas tangentes al círculo desde un punto exterior, eso está bien. Pero entonces, me dice que forma ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

[17]Inv: ¿Cuál es la recta que une al centro con el punto?

[18]JC: No la tengo.

[19]Inv: ¿Cuál es?

[20]JC: Se supone que sería esta (señala los puntos P y O).

[21]Inv: Y usted no la tiene.

[22]JC: No la tengo. Pero, la puedo construir. Igual me diría que forma ángulos congruentes con la recta... **Traza la recta OP.**

Este episodio nos muestra una exploración de la teoría como la acción que le permite encontrar las reglas teóricas susceptibles de demostrar los enunciados que desea justificar. El estudiante examina la regla teórica encontrada para decidir la pertinencia de su uso. Notamos que este examen lo lleva a la construcción de objetos auxiliares que le permiten visualizar la teoría en la construcción hecha, tal y como se indica en [16], [20] y [22].

Episodio 3.

[23]Inv: ¿Qué es lo que le dice la regla teórica?

[24]JC: Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto. Es decir, formaría ángulos congruentes entre este (señala el ángulo PAB) y este (señala el ángulo que se forma con los puntos P, el punto de intersección OP y AB y el punto B).

[25]Inv: ¿Por qué?

[26]JC: Porque me dice que forma ángulos congruentes...

[27]Inv: Ángulos congruentes ¿Con qué se forman los ángulos?

[28]JC: Ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto. O sea con esta recta (señala la recta OP)... O sea, sería este ángulo (señala el ángulo APO)...

[29]Inv: y ¿Cuál mas?

[30]JC: Este ángulo (señala el ángulo APO) con este ángulo (señala el ángulo BPO).

Lo que se había previsto en el análisis a priori es que el estudiante utilizara la pestaña símbolos para comparar los enunciados de la regla teórica con los de las condiciones y de la conclusión. En este episodio el estudiante realiza esas comparaciones usando la regla teórica en lenguaje natural y lo contrasta con la construcción realizada en el software.

Episodio 4.

[38]JC: Ya tengo que los dos son congruentes. **Arrastra el teorema 10.11 (si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman**

ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto). Da clic en símbolos. Lee las condiciones del antecedente de la regla teórica. En este caso, sería que O está sobre la recta y P también.

[39]Inv: ¿Cómo?

[40]JC: Que están sobre la recta, que los dos puntos... Por que aquí me dice que W es el centro y aquí el centro es O . X exterior a w .

[41]Inv: ¿Cuál sería X ?

[42]JC: Pues P .

[43]Inv: Listo.

[44]JC: El Y está sobre w ; Y en este caso sería...

[45]Inv: ¿Qué es w ?

[46]JC: Según esto W es el centro.

[47]Inv: Pero, note que dice W centro de w . W es el centro...

[48]JC: Y w es el círculo. Entonces este sería Y (señala el punto A) y Z que está sobre w también, es este (señala el punto B).

[49]Inv: Ok.

[50]JC: Entonces XY es tangente a w ; PA es tangente a c . XZ es tangente a w que es esto que tengo acá. (señala la tangente PB).

[51]Inv: Sí.

[52]JC: Entonces tengo que agregar esta condición (arrastra el enunciado " PA es tangente a c " a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento) y tengo que agregar que c es el círculo (arrastra el enunciado "círculo c con centro en O " a la misma casilla) y ya.

[53]Inv: Y ya?

[54]JC: W es el centro; ya lo tengo... X exterior a w ; ah, bueno ese no lo tengo, lo voy a agregar. En este caso sería, que P es exterior a c (agrega este enunciado en el recuadro de afirmaciones demostradas).

[55]Inv: ¿Es evidente?

[56]JC: Sí, porque está en la construcción. Que más me dice... que Y está sobre w , entonces, se puede decir que A está sobre c .

[57]Inv: ¿Eso es evidente también?

[58]JC: Sí. Eso se ve en la construcción.

[59]Inv: Y ¿Uno no podría demostrar eso de que A está sobre c ?

[60]JC: Pues aquí le preguntamos a Cabri y... (Usa la herramienta pertenece a, y selecciona el punto y el círculo) El punto está sobre el objeto.

[61]Inv: ¿Y eso no se podrá demostrar?

[62]JC: Que A está sobre c . Es que eso es evidente.

[63]Inv: Ok, siga

[64]JC: Entonces, A está sobre c . Ahora, tengo que agregar que B está sobre c (agrega este enunciado al recuadro de las afirmaciones demostradas)...

Como se indicó en el análisis a priori, para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente, el estudiante da clic en la pestaña símbolos (véase [38]). Este uso del asistente también le permite al estudiante construir el paso de razonamiento anticipando el control de validación, pues el estudiante va estableciendo las equivalencias entre las condiciones necesarias del paso de razonamiento con el antecedente de la regla teórica.

El hecho de anticiparse a la validación controlando la correspondencia entre afirmaciones es un indicio de la interiorización del control.

Episodio 5.

[64]JC: Entonces, A está sobre c. Ahora, tengo que agregar que B está sobre c (agrega este enunciado al recuadro de las afirmaciones demostradas). Ya tengo las dos tangentes, listo. Entonces, concluyo: que las rectas... pero, bueno, ahí estoy concluyendo que las rectas son congruentes (se refiere a PA y PB) y que este ángulo (señala el ángulo OPB) y este ángulo (señala el ángulo OPA) son congruentes, sólo estos dos.

[65]Inv: Correcto.

[66]JC: Entonces aquí (Da clic en afirmaciones por demostrar) digo que PA=PB (escribe este enunciado) y que el ángulo APO es congruente con BPO (agrega este enunciado en la misma casilla). Entonces aquí concluyo esto (arrastra PA=PB a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento) y concluyo esto (arrastra $\angle OPA = \angle OPB$ a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento). Da clic en el botón verificar paso de razonamiento. Lee la primera pregunta, la relación entre el consecuente y las conclusiones y da clic en si.

[67]Inv: ¿Si lo tiene?

[68]JC: Sí... Ahora lee la segunda pregunta y compara las condiciones del problema con las condiciones del antecedente... da clic en si y arrastra el paso de razonamiento construido al listado de pasos de razonamiento.

Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PB tangente a c (D) PA tangente a c (D) c círculo con centro en O (D) B está sobre c (E) A está sobre c (E) P exterior a c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA = PB ángulo APO = ángulo BPO

Como el estudiante usó la opción símbolos y a partir de esta información completó los enunciados que necesitaba acorde al antecedente y el consecuente de la regla teórica, es evidente que el estudiante tiene la certeza de haber agregado todos los enunciados en las condiciones y en las conclusiones y se ha anticipado a la validación del paso de razonamiento.

Las acciones observadas en [68] han sido determinadas previamente en el análisis a priori y sugieren que es posible que el estudiante se haya anticipado a la validación del paso de razonamiento construido.

Aquí se hace evidente el uso consiente de los controles lógicos sobre la enunciación de pasos de razonamiento. El estudiante nota que las condiciones que le ofrece el problema no coinciden totalmente con las condiciones necesarias para usar la regla teórica que ha escogido. Hace una revisión de las condiciones y tal como se indica en el análisis a priori, escribe las condiciones que le hacen falta.

El esquema de uso del asistente de demostración se basó en la síntesis. Notamos como el uso de los datos del problema como condiciones necesarias para la construcción del paso de razonamiento y la exploración de la teoría le permitieron al estudiante encontrar la regla teórica que le permitió construir un paso de razonamiento válido.

Episodio 6.

[99]JC: Entonces... Da clic en el filtro de búsqueda por el consecuente.

[100] Inv: ¿Qué va a buscar?

[101] JC: Necesito concluir. Bueno pues voy a concluir que tengo dos ángulos congruentes.

[102] Inv: Sí.

[103] JC: Entonces puedo buscar por el consecuente, ángulos congruentes.

[104] Inv: Listo.

[105] JC: **Escribe, en el filtro para hacer búsquedas por el consecuente, "ángulos igu..."**

[106] Inv: ¿Encontró algo?

[107] JC: No, entonces... ángulos congruentes. **Escribe "ángulos congr..." en el mismo filtro de búsqueda, y lee las reglas teóricas que arroja la búsqueda** *(Al parecer las reglas teóricas de los postulados de congruencias le han dado luces para resolver el problema).*

Abre Cabri. Este lado (señala el segmento PA) es congruente con este lado (señala el segmento PB), y tengo que este ángulo (señala el $\angle APO$) es congruente con este (señala el $\angle BPO$).

El estudiante hace una búsqueda de regla teóricas que le permitan demostrar la congruencia de ángulos. Es decir, plantea un esquema de uso del asistente de demostración basado en el análisis. Al parecer esta estrategia le permite vislumbrar cual es la regla teórica que debe usar para construir los pasos de razonamiento faltantes.

Episodio 7.

- [123] JC: Entonces, si puedo usar... si puedo colocar la regla que dice lado-lado-ángulo.
[124] Inv: ¿Lado-lado-ángulo?
[125] JC: Lado-ángulo-lado.
[126] Inv: Ok.
[127] JC: Entonces, tengo que... **Abre el asistente.** Tengo dos lados y un ángulo. **Escribe en el filtro, para buscar por el antecedente, "dos lados iguales" y selecciona, lee y arrastra el postulado de congruencia lado-ángulo-lado a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. Da clic en símbolos.** Ah, pero primero...

Desconocemos cual es la razón por la cual, después de haber identificado la regla teórica que debe usar, ha decidido cambiar de estrategia en la construcción del paso de razonamiento. El estudiante plantea primero una estrategia basada en el análisis (véase [99] y [105] del episodio 6) y ahora plantea una estrategia basada en la síntesis (véase [127]). Podría atribuirse este cambio de parecer al hecho de que ya ha identificado las condiciones que satisfacen mediante la regla teórica la justificación del enunciado que desea demostrar.

Episodio 8.

- [127] JC: Entonces, tengo que... **Abre el asistente.** Tengo dos lados y un ángulo. **Escribe en el filtro, para buscar por el antecedente, "dos lados iguales" y selecciona, lee y arrastra el postulado de congruencia lado-ángulo-lado a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. Da clic en símbolos.** Ah, pero primero...
[128] Inv: ¿Qué?
[129] JC: **Abre Cabri.** Tengo que decir que PO es congruente consigo mismo.
[130] Inv: Pero, con PO no formaría los triángulos que, me dice usted, necesita.

- [131] JC: Tendría que colocar un punto de intersección acá (intersección de PO y AB)
- [132] Inv: Sí.
- [133] JC: Mientras traza el punto de intersección. Dice: "lo llamaré E", ¿Sí?
- [134] Inv: Sí.
- [135] JC: Entonces, ahora si puedo decir que PE es congruente consigo mismo.
- [136] Inv: Sí, ¿Cómo haría eso?
- [137] JC: Con la propiedad reflexiva.
- [138] Inv: Ok.

La solución prevista en el análisis a priori planteaba el uso de la definición de triángulo isósceles y el teorema que permite concluir que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. Este estudiante decidió usar el postulado de congruencia lado-ángulo-lado, que aunque no estuvo previsto también lo llevará a encontrar la solución de este problema de demostración.

A pesar de no estar estipulado en el análisis a priori, lo que se esperaría que suceda en [129] es que el estudiante no considere como obligatorio haber justificado un enunciado para poder usarlo como condición en un paso de razonamiento. De hecho una de las características más relevantes del asistente de demostración es que ofrece flexibilidad en el orden de la construcción de pasos de razonamiento y posteriormente sugiere una secuenciación de los pasos construidos para organizar la demostración.

No queremos decir que el procedimiento sea erróneo, lo que planteamos es que el estudiante hubiese podido usar el enunciado "PE=PE" y posteriormente hubiese construido el paso de razonamiento para justificarlo. Y una vez construidos los dos pasos de razonamiento los organizara de tal forma que se evidencie la secuencia.

Episodio 9.

- [157] JC: Sí. *Escribe en el filtro, para buscar reglas teóricas por el antecedente, "ángulo lado". Selecciona el postulado LAL y lo arrastra a la casilla de regla teórica del paso de razonamiento. Arrastra los enunciados "PA=PB", PE=PE" y "ángulo APO=ángulo BPO" a la casilla de las condiciones necesarios del paso de razonamiento.* Entonces concluyo que el triángulo APE es congruente con BPE.
- [158] Inv: Correcto.

[159] JC: En la casilla de afirmaciones por demostrar escribe "triángulo APE=triángulo BPE" y la arrastra a la casilla de las conclusiones.

Teniendo en cuenta lo observado en este episodio, el episodio cinco y en el episodio ocho, donde el estudiante construyó pasos de razonamiento válido y supuso la construcción mental de un paso de razonamiento, afirmamos que el estudiante ha entendido el proceso de la exploración de la teoría como el proceso efectivo de búsqueda de reglas teóricas que le permitirán construir pasos de razonamiento válidos. Quedan dudas acerca del manejo de la secuenciación de los pasos de razonamiento, es probable que ese comportamiento haya sido adquirido anteriormente y aún lo considere estrictamente necesario.

Podríamos señalar que el estudiante muestra esquemas de uso del asistente de demostración basados tanto en la síntesis; muestra también control sobre la validez de los pasos de razonamiento, incluso de manera anticipada; y también da evidencias de haberse apropiado de algunas reglas teóricas. Lo que indica que hay una evolución significativa con respecto a lo observado en la primera intervención.

Conclusiones Análisis Local

La hipótesis principal planteada para esta segunda intervención era que el estudiante recurriría a la exploración de la teoría para encontrar una regla teórica que le permitiera construir un paso de razonamiento válido para justificar la congruencia de los segmentos tangentes (esta se supone es una regla teórica desconocida para el estudiante). Esta hipótesis es confirmada en los episodios 1, 2, 3, 4 y 5.

Otra de las hipótesis con respecto a la segunda intervención fue: el estudiante mostrará que sus estrategias a la hora de construir el paso de razonamiento están basadas en el análisis y en la síntesis, y además tratará de anticiparse a los controles de validez de los pasos de razonamiento que construye. Como se puede observar en los episodios 5, 8 y 9, se evidencia como el estudiante ha adquirido y

mejorado las habilidades de: búsqueda de reglas teóricas con determinadas características, y anticipación en la validación de pasos de razonamiento.

Se tenía previsto, en el análisis a priori, que el estudiante sugiriera construcciones mentales de pasos de razonamiento para establecer evidencias acerca de la interiorización de algunas reglas teóricas. Aunque esta hipótesis no fue verificada los avances mostrados por el estudiante con respecto a la primera intervención permiten concluir que ha tomado consciencia acerca del proceso de exploración de la teoría, como el conjunto de acciones que le ayudan a construir pasos de razonamiento válidos; que es en esencia el primer escalón de este proceso.

Este estudiante logró construir todos los pasos de razonamiento necesarios para justificar todas y cada una de las afirmaciones por demostrar. Posteriormente llenó los paréntesis con los números correspondientes al paso de razonamiento donde se justificó cada enunciado y presentó la siguiente demostración como solución del problema sugerido.

Figura 177. Demostración presentada por el estudiante 3 en el problema 2.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PB tangente a c (D) PA tangente a c (D) c círculo con centro en O (D) B está sobre c (E) A está sobre c (E) P exterior a c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	PA = PB ángulo APO = ángulo BPO
2	segmento PE (E)	Propiedad Reflexiva	PE = PE
3	PA = PB (1) PE = PE (2) ángulo APO = ángulo BPO (1)	Postulado de la congruencia LAL	Triángulo APE = Triángulo BPE
4	Triángulo APE = Triángulo BPE (3)	Definición de triángulos congruentes	$\angle PBA = \angle PAB$

6.3.4. Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la segunda intervención.

Episodio 1.

- [4] Inv: ¿Usted me dice que va a buscar tangente? ¿Por qué va a buscar tangente?
- [5] LI: Tengo algo de tangente; en las condiciones. **Arrastra a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento: "PA es tangente a c" y "PB es tangente a c"**. Como tengo las condiciones, busco por el antecedente.
- [6] Inv: Correcto.
- [7] LI: **Escribe tangente en el filtro "en el antecedente". Lee las reglas teóricas, que resultaron de la búsqueda realizada, y arrastra el teorema 10.9 (Recta tangente a un círculo) a la casilla de regla teórica del paso de razonamiento. La lee y dice que no le sirve.**
- [8] Inv: ¿No le sirve?
- [9] LI: No, no se como resolverlo.
- [10]Inv: Hay mas reglas teóricas ¿Por qué no sigue buscando?
- [11]LI: **Sigue leyendo las reglas teóricas, se detiene en el teorema 10.11 (Segmentos tangentes desde un punto exterior) y lo arrastra a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. Da clic en símbolos y observa cuales son las condiciones del problema. Este si podría ser.**

Es evidente que el esquema de uso del asistente está basado en la síntesis (véase [5]). El estudiante se anticipa al primer control de validez del paso de razonamiento; él busca reglas teóricas cuyo antecedente corresponda con las condiciones iniciales del problema. Este tipo de estrategia es referenciada en el análisis a priori; y cuando esto sucede decimos que el estudiante está haciendo una exploración de la teoría.

Episodio 2.

- [11]LI: **Sigue leyendo las reglas teóricas, se detiene en el teorema 10.11 (Segmentos tangentes desde un punto exterior) y lo arrastra a la casilla de la regla teórica del paso de razonamiento. Da clic en símbolos y observa cuales son las condiciones del problema. Este si podría ser.**
- [12]Inv: ¿Por qué?
- [13]LI: Pero tendría que colocar otras condiciones. Como B y A están sobre c. **Lee las condiciones y la conclusión de la regla teórica y dice:** Si, claro esta la puedo utilizar.
- [14]Inv: Ok, utilicela.

[15]LI: *Escribe en afirmaciones por demostrar: "A está sobre c" y "B está sobre c" y las lleva a la casilla de las condiciones del paso de razonamiento. Lleva también a esta casilla el enunciado : "círculo con centro en O"*

[16]Inv: Ok.

[17]LI: *Dejeme ver cuántas condiciones necesito. Cuenta las condiciones de la regla teórica. Necesito un punto exterior al círculo...*

[18]Inv: ¿Por qué?

[19]LI: *Es una de las condiciones. Revisa la construcción y nota que el punto exterior al círculo es P. Agrega en condiciones demostradas que "P es un punto exterior a c"*

[20]Inv: ¿Eso es evidente?

[21]LI: Sí...

[22]LI: *Ahora puedo concluir que...*

[23]Inv: ¿Qué va a concluir?

[24]LI: *Que PA es igual a PB. Lo agrega a la casilla de afirmaciones por demostrar.*

Como se indicó en el análisis a priori, para obtener una descripción precisa de las afirmaciones del antecedente y del consecuente, el estudiante da clic en la pestaña símbolos (véase [11]). Usa esto para obtener descripción simbólica del antecedente y el consecuente de la regla teórica y decidir sobre la pertinencia o no de su uso (línea [11] y [13]). Este uso del asistente también le permite al estudiante anticiparse a la validación del paso de razonamiento.

También se indica en el análisis a priori que el uso de los símbolos le permite al estudiante hacer una homologación entre los datos del problema y los enunciados que desea demostrar con el antecedente y el consecuente de la regla teórica elegida. En este episodio podemos notar que el estudiante hace este proceso de homologación mentalmente y lo explicita de manera oral.

El estudiante nota que hay algunos enunciados que no hacen parte de las condiciones iniciales y que deben ser agregados. Como se observa, el estudiante agrega estos enunciados como datos y determina que estos son evidentes. Esta acción estaba prevista en el análisis a priori.

Episodio 3.

[28]LI: **Traza el segmento PO**. Entonces, tenemos que el ángulo APO es igual al ángulo BPO. Los agrega en la casilla de las afirmaciones por demostrar y los arrastra a la casilla de las conclusiones del paso de razonamiento. **Da clic en verificar paso de razonamiento y concluye que si hay correspondencia entre las condiciones necesarias y las conclusiones del paso de razonamiento con el antecedente y el consecuente de la regla teórica**

Listado de pasos de razonamiento

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) B esta sobre c (E) A esta sobre c (E) circulo c con centro O (D) P punto exterior a c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	$\angle APO = \angle BPO$ PA=PB

Como el estudiante uso la opción símbolos y a partir de esta información completo los enunciados que necesitaba acorde al antecedente y el consecuente de la regla teórica, afirmamos que tiene la certeza de haber agregado todos los enunciados en las condiciones y en las conclusiones y se ha anticipado a la validación del paso de razonamiento antes de que el asistente así lo sugiera.

Episodio 4.

[30]LI: Bueno, demostré que estos dos ángulos son congruentes. Señala los ángulos OPA y OPB. También demostré que estos dos lados son congruentes. Señala los segmentos AP y BP.

[31]Inv: Sí.

[32]LI: Y este, por transitividad... Señala el segmento que se forma con el punto P y el punto de intersección de PO y la cuerda AB.

[33]Inv: ¿Transitividad?

[34]LI: No, por la propiedad reflexiva puede decir que es congruente consigo mismo.

Señalando el segmento que se forma con el punto P y el punto de intersección de PO y la cuerda AB. Entonces por el postulado lado-ángulo-lado puedo demostrar que los dos triángulos son congruentes.

El estudiante está usando una estrategia de construcción del paso de razonamiento basada en la síntesis. Como se puede notar en [30], [32] y [34] el estudiante ya sabe cuál es el paso de razonamiento que quiere construir; lo hace mentalmente y lo

explícita de manera oral. Es probable, que a partir de este momento use el asistente de demostración para corroborar o verificar lo que está pensando o para escribir los pasos de razonamiento.

Teniendo en cuenta lo observado en este episodio y en el episodio tres, donde el estudiante construyó un paso de razonamiento válido y supuso la construcción mental de otros pasos de razonamiento más, afirmamos que el estudiante ha empezado a interiorizar el proceso de la exploración de la teoría.

Episodio 5.

[49]LI: Entonces, coloco este (arrastra $PC=PC$ a la casilla de las condiciones), este (arrastra $PA=PB$ a la casilla de la condiciones) y el ángulo (arrastra $\angle APO=\angle BPO$ a la misma casilla). En el filtro "en el antecedente" escribe: "congrue" y comienza a buscar la regla teórica del postulado LAL. Escribe en afirmaciones por demostrar "Triángulo APC=triángulo BPC" y lo lleva a las casilla de las conclusiones.

Podríamos señalar que el estudiante muestra esquemas de uso del asistente de demostración basados en la síntesis y anticipación al control sobre la validez de los pasos de razonamiento. Esto da indicios sobre la evolución de las estrategias para resolver el problema con respecto a lo observado en la primera intervención. Esta transformación de las estrategias de solución del problema es uno de los factores que determinan la interiorización.

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis principal con respecto a la segunda intervención era que, el estudiante hará uso de la exploración de la teoría para encontrar la regla teórica desconocida: Teorema de los segmentos tangentes desde un punto exterior: Si dos segmentos son tangentes a un círculo desde un punto exterior entonces, son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto. Hipótesis que se puede verificar con lo observado en los episodios 1, 2, y 3.

Otro de los supuestos era que el estudiante mostraría evidencias de la interiorización de reglas teóricas; al usar el asistente solo para comprobar o verificar si los pasos de razonamiento que construye mentalmente son correctos.

Notamos que las hipótesis planteadas en el análisis preliminar de esta intervención han sido corroboradas en los episodios analizados. En los episodios 1, 2 y 3 se describe como el estudiante construye un paso de razonamiento válido usando la exploración de la teoría para encontrar una regla teórica desconocida para él. En los episodios 4 y 5, se evidencia como el estudiante ha adquirido y mejorado las habilidades de: búsqueda de reglas teóricas con determinadas características y anticipación en la validación de pasos de razonamiento.

Este estudiante logró construir todos los pasos de razonamiento necesarios para justificar todas y cada una de las afirmaciones por demostrar. Posteriormente, ordenó estos pasos de razonamiento y presentó la siguiente demostración como solución del problema sugerido. Como se indicó en el análisis a priori el estudiante escribió los números correspondientes al paso de razonamiento donde ha sido justificado cada enunciado.

Figura 178. Demostración presentada por el estudiante 4 en el problema 2.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	PA tangente a c (D) PB tangente a c (D) B esta sobre c (E) A esta sobre c (E) circulo c con centro O (D) P punto exterior a c (E)	Teorema 10.11 segmentos tangentes desde un punto exterior	$\angle APO = \angle BPO$ PA=PB
2	segmento PC (E)	PROPIEDAD REFLEXIVA	PC=PC
3	PC=PC (2) PA=PB (1) $\angle APO = \angle BPO$ (1)	Postulado de la congruencia LAL	triángulo APC=triángulo BPC
4	triángulo APC=triángulo BPC (3)	Definición de triángulos congruentes	$\angle PBA = \angle PAB$

6.4. Conclusiones del análisis a posteriori local en la segunda intervención.

- La hipótesis, el estudiante hace uso de la exploración de la teoría en el asistente de demostración para encontrar la regla teórica desconocida, es verificada en cada una de las intervenciones. El asistente está dejando de ser un instrumento complicado de usar para convertirse en una herramienta que permite encontrar nuevas ideas y controlarlas.
- Los estudiantes muestran indicios de hacer búsquedas conscientemente, las estrategias de búsqueda están basadas en el análisis y en la síntesis, y además tratan de anticiparse a los controles de validez de los pasos de razonamiento que construyen usando la pestaña símbolos. Uno de los estudiantes no logra anticiparse a los controles de validación pero controla la validez de manera consciente cuando el asistente se lo sugiere. (ver episodio 3 del numeral 6.3.2).
- El estudiante mostrará evidencias de la interiorización de reglas teóricas; él usará el asistente solo para comprobar o verificar si los pasos de razonamiento que construye sin usar el asistente son correctos. Las reglas teóricas en mención son las relativas a las propiedades de los triángulos.
- Dos de los estudiantes presentaron las demostraciones usando la regla teórica: “teorema 6.1 triángulo isósceles” para concluir que los ángulos formados por la cuerda AB y las tangentes PB y PA son congruentes. Propusieron usar la regla teórica y trataron de anticiparse a los controles de validez sin usar el asistente de demostración, como no tenían certeza de la correspondencia entre condiciones y el antecedente de la regla teórica recurrieron al asistente para controlar la validez de manera consciente.
- Los otros dos estudiantes presentaron las soluciones usando la regla teórica del postulado de la congruencia lado-ángulo-lado. Indicaron cual regla teórica

usar pero no se arriesgaron a anticipar el control de validez sin usar el asistente de demostración.

- Uno de los estudiantes cuando hacia la anticipación a los controles de validación notó que uno de los enunciados que debía usar como condición de la regla teórica aún no había sido justificado, y resolvió borrar todo el procedimiento realizado para justificar ese enunciado antes de continuar con la estrategia que había iniciado (ver episodio 8 del numeral 6.3.3). Es evidente que este estudiante no es consciente de la flexibilidad con la que puede contar a la hora de construir los pasos de razonamiento. Es decir, que podría usar un enunciado sin justificar como la condición de un paso de razonamiento y luego justificarla como es debido.

6.5. Análisis a posteriori local de la tercera intervención.

6.5.1. Análisis a posteriori local de estudiante 1 para la intervención final

Episodio 1.

[11]AF: **Coloca el enunciado "D simétrico de A con respecto a M" en la casilla de las condiciones necesarias del paso de razonamiento. Busca en el filtro "en el antecedente" la palabra simetría. ¿No está simetría? Para este caso, el asistente de demostración no cuenta con reglas teóricas relativas a las transformaciones en el plano.**

[12]Inv: No. En el asistente no hay reglas teóricas de simetría.

[13]AF: ¿En el libro?

[14]Inv: Ahí encuentra una carpeta donde está el libro.

[15]AF: **Abre el libro (versión PDF)**

[16]Inv: ¿Qué va a buscar en el libro?

[17]AF: Simetría. **Busca en el índice del libro.** Aquí no está la simetría que estoy buscando.

[18]Inv: ¿Cuál es la que usted busca?

[19]AF: La central. Aquí están la simetría reflexiva y la rotacional.

[20]Inv: ¿Y por qué no mira de que se tratan las simetrías reflexiva y la rotacional?

[21]AF: **Va al glosario del libro y comienza a leer.**

[22]Inv: ¿Por qué está buscando en ese glosario del libro?

[23]AF: Porque están todas las reglas teóricas y los conceptos con sus significados.

[24]Inv: ¿Qué espera encontrar en esa regla teórica? ¿Qué espera que diga?

[25]AF: Puede decir que estos dos son congruentes también (señala AM y MD).

[26]Inv: ¿Había escuchado alguna vez esa palabra, simetría central?

[27]AF: Sí me suena pero no estoy segura.

En el análisis a priori se tenía previsto, que ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración el estudiante se remitiría a búsquedas en internet o en el libro. En este caso, el estudiante fue a indagar por reglas teóricas al libro.

El estudiante hace una búsqueda en el índice y el glosario del libro (véase [17] y [21]) con criterios bastante claros. Espera encontrar alguna regla teórica que usando la condición de la simetría central le permita concluir que los segmentos AM y MD (MD es el segmento que va del punto medio M a D simétrico de A con respecto a M) son congruentes. El estudiante está realizando acciones concretas; ha comenzado a construir un paso de razonamiento a partir de las condiciones del problema y está buscando información que le permita construir una regla teórica específica. Es pertinente suponer que hay una exploración de la teoría representada en una estrategia basada en la síntesis.

Episodio 2.

[28]Inv: Entonces, ¿Qué esperaría que diga la simetría central?

[29]AF: Que son congruentes.

[30]Inv: ¿Cuáles?

[31]AF: AM y MD. Lo que veo aquí en la construcción, es que la simetría de A con respecto a M es el punto D. Y Parecen ser congruentes. O sea, la distancia que toma A a M es la misma que toma M a D.

[32]Inv: Pues, tendría que buscar una regla teórica que le permita decir eso. O sea, que $AM=MD$.

[33]AF: O sea que en la simetría central debe estar el punto medio o que son equidistantes al centro M.

[34]Inv: ¿Qué se le ocurre hacer?

[35]AF: Buscar en "google", buscar en internet.

[36]Inv: Pues, busque en internet.

[37]AF: **Abre google y busca "simetría central"**.

[38]Inv: ¿Por qué buscó esa palabra ahí?

[39]AF: ¿Simetría central?

[40]Inv: Sí.

[41]AF: Pues eso es lo que tengo. **Escoge tres opciones de las que arrojó la búsqueda y las abre.**

Figura 179. Búsqueda practicada por el estudiante 1 en el problema 3.



[42]Inv: ¿De toda esa lista por qué escogió esas tres opciones?

[43]AF: La tercera, la escogí por lo que dice en la descripción; la de wikipedia, la abrí por mirar, no confío mucho en ella por eso abrí otras.

[44]Inv: ¿No confía en wikipedia?

[45]AF: No, Y abrí está (señala la segunda opción) porque me parece que sus explicaciones son claras.

[46]Inv: ¿Encontró lo que quería encontrar? ¿Le sirve lo que encontró?

[47]AF: **Lee la definición del wikipedia y la de la URL**

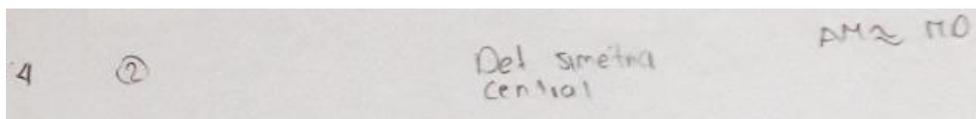
http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/vidioteca/curso2/htmlb/SEC_54.HTM.
16. Simetría central

Corresponde a la sesión de GA 2.16 TODO DE CABEZA

La simetría central se da con respecto de un punto llamado centro de rotación o punto medio, y consiste en una rotación de 180°.

Según esto, estos dos si son congruentes (Señala AM y MD).

Figura 180. Paso de razonamiento no válido construido por el estudiante 1 en el problema 3.



Tal y como se indicó en el análisis a priori el estudiante ha llegado a un motor de búsqueda para indagar sobre reglas teóricas acerca de la simetría central. Es claro que la estrategia usada por el estudiante está basada en la síntesis; él está

buscando reglas teóricas a partir de las condiciones del problema (véase [37], [39] y [41]).

Se puede observar que el estudiante ha identificado cierta información que le permitirá construir una regla teórica. Según el análisis a priori lo que debería haber sucedido era que el estudiante identificará cuales eran las condiciones necesarias y las afirmaciones por demostrar y construyera una proposición de la forma si-entonces. Esto no sucedió, el estudiante no dio evidencias de anticipación a los controles de validación.

El estudiante ha construido el paso de razonamiento consciente de que necesita una regla teórica que relacione la afirmación “D es simétrico de A con respecto a M” con la afirmación “AM=MD”, pero no realiza los controles de validez del asistente de demostración: no identifica las afirmaciones del antecedente y del consecuente de la regla teórica para verificar que correspondan con las condiciones y la conclusión. Por lo tanto el paso de razonamiento construido no es válido. Aunque el estudiante anticipa la necesaria relación entre condiciones necesarias-regla teórica-conclusión, no ha interiorizado completamente la necesidad de los controles de validez propuestos por el asistente.

Episodio 3.

[48]Inv: Bueno, entonces ya tiene lo que quería demostrar. ¿Qué puede hacer con eso?

[49]AF: No voy a escribir nada, solo voy a buscar paralelogramo en el consecuente para ver que tengo que buscar. **Escribe paralelogramo en el consecuente y lee las cinco reglas teóricas que arrojó la búsqueda.**

[50]Inv: ¿Qué va a hacer ahora?

[51]AF: Voy a dibujar un paralelogramo más bonito (dibuja en una hoja un paralelogramo y dibuja sus diagonales). Tengo que este es congruente con este (marca los segmentos MC y BM en el dibujo que realizó) y este es congruente con este (marca los segmentos AM y MD). Por ángulos opuestos por el vértice, tengo que este es congruente con este (señala los ángulos CMD y AMB). Entonces, tengo lado-ángulo-lado.

[52]Inv: Correcto.

[53]AF: Con eso digo que estos dos son congruentes (señala los segmentos AB y CD). Podría decir lo mismo aquí (señala los segmentos AC y BD) o podría decir, simplemente, que son

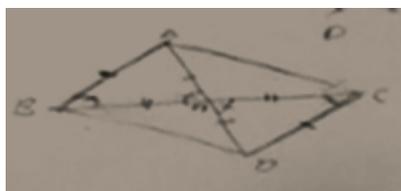
paralelas (refiriéndose a los segmentos AB y CD). Ya tengo que estos son congruentes (señala los ángulos MCD y MBA). O sea, los ángulos alternos internos son congruentes, entonces estas dos son paralelas (señala los segmentos AB y CD).

[54]Inv. ¿Entonces?

[55]AF: Ya tengo que estos dos (señala los segmentos AB y CD) son paralelos y congruentes y con eso puedo decir que esto es un paralelogramo.

[56]Inv: *(El estudiante usa por momentos el asistente de demostración para verificar la correspondencia entre la condiciones y el antecedente de la regla teórica y la correspondencia entre la las conclusiones y el consecuente de la regla teórica y de esta manera anticiparse al control de validación de cada paso de razonamiento que construye).*

Figura 181. Dibujo realizado por el estudiante 1 en el problema 3.



El estudiante propone, haciendo alusión al dibujo que realizó, la construcción de una secuencia de pasos de razonamiento siguiendo el esquema de la síntesis. El camino señalado por el estudiante para terminar de construir la demostración ha sido referenciado en el análisis a priori. Por lo tanto, afirmamos que el estudiante muestra indicios de interiorización el proceso de la exploración de la teoría y anticipación correctamente los controles de validación sobre la enunciación de pasos de razonamiento que usan reglas teóricas que ya han sido estudiadas por el estudiante (paralelismo, cuadriláteros, postulados de congruencia, entre otros).

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis planteadas con respecto a esta intervención eran:

1. Ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración, el estudiante se remitirá a búsquedas en internet o en libros para construir una regla teórica (una proposición de la forma si-entonces) que le permita construir un paso de razonamiento válido.
2. El estudiante mostrará evidencias de interiorización de reglas teóricas, anticipando los controles de validez propuestos en el asistente. En algunos

casos usará el asistente para verificar la correspondencia entre la regla teórica y las condiciones.

En el episodio 2 se verifica la hipótesis uno: el estudiante busca reglas en internet y en el libro dado que al asistente de demostración no le proporciona ningún tipo de información.

Buscar reglas teóricas desconocidas es un buen indicio de interiorización de la exploración de la teoría, pues el estudiante está estableciendo unos criterios de búsqueda que le permiten encontrar información con determinadas características. Sin embargo, el estudiante transforma la información encontrada para ajustarla a lo que necesita para demostrar, olvidando el control de validez necesario propuesto en el asistente. El estudiante desestima la información que ha sido hallada realizando buenas prácticas de búsqueda (ver línea [47] del episodio 2): el consecuente de la regla teórica encontrada habla de punto medio, pero el estudiante escribe en la conclusión $AM=MD$.

El episodio tres confirma la hipótesis dos. Contiene evidencia suficiente para afirmar que el estudiante está haciendo uso de la exploración de la teoría sin usar el asistente. Busca reglas teóricas en su mente y con ellas construye pasos de razonamiento válidos. El uso del asistente de demostración es únicamente para corroborar y verificar.

A continuación mostramos lo que el estudiante presenta como su solución al problema de demostración.

Figura 182. Demostración presentada por el estudiante 1 en el problema 3.

	Condiciones	Teoría	Conclusiones
3	①	Def. punto medio	$BH \cong MC$
4	②	Def. simetría central	$AM \cong MD$
5	AD y BC se cortan en H	T. 49	$\angle CHD \cong \angle AHB$
6	3, 4 y 5	P.L.A.L.	$\triangle ABH \cong \triangle DCH$
7	6	Def. de triángulos congruentes	$CD \cong AB$ $\angle BBA \cong \angle MCO$
8	$\angle MBA \cong \angle MCD$ $\angle MAB \cong \angle MDC$ Son Alternos Internos M corte a BC y AD	T. 52	$AB \parallel CD$
	$B \text{ y } CD \cong AB$	T. 8.5	ABCD es paralelogramo

NOTA:
1 y 2 CORRESPONDEN A LOS DATOS DE CONSTRUCCIÓN.
1. M PUNTO MEDIO DE BC.
2. D SIMÉTRICO DE A CON RESPECTO A M.

6.5.2. Análisis a posteriori local de estudiante 2 para la intervención final.

Episodio 1.

- [6] JH: ... Ahora dice que A y D son simétricos con respecto a M; o sea, que de A a M es lo mismo que de M a D.
- [7] Inv: ¿Seguro?
- [8] JH: Sí, creo que eso es lo que dice simetría.

[9] Inv: ¿Qué es una simetría?

[10]JH: Yo entiendo la simetría como un punto que equidista... dos puntos que están en una misma recta pero equidistan de un punto que está entre ellos.

[11]Inv: ¿Está seguro?

[12]JH: No.

[13]Inv: ¿Por qué dice usted eso?

[14]JH: Es que no recuerdo si es la axial o la central, yo en alguna oportunidad estuve leyendo pero no me acuerdo... ¿Puedo buscar aquí en internet?

[15]Inv: Claro. ¿Por qué busca en internet?

[16]JH: Porque, primero quiero estar seguro de la definición de simetría central. **Abre google y escribe "definición de simetría central". Escoge la opción.**

Definición: Simetría Central - Disfruta Las Matemáticas 
www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/simetria-central.html 
Definición: Simetría Central (Diccionario Ilustrado de Matemáticas)

[17]Inv: ¿Por qué escogió esa opción?

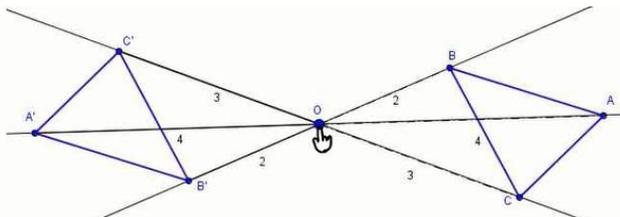
[18]JH: Porque estoy mirando una página para comparar información. **Ahora escoge la segunda opción, la página de wikipedia.**

Simetría central - Wikipedia, la enciclopedia libre 
es.wikipedia.org/wiki/Simetría_central 
Dos puntos P y P' son **simétricos** respecto del centro de **simetría** O cuando O es el punto medio del segmento. La **simetría** respecto de un punto se llama ...

[19]JH: **Comienza a leer la definición que ofrece wikipedia...** O sea, lo que yo estaba diciendo.

[20]Inv: ¿Qué?

[21]JH: Este es simétrico con este (señala los puntos A y A') entonces este es el punto medio (señala el punto O).



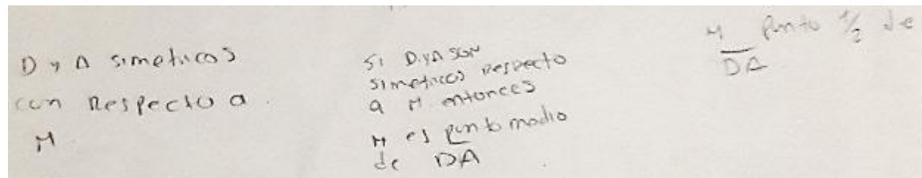
[22]Inv: Entonces ¿Cuál es la regla teórica que debe usar? ¿Cómo debe ser la proposición si-entonces?

[23]JH: Si D y A son simétricos con respecto a M , entonces M es punto medio de DA .

[24]Inv: ¿Cuáles son las condiciones que necesita para usar esa regla teórica?

[25]JH: Que D y que A sean simétricos con respecto a M . Y eso ya lo tenemos. Entonces concluimos que M es punto medio de DM . **Escribe el paso de razonamiento en la hoja.**

Figura 183. Paso de razonamiento válido construido por el estudiante 2 en el problema 3.



[26]JH: Ahora como M es punto medio de DA, por definición de punto medio, entonces $DM=MA$.

En este episodio sucede algo que no estaba previsto en el análisis a priori. El estudiante conoce la regla teórica de la simetría central (ver líneas [6], [14] y [21]). Para corroborar si lo que dice con respecto a la simetría central es correcto el estudiante busca en internet definición de simetría central.

En el análisis a priori se planteó que el estudiante realizaría una búsqueda en internet después de notar que la búsqueda en el asistente no proporcionaba reglas teóricas que le permitieran construir el paso de razonamiento que necesitaba. No es posible determinar si buscó primero en internet porque ya sabía que en el asistente de demostración no encontraría información o si fue una acción espontánea.

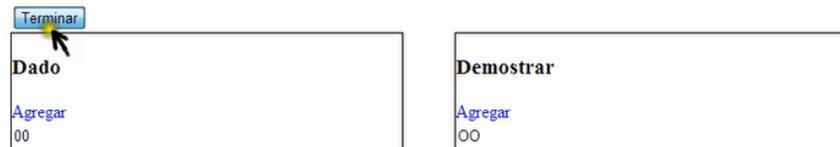
Tal y como se indicó en el análisis a priori, tras analizar la información suministrada por el enlace de Wikipedia el estudiante logra estructurar la regla teórica como proposición de la forma si-entonces (ver línea [23]). Posteriormente, el estudiante de la anticipación sobre los controles de validación (ver línea [25]) y construye el paso de razonamiento con una regla teórica ajena al dominio teórico del asistente de demostración. Las acciones de este estudiante dan sustento para afirmar que ha interiorizado la exploración de la teoría.

En la línea [26] el estudiante construye un paso de razonamiento basándose en la síntesis. El registro de video indica que no se realizó una búsqueda de reglas teóricas en el asistente de demostración, ni tampoco una verificación de la correspondencia entre las condiciones y el antecedente de la regla teórica o entre

el enunciado "AM=MD" y el consecuente de la definición de punto medio. Lo que indica que el individuo realizó este proceso de manera interna.

Episodio 2.

[30]JH: **Abre el asistente de demostración y no escribes nada (concreto) en las casillas de "Dado" y "Demostrar"**. Es solo para verificar una regla teórica.



[31]JH: Voy a buscar acá, en el consecuente. **Escribe paralelogramo** (el estudiante ya manifestó que quiere saber cuales son las formas de poder llegar a concluir que un cuadrilátero es un paralelogramo). **Lee las reglas teóricas que le arrojó la búsqueda practicada...**

[32]Inv: ¿Cuál es la idea que usted tiene?

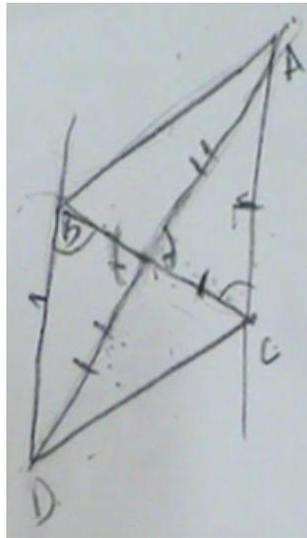
[33]JH: Debo comprobar que estos (marca los segmentos BA y CD en el dibujo) sean congruentes y paralelos para demostrar que es un paralelogramo.

[34]Inv: ¿Cómo llegaría a eso?

[35]JH: Yo demostraría que este ángulo (marca el ángulo AMC) es congruente con este ángulo (marca el ángulo BMD)

[36]Inv: ¿Cómo lo demostraría?

[37]JH: Con dos rectas que se cortan, con los ángulos opuestos por el vértice. Y después, tengo lado-ángulo-lado con eso puede decir que este (marca el segmento AC) es congruente con este (marca el segmento BD). Me faltaría saber como decir que son paralelas. O sea, a lo que quiero llegar es que son paralelas. **Escribe "rectas pa" en el consecuente. Aparecen cuatro reglas teóricas: ángulos alternos internos iguales, ángulos alternos externos iguales, algunos correspondientes iguales y ángulos internos del mismo lado suplementarios. Va al dibujo de su hoja y dice:** Este (marca el ángulo ACM) sería congruente con este (marca el ángulo DBM), esta sería mi transversal (señala el segmento BC) y estas serían las paralelas (señalando los segmentos DB y AC).



[38]Inv: Correcto.

[39]JH: **Escribe todos los pasos de razonamiento que mencionó y completa la demostración que se le había pedido.**

El estudiante hace uso del asistente de demostración basado en el análisis (ver líneas [31] y [33]) para construir el paso de razonamiento que le permite demostrar que el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo. Luego construye un paso de razonamiento para justificar que $\angle AMC = \angle BMD$ y sin hacer uso del asistente, es decir, de manera interna se anticipa a los controles de validación como se evidencia en la línea [37]. Posteriormente, vuelve a usar el asistente basándose en el análisis para demostrar que DB y AC son paralelos, note que en la línea [37] hay evidencia de que el estudiante se anticipó a los controles de validación. Todas estas acciones han sido previstas en el análisis a priori y dan evidencia de que el estudiante ha interiorizado los esquemas de búsqueda del asistente de demostración y la anticipación sobre los controles de validación.

De acuerdo a lo observado en el episodio dos, el estudiante construye algunos pasos de razonamiento con condiciones que no han sido justificadas, esta tarea la realiza posteriormente. Es evidente que el estudiante tiene en cuenta la secuenciación de los pasos de razonamiento para presentación de la demostración este se evidencia con la solución que sugiere a continuación.

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis con respecto a la segunda intervención eran:

1. Ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración, el estudiante se remitirá a búsquedas en internet o en libros para construir una regla teórica que le permita construir un paso de razonamiento válido.
2. El estudiante mostrará evidencias de interiorización de reglas teóricas, anticipando los controles de validez propuestos en el asistente. En algunos casos usará el asistente para verificar la correspondencia entre la regla teórica y las condiciones.

Notamos que las hipótesis planteadas en el análisis a priori de esta intervención han sido corroboradas en los episodios analizados. En los episodios 1 y 2 se describe como el estudiante construye un paso de razonamiento válido usando la exploración de la teoría para encontrar una regla teórica desconocida para él. El estudiante realiza la exploración de la teoría en internet y muestra evidencias de anticipación a los controles de validez. Es importante señalar que el estudiante explicita el antecedente y el consecuente de la regla teórica y los utiliza para controlar la correspondencia con las condiciones y la conclusión.

El episodio tres muestra evidencia suficiente para afirmar que el estudiante está haciendo uso interno de la exploración de la teoría: Busca reglas teóricas en su mente y con ellas construye pasos de razonamiento válidos.

Este estudiante logró construir todos los pasos de razonamiento necesarios para justificar todas y cada una de las afirmaciones por demostrar. A diferencia de las intervenciones anteriores en las que el estudiante construía la demostración siguiendo un esquema de síntesis, en esta ocasión utiliza un esquema de análisis, mostrando flexibilidad en cuanto al orden de la demostración.

Figura 184. Demostración presentada por el estudiante 2 en el problema 3.

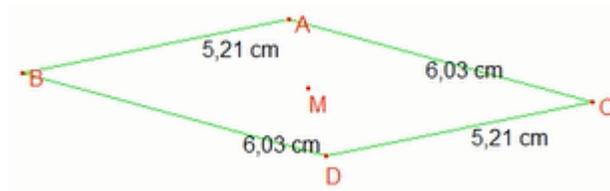
Condición	Regla técnica	Conclusión
M punto medio BC	Definición de punto medio	$\overline{BM} = \overline{MC}$
D y A simétricos con respecto a M	Si D y A son simétricos respecto a M entonces M es punto medio de DA	M punto $\frac{1}{2}$ de \overline{DA}
M punto $\frac{1}{2}$ de \overline{DA}	Definición de punto medio	$\overline{DM} = \overline{MA}$
\overline{DA} secante con \overline{BC} en M	opuesto por el vértice	$\angle BMO \cong \angle CMA$
1, 3, 4	P.L.A.L.	$\triangle OBM \cong \triangle OCM$
5	Definición de	$\overline{OB} \cong \overline{OC}$ $\angle OCM = \angle OBM$
\overline{BC} transversal (c)		$\overline{OB} \parallel \overline{OC}$
\overline{DB} y \overline{CA}	ta. 5.2	
$\angle ACH$ y $\angle OBM$ son ángulos internos	Definición de paralelogramo	ABDC es un paralelogramo.
6, 7		

6.5.3. Análisis a posteriori local de estudiante 3 para la intervención final.

Episodio 1.

Dados tres puntos A, B y C; construya el punto M, como punto medio de BC; luego haga simetría central de A con respecto a M, al punto resultante llámelo D. Finalmente, construya el cuadrilátero ABDC

[1] Inv: ¿Qué clase de cuadrilátero es ABDC?



[2] JC: Es un paralelogramo, tiene sus lados opuestos congruentes.

[3] Inv: Bueno, entonces debe demostrar que el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo.

[4] JC: ¿Puedo usar el asistente?

[5] Inv: ¿Por qué se le ocurre usar el asistente?

[6] JC: Para buscar reglas teóricas. Así, me puedo guiar. **Ingresar los datos del problema al asistente de demostración.**

Ingreso del Problema

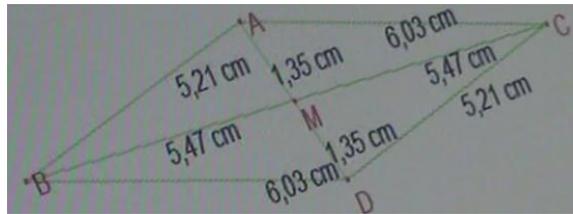
Terminar	
Dado	Demostrar
Agregar	
punto B	
punto A	
punto C	
M punto medio de B Y C	
D simetría central de A respecto a M	
	Paralelogramo BACD

[7] JC: Como M es el punto medio de BC. Yo puedo decir que BM es congruente con MC. AM, también, es igual a MD.

En la línea [2] el estudiante construye un paso de razonamiento basándose en el análisis y basado en la verificación de las medidas de los lados del cuadrilátero se anticipa al control de validez del paso de razonamiento. En la línea [7] el estudiante construye otro paso de razonamiento, pero esta vez, basándose en la síntesis. Se anticipa en el control de validez, nota que dentro de las condiciones de la construcción tiene el enunciado “M es el punto medio de B y C” y dice que el enunciado “BM es congruente con MC”. El estudiante construye estos pasos de razonamiento sin usar el asistente de demostración lo que indica que el individuo realizó estos procesos de manera interna.

Episodio 2.

- [9] JC: Traza los segmentos AM y MD y los mide. Si, son iguales por la simetría central. Luego, mide los segmentos BM y MC.



- [10]Inv: Bueno, entonces debe buscar una regla teórica que le permita afirmar lo que usted dice.
- [11]JC: Sí, la de punto medio y la de simetría central. **Escribe "simetría" en los filtros del nombre y del antecedente y nota que no aparece ninguna regla teórica.** Debo agregar la regla teórica de la simetría central.
- [12]Inv: Debe tener en cuenta que si usted decide agregar una regla teórica es necesario que, establezca concordancia entre las condiciones del problema y el antecedente de la regla teórica; y además, también debe existir relación entre lo que quiere demostrar y el consecuente de la regla teórica.
- [13]JC: Ok
- [14]Inv: Entonces, para proponer la regla teórica primero debemos estar seguros de si lo que decimos es correcto.
- [15]JC: Es que teniendo eso ($AM=MD$)... Yo podría decir que este ángulo (señala el ángulo AMB) es congruente con este ángulo (señala el ángulo DMC) luego que el triángulo CMD es congruente con el triángulo AMB y por consiguiente $AB=CD$. Lo mismo con los ángulos AMC y BMD , y concluimos que el triángulo AMC es congruente con el triángulo BMD y por partes correspondientes de triángulos congruentes $AC=BD$. *(Plantea desde el inicio del problema que con la congruencia de lados opuestos le permite resolver el problema).*
- [16]Inv: Entonces, ¿Cuál es la dificultad que se nos ha presentado para poder construir la demostración?
- [17]JC: Pues, yo creo que tenemos la dificultad en el segmento donde aplicamos la simetría. No sabemos que regla teórica nos permita decir eso.
- [18]Inv: Exacto, tenemos una idea y es que AM y MD son congruentes, ya usted lo verifico con Cabri. Nos hace falta la regla teórica. ¿Qué podríamos hacer?
- [19]JC: Pues tendríamos que leer sobre la simetría central. **Abre google y escribe "simetría central"**
- [20]Inv: ¿Por qué lo hace en internet y no de pronto en el libro?
- [21]JC: No tengo el libro.
- [22]Inv: ¿Se lo presto?
- [23]JC: Si. **Busca en el índice del libro.**
- [24]Inv: ¿Qué está buscando?
- [25]JC: La definición de simetría.

[26]Inv: ¿Por qué prefirió la búsqueda en el libro a la búsqueda en internet?

[27]JC: Porque en el libro están los pasos para llegar a eso.

[28]Inv: ¿Para llegar a qué?

[29]JC: A la demostración. Entonces , me imagino que dirá algo de simetría central... **Después de leer la información que encuentro renuncia a la búsqueda en el libro.** ¿Puedo seguir buscando en internet?

[30]Inv: Adelante.

[31]JC: Escoge la primera opción del listado que le arrojó su búsqueda.

Definición: Simetría Central - Disfruta Las Matemáticas 
www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/simetria-central.html 
Definición: Simetría Central (Diccionario Ilustrado de Matemáticas)

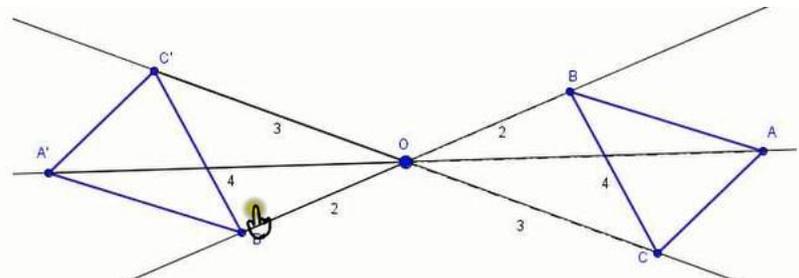
[32]Inv: ¿Por qué escogió esa opción de entre todas las que le salieron?

[33]JC: Pues, wikipedia no, y estas son imágenes.

[34]Inv: ¿Por qué wikipedia, no?

[35]JC: Son opiniones que cada quien escribe. **Le da clic en el enlace de wikipedia y empieza a leer la información.**

[36]JC: **Después de leer la información de wikipedia, dice:** Este (señala el segmento $A'O$) es igual a este (señala el segmento OA) y este (señala el segmento $B'O$) es igual a este (señala el segmento BO).



[37]JC: Lee: "En una simetría central, los segmentos homólogos son iguales...". Mmm como diría ahí.

[38]Inv: ¿Cómo diría qué?

[39]JC: Quiero pasarla a la forma si-entonces. Pero, no se como.

[40]Inv: Puede ir armandola. ¿Ya sabe qué concluye?

[41]JC: Sí. Que tiene la misma distancia al punto central.

[42]Inv: Entonces... ¿Ya tenemos la conclusión?

[43]JC: $AM=MD$...

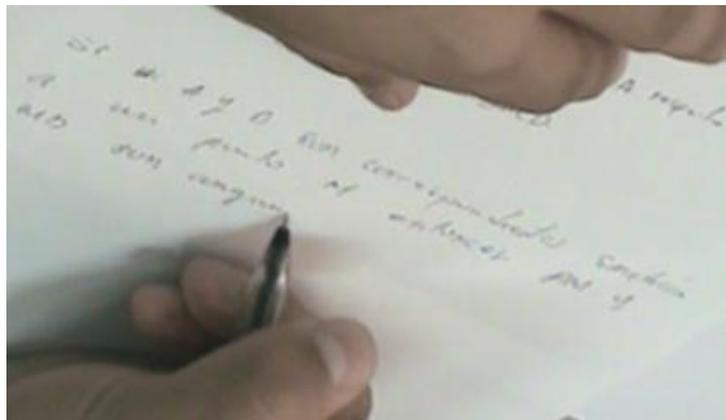
[44]Inv: Nos hace falta establecer las condiciones.

[45]JC: Que M es el punto central.

[46]Inv: ¿El punto central de qué?

[47]JC: De los puntos, respecto de los otros puntos.

- [48]Inv: ¿A cuáles puntos?
- [49]JC: A este (señala B), este (señala C), este (señala D) y este (señala A).
- [50]Inv: ¿Qué papel juegan B y C ahí?
- [51]JC: Que M es el punto medio de BC.
- [52]Inv: Correcto, pero con respecto a que AM sea igual a MD.
- [53]JC: No, pues nada.
- [54]Inv: Y entonces ¿Cuáles son las condiciones para mostrar que AM=MD?
- [55]JC: Que tengo un punto A y un punto M, Donde M... A le corresponde a D...
- [56]Inv: O sea, ¿Qué A y D son correspondientes?
- [57]JC: Sí. Si A y D son correspondientes a un punto M entonces AM y MD son congruentes.
- [58]Inv: ¿A y D son correspondientes bajo qué criterio?
- [59]JC: Porque D es la simetría central de A.
- [60]Inv: Correcto. Entonces, ¿Cómo quedarían las condiciones?
- [61]JC: Si un punto A y punto D son correspondientes simétricos, entonces...
- [62]Inv: ¿Correspondientes simétricos con respecto a qué?
- [63]JC: Con respecto a un punto M.
- [64]Inv: Correcto.
- [65]JC: Si A y D son correspondientes simétricos con respecto a un punto M entonces AM y MD son congruentes.



- [66]Inv: Ok. Ya tenemos la regla teórica. Ahora, debe escribir el paso de razonamiento.
- [67]JC: Lo voy a hacer aquí en el asistente de demostración. **Agrega las condiciones del problema y lo que quiere demostrar. Construye el primer paso de razonamiento con la definición de punto medio, una regla teórica que ya conoce.**

1	M punto medio de B Y C (D)	Definición de punto medio	BM = MC
---	----------------------------	---------------------------	---------

- [68]JC: JC: Para el segundo paso de razonamiento. Agrega la regla teórica al asistente de demostración. Luego, agrega a la casilla de las conclusiones agrega AM=MD. Mientras, que en las condiciones agrega "D simetría central de A con respecto a M. Y valida las relaciones

entre las condiciones y el antecedente y entre las condiciones y el consecuente de la regla teórica de la simetría central.

2	punto A (D) D simetría central de A respecto a M (D)	Simetría central: si A y D son correspondientes simétricos a un punto M entonces AM y MD son congruentes	AM = MD
---	---	---	---------

En la línea [15] el estudiante menciona que si logra demostrar que el enunciado “AM=MD” puede usarlo, junto a otros enunciados, como condiciones para construir el paso de razonamiento que le permita concluir que los triángulos AMB y DMC son congruentes y usando las regla teórica de la congruencia de un par de triángulos puede concluir que AB=DC. De manera análoga justificaría que los triángulos AMC y DMB son congruentes y posteriormente que AD=BC. Una vez que ha justificado estos dos enunciados el estudiante manifiesta que tiene los enunciados necesarios para demostrar que el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo recalando que esa fue la estrategia que indicó en el episodio uno. Vale la pena resaltar que este tipo de acciones están previstas en el análisis a priori pero es necesario hacer dos observaciones: la primera observación consiste en mostrar que el estudiante efectivamente construye pasos de razonamiento sin usar el asistente de demostración y además se anticipa a los controles de validez verificando la correspondencia entre las condiciones y el antecedente de las reglas teóricas a las que hace referencia en este aparte de la transcripción. Y la segunda observación corresponde al hecho de que, el estudiante no ha notado que podría hacer la construcción de los pasos de razonamiento que está proponiendo usando el enunciado “AM=MD” y que posteriormente puede construir el paso de razonamiento que lo justifique. Es decir, no muestra flexibilidad en cuanto al orden de la demostración.

En las líneas [19], [23], [28] y [31] notamos que el estudiante ha comenzado a hacer una búsqueda de información tanto en el libro como en internet con el criterio

“simetría central”. Estas acciones dan signos de que el estudiante ha interiorizado los esquemas de búsqueda de reglas teóricas.

Lo observado desde la línea [36] hasta la línea [68] muestra que el estudiante ha construido el paso de razonamiento consciente de que necesita una regla teórica que relacione la afirmación “D simetría central de A respecto a M” con la afirmación “AM=MD”, pero no realiza los controles de validez del asistente de demostración: no identifica las afirmaciones del antecedente y del consecuente de la regla teórica para verificar que correspondan con las condiciones y la conclusión. Por lo tanto el paso de razonamiento construido no es válido. Aunque el estudiante anticipa la necesaria relación entre condiciones necesarias-regla teórica-conclusión, no ha interiorizado completamente la necesidad de los controles de validez propuestos por el asistente.

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis con respecto a la segunda intervención eran:

1. Ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración, el estudiante se remitirá a búsquedas en internet o en libros para construir una regla teórica que le permita construir un paso de razonamiento válido.
2. El estudiante mostrará evidencias de interiorización de reglas teóricas, anticipando los controles de validez propuestos en el asistente. En algunos casos usará el asistente para verificar la correspondencia entre la regla teórica y las condiciones.

En las líneas [19], [23], [28] y [31] del episodio 2 se verifica la hipótesis uno: el estudiante busca reglas en internet y en el libro dado que al asistente de demostración no le proporciona ningún tipo de información.

Buscar reglas teóricas desconocidas es un buen indicio de interiorización de la exploración de la teoría, pues el estudiante está estableciendo unos criterios de

búsqueda (simetría central) que le permiten encontrar información de ciertas características. Sin embargo, el estudiante transforma la información encontrada para ajustarla a lo que necesita para demostrar, olvidando el control de validez necesario propuesto en el asistente. El estudiante desestima la información encontrada en la búsqueda realizada en internet donde el consecuente de la regla teórica encontrada habla de punto medio, pero el estudiante escribe en la conclusión que AM y MD son congruentes.

La línea [15] del episodio dos muestra evidencia suficiente para afirmar que el estudiante está haciendo uso interno de la exploración de la teoría: Busca reglas teóricas en su mente y con ellas construye pasos de razonamiento válidos. El estudiante considera necesario usar las casillas del asistente para escribir su demostración.

A continuación mostramos lo que el estudiante presenta como su solución al problema de demostración.

Figura 185. Demostración presentada por el estudiante 3 en el problema 3.

	Condiciones Necesarias	Regla Teórica	Conclusión
1	M punto medio de B Y C (D)	Definición de punto medio	$BM = MC$
2	punto A (D) D simetría central de A respecto a M (D)	Simetría central: si A y D son correspondientes simétricos a un punto M entonces AM y MD son congruentes	$AM = MD$
3	AB y BC se cortan en M (E)	Teorema 4.9 teorema de los ángulos opuestos por el vértice	ángulo CMA = ángulo DMB
4	$BM = MC$ (1) $AM = MD$ (2) ángulo CMA = ángulo DMB (3)	Postulado de la congruencia LAL	triángulo AMC = Triángulo BMD
5	triángulo AMC = Triángulo BMD (3)	Definición de triángulos congruentes	$BD = AC$
6	AD y BC se cortan en M (E)	Teorema 4.9 teorema de los ángulos opuestos por el vértice	ángulo BMA = ángulo DMC
7	$BM = MC$ (1) $AM = MD$ (2) ángulo BMA = ángulo DMC (6)	Postulado de la congruencia LAL	triángulo DMC = triángulo BMA
8	triángulo DMC = triángulo BMA (7)	Definición de triángulos congruentes	$DC = BA$
9	$DC = BA$ (8) $BD = AC$ (5)	Teorema 8.4 lados opuestos de un paralelogramo	Paralelogramo BACD

6.5.4. Análisis a posteriori local de estudiante 4 para la intervención final.

Episodio 1.

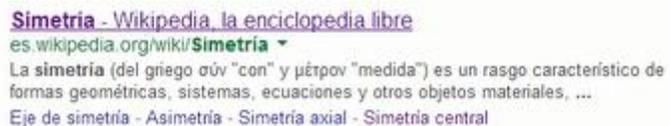
[12]Inv: ¿Cuáles datos tiene?

[13]LI: Que M es punto medio de BC.

[14]Inv: También tiene que D es el simétrico de A con respecto a M.

[15]LI: Sí, pero no sé para que me sirve la simetría central... ¿Puedo buscar en el asistente de demostración?

- [16]Inv: Claro.
- [17]LI: **Escribe "simetria" en el filtro de búsqueda por el nombre de la regla teórica. No aparecen reglas teóricas.**
- [18]Inv: ¿Por qué busca simetría por ese filtro? ¿Que esperaba encontrar?
- [19]LI: La definición. **Escribe, en el antecedente, la palabra simetría.**
- [20]Inv: Ahora, busco por el antecedente ¿Qué esperaba encontrar?
- [21]LI: Lo mismo, la definición.
- [22]Inv: ¿Encontró algo?
- [23]LI: No. **Comienza a hacer la búsqueda, ahora por el filtro del consecuente, y nota que tampoco aparecen reglas teóricas.** No, aquí no hay nada.
- [24]Inv: Esa regla teórica no se encuentra en el asistente. En caso de encontrar una regla teórica de simetría central ¿Qué esperaría que dijera?
- [25]LI: Pues como A es el simétrico con respecto a M y D es el simétrico con respecto a M...
- [26]Inv: Lo correcto es decir, D es el simétrico de A con respecto a M. ¿Usted había escuchado, antes, hablar de la palabra simetría central?
- [27]LI: La verdad no recuerdo haberla escuchado. Quisiera saber que es y como la relaciono con los triángulos (señala los triángulos que se formaron cuando ella trazó el segmento BC). Quiero buscar...
- [28]Inv: Y ¿Por qué no busca?
- [29]LI: Puedo buscar en internet.
- [30]Inv: Sí, Claro.
- [31]LI: **Abre google y busca la palabra "simetría".**
- [32]Inv: ¿Por qué busca simetría en internet?
- [33]LI: Pues quiero que me diga que es simetría. **Da clic en el vínculo de la página de wikipedia.**
- [34]Inv: ¿Por qué escogió esa opción?
- [35]LI: Yo siempre leo lo de wikipedia, porque trae la mejor definición de algo.



[Simetría - Wikipedia, la enciclopedia libre](#)
es.wikipedia.org/wiki/Simetría ▾
La **simetría** (del griego σύν "con" y μέτρον "medida") es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones y otros objetos materiales, ...
[Eje de simetría](#) - [Asimetría](#) - [Simetría axial](#) - [Simetría central](#)

- [36]Inv: ¿Usted considera que tiene información confiable?
- [37]LI: Sí. Siempre que tengo una duda busco ahí.
- [38]Inv: ¿Qué esperaría usted que diga esa regla teórica?
- [39]LI: Comienza a leer la definición de simetría... **Encuentra los tipos de simetría, axial y central.**
- [40]Inv: ¿Qué encontró?
- [41]LI: Simetría axial y simetría central. **Da clic en el vínculo de simetría central. Lee la información.**

Simetría central



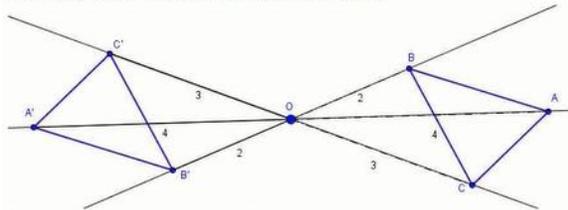
Este artículo o sección sobre matemáticas necesita ser wikificado con un formato acorde a las convenciones de estilo.
Por favor, [edítalo](#) para que las cumpla. Mientras tanto, no elimines este aviso puesto el 26 de junio de 2012.
También puedes ayudar wikificando otros artículos.

Dos puntos P y P' son simétricos respecto del centro de simetría O cuando O es el punto medio del segmento.

La simetría respecto de un punto llamado **simetría central** y los puntos correspondientes, **homólogos**. En una simetría central, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también son iguales.

Ejemplo 1:

Dibuja el triángulo simétrico respecto del centro O del triángulo dado ABC .



[42]LI: La distancia del punto A al punto O es la misma que la distancia de O a este punto (señala el punto A'). Entonces...

[43]Inv: ¿Qué pasaría?

[44]LI: Este (señala el punto M en la construcción de Cabri) sería el punto... **Lee nuevamente.** A y A' están alineados y la recta que los une pasa por O . **Va a Cabri.** Tengo que pasar una recta por acá (señala los puntos A y D).

[45]Inv: ¿Por qué?

[46]LI: Ahí dice que la recta que une a los puntos contiene al centro.

[47]Inv: ¿Cuáles puntos?

[48]LI: Por A y por D y pasa por M . Y debe quedar, que la distancia de A a M es la misma que de M a D . **Traza el segmento AD .**

[49]Inv: Entonces, ¿Qué tiene?

[50]LI: Este (señala el segmento AM) es congruente con este (señala el segmento MD) y este (señala el segmento BM) es congruente con este (señala el segmento MC).

[51]Inv: ¿En qué está pensando?

[52]LI: Tengo cuatro triángulos (señala los triángulos formados al trazar los segmentos AD y BC dentro del paralelogramo $ABDC$).

[53]Inv: Y ¿Cómo demuestra que los triángulos son congruentes?

[54]LI: Hay tres postulados: Lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo.

[55]Inv: Sí, correcto.

[56]LI: Ya profesor. Estos dos ángulos son congruentes (señala los ángulos BMD y AMC) por el teorema 4.9.

[57]Inv: ¿Cuál es el teorema 4.9? ¿Qué dice?

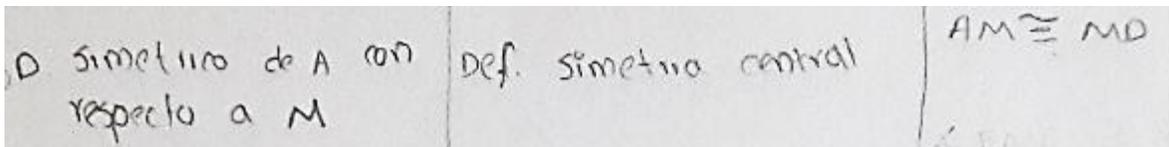
[58]LI: Que si AD y BC se cortan en M , entonces el ángulo... Espere hago el dibujo. **Dibuja dos líneas que se cortan en un punto y señala los ángulos opuestos por el vértice.** Entonces estos también son congruentes (señala los ángulos BMA y DMC).

[59]Inv: Escriba la demostración.

[60]LI: **Escribe M punto medio de BC , en la casilla de las condiciones, y usa la definición de punto medio para concluir que BM es igual a MC .**

- [61]Inv: Correcto.
- [62]LI: Profesor pero, no se como decir esto de la simetría central.
- [63]Inv: ¿Qué quiere decir?
- [64]LI: Digamos, para decir que estos dos (señala los segmentos AM y MD) son congruentes.
- [65]Inv: ¿Qué condiciones necesita, usted, para decir que esos dos son congruentes?
- [66]LI: Según la definición de simetría central, la distancia de AM es igual a la distancia de MD.
- [67]Inv: Entonces, ¿Qué necesitamos para poder usar esa definición?
- [68]LI: **Escribe (AM=MD) en la casilla de las conclusiones y usa la regla teórica llamada "definición de simetría central"...** Entonces decimos que si D es el simétrico de A con respecto a M quedaría entonces... que estos dos son congruentes (señala los segmentos AM y MD).
- [69]Inv: LLévela a la forma si-entonces. ¿Cómo quedaría?
- [70]LI: Si D es el simétrico de A con respecto a M, entonces AM es congruente con MD. **Escribe en la casilla de las condiciones necesarias "D es el simétrico de A con respecto a M".**

Figura 186. Paso de razonamiento construido por el estudiante 4 en el problema 3.



En las líneas [29] y [31] notamos que el estudiante ha comenzado a hacer una búsqueda de información en internet con el criterio “simetría”. Luego encuentra un vínculo que la lleva a la definición de simetría central. Estas acciones dan signos de que el estudiante ha interiorizado los esquemas de búsqueda de reglas teóricas.

En las líneas [56], [57] y [58] sin ayuda del asistente el estudiante hace uso del análisis y construye un paso de razonamiento válido, se anticipa a los controles de validez verificando la correspondencia entre el consecuente de la regla teórica y la conclusión (ver línea [56]) y en la línea [58] verifica la correspondencia entre el antecedente de la regla teórica y las condiciones.

Las líneas [68] y [70] muestra que el estudiante ha construido el paso de razonamiento consciente de que necesita una regla teórica que relacione la afirmación “D simetría central de A respecto a M” con la afirmación “AM=MD”, pero no realiza los controles de validez del asistente de demostración: no identifica las afirmaciones del antecedente y del consecuente de la regla teórica para verificar

que correspondan con las condiciones y la conclusión. Por lo tanto el paso de razonamiento construido no es válido. Aunque el estudiante anticipa la necesaria relación entre condiciones necesarias-regla teórica-conclusión, no ha interiorizado completamente la necesidad de los controles de validez propuestos por el asistente.

Episodio 2.

- [74]LI: ...En la casilla de las condiciones necesarias, del cuarto paso de razonamiento, escribí 1, 2 y 3.
- [75]Inv: ¿Por qué colocó ahí 1, 2 y 3? ¿Qué quiere decir eso?
- [76]LI: 1 quiere decir $BM=MC$, 2 quiere decir $AM=MD$ y 3 quiere decir $\angle BMD=\angle AMC$... Con el postulado lado-ángulo-lado concluyo que el triángulo BMD es congruente con el triángulo CMD.
- [77]Inv: ¿Para qué le sirve decir que esos dos triángulos son congruentes?
- [78]LI: Para decir que estos lados (señala los segmentos AC y BD) son congruentes.
- [79]Inv: Correcto.
- [80]LI: Ahora voy a demostrar que estos dos triángulos (señala los triángulos AMB y CMD) también son congruentes. Y así, decir que estos lados (señala los lados AB y CD) son congruentes.

En las líneas [74] y [76] el estudiante construye un paso de razonamiento usando la estrategia de la síntesis: llena la casilla de las condiciones y busca en su memoria una regla teórica relacionada con las condiciones. Luego se anticipa a los controles de validez estableciendo la correspondencia entre el consecuente de la regla teórica y enunciado que quiere demostrar.

Conclusiones Análisis Local

Las hipótesis con respecto a la segunda intervención eran:

1. Ante la imposibilidad de encontrar reglas teóricas acerca de la simetría central en el asistente de demostración, el estudiante se remitirá a búsquedas en internet o en libros para construir una regla teórica que le permita construir un paso de razonamiento válido.
2. El estudiante mostrará evidencias de interiorización de reglas teóricas, anticipando los controles de validez propuestos en el asistente. En algunos

casos usará el asistente para verificar la correspondencia entre la regla teórica y las condiciones.

En las líneas [29] y [31] del episodio 1 se verifica la hipótesis uno: el estudiante busca reglas en internet dado que al asistente de demostración no le proporciona ningún tipo de información. El estudiante usa como criterio de búsqueda la palabra “simetría” y después de leer la información que le suministró internet, notó que el criterio de búsqueda era “simetría central”.

Cuando el estudiante busca reglas teóricas que no están en el asistente de demostración es un buen indicio de interiorización de la exploración de la teoría, pues el estudiante está estableciendo unos criterios de búsqueda (simetría y simetría central) que le permiten encontrar información de ciertas características.

En este caso, el estudiante encontró la regla teórica que necesitaba pero cambió la información encontrada para ajustarla a lo que necesita para demostrar, él olvidó el control de validez necesario propuesto en el asistente. El estudiante desestima la información encontrada en la búsqueda realizada en internet donde el consecuente de la regla teórica encontrada habla de punto medio (ver línea [41] del episodio 1), y escribe en la conclusión que AM y MD son congruentes. Por tal motivo, el paso de razonamiento construido no es válido.

Las líneas [56], [57] y [58] del episodio 1 y líneas [74] y [76] del episodio 2 muestra evidencia concluyente para afirmar que el estudiante está haciendo uso interno de la exploración de la teoría: Busca reglas teóricas en su mente y con ellas construye pasos de razonamiento anticipándose a los controles de validez: verifica correspondencias entre las condiciones y el antecedente de la regla teórica y correspondencias entre el consecuente de la regla teórica y las conclusiones del paso de razonamiento. Es decir, está construyendo pasos de razonamiento válidos.

A continuación mostramos lo que el estudiante presenta como su solución al problema de demostración.

Figura 187. Demostración presentada por el estudiante 4 en el problema 3.

condición	Regla teórica	conclusión
1) M punto medio de \overline{BC}	def punto medio	$BM \cong MC$
2) D simétrico de A con respecto a M	def. simetría central	$AM \cong MD$
3) \overline{AD} y \overline{BC} se cortan en M	teo 4.9	$\angle BMD \cong \angle AMC$
4) 1, 2 y 3	Postulado $\perp A \perp$	$\triangle BMD \cong \triangle AMC$
5) \overline{AD} y \overline{BC} se cortan en M	teo 4.9	$\angle AMB \cong \angle CMD$
6) 1, 2, 5	Postulado $\perp A \perp$	$\triangle AMB \cong \triangle CMD$
7) 4	def \triangle congruentes	$AC \cong BD$
8) 6	def \triangle congruentes	$AB \cong CD$
9) 7 y 8	teo 8.4	ABCD es paralelogramo

6.6. Conclusiones del análisis a posteriori local en la tercera intervención

- Los estudiantes buscan reglas teóricas desconocidas, usando internet o libros, es un buen signo de interiorización de las estrategias de búsqueda de información. Pues estas búsquedas no debe remitirse solo a la base de datos del asistente de demostración.
- No es solo cuestión de identificar la naturaleza de la información que se requiere y crear la estrategia que permita descubrirla. Es también poder controlar su validez y verificar su correspondencia con las condiciones y las

conclusiones del paso de razonamiento. No controlar la validez es una acción supremamente arriesgada, es posible encontrar reglas teóricas que no son correctas y aun así usarlas para construir la demostración.

- Aunque no estaba previsto en el análisis a priori fue una constante el uso de dibujos a mano alzada para hablar de las propiedades de la construcción. Es claro que para los estudiantes lo más importante no es la ilusión de exactitud que ofrece el software sino lo que se puede decir del dibujo.
- En el episodio 2 del numeral 6.5.3 notamos que nuevamente el estudiante 3 manifiesta que si no ha justificado un enunciado no puede usarlo como la condición de otro paso de razonamiento. Es probable que esta resistencia al cambio de estrategia de la síntesis al análisis se deba a la instrucción de la construcción estrictamente deductiva de la demostración y que fue recibida previa al curso. En contraposición, tenemos el caso del estudiante 2 (ver episodio 2 del numeral 6.5.2) quien usualmente había manifestado estrategias de solución basadas en la síntesis, en esta ocasión utiliza un esquema de análisis, mostrando flexibilidad en cuanto al orden de la demostración.
- Solo el estudiante que siguió la estrategia de análisis logró producir todos los pasos de razonamiento válidos para la construir la demostración pedida.
- Las funciones mentales de los estudiantes muestran una evolución a lo largo de las tres intervenciones. Los estudiantes de manera independiente realizan tareas que en las intervenciones anteriores solo era posible realizarlas mediadas por el uso del asistente de demostración.

6.7. Análisis a posteriori global.

A continuación se presenta un cuadro donde se comparan, en las tres intervenciones, cinco tipos de acciones:

1. Uso de esquemas de búsqueda: Condiciones-RT / RT-Conclusiones.

Esta acción corresponde a la articulación que se da entre comenzar a construir un paso de razonamiento por las condiciones y luego buscar reglas teóricas por el antecedente o comenzar a construir el paso de razonamiento por las conclusiones y buscar reglas teóricas por el consecuente.

2. Anticipación a los controles de validación / Validación de paso de razonamiento.

Esta acción consiste en establecer correspondencia entre las condiciones y el antecedente de la regla teórica y la correspondencia entre el consecuente de la regla teórica y las condiciones.

3. Estrategia usada en la construcción de la demostración.

Consiste en definir si prefiero usar análisis o síntesis.

4. Flexibilidad en la producción de pasos de razonamiento.

Consiste en construir, o no, la demostración en el mismo orden de la exposición.

5. Signos de modificación de estructuras mentales.

Es la identificación de cambios sobre las acciones mencionadas anteriormente.

Tabla 1. Tabla comparativa de las acciones de cada estudiante por intervención.

Est.	Acción	Primera intervención	Segunda intervención	Tercera intervención
1	Uso de esquemas de búsqueda: Condiciones-RT RT-conclusiones	No son claros los esquemas de búsqueda <ul style="list-style-type: none"> • Propone esquemas de uso basados en el análisis pero busca reglas teóricas por el antecedente (Episodio 3). • Busca reglas teóricas por el antecedente pero no ha llenado ninguna casilla del paso de razonamiento (Episodio 2). 	Usa esquemas de búsqueda basados en la síntesis para encontrar reglas teóricas desconocidas (episodio 1). Y también para encontrar reglas teóricas trabajadas en clase (episodios 5 y 6).	<ul style="list-style-type: none"> • Usa esquemas de búsqueda basados en la síntesis para encontrar reglas teóricas que no aparecen en el asistente de demostración (episodio 1). • Usa también el esquema basado en la síntesis para la construcción mental de pasos de razonamiento.
	Anticipación a los controles de validación / Validación de paso de razonamiento.	Logra construir un paso de razonamiento válido. <ul style="list-style-type: none"> • Intenta anticipar los controles de validación usando la pestaña símbolos de la regla teórica pero no está seguro en cuanto a la equivalencia de (episodio 4). 	Usa la pestaña símbolos para anticiparse a los controles de validación de paso de razonamiento en los que usa reglas teóricas desconocidas (episodio 4). Al igual que lo hace para reglas teóricas ya trabajadas (episodio 5 y 6)	<ul style="list-style-type: none"> • No se anticipa al control de validez de pasos de razonamiento cuya regla teórica no hace parte del asistente de demostración. • Para algunos pasos de razonamiento que han sido creados mentalmente menciona la correspondencia de las conclusiones con el consecuente, y las condiciones con el antecedente. • A veces requiere del uso del asistente para anticiparse a los controles de validez, usando la pestaña de los símbolos para pasos de razonamiento que han sido construidos mentalmente.
	Estrategia en la construcción de la demostración	No hay evidencias de la estrategia de construcción.	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo.	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo.
	Flexibilidad en la producción de pasos de razonamiento.	No hay evidencias.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.
	Signos de modificación de estructuras mentales.	Es evidente que las tareas a realizar son externas al estudiante.	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra claridad en el manejo de los esquemas de uso del asistente de demostración. • Usa la pestaña de los símbolos para anticiparse a los controles de validación del paso de razonamiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Construye pasos de razonamiento válidos sin usar el asistente de demostración. • Usa el asistente de demostración para anticiparse a los controles de validez. Construye los pasos de razonamiento en su cabeza pero usa el asistente para verificar la

				correspondencia entre el antecedente de la regla teórica y las condiciones.
2	Uso de esquemas de búsqueda: Condiciones-RT RT-conclusiones	Usa un esquema de búsqueda basado en la síntesis (episodio 2)	Usa esquema de búsqueda basados en la síntesis y el análisis para encontrar reglas teóricas desconocidas.	Hace uso de los esquemas de búsqueda basados en la síntesis para hallar reglas teóricas sin usar el asistente de demostración.
	Anticipación a los controles de validación / Validación de paso de razonamiento.	Valida el paso de razonamiento construido después de notar que las condiciones que usa en el paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica son equivalentes (episodio 3).	No anticipa el control de validez pero si usa los controles de manera consciente cuando el asistente se lo sugiere.	Anticipa correctamente los controles de validez de los pasos de razonamiento construidos tanto con reglas teóricas que hacen partes del asistente como con las que no hacen parte de la base de datos de la asistente de demostración.
	Estrategia en la construcción de la demostración	No hay evidencias de la estrategia de construcción.	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo.	Construye la demostración partiendo de la conclusión y buscando las condiciones de cada paso de razonamiento
	Flexibilidad en la producción de pasos de razonamiento.	No hay evidencias.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.	Construye la demostración en un orden diferente al de la exposición.
	Signos de modificación de estructuras mentales.	Es evidente que las tareas a realizar son externas al estudiante.	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra claridad en el manejo de los esquemas de uso del asistente de demostración. • Controla efectivamente la validez de los pasos de razonamiento que construye. • Construye pasos de razonamiento sin usar el asistente de demostración, este lo usa para anticiparse a los controles de validez. 	Abandono del uso del asistente pero con una producción escrita que permite verificar un control de validez de los pasos de razonamiento similar al del asistente de demostración.
3	Uso de esquemas de búsqueda: Condiciones-RT RT-conclusiones	No muestra ningún esquema de búsqueda de reglas teóricas.	Usa efectivamente los esquemas de búsqueda del asistente de demostración.	<ul style="list-style-type: none"> • Usa esquemas de búsqueda basados en la síntesis para encontrar reglas teóricas que no aparecen en el asistente de demostración (episodio 1).
	Anticipación a los controles de validación / Validación	No muestra ningún signo de anticipación a los controles de validez.	Se anticipa a los controles sobre la validez de los pasos de razonamiento usando las	<ul style="list-style-type: none"> • No se anticipa al control de validez de pasos de razonamiento cuya regla teórica no hace parte del asistente de demostración.

	de paso de razonamiento.		pestañas símbolos de las reglas teóricas.	<ul style="list-style-type: none"> • A veces requiere del uso del asistente para anticiparse a los controles de validez, usando la pestaña de los símbolos para pasos de razonamiento que han sido construidos mentalmente.
	Estrategia en la construcción de la demostración.	No hay evidencias de la estrategia de construcción.	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo
	Flexibilidad en la producción de pasos de razonamiento	No hay evidencias.	Durante la validación de un paso de razonamiento notó que uno de los enunciados que debía incluir en las condiciones aún no había sido justificado y deshizo lo que llevaba para disponerse a justificar ese enunciado. Muestra resistencia al uso de una estrategia de construcción basada en el análisis.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.
	Signos de modificación de estructuras mentales.	Es evidente que las tareas a realizar son externas al estudiante.	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra claridad en el manejo de los esquemas de uso del asistente de demostración. • Controla efectivamente la validez de los pasos de razonamiento que construye. • Aunque todavía no construye pasos de razonamiento sin usar el asistente, como lo hacen sus compañeros, se evidencia que usa los esquemas de búsqueda de manera consciente, y también es capaz de anticiparse a los controles de validez. 	<ul style="list-style-type: none"> • Controla efectivamente la validez de los pasos de razonamiento que construye. • Construye algunos pasos de razonamiento sin usar el asistente se evidencia que usa los esquemas de búsqueda de manera consciente, y también es capaz de anticiparse a los controles de validez
4	Uso de esquemas de búsqueda: Condiciones-RT RT-conclusiones	No muestras ningún esquema de búsqueda, al parecer solo intenta recordar reglas teóricas y verificar si le sirven o no.	Hace búsquedas basadas en la síntesis para encontrar reglas teóricas que no conoce y las que ya ha trabajado.	<ul style="list-style-type: none"> • Usa esquemas de búsqueda basados en la síntesis para encontrar reglas teóricas que no aparecen en el asistente de demostración (episodio 1).

	Anticipación a los controles de validación / Validación de paso de razonamiento.	No hay evidencias de anticipación a los controles,	Usa la pestaña símbolos para anticiparse a los controles de validación del paso de razonamiento.	<ul style="list-style-type: none"> • No se anticipa al control de validez de pasos de razonamiento cuya regla teórica no hace parte del asistente de demostración. • Para algunos pasos de razonamiento que han sido creados mentalmente menciona la correspondencia de las conclusiones con el consecuente, y las condiciones con el antecedente.
	Estrategia en la construcción de la demostración	No hay evidencias de la estrategia de construcción.	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo	La construcción de la solución es en estricto orden deductivo
	Flexibilidad en la producción de pasos de razonamiento.	No hay evidencias.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.	No hay evidencias dado que la construcción de la demostración fue estrictamente deductiva.
	Signos de modificación de estructuras mentales.	Es evidente que las tareas a realizar son externas al estudiante.	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra claridad en el manejo de los esquemas de uso del asistente de demostración. • Es capaz de anticiparse efectivamente a los controles de la validez de los pasos de razonamiento que construye. • Encuentra reglas teóricas para construir pasos de razonamiento pero aún no es capaz de controlar la validez sin usar el asistente. Verifica la correspondencia usando el asistente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Controla efectivamente la validez de los pasos de razonamiento que construye con reglas teóricas conocidas. • Construye algunos pasos de razonamiento sin usar el asistente se evidencia que usa los esquemas de búsqueda de manera consciente, y también es capaz de anticiparse a los controles de validez

Podemos observar que en términos generales en el uso de esquemas de búsqueda el comportamiento fue similar en todos los estudiantes: desde las dificultades de la primera intervención hasta la apropiación de los esquemas de búsqueda basados en la síntesis que permitió a los estudiantes, encontrar la regla teórica desconocida en la segunda intervención y la regla teórica ajena a la base de datos del asistente de demostración en la última intervención. Incluso para la formulación de pasos de razonamiento contruidos mentalmente la tendencia fue la estrategia de la síntesis.

Una vez escogida la regla teórica el estudiante trató, sobre todo durante la segunda intervención, de anticiparse a los controles de validación usando la pestaña símbolos de la regla teórica. También se presentó el caso de un estudiante que pasó por alto esta anticipación pero notó su falla cuando el asistente le sugirió realizar la validación de paso de razonamiento.

En la tercera intervención los resultados no fueron los esperados: solo uno de los cuatro estudiantes logró anticiparse a la validación del paso de razonamiento construido y por lo tanto el único que logró obtener la solución del problema planteado.

Es probable, que la prevalencia del uso de esquemas basados en la síntesis tenga como consecuencia que la estrategia de construcción de la demostración sea estrictamente deductiva. Mientras uno de los estudiantes en la tercera intervención se inclinó por usar una estrategia de producción de la demostración distinta a la de exposición, otro de ellos (tanto en la segunda, como en la tercera intervención) se resistió frente al hecho de usar como condiciones los enunciados que aún no habían sido justificados.

Este cuadro comparativo nos permite verificar que, intervención tras intervención, las acciones evaluadas modifican sus estructuras permitiendo al estudiante mejores resultados tanto en búsqueda de reglas teóricas como en anticipación a los controles de validación. También es visible que el estudiante adquiere cada vez más control sobre estas acciones. Tanto así, que acciones que en la primera intervención

solo eran posibles a través del uso del asistente de demostración, en la segunda y tercera intervención son realizadas sin uso del asistente y con esquemas de uso y anticipaciones sobre los controles de validez idénticos a los que proponen el uso del asistente.

Conclusiones de la investigación

El objetivo general de esta investigación era estudiar el impacto del uso del software “asistente de demostración” como andamiaje para el desarrollo de exploración de la teoría. Teniendo en cuenta los análisis a posteriori locales por cada estudiante en cada intervención, los análisis a posteriori locales por intervención, el cuadro comparativo de acciones en las tres intervenciones y el análisis a posteriori global se presentan en este capítulo los aspectos más destacados obtenidos en esta investigación.

Conclusiones. Acerca de la caracterización del uso del asistente de demostración.

La exploración de la teoría es el término que hace referencia a la realización de una serie de acciones externas al estudiante y que se pueden realizar mediadas por el uso del asistente de demostración, estas acciones son:

1. Realizar búsquedas de reglas teóricas que:
 - a. Su antecedente contengan palabras claves referentes a los datos dados en el problema de demostración. Es decir, que correspondan a las propiedades construidas.
 - b. Su consecuente contengan palabras claves referentes a las conclusiones que se desean obtener. Es decir, indagar por propiedades que sean el producto de una o más propiedades construidas.
2. Validar pasos de razonamiento, esto corresponde a:
 - a. Establecer una correspondencia total entre la condición del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica, y si ésta permite concluir las afirmaciones deseadas o establecer si son afirmaciones que deben ser demostradas.

- b. Establecer una correspondencia total entre la conclusión del paso de razonamiento y el consecuente de la regla teórica, y conocer las condiciones que bien pueden ser datos del problema o ser afirmaciones que deban ser demostradas.

Suponer que la exploración de la teoría ha sido interiorizada indica que las acciones antes mencionadas pueden ser reconstruidas en la mente del individuo como acciones espontáneas. Es decir, se desprende totalmente del uso del asistente para;

- Identificar la naturaleza de la información que se requiere para construir los pasos de razonamiento creando una estrategia que le permita descubrir dicha información
- Controlar la validez de la información que encuentra verificando la correspondencia con las condiciones y las conclusiones del paso de razonamiento.

Teniendo en cuenta los análisis practicados se concluye que:

1. Los cuatro estudiantes están en la competencia de crear criterios de búsqueda de acuerdo a la naturaleza de las reglas teóricas necesitadas. No importa si estas hacen parte o no de la base de datos del asistente de demostración,
2. Los cuatro estudiantes muestran habilidades en la anticipación de los controles de validez y de la validación consciente de los pasos de razonamiento contruidos siempre y cuando la regla teórica usada no sea ajena a los registros teóricos del asistente de demostración.
 - i. Solo uno de los cuatro estudiantes, participantes en este estudio, logró construir un paso de razonamiento válido con una regla teórica que no pertenece a la base de datos del asistente de demostración.

- ii. Los otros tres estudiantes no realizaron validaciones adecuadas. Pues en el caso de la tercera intervención, no lograron establecer correspondencia entre el consecuente de la regla teórica y el enunciado de debían justificar.

En términos de la teoría en los cuatro estudiantes hay interiorización de la exploración de la teoría. Sí, de hecho la interiorización no consiste en la reproducción a nivel individual de una acción que se ha presentado antes en el ámbito social, ni lograr realizar una tarea que en un principio no estaba en las competencias del individuo.

De acuerdo a Vygotsky (1978) el proceso de interiorización consiste en una serie de transformaciones:

- a. *Una operación que inicialmente representa una actividad externa es reconstruida y empieza a ocurrir internamente.*

En la tabla comparativa de las acciones realizadas en las intervenciones se referenciaba como se iban modificando las acciones. Por ejemplo,

	III conclusiones	Antes de demostrar	Antes de demostrar	
2	Anticipación a los controles de validación / Validación de paso de razonamiento.	Valida el paso de razonamiento construido después de notar que las condiciones que usa en el paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica son equivalentes (episodio 3).	No anticipa el control de validez pero si usa los controles de manera consciente cuando el asistente se lo sugiere.	Anticipa correctamente los controles de validez de los pasos de razonamiento construidos tanto con reglas teóricas que hacen partes del asistente como con las que no hacen parte de la base de datos de la asistente de demostración.

En la primera intervención hace una validación después del proceso de homologación entre las condiciones usadas para construir el paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica. Después, no logra anticipar el control de validez pero valida el paso de razonamiento conscientemente cuando el asistente se lo sugiere. Finalmente, en la tercera intervención anticipa el control de validez de pasos de razonamiento construidos en el asistente de demostración y mejor aún logra anticiparse a la validación del paso de razonamiento cuya regla teórica no aparece en el asistente. Lo que indica que fue un proceso mental, si la regla no está en el asistente no la puedo validar de ninguna otra forma que no sea mentalmente.

- b. *Un proceso interpersonal es transformado en un proceso intrapersonal.* Cada función aparece dos veces: primero, en el nivel social, y posteriormente, en el nivel individual; primero; en la interacción social (interpsicológico), y luego de manera interna (intrapsicológico).

Retomando el ejemplo anterior, el proceso de validación aparece primero con el uso del asistente. Es decir, es externo. Luego pasa por una serie de transformaciones, cuando está en la segunda intervención el estudiante trata de anticiparse pero no lo logra, debe hacer la validación. Finalmente, logra anticiparse a los controles de validación de un paso de razonamiento construido con el asistente. Pero el carácter intrapersonal se halla cuando el estudiante logra anticiparse a un paso de razonamiento que en teoría no existe. Pues, el asistente de demostración que es el que modera las acciones externas no ofrece la información que necesita el estudiante.

- c. La transformación de un proceso interpersonal en uno intrapersonal es el resultado de una serie de eventos de desarrollo. El proceso inicial, a pesar de estar transformándose, sigue existiendo como externo hasta cuando no sea definitivamente transformado en un proceso interno.

Este es el caso correspondiente a los estudiantes que no lograron anticiparse a los controles de validez del paso de razonamiento construido con la regla teórica que no hace parte del asistente de demostración. Pues han transformado las estructuras de pensamiento que atienden la anticipación de los controles de validez de tal manera que se anticipan efectivamente a los controles de validez sobre pasos de razonamiento construidos, pero aún no están en competencias de anticiparse a los controles de validez de pasos de razonamiento que se construye con una regla teórica que no está en el asistente.

Ya sabiendo que en todos los estudiantes hubo interiorización de la exploración de la teoría con la diferencia que uno de los estudiantes si concretó una tarea que los demás no lograron ¿Cuál es la diferencia entre ellos?

Pues en relación a la teoría, según Vygotsky (1978) la zona de desarrollo real que se refiere a lo que está en la competencia del individuo; es decir, lo que puede hacer sin ayuda de agentes externos. La zona de desarrollo real del estudiante dos es más amplia que la zona de desarrollo real de los otros tres estudiantes. Esto se debe a que dentro de su competencia esta lograr anticiparse a los controles de validez de ciertos pasos de razonamiento y en sus compañeros esto aún es una acción externa.

Conclusiones acerca del abandono del uso del asistente de demostración.

Según Wood, Bruner & Ross (1976) el andamiaje comprende una variedad de ayudas físicas y/o verbales, con el objetivo de facilitar el progreso de los estudiantes hacia la competencia (Rogoff, 1990) Estos apoyos tendrán un carácter transitorio y se irán retirando de manera contingente. Se debe considerar que para que un agente externo sea un andamiaje debe cumplir las dos condiciones anteriores.

Se posee mucha información (principalmente en la tabla comparativa de acciones en las intervenciones) con la que se puede verificar que el asistente de demostración funciona como un andamiaje.

Por ejemplo, hay tres momentos clave:

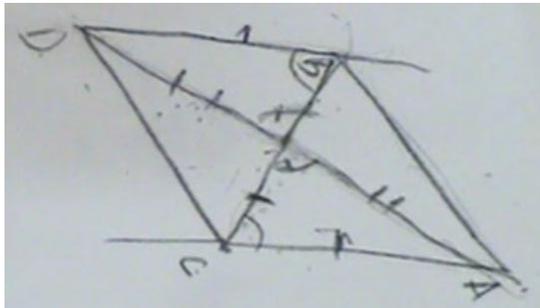
1. Cuando el estudiante comienza a usar esquemas de búsqueda bien sea basados en el análisis o la síntesis, y a tratar de anticiparse a los controles de validez de los pasos que construye, está dependiendo ampliamente del apoyo del asistente.
2. Como se puede verificar en la tabla comparativa, todos los estudiantes llegan a un punto donde comienzan a proponer pasos de razonamiento contruidos sin usar el asistente, algunos logran anticiparse a los controles de validez, mientras otros recurren al asistente, pero única y exclusivamente para anticiparse al control de validez verificando la correspondencia entre

condiciones y antecedente o la correspondencia entre consecuente y conclusiones.

3. Finalmente, el estudiante construye y se anticipa a los controles de validez (puede ser usando reglas teóricas del asistente o no) sin usar el asistente de demostración, el estudiante está en la capacidad de realizar estas tareas como una serie de acciones interna y el andamiaje se ha retirado de manera eventual de acuerdo a la competencia del mismo.

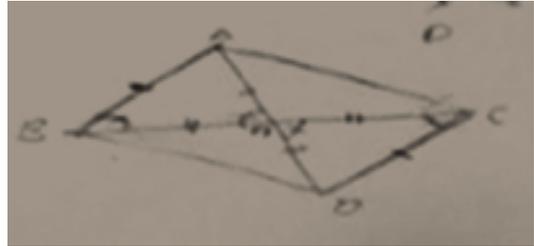
Conclusiones acerca de las estrategias de validación.

Aunque no se previó el uso de dibujos a mano alzada, para hacer referencia a propiedades, plantear conjeturas o dar ejemplos, estos se hicieron presentes durante la tercera intervención y jugaron un papel muy importante en la construcción de pasos de razonamiento sin usar el asistente de demostración. Por ejemplo, en el episodio 2 de la tercera intervención del estudiante 1 tenemos:

<p>[35]JH: Yo demostraría que este ángulo (marca el ángulo AMC) es congruente con este ángulo (marca el ángulo BMD)</p> <p>[36]Inv: ¿Cómo lo demostraría?</p> <p>[37]JH: Con dos rectas que se cortan, con los ángulos opuestos por el vértice.</p>	 <p>The diagram shows two intersecting lines, AC and BD, meeting at point M. This intersection forms two vertical angles: angle AMC and angle BMD. Two additional lines, AD and BC, are drawn, intersecting at point M and also intersecting the lines AC and BD. This creates two triangles, AMC and BMD, that share the vertex M. The diagram includes several congruence markings: single tick marks on segments AM and BM, double tick marks on segments CM and DM, and single tick marks on the vertical angles at M. There are also some faint markings on the other lines, possibly indicating parallelism or other geometric relationships.</p>
---	---

Y el episodio tres de la tercera intervención para el estudiante uno tenemos:

[50]AF: Voy a dibujar un paralelogramo más bonito (dibuja en una hoja un paralelogramo y dibuja sus diagonales). Tengo que este es congruente con este (marca los segmentos MC y BM en el dibujo que realizó) y este es congruente con este (marca los segmentos AM y MD). Por ángulos opuestos por el vértice, tengo que este es congruente con este (señala los ángulos CMD y AMB). Entonces, tengo lado-ángulo-lado.



En ambos casos, los dibujos son ejemplos del funcionamiento de unas reglas teóricas. Con estos dibujos el estudiante se ha anticipado a los controles de validez del paso de razonamiento. En términos de Lavy (2006) se ha interiorizado un hecho matemático a través de una figura.

Notamos que el asistente de demostración es una buena herramienta para el aprendizaje de la demostración siempre que se logre interiorizar la estructura ternaria del paso de razonamiento, los esquemas de búsqueda basados en el análisis y la síntesis, y la anticipación sobre los controles de validez de los pasos de razonamiento construidos.

7.1. Recomendaciones

Hubiese sido un poco más concluyente esta investigación si se logrará analizar todas las evaluaciones finales en términos de la interiorización de la estructura ternaria del paso de razonamiento, los esquemas de búsqueda de información y los controles de validación de los pasos de razonamiento construidos. Pues, aunque la cantidad de información recogida y analizada fue grande hace parte de solo cuatro estudiantes.

Debe pensarse en incluir, dentro de la instrucción, la necesidad de trabajar con reglas teóricas por fuera del asistente de demostración, para dar bases a la estructuración de enunciados de la forma si-entonces y poder establecer correspondencias entre las condiciones y el antecedente, y la correspondencia entre las conclusiones con el consecuente de la regla teórica.

7.2. Limitaciones de la investigación

Este estudio se realizó con cuatro estudiantes que recibían clases con el mismo profesor. Es necesario ampliar el estudio a diferentes profesores y cursos siempre y cuando sigan la metodología descrita en el capítulo uno. Esto para poder regular las conclusiones y hacer mejor aproximaciones a la verificación de la hipótesis de la investigación.

Bibliografía

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education* 40, 501–512.
- Beuchot, M. (1998). Abducción y Analogía. *Analogía filosófica: revista de filosofía, investigación y difusión.*, 12(1), 57-68.
- Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Especial*, 371–383.
- Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. México D.F: Adisson Wesley Longman.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. (R. Lesh, & A. Kelly, Edits.) *Handbook of research methodologies for science and mathematics education*, 341.385.
- Cobo, P., & Fortuny, J. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. (A. Maz, B. Gomez, & M. Torralbo, Edits.) *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 55-70.
- Cubero, R. y Luque, A. (2001). Desarrollo, educación y educación escolar: la teoría sociocultural del desarrollo y del aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds) *Desarrollo psicológico y educación*. Vol. 2. Psicología de la educación escolar. 137-154. Madrid: Alianza Editorial.

- Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S. & Choustulakis, E. (2007). Developing a Proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *The Teaching of Mathematics*, 10(2), 87-106.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3),(233-261).
- Duval, R. (2000).Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2(135-170).
- Fann, K. T. (1970). *Peirce's Theory of Abduction*. La Haya, Holanda: Martinus Nijhoff.
- Ferrando, E. (2007). The application of the abductive system to Different kinds of problems. En D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Ed.), *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 2280-2289). Larnaca, Cyprus: ERME .
- Fernández, C. (2002). Entrevistas clínicas individuales a escolares de 3 a 6 años: una modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En Murillo, Jesús; Arnal, Petra María; scolano, Rafael; Gairín, José María (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 95-136). Logroño: SEIEM.
- Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, 31(2), 181-205.
- García, M. (2003). *Construcción de la actividad conjunta y traspaso de control en una situación de juego interactivo padres-hijos* (Tesis Doctoral). Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, España.
- Godino, J. D., & Recio, A. M. (1997), *Meaning of proofs in mathematics education*, In: Pekhonen, Erkki (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 313–320. Lahti, Finland.

- Hanna, G. (2000), *Proof, explanation and exploration: An overview*, Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.
- Harel, G., Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Harel, G. (2007) Students' Proof Schemes Revisited. En: P. Boero (Ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*. (65-78). Sense Publishers. USA.
- Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-164.
- Larios, V. (2000). "*Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*". (Tesis de maestría), UAQ.
- Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 153-169.
- Luengo, V. (1997). *Analyse et prise en compte des contraintes didactiques et informatiques dans la conception et le développement du micromonde de preuve Cabri-Euclide* (Tesis de Doctorado). Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, Francia.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989), *Proof frames of pre-service elementary teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, 20 (1), 41–51.
- Matsuda, N., & VanLehn, K. (2005). Advanced Geometry Tutor: An intelligent tutor that teaches proof-writing with construction. In C.-K. Looi, G. McCalla, B. Bredeweg & J. Breuker (Eds.), *Proceedings of The 12th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 443-450). Amsterdam: IOS Press.

- National Council of Mathematics Teachers. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston Va. USA.
- Nuntrakune, T. & Park, J. (2011) Scaffolding techniques: a teacher training for cooperative learning in Thailand primary education. In *International Conference on Learning and Teaching*, Mauritius. (Unpublished)
- Orús, P. (1986). L'Enseignement des Méthodes de Classification . Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen. (I. d. Bordeaux., Ed.) *Collection Études en Didactique des Mathématiques*.
- Piaget, J., & Vonèche, J. (2007). *The Child's Conception of the World: A 20th-Century Classic of Child Psychology*. New York: Rowman & Littlefield Publishers, Inc.
- Raymond, E. (2000). Cognitive Characteristics. *Learners with Mild Disabilities* (169-201). Needham Heights, MA: Allyn & Bacon, A Pearson Education Company.
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001), *Institutional and personal meaning of proof*, Educational Studies in Mathematics, 48, 83–99.
- Richard, P., & Fortuny, J. (2007). Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire. *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES*, 12, 83-116.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context*. Oxford: Oxford University Press.
- Senk, S.L., How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 1985. 78(6): p. 448-456.
- Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, 4, 117-136. Reston, Virginia NCTM. ISBN 0-87353-473-5
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (ed.), *The concept of activity theory in soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, New York: M.E.Sharpe, Inc.
- Wertsch. J. (1985). Vygotsky y la formación social de la mente. Buenos Aires: Paidós.
- Wood, D., Bruner, J. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89–100.
- Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.