

# UN PROBLEMA INVERSO PARA LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR

OLGA LUCÍA ESCOBAR MEDINA

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga, septiembre

2005

# UN PROBLEMA INVERSO PARA LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR

OLGA LUCÍA ESCOBAR MEDINA

Monografía presentada como  
requisito para optar al título de  
*Licenciada en Matemáticas*

Henry Lamos Díaz

Ph. D. en Matemáticas

Director

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga, septiembre

2005

A Dios, mi madre y hermana.

# AGRADECIMIENTOS

## **Especialmente:**

Al Dios Eterno, a mi mamá y hermana, quienes me han dado fuerzas para salir adelante, brindandome desinteresadamente su amor.

Al Profesor Henry Lamos, quién además de su amistad, me brindó orientación y paciencia en el desarrollo del proyecto.

A mi novio William Benedicto por su apoyo incondicional y su valiosa compañía en todo momento.

A los profesores de la escuela por su orientación durante la carrera.

A mis compañeros, por su apoyo y amistad.

**TÍTULO:** UN PROBLEMA INVERSO PARA LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR \*

**AUTOR:** OLGA LUCÍA ESCOBAR MEDINA\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Ecuación de conducción de calor, ecuaciones diferenciales, separación de variables, criterio M- de Weierstrass, convergencia uniforme, problema inverso, problema directo, existencia y unicidad, estabilidad, problemas mal puestos..

## **DESCRIPCIÓN**

Partiendo de la deducción del problema directo, en el presente trabajo, se plantea y desarrolla un problema inverso para la ecuación de conducción de calor. En el curso de ecuaciones diferenciales es donde mejor observamos la relación entre el mundo real y el matemático cuando hacemos una formulación matemática de la realidad en el estudio de características o propiedades de procesos físicos. En la primera sección del primer capítulo se analiza la deducción de la ecuación de conducción de calor con sus problemas de contorno, la cual nos muestra una relación entre el mundo real y matemático. En la segunda sección se halla la solución del problema de valor inicial y frontera por el método de separación de variables, probando así la existencia de esta; por último se demuestra la unicidad de la solución al problema. En la última sección de este capítulo presentamos conceptos preliminares y ejemplos de problemas inversos.

En el segundo capítulo se plantea un problema inverso para la ecuación de conducción de calor, se dan unos ejemplos, y luego se demuestra la unicidad de la solución del problema inverso.

En el último capítulo se demuestra que el problema planteado es mal puesto, considerando del espacio  $C[0, T]$  en el espacio  $C[0, T]$ . Por último se da un nuevo ejemplo y para este se desarrolla un algoritmo numerico en matlab.

---

\*Tesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Director: Henry Lamos Díaz.

**TITLE:** AN INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION \*

**AUTHOR:** OLGA LUCÍA ESCOBAR MEDINA \*\*

**KEY WORDS:** Heat conduction equation, differential equations, separation of variables, M-Weierstrass Criterion, uniform convergence, inverse problem, direct problem, existence and uniqueness, stability, misproposed problems..

## **DESCRIPTION**

Starting from the direct problem deduction, in the current work, it is proposed and developed an inverse problem for the heat conduction equation. In the differentials equations course is where we can observe the relationship between the real and the mathematical world when we make a mathematical formulation of reality in the study of characteristics or properties of physics processes. In the first section from the first chapter, it is analyzed the deduction of the heat conduction equation with its boundary problems which show us a relationship between the real and the mathematical world. In the second one, it is found the solution to the border and initial value problem using the variables separation method, proving in this way the existence of this; finally, it is showed the uniqueness of the solution to the problem. In the last section of this chapter we show preliminary concepts and examples of inverse problems.

In the second chapter, it is proposed an inverse problem to the heat conduction equation, some examples are given, and later it is showed the uniqueness of the inverse problem solution.

In the last chapter, it is demonstrated that the proposed problem is misproposed, considering it from the space  $C[0, T]$  in the space  $C[0, T]$ . Finally, a new example is given and for this one a numerical algorithm is developed in Matlab.

---

\*Tesis

\*\* Faculty of Sciences. Mathematics School.

Director: Henry Lamos Díaz.

# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Deducción de la ecuación de conducción de calor, existencia y unicidad de la solución y conceptos preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Deducción de la ecuación de conducción de calor . . . . .	1
1.1.1. Planteamiento de los problemas de contorno . . . . .	6
1.2. Solución del problema directo de la ecuación de conducción de calor y unicidad de la solución . . . . .	8
1.2.1. Solución del problema directo de la ecuación de conducción de calor	8
1.2.2. Unicidad de la solución del problema directo . . . . .	20
1.3. Conceptos preliminares . . . . .	22
1.3.1. Algunos ejemplos . . . . .	24
<b>2. Un problema inverso para la Ecuación de Conducción de Calor</b>	<b>31</b>
2.1. Planteamiento del problema inverso . . . . .	31
2.2. Unicidad de la solución del problema inverso . . . . .	32
<b>3. Solución del problema inverso y experimentos numéricos</b>	<b>42</b>
3.1. Experimentos numéricos . . . . .	44
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Distribución lineal de temperatura a lo largo de una barra . . . . .	2
1.2. Movimiento de una partícula a lo largo de la curva $\Gamma$ . . . . .	25
1.3. Interpretación de la fusión del hielo . . . . .	26
3.1. Conducción de calor con $\varphi = \sin(2x)$ , para $T = 10$ . . . . .	50
3.2. Conducción de calor con $\varphi = \log(x)$ , para $T = 10$ . . . . .	51

# INTRODUCCIÓN

En el curso de ecuaciones diferenciales es donde mejor notamos la relación entre el mundo real y el mundo matemático, cuando hacemos una formulación matemática de la realidad por medio del estudio de características o propiedades de procesos físicos.

En la construcción de los modelos matemáticos se definen variables y relaciones entre ellas, usando leyes o ecuaciones auxiliares. Dentro de la definición de dichas variables, aparecen unas, llamadas parámetros, que son las características del mundo real; estos parámetros se determinan en la mayoría de los casos de manera experimental, sin embargo, algunas veces su obtención es demasiado onerosa. Por consiguiente en el marco de un modelo matemático que describe cierta realidad algunos de los coeficientes, condiciones iniciales o de frontera son desconocidas y es necesario determinarlos. Los problemas donde algunas de las características son desconocidas se denominan problemas inversos. El estudio de estos problemas se remonta a principios del siglo XX, con los trabajos de A.N Tijonov y otros, que hoy son ampliamente usados en diferentes partes de la ciencia.

El trabajo que se presenta a continuación es el estudio de la ecuación de conducción de calor, analizando el problema directo, luego se plantea un problema inverso de coeficiente para dicha ecuación probando la unicidad de su solución.

El problema inverso es estudiado por el descubrimiento de algunas características causantes de información útil sobre el estado de temperatura de un objeto.

Por último se desarrolla un algoritmo numérico para la solución del problema inverso, realizando experimentos numéricos para corroborar la efectividad del algoritmo propuesto.

# CAPÍTULO 1

## Deducción de la ecuación de conducción de calor, existencia y unicidad de la solución y conceptos preliminares.

---

### 1.1. Deducción de la ecuación de conducción de calor

---

Tomemos una barra homogénea de longitud  $l$ , térmicamente aislada por los lados y tan fina como para que en cualquier instante de tiempo se pueda considerar sobre ella la temperatura igual en todos los puntos de un corte transversal. Si se mantienen los extremos de la barra a temperaturas constantes  $u_1$  y  $u_2$  entonces, a lo largo de la barra se establece la distribución lineal de temperatura ver figura 1.1

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x. \quad (1.1.1)$$

En este caso, del extremo más caliente al menos caliente pasará calor. La cantidad de calor que pasa por una sección de la barra de superficie  $S$  por unidad de tiempo, se

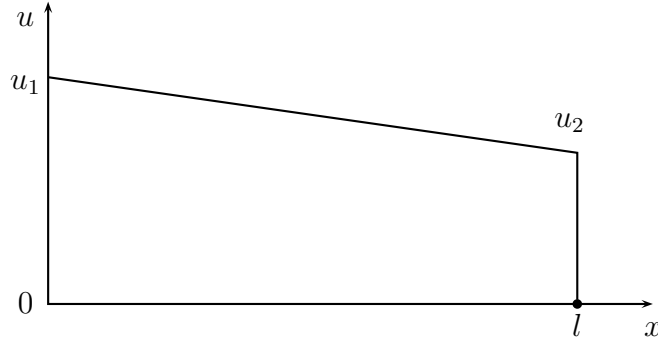


Figura 1.1: Distribución lineal de temperatura a lo largo de una barra

expresa a través de la fórmula empírica

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (1.1.2)$$

donde  $k$  es el coeficiente de la conductividad térmica, que depende del material de la barra.

La magnitud del flujo calorífico se considera positiva, si el calor pasa en dirección del crecimiento de  $x$ .

Observemos el proceso de distribución de la temperatura en la barra, el cual puede ser descrito mediante la función  $u(x, t)$ , que representa la temperatura en el corte  $x$  en el momento de tiempo  $t$ . Busquemos la ecuación a la cual debe satisfacer la función  $u(x, t)$ . Formulemos las leyes físicas que determinan los procesos relacionados con la propagación del calor.

1. *Ley de Fourier.* Si la temperatura del cuerpo no es homogénea, en éste aparecen flujos caloríficos, dirigidos desde los lugares de mayor temperatura hasta los lugares de menor temperatura.

La cantidad de calor que pasa por la sección  $x$  durante el intervalo de tiempo  $(t, t + dt)$ , es igual a:

$$dQ = qSdt, \quad (1.1.3)$$

donde

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.1.4)$$

es la densidad del flujo calorífico, igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo por una superficie de  $1 \text{ cm}^2$ .

Esta ley es una generalización de la fórmula (1.1.2). Se le puede dar también la forma integral

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt, \quad (1.1.5)$$

donde  $Q$  es la cantidad de calor que pasa durante el intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$  por la sección  $x$ . Si la barra no es homogénea,  $k$  es una función de  $x$ .

2. La cantidad de calor que es necesaria dar a un cuerpo homogéneo para elevar su temperatura en  $\Delta u$ , es igual a

$$Q = cm\Delta u = c\rho V \Delta u, \quad (1.1.6)$$

donde  $c$  es el calor específico del cuerpo,  $m$ , la masa del cuerpo,  $\rho$ , su densidad y  $V$  el volumen.

Si la variación de la temperatura tiene una magnitud diferente en distintas partes de la barra, o si ésta no es homogénea, entonces

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \Delta u(x) dx, \quad (1.1.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del cuerpo en el punto  $x$ .

3. Dentro de la barra puede surgir o absorberse calor. La emisión de calor se puede caracterizar por la densidad de las fuentes térmicas  $F(x, t)$  en el punto  $x$  en el momento  $t$ . Como resultado de la acción de estas fuentes en el  $(t, t + dt)$  se emitirá una cantidad de calor

$$dQ = SF(x, t) dx dt, \quad (1.1.8)$$

o en la forma integral,

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (1.1.9)$$

donde  $Q$  es la cantidad de calor que se emite en el intervalo de la barra  $(x_1, x_2)$  durante el tiempo  $(t_1, t_2)$ .

La ecuación de conducción del calor se obtiene al calcular el balance de calor en cierto segmento  $(x_1, x_2)$  durante cierto intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ . Aplicando la ley de conservación de la energía y las fórmulas (1.1.5), (1.1.7) y (1.1.9), se puede escribir la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

que es la ecuación de conducción del calor en forma integral.

Para obtener la ecuación de la conducción del calor en forma diferencial, supongamos que la función  $u(x, t)$  posee derivadas continuas  $u_{xx}$  y  $u_t$ ; pidiendo la derivabilidad de la función  $u(x, t)$  se pueden perder varias soluciones posibles, que satisfagan la ecuación integral y no a la diferencial. Aplicando el teorema del valor medio en (1.1.10), se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \{c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\} \Big|_{\xi=x_3} \Delta x, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

la cual, en virtud del teorema del valor medio, se puede transformar como sigue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \left[ c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}} \Delta x \Delta t, \quad (1.1.12)$$

donde  $t_3, t_4, t_5, x_3, x_4$  y  $x_5$  son puntos intermedios de los intervalos  $(t_1, t_2)$  y  $(x_1, x_2)$ .

De aquí, después de simplificar entre el producto  $\Delta x \Delta t$ , se halla:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}} + F(x, t) \Big|_{\substack{x=x_4 \\ t=t_4}} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}}. \quad (1.1.13)$$

Todos estos razonamientos son aplicables a intervalos cualesquiera  $(t_1, t_2)$  y  $(x_1, x_2)$ . Pasando al límite cuando  $t_1, t_2 \rightarrow t$  y  $x_1, x_2 \rightarrow x$ , se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.1.14)$$

que se llama la *ecuación de la conducción del calor*.

Consideremos ciertos casos particulares.

1. Si la barra es homogénea, entonces  $k$ ,  $c$  y  $\rho$  se pueden considerar constantes, y la ecuación se escribe comúnmente en la forma

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad \text{y} \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

donde  $a^2$  es una constante, llamada coeficiente de conductividad de temperatura. Si no hay fuentes de calor, es decir, si  $F(x, t) = 0$ , la ecuación de la conducción del calor toma esta forma sencilla:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (1.1.15)$$

Observación: En este trabajo consideraremos el coeficiente  $a^2 = k(t)$  variable en el tiempo, es decir.

$$u_t = k(t) u_{xx}.$$

Aquí, el coeficiente de conductividad de temperatura será dependiente.

2. La densidad de las fuentes de calor puede depender de la temperatura. En el caso de un intercambio térmico con el medio, que se someta a la *ley de Newton*, la cantidad de calor que pierde la barra, calculada en las unidades de longitud y tiempo, es igual a

$$F_0 = h(u - \theta)$$

donde  $\theta(x, t)$  es la temperatura del medio y  $h$  es el *coeficiente de intercambio térmico*. Así, la densidad de las fuentes caloríficas en el punto  $x$  en el momento  $t$  es igual a

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \quad (1.1.16)$$

donde  $F_1(x, t)$  es la densidad de las otras fuentes de calor.

Si la barra es homogénea, la ecuación de la conducción del calor con intercambio térmico lateral tiene la forma:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

donde  $\alpha = \frac{h}{c\rho}$  y  $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$  es una función conocida.

3. Los coeficientes  $k$  y  $c$ , por regla general, son funciones de la temperatura de variación lenta. Por esto, la suposición hecha sobre la constancia de estos coeficientes es posible sólo con la condición de que se tomen intervalos pequeños de variación de temperatura. El estudio de los procesos térmicos en un gran intervalo de variación de temperaturas nos lleva a la ecuación cuasilineal de la conducción del calor, que se escribe en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t},$$

para un medio no homogéneo.

### 1.1.1. Planteamiento de los problemas de contorno

Asociado a la ecuación diferencial en derivadas parciales se agregan condiciones iniciales y de frontera, que caracterizan la realidad que se modela; en nuestro caso el modelamiento de la conducción de calor en una barra delgada.

La condición inicial consiste sólo en determinar los valores de la función  $u(x, t)$  en el momento inicial  $t_0$ .

Las condiciones de frontera pueden ser diferentes, según el régimen de las temperaturas en las fronteras. Estudiemos tres tipos de condiciones frontera:

1. En el extremo de la barra  $x = 0$  se da la temperatura

$$u(0, t) = \mu(t),$$

donde  $\mu(t)$  es una función dada en cierto segmento y  $t_0 \leq t \leq T$ , el intervalo de tiempo durante el cual se estudia el proceso.

2. En el extremo  $x = l$  se da el valor de la derivada

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t).$$

A esta condición se llega si es dada la magnitud del flujo térmico  $Q(l, t)$  que pasa por la sección del extremo de la barra,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

de donde  $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$ , siendo  $v(t)$  una función conocida, que se expresa mediante el flujo  $Q(l, t)$  por la fórmula

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. En el extremo  $x = l$  está dada una relación lineal entre la derivada y la función:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)].$$

Esta condición de frontera corresponde a un intercambio térmico de acuerdo con la ley de Newton en la superficie del cuerpo con el medio ambiente, cuya temperatura  $\theta$  es conocida. Utilizando las dos expresiones del flujo térmico que sale por el corte  $x = l$ ,

$$Q = h(u - \theta) \quad y \quad Q = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

se obtiene el enunciado matemático de la tercera condición de frontera en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)],$$

donde  $\lambda = \frac{h}{k}$  es el coeficiente de intercambio térmico y  $\theta(t)$  es cierta función dada. Para el extremo  $x = 0$  de la barra  $(0, l)$ , la tercera condición de frontera tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -\lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

Las condiciones de frontera para  $x = 0$  y  $x = l$  pueden ser de diferentes tipos, de modo que el número de problemas distintos es grande.

---

## 1.2. Solución del problema directo de la ecuación de conducción de calor y unicidad de la solución

---

### 1.2.1. Solución del problema directo de la ecuación de conducción de calor

En esta sección consideremos el siguiente problema de valor inicial y de frontera.

$$\begin{aligned}u_t &= K(t) u_{xx}, & (x, t) \in Q_T, \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\u(x, 0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi\end{aligned}$$

Bajo condiciones un poco fuertes demostraremos el teorema de existencia, para el problema anterior.

**Teorema 1.2.1.** El problema de valor inicial y de frontera

$$u_t = K(t) u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1.2.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.2.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.2.3}$$

donde el conjunto

$$Q_T = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T\},$$

si cumple las condiciones

$$K(t) \in C[0, T], \quad K(t) > 0 \text{ para todo } t \in [0, T] \tag{1.2.4}$$

$$\varphi(x) \in C^4[0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0, \tag{1.2.5}$$

tiene solución.

*Demostración.* El problema de conducción (1.2.1)-(1.2.3) es un problema lineal. La ecuación diferencial y las condiciones en la frontera son homogéneas.

Buscando la solución del problema, la linealidad de este nos permite usar el principio de superposición que a continuación enunciaremos:

**Lema 1.2.1.** *Principio generalizado de superposición.* Sea  $L(u)$  un operador diferencial lineal, de forma que  $L(u)$  es igual a la suma de ciertas derivadas de la función, ordinarias o parciales, con coeficientes constantes que son funciones de las variables independientes. Si las funciones  $u_i, n = 1, 2, 3, \dots$  son soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$L(u) = 0,$$

ordinaria o en derivadas parciales,  $L$  es un operador lineal. Y la serie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \tag{1}$$

es también solución de esta ecuación y si el cálculo de las derivadas de  $u$  que figuran en la ecuación  $L(u) = 0$  se puede efectuar mediante la derivación término a término de la serie.

Entonces  $u$  es solución de  $L(u) = 0$ , ya que aplicando a la ecuación (1) el operador  $L$  en ambos lados tenemos:

$$L(u) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n) = 0.$$

Volviendo a la demostración del teorema, apliquemos para la resolución del problema el método de separación de variables (*método de Fourier*), que consiste en encontrar las soluciones no triviales de la ecuación diferencial (1.2.1) como un producto de una función que depende sólo de  $x$  y una función que dependa solo de  $t$ , esto es:

$$u(x, t) = X(x)T(t); \tag{1.2.6}$$

sustituyendo (1.2.6) en (1.2.1) obtenemos

$$X(x)T'(t) = K(t)X''(x)T(t);$$

ya que  $X(x) \neq 0$  y  $T(t) \neq 0$ , entonces

$$\frac{1}{K(t)} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (1.2.7)$$

Aquí se han separado las variables, es decir, el primer miembro depende sólo de  $x$  y el segundo, sólo de  $t$ . Para que la ecuación (1.2.7) sea válida para  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ , es necesario que sus dos miembros sean iguales a una misma constante. De lo contrario, al mantener fija una de las variables independientes y hacer variar la otra, uno de los miembros permanecería sin cambio, mientras que el otro habría variado, por lo que no se cumple la igualdad. Si a esta constante de separación la llamamos  $-\lambda$ , que por conveniencia la asumimos con signo negativo, entonces la ecuación (1.2.7) queda

$$\frac{1}{K(t)} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (1.2.8)$$

De aquí se deduce que

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.2.9)$$

$$T'(t) + K(t) \lambda T(t) = 0. \quad (1.2.10)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (1.2.1) debemos resolver las dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de las cuales se resuelve con facilidad para todo valor de  $\lambda$ . El producto de dos soluciones de las ecuaciones (1.2.9) y (1.2.10), proporcionan una solución de la ecuación diferencial parcial (1.2.1).

Agreguemos condiciones para la ecuación diferencial (1.2.9). Veamos que sustituyendo la condición frontera cuando  $x = 0$  en la ecuación (1.2.6) se obtiene

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \quad (1.2.11)$$

Si la ecuación (1.2.11) se satisface al elegir  $T(t) = 0$  para toda  $t$ , entonces  $u(x, t)$  es cero para toda  $x, t$ . Pero nosotros queremos hallar la solución no trivial. Así que se debe satisfacer (1.2.11) al requerir que

$$X(0) = 0. \quad (1.2.12)$$

De igual forma para  $x = \pi$  se requiere que

$$X(\pi) = 0. \quad (1.2.13)$$

De este modo, con respecto a la determinación de la función  $X(x)$  se obtiene un problema que depende del parámetro  $\lambda$ .

Así que nuestro problema consiste en hallar los valores del parámetro  $\lambda$ , para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.2.14)$$

$$X(0) = 0, \quad (1.2.15)$$

$$X(\pi) = 0. \quad (1.2.16)$$

Tales valores del parámetro  $\lambda$  se llaman valores propios, y las soluciones no triviales que le corresponden, funciones propias del problema (1.2.14)-(1.2.16). El problema enunciado de este modo se llama con frecuencia Problema de *Sturm-Liouville*.

Consideremos por separado los casos en que el parámetro  $\lambda$  es negativo, igual a cero o positivo.

1. Para  $\lambda < 0$  el problema no posee soluciones no triviales. En efecto, buscando la solución general de la ecuación (1.2.14), sea  $\lambda = -\sigma^2$ , donde  $\sigma > 0$  es un nuevo parámetro, esta sustitución nos evita la aparición de signos radicales en el razonamiento que seguimos. Entonces (1.2.14) queda

$$X''(x) - \sigma^2 X(x) = 0, \quad (1.2.17)$$

cuya solución general es

$$X(x) = k_1 \cosh(\sigma x) + k_2 \sinh(\sigma x). \quad (1.2.18)$$

Aplicando la condición de frontera (1.2.15) en la solución (1.2.18), se obtiene

$$X(0) = k_1 \cosh(\sigma(0)) + k_2 \sinh(\sigma(0)) = k_1 = 0.$$

Por lo tanto, se deduce que  $X(x) = k_2 \sinh(\sigma x)$ . La segunda condición frontera (1.2.16) nos conduce a que

$$X(\pi) = k_2 \sinh(\sigma\pi) = 0. \quad (1.2.19)$$

Como  $\sigma$  y  $\pi$  son positivas, entonces  $\sinh(\sigma\pi) > 0$ , la única forma de que se cumpla (1.2.19) es escoger  $k_2 = 0$ . De donde  $X(x) = 0$  para toda  $x$ , de modo que no existen soluciones no triviales de la ecuación (1.2.14) para cuando  $\lambda < 0$ .

2. Para  $\lambda = 0$  el problema no posee soluciones no triviales. Buscando la solución general de la ecuación (1.2.14), sea  $\lambda = 0$ , entonces (1.2.14) queda

$$X''(x) = 0 \quad (1.2.20)$$

con solución general

$$X(x) = k_1x + k_2. \quad (1.2.21)$$

Aplicando la condición frontera (1.2.15) en la solución (1.2.21), se obtiene

$$X(0) = k_1(0) + k_2 = k_2 = 0.$$

Por lo tanto, se deduce que  $X(x) = k_1x$ . La segunda condición frontera (1.2.16) nos conduce a que

$$X(\pi) = k_1\pi = 0. \quad (1.2.22)$$

Entonces  $k_1 = 0$ , de donde  $X(x) = 0$  para toda  $x$ , de modo que no existen soluciones no triviales para cuando  $\lambda = 0$  del problema (1.2.14) - (1.2.16).

3. Para  $\lambda > 0$ , buscando la solución general de la ecuación (1.2.14), sea  $\lambda = \sigma^2$ , donde  $\sigma > 0$  es un nuevo parámetro, esta sustitución nos evita la aparición de signos radicales en el razonamiento que seguimos. Entonces (1.2.14) queda

$$X''(x) + \sigma^2X(x) = 0 \quad (1.2.23)$$

con solución general

$$X(x) = k_1 \cos(\sigma x) + k_2 \sin(\sigma x). \quad (1.2.24)$$

Aplicando la condición frontera (1.2.15) en la solución (1.2.24) se obtiene

$$X(0) = k_1 \cos(\sigma(0)) + k_2 \sin(\sigma(0)) = k_1 = 0.$$

Por lo tanto, se deduce que  $X(x) = k_2 \sin(\sigma x)$ . La segunda condición frontera (1.2.16) nos conduce a

$$X(\pi) = k_2 \sin(\sigma\pi) = 0. \quad (1.2.25)$$

Para satisfacer (1.2.25) se podría escoger  $k_2 = 0$ , entonces la única solución sería  $X(x) = 0$  para toda  $x$ , pero sería una solución trivial, así que tomemos otra elección. Sea  $\text{sen}(\sigma\pi) = 0$  lo que implica que  $\sigma\pi = n\pi$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , de donde obtenemos que  $\sigma = n$  y

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para los cuales existen soluciones no triviales, es decir a estos valores propios le corresponden las funciones propias

$$X_n(x) = D_n \text{sen}(nx) \tag{1.2.26}$$

donde  $D_n$  es una constante arbitraria. Tomemos  $D_n = 1$ , así de (1.2.26) se obtiene

$$X_n(x) = \text{sen}(nx). \tag{1.2.27}$$

Reemplazando en (1.2.10) los valores  $\lambda$  tenemos

$$T'(t) + K(t) n^2 T(t) = 0$$

resolviendo esta ecuación, tenemos que

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau}, \tag{1.2.28}$$

donde  $C_n$  son coeficientes, por ahora indeterminados.

Si multiplicamos estas dos soluciones de (1.2.9) y (1.2.10) que son (1.2.27) y (1.2.28) se puede concluir que

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx) \tag{1.2.29}$$

son soluciones particulares de la ecuación (1.2.1), y satisfacen las condiciones de frontera (1.2.2). Escribamos formalmente la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx). \tag{1.2.30}$$

La función  $u(x, t)$  satisface a las condiciones de frontera, puesto que la satisfacen todos los términos de la serie. Al pedir que se cumplan las condiciones iniciales, se obtiene:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}(nx) = \varphi(x).$$

Ahora, dado que la función  $\varphi(x)$  es continua en el segmento  $[0, \pi]$  podemos desarrollarla en una serie de Fourier de senos; por consiguiente

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen}(nx). \quad (1.2.31)$$

donde  $\varphi_n$  son los coeficientes de Fourier de la función que puede ser en el intervalo  $[0, \pi]$  los cuales se obtienen de la forma

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi. \quad (1.2.32)$$

De (1.2.31) y (1.2.32) tenemos que  $C_n = \varphi_n$ .

Reemplazando (1.2.32) en (1.2.30) tenemos,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \right) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx). \quad (1.2.33)$$

Demostremos que la suma de  $u(x, t)$  satisface todas las condiciones del problema (1.2.1). Así, tenemos que demostrar que  $u(x, t)$ , determinada por la serie anterior, es una función continua en  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \geq 0$ ; tiene segunda derivada parcial continua respecto a  $x$  y primera derivada parcial continua respecto a  $t$  en  $\overline{Q}_T$ .

Debido a la linealidad de (1.2.1), y en virtud del principio de superposición, la serie formada por soluciones particulares también será solución si esta converge y se puede derivar término a término dos veces respecto a  $x$  y una vez respecto a  $t$ . Por consiguiente, demostremos que para  $t \geq \bar{t} > 0$ , con  $\bar{t}$  un número cualquiera, las series de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

convergen uniformemente.

De la condición (1.2.5) puede verse fácilmente que

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{\pi n^4} \int_0^{\pi} \varphi''''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \quad (1.2.34)$$

y

$$|C_n| = |\varphi_n| \leq \frac{c}{n^4}. \quad (1.2.35)$$

Esto es así ya que de (1.2.32) tenemos que

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi,$$

integremos por partes el lado derecho de esta expresión, haciendo:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\xi) & dv &= \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \\ du &= \varphi'(\xi) & v &= -\frac{1}{n} \cos(n\xi) \end{aligned}$$

entonces,

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\varphi(\xi) \frac{1}{n} \cos(n\xi) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \varphi'(\xi) \cos(n\xi) d\xi \right],$$

como  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ , tenemos

$$\varphi_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \varphi'(\xi) \cos(n\xi) d\xi$$

realizemos el mismo procedimiento nuevamente,

$$\begin{aligned} u &= \varphi'(\xi) & dv &= \cos(n\xi) d\xi \\ du &= \varphi''(\xi) & v &= \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\xi) \end{aligned}$$

entonces,

$$\varphi_n = \frac{2}{n\pi} \left[ \varphi'(\xi) \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\xi) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \varphi''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \right],$$

como  $\operatorname{sen}(n\xi) \Big|_0^{\pi} = 0$ , entonces,

$$\varphi_n = -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \varphi''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi,$$

integrando nuevamente

$$\begin{aligned} u &= \varphi''(\xi) & dv &= \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \\ du &= \varphi'''(\xi) & v &= -\frac{1}{n} \cos(n\xi) \end{aligned}$$

entonces,

$$\varphi_n = -\frac{2}{n^2\pi} \left[ -\varphi'''(\xi) \frac{1}{n} \cos(n\xi) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \varphi'''(\xi) \cos(n\xi) d\xi \right],$$

como  $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ , entonces

$$\varphi_n = -\frac{2}{n^3\pi} \int_0^\pi \varphi'''(\xi) \cos(n\xi) d\xi$$

haciendo una última integración por partes, sea

$$\begin{aligned} u &= \varphi'''(\xi) & dv &= \cos(n\xi) d\xi \\ du &= \varphi''''(\xi) & v &= \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\xi) \end{aligned}$$

entonces,

$$\varphi_n = -\frac{2}{n^3\pi} \left[ \varphi'''(\xi) \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\xi) \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \varphi''''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \right],$$

como  $\operatorname{sen}(n\xi) \Big|_0^\pi = 0$ , entonces,

$$\varphi_n = \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi \varphi''''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi.$$

Ahora como  $\varphi(x) \in C^4[0, \pi]$ , entonces  $\varphi''''(x)$  está acotado por un  $K$  real, en el intervalo  $[0, \pi]$  y como  $|\operatorname{sen}(ny)| < 1$  para todo  $y$ , entonces

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &= \left| \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi \varphi''''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \right| = \\ &= \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi |\varphi''''(\xi)| |\operatorname{sen}(n\xi)| d\xi < \frac{2}{n^4\pi} K = \frac{C}{n^4}, \\ C &= \frac{2}{\pi} K \end{aligned}$$

probando así (1.2.34) y (1.2.35).

Abramos un nuevo paréntesis para recordar algunos resultados sobre la convergencia uniforme de sucesiones y series funcionales, los cuales nos serán de utilidad en el presente trabajo.

**Definición 1.2.1.** Sea  $X := (x_n)$  una sucesión en  $\mathbb{R}$ . Definamos la siguiente sucesión  $(s_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
s_1 &:= x_1, \\
s_2 &:= s_1 + x_2, \\
&\vdots \\
s_k &:= s_{k-1} + x_k, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Esto es

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k).$$

El límite de la sucesión  $(s_n)$  cuando  $n$  tiende a infinito se llamará la suma de la serie infinita.

**Lema 1.2.2.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$  converge en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\lim (x_n) = 0$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones definida en un subconjunto  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ ; sea la sucesión de las sumas parciales  $(s_n)$  de la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n)$  definida para  $x$  en  $\mathbb{D}$  por

$$\begin{aligned}
s_1(x) &:= f_1(x), \\
s_2(x) &:= s_1(x) + f_2(x), \\
&\vdots \\
s_{n+1}(x) &:= s_n(x) + f_{n+1}(x), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Denotemos por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x),$$

la convergencia puntual de la serie infinita en  $\mathbb{D}$ .

Otro tipo de convergencia importante en la teoría de las series funcionales es el de convergencia uniforme.

**Definición 1.2.3.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones de  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , sea  $\mathbb{D}_0 \subseteq \mathbb{D}$  y sea  $f : \mathbb{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que la sucesión  $(f_n)$  converge uniformemente en  $\mathbb{D}_0$  a  $f$  si, para toda  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $K(\varepsilon)$  (que depende de  $\varepsilon$  pero no de  $x \in \mathbb{D}_0$ ) tal que si  $n \geq K(\varepsilon)$  y  $x \in \mathbb{D}_0$ , entonces  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Escribimos  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  para  $x \in \mathbb{D}_0$ .

Un criterio muy usado (cuya demostración puede encontrarse en Análisis Matemático, Tom M. Apostol) para demostrar la convergencia uniforme de una serie es el criterio de Weierstrass.

**Criterio 1.2.1.** *M de Weierstrass.* Sea  $(M_n)$  un sucesión de números reales positivos tales que  $|f_n(x)| \leq M_n$  para  $x \in \mathbb{D}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (M_n)$  es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n)$  converge uniformemente en  $\mathbb{D}$ .

Una pregunta que nos hacemos, es que si tenemos una serie compuesta de términos funcionales continuos, la suma de la serie será también una función continua, la respuesta es positiva, siempre y cuando la convergencia sea uniforme. Este resultado se expresa en forma de teorema cuya demostración puede ser hallada en Análisis Matemático, Tom M. Apostol.

**Teorema 1.2.2.** Si  $f_n$  es continua en  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y si  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n)$  converge a  $f$  uniformemente, entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{D}$ .

Ahora la pregunta es con respecto a la derivación; ¿será que si derivamos una serie término a término, la nueva serie podrá converger uniformemente hacia la derivada de la suma de la serie original?. Nuevamente la respuesta es positiva cuando existe convergencia uniforme. Enunciemos este resultado a través del siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin:

**Teorema 1.2.3.** Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

una serie de funciones que converge en el segmento  $[a, b]$  hacia la función  $f(x)$ . Supóngase además que las funciones tienen derivada continua, y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

converge hacia cierta función  $g(x)$  uniformemente en el segmento  $[a, b]$ . Entonces:

1.  $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$ .
2. La serie (2) converge hacia la función límite  $f(x)$  uniformemente.

Con los resultados anteriores, procedamos a demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

es solución del problema (1.2.1) - (1.2.3). Por el criterio de Weierstrass la serie del lado derecho de (1.2.33) converge hacia cierta función continua ya que

$$|u_n(x, t)| = \left| \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| < |\varphi_n| e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} \leq \frac{C}{n^4}$$

para  $t \geq \bar{t}$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^4}$  converge uniformemente. Dicha función la denotaremos como  $u(x, t)$ . Demostremos ahora que esta función satisface la ecuación (1.2.1). En efecto:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| &= \left| -\varphi_n n^2 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| < |\varphi_n| n^2 |K(t)| e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} < \\ &< \frac{C}{n^4} n^2 e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} = \frac{C}{n^2} e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} \leq \frac{C}{n^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| &= \left| -\varphi_n n^2 e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| < |\varphi_n| n^2 e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} < \\ &< \frac{C}{n^4} n^2 e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} = \frac{C}{n^2} e^{-n^2 \int_0^{\bar{t}} K(\tau) d\tau} \leq \frac{C}{n^2}, \end{aligned}$$

para  $t \geq \bar{t}$ .

Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$  converge uniformemente e igualmente  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$  converge uniformemente. Por lo tanto, tenemos que es posible derivar la serie (1.2.33) término a término dos veces respecto a  $xy$  una vez respecto a  $t$  para  $t \geq \bar{t} > 0$ . Aplicando el principio de superposición llegamos a la conclusión que la función definida por la serie (1.2.33) satisface la ecuación (1.2.1), ya que

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n n^2 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) = \\ &= K(t) \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n n^2 e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) = K(t) u_{xx}. \end{aligned}$$

Como  $\bar{t}$  es arbitrario, esto se cumple para todo  $t > 0$ . Por lo tanto, queda demostrado que para  $t > 0$  la serie  $u(x, t) \in C^{2,1}[Q_T]$ ; esto es  $u(x, t)$  es una función continua y derivable dos veces respecto a  $xy$  una vez respecto a  $t$ .

Con esto concluimos que la función definida por (1.2.33) es continua en  $\overline{Q_t}$  y además satisface

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(n(0)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(n\pi) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen}(nx) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

que son las condiciones del problema. Entonces  $u(x, t) \in C^{2,1}[Q_t]$ .  $\square$

## 1.2.2. Unicidad de la solución del problema directo

En esta sección demostraremos la unicidad de la solución del problema directo (1.2.1)-(1.2.3), por medio del siguiente teorema.

**Teorema 1.2.4.** Si dos funciones  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ , definidas y continuas en la región  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq t \leq T$ , satisfacen a la ecuación de conducción del calor

$$u_t = K(t) u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.2.36)$$

y sus respectivas condiciones iniciales y de frontera,

$$u_1(\pi, t) = u_2(\pi, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.37)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.38)$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (1.2.39)$$

entonces  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

*Demostración.* Sea la función  $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ . Como las funciones  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  son continuas para  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , entonces también la función  $v(x, t)$ , es continua para la misma región.

Reemplazando  $v(x, t)$  en (1.2.1)-(1.2.3) entonces tenemos el siguiente problema para  $v(x, t)$ , con  $\varphi(x) = 0$ .

$$v_t = K(t) v_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1.2.40)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.41)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.2.42)$$

Ahora multiplicando la ecuación (1.3.40) por  $v(x, t)$  e integrado ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\int_0^\pi \int_0^t v_t(x, \tau) v(x, \tau) d\tau dx = \int_0^t \int_0^\pi K(\tau) v_{xx}(x, \tau) v(x, \tau) dx d\tau; \quad (1.2.43)$$

procedamos a integrar por partes a (1.2.43), entonces, sea

$$u = v(x, t) \quad du = v_t(x, \tau) d\tau$$

y

$$\begin{aligned} u = v(x, t) & \quad dr = v_{xx}(x, \tau) dx \\ du = v_x(x, \tau) dx & \quad r = v_x(x, t) \end{aligned}$$

reemplazando en (1.2.43)

$$\int_0^\pi \left[ \int_0^t u du \right] dx = \int_0^t K(t) \left[ ur \Big|_0^\pi - \int_0^\pi r du \right] d\tau$$

$$\int_0^\pi \frac{u^2}{2} \Big|_0^t dx = \int_0^t K(\tau) \left[ v(x, t) v_x(x, t) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi v_x(x, \tau) v_x(x, \tau) dx \right] d\tau$$

aplicamos las condiciones (1.2.41) y (1.2.42) obtenemos

$$\int_0^\pi \frac{v^2(x, t)}{2} dx = \int_0^t K(t) \left[ - \int_0^\pi v_x(x, \tau) v_x(x, \tau) dx \right] d\tau$$

$$\int_0^\pi \frac{v^2(x, t)}{2} dx = \int_0^t K(t) \left[ - \int_0^\pi v_x^2(x, \tau) dx \right] d\tau$$

$$\int_0^\pi \frac{v^2(x, t)}{2} dx + \int_0^t K(t) \left[ \int_0^\pi v_x^2(x, \tau) dx \right] d\tau = 0,$$

dado que  $K(t) > 0$  para todo  $t \in [0, T]$  y como  $v^2(x, t)$  es continua, entonces

$$v(x, t) = 0, \quad \text{en } \overline{Q_T}.$$

Por tanto,  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ , demostrando así, la unicidad de la solución del problema directo. □

### 1.3. Conceptos preliminares

La teoría de los Problemas Inversos es una de las ramas activas en el desarrollo de la Matemática Aplicada de las últimas décadas. Muchos de los experimentos que se realizan en diferentes ramas de la ciencia y de la técnica están basados en el estudio de las propiedades de los objetos o procesos. Sin embargo, en muchas situaciones no se pueden encontrar ciertas características del objeto a través de la observación o experimentación directa, o bien se necesita una gran cantidad de recursos para hallar estas características; como suele

sucedan en experimentos en astrofísica para el estudio de las estrellas, experimentos en medicina en la investigación de órganos internos (Tomografía Médica), experimentos en el control de calidad o experimentos para el estudio de recursos naturales que se encuentran bajo tierra. Así que el investigador construye el modelo matemático que describe su realidad y donde aparecen ciertas características (parámetros) aún no determinadas y que no se pueden hallar a través de la experimentación (proceso físico). A estos problemas es natural llamarlos *Problemas Inversos*.

Supongamos que nuestro modelo se escribe de la forma

$$Az = u, \tag{1.3.1}$$

donde  $z$  y  $u$  son elementos de ciertos espacios métricos y  $A$  establece la relación entre estos dos elementos.

Asociado con la ecuación  $Az = u$ , decimos que tenemos un problema directo si dados  $A$  y  $z$ , se debe determinar  $u$ ; y tendremos un problema inverso si dados  $A$  y  $u$  necesitamos determinar  $z$ .

Si el problema de hallar  $z$  a partir de la ecuación (1.3.1) tiene más de una solución, entonces la información acerca del modelo se pierde. En este caso, propiedades adicionales tales como las condiciones, pueden ser incorporadas en la construcción del modelo. La condición de estabilidad es la más importante, si el problema carece de estabilidad, entonces la solución es prácticamente imposible de hallar, porque cualquier solución hallada de manera numérica estará contaminada de errores. Si la solución de un problema no depende continuamente de los datos de entrada, entonces en general la solución encontrada no tiene nada que ver con la solución verdadera, ya que en la mayoría de los casos los datos de entrada no se conocen en forma exacta. A continuación daremos la definición de un problema bien puesto según Hadamard.

**Definición 1.3.1.** Sean  $Z$  y  $U$  espacios normados,  $A : Z \rightarrow U$  un operador (lineal o no-lineal). El problema  $Az = u$  es llamado bien puesto si se cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada  $u \in U$  existe a lo menos un  $z \in Z$  tal que  $Az = u$  (Existencia).

2. Para cada  $u \in U$  existe a lo más un  $z \in Z$  tal que  $Az = u$  (Unicidad).
3. La solución  $z$  depende continuamente de  $u$ , es decir, para cada sucesión  $\{z_n\} \subset Z$  con  $Az_n \rightarrow Az$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si se cumple que  $z_n \rightarrow z$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (Estabilidad).

Es de anotar que la información suplementaria obtenida a partir de la experimentación se conoce solo de manera aproximada.

Los problemas que no satisfacen alguna de las condiciones expuesta en la definición, se denominan problemas *Mal puestos*. Los problemas inversos por lo general son problemas mal puestos

El desarrollo de la teoría y métodos de solución de problemas mal puestos se inició con los trabajos de A. N. Tíjonov y M. M. Lavrentev, la cual ha sido desarrollada por múltiples autores.

### 1.3.1. Algunos ejemplos

En los ejemplos siguientes, los problemas inversos son mal puestos, mientras que los problemas directos son bien puestos.

En matemáticas, la existencia de una solución puede darse al considerar el problema en otros espacios.

**Ejemplo 1.3.1.** Sea  $A$  una matriz simétrica de orden  $n \times n$  y sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  números reales. El problema de encontrar una matriz  $D$  tal que  $A + D$  tenga los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , es un problema inverso al problema directo de calcular los eigenvalores que tiene la matriz  $A + D$ .

**Ejemplo 1.3.2.** *Ecuación Integral de Abel.* Sea  $P$  un punto material de masa  $m$  que se mueve a lo largo de una curva  $\Gamma$  desde un punto  $P_1$  sobre el nivel  $h > 0$  hacia el punto  $P_0$  sobre el nivel  $h = 0$ , ver figura 1.2. La única fuerza que está actuando sobre este elemento masa es la fuerza gravitacional  $mg$ .

El problema directo es determinar el tiempo  $T$  mínimo en el cual el elemento se mueve desde  $P_1$  a  $P_0$  cuando la curva  $\Gamma$  es dada. En el problema inverso dada una medida del

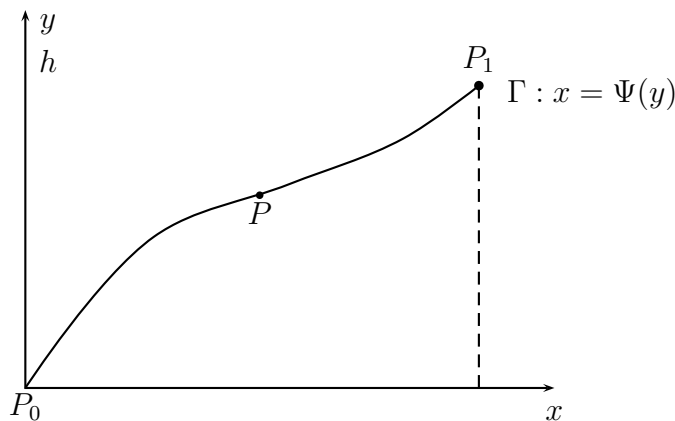


Figura 1.2: Movimiento de una partícula a lo largo de la curva  $\Gamma$

tiempo  $T = T(h)$ , para diversos valores de  $h$ , se debe determinar la curva  $\Gamma$ . Supongamos que la curva puede ser parametrizada de la forma  $x = \psi(y)$  por tal razón, el punto  $P$  tiene coordenadas  $(\psi(y), y)$ . Por conservación de la energía, es decir,

$$E + U = \frac{m}{2}v^2 + mgy = \text{const} = mgh,$$

concluimos que para la velocidad  $\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2g(h-y)}$ . El tiempo total desde  $P_1$  a  $P_0$  es:

$$\int_0^h dt = \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{v},$$

como  $ds = \sqrt{1 + \psi'(y)^2}$ ,

$$T = T(h) = \int_0^h \sqrt{\frac{1 + \psi'(y)^2}{2g(h-y)}}, \quad \text{para } h > 0.$$

Sean  $\varphi(y) = \sqrt{1 + \psi'(y)^2}$  y  $f(h) = T(h) \sqrt{2g}$  conocidos (medidos), entonces se debe determinar la función  $\varphi$  desde la ecuación integral de Abel

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = f(h), \quad \text{para } h > 0.$$

**Ejemplo 1.3.3.** *Problema Inverso de Stefan.* Stefan modeló la difusión del hielo del ártico en el verano con un modelo uni-dimensional. En particular considerese el bloque

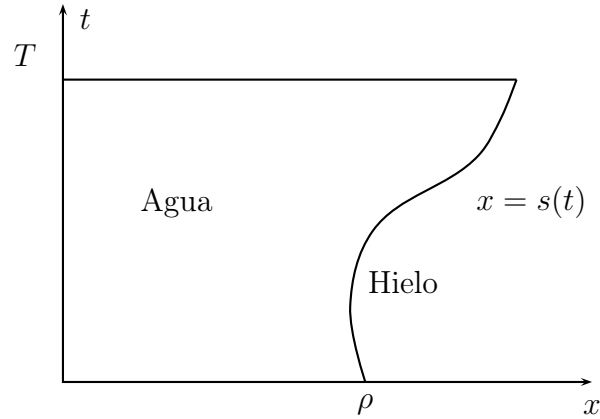


Figura 1.3: Interpretación de la fusión del hielo

homogéneo de hielo cubriendo la región  $x \geq l$  en el tiempo  $t = 0$ . Al principio el hielo se derrite por el calentamiento del bloque en el lado izquierdo. Así, en el tiempo  $t > 0$  la región entre  $x = 0$  y  $x = s(t)$  para algún  $s(t) > 0$  está cubierta con agua y la región  $x \geq s(t)$  está cubierta con hielo.

Sea  $u(x, t)$  la temperatura en  $0 < x < s(t)$  y tiempo  $t$ . Entonces  $u$  satisface la ecuación uni-dimensional del calor

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{en } D =: \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < s(t), t > 0\},$$

sujeto a las condiciones frontera

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = f(t) \quad \text{y} \quad u(s(t), t) = 0$$

para  $t \in [0, T]$  y condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq l.$$

En este caso,  $u_0$  describe la temperatura inicial y  $f(t)$  el flujo del calor en la frontera izquierda  $x = 0$ . La velocidad en la cual la interfase entre hielo y agua, se mueven es proporcional al flujo del calor. Esto lo describe la siguiente *condición de Stefan*:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} \quad \text{para } t \in [0, T].$$

El problema directo es hallar la curva  $s$  donde los datos de la frontera  $f$  y  $u_0$  son dados. En el problema inverso, es dada la curva  $s$  y se trata de reconstruir  $u$  y  $u_0$  (o  $f$ ).

**Ejemplo 1.3.4.** Sea la ecuación integral

$$\int_0^t K(x, s) u(s) ds = z(t); \quad (1.3.2)$$

determinar la función  $z(t) \in Z$ , para cualquier función  $u(s)$  que pertenece a cierto espacio  $U$ . La función  $K(x, s)$  se denomina núcleo y es conocida.

Supongase  $K(x, s)$  continua en el rectángulo  $c \leq x \leq d, a \leq s \leq b$ ; consideremos los espacios  $U = C[a, b]$  y  $Z = C[c, d]$ . El problema de calcular la función  $z(t)$  a través de  $u(s)$  es bien puesto. Para comprobar esto, sea  $u(s) \in C[a, b]$ , anotemos que la integral es una función continua en el intervalo  $[c, d]$ , y la función  $z(t)$  se define de manera única. Además, si representamos como  $K_0 = \max_{c \leq x \leq d, a \leq s \leq b} |K(x, s)|$ , y acotamos  $\|z_1 - z_2\|_{C[a, b]}$ , donde

$$z_i(t) = \int_0^t K(x, s) u_i(s) ds, \quad i = 1, 2,$$

entonces de la ecuación integral (1.3.2) se desprende que

$$\|z_1 - z_2\|_{C[a, b]} \leq K_0 \|u_1 - u_2\|_{C[c, d]},$$

cumpliendo así la condición de estabilidad. Por lo tanto, el problema es bien puesto, ya que cumple las tres condiciones para serlo.

**Ejemplo 1.3.5.** Hallar una función continua que satisfaga la ecuación integral de Fredholm de primera clase  $\int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x)$ . Supóngase que las funciones  $K_x(x, s)$ ,  $K(x, s)$  y  $K_s(x, s)$  son continuas en el rectángulo  $c \leq x \leq d, a \leq s \leq b, u(x) \in C[c, d]$ , se debe encontrar la función  $z(x)$ .

Sea  $u_0(x)$  una función continua más no derivable en el intervalo  $[c, d]$ , para  $u_0(x)$  la ecuación integral  $\int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x)$ . no puede tener una solución  $z_0(x)$  que sea continua; esto es así debido a que el núcleo es una función derivable con respecto a  $x$ , y por lo tanto, para cualquier función continua  $z(s)$  la función  $u(x)$  representa una función derivable continuamente, debido a esto no se cumple la primera condición de ser bien puesto, por lo tanto, el problema de la solución de la ecuación es un problema mal puesto.

**Ejemplo 1.3.6.** *Problema de Cauchy para la ecuación de Laplace.* Encontrar la solución  $u$  de la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x, y) =: \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } R \times [0, \infty)$$

que satisfice las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) &= g(x), \quad x \in R \end{aligned}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones dadas. La única solución cuando  $f(x) = 0$  y  $g(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$  esta dada como

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{senh}(ny), \quad x \in R, \quad y \geq 0.$$

Tomemos unos valores de  $n$  y analicemos que sucede:

Si  $n_1 = 10000$  entonces  $g(x) = 0,0001 \operatorname{sen}(10000x)$ , en consecuencia

$$\sup_{x \in R} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \sup_{x \in R} \{|0| + |0,0001|\} = 0,0001.$$

Entonces

$$u_1(x, y) = \frac{1}{(10000)^2} \operatorname{sen}(10000x) \operatorname{senh}(10000y) = \frac{1}{(10000)^2} \operatorname{senh}(10000y).$$

Si  $n_2 = 20000$  entonces  $g(x) = 0,00005 \operatorname{sen}(20000x)$ , en consecuencia

$$\sup_{x \in R} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \sup_{x \in R} \{|0| + |0,00005|\} = 0,00005.$$

Entonces

$$u_2(x, y) = \frac{1}{(20000)^2} \operatorname{sen}(20000x) \operatorname{senh}(20000y) = \frac{1}{(20000)^2} \operatorname{senh}(20000y).$$

Ahora miremos

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \left| \frac{1}{(10000)^2} \operatorname{senh}(10000y) - \frac{1}{(20000)^2} \operatorname{senh}(20000y) \right| \rightarrow \infty$$

para todo  $y > 0$ .

Por lo tanto,

$$\sup_{x \in R} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

sin embargo

$$\sup_{x \in R} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

para todo  $y > 0$ . El error en los datos de entrada  $f$  y  $g$  tiende a cero, mientras que el error de la solución  $u$  tiende a infinito. Estamos así, frente a un problema mal puesto.

**Ejemplo 1.3.7.** Sea el espacio de Banach  $C[0, 1]$  con la norma

$$\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|,$$

para cada  $f \in C[0, 1]$ . Sea  $K(s, t)$  una función definida y continua para  $0 \leq s, t \leq 1$ . Entonces el operador integral  $K$  definido para cada  $f \in C[0, 1]$  como:

$$Kf(s) =: \int_0^1 K(s, t) f(t) dt,$$

es un operador compacto sobre  $C[0, 1]$ . En efecto, es claro que  $K$  es un operador lineal que manda  $C[0, 1]$  en  $C[0, 1]$ . Tomemos

$$M = \max_{0 \leq s, t \leq 1} |K(s, t)|.$$

Entonces,

$$\|Kf\|_{\infty} \leq M \|f\|_{\infty}$$

para toda  $f \in C[0, 1]$ , y por tanto el conjunto de funciones

$$\{Kf : \|f\|_{\infty} \leq 1\}$$

es uniformemente acotado. Por otra parte, de la desigualdad

$$|Kf(s_1) - Kf(s_2)| \leq \int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)| dt \cdot \|f\|_{\infty},$$

se sigue que  $\{Kf : \|f\|_{\infty} \leq 1\}$  es un conjunto equicontinuo de funciones, esto es,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|s_1 - s_2| \leq \delta} |Kf(s_1) - Kf(s_2)| = 0$$

uniformemente para toda función  $f \in C[0, 1]$  tal que  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Del teorema de Ascoli-Arzelá\*, concluimos que el conjunto de funciones

$$\{Kf : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

tiene clausura compacta en  $C[0, 1]$  y por tanto que  $K$  es un operador compacto. Lo que nos dice que el problema es mal puesto.

---

\***Teorema de Ascoli-Arzelá.** Si una sucesión de funciones  $\{f_n(x)\}$  es equicontinua y uniformemente acotada sobre el segmento  $[a, b]$ , en la sucesión mencionada puede tomarse una subsucesión que sea uniformemente convergente en el segmento  $[a, b]$ .

# CAPÍTULO 2

## Un problema inverso para la Ecuación de Conducción de Calor

### 2.1. Planteamiento del problema inverso

Sea el problema de valor inicial y en la frontera (PVIF)

$$u_t = K(t) u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2.1.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.1.3)$$

con

$$Q_T = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T\}$$

Supóngase que se conoce la función  $\varphi(x)$ , y la siguiente condición suplementaria sobre la solución del PVIF (2.1.1)-(2.1.3) (tratada en el capítulo anterior) en cierto punto  $x_0$ ; así:

$$u(x_0, t) = q(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < \pi$$

donde la función  $q(t)$  es conocida.

Se debe determinar (identificar) la función  $K(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  que aparece en lado derecho de la ecuación diferencial parcial (2.1.1).

Analicemos unos ejemplos para ciertos valores de  $\varphi$ .

1. Si en el PVIF,  $\varphi(x) = 0$  para  $0 \leq x \leq \pi$ , entonces el problema inverso no tiene solución única. Observemos que la solución del problema es  $u(x, t) = 0$  para  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , y para cualquier  $K(t)$ . Tomando la información suplementaria  $u(x_0, t) = 0$ , entonces nuestro problema inverso tiene infinitas soluciones.
2. Sea  $\varphi(x) = \text{sen}(2x)$  y  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ; a partir de (1.2.33) tomemos que

$$u(x, t) = \text{sen}(2x) e^{-4 \int_0^t K(\tau) d\tau},$$

evaluando en  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  tenemos que:

$$u(x_0, t) = \text{sen} \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] e^{-4 \int_0^t K(\tau) d\tau} = 0$$

por consiguiente el problema inverso tiene infinitas soluciones.

---

## 2.2. Unicidad de la solución del problema inverso

---

Formulemos las condiciones sobre la función  $\varphi$  que garanticen la unicidad de la solución del problema inverso.

**Teorema 2.2.1.** Supóngase que la función  $\varphi$  satisface las siguientes condiciones:

$$\varphi(x) \in C^4[0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\varphi''(x) > 0, \quad x \in (0, \pi).$$

Entonces, si  $K_1(t)$  y  $K_2(t) \in C^1[0, T]$ ,  $K_1(t)$  y  $K_2(t)$  positivos en  $[0, T]$  y tales que  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  satisfacen

$$u_i(x_0, t) = q(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2.2)$$

donde  $u_i(x, t)$  son soluciones del problema de contorno (2.1.1)-(2.1.3) para  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  respectivamente, entonces  $K_1(t) = K_2(t)$  para  $t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Un lema importante para la demostración de unicidad de la solución del problema inverso, es el siguiente:

**Lema 2.2.1.** Sea el PVIF (2.1.1)-(2.1.3) y  $\varphi$  tales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\in C^4[0, \pi], & \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \\ \varphi''(x) &> 0, & x \in (0, \pi).\end{aligned}$$

Entonces

$$u_{xx}(x, t) > 0, \quad \text{para } 0 < x < \pi, 0 < t \leq T.$$

*Demostración.* Sea

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx)$$

solución del (2.1.1)-(2.1.3). En la sección (1.2) del capítulo anterior se demostró que las series:

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx), \\ u_t(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx),\end{aligned}$$

convergen uniformemente en  $\overline{Q}_T$ .

Ahora para  $t \in [t_0, T]$  donde  $t_0$  es una constante cualquiera positiva, demostremos que para  $0 < t \leq T$  y  $0 \leq x \leq \pi$ , existen las derivadas  $u_{xxt}$  y  $u_{tt}$  que además son continuas.

Para ello probemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \beta_n}{\partial t},$$

donde  $\omega_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$  y  $\beta_n = \frac{\partial u_n}{\partial t}$  convergen uniformemente.

Tenemos que para  $0 \leq x \leq \pi$  y  $0 < t \leq T$ ,

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial t} = \frac{\partial \left( -\varphi_n n^2 e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx) \right)}{\partial t} = \varphi_n n^4 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(nx). \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_n}{\partial t} &= \frac{\partial \left( -\varphi_n n^2 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right)}{\partial t} = \\
&= -\varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx) [K'(t) - n^2 K^2(t)] e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} = \\
&= -\varphi_n n^2 K'(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) + \varphi_n n^4 K^2(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx). \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Analicemos la convergencia uniforme.

Tomando valor absoluto en ambas partes de (2.2.3),

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \right| &= \left| \varphi_n n^4 K(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| = \\
&= |\varphi_n| n^4 |K(t)| e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} |\operatorname{sen}(nx)| \leq \\
&\leq C \max_{t \in [0, T]} |K(t)| e^{-n^2 K(t^+)(t-t_0)} \max_{t \in [0, T]} |\operatorname{sen}(nx)|
\end{aligned}$$

para todo  $n$ , con  $t \in [t_0, T]$ , entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \omega_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 K(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx),$$

es mayorada por la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} C e^{-n^2 c_0 (t-t_0)},$$

con  $t > t_0 \geq 0$ , y  $c_0 > 0$ . Así, vemos que cuando  $n \rightarrow \infty$ , la serie converge uniformemente y  $u_{xxt} \in C[0, T]$ .

De igual forma tomando valor absoluto en (2.2.4) y teniendo en cuenta que por hipótesis tenemos que  $K_i(t) \in C^1[0, T]$  para  $i = 1, 2$ , entonces existe  $A > 0$  tal que  $|K'(t)| < A$ ,  $0 < t \leq T$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \beta_n}{\partial t} \right| &= \left| -\varphi_n n^2 K'(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) + \varphi_n n^4 K^2(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| \leq \\
&\leq \left| -\varphi_n n^2 K'(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| + \left| \varphi_n n^4 K^2(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \varphi_n n^2 K'(t) e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| + \left| \varphi_n n^4 K^2(t) e^{-\frac{1}{2} n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \right| = \\
&= \left[ |\varphi_n| n^2 |K'(t)| e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} + |\varphi_n| n^4 |K^2(t)| e^{-n^2 \int_{t_0}^t K(\tau) d\tau} \right] |\operatorname{sen}(nx)| \leq \\
&\leq \frac{CA}{n^4} n^2 e^{-n^2 K(t^+)(t-t_0)} + \frac{C}{n^4} n^4 e^{-n^2 K(t^+)(t-t_0)} = C \left( \frac{A}{n^2} + 1 \right) e^{-n^2 K(t^+)(t-t_0)},
\end{aligned}$$

para todo  $n$ , con  $t \in [t_0, T]$ , entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \beta_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n n^2 K'(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) + \varphi_n n^4 K^2(t) e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx),$$

es mayorada por la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \left( \frac{A}{n^2} + 1 \right) e^{-n^2 c_0(t-t_0)},$$

con  $t > t_0 \geq 0$  y  $c_0 > 0$ . Por lo tanto, vemos que cuando  $n \rightarrow \infty$  la serie converge uniformemente y  $u_{tt} \in C[0, T]$ .

Ahora, representemos por  $w(x, t) = u_t(x, t)$ . La función  $w(x, t)$  satisface el siguiente PVIF:

$$w_t = K(t) w_{xx} + \frac{K'(t)}{K(t)} w, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < \pi, \quad (2.2.5)$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2.6)$$

$$w(x, 0) = K(0) \varphi''(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (2.2.7)$$

Este problema se obtiene fácilmente reemplazando  $w(x, t) = u_t(x, t)$  en las ecuaciones (2.1.1)-(2.1.2), entonces

$$(u_t)_t = (K(t) u_{xx})_t = K'(t) u_{xx} + K(t) (u_{xx})_t = K'(t) u_{xx} + K(t) (u_t)_{xx}$$

sabemos que  $u_t = K(t) u_{xx}$  y por hipótesis  $K(t) > 0$ , así, tenemos que:

$$w_t = K(t) w_{xx} + \frac{K'(t)}{K(t)} w, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Además, como  $w(x, t) = u_t(x, t)$  y  $u_{txxn}$ ,  $u_{ttn}$  convergen uniformemente, entonces  $w$  se puede derivar dos veces respecto a  $x$  y una vez respecto a  $t$ , y  $w \in C[0, T]$ .

Además,

$$u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0$$

por lo tanto

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \quad 0 < t \leq T$$

y

$$u_t(x, 0) = w(x, 0) = K(0) \varphi''(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

obteniendo así (2.2.5), (2.2.6) y (2.2.7).

Demostremos que  $w(x, t) \geq 0$  en  $\overline{Q}_T$ . Consideremos la función  $y(x, t) = w(x, t) e^{-\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es una constante positiva. La función  $y(x, t)$  es solución del problema:

$$y_t + \lambda y - \frac{K'(t)}{K(t)} y = K(t) y_{xx}, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < \pi, \quad (2.2.8)$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2.9)$$

$$y(x, 0) = K(0) \varphi''(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.2.10)$$

Este problema es obtenido al multiplicar (2.2.5)-(2.2.7) por  $e^{-\lambda t}$ , con  $\lambda$  una constante positiva, es decir,

$$\begin{aligned} w_t e^{-\lambda t} &= K(t) w_{xx} e^{-\lambda t} + \frac{K'(t)}{K(t)} w e^{-\lambda t} \\ (w e^{-\lambda t})_t + \lambda w e^{-\lambda t} &= K(t) (w e^{-\lambda t})_{xx} + \frac{K'(t)}{K(t)} (w e^{-\lambda t}) \\ y_t + \lambda y - \frac{K'(t)}{K(t)} y &= K(t) y_{xx}, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Además,

$$w(0, t) e^{-\lambda t} = w(\pi, t) e^{-\lambda t} = 0$$

entonces

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$w(x, 0) e^{-\lambda(0)} = w(x, 0) = K(0) \varphi''(x),$$

entonces

$$y(x, 0) = w(x, 0) = K(0) \varphi''(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Llegando así a (2.2.8)-(2.2.10).

Mostremos que  $y(x, t) \geq 0$  en  $\overline{Q}_T$ . Supongamos lo contrario. Sea  $(x_1, y_1)$  un punto en el cual la función  $y(x, t)$  alcanza su valor mínimo negativo en  $\overline{Q}_T$ . En primer lugar observemos que  $K(0) \varphi''(x) > 0$  para  $x \in (0, \pi)$ , esto es cierto ya que  $K(0) > 0$  con  $t \in [0, T]$  y  $\varphi''(x) > 0$ . Nosotros afirmamos que  $0 < t_1 \leq T$ . Supóngase que  $t_1 = 0$ , entonces por (2.2.9) tenemos que:

$$y(0, t_1) = y(0, 0) = w(0, t) e^{-\lambda(0)} = 0,$$

$$y(\pi, t_1) = y(\pi, 0) = w(\pi, t) e^{-\lambda(0)} = 0;$$

pero

$$y(x, 0) = K(0) \varphi''(x) > 0,$$

y por tanto  $0 < t \leq T$  y si  $x_1 = 0$

$$y(0, 0) = K(0) \varphi''(0) > 0 \quad y \quad y(0, t) = 0,$$

entonces  $0 < x_1 < \pi$ .

Entonces en el punto  $(x_1, t_1)$  se cumple que

$$y(x_1, t_1) < 0, \quad y_t(x_1, t_1) \leq 0, \quad y_{xx}(x_1, t_1) \geq 0 \quad (2.2.11)$$

ya que  $(x_1, t_1)$  es un punto mínimo de  $y(x, t)$ .

Consideremos la ecuación (2.2.8) en el punto  $(x_1, t_1)$

$$y_t(x_1, t_1) + \lambda y(x_1, t_1) - \frac{K'(t_1)}{K(t_1)} y(x_1, t_1) = K(t_1) y_{xx}(x_1, t_1).$$

Tomemos  $\lambda > \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{K'(t)}{K(t)} \right|$ . Tenemos que

$$\left[ \lambda - \frac{K'(t_1)}{K(t_1)} \right] > 0, \quad 0 \leq t_1 \leq T,$$

entonces de (2.2.11)

$$y_t(x_1, t_1) + y(x_1, t_1) \left[ \lambda - \frac{K'(t)}{K(t)} \right] < 0,$$

pero esto no puede ser, ya que

$$K(t_1) y_{xx}(x_1, t_1) \geq 0.$$

Por lo tanto la suposición inicial es falsa y  $y(x, t) \geq 0$  en  $\overline{Q}_T$ . Como  $y(x, t) = w(x, t) e^{-\lambda t} \geq 0$  entonces  $w(x, t) \geq 0$  en  $\overline{Q}_T$ .

El siguiente teorema de ayuda; cuya demostración requiere una fundamentación matemática más elevada, puede ser encontrada en Fridman A., Ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, para los lectores interesados.

**Teorema 2.2.2.** Si la función  $w(x, t)$  satisface la ecuación

$$w_t = K(t) w_{xx} + \frac{K'(t)}{K(t)} w, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < \pi,$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$w(x, 0) = K(0) \varphi''(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$w(x, t) \geq 0$  y existe un punto  $(x_2, t_2)$ ,  $0 < x_2 < \pi$ ,  $0 < t_2 \leq T$ , tal que  $w(x_2, t_2) = 0$ , entonces

$$w(x, t) = 0$$

para todo  $0 < x < \pi$ ,  $0 < t \leq t_2$ .

Mostremos ahora que  $w(x, t) > 0$  para  $0 < x < \pi$  y  $0 < t \leq T$ . Del teorema (2.2.2) se desprende que si para cierto punto  $(x_2, t_2)$  tal que  $0 < x_2 < \pi$  y  $0 < t_2 \leq T$ , se cumple que  $w(x_2, t_2) = 0$ , entonces

$$w(x, t) = 0,$$

para todo  $0 < x < \pi$  y  $0 < t \leq t_2$ .

Pero observemos que  $w(x, 0) = K(0) \varphi''(x) = 0$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ , como se sabe  $\varphi''(x) > 0$ ,  $K(0) > 0$  por las condiciones del teorema, por lo tanto  $w(x, t) > 0$  para  $0 < x < \pi$  y  $0 < t \leq T$ .

De (2.1.1) tenemos que

$$u_t = K(t) u_{xx},$$

y como  $w(x, t) = u_t(x, t) > 0$ , además  $K(t) > 0$  para  $0 < t \leq T$ . Por consiguiente  $u_{xx}(x, t) > 0$  para todo  $0 < x < \pi$  y  $0 < t \leq T$ .  $\square$

Continuemos con la demostración del teorema de unicidad de la solución del problema inverso.

De (1.2.33) se desprende que la igualdad (2.2.2) para la función  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  con  $x = x_0$  tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K_i(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx_0) = q(t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2.12)$$

Introduzcamos la función

$$a_i(t) = \int_0^t K_i(\tau) d\tau.$$

Para  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , de (2.2.12) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 a_1(t)} \operatorname{sen}(nx_0) &= q(t) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 a_2(t)} \operatorname{sen}(nx_0) &= q(t) \end{aligned}$$

restando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left[ e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)} \right] \operatorname{sen}(nx_0) = 0 \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2.13)$$

Ahora la expresión  $e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)}$  la podemos escribir de la siguiente forma

$$e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)} = -n^2 [a_1(t) - a_2(t)] * \frac{e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)}}{-n^2 [a_1(t) - a_2(t)]}; \quad (2.2.14)$$

observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 [a_1(t) - a_2(t)]} d\theta &= \frac{e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 [a_1(t) - a_2(t)]}}{-n^2 [a_1(t) - a_2(t)]} \Big|_0^1 \\ &= \frac{e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)}}{-n^2 [a_1(t) - a_2(t)]}, \end{aligned}$$

entonces (2.2.14) la podemos escribir como

$$e^{-n^2 a_1(t)} - e^{-n^2 a_2(t)} = -n^2 [a_1(t) - a_2(t)] \cdot \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 [n^2 a_1(t) - n^2 a_2(t)]} d\theta.$$

Así, (2.2.13) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$b(t) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx_0) \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 b(t)} d\theta = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2.15)$$

donde  $b(t) = a_1(t) - a_2(t)$ .

Consideremos la función

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx_0) \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 b(t)} d\theta;$$

demostramos que esta función es continua para  $t \in [0, T]$ . Observemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t),$$

donde

$$\phi_n(t) = \varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx_0) \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t) - \theta n^2 b(t)} d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge uniformemente.

Esto es cierto, ya que es mayorada por la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2},$$

entonces, por el criterio Weierstrass la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  la serie converge uniformemente, y por lo tanto la suma  $\phi(t)$  es una función continua en  $[0, T]$ .

Demostremos ahora que  $\phi(t) < 0$  para todo  $t \in [0, T]$ . Evaluando  $\phi(t)$  en cero tenemos

$$\phi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx_0), \quad (2.2.16)$$

con  $x_0 \in (0, \pi)$ . Observemos que el lado izquierdo de (2.2.16) es simplemente la segunda derivada de  $\varphi(x)$  en  $x_0$  y por la hipótesis del teorema,  $\varphi''(x) > 0$  para todo  $x \in (0, \pi)$ ; es decir, que de (2.2.16),

$$\phi(0) = -\varphi''(x_0) < 0, \quad (2.2.17)$$

por lo tanto  $\phi(0) < 0$ .

Supongamos que  $\phi(t)$  se hace igual a cero en el segmento  $[0, T]$ . Denotemos por  $t_0$  el primer cero de la función  $\phi(t)$  en el segmento  $[0, T]$ . De la desigualdad (2.2.17) se desprende que  $t_0 > 0$ . Así que  $\phi(t) < 0$  para  $t \in [0, t_0]$ , y a partir de la igualdad (2.2.15) la función  $b(t) = 0$  para  $t \in [0, t_0]$ .

Entonces

$$\begin{aligned}\phi(t_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \operatorname{sen}(nx_0) \int_0^1 e^{-n^2 a_2(t_0) - \theta n^2 b(t_0)} d\theta = \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0),\end{aligned}$$

y como se discutió anteriormente la segunda derivada con respecto a  $x$  de la solución del problema (2.2.1)-(2.2.3) es positiva para  $0 < x < \pi$  y  $0 < t \leq T$ , tenemos que  $\phi(t_0) \neq 0$  lo que contradice el supuesto de que en  $t_0$ , la función  $\phi(t)$  vale cero.

Por lo tanto,  $\phi(t) < 0$  para todo  $t \in [0, T]$ , y de (2.2.15) tenemos  $b(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ . Entonces  $K_1(t) = K_2(t)$  para  $t \in [0, T]$ .

Observación: Es claro que el teorema (2.2.1) sigue siendo válido si la condición  $\varphi''(x) > 0$  para  $x \in (0, \pi)$  se cambia por la condición  $\varphi''(x) < 0$  para  $x \in (0, \pi)$ .  $\square$

# CAPÍTULO 3

## Solución del problema inverso y experimentos numéricos

Sea

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx) \quad (3.1)$$

la solución del problema

$$u_t = K(t) u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.4)$$

donde el conjunto

$$Q_T = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t \leq T\}.$$

El problema inverso consiste en identificar el coeficiente  $K(t)$  si conocemos la siguiente información suplementaria:

$$u(x_0, t) = q(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.5)$$

es decir, hemos medido la temperatura en el punto  $x_0 \in (0, \pi)$  durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

El problema inverso planteado es equivalente al problema de hallar la solución de la ecuación no lineal:

$$Ak = q, \quad (3.6)$$

donde el operador  $A$  se define de la siguiente manera

$$Ak = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx_0). \quad (3.7)$$

Demostremos que el problema de hallar la solución de (3.6) es un problema mal puesto si consideramos que  $A$  actúa del espacio  $C[0, T]$  en el espacio  $C[0, T]$ ; es decir, la información suplementaria  $q(t)$  puede darse en forma aproximada en la métrica uniforme.

En primer lugar, de la fórmula (3.7) se desprende que la ecuación (3.6) no puede tener solución  $K(t) \in [0, T]$  si  $q(t) \in C[0, T]$  pero no pertenece a  $C'[0, T]$ .

Así que una condición necesaria para la existencia de la solución del problema (3.6) es que  $q(t) \in C'[0, T]$ , ya que en la parte izquierda de (3.5) esta la función información suplementaria  $u(x_0, t)$ , la cual tiene derivada parcial continua respecto a  $t$ .

Para el problema de hallar la solución de la ecuación (3.6), no se cumple incluso la condición de estabilidad en el caso cuando el operador se considera que actúa de  $C[0, T]$  en  $C[0, T]$ .

Tomemos  $K(t) \in C[0, T]$ , y sea la sucesión

$$K_p(t) = K(t) + K_0 \cos(pt), \quad p = 1, 2, \dots$$

donde  $0 < K_0 < \min_{t \in [0, T]} K(t)$ , entonces  $K_p(t) \in C[0, T]$ , y  $K_p(t) > 0$  para  $t \in [0, T]$  y

$$\begin{aligned} \|K_p(t) - K(t)\| &= \|K(t) + K_0 \cos(pt) - K(t)\| = \|K_0 \cos(pt)\| = \\ &= \max_{t \in [0, T]} |K_0 \cos(pt)| = |K_0|, \end{aligned}$$

cuando  $p \rightarrow \infty$ .

Ahora,

$$\|AK_p(t) - AK(t)\| = \left\| \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K_p(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx_0) - \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx_0) \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t [K(\tau) + K_0 \cos(p\tau)] d\tau} \operatorname{sen}(nx_0) - \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \operatorname{sen}(nx_0) \right\| = \\
&= \left\| \varphi_n \operatorname{sen}(nx_0) \begin{bmatrix} e^{-n^2 \int_0^t [K(\tau) + K_0 \cos(p\tau)] d\tau} & - e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \varphi_n \operatorname{sen}(nx_0) \left\| \begin{bmatrix} e^{-n^2 \int_0^t [K(\tau) + K_0 \cos(p\tau)] d\tau} & - e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \varphi_n \operatorname{sen}(nx_0) \left\| \begin{bmatrix} e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} & \begin{bmatrix} e^{-n^2 \int_0^t K_0 \cos(p\tau) d\tau} & - 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \varphi_n \operatorname{sen}(nx_0) \left\| \begin{bmatrix} e^{-n^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} & \begin{bmatrix} e^{-n^2 \frac{K_0 \operatorname{sen}(p\tau)}{p}} & - 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

la cual tiende a cero cuando  $p \rightarrow \infty$ .

---

### 3.1. Experimentos numéricos

---

Para esta sección utilizaremos el método de Crank-Nicolson obteniendo así una aproximación numérica a nuestra solución del problema directo (3.2)-(3.4), luego evaluamos  $u(x, t)$  en  $x_0 \in (0, \pi)$ , llegando a que  $Ak = q(t)$ , luego derivamos con respecto a  $t$  y obtenemos (si es posible) nuestra  $K(t)$ , que es el problema inverso propuesto.

Para el método usado, primero se selecciona un entero  $m > 0$  y un paso de tiempo  $\kappa > 0$  y  $h = \frac{l}{m}$ . Los puntos de red para este caso son  $(x_i, t_i)$ , donde  $x_i = ih$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ , y  $t_j = j\kappa$ , para  $j = 0, 1, \dots$

Este método es llamado de diferencias promediadas o de Crank-Nicolson, y tiene un error local de truncamiento del orden  $O(k^2 + h^2)$ , siempre y cuando se cumplan las condiciones normales de diferenciabilidad, y está representado en la forma matricial:

$$Aw^{(j+1)} = Bw^{(j)}, \quad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \dots$$

donde las matrices  $A$  y  $B$  están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} (1 - \lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) \end{bmatrix}$$

donde

$$\lambda = K(t) \frac{\kappa}{h^2} \quad y \quad w^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m-1,j})^t.$$

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $\varphi(x) = \text{sen}(mx)$ , entonces la solución del problema directo esta dada por

$$u(x, t) = 2e^{-m^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(mx), \quad (3.1.1)$$

esta para  $m = n$ , ya que para  $m \neq n$  la solución es la trivial. Evaluando (3.1.1) en  $x_0 = \frac{\pi}{2m}$  obtenemos que

$$u(x_0, t) = u\left(\frac{\pi}{2m}, t\right) = 2e^{-m^2 \int_0^t K(\tau) d\tau} = q(t), \quad (3.1.2)$$

derivando (3.1.2) respecto a  $t$  obtenemos

$$q'(t) = -2m^2 K(t) e^{-m^2 \int_0^t K(\tau) d\tau}. \quad (3.1.3)$$

Despejando  $K(t)$  de (3.1.3) obtenemos

$$K(t) = \frac{-q'(t)}{2m^2 e^{-m^2 \int_0^t K(\tau) d\tau}}, \quad (3.1.4)$$

de (3.1.2) tenemos que (3.1.4) se puede escribir como

$$K(t) = \frac{-q'(t)}{m^2 q(t)}. \quad (3.1.5)$$

En (3.1.5) vemos que  $q(t)$  no puede ser cero; de serlo  $K(t)$  no podría ser determinada.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $\varphi(x) = \text{sen}(2x)$ , entonces la solución del problema directo esta dada por:

$$u(x, t) = 2e^{-2 \int_0^t K(\tau) d\tau} \text{sen}(2x). \quad (3.1.6)$$

Evaluando (3.1.6) en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  obtenemos que

$$u(x_0, t) = u\left(\frac{\pi}{4}, t\right) = 2e^{-4 \int_0^t K(\tau) d\tau} = q(t), \quad (3.1.7)$$

derivando (3.1.7) respecto a  $t$  obtenemos

$$q'(t) = -2 * 4K(t) e^{-4 \int_0^t K(\tau) d\tau}. \quad (3.1.8)$$

Despejando  $K(t)$  de (3.1.8) obtenemos

$$K(t) = \frac{-q'(t)}{-2 * 4e^{-4 \int_0^t K(\tau) d\tau}}, \quad (3.1.9)$$

de (3.1.7) tenemos que (3.1.9) se puede escribir como

$$K(t) = \frac{-q'(t)}{4q(t)}. \quad (3.1.10)$$

En (3.1.10) vemos que  $q(t)$  no puede ser cero; de serlo  $K(t)$  no estaría determinada.

# ANEXOS

Programa en Matlab para  $f(x) = \text{sen}(2x)$  en nuestro problema inverso, que es el ejemplo 3.1.2, de la sección anterior.

```
function w = Prog03

syms n t to eps Cn x K tao f fi m;

% u=symsum(Cn*f*sin(n*x),'n',1,5);

for i=1:10
    u=exp(-(4)*K*t)*sin(2*x);
    uxo=eval(subs(u,'pi/4','x'));
    der=eval(subs(diff(u,'t'),'pi/4','x'));
    Q(i)=eval(subs(uxo,'i','t'));
    DQ(i)=eval(subs(der,'i','t'));
    Sol(i)=-DQ(i)/(Q(i)*4);
end;

Kt = [Q',DQ',Sol']
```

```
u=exp(-4)*sin(t))*sin(2*x); figure, ezmesh(u, [1 10 0 pi]);
u=exp(-4)*log(t))*sin(2*x); figure, ezmesh(u, [1 10 0 pi]);
```

```
%figure, ezsurf(u,[0 pi 0.1 10]);
```

```
%w=[Q,DQ,Sol]';
```

```
ans =
```

```
[ exp(-4*conj(K))
 [ exp(-8*conj(K))
 [ exp(-12*conj(K))
 [ exp(-16*conj(K))
 [ exp(-20*conj(K))
 [ exp(-24*conj(K))
 [ exp(-28*conj(K))
 [ exp(-32*conj(K))
 [ exp(-36*conj(K))
 [ exp(-40*conj(K))
```

```
ans =
```

```
[ -4*conj(K*exp(-4*K))
 [ -4*conj(K*exp(-8*K))
 [ -4*conj(K*exp(-12*K))
```

[ -4\*conj(K\*exp(-16\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-20\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-24\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-28\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-32\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-36\*K))]  
[ -4\*conj(K\*exp(-40\*K))]

Kt =

[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]  
[ conj(K)]

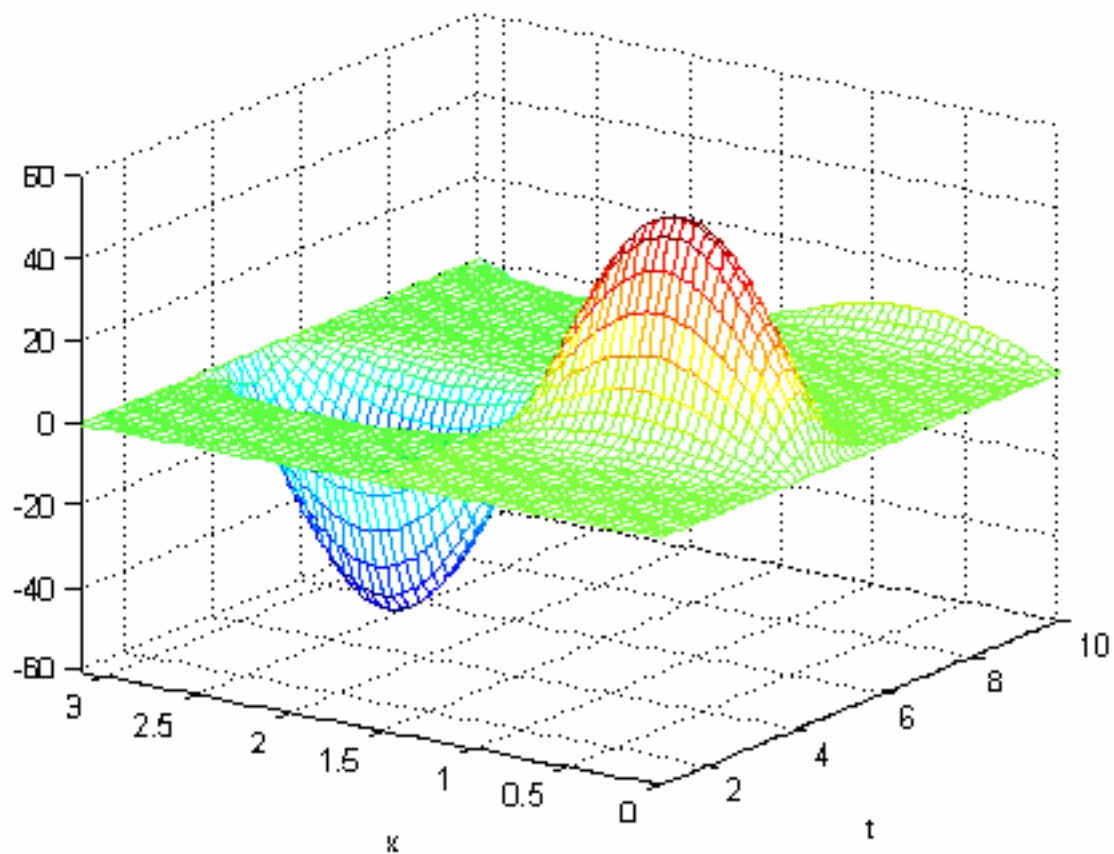


Figura 3.1: Conducción de calor con  $\varphi = \text{sen}(2x)$ , para  $T = 10$

En la figura 3.1 observamos la temperatura  $u(x, t)$  para  $0 < t \leq 10$ , con  $\varphi(x) = \text{sen}(2x)$ . La máxima temperatura la vemos en rojo y la mínima en azul.

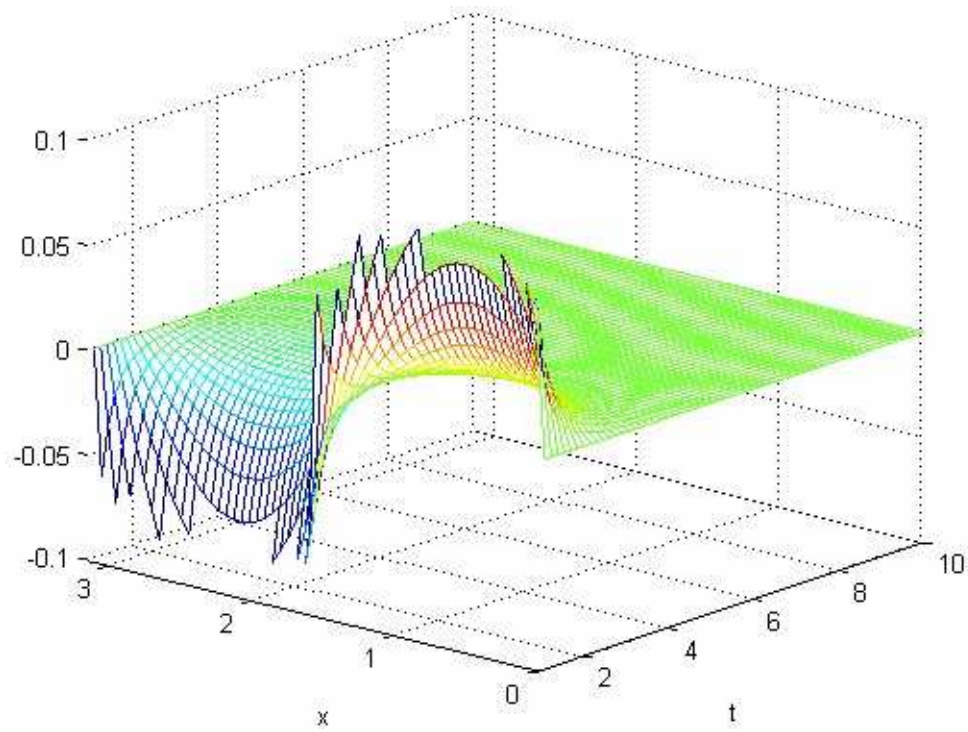


Figura 3.2: Conducción de calor con  $\varphi = \log(x)$ , para  $T = 10$

En la figura 3.2 observamos la temperatura  $u(x,t)$  para  $0 < t \leq 10$ , con  $\varphi(x) = \log(x)$ . La máxima temperatura la vemos en rojo y la mínima en azul.

# Bibliografía

- [1] A. N. TIJONOV, A. A. SAMARSKY, *Ecuaciones de la física matemática*. Moscu: URSS. 1972.
- [2] BOYCE, William, DiPrima, Richard, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cuarta Edición. México: Editorial Limusa. 2001.
- [3] APOSTOL, Tom. *Análisis matemático*. Barcelona: Reverté. 1979.
- [4] SOLANO, Silvia, *Métodos de regularización para la solución de problemas inversos*. Bucaramanga: Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. 2002.
- [5] BURDEN, Richard y FAIRES, Douglas, *Análisis numérico*. México: International Thomson editores. 1998.
- [6] O. M. Alifanov, E. A. Artyukhin y S. V. Rumyantsev. *Extreme methods for solving III-Posed problems whit aApplications to inverse heat transfer problems.*, New York, Wallingford, Begell House, inc. 1995