

SIMULACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES
EN UN SISTEMA SARA
RECTANGULAR Y ANÁLISIS DEL EFECTO DEL
CAMPO ELÉCTRICO AUTOCONSISTENTE

ANA MARÍA HERRERA RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2013

SIMULACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES
EN UN SISTEMA SARA
RECTANGULAR Y ANÁLISIS DEL EFECTO DEL
CAMPO ELÉCTRICO AUTOCONSISTENTE

TESIS REALIZADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN FÍSICA

ANA MARÍA HERRERA RODRÍGUEZ

DIRECTOR: VALERIY D. DUGAR-ZHABON, PH.D.
CODIRECTOR: EDUARDO A. OROZCO OSPINO, PH.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2013

A mi Chinita, no te quiero, te quiero muchísimo.

Frodo: going out of your door, he used to say. You step into the Road, and if you don't keep your feet, there is no knowing where you might be swept off to.

J.R.R. Tolkien, *The Fellowship of the Ring*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todos los favores que he recibido de su parte.

A Eduardo y al Profesor Valeriy, por todo el apoyo y el conocimiento que he recibido, no solo en el ámbito académico, sino para mi vida:

No era la luz del sol con sus haces brillantes y la espléndida irradiación de sus rayos ni la claridad vaga y pálida del astro de la noche, que es solo una reflexión sin calor. No. El poder iluminador de aquella luz, su difusión temblorosa, su blancura clara y seca, la escasa elevación de su temperatura, su brillo superior en realidad al de la luna, acusaban evidentemente un origen puramente eléctrico. Era una especie de aurora boreal, un fenómeno cósmico continuo que alumbraba aquella caverna capaz de albergar en su interior un océano. *Julio Verne. Fragmento Viaje al Centro de la tierra.*

A mi mamá, por inspirar en mí la búsqueda de los sueños y su apoyo incondicional en todas las decisiones que he tomado en mi vida.

A mi familia, porque me han apoyado en todo momento y me han aguantado mis neuras. Los quiero mucho.

Por las personas que me hacen feliz por la simple casualidad de haberse cruzado en mi camino, mis amigos: Omar, Martín, Marcela y Vivi.

A mis compañeros del grupo de física del plasma FITEK: Henry, Fredy, Ely y Carlos. Por su constante respaldo y consejos.

A Orlando Duarte, por su ayuda en la realización de los dibujos de este documento.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	17
1. AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL	21
1.1. Descripción del fenómeno	21
1.1.1. Campo magnético estático no homogéneo	22
1.1.2. Onda Estacionaria Transversal Eléctrica	22
1.2. Descripción del Esquema Físico <i>SARA</i>	24
1.2.1. Dinámica del Electrón bajo condiciones <i>SARA</i>	25
2. MODELO DE SIMULACIÓN	28
2.1. Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (<i>DFDT</i>)	29
2.1.1. Algoritmo de YEE	29
2.1.2. Diferencias Finitas y Notación	29
2.1.3. Formulación Tridimensional de <i>DFDT</i>	31
2.1.4. Condición de Estabilidad	31
2.1.5. Formulación 3D <i>DFDT</i> -Fronteras Uniaxiales Perfectamente Acopladas (<i>UPML</i>)	33

2.1.6. Excitación de la Onda Electromagnética	36
2.1.7. Función <i>Ventana Hanning</i>	37
2.2. Método de <i>Bunemann-Boris</i>	38
2.3. Método Particle-In-Cell (PIC) Electromagnético Conservativo	39
2.3.1. Esquema <i>Zigzag</i> en 3D	41
3. RESULTADOS DE <i>SARA</i> EN APROXIMACIÓN A PARTÍCULA SIMPLE	45
3.1. Parámetros de la Simulación	46
3.2. Análisis de Resultados	48
4. RESULTADOS DE <i>SARA</i> PARA UN HAZ DE ELECTRONES INTERACTUANTES	54
4.1. Parámetros y condiciones para la simulación	54
4.2. Comparación <i>SARA</i> autoconsistente ($I = 1$ A) y <i>SARA</i> para una sola partícula	55
4.3. Efecto del Campo Eléctrico Autoconsistente	57
CONCLUSIONES	64
APÉNDICES	66
A.1. Fuerza Diamagnética	66
A.2. Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas <i>DFDT-UPML</i>	68
A.3. Anexo Esquema <i>Zigzag</i>	72

ÍNDICE GENERAL

9

BIBLIOGRAFIA

74

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Proyección transversal de la trayectoria del electrón, donde se muestra la diferencia de fase φ , entre los vectores velocidad transversal \vec{v}_\perp y campo eléctrico \vec{E}	24
1.2. Sistema físico para el modelo de aceleración <i>SARA</i> : (1) cavidad resonante rectangular, (2) bobinas con corriente ó imanes, (3) guía de onda rectangular, (4) fuente de microondas, (5) aislantes de ferrita, (6) iris, (7) blanco de molibdeno y (8) cañon de electrones.	25
1.3. Esquema de descomposición de una onda linealmente polarizada en función de una onda con polarización circular derecha y otra con polarización circular izquierda.	26
2.1. Celda de Yee en coordenadas cartesianas	30
2.2. Definición de las regiones para el algoritmo <i>UPML</i> : 1-corresponde a la zona interna, donde se resuelve el algoritmo de Yee. 2- corresponde a la zona externa donde se colocan los absorbentes y donde ocurre solapamiento de las esquinas dihedrales. 3-Es la zona externa donde se presenta solapamiento de las esquinas trihedrales.	34
2.3. Trayectoria de las partículas para el esquema Zigzag tridimensional. Las flechas sólidas representan las trayectorias de las partículas, y las líneas punteadas representan las divisiones de las celdas de la malla. El caso (a) es para $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ y $k_1 \neq k_2$. El (b) es para $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ y $k_1 = k_2$. (c) Corresponde para $i_1 \neq i_2$, $j_1 = j_2$ y $k_1 = k_2$. (d) es para $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ y $k_1 = k_2$, que es el caso donde la partícula permanece en la celda cúbica.	42

2.4. Ciclo computacional para un modelo de simulación de partículas basado en el método de <i>Particle in Cell electromagnético conservativo</i>	44
3.1. Configuración transversal de los modos transversales eléctricos: (A) modo rectangular TE_{102} y (B) modo cilíndrico TE_{112}	46
3.2. Perfil del campo magnético en el plano $Y = 0$	47
3.3. Banda de aceleración y comparación de la dependencia de la diferencia de fase φ [rad] con la coordenada longitudinal Z para diferentes energías de inyección: $W_{INJ} = 10 \text{ keV}$ modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14 \text{ keV}$ modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15 \text{ keV}$ modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).	49
3.4. Comparación de la evolución espacial de la energía respecto a Z para diferentes energías de inyección: $W_{INJ} = 10 \text{ keV}$ modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14 \text{ keV}$ modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15 \text{ keV}$ modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).	50
3.5. Diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y la componente eléctrica del campo de microondas con polarización circular izquierda, para una energía de inyección $W_{INJ}=12 \text{ keV}$	51
3.6. Comparación de la dependencia de la velocidad transversal $\beta_{\perp} = v_{bot}/c$ y la velocidad longitudinal $\beta_z = v_z/c$ en unidades de c , con la componente Z : $W_{INJ} = 10 \text{ keV}$ modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14 \text{ keV}$ modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15 \text{ keV}$ modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).	52
3.7. Trayectoria helicoidal del electrón en el espacio tridimensional, para el caso de una energía de inyección de $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$, utilizando un modo transversal eléctrico rectangular TE_{102}	53

4.1. Banda de aceleración y comparación de la dependencia de la diferencia de fase φ [rad] con la coordenada longitudinal Z : aproximación a una sola partícula (línea verde) y para un haz de 1 A de corriente (puntos rojos) para 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.	56
4.2. Comparación de la evolución espacial de la energía: en aproximación a una sola partícula (línea verde) y para un haz de 1A de corriente (puntos rojos) en 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.	56
4.3. Comparación de la dependencia de la velocidad transversal y velocidad longitudinal en unidades de c , con la posición longitudinal Z : en aproximación a una sola partícula (línea naranja y línea verde) y para un haz de electrones de 1 A de corriente (puntos azules y rojos), en 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.	57
4.4. Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 5.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 10 ciclos de microondas.	58
4.5. Energía de los electrones del haz de 5.0 A después de 10 ciclos de microondas.	59
4.6. Componentes de la velocidad transversal y longitudinal para el haz de 5 A después de 10 ciclos de microondas, en unidades de c	59
4.7. Componente longitudinal del campo eléctrico total para el haz de 5 A después de 10 ciclos de microondas en el plano $Y = b/2$, donde de $Z = 0 \text{ cm}$ a $Z = 12.24 \text{ cm}$ corresponde a la guía de onda y de $Z = 12.24 \text{ cm}$ a $Z = 32.24 \text{ cm}$ corresponde a la cavidad resonante.	60
4.8. Componente longitudinal del campo eléctrico total para el haz de 1 A después de 12 ciclos de microondas en el plano $Y = b/2$, donde de $Z = 0 \text{ cm}$ a $Z = 12.24 \text{ cm}$ corresponde a la guía de onda y de $Z = 12.24 \text{ cm}$ a $Z = 32.24 \text{ cm}$ corresponde a la cavidad resonante.	61
4.9. Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = d/4$ para el haz de 5 A.	62

4.10. Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = d/2$ para el haz de 5 A.	62
4.11. Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = 3d/4$ para el haz de 5 A.	63
A.1. Campo magnético inhomogéneo axialmente simétrico a lo largo de z . . .	66

RESUMEN

TÍTULO: SIMULACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES EN UN SISTEMA SARA RECTANGULAR Y ANÁLISIS DEL EFECTO DEL CAMPO ELÉCTRICO AUTOCONSISTENTE.*

Autor: Ana María Herrera Rodríguez.†

Palabras Claves: haz de electrones, autoresonancia ciclotrónica, cavidad aceleradora, método PIC.

DESCRIPCIÓN:

Se estudia numéricamente la aceleración ciclotrónica autoresonante espacial de un haz de electrones por una onda electromagnética transversal estacionaria, con polarización lineal, en un modo rectangular TE_{102} , en presencia de un campo magnético externo estático, con simetría axial y no homogéneo principalmente en dirección longitudinal. Mantener continuamente las condiciones de resonancia ciclotrónica a lo largo de todas las trayectorias de los electrones (autoresonancia espacial), pese al crecimiento de sus masas relativistas, requiere de un incremento apropiado del campo magnético en la dirección de propagación de los electrones. Este método de aceleración se denomina *Aceleración por Autoresonancia Ciclotrónica Espacial SARA*, cuyas siglas provienen del inglés *Spatial AutoResonance Acceleration* y fue propuesto por el profesor Valeriy D. Dugar-Zhabon, director del grupo de investigación de *Física y Tecnología del Plasma y Corrosión (FITEK)* de la *Universidad Industrial de Santander (UIS)*.

Los resultados de la tesis presente se dividen en dos partes, la primera corresponde al estudio de la aceleración *SARA* de un electrón mediante la solución numérica de la ecuación de Newton-Lorentz, donde el perfil de campo magnético se determina por prueba y error; en esta etapa también se compara la aceleración por una onda electromagnética TE_{102} con una TE_{112} , en un modo rectangular y cilíndrico respectivamente, polarizados linealmente. La comparación se realiza con el propósito de establecer similitudes y diferencias entre los dos casos, así como para evidenciar que el mecanismo *SARA* se puede llevar a cabo con otros tipos de geometrías. En la segunda parte, se realiza una simulación autoconsistente de un haz de electrones a través de un código computacional *particle in cell (PIC)* electromagnético, donde los campos electromagnéticos se obtienen al resolver las ecuaciones de Maxwell por el *método de diferencias finitas dominio temporales, DFDT*. Los resultados se comparan con los obtenidos de la simulación en aproximación de partícula simple, analizando principalmente el efecto del campo eléctrico autoconsistente del haz. En esta parte se utiliza un esquema de inyección de microondas, el cual produce un modo transversal electromagnético rectangular TE_{102} , donde se acopla una guía de onda rectangular y una cavidad resonante rectangular con la misma sección transversal a través de un iris.

* Tesis

† Facultad de Ciencias, Maestría en Física. Directores: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D, Eduardo A. Orozco Ospino.

ABSTRACT

TITLE: SIMULATION OF AN ELECTRON BEAM IN A RECTANGULAR SYSTEM SARA AND SELF-CONSISTENT ELECTRIC FIELD EFFECT ANALYSIS.*

Author: Ana María Herrera Rodríguez.†

KEY WORDS: electrons beam, cyclotron autoresonance, accelerator cavity, PIC method.

DESCRIPTION: Cyclotron spatial autoresonance of an electron beam is studied numerically, with rectangular propagation mode TE_{102} , stationary wave that was linearly polarized in an axisymmetric steady-state and non homogeneous magnetic field, mainly in the longitudinal direction. Keep continually cyclotron resonance conditions through all electrons' trajectories (spatial autoresonance) despite the fact of relativistic mass growth, requires of an appropriate magnetic field increment in the electron propagation direction. This acceleration method is named Spatial AutoResonance Acceleration (SARA), and it was proposed by the professor Valeriy D. Dugar-Zhabon, director of the research group in Physics and Plasma Technology and Corrosion (FITEK) from the Universidad Industrial de Santander (UIS). Results of this thesis are divided in two parts, first is about the SARA acceleration study of an electron through the numeric solution of the Newton-Lorentz equation, where the magnetic field profile is determined by prove and error; in this stage, acceleration by an electromagnetic wave TE_{102} is compared with the acceleration by an electromagnetic wave TE_{112} , in a rectangular and cylindrical mode respectively, both with linear polarization. In the second part, a self-consistent simulation of an electron beam is realized through an electromagnetic Particle-in-Cell (PIC) code, where the electromagnetic fields were obtained by resolving Maxwell equations by the finite differences time domain method (FDTD). Results were compared with the results of simple particle approximation, mainly analyzing the self-consistent electric field effect of the electron beam.

* Thesis.

† Science Faculty, Master in Physics. Directors: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D, Eduardo A. Orozco Ospino.

INTRODUCCIÓN

Con el nacimiento de la física del plasma a mediados del siglo XX, se inicia un estudio formal del comportamiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos. Esta área de la física tiene como objetivo determinar las propiedades del plasma, el cual describe un comportamiento colectivo debido a la naturaleza de las interacciones entre las partículas cargadas que lo constituyen. Entre los fenómenos ocurridos en un plasma, la *resonancia ciclotrónica* (*RC*) es uno de los que ha despertado gran interés en la comunidad científica. Esta describe la interacción resonante de partículas cargadas en presencia de un campo magnético estático y sometidas a fuerzas externas, originadas por ejemplo, de campos eléctricos o gravitacionales [1, 2]. Si las condiciones de resonancia son preservadas, la partícula puede acelerarse debido a la transferencia de energía proveniente de los campos externos. El estudio de este fenómeno dio origen a diversas aplicaciones tecnológicas, dentro de las que se cuentan el desarrollo de los denominados aceleradores cíclicos que permiten alcanzar energías elevadas, en la construcción de fuentes de iones, utilizadas para fines médicos como en el tratamiento contra el cáncer, así como en la implantación de iones en sólidos para la elaboración de nuevos materiales. Otra aplicación no menos importante se relaciona con la construcción de espectrómetros de masas de alta resolución basados en resonancia ciclotrónica iónica [4], con los cuales se ha podido determinar la composición de moléculas complejas y cadenas poliméricas.

En particular, el fenómeno de resonancia ciclotrónica (*ECR*) en donde las partículas aceleradas son electrones, se ha utilizado en la construcción de dispositivos para generar rayos X. Estos dispositivos se conocen como fuentes de rayos X compactas de *ECR*, cuyas principales ventajas son: portabilidad y bajo costo de construcción y de uso, debido a que no requiere altos potenciales para su operación. En 1990 se planteó la utilización de un acelerador cíclico de electrones para la construcción de una fuente de rayos X compacta, la cual fué propuesta por H. R. Gardner, T. Ohkawa, A. M. Howald, A. W. Leonard, L. S. Peranich y J.R D'Aoust [3]. Esta consiste en inyectar electrones utilizando un filamento colocado en el centro de una cavidad resonante vacía, en la cual

los electrones son acelerados a través de un campo de microondas en el plano medio de la cavidad en condiciones de *ECR*, alcanzando una energía de 150 keV hasta impactar sobre un blanco de Molibdeno para producir rayos X. La ventaja de esta fuente está en que evita el uso de un alto voltaje de alimentación; pero no es factible para la industria y medicina, porque la intensidad de los rayos X emitidos es muy débil debido a las bajas corrientes utilizadas que son de 0.1 nA.

En el año 2000, R. Baskaran y T.S. Selvakumaran diseñan y construyen una fuente de rayos X basados en el estudio teórico de la aceleración de electrones bajo condiciones *ECR*, en una cavidad resonante rectangular excitada con un modo TE_{101} , afectada por un campo magnético estático uniforme [5]. En dicha fuente, los electrones son acelerados en el plano medio longitudinal de la cavidad y luego impactan en un blanco de Molibdeno o Tungsteno para obtener rayos X. El inconveniente de esta fuente radica en la dificultad de obtener perfiles de campo magnético en el plano del movimiento del electrón, impidiendo el auto-mantenimiento de las condiciones de resonancia.

Cuando la partícula gana energía se requiere preservar la condición de *RC* debido al efecto (relativista) del incremento de su masa. El auto-mantenimiento de la condición de *RC* se le denomina *autoresonancia ciclotrónica*, el cual fue reportado por primera vez en 1962 por parte de los investigadores A. Kolomenskii y A. Levedev [6] y de manera independiente por V. Davydovskii [7]. En estos estudios analizaron la autoresonancia ciclotrónica electrónica considerando una onda electromagnética transversal propagándose a lo largo de un campo magnético estático uniforme. Estudios posteriores a estos se enfocaron en encontrar condiciones óptimas para la aceleración auto-resonante de electrones en campos magnéticos homogéneos [8–19]. En estas investigaciones, teóricas y experimentales, H. R. Jory y W. Trivelpiece reportaron un estudio del movimiento relativista de partículas cargadas en campos combinados de ondas planas de gran amplitud, con polarización lineal y circular, en un campo estático homogéneo a lo largo de la dirección de propagación de la onda sin incluir efectos de carga espacial del haz de partículas [9]. R. Pakter y coinvestigadores presentaron un análisis de estos efectos, mostrando que estos imponen límites sobre la aceleración [14].

Se han planteado otros mecanismos autoresonantes tales como el *GYRAC*, propuesto por K.S. Golovanivsky, en el cual los electrones son capturados en el plano medio de una trampa magnética tipo espejo y son acelerados hasta alcanzar altas energías. En este esquema se utiliza un campo magnético creciente en el tiempo adecuado para compensar el incremento de la masa relativista de la partícula y de este modo mantener las condiciones de resonancia [20–24]. Basándose en el estudio anterior, Oliver Gal hizo un estudio

analítico del funcionamiento de un acelerador de electrones cíclico autoresonante [25]. Posteriormente, R. Shpitalnik y otros investigadores realizan un estudio numérico de un acelerador de microondas autoresonante (*AMA*), el cual utiliza una onda electromagnética viajera y un campo magnetostático axialmente simétrico no homogéneo de un perfil apropiado que, combinado con el efecto del corrimiento *Doppler* permite el mantenimiento de las condiciones de resonancia ciclotrónica [28, 29]. Basados en este esquema, se desarrollaron otros estudios teóricos y experimentales, que permitieron reportar en el año de 1996 los primeros resultados relacionados con el funcionamiento de un acelerador cíclico autoresonante (*CARA*) [26, 27].

En investigaciones más recientes, realizadas por miembros del grupo de investigación en Física y Tecnología del Plasma y Corrosión (*FITEK*) de la Universidad Industrial de Santander (*UIS*), se viene estudiando un nuevo mecanismo denominado *Spatial AutoResonance Acceleration* (*SARA*), o Aceleración Autoresonante Espacial; el cual consiste de una onda electromagnética estacionaria y un campo magnetostático no homogéneo adaptado para mantener las condiciones de resonancia en las trayectorias tridimensionales helicoidales de los electrones [30–33]. En este método, el crecimiento del campo magnético a lo largo de la dirección de propagación del haz permite el autosostenimiento de la igualdad entre la frecuencia ciclotrónica y la frecuencia de microondas, manteniendo así la diferencia de fases entre los vectores de campo eléctrico de microondas y la componente transversal de la velocidad de los electrones en el rango $(\pi/2, 3\pi/2)$, lo cual favorece la aceleración. La dinámica de este sistema, que es el de interés en esta tesis, se estudia a través de simulaciones computacionales, debido a que la interacción de muchas partículas cargadas en campos electromagnéticos es un problema muy complejo que es imposible abordarlo analíticamente, por lo cual es necesario utilizar métodos numéricos y adaptarlos a un modelo físico, de manera que los resultados obtenidos no solo tengan una precisión adecuada, sino que también estén condicionados por las leyes físicas que gobiernan el fenómeno. La técnica computacional que ha sido relevante en el estudio de sistemas de muchas partículas es “*Particle-in-cell*” (*PIC*) o partícula en celda ([40]- [36]), y para el modelado de los campos electromagnéticos el *Método de Diferencias Finitas Dominio Temporales* planteado por K. Yee [35, 39] es uno de los métodos más utilizados.

El presente estudio constituye el soporte teórico para diseñar y construir una fuente de rayos *X* compacta, la cual sería capaz de producir rayos *X* duros de energía mayores a 200 keV y de no menor intensidad a las fuentes de rayos *X* tradicionales mencionadas [3, 5], donde las limitaciones presentes en estas fuentes quedan superadas, ya que las condiciones de resonancia ciclotrónica se satisfacen continuamente debido al crecimiento

del campo magnetostático no homogéneo. Como la corriente del haz de electrones es del orden de 10^0 Amperios [A], los rayos X producidos por esta fuente no serían débiles. El mecanismo SARA puede tener lugar en cavidades resonantes rectangulares excitando un modo TE_{10p} , cavidades cilíndricas y elípticas, en donde el campo de microondas puede estar polarizado circularmente o linealmente, con los cuales se obtienen buenas condiciones para favorecer la ganancia de energía de los electrones por parte del campo de microondas.

CAPÍTULO 1

AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL

1.1 Descripción del fenómeno

Cuando un electrón está moviéndose a lo largo de un campo magnético estático axialmente simétrico, y bajo la presencia de una onda transversal eléctrica estacionaria, este se acelerará, siempre y cuando haya una interacción resonante de su movimiento helicoidal con el campo de microondas; a este fenómeno se le conoce como resonancia ciclotrónica. En el caso particular $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, se tiene resonancia siempre que la frecuencia ω de la onda electromagnética coincida con la frecuencia ciclotrónica electrónica:

$$\omega_c = \frac{eB_0}{\gamma m_e}, \quad (1.1)$$

donde e y m_e representan la carga y la masa del electrón, respectivamente, y γ es el factor relativista. Sin embargo, esta condición solo se cumple al inicio del movimiento, debido al incremento de la masa relativista del electrón cuando este gana energía. Con el objetivo de compensar el crecimiento de la masa relativista, se utiliza un campo magnético no homogéneo cuya magnitud varía principalmente en la dirección del movimiento longitudinal del electrón; de manera que se garantice un automantenimiento continuo de las condiciones de resonancia, donde la dependencia de la frecuencia ciclotrónica será de la forma:

$$\omega_c = \frac{eB(z)}{\gamma m_e}, \quad (1.2)$$

cabe aclarar que la expresión anterior corresponde al caso de resonancia exacta, en general, la dependencia de la frecuencia ciclotrónica con los parámetros del sistema es más compleja.

1.1.1. Campo magnético estático no homogéneo

Se considera un campo magnetostático axialmente simétrico \vec{B}_{est} , cuya inhomogeneidad se presenta principalmente en su componente longitudinal z , este campo puede aproximarse por medio de la expresión:

$$\vec{B}_{est} = -\frac{1}{2} \left[\frac{dB_0(z)}{dz} \right] [x\hat{e}_x + y\hat{e}_y] + B_0(z)\hat{e}_z, \quad (1.3)$$

en donde $B_0(z)$ es una función creciente en la dirección de propagación del haz, y es el que contribuye al mantenimiento de las condiciones de resonancia ciclotrónica a medida que el electrón se acelera. El incremento de la inhomogeneidad del campo magnético y el aumento de la velocidad transversal del electrón origina una fuerza diamagnética, esto causa que la partícula disminuya su velocidad en su componente longitudinal, imponiendo restricciones a la aceleración, porque impide que el movimiento del electrón tenga una interacción resonante con la onda electromagnética transversal; en el apéndice A.1 se presenta una explicación más detallada de este fenómeno.

1.1.2. Onda Estacionaria Transversal Eléctrica

La aceleración por autoresonancia espacial se ha estudiado con ondas estacionarias en modos transversales eléctricos cilíndricos TE_{11p} , con polarización circular y lineal [31–33]. Sin embargo, *SARA* también puede darse con campos estacionarios transversales eléctricos rectangulares TE_{10p} , linealmente polarizados, cuyo estudio se muestra en esta tesis; trabajar con un modo TE_{10p} rectangular tiene ventajas en la construcción de fuentes de rayos X , en primer lugar porque la frecuencia de resonancia no depende de la longitud del lado asociado con el índice cero, esto permite controlar la altura de la cavidad sin variar la frecuencia y las características del campo de microondas; eligiendo esta altura del máximo orden del radio de Larmor de los electrones, se minimiza la perturbación del campo de microondas, originado por la inclusión de un blanco metálico donde los electrones impactan para producir rayos X . Segundo, porque las líneas de campo eléctrico del modo TE_{10p} tienen una configuración más favorable que las del

modo cilíndrico TE_{11p} , ya que estas no presentan dependencia azimutal, como ocurre con el modo circular, principalmente cerca de los bordes de la cavidad; permitiendo que el electrón absorba energía del campo eléctrico de la onda con mayor efectividad.

Las expresiones analíticas para el modo transversal eléctrico cilíndrico TE_{11p} , polarizado linealmente son:

$$E_r^l = -\frac{2E_{0l}}{K_{\perp}r} J_1(K_{\perp}r) \text{sen}\theta \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{sen}\omega t, \quad (1.4)$$

$$E_{\theta}^l = -2E_{0l} J_1'(K_{\perp}r) \text{cos}\theta \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{sen}\omega t, \quad (1.5)$$

$$B_r^l = 2E_{0l} \frac{K_{\parallel}}{\omega} J_1'(K_{\perp}r) \text{cos}\theta \text{cos}(K_{\parallel}z) \text{cos}\omega t, \quad (1.6)$$

$$B_{\theta}^l = -\frac{2E_{0l}}{K_{\perp}r} \frac{K_{\parallel}}{\omega} J_1(K_{\perp}r) \text{sen}\theta \text{cos}(K_{\parallel}z) \text{cos}\omega t, \quad (1.7)$$

$$B_z^l = 2E_{0l} \frac{K_{\perp}}{\omega} J_1(K_{\perp}r) \text{cos}\theta \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{cos}\omega t, \quad (1.8)$$

donde $K_{\perp} = S_{11}/R$ con $S_{11} = 1,841$, $K_{\parallel} = p\pi/d$, d y R representan la longitud y el radio de la cavidad, respectivamente, E_{0l} es la máxima amplitud del campo eléctrico y

$$\omega = c(K_{\parallel}^2 + K_{\perp}^2)^{1/2}, \quad (1.9)$$

es la frecuencia de la onda electromagnética.

Cuando $K_{\perp}r < 1$ la función de Bessel se aproxima como $J_1(K_{\perp}r) \cong K_{\perp}r/2$, bajo estas circunstancias, las ecs. (1.4)-(1.8) representan una onda plana estacionaria con polarización lineal.

Para el caso de la onda electromagnética con modo transversal eléctrico rectangular TE_{10p} , se tienen las siguientes expresiones matemáticas:

$$E_y^l = E_{0l} \text{cos}(K_x x) \text{sen}(K_z z) \text{cos}\omega t, \quad (1.10)$$

$$B_x^l = K_z E_{0l} \text{cos}(K_x x) \text{cos}(K_z z) \text{sen}\omega t, \quad (1.11)$$

$$B_z^l = K_x E_{0l} \text{sen}(K_x x) \text{sen}(K_z z) \text{sen}\omega t, \quad (1.12)$$

donde $K_x = \pi/a$, $K_z = p\pi/d$, d y a representan la longitud y el ancho de la cavidad respectivamente. La frecuencia de la onda electromagnética para este modo está dada por:

$$\omega = c(K_x^2 + K_z^2)^{1/2}. \quad (1.13)$$

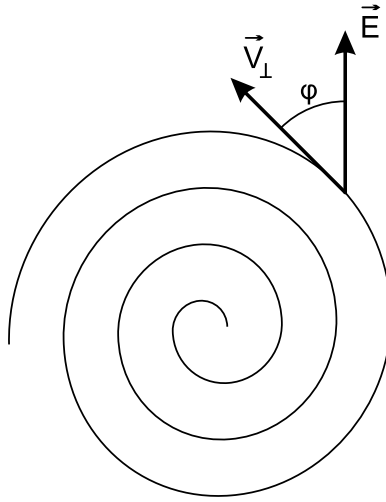


Figura 1.1: Proyección transversal de la trayectoria del electrón, donde se muestra la diferencia de fase φ , entre los vectores velocidad transversal \vec{v}_\perp y campo eléctrico \vec{E} .

Los electrones absorben energía de la onda electromagnética si la diferencia de fase φ , entre los vectores velocidad transversal \vec{v}_\perp y campo eléctrico \vec{E} se encuentra en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$, denominado banda de aceleración, ver la Figura 1.1. Se denomina resonancia exacta cuando la diferencia de fase $\varphi = \pi$, que corresponde al caso más efectivo en el que el electrón puede absorber energía del campo eléctrico.

1.2 Descripción del Esquema Físico *SARA*

Un esquema físico para un acelerador autoresonante se muestra en la figura 1.2. Este está adaptado como un posible diseño para una fuente de rayos X compacta basado en *SARA*.

Se tiene una cavidad resonante de geometría rectangular (en este caso) (1), que está localizada dentro de un conjunto de bobinas con corriente ó imanes (2), los cuales forman un campo magnético estático y no homogéneo de un perfil deseado. Dentro de la cavidad puede excitarse un modo TE_{10p} rectangular o TE_{11p} cilíndrico a través de un sistema de inyección (magnetron (4), guía de onda (3), un aislante de ferrita (5) y un iris (6)); el uso de la ferrita permite el paso de las ondas electromagnéticas en una sola dirección, previniendo que el campo de microondas que se refleja llegue al magnetron. Un haz de electrones se inyecta con una energía inicial a lo largo del eje de la cavidad mediante un cañon de electrones (7). Dentro de la cavidad se coloca un blanco metálico de tungsteno o molibdeno (6), para que los electrones impacten y produzcan rayos X . Para este

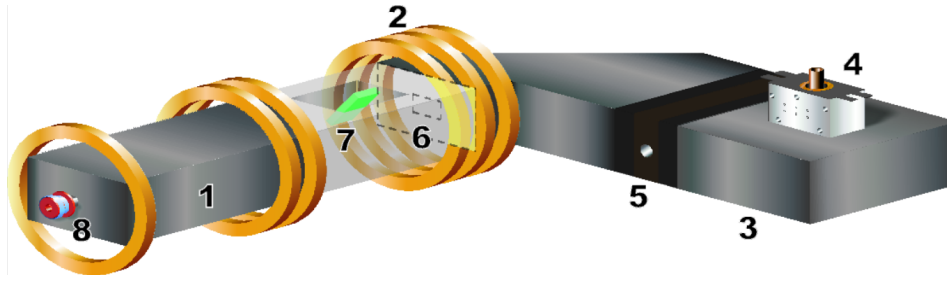


Figura 1.2: Sistema físico para el modelo de aceleración *SARA*: (1) cavidad resonante rectangular, (2) bobinas con corriente ó imanes, (3) guía de onda rectangular, (4) fuente de microondas, (5) aislantes de ferrita, (6) iris, (7) blanco de molibdeno y (8) cañón de electrones.

estudio se considera la aproximación de vacío dentro de la cavidad, donde el grado de vacío incrementa a medida que la presión del gas residual disminuye, si el intervalo de presión está entre 10^{-3} y 10^{-7} Torr se tiene alto vacío. Para generadores de microondas como el magnetrón o el klistron, el valor característico de presión de gas residual es del orden de 10^{-6} Torr. Bajo estas condiciones, el camino libre medio de los electrones acelerados es del orden de 1 Km, de manera que la aproximación de vacío puede usarse en todo su recorrido dentro de la cavidad.

1.2.1. Dinámica del Electrón bajo condiciones *SARA*

La dinámica de un electrón bajo condiciones *SARA* se estudia mediante la ecuación de movimiento

$$\frac{d(\gamma m_e \vec{v})}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{F}_s, \quad (1.14)$$

y la ecuación de balance de la energía:

$$\frac{d(\gamma m_e c^2)}{dt} = -e\vec{v} \cdot \vec{E} + \vec{F}_s \cdot \vec{v}, \quad (1.15)$$

donde los campos eléctrico y magnético corresponden a $\vec{E} = \vec{E}^{hf}$ y $\vec{B} = \vec{B}_{est} + \vec{B}^{hf}$ en la posición de la partícula, con \vec{E}^{hf} y \vec{B}^{hf} campos asociados al campo de microondas de alta frecuencia polarizado linealmente ([6]- [13]), \vec{v} y \vec{F}_s son la velocidad de la partícula y la fuerza de frenado de radiación sincrotrónica, respectivamente. Esta fuerza de frenado impone límites a la aceleración de la partícula; sin embargo, en las simulaciones realizadas, el rango de energía alcanzado por el electrón no es suficientemente alto (mayor a 1 MeV) para considerarla, por lo tanto, puede despreciarse en la ecuación

1.14,

$$\frac{d(\gamma m_e \vec{v})}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.16)$$

para obtener una expresión más explícita de la fuerza de *Lorentz* debe especificarse los campos electromagnéticos presentes en el fenómeno *SARA*. Los primeros estudios analíticos de *SARA* muestran que se presenta autoresonancia espacial con una onda polarizada circular derecha, y con una con polarización lineal; sin embargo, para hacer un mejor análisis de lo que sucede en este último caso debe considerarse este campo de microondas como una superposición de dos campos: uno con polarización circular izquierda, y el otro con polarización circular derecha. Donde, el fenómeno *SARA* tendrá lugar cuando el electrón interactúe efectivamente con la componente circular derecha de la onda electromagnética, en la figura 1.3 puede apreciarse una descomposición del campo linealmente polarizado, donde \vec{E}_{0c}^+ , \vec{E}_{0c}^- y \vec{E}_{0l} son los campos eléctricos de la onda con polarización circular derecha, circular izquierda y lineal respectivamente, con $\vec{E}_{0l} = \vec{E}_{0c}^+ + \vec{E}_{0c}^-$ y $E_{0l} = 2E_{0c}$.

Partiendo de lo anterior, y procediendo de forma análoga al estudio realizado en [34]

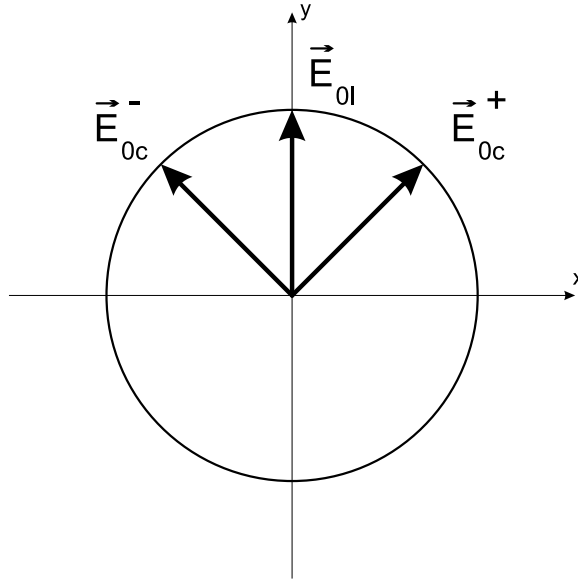


Figura 1.3: Esquema de descomposición de una onda linealmente polarizada en función de una onda con polarización circular derecha y otra con polarización circular izquierda.

puede plantearse el modelo *SARA* para la componente circular derecha de la onda linealmente polarizada, la cual puede aproximarse a una onda plana; entonces los campos \vec{E}^{hf} y \vec{B}^{hf} expresados en coordenadas cilíndricas y en términos de la diferencia de fase

φ pueden escribirse como

$$\vec{E}^{hf} \cong E_{0c} \left(\sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\theta} \right) \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right), \quad (1.17)$$

y

$$\vec{B}^{hf} \cong -E_{0c} \left(\frac{p\pi/d}{\omega} \right) \left(\sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\theta} \right) \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) + B_z^{hf} \hat{z}. \quad (1.18)$$

teniendo en cuenta las expresiones 1.17 y 1.18 la fuerza eléctrica actuante sobre el electrón en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{F}_E = -eE_{0c} \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \sin \varphi \hat{r} - eE_{0c} \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \cos \varphi \hat{\theta}. \quad (1.19)$$

A continuación se describe el procedimiento para calcular la fuerza magnética que actúa sobre el electrón en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{F}_M = -e \left[(v_\theta B_z - v_z B_\theta) \hat{r} + (v_z B_r - v_r B_z) \hat{\theta} + (v_r B_\theta - v_\theta B_r) \hat{z} \right] \quad (1.20)$$

Si se considera baja inhomogeneidad del campo magnético de las bobinas, se cumple:

$$\begin{aligned} B_z \gg B_r, B_\theta & \quad \text{y} \quad v_\theta \gg v_r \\ \Rightarrow v_z B_\theta \ll v_\theta B_z & \quad \text{y} \quad v_r B_\theta \ll v_\theta B_r, \end{aligned}$$

con las aproximaciones anteriores, la fuerza magnética se expresa:

$$\vec{F}_M = -ev_\theta B_z \hat{r} - e(v_z B_r - v_r B_z) \hat{\theta} + ev_\theta B_r \hat{z}. \quad (1.21)$$

De las ecuaciones 1.18, 1.19 y 1.21 y considerando que $(F_M)_\theta \ll (F_E)_\theta$ y $v_\perp = (v_r^2 + v_\theta^2)^{1/2} \approx v_\theta$ se obtiene la Fuerza de Lorentz, que es la suma de la fuerza magnética y la fuerza eléctrica,

$$\begin{aligned} \vec{F}_L = & - \left(ev_\perp B_z^b + eE_{0c} \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \sin \varphi + ev_z E_{0c} \left(\frac{p\pi/d}{\omega} \right) \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right) \hat{r} \\ & - eE_{0c} \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \cos \varphi \hat{\theta} \\ & - \left(\frac{m}{2B^b} v_\perp^2 \frac{dB_z^b}{dz} + ev_\perp E_{0c} \left(\frac{p\pi/d}{\omega} \right) \sin \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right) \hat{z}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde la componente radial de la ecuación 1.22 corresponde a la fuerza centrípeta y la componente azimutal se relaciona con la variación de energía del electrón. La componente longitudinal Z de la fuerza de *Lorentz* está conformada por dos términos, el primero corresponde a la fuerza diamagnética, la cual actúa en dirección opuesta al gradiente de campo magnético, impidiendo el avance del electrón hacia regiones de mayor intensidad de campo magnético; el segundo termino es una fuerza longitudinal debido al campo magnético de microondas F_z^{hf} , este término contribuirá al avance longitudinal del electrón siempre que $\sin \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) < 0$.

CAPÍTULO 2

MODELO DE SIMULACIÓN

El movimiento autoconsistente del haz de electrones puede ser descrito mediante el sistema de ecuaciones *Vlasov-Maxwell*:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

donde, $f_e(\vec{r}, \vec{p}, t)$ es la función de distribución electrónica en el espacio de fase, la cual se define como la probabilidad de encontrar un electrón en un elemento de volumen en el espacio de fase $d\vec{r}d\vec{p}$ que rodean un cierto punto (\vec{r}, \vec{p}) . Los campos \vec{E} y \vec{B} corresponden a los campos eléctricos y magnéticos dentro de la cavidad, respectivamente. El campo eléctrico \vec{E} corresponde a la superposición de la componente eléctrica del campo de microondas TE_{102} y el campo eléctrico autoconsistente del haz de electrones. El campo magnético \vec{B} es la superposición de la componente magnética de la onda electromagnética transversal modo TE_{102} , el campo magnético generado por los electrones y el campo magnético externo \vec{B}_{est} producido por las bobinas con corriente. En este trabajo, la solución del sistema de ecuaciones descrito por 2.1 y 2.2 se hace a través de tres métodos numéricos: el método de *Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT)* para la solución de las ecuaciones de Maxwell en cada paso de tiempo, el método *particle-in-cell electromagnético conservativo* para la simulación de sistemas de partículas interactuantes garantizando conservación de la carga eléctrica, y el método

de *Bunneman-Boris* para la simulación de la dinámica del haz de electrones, donde se integra numéricamente la ecuación dinámica de *Newton-Lorentz* para obtener las posiciones y velocidades de las partículas en cada paso de tiempo.

2.1 Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT)

En el presente trabajo, el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo, se utiliza para simular los campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{B} . Este fué introducido por K. Yee en el año de 1966 [35]; desde entonces, cientos de artículos relacionados con el refinamiento y la aplicación del método han sido publicados, así como libros donde explican detalladamente la implementación del algoritmo para diversas situaciones [39], esta técnica computacional es una de las más utilizadas para resolver problemas electromagnéticos. Un sistema de seis ecuaciones diferenciales acopladas, *las ecuaciones diferenciales rotacionales de Maxwell*, forman la base del algoritmo numérico *DFDT* para interacciones electromagnéticas.

2.1.1. Algoritmo de YEE

El algoritmo de Yee permite encontrar campos \vec{E} y \vec{B} y sus variaciones en el tiempo y en el espacio a partir de las ecuaciones rotacionales de Maxwell, en lugar de resolver el campo eléctrico y magnético de manera independiente mediante la ecuación de onda. Considerando la malla en coordenadas cartesianas mostrada en la figura 2.1, el algoritmo presenta los campos eléctrico y magnético a través de sus componentes E_i y B_i (con $i = x, y, z$) en el espacio tres dimensional, de manera que cada componente del campo eléctrico E_i está rodeada por cuatro componentes circulantes de campo magnético, y cada componente B_i está rodeada por cuatro componentes circulantes E_i .

2.1.2. Diferencias Finitas y Notación

Yee define las coordenadas de la malla (i, j, k) como:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z),$$

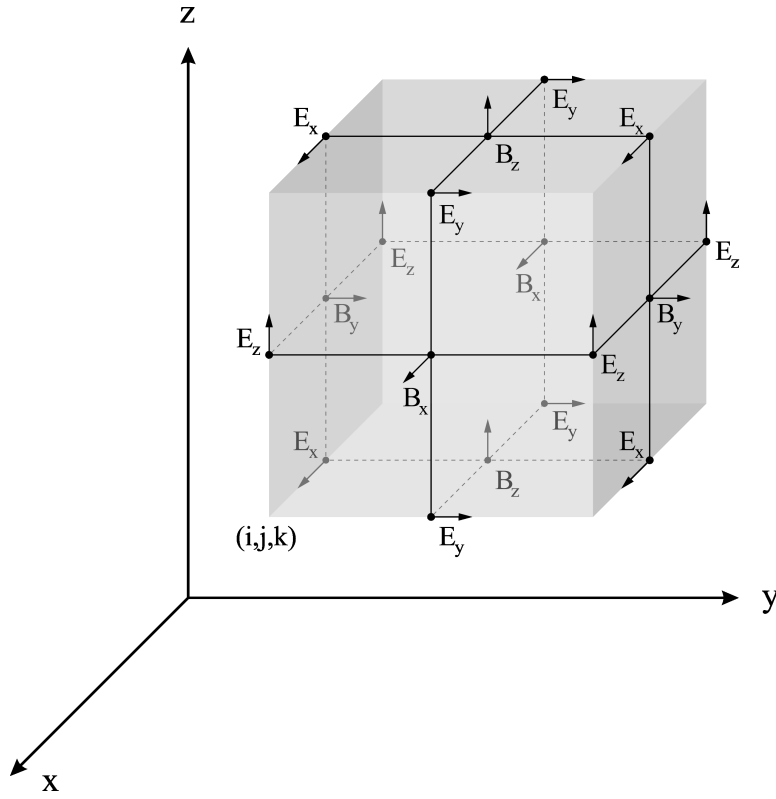


Figura 2.1: Celda de Yee en coordenadas cartesianas

donde Δx , Δy y Δz son las separaciones de la malla. Cualquier función en el espacio y el tiempo se puede escribir como:

$$F^n(i, j, k) = F^{n\Delta t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z), \quad (2.3)$$

donde Δt es el incremento del tiempo, y n es el índice temporal. Considerando una malla igualmente espaciada se tiene $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$. Las derivadas espaciales y temporales de F se escriben utilizando aproximación en diferencias finitas centradas:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + 1/2, j, k) - F^n(i - 1/2, j, k)}{\Delta}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Vale la pena notar que el incremento de $\pm 1/2$ en el índice i denota una diferencia finita espacial de $\pm \Delta x/2$, y el incremento $\pm 1/2$ en el índice n denota una diferencia finita temporal de $\pm \Delta t/2$. Un arreglo dispuesto de esta forma es llamado de malla intercalada. Este tipo de malla tiene ciertas propiedades las cuales implícitamente hacen cumplir las condiciones requeridas:

- Las expresiones en diferencias finitas para las derivadas espaciales usadas en los operadores rotacionales son centradas y de segundo orden de precisión.
- La continuidad de las componentes tangenciales de los campos \vec{E} y \vec{B} se mantiene naturalmente a través de una interface entre dos medios disimilares, siempre y cuando esta interface sea paralela a uno de los ejes coordenados de la malla.
- Las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} están centradas en tiempo, es decir, todas las componentes del campo eléctrico son computadas y depositadas en memoria para un tiempo particular, estas se obtienen utilizando datos de \vec{B} previamente obtenidos. Para el campo magnético se hace el mismo procedimiento, donde también se utilizan datos de campo eléctrico calculados previamente. El ciclo vuelve a comenzar con la recomputación de las componentes de campo \vec{E} , basándose en los nuevos datos de campo \vec{B} .
- La malla de Yee es aplicable para la solución de las ecuaciones de divergencia de los campos eléctrico y magnético en ausencia de cargas libres.

2.1.3. Formulación Tridimensional de *DFDT*

Las ecuaciones 2.4 y 2.5 aplicadas a las ecuaciones diferenciales de Maxwell conlleva a seis ecuaciones acopladas en diferencias finitas, cuya expresión es:

$$\vec{B}^{n+1/2} = \vec{B}^{n-1/2} - \Delta t \left[\nabla \times \vec{E}^n \right], \quad (2.6)$$

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \left[\mu_0 \vec{J}^{n+1/2} - \nabla \times \vec{B}^{n+1/2} \right]. \quad (2.7)$$

Una propiedad importante del algoritmo de Yee es que permite simular de manera simultánea punto a punto la forma diferencial y la integral macroscópica de las ecuaciones de Maxwell. La última es extremadamente útil en la especificación de las condiciones de contorno y las singularidades.

2.1.4. Condición de Estabilidad

En el algoritmo *DFDT*, el paso de tiempo Δt debe tener un límite específico con respecto a incrementos espaciales Δx , Δy y Δz , con el fin de evitar inestabilidades numéricas

[39]. En caso de que no se considere esto, es posible que los resultados computados incrementen ilimitadamente con el tiempo. La escogencia de los incrementos temporales y espaciales afecta las características de la propagación de la onda dentro de la celda de Yee y sus errores numéricos. Para simplificar el problema, se analiza la estabilidad partiendo de la propagación de una onda en una dimensión, en la dirección del eje x . Bajo estas circunstancias, la expresión de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes es:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (2.9)$$

a partir de las ecuaciones 2.8 y 2.9 puede derivarse la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}. \quad (2.10)$$

Discretizando la ecuación 2.10 en diferencias finitas centradas se tiene

$$\frac{E^{n+1}(i) - 2E^n(i) + E^{n-1}(i)}{(c\Delta t)^2} = \frac{E^n(i+1) - E^n(i) + E^n(i-1)}{(\Delta x)^2}. \quad (2.11)$$

El análisis de la estabilidad comienza con la solución de la ecuación 2.11, la cual tiene la forma

$$E^n(i) = \zeta^n [e^{-jkx}]_{x=i\Delta x}, \quad (2.12)$$

donde k es el número de onda. Dependiendo del valor de ζ se presentan tres casos: la solución puede incrementar, disminuir o fluctuar en el tiempo. Reemplazando 2.12 en la ecuación diferencial 2.11, se obtiene

$$\zeta^2 - 2A\zeta + 1 = 0, \quad (2.13)$$

donde

$$A = 1 - 2 \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \text{sen}^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right). \quad (2.14)$$

Reemplazando 2.14 en la ecuación 2.13 y resolviendo para ζ se tiene

$$\zeta = A \pm \sqrt{A^2 - 1}, \quad (2.15)$$

una solución incremental sucede si $|\zeta| > 1$, esto ocurre solamente si $|A| > 1$ teniendo entonces $c\Delta t > \Delta x$. Si $|A| \leq 1$ implica que $c\Delta t \leq \Delta x$ y

$$|\zeta| = |A + j\sqrt{1 - A^2}| = 1. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, el criterio de estabilidad en una dimensión es $c\Delta t \leq \Delta x$. Este criterio puede extenderse al caso tridimensional

$$\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}, \quad (2.17)$$

donde $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Considerando una celda cúbica de la malla con $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, el criterio de estabilidad tomará una forma simple

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}, \quad (2.18)$$

donde $S = c\Delta t/\Delta$ es el factor de estabilidad de Courant. Cabe aclarar que el problema de estabilidad estimado para el algoritmo de Yee puede ser más complejo. La estabilidad general de un algoritmo *DFDT* para resolver ecuaciones de Maxwell depende de otros parámetros, como la interacción entre un algoritmo de Yee y otros algoritmos usados en la resolución de un problema completamente.

2.1.5. Formulación 3D DFDT-Fronteras Uniaxiales Perfectamente Acopladas (UPML)

Las componentes del campo electromagnético deben ser especificadas en la vecindad de los puntos de malla. Esto no es posible para las componentes de campo en la frontera del volumen computacional. Nodos sobre esta frontera requieren de un tratamiento especial para actualizar las componentes de los campos. En la simulación de la aceleración *SARA*, para simular la inyección de microondas es necesario definir *condiciones de frontera absorbentes uniaxiales perfectamente acopladas (UPML)* [39] en uno de los lados que limitan el volumen de simulación. La formulación *UPML* implica que las velocidades de fase de las ondas incidentes y transmitidas son idénticas para todos los ángulos de incidencia y la impedancia de los dos medios donde se propaga la onda es igual. Este método define un medio anisótropo, perfectamente acoplado llamado *UPML*. La definición de un tensor constitutivo general $\bar{\bar{S}}$ permite que el medio *UPML* se use en todo el espacio de la malla *DFDT*. Este tensor provee un medio isótropo sin pérdidas en la zona computacional primaria y un absorbente *UPML*, ubicado en la región externa de la malla de Yee, región secundaria; la absorción en la región externa de la malla permite eliminar las reflexiones no físicas de la onda (reflexiones computacionales). En ausencia de corrientes (haz de electrones en este caso), las ecuaciones de Maxwell del rotacional que describen los campos eléctricos y magnéticos en un medio finito con

condiciones *UPML* se expresan como:

$$\vec{\nabla} \times \check{\vec{H}} = j\omega\epsilon\overline{\overline{S}}\check{\vec{E}} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \check{\vec{E}} = -j\omega\mu\overline{\overline{S}}\check{\vec{H}}. \quad (2.19)$$

$$\overline{\overline{S}} = \begin{bmatrix} S_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_z & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y S_z S_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & S_x S_z S_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S_x S_y S_z^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

donde,

$$S_x = K_x + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon} \quad ; \quad S_y = K_y + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon} \quad ; \quad S_z = K_z + \frac{\sigma_z}{j\omega\epsilon}. \quad (2.21)$$

El ajuste de los parámetros S_x , S_y y S_z permite definir regiones, las cuales se ilustran en la figura 2.2, esta presenta 2 partes: zona interna (1) donde se resuelve el algoritmo de Yee y zonas externas (2) y (3) que son los absorbentes:

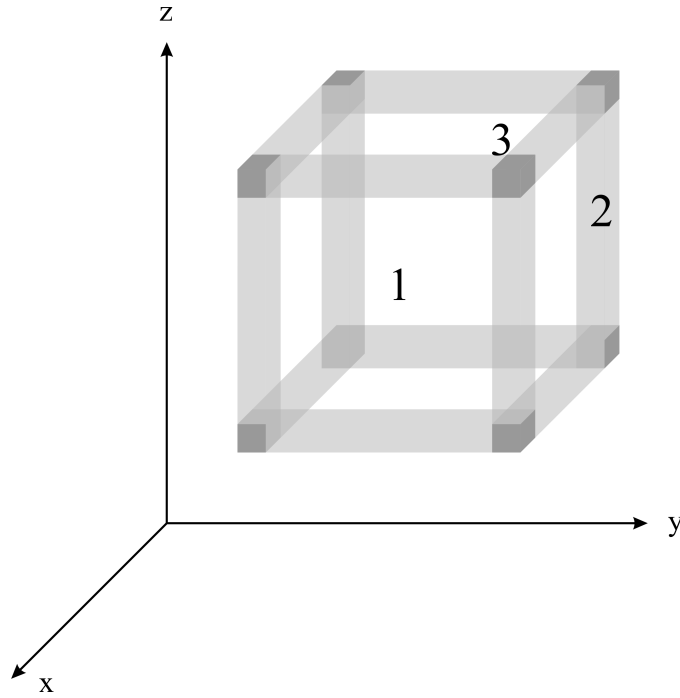


Figura 2.2: Definición de las regiones para el algoritmo *UPML*: 1-corresponde a la zona interna, donde se resuelve el algoritmo de Yee. 2- corresponde a la zona externa donde se colocan los absorbentes y donde ocurre solapamiento de las esquinas dihedrales. 3-Es la zona externa donde se presenta solapamiento de las esquinas trihedrales.

- **Zona interior, isótropa sin pérdidas:**

$$S_x = S_y = S_z = 1 \quad (\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad y \quad K_x = K_y = K_z = 1).$$

- Absorbente *UPML* en los planos exteriores de la frontera **Xmin** y **Xmax**:

$$S_y = S_z = 1 \quad (\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad y \quad K_y = K_z = 1).$$

- Absorbentes *UPML* en los planos exteriores de la frontera **Ymin** y **Ymax**:

$$S_x = S_z = 1 \quad (\sigma_x = \sigma_z = 0 \quad y \quad K_x = K_z = 1).$$

- Absorbentes *UPML* en los planos exteriores de la frontera **Zmin** y **Zmax**:

$$S_x = S_y = 1 \quad (\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad y \quad K_x = K_y = 1).$$

- Solapamiento de los absorbentes *UPML* **Xmin**, **Xmax** y **Ymin**, **Ymax** (esquinas dihedrales):

$$S_z = 1(\sigma_z = 0 \quad y \quad K_z = 1).$$

- Solapamiento de los absorbentes *UPML* **Xmin**, **Xmax** y **Zmin**, **Zmax** (esquinas dihedrales):

$$S_y = 1(\sigma_y = 0 \quad y \quad K_y = 1).$$

- Solapamiento de los absorbentes *UPML* **Ymin**, **Ymax** y **Zmin**, **Zmax** (esquinas dihedrales):

$$S_x = 1(\sigma_x = 0 \quad y \quad K_x = 1).$$

- Solapamiento de los absorbentes *UPML* en todas las esquinas trihedrales:

se usa el tensor general completo 2.20.

La derivación de las expresiones en diferencias finitas para las ecuaciones de Maxwell, y que son consistentes con el método de Yee se presentan en el apéndice A.2. Para incluir la densidad de corriente \vec{J} asociada al haz, la ecuación 2.19 debe ser modificada así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\bar{\bar{S}}\vec{E} + \vec{J} \quad \text{ó} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J} = j\omega\epsilon\bar{\bar{S}}\vec{E}. \quad (2.22)$$

2.1.6. Excitación de la Onda Electromagnética

La excitación de la onda electromagnética TE_{102} se hace a través de una guía de onda, la cual se acopla a la cavidad resonante mediante un iris. En el método *DFDT* esta excitación debe hacerse de forma tal que se utilicen pocas componentes de \vec{E} y \vec{H} comparado con las necesarias en la malla de Yee. Esto se hace con el fin de reducir el costo computacional y para evitar que la fuente interfiera significativamente en la solución que desea obtenerse. Una manera de hacerlo es a través de la técnica *Campo Total/Campo Dispersado* [37, 39], la cual es ampliamente utilizada en simulación de plasmas por ser liviana computacionalmente, y por no interferir con los campos electromagnéticos autoconsistentes.

Técnica de Excitación Campo Total/Campo Dispersado (*CT/CD*)

Este método asume que el campo total eléctrico y magnético puede descomponerse en:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{disp}, \quad \vec{H}_{total} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{disp}. \quad (2.23)$$

donde \vec{E}_{inc} y \vec{H}_{inc} son los campos de la onda incidentes, estos se conocen en todos los pasos de tiempo. \vec{E}_{disp} y \vec{H}_{disp} son los campos de la onda dispersados, los cuales inicialmente son desconocidos. Esta propiedad permite establecer dos regiones en la malla de Yee: la zona interna 1, donde se encuentran los campos totales; y la región 2, los alrededores, donde se depositan los campos dispersados. En la zona 1, el algoritmo de Yee opera sobre las componentes de los campos totales, es decir, los campos provenientes de la onda incidente, así como los campos dispersados. En la zona externa, no hay onda incidente, el algoritmo de Yee opera solamente sobre los campos dispersados. Los planos exteriores que rodean la región 2 truncan el dominio computacional, y son usados para implementar condiciones de frontera absorbentes.

La superficie virtual que constituye la interface entre la región 1 y 2 contiene las componentes de los campos \vec{E} y \vec{H} , estas deben obtenerse a partir de la computación de varias componentes de las diferencias finitas espaciales en un paso de tiempo. Computar estas diferencias finitas espaciales a través de la interface produce inconsistencia, porque las componentes del campo en la región 1 corresponden al campo total; mientras que las del lado de la región 2 de la interface, los campos son los dispersados.

En el presente trabajo, debe excitarse el modo TE_{10} en la guía de onda, para hacer esto utilizando el método *CT/CD* debe excitarse la onda electromagnética en un plano sobre la interface entre la región 1 y 2; las componentes de los campos electromagnéticos

necesarios para producir el modo transversal eléctrico TE_{10} son E_y y H_x . Las expresiones consistentes para las componentes E_y y H_x en el espacio tridimensional están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{en } k = k_1 : E_y(i = 0, \dots, Nx - 1; j = 1/2, \dots, (Ny - 1) - 1/2; k = k_1) \\ E_y^{n+1}(i, j, k_1) = E_y^n(i, j, k_1) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} H_{x,inc}^{n+1/2}(i, j, k_1 + 1/2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \text{en } k = k_1 + 1/2 : H_x(i = 0, \dots, Nx - 1; j = 1/2, \dots, (Ny - 1) - 1/2; k = k_1 + 1/2) \\ H_x^{n+1/2}(i, j, k_1 + 1/2) = H_x^{n+1/2}(i, j, k_1 + 1/2) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} E_{y,inc}^n(i, j, k_1), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde k_1 es el índice computacional del plano de excitación de la fuente. Para que la solución sea consistente dentro del dominio computacional (malla de Yee), el término incluido de la onda incidente en la ecuación 2.24 debe substraerse medio paso de tiempo después de la ecuación 2.25, esto produce una propagación unidireccional de la onda excitada dentro de la malla de Yee, específicamente a la derecha de la región correspondiente al campo total (CT), una propiedad importante de esta técnica es que la onda que se propaga en la dirección $+z$ no se atenúa y no se distorsiona.

2.1.7. Función *Ventana Hanning*

Cuando se usa una excitación monocromática en el modelado por *DFDT*, como es el caso de esta tesis, se presenta una pérdida deliberada de tiempo para alcanzar una solución en el estado estacionario. Es posible reducir este tiempo, denominado tiempo transitorio [38]. Partiendo de la expresión matemática para la excitación de un modo TE_{10} en la guía de onda de ancho a :

$$E_y(x, t) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}(2\pi f_m t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso .} \end{cases} \quad (2.26)$$

Cabe aclarar que el origen de coordenadas de la expresión 2.26 difiere de el de las expresiones 1.10 a 1.12, donde se toma este origen centrado en la sección transversal de la cavidad. Una excitación de estas características incrementa el tiempo de cómputo y reduce la precisión del método *DFDT* debido a su naturaleza oscilatoria. Para analizar esta naturaleza transitoria puede hacerse mediante una transformación de Fourier de la ecuación 2.26, donde se obtiene el espectro de la excitación:

$$\mathcal{F}\{E_y(x, t)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_m) + \frac{1}{2}\delta(f + f_m) + \left| \frac{1}{2\pi(f - f_m)} \right| + \left| \frac{1}{2\pi(f + f_m)} \right|, \quad (2.27)$$

a partir de 2.27 puede verse que hay componentes por debajo de la frecuencia de corte de la guía de onda. Estas componentes evanescentes, “ondas transitorias”, se atenúan a medida que el frente de onda viaja a lo largo de la guía, sin embargo esto causa que el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario incremente. Debe notarse que cuando $t \rightarrow \infty$ estas componentes transitorias son insignificantes comparadas con la onda de frecuencia modulada. Para disminuir este período transitorio, puede diseñarse una excitación la cual tenga menos espectro localizado por debajo de la frecuencia de corte. Esto se hace haciendo que las componentes espectrales estén más cerca de la frecuencia de modulación. En este estudio se usa una función denominada *ventana Hanning*, la cual altera la forma de la excitación, la expresión de esta *función de excitación monocromática modificada* es:

$$E_y(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}(2\pi f_m t) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}(2\pi f_m t) & \text{si } t > T. \end{cases} \quad (2.28)$$

Esta función tiene una forma suave e incrementa la atenuación de las ondas evanescentes o transitorias. Los cambios en la fuente de excitación son concernientes solamente a la componente temporal y no a la componente espacial.

2.2 Método de *Bunemann-Boris*

El movimiento de los electrones se describe por la ecuación de *Newton-Lorentz*, que en forma adimensional es:

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \vec{g} + \frac{\vec{U}}{\gamma} \times \vec{b}, \quad (2.29)$$

donde: $\vec{U} = \vec{P}/m_e c$, es el momento del electrón; $\vec{g} = \vec{E}/(-B_0 c)$, es la superposición del campo eléctrico de microondas y el campo eléctrico autoconsistente, $\vec{b} = \vec{B}/(-B_0)$, es la suma del campo magnético externo y el producido por el movimiento de los electrones dentro de la cavidad; $\tau = \omega t$, el tiempo adimensional; y $\gamma = (1 + U^2)^{1/2}$, es el factor relativista.

Utilizando un esquema *leap-frog*, la ecuación 2.29 puede escribirse en diferencias centradas como:

$$\frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^{n-1/2}}{\Delta\tau} = \vec{g}^n + \frac{\vec{U}^{n+1/2} + \vec{U}^{n-1/2}}{2\gamma} \times \vec{b}^n. \quad (2.30)$$

La ecuación 2.30 se resuelve numéricamente usando el método de *Bunemann-Boris* [40], para determinar el valor de la posición y el momentum en cada paso de tiempo,

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \vec{U}^{n+1/2} \frac{\Delta\tau}{\gamma^{n+1/2}}. \quad (2.31)$$

En los cálculos la posición y todas las longitudes se expresan en unidades del radio de Larmor relativista $r_{l0} = c/\omega$.

El método de *Bunemann-Boris* se utiliza en la simulación para una sola partícula así como para la simulación autoconsistente de los electrones.

2.3 Método Particle-In-Cell (PIC) Electromagnético Conservativo

Los sistemas reales de partículas usualmente están constituídos por un gran número de ellas; para simularlos sin que esto implique un gran costo computacional, un método numérico muy utilizado es el de *Particle-in-Cell (PIC)* [42,43], que es considerado como una aproximación de elementos finitos, los cuales están moviéndose y superponiéndose [42]. Matemáticamente, el método de *PIC* asume que la función de distribución de cada especie de partícula está dada por la superposición de muchos elementos (llamados partículas computacionales o superpartículas). Para el caso de la función de distribución electrónica, esta puede aproximarse por la expresión

$$f_e(\vec{r}, \vec{p}, t) \cong \sum_{k=1}^N S(\vec{r}, \vec{r}_k(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_k(t)), \quad (2.32)$$

donde $S(\vec{r}, \vec{r}_k(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_k(t))$ constituye una superpartícula (SP), la cual representa la función de distribución de un gran número de electrones que se encuentran cercanos entre sí en el espacio de fase; siendo $S(\vec{r}, \vec{r}_k(t)) = S_x(x - x_k) S_y(y - y_k) S_z(z - z_k)$ la función que describe el método de ponderación de carga de las partículas sobre la malla computacional, llamada *función de forma espacial*, y N es el número de superpartículas. Las funciones de forma espacial se obtienen a partir de los b-splines. El primer b-spline es la función “top hat” $b_0(\xi)$ definida como:

$$b_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < 1/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.33)$$

donde $\xi = x, y, z$. Mediante integración sucesiva se puede obtener los b-splines subsecuentes, a partir de su fórmula generatriz

$$b_l(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' b_0(\xi - \xi') b_{l-1}(\xi'). \quad (2.34)$$

Con base en las ecuaciones 2.33 y 2.34 se obtiene la función de forma espacial:

$$S_\xi(\xi - \xi_k) = \frac{1}{\Delta\xi} b_l \left(\frac{\xi - \xi_k}{\Delta\xi} \right), \quad (2.35)$$

donde $\Delta\xi$ es el tamaño de las superpartículas, en la dirección espacial ξ . En esta tesis se utilizan b-splines de orden cero, b_0 , una elección referida como *Cloud In Cell*, donde para el caso *PIC* unidimensional la superpartícula es una nube cuadrada en el espacio de fase con ancho infinitesimal en la dirección de la velocidad y un tamaño finito en el espacio.

La nomenclatura estándar del método *PIC* define la *función de interpolación* como:

$$W(\xi_i - \xi_k) = \int S_\xi(\xi - \xi_k) b_0 \left(\frac{\xi - \xi_i}{\Delta\xi} \right) d\xi. \quad (2.36)$$

Matemáticamente, la función interpolación es la convolución de la función de forma con la función “top hat” de ancho igual a la celda. La expresión 2.36 puede escribirse como:

$$W(\xi_i - \xi_k) = b_{l+1} \left(\frac{\xi - \xi_k}{\Delta\xi} \right), \quad (2.37)$$

Esta función permite interpolar los campos electromagnéticos, esto es necesario porque las SPs toman posiciones arbitrarias, no necesariamente en los nodos de la malla donde se encuentran definidos los campos, de manera que el valor del campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} en las posiciones de las SPs se obtiene a partir de los puntos sobre la malla adyacentes a ellas.

$$E_p = \sum_i E_i W(\xi_i - \xi_k) \quad (2.38)$$

y

$$B_p = \sum_i B_i W(\xi_i - \xi_k), \quad (2.39)$$

En métodos *PIC* no conservativos, la densidad de carga eléctrica ρ y la densidad de corriente \vec{J} se computan a partir de las posiciones y velocidades de las partículas. Una carga q y un flujo de carga de una partícula $q\vec{v} \equiv q(v_x, v_y, v_z)$ se asignan a los puntos de malla que rodean la SP mediante la función interpolación 2.37, esto se conoce como ponderación de la carga y de la densidad de corriente. Obtener las densidades de corriente de esta manera no satisface la ecuación de continuidad exactamente.

Existen varias técnicas numéricas para resolver este problema, las cuales resuelven la ecuación de continuidad localmente, estas técnicas se conocen como métodos conservativos de carga. Un flujo de carga eléctrica de una partícula puede computarse a partir de las posiciones inicial y final del movimiento de la superpartícula, desde que estos puntos inicial y final estén localizados en la misma celda, cuando esto sucede no se presentan

inconvenientes; sin embargo, el movimiento de la SP generalmente está en el dominio de varias celdas, cuando este es el caso, se debe tomar el movimiento de la partícula como movimientos separados en cada celda. Con base en la superposición del flujo de carga, este puede construirse a partir de segmentos de línea recta entre cualquier punto inicial y final. Esto conlleva a considerar que la trayectoria de la partícula en un paso de tiempo es una línea recta. En el año 2005, Takayuki Umeda [36] y coinvestigadores desarrollaron un método *PIC* conservativo de carga, en el cual se considera que la trayectoria de la partícula es en una línea *Zigzag*. En esta tesis, el software desarrollado para la simulación del haz está basado en este estudio, se optó por esta técnica porque las operaciones necesarias en cada ciclo computacional se reducen al compararse con los métodos conservativos convencionales [41].

2.3.1. Esquema *Zigzag* en 3D

El movimiento de una partícula con carga q moviéndose desde (x^t, y^t, z^t) a $(x^{t+\Delta t}, y^{t+\Delta t}, z^{t+\Delta t})$ puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x^t, & x_2 &= x^{t+\Delta t} = x^t + v_x^{t+\Delta t/2} \Delta t, \\ y_1 &\equiv y^t, & y_2 &= y^{t+\Delta t} = y^t + v_y^{t+\Delta t/2} \Delta t, \\ z_1 &\equiv z^t, & z_2 &= z^{t+\Delta t} = z^t + v_z^{t+\Delta t/2} \Delta t, \end{aligned}$$

donde en la implementación del algoritmo, los índices enteros i , j y k asociados a las coordenadas x , y y z , no deben ser mayores que $x/\Delta x$, $y/\Delta y$ y $z/\Delta z$ respectivamente, estos pueden ser definidos por la función “*Floor*” como sigue:

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{Floor}(x_1/\Delta x), & i_2 &= \text{Floor}(x_2/\Delta x), \\ j_1 &= \text{Floor}(y_1/\Delta y), & j_2 &= \text{Floor}(y_2/\Delta y), \\ k_1 &= \text{Floor}(z_1/\Delta z), & k_2 &= \text{Floor}(z_2/\Delta z). \end{aligned}$$

Se asume que la partícula no se mueve distancias mayores al espaciamiento de la malla Δx , Δy y Δz para un paso de tiempo Δt , es decir, $v_x \Delta t < \Delta x$, $v_y \Delta t < \Delta y$ y $v_z \Delta t < \Delta z$. En la figura 2.3, se presentan cuatro casos particulares (a, b, c y d) en los cuales se especifica el movimiento de la partícula a través de las celdas en la malla; en realidad el número total de situaciones diferentes que deben tenerse en cuenta para computar el flujo de partículas es ocho, estas se presentan en la tabla A.1 del apéndice A.3

Si la trayectoria de la partícula entre el punto inicial (x_1, y_1, z_1) y el punto final (x_2, y_2, z_2) es una línea recta, el número de segmentos varía de 1 a 4 dependiendo de la ubicación de

los puntos inicial y final. Mediante el uso de trayectorias *zigzag* el número de segmentos se reduce a 2.

Para computar el flujo de carga con el esquema *zigzag* este debe descomponerse en dos segmentos para todos los casos: $\vec{F}_1 \equiv (F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1})$ y $\vec{F}_2 \equiv (F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2})$. Formalmente se asume que el movimiento de una partícula de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) se describe como el movimiento de dos partículas, esto se hace a través de un punto de relevo (x_r, y_r, z_r) . Esto es, una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_r, y_r, z_r) y otra se mueve de (x_r, y_r, z_r) a (x_2, y_2, z_2) durante un tiempo de t a $t + \Delta t$.

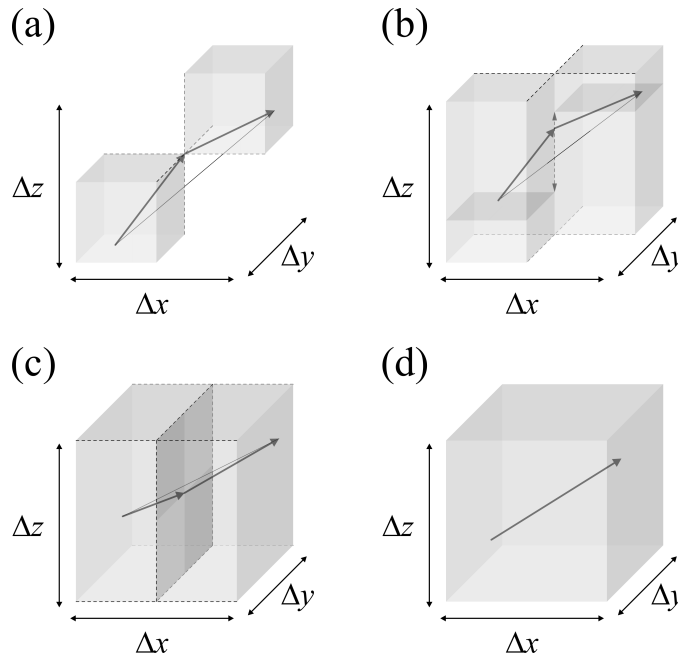


Figura 2.3: Trayectoria de las partículas para el esquema Zigzag tridimensional. Las flechas sólidas representan las trayectorias de las partículas, y las líneas punteadas representan las divisiones de las celdas de la malla. El caso (a) es para $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ y $k_1 \neq k_2$. El (b) es para $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ y $k_1 = k_2$. (c) Corresponde para $i_1 \neq i_2$, $j_1 = j_2$ y $k_1 = k_2$. (d) es para $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ y $k_1 = k_2$, que es el caso donde la partícula permanece en la celda cúbica.

La ventaja del esquema *zigzag* es el tiempo total requerido para la simulación, este es menor por dos razones:

- Siempre se utilizan dos segmentos para calcular el flujo eléctrico de carga para todos los diferentes casos del movimiento de la partícula a través de la malla. El que va del punto inicial al punto de relevo, y el que va del punto de relevo al punto final.

- Para el cómputo de las trayectorias de las partículas, estas se hacen sin la utilización de sentencias “IF”, esto se debe a la manera como se calcula el punto de relevo (Ver apéndice A.3).

En el apéndice A.3 se muestra más detalladamente cómo calcular el flujo de carga eléctrica y la densidad de corriente, así como también el procedimiento a seguir para la implementación del esquema *zigzag*.

Cabe mencionar que en el método particle in cell trabajar con superpartículas es posible porque estas satisfacen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_k, \quad \frac{d(\gamma m_k \vec{V}_k)}{dt} = e_k(\vec{E} + \vec{V}_k \times \vec{B}), \quad (2.40)$$

donde $m_k (= N_e m_e)$ representa la masa de una superpartícula. \vec{E} y \vec{B} representan los campos eléctrico y magnético actuantes sobre las superpartículas.

Debido a que la relación carga masa es igual si se consideran superpartículas y partículas reales $e_k/m_k = -e/m_e$, las superpartículas satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento que las partículas reales, permitiendo describir los efectos colectivos del sistema.

La implementación del método *PIC* electromagnético conservativo está representada esquemáticamente en la figura 2.4, reduciéndose al siguiente ciclo computacional en un paso de tiempo:

- (i) Calcular la densidad de corriente \vec{J} en los puntos de malla, a partir de las posiciones $\{\vec{x}_k\}$ y velocidades $\{\vec{v}_k\}$ de las superpartículas, en la figura 2.4 se muestra \vec{u}_k en la parte de *asignación*, esta cantidad corresponde a la cantidad de movimiento normalizada.
- (ii) Calcular los campos \vec{E} y \vec{B} en los puntos de malla, teniendo en cuenta la densidad de corriente \vec{J} calculada previamente e integrando numéricamente las ecuaciones de Maxwell por el método Yee.
- (iii) Calcular la fuerza $\{\vec{F}_k\}$ sobre las superpartículas a partir de los campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{B} .
- (iv) Calcular las nuevas posiciones $\{\vec{x}_k\}$ y velocidades $\{\vec{v}_k\}$ de las superpartículas a partir de las ecuaciones de movimiento.

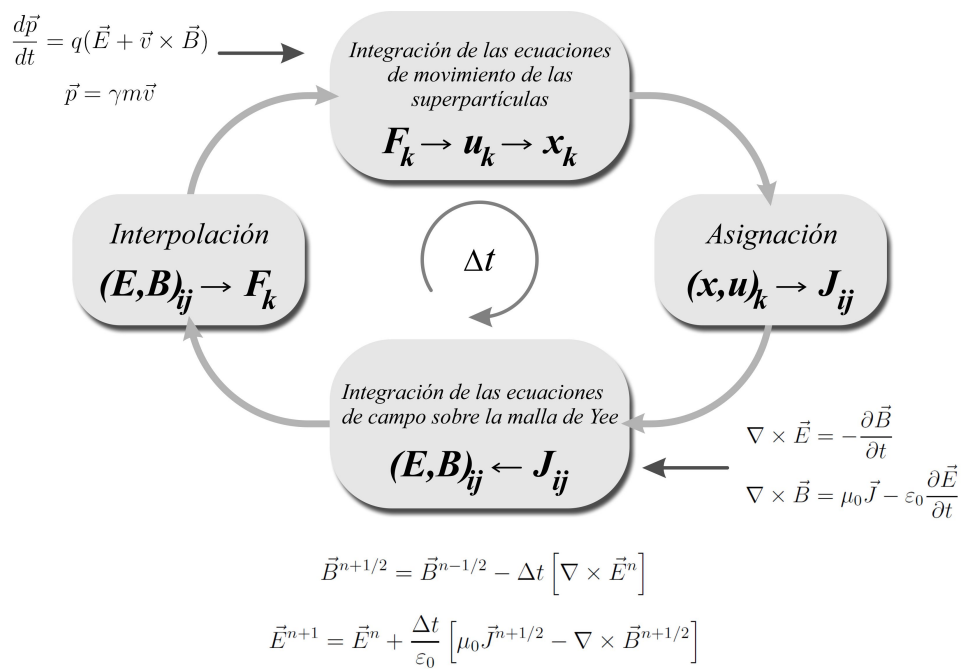


Figura 2.4: Ciclo computacional para un modelo de simulación de partículas basado en el método de *Particle in Cell electromagnético conservativo*.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS DE *SARA* EN APROXIMACIÓN A PARTÍCULA SIMPLE

Los resultados que se presentan en este capítulo comparan la aceleración de un electrón bajo condiciones *SARA*, utilizando un modo transversal eléctrico rectangular TE_{102} y un modo transversal eléctrico cilíndrico TE_{112} , ambos con polarización lineal. Este estudio se hace con el fin de mostrar que la aceleración del electrón tiene lugar en otro tipo de geometrías del sistema físico. Además, la posibilidad que ofrece el modo rectangular de poder manipular la altura de la cavidad L_y , la cual está asociada con el índice "0", permitiría reducir distorsiones del mismo en una eventual inclusión de un blanco de metálico, como ya se mencionó anteriormente. Otra ventaja que se presenta es la configuración del modo rectangular cerca a los bordes de la cavidad, esta no cambia, a diferencia del modo circular, donde el campo eléctrico tiene una dependencia azimutal, esto puede verse en la figura 3.1, donde se muestra la sección transversal de cada modo. Este hecho puede afectar la aceleración de los electrones, impidiendo que estos interactúen efectivamente con la onda electromagnética.

Respecto a la simulación, esta se detiene cuando se presenta una de dos situaciones: i) cuando el electrón se detenga longitudinalmente ($v_z = 0$) debido a la fuerza diamagnética ó ii) que el electrón impacte con las paredes de la cavidad.

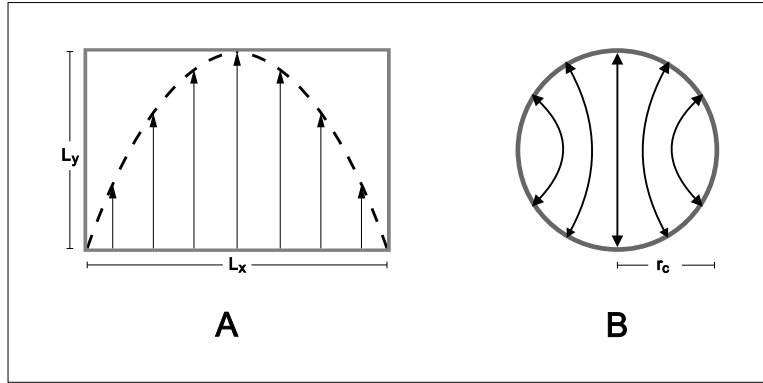


Figura 3.1: Configuración transversal de los modos transversales eléctricos: (A) modo rectangular TE_{102} y (B) modo cilíndrico TE_{112} .

3.1 Parámetros de la Simulación

Para modelar el movimiento del electrón bajo condiciones *SARA* se tomaron en cuenta los siguientes parámetros:

- La amplitud del campo de microondas de 2.45 GHz es $E_{0l} = 14 \text{ kV/cm}$, tanto para el modo de rectangular como para el modo circular.
- Las energías de inyección utilizadas fueron de $W_{INJ} = 10, 12, 14, 15 \text{ keV}$, para cada tipo de geometría. Esto con el fin de analizar el efecto que tiene su variación en las condiciones de resonancia.
- Las longitudes características del resonador rectangular son: ancho $L_X = 7,74 \text{ cm}$, altura $L_Y = 3,82 \text{ cm}$ y largo $L_Z = 20 \text{ cm}$. Para el resonador cíclico son $L_Z = 20 \text{ cm}$ y radio $r_c = 4,54 \text{ cm}$.

Para crear condiciones para la resonancia ciclotrónica electrónica en el volumen de la cavidad, un campo magnetostático no homogéneo se genera mediante un sistema de tres bobinas de corriente d.c. Las componentes del campo magnético generado $B_r(r, z)$ y $B_z(r, z)$ se calculan sobre una malla rectangular de 26×81 nodos formada en un plano (r, z) de la cavidad. Para determinar las componentes B_r y B_z en la posición de los electrones se utiliza el método de interpolación bilineal. Las componentes rectangulares del campo magnético en los puntos dentro de cada celda de la malla se hallan indirectamente: $B_x = (x/r)B_r$ y $B_y = (y/r)B_r$. El perfil de campo magnético se obtiene teniendo en cuenta los siguientes parámetros del sistema de bobinas (ver Tabla 3.1),

donde R_i , R_e , L_b y Z representan el radio interno, el radio externo, el ancho y la posición de cada bobina, respectivamente y J es la densidad de corriente. En la figura 3.2 se muestra el perfil bidimensional del campo magnético en unidades de $B_0 = m_e \omega / e$ ($= 0,0875 T$, en este caso).

Tabla 3.1: Parámetros del sistema de bobinas

Bobina	$R_i(cm)$	$R_e(cm)$	$L_b(cm)$	$J(A/mm^2)$	$z(cm)$
1	6,0	20,0	6,0	1,48	-5,75
2	6,0	20,0	7,5	1,23	9,25
3	6,0	20,0	10,0	1,29	22,75

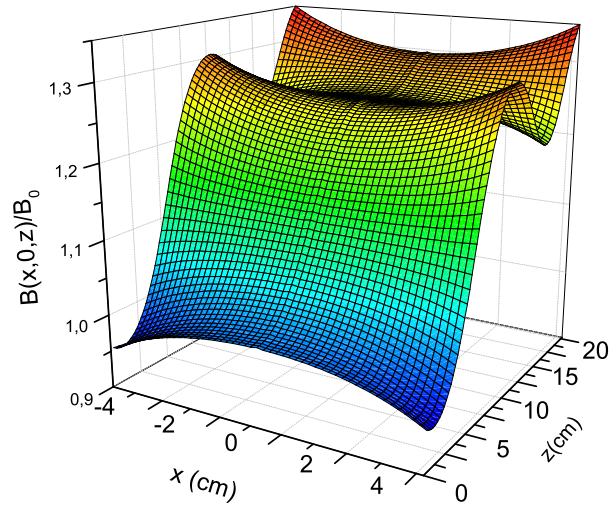


Figura 3.2: Perfil del campo magnético en el plano $Y = 0$.

Los parámetros relevantes para analizar la dinámica del electrón son la energía y el vector velocidad, sin embargo la ganancia efectiva de energía de la partícula por parte del campo de microondas tiene lugar cuando hay interacción resonante entre su movimiento de giro y la onda electromagnética. Es importante subrayar que la autoresonancia ciclotrónica se realiza en campos magnéticos no homogéneos si la diferencia de fase φ entre el campo eléctrico y la velocidad transversal de los electrones está en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$, el cual se denomina banda de aceleración. El caso $\varphi=\pi$ corresponde a resonancia exacta, donde los electrones pueden absorber con mayor efectividad la energía de la onda. Es importante aclarar que como se tiene una onda electromagnética con polarización lineal, y esta puede representarse como la superposición de dos ondas, una onda con polarización circular derecha y otra con polarización circular izquierda, habrán dos diferencias de fase, una fase derecha y otra izquierda, las cuales están asociadas respectivamente con estos tipos de polarización.

3.2 Análisis de Resultados

En las figuras 3.3 y 3.4 se muestra la dependencia de la diferencia de fase derecha $\varphi_{derecha}$ y de la energía del electrón a lo largo de Z para diferentes energías de inyección. Se observa que si el electrón está dentro de la *banda de aceleración* este gana energía; de la figura 3.3 puede verse que en $Z = 10 \text{ cm}$, se presenta un salto de la fase de π , debido a un nodo del campo de microondas, este salto es favorable para la aceleración, ya que permite que el electrón regrese a la *banda de aceleración* para todos los casos. De la gráfica de energía 3.4 se observa que para todas las energías de inyección excepto la de $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ se obtiene una mayor aceleración del electrón para el modo rectangular; sin embargo, el comportamiento para los dos campos de microondas no es muy diferente, a pesar de que después de $Z = 10 \text{ cm}$, en la mayor parte del recorrido, la energía correspondiente al modo rectangular está por encima de la del modo circular, en la etapa final la fase es más cercana a π para el campo de microondas del modo cilíndrico TE_{112} , pudiendo de esta manera alcanzar valores cercanos a los del campo del modo rectangular TE_{102} , esto se debe a la intensidad del campo magnético externo, ya que el electrón puede hacer más giros ciclotrónicos, permitiendo una mayor interacción con la onda electromagnética si la fase es más favorable.

Por otro lado, hay un factor preponderante que impide el avance longitudinal del electrón: la *Fuerza Diamagnética*. Para la energía de inyección de 10 keV se tiene un avance longitudinal de la partícula mucho menor que para los otros casos, esto se debe a que la energía de inyección no es suficiente para contrarrestar el efecto de frenado

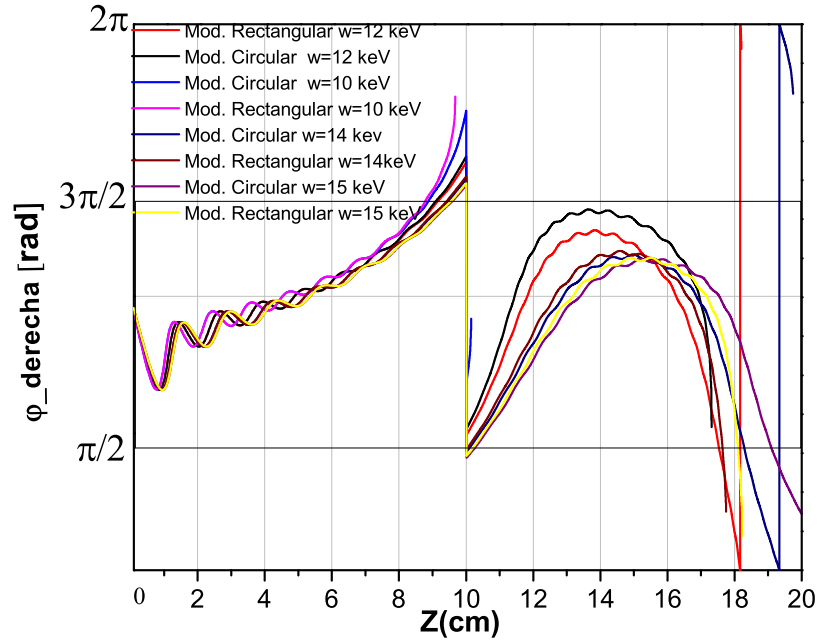


Figura 3.3: Banda de aceleración y comparación de la dependencia de la diferencia de fase φ [rad] con la coordenada longitudinal Z para diferentes energías de inyección: $W_{INJ} = 10$ keV modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12$ keV modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14$ keV modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15$ keV modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).

de la Fuerza Diamagnética, impidiendo que el electrón avance hacia regiones de mayor intensidad de campo magnético, lo cual lleva a poca interacción resonante, esto causa poca ganancia neta de energía, alrededor de 60 keV. Debe tenerse en cuenta también que a medida que aumenta la energía transversal del electrón, aumentará la fuerza diamagnética (Ver ec. A.4).

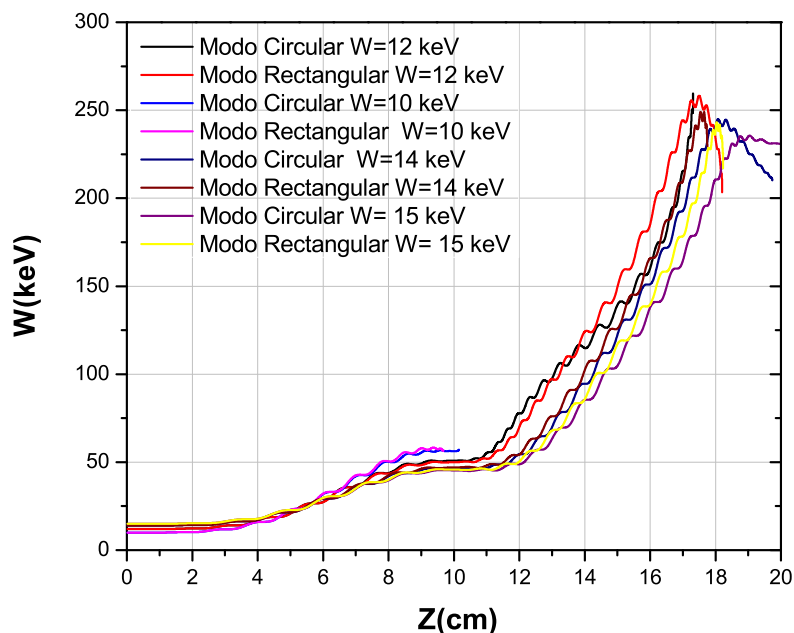


Figura 3.4: Comparación de la evolución espacial de la energía respecto a Z para diferentes energías de inyección: $W_{INJ} = 10 \text{ keV}$ modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14 \text{ keV}$ modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15 \text{ keV}$ modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).

En la figura 3.4 se observa también que para energías de inyección de 15 keV y 14 keV para el modo cilíndrico, el electrón tiene mayor avance longitudinal, es decir, no se frena debido a la fuerza diamagnética, esto se debe a la fuerza producida por el campo magnético de microondas, donde en la etapa final del recorrido se comporta como una fuerza de aceleración longitudinal; a pesar de que el electrón está en regiones de campo magnético más intenso, la ganancia de energía es inferior que para el caso de 12 keV , esto se debe a una redistribución de la energía transversal para que el electrón pueda acelerarse longitudinalmente, ya que el campo magnético estático no hace trabajo sobre la partícula.

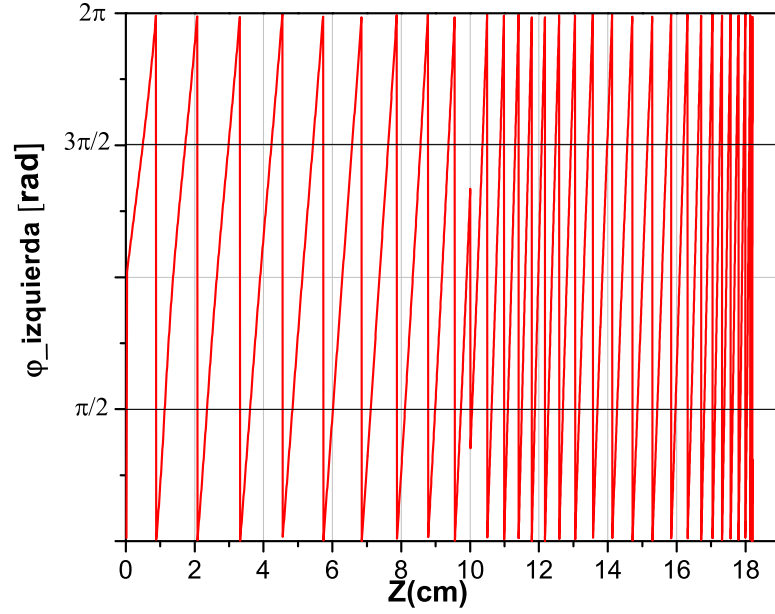


Figura 3.5: Diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y la componente eléctrica del campo de microondas con polarización circular izquierda, para una energía de inyección $W_{INJ}=12$ keV.

Por otra parte, se presentan oscilaciones en la ganancia de energía, esto se debe a la interacción del electrón con la componente de la onda polarizada circular izquierda. En la figura 3.5 se muestra que la fase izquierda $\phi_{izquierda}$ cambia rápidamente entre la banda de aceleración y fuera de esta; originando de esta forma las pequeñas oscilaciones, debido a que la interacción con esta componente es poco efectiva.

En figura 3.6 se compara la velocidad transversal y longitudinal del electrón para cada energía de inyección, del modo circular y rectangular del campo de microondas respecto a la componente longitudinal Z . Puede verse que la energía del electrón al final del recorrido está asociada a su componente transversal, donde para todos los casos la velocidad longitudinal β_z se hace cero, a excepción de la curva correspondiente a la energía de inyección de 15 keV, esto se debe a la fuerza de aceleración longitudinal del campo magnético de microondas en la etapa final del recorrido. Esta característica es favorable en la construcción de aceleradores, porque permite localizar la partícula en un plano específico, donde puede colocarse un blanco metálico para que los electrones impacten y así poder generar rayos X .

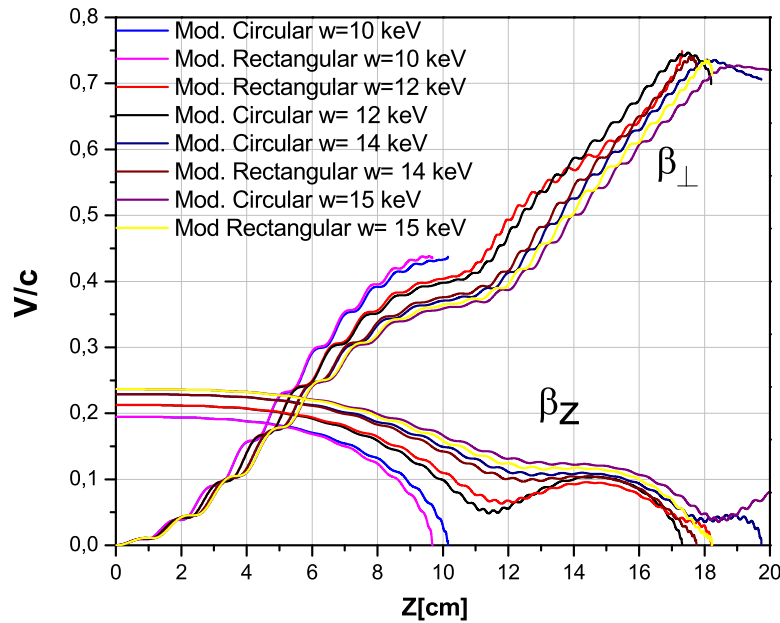


Figura 3.6: Comparación de la dependencia de la velocidad transversal $\beta_{\perp} = v_{bot}/c$ y la velocidad longitudinal $\beta_z = v_z/c$ en unidades de c , con la componente Z : $W_{INJ} = 10 \text{ keV}$ modo rectangular (línea magenta) y modo circular (línea azul), $W_{INJ} = 12 \text{ keV}$ modo rectangular (línea roja) y modo circular (línea negra), $W_{INJ} = 14 \text{ keV}$ modo rectangular (línea vino tinto) y modo circular (línea azul oscuro), $W_{INJ} = 15 \text{ keV}$ modo rectangular (línea púrpura) y modo circular (línea amarilla).

Por último se presenta la trayectoria helicoidal del electrón bajo condiciones $SARA$ (ver figura 3.7) para una energía de inyección de 12 keV , donde se observa que el radio de giro

del electrón en el campo magnético externo aumenta, esto se debe a que el electrón gana energía transversal a medida que avanza en la misma dirección del gradiente de campo magnético. A lo largo de la componente longitudinal Z puede verse que la distancia entre las espiras disminuye, esto se presenta porque el electrón va perdiendo energía a lo largo de Z hasta detenerse para todos los casos excepto para una energía de inyección de 15 keV .

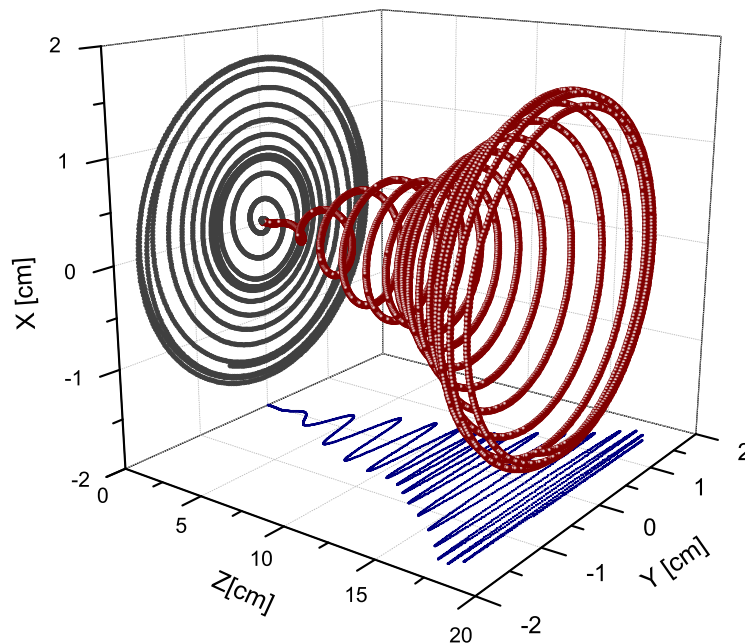


Figura 3.7: Trayectoria helicoidal del electrón en el espacio tridimensional, para el caso de una energía de inyección de $W_{INJ} = 12\text{ keV}$, utilizando un modo transversal eléctrico rectangular TE_{102} .

CAPÍTULO 4

RESULTADOS DE *SARA* PARA UN HAZ DE ELECTRONES INTERACTUANTES

4.1 Parámetros y condiciones para la simulación

Las simulaciones de un haz de electrones bajo condiciones *SARA* se hicieron teniendo en cuenta los siguientes parámetros físicos: la amplitud del campo de microondas de 2.45 GHz con modo TE_{102} en una cavidad rectangular es de $E_{0l} = 14\text{ kV/cm}$. Las microondas se transmiten mediante una guía de onda rectangular con dimensiones transversales de $L_X * L_Y = 7,74\text{ cm} * 3,82\text{ cm}$ y de longitud de $L_{Zg} = 12,34\text{ cm}$. La guía de onda se acopla a una cavidad resonante rectangular de igual sección transversal a la guía y de longitud $L_{zc} = 20\text{ cm}$. Las microondas que viajan por la guía penetran a la cavidad a través de un orificio hecho en la pared lateral de la cavidad (iris); el tamaño del iris es $L_{xiris} * L_{yiris} = 4\text{ cm} * 2\text{ cm}$. Se simulan el campo de microondas en la guía de onda y en la cavidad de manera que el volumen total de simulación corresponde a $L_X * L_Y * L_Z = 7,74 * 3,82 * 32,34\text{ cm}^3$, donde $L_z = L_{zg} + L_{zc}$. Se utiliza el mismo perfil de campo magnético estático no-homogéneo externo utilizado en la simulación para una sola partícula, esto con el fin de crear las condiciones de resonancia necesarias para acelerar los electrones y poder comparar con la simulación de partícula simple y así validar la simulación autoconsistente. Se estudia la dinámica de haces de electrones con corrientes de 1 A y 5 A , cuyas densidades electrónicas son $n=8.5 \times 10^9\text{ cm}^{-3}$ y $n = 4,25 \times 10^{10}\text{ cm}^{-3}$ respectivamente; el radio de cada haz es $R_{BEAM} = 0.2\text{ cm}$ y la energía de inyección longitudinal en $Z=0\text{ cm}$ es de $W_{INJ}=12\text{ keV}$. Para disminuir el tiempo de cómputo, las partículas reales del haz se reúnen en

superpartículas (SP), donde el número total de superpartículas inyectadas por ciclo de microondas es igual a 4.25×10^3 . El tiempo de simulación es 10 ciclos de microondas, que es el tiempo necesario para que los electrones lleguen al blanco; para el caso de aproximación de una partícula simple la simulación se detiene cuando la velocidad longitudinal es nula, que es aproximadamente 12 ciclos de microondas.

4.2 Comparación *SARA* autoconsistente ($I = 1$ A) y *SARA* para una sola partícula

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra la dependencia de la diferencia de fase φ y de la energía de las partículas a lo largo del eje de la cavidad (posiciones longitudinales Z) para un haz de 1 A de corriente (puntos rojos). La línea verde corresponde a los resultados de las simulaciones en aproximación a una sola partícula. Al inicio del recorrido los electrones comienzan con fase aleatoria, luego se observa un efecto de autofocalización, que sincroniza el movimiento giratorio del electrón con el movimiento rotacional de la onda de microondas. En la figura 4.1 se muestra que en los primeros 4 cm las diferencias de fase para los electrones son de aceleración y cercanas a la resonancia exacta π ; sin embargo, la absorción neta de energía es casi cero (ver figura 4.2) debido a que el campo eléctrico de microondas presenta baja amplitud en esa región, además los electrones comienzan en fase aleatoria, esto también influye en la ganancia neta de energía. Alrededor de la posición $Z = L_{zc}/2 = 10$ cm se observa una disminución de energía que está asociada con un cambio abrupto de la fase, pues el campo de microondas cambia su dirección en esta posición y por esto en este punto $E_{0l} = 0$. Cuando los electrones pasan a través de este punto se tiene un cambio en π de la fase del campo de microondas. Al comparar los resultados de simulación del haz con los datos obtenidos para una sola partícula se puede ver diferencias apreciables que se manifiestan desde la posición de $Z = 10$ cm, donde el haz comienza a perder su focalización. Estas diferencias están asociadas al campo eléctrico autoconsistente de los electrones. Por otra parte, en la figura 4.3 se muestra la dependencia de las componentes transversal y longitudinal de la velocidad de la partícula respecto a la posición Z , donde se observa una disminución de la velocidad longitudinal β_z y un crecimiento de la velocidad transversal de los electrones β_{\perp} , en unidades de velocidad de la luz. Los electrones pierden velocidad longitudinal debido a la fuerza diamagnética, que es una fuerza de frenado asociada con la no homogeneidad del campo magnético externo; a medida que los electrones avanzan hacia regiones de campo magnético más intenso, la componente β_z disminuye. Sin embargo, como la fuerza magnética debido al campo magnético no hace trabajo

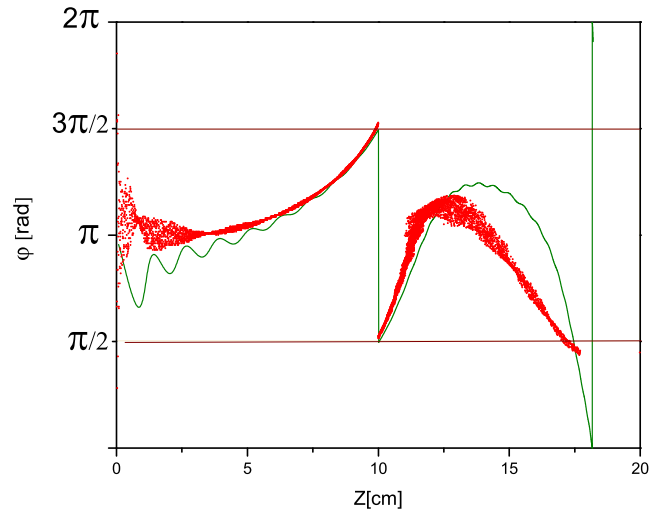


Figura 4.1: Banda de aceleración y comparación de la dependencia de la diferencia de fase φ [rad] con la coordenada longitudinal Z : aproximación a una sola partícula (línea verde) y para un haz de 1 A de corriente (puntos rojos) para 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.

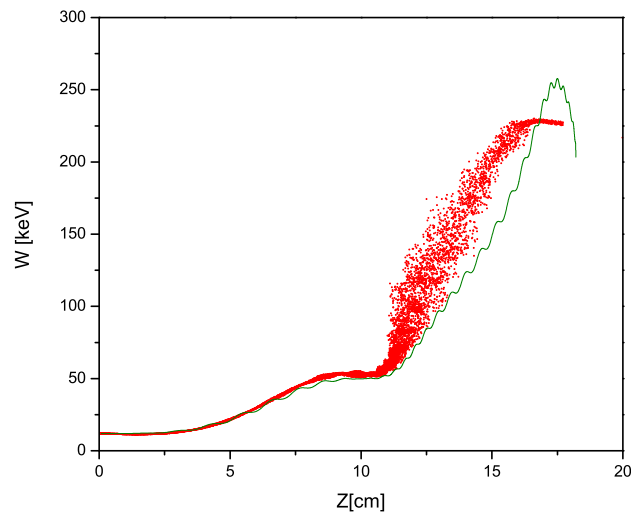


Figura 4.2: Comparación de la evolución espacial de la energía: en aproximación a una sola partícula (línea verde) y para un haz de 1A de corriente (puntos rojos) en 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.

sobre los electrones, esa disminución se ve reflejada en un crecimiento de la componente transversal.

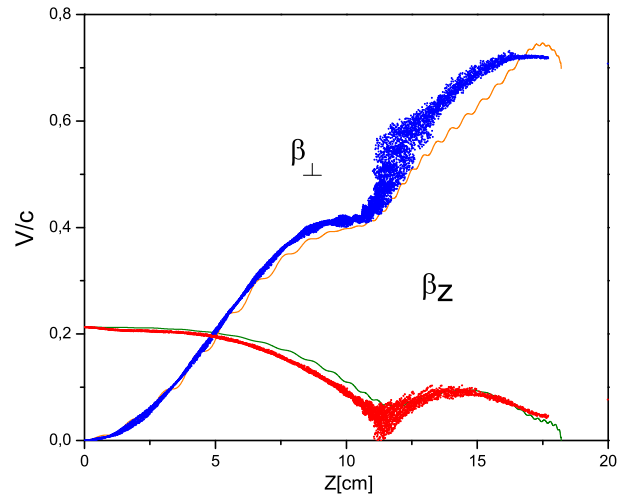


Figura 4.3: Comparación de la dependencia de la velocidad transversal y velocidad longitudinal en unidades de c , con la posición longitudinal Z : en aproximación a una sola partícula (línea naranja y línea verde) y para un haz de electrones de 1 A de corriente (puntos azules y rojos), en 12 ciclos de microondas, usando una onda electromagnética modo TE_{10p} rectangular polarizada linealmente.

4.3 Efecto del Campo Eléctrico Autoconsistente

Con el fin de esclarecer la acción del campo eléctrico autoconsistente, se simula un haz de electrones de 5 A de corriente. Los datos de las simulaciones se presentan a continuación (figuras 4.4, 4.5 y 4.6). En la confrontación de estos parámetros para los haces de 1 A y 5 A se pueden ver varias diferencias importantes. La focalización de la fase de los electrones para el haz de 5 A (la figura 4.4) sucede con menor efectividad que para el haz de 1 A , a pesar de esto, la longitud de esta focalización es del mismo orden. La disminución de la efectividad de focalización se debe a la influencia del campo eléctrico autoconsistente que evidentemente es mucho mayor para el caso del haz de 5 A . En la posición de $Z = 7.5\text{ cm}$ los electrones empiezan a salir de la banda de aceleración, ya que a medida que estos avanzan en el campo magnético creciente se frenan debido a la fuerza diamagnética; la densidad de los electrones aumenta y consecuentemente

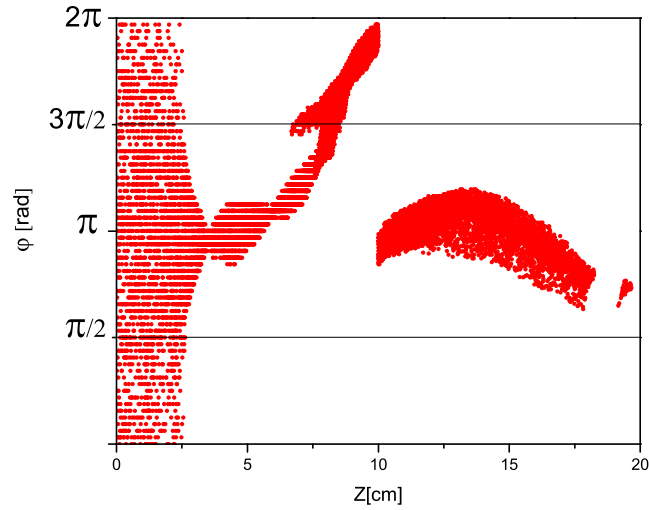


Figura 4.4: Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 5.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 10 ciclos de microondas.

crece el campo eléctrico autoconsistente, haciendo que los electrones se aceleren en la dirección radial debido a una fuerza eléctrica de repulsión, obligándolos así a salir de la banda de aceleración. El efecto del campo autoconsistente no es lineal: los electrones en la posición $Z = 7.5 \text{ cm}$ salen de la banda de aceleración, sin embargo, algunos de ellos empiezan a moverse en dirección contraria, encontrándose de nuevo en una diferencia de fase de aceleración en su retorno (ver la figura 4.6 (la curva β_z) y la figura 4.4); esto va acompañado por un crecimiento de sus energías (alrededor de $K = 40 \text{ keV}$) que se puede ver en la figura 4.5. En la figura 4.4 se observa que debido al cambio brusco de la fase en el punto donde está localizado el nodo del campo electromagnético, los electrones de la parte principal del haz regresan a la banda de aceleración, este hecho favorece la absorción de energía y es una de las principales diferencias respecto a los resultados del haz de 1 A, donde sucede el cambio abrupto de la fase afecta las condiciones de resonancia; el incremento en la energía de los electrones es aproximadamente 200 keV para el haz de 5 A (figura 4.5). En la figura 4.6 se observa un crecimiento de la velocidad transversal y un comportamiento cuasi constante de la componente longitudinal de la velocidad. El campo eléctrico autoconsistente en el caso de 5 A hace que una parte del haz se mueva en dirección contraria al crecimiento de Z , mientras que otra parte de los electrones se aceleran longitudinalmente llegando casi al extremo de la cavidad ($Z = 20 \text{ cm}$), haciéndolo aproximadamente en 10 ciclos de microondas y no en 12 ciclos como en el caso del haz de 1 A.

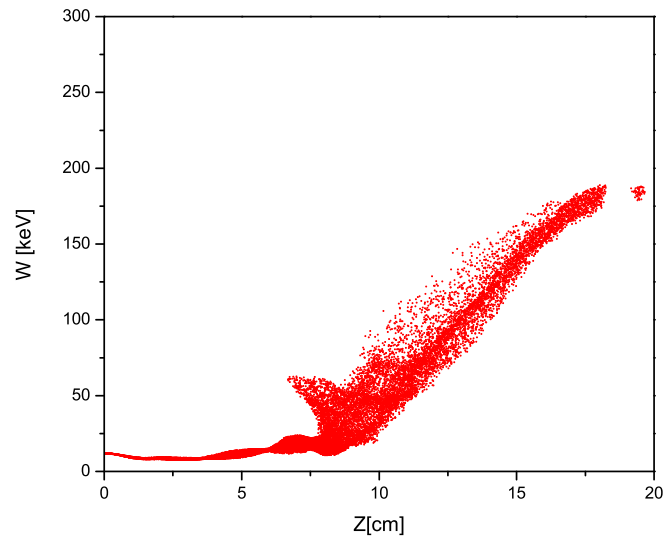


Figura 4.5: Energía de los electrones del haz de 5.0 A después de 10 ciclos de microondas.

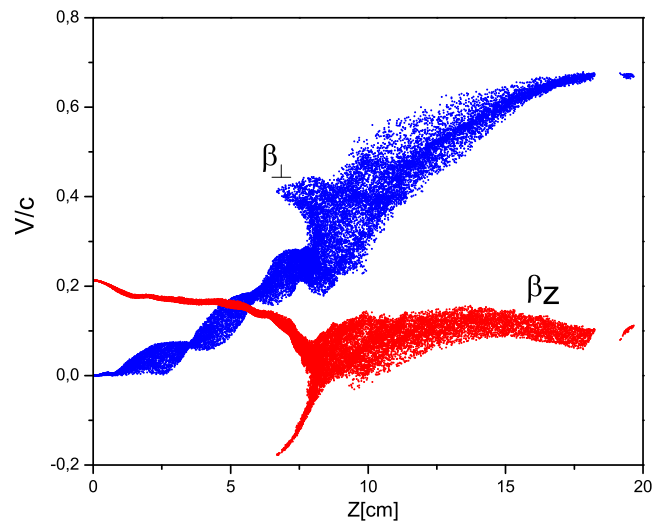


Figura 4.6: Componentes de la velocidad transversal y longitudinal para el haz de 5 A después de 10 ciclos de microondas, en unidades de c .

La energía de aceleración obtenida al final para el haz de 5 A (figura 4.5) es menor que para el haz de 1 A (figura 4.2), a pesar de que los electrones en el caso de 5 A hacen mayor número de giros ciclotrónicos y su diferencia de fase se encuentre cercana a π .

Esto está asociado con el campo autoconsistente, ya que causa una disminución de la amplitud del campo eléctrico total, esto puede verse en la figura 4.7 donde se muestra el campo eléctrico total en el plano longitudinal XZ , donde de 0 cm a 12.24 cm se muestra el campo eléctrico en la guía de onda y de 12.24 cm a 32.24 cm en la cavidad resonante.

El campo producido por los electrones produce una distorsión el campo de microondas, esto hace que la amplitud de campo eléctrico disminuya en la cavidad resonante, afectando de esta forma la aceleración del haz. Al comparar la amplitud del campo eléctrico para el haz de 1 A en el plano longitudinal XZ (ver figura 4.8) puede verse que el modo de microondas se perturba poco, siendo un factor importante que condiciona la ganancia de energía del haz. En la figura 4.8 también ocurre una disminución en la amplitud del campo eléctrico, aproximadamente en 2 kV/cm , esta disminución se ve reflejada en menos ganancia de energía, si se compara con los resultados de partícula simple (figura 4.5).

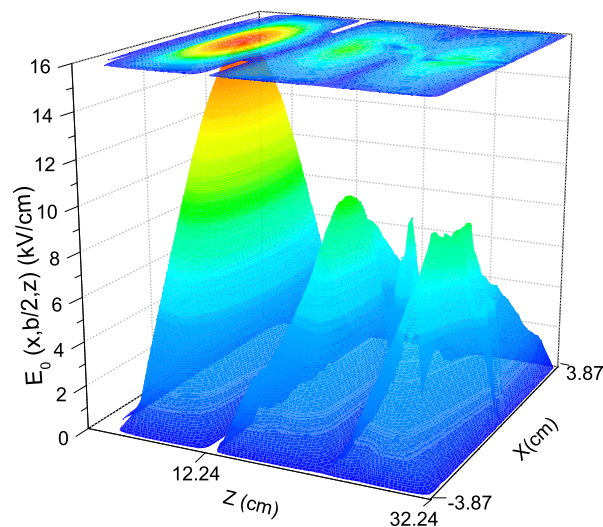


Figura 4.7: Componente longitudinal del campo eléctrico total para el haz de 5 A después de 10 ciclos de microondas en el plano $Y = b/2$, donde de $Z = 0\text{ cm}$ a $Z = 12.24\text{ cm}$ corresponde a la guía de onda y de $Z = 12.24\text{ cm}$ a $Z = 32.24\text{ cm}$ corresponde a la cavidad resonante.

En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11, se presentan las gráficas del campo eléctrico total en los planos transversales $Z = d/4$, $Z = d/2$ y $Z = 3d/4$ respectivamente, para el haz de 5 A :

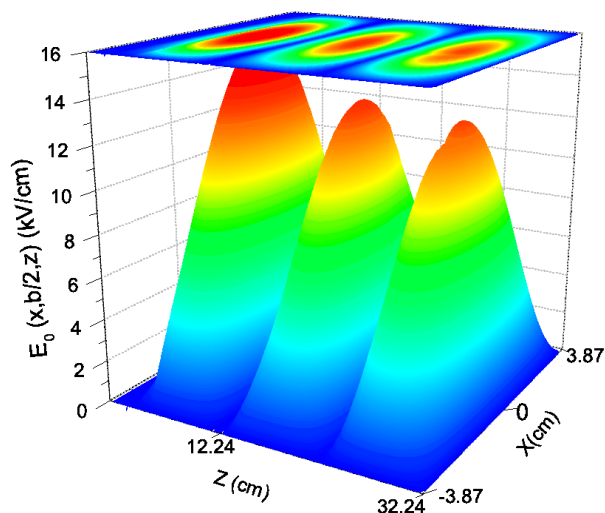


Figura 4.8: Componente longitudinal del campo eléctrico total para el haz de 1 A después de 12 ciclos de microondas en el plano $Y = b/2$, donde de $Z = 0 \text{ cm}$ a $Z = 12.24 \text{ cm}$ corresponde a la guía de onda y de $Z = 12.24 \text{ cm}$ a $Z = 32.24 \text{ cm}$ corresponde a la cavidad resonante.

en la figura 4.9, se aprecia un pico el cual está asociado con el campo autoconsistente, este campo causa una aceleración longitudinal de las partículas en la primera parte del recorrido, previniendo que haya suficiente interacción resonante, teniendo como consecuencia una ganancia mínima de energía (ver figura 4.5).

La figura 4.10 corresponde a la componente transversal del campo eléctrico total en el nodo del campo de microondas ($Z = d/2$), en este plano es donde se observa la mayor influencia del campo autoconsistente. La magnitud de este campo es del orden de la amplitud de la onda electromagnética, además en este punto se presenta desfocalización del haz, ya que hay una fuerza eléctrica repulsión, la cual acelerará los electrones en la dirección radial, otro factor que está asociado con la desfocalización del haz es el salto de fase del modo de microondas TE_{102} .

La focalización del haz también se ve afectada por el campo magnético externo que causa acumulación de carga prácticamente en la etapa final del recorrido, los electrones empiezan a disminuir su velocidad longitudinal considerablemente, lo cual hace que estos empiecen a repelerse unos a otros causando dispersión de partículas, en la figura 4.11 se aprecia este efecto en la amplitud del campo eléctrico, ya no se presenta un pico asociado al haz como en las figuras 4.9 y 4.10, sino que este se achata debido a la dispersión del haz y al campo magnético producido por las bobinas.

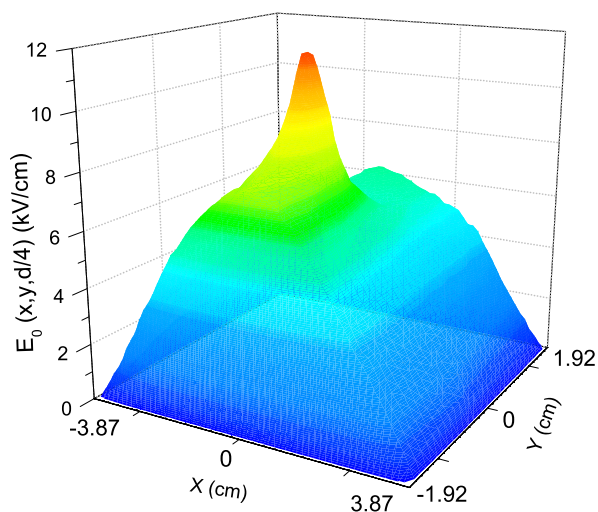


Figura 4.9: Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = d/4$ para el haz de 5 A.

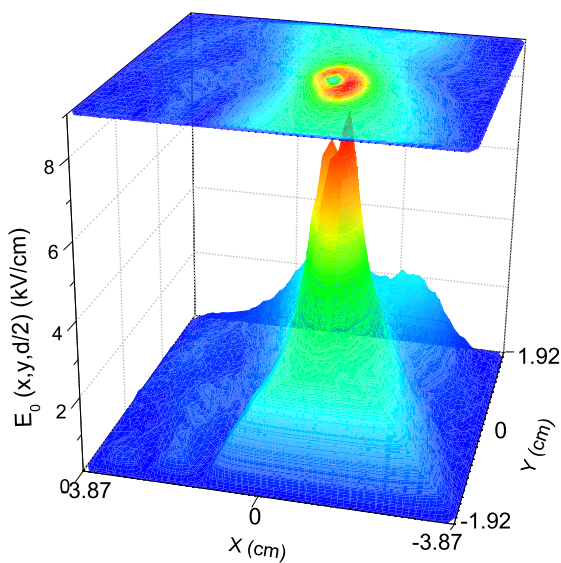


Figura 4.10: Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = d/2$ para el haz de 5 A.

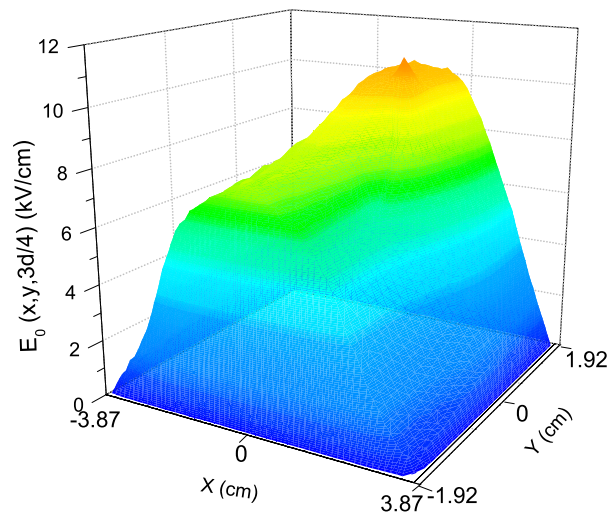


Figura 4.11: Componente transversal de campo eléctrico total después de 10 ciclos de microondas en el plano $Z = 3d/4$ para el haz de 5 A.

CONCLUSIONES

- Se estudió la posibilidad de aceleración autoresonante de electrones mediante el mecanismo *SARA* en cavidades resonantes rectangulares, excitadas en un modo TE_{102} con polarización lineal.
- Se mostró que la aceleración del electrón se produce por la componente de la onda con polarización circular derecha. La influencia de la componente circular izquierda consiste en una modulación pequeña en la energía del electrón.
- No se observan diferencias considerables al utilizar un modo rectangular TE_{102} y un modo cilíndrico TE_{112} , esto se debe a la similitud entre las configuraciones de los campos con polarización circular derecha.
- Se muestra mediante los resultados obtenidos con haces de diferentes energías de inyección, que la fuerza diamagnética y la fuerza producida por el campo magnético transversal de la onda afectan considerablemente la autoresonancia ciclotrónica.
- La actuación desaceleradora de la fuerza diamagnética y la permanencia de la fase del movimiento en cercanía de la resonancia exacta no garantiza una ganancia de energía máxima.
- Uno de los efectos relevantes del campo eléctrico autoconsistente es el de acelerar los electrones longitudinalmente.
- La focalización del haz de electrones se ve afectada por los siguientes factores: i) el campo eléctrico autoconsistente, que causa una fuerza de repulsión entre los electrones, especialmente en el inicio del recorrido y en el punto de salto de fase, donde el campo electromagnético es ausente. ii) La fuerza diamagnética, que frena los electrones longitudinalmente y consecuentemente aumenta la densidad del haz y la fuerza de repulsión radial entre los electrones.

- Un aumento de la magnitud de la corriente de los haces electrónicos aumenta la influencia en el efecto del campo eléctrico autoconsistente sobre las condiciones de autoresonancia, donde se presenta: i) distorsión del campo de microondas y disminución de la amplitud del campo eléctrico total, ii) mayor aceleración longitudinal de una parte de los electrones.
- El iris puede afectar las condiciones de resonancia, ya que los parámetros que caracterizan el campo de microondas dependen de su tamaño respecto a la longitud de onda del campo electromagnético TE_{102} . Esto es objeto de estudio futuro, pues una forma y dimensiones óptimas del iris optimizan el factor de calidad de la cavidad resonante, pudiendo de esta manera ahorrar energía electromagnética en el funcionamiento de una posible fuente autoresonante de rayos X basada en *SARA*.

APÉNDICES

A.1 Fuerza Diamagnética

Considerando un campo magnético axialmente simétrico ($B_\theta = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$), en el cual su dirección está a lo largo de la componente longitudinal, elegida como z , y donde su magnitud aumenta a lo largo de z . Como se muestra en la Figura A.1 Se puede obtener

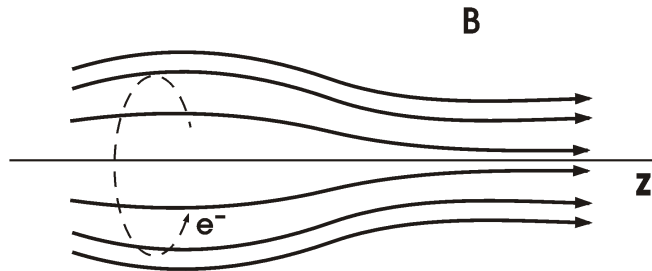


Figura A.1: Campo magnético inhomogéneo axialmente simétrico a lo largo de z

B_r de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.1})$$

Si $\partial B_z/\partial z$ está dado en $r = 0$ y no varía mucho con r , se puede aproximar a la siguiente expresión

$$rB_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq -\frac{1}{2}r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0},$$

$$B_r = -\frac{1}{2}r \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}$$
(A.2)

Las componentes de la fuerza de Lorentz son:

$$F_r = -ev_\theta B_z,$$

$$F_\theta = -e(v_z B_r - v_r B_z),$$

$$F_z = ev_\theta B_r.$$
(A.3)

El interés en este caso, va a estar en la componente longitudinal de la fuerza magnética, utilizando la ecuación (A.10), se obtiene:

$$F_z = \frac{1}{2}ev_\theta r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Promediando ahora sobre un giro. Por simplicidad se considera que el electrón está girando alrededor del eje del campo magnético, es decir el eje z . Entonces $v_\theta = v_\perp$ es una constante durante un giro. Si $r = r_L$, el promedio de la fuerza magnética longitudinal es:

$$\overline{F}_z = -\frac{1}{2}ev_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2}e \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m_e v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$
(A.4)

Donde $r_L = v_\perp/\omega_c$ es el radio de Larmor, y ω_c es la frecuencia ciclotrónica del electrón. Definiendo el momento magnético asociado al giro del electrón se tiene:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}.$$
(A.5)

Entonces la ec (A.12) se puede escribir como:

$$\overline{F}_z = -\mu \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$
(A.6)

Este es un ejemplo específico de la fuerza sobre una partícula diamagnética.

A.2 Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas *DFDT-UPML*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} K_y & 0 & 0 \\ 0 & K_z & 0 \\ 0 & 0 & K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Donde,

$$\check{D}_x = \epsilon \frac{S_z}{S_x} \check{E}_x, \quad \check{D}_y = \epsilon \frac{S_x}{S_y} \check{E}_y, \quad \check{D}_z = \epsilon \frac{S_y}{S_z} \check{E}_z \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} K_y & 0 & 0 \\ 0 & K_z & 0 \\ 0 & 0 & K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} - \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Donde,

$$\check{B}_x = \mu \frac{S_z}{S_x} \check{H}_x, \quad \check{B}_y = \mu \frac{S_x}{S_y} \check{H}_y, \quad \check{B}_z = \mu \frac{S_y}{S_z} \check{H}_z \quad (\text{A.10})$$

A partir de A.7 se tiene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} K_y D_x + \frac{\sigma_y}{\epsilon} D_x \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} K_z D_y + \frac{\sigma_z}{\epsilon} D_y \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} K_x D_z + \frac{\sigma_x}{\epsilon} D_z \quad (\text{A.13})$$

la ecuación A.12 puede aproximarse en diferencias finitas como:

$$\begin{aligned} & \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} = \\ & K_y(j) \frac{D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) - D_x^n(i+1/2, j, k)}{\Delta t} + \frac{\sigma_y(j)}{\epsilon} \frac{D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) + D_x^n(i+1/2, j, k)}{2} \\ \implies & \frac{K_y(j)}{\Delta t} \left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)} \right] D_x^n(i+1/2, j, k) - \frac{K_y(j)}{\Delta t} \left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)} \right] D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = \\ & \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} \end{aligned}$$

Reordenando los términos

$$\begin{aligned}
 D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_x^n(i+1/2, j, k) \\
 &+ \frac{\Delta t}{K_y(j) \left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} \left[\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \right. \\
 &\left. \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} \right]
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\check{D}_y = \epsilon \frac{S_x}{S_y} \check{E}_y \rightarrow K_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\sigma_y}{\epsilon} D_y = \epsilon \left[K_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\sigma_x E_y}{\epsilon} \right]$$

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} E_x^n(i+1/2, j, k) + \frac{K_x(i+1/2)}{\epsilon k_z(k)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) \\
 &- \frac{K_x(i+1/2)}{\epsilon k_z(k)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_x^n(i+1/2, j, k)
 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 D_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_y^n(i+1/2, j, k) \\
 &+ \frac{\Delta t}{k_z(k) \left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} \left[\frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k-1/2)}{\Delta z} - \right. \\
 &\left. - \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i-1/2, j+1/2, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(k)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} E_y^n(i, j+1/2, k) + \frac{K_y(i+1/2)}{\epsilon k_x(i)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_y^{n+1}(i, j+1/2, k) \\
 &- \frac{K_y(j+1/2)}{\epsilon k_x(i)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_y^n(i, j+1/2, k)
 \end{aligned}$$

y

$$D_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_z^n(i, j, k + 1/2) + \frac{\Delta t}{k_x(i) \left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} \left[\frac{H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) - H_y^{n+1/2}(i - 1/2, j, k + 1/2)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j - 1/2, k + 1/2)}{\Delta y} \right]$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} E_z^n(i, j, k + 1/2) + \frac{K_z(k + 1/2)}{\epsilon k_y(j)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) - \frac{K_z(k + 1/2)}{\epsilon k_y(j)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_z^n(i, j, k + 1/2)$$

Las ecuaciones que determinan la evolución del campo magnético se obtienen de un modo similar. Para la componente x se obtiene:

$$B_x^{n+1}(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - \frac{\Delta t}{k_y(j + 1/2) \left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} \left[\frac{E_z y^n(i, j + 1, k + 1/2) - E_z^n(i, j, k + 1/2)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i, j + 1/2, k + 1) - H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k)}{\Delta z} \right]$$

$$H_x^{n+1}(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) + \frac{K_x(i)}{\mu k_z(k + 1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} B_x^{n-1}(i, j + 1/2, k + 1/2) - \frac{K_x(i)}{\mu k_z(k + 1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} B_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2)$$

Para la componente y :

$$\begin{aligned}
 H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} H_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \\
 &+ \frac{K_y(j)}{\mu K_x(i+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \\
 &- \frac{K_y(j)}{\mu K_x(i+1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2)
 \end{aligned}$$

y finalmente para la componente z

$$\begin{aligned}
 B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \\
 &+ \frac{\Delta t}{K_x(i+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} \left[\frac{E_y^n(i+1, j+1/2, k) - E_y^n(i, j+1/2, k)}{\Delta x} - \right. \\
 &\left. \frac{E_x^n(i+1/2, j+1, k) - E_x^n(i+1/2, j+1, k)}{\Delta y} \right]
 \end{aligned}$$

De otro lado:

$$\check{B}_z = \mu \frac{S_y}{S_z} \check{H}_z \quad \Rightarrow \quad K_z \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z}{\epsilon} B_z = \mu \left[K_y \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\sigma_y}{\epsilon} H_z \right]$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \\
 &+ \frac{K_z(k)}{\mu K_y(j+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \\
 &- \frac{K_y(j)}{\mu K_y(j+1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k)
 \end{aligned}$$

A.3 Anexo Esquema *Zigzag*

A continuación se presentan los diferentes casos de las posiciones de las partículas en un intervalo de tiempo que va de t a $t + \Delta t$ para el esquema *zigzag* tridimensional.

Tabla A.1: Casos posibles de las posiciones de las superpartículas para computar el flujo de carga eléctrica mediante el esquema *zigzag*

$i_1 \neq i_2$	$j_1 \neq j_2$	$k_1 \neq k_2$
$i_1 = i_2$	$j_1 \neq j_2$	$k_1 \neq k_2$
$i_1 \neq i_2$	$j_1 = j_2$	$k_1 \neq k_2$
$i_1 \neq i_2$	$j_1 \neq j_2$	$k_1 = k_2$
$i_1 = i_2$	$j_1 = j_2$	$k_1 \neq k_2$
$i_1 = i_2$	$j_1 \neq j_2$	$k_1 = k_2$
$i_1 \neq i_2$	$j_1 = j_2$	$k_1 = k_2$
$i_1 = i_2$	$j_1 = j_2$	$k_1 = k_2$

El flujo de carga eléctrica entre los puntos inicial (x_1, y_1, z_1) y final (x_2, y_2, z_2) del movimiento de la superpartícula se obtiene a partir de las siguientes expresiones, donde se utiliza el punto de relevo (x_r, y_r, z_r) para su cómputo,

$$\begin{aligned}
 F_{\xi_1} &= q \frac{\xi_r - \xi_1}{\Delta t}, \\
 F_{\xi_2} &= q \frac{\xi_2 - \xi_r}{\Delta t} qv_\xi - F_{\xi_1},
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

cada segmento del flujo de carga se asigna a los puntos adyacentes de la malla a través de los factores de forma de primer orden, los cuales se definen en los puntos medios $\frac{(x_r, y_r, z_r) + (x_1, y_1, z_1)}{2}$ y $\frac{(x_2, y_2, z_2) + (x_r, y_r, z_r)}{2}$.

$$\begin{aligned}
 W_{\xi_1} &= \frac{\xi_1 + \xi_r}{2\Delta\xi} - m_1, \\
 W_{\xi_2} &= \frac{\xi_r + \xi_2}{2\Delta\xi} - m_2,
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

donde m_1 y m_2 corresponden a $m_1 = i_1, j_1, k_1$ y $m_2 = i_2, j_2, k_2$. Los flujos de carga

eléctrica \vec{F}_1 y \vec{F}_2 se asignan a los 24 puntos de la malla donde $l = 1, 2$ como sigue,

$$\begin{aligned}
J_x(i_l + 1/2, j_l, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} (1 - W_{yl}) (1 - W_{zl}), \\
J_x(i_l + 1/2, j_l + 1, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} W_{yl} (1 - W_{zl}), \\
J_x(i_l + 1/2, j_l, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} (1 - W_{yl}) W_{zl}, \\
J_x(i_l + 1/2, j_l + 1, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} W_{yl} W_{zl}, \\
J_y(i_l, j_l + 1/2, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl} (1 - W_{xl}) (1 - W_{zl}), \\
J_y(i_l + 1, j_l + 1/2, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl} W_{xl} (1 - W_{zl}), \\
J_y(i_l, j_l + 1/2, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl} (1 - W_{xl}) W_{zl}, \\
J_y(i_l + 1, j_l + 1/2, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl} W_{xl} W_{zl}, \\
J_z(i_l, j_l, k_l + 1/2) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl} (1 - W_{xl}) (1 - W_{yl}), \\
J_z(i_l + 1, j_l, k_l + 1/2) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl} W_{xl} (1 - W_{yl}), \\
J_z(i_l, j_l + 1, k_l + 1/2) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl} (1 - W_{xl}) W_{yl}, \\
J_z(i_l + 1, j_l + 1, k_l + 1/2) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl} W_{xl} W_{yl}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Las densidades de corriente totales se obtienen mediante la superposición del flujo de carga eléctrica contribuido por cada superpartícula.

El procedimiento de implementación del esquema *zigzag* se describe a través de los siguientes tres pasos:

(i) Cómputo del punto de relevo (x_r, y_r, z_r) mediante:

$$\xi_r = \min \left[\min(m_1 \Delta \xi, m_2 \Delta \xi) + \Delta \xi, \max \left\{ \max(m_1 \Delta \xi, m_2 \Delta \xi), \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right\} \right]. \tag{A.17}$$

(ii) Cómputo de los flujos de carga \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

(ii) Asignación de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 a los puntos adyacentes a la superpartícula en la malla utilizando los factores de forma definidos en los puntos medios.

REFERENCIAS

- [1] R. Geller. *Electron cyclotron resonance ion sources and ECR plasmas*, Institute of Physics Publishing Ltd (1996).
- [2] F.F. Chen, J.P. Chang. *Lectures notes on principles of plasma processing*, Kluwer Academic- Plenum Publishers (2003).
- [3] H. R. Gardner, T. Ohkawa, A. M. Howald, A. w. Leonard, L. S. Peranich and J.R D'Aoust, *An inexpensive x-ray source based on an electron cyclotron*, Rev. Sci. Instrum., **61 (2)** (1990).
- [4] A. G. Marshall, C. L. Hendrickson and G. S. Jackson, *Fourier transform ion cyclotron resonance mass spectrometry: A primer*, Mass Spectrometry Rev., **17 (1-35)** (1998).
- [5] R. Baskaran and T.S. Selvakumaran *Studies on enhancement of x-ray flux in the compact electron cyclotron resonance plasma x-ray source*, Rev. Sci, Instrum, **71 (2)** (2000).
- [6] A.A. Kolomenskii and A. N. Levedek, Sov. Phys. Dokl.,**7**, 492 (1962).
- [7] V. Ya. Davydovskii, *The possibility of accelerating charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field*, Sov. Phys. JETP.,**16**, 629 (1963).
- [8] C. Roberts and S. Buchsbaum, *Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field*, Phys. Rev.,**135**, A381 (1964).
- [9] H. R. Jory and A. W. Trivelpiece, *Charged-particle motion in large-amplitude fields*, J. Appl. Phys.,**39**, 3053 (1968).
- [10] A. Loeb and L. Friedland, *Autoresonant laser accelerator*, Phys. Rev. A, **33**, 1828 (1986).

- [11] A. Loeb, L. Friedland and S. Eliezer, *Autoresonant laser acceleration of guided "quasineutral" electrons-positrons beams*, Phys. Rev. A, **35**, 1692 (1987).
- [12] K. H. Tsui, *Electron beam acceleration by cyclotron-autoresonance interaction*, Phys. Rev. E, **51**, 649 (1995).
- [13] Y. Salamin, F. Faisal and C. Keitel, *Exact analysis of ultrahigh laser-induced acceleration of electrons by cyclotron autoresonance*, Phys. Rev. A, **62**, 053809 (2000).
- [14] R. Pakter, I. L. Caldas, F. Couto, T. Caetano and F. B. Rizzato, *Chaotic dynamics induced by space-charge Waves in cyclotron resonance accelerators*, Phys. Rev. E, **54**, 4202 (1996).
- [15] W. H. Miner, P. Vitello and A. T. Drobot, *Theory and numerical simulation of a TE_{111} gyroresonant accelerator*, IEEE Trans. Micr. Tech., **MTT-32**, 1293 (1984).
- [16] D. B. McDermott, D. S. Furuno and N. C. Luhmann, Jr., *Production of relativistic, rotating electron beams by gyroresonant RF acceleration in a TE_{111} cavity*, J. Appl. Phys., **58**, 4501 (1985).
- [17] Q. F. Li, S. Y. Park and J. L. Hirshfield, *Theory of gyrotron traveling-wave amplifiers*, IEEE Trans. Micr. Tech., **MTT-34**, 1044 (1986).
- [18] A. P. Ishkov, *Izv. Vusov, Fisica*, **2**, 176 (1970).
- [19] C. Chen, *Phys. fluids B*, **3**, 2933 (1991).
- [20] K. S. Golovanivsky, *Autoresonant acceleration of electrons at nonlinear ECR in a magnetic field which is smoothly growing in time*, Phys. Scr., **22**, 126 (1980).
- [21] K. S. Golovanivsky, *Gyromagnetic autoresonance at ultrarelativistic energies*, Phys. Scr., **25**, 491 (1982).
- [22] K. S. Golovanivsky, *The gyromagnetic autoresonance*, IEEE Trans. Plasma Sci., **PS-11**, 28 (1983).
- [23] K. S. Golovanivsky, *Gyromagnetic autoresonance. Phase stability in a photon regime*, Phys. Scr., **29**, 464 (1984).
- [24] K. Golovanivsky, V. Dougar-Jabon and D. Reznikov, *Phys. Rev. E*, **52**, 2969 (1995).
- [25] O. Gal, *GYRAC A compact, cyclic electron accelerator*, IEEE Trans. Plasma Sci., **17**, **622** (1989).

- [26] B. Hafizi, P. Sprangle and J. L. Hirshfield, *Electron beam quality in a cyclotron autoresonance accelerator*, Phys. Rev. E, **50**, 3077 (1994).
- [27] M. A. LaPointe, R. B. Yoder, C. Wang, A. K. Ganguly and J. L. Hirshfield, *Experimental demonstration of high efficiency electron cyclotron autoresonance acceleration*, Phys. Rev. Lett., **76**, 2718 (1996).
- [28] R. Shpitalnik, J. L. Hirshfield and L. Friedland. *Isochronous electron cyclotron acceleration*. Part. Accel. ,**25**, 1 (1989).
- [29] R. Shpitalnik, C. Cohen, F. Dothan and L. Friedland. *Autoresonance microwave accelerator*. J. Appl. Phys. **70**, 1101, (1991).
- [30] V. Dugar-Zhabon, E. A. Orozco and A. Umnov, *Modeling of electron cyclotron resonance acceleration in a stationary inhomogeneous magnetic field*, Phys. Rev. ST-AB, **11**, 041302 (2008).
- [31] V. Dugar-Zhabon and E. A. Orozco, *Cyclotron spatial autoresonance acceleration model*, Phys. Rev. ST-AB, **12**, 041301 (2009).
- [32] V. Dugar-Zhabon and E. A. Orozco, *Simulation of electron beam acceleration by electromagnetic field in static inhomogeneous magnetic field*, J. Plasma Fusion Res. SERIES, **8**, (2009).(*Ponencia presentada en: "XIV International Congress on Plasma Physics", 4-12 September, 2008, Fukuoka, Japan*).
- [33] V. Dugar-Zhabon and E. A. Orozco, *Three-Dimensional Particle-In-Cell Simulation of Spatial Autoresonance Electron-Beam Motion*,IEEE transaction on Plasma Science. **38**, 10, 2980 (2010).(*Ponencia presentada en: "XXI International Conference on Numerical Simulations of Plasma", 6-9 October, 2009, Lisbon, Portugal*)
- [34] E. A. Orozco, *Estudio Analítico y Numérico del Fenómeno de Autoresonancia Ciclotrónica Espacial*, Tesis de Grado. (UIS), (2012)
- [35] K. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Trans. Ant. Propagat., 14, 302 (1966).
- [36] T. Umeda et al., *A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations*, Comp. Phys. Com. 156, 73 (2003).
- [37] G. Bellanca, *High-Accuracy Assigned Power Excitation for the FDTD Technique*, IEEE Micr. and Guid. Wave Lett. **7**, 12, 411 (1997)

-
- [38] D. Prescott and N. Shuley, *Reducing Solution Time in Monochromatic FDTD waveguide simulations*, IEEE Trans. Micr. Theor. Ech., **42**(8), 1582, 1994.
- [39] A. Taflove and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The finite-Difference Time-Domain*, Artech House -2nd edition, 2000.
- [40] C. Birdsall and A. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, (Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1991).
- [41] R. Hockney and J. Eastwood, *Computer simulation using particles*. (Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1988).
- [42] G. Lapenta, *Particle In Cell Method- A brief description of the PIC Method*, (Centrum voor Plasma astrofysica, Katholieke Universiteit Leuven).
- [43] G. Lapenta, F. Inoya, J. U. Brachbioll, *Particle in cell simulation od glow discharges in complex geometries*, IEEE Trans. Plasma Sci., **23**, 769-779 (1995).
- [44] R. Fitzpatrick, *Computational physics: An introductoty course*, (Texas University, 2006).
- [45] M. N. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetism*, (ISBN 0-8493-1395-3), Sec. 3.10.