FUNCIONES SEMIABIERTAS Y CUASIABIERTAS ENTRE CONTINUOS

EDINSON ARDILA CABALLERO

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemticas
Bucaramanga
2010

FUNCIONES SEMIABIERTAS Y CUASIABIERTAS ENTRE CONTINUOS

AUTOR:
EDINSON ARDILA CABALLERO

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciada en Matemticas

DIRECTOR:
DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemticas
Bucaramanga
2010

Agradecimientos

En primer lugar, doy gracias a mi madre, porque me ha dado su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y mi vida. Tu sabes que todo lo que hago, lo hago por tí.

También, quiero agradecer a toda mi familia, en especial a mi padre y mis hermanos, porque me han ayudado a conseguir todo lo que tengo y a no caer cuando me siento derrotado.

Agradezco al Dr. Javier Enrique Camargo García, mi director de tesis, por brindarme la posibilidad de trabajar con él y así, poder realizar este trabajo. Espero poder seguir investigando al lado de una persona como usted.

Cariñosamente doy gracias a Luzdary, Yuli Katherine y Ana Mayerly, por brindarme su amistad y ser un apoyo espiritual, psicológico y moral en mi vida. Ojalá que todo lo que se propongan lo logren.

Finalmente, quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander, a la Escuela de Matemática y a todos sus miembros entre maestros y alumnos.

En especial, al profesor Juan De Dios, quien me ha aconsejado en lo académico y en lo personal; permitiéndome así, madurar persona.

Tabla de Contenido

RESUMEN

TÍTULO:FUNCIONES SEMIABIERTAS Y CUASIABIERTAS ENTRE CONTINUOS*

AUTOR: EDINSON ARDILA CABALLERO**

PALABRAS CLAVES: Continuo, funciones continuas, funciones Semiabiertas, funciones cuasiabiertas, composición, producto y límite.

DESCRIPCIÓN: Para cualesquiera dos espacios topológicos existen varias clases de funciones continuas. En "Continuos mapppings on continua" de T. Maćkowiak [Dissertations Math., Warsawa 158 (1979), pp. 1-91] aparecen ciertas clases de funciones continuas para espacios continuos. Estas clases de funciones son definidas por la propiedad, la cual se cumple por la imagen inversa de un subcontinuo de la imagen. En este documento, nosotros mostramos relaciones entre las funciones semiabiertas, cuasiabiertas dadas para cualquier espacio topológico en Semi-openness and almost-openness of induced mappings por Xianjiu Huang, Fanping Zeng y Gengrong Zhang [Appl. Math. J. Chinesse Univ. Ser. B 20 (2005), no. 1, 21-26] y las definidas en Continuos mappings on continua. Todas las relaciones que existen son demostradas y las que no existen son mostradas por medio de un ejemplo. Note que este estudio se realiza entre funciones continuas y sobreyectivas entre continuos, ya que estas funciones y estos espacios conservan ciertas propiedades. En continuos mappings on continua se dan propiedades generales para las clases de funciones. Nosotros verificamos que las funciones semiabiertas y cuasiabiertas cumplen las propiedades de composición, composición factor, producto, producto factor, y no cumplen las propiedades del límite y límite débil. Estas propiedades muestran que el conjunto de las funciones semiabiertas y cuasiabiertas con la operación de composición son un semigrupo.

---

*Dr. JAVIER CAMARGO GARCÍA Advisor, Director del Trabajo de Grado.

**Programa de Licenciatura en Matemticas, Escuela de Matemticas, Facultad de Ciencias, UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.

ABSTRACT

TITLE:SEMI-OPENNESS AND ALMOST-OPENNESS MAPPINGS BETWEEN CONTINUA***

AUTHOR: EDINSON ARDILA CABALLERO****

KEYWORDS: Continuum, continuous functions, semi-open function, almost-open function, composition, product and limit property.

DESCRIPTION: For any two topological spaces there are many classes of mappings. In "Continuous Mappings on Continua," T. Maćkowiak [Dissertations Math., Warsawa 158 (1979), pp. 1-91] shows some classes of continuous mappings to continua spaces. These classes of continuos are defined by the property which is satisfied by the inverse image of an arbitrary subcontinuum of the image. In our paper, we show relationships between semi-open and almost-open functions defined for any topological space in Semi-Openness and almost-Openness of induced mappings by Xianjiu Huang, Fanping Gengrong Zeng and Zhang [Appl. Math. J. Chinesse Univ Ser B 20 (2005), no. 1, 21-26] and Continuous mappings defined on continuous. All the relationships are proved and which do not exist are shown by an example. Note that this study was performed among continuous and surjective functions on continua, since these functions and spaces remain certain properties. In continuous mappings on continua are defined general properties for classes of functions. We verified that the semi-openness and almost-openess mappings satisfy the properties composition, composition factor, product, product factor, and do not meet properties of limite and weak limit. These properties show that the semi-open and almost-open mappings sets with the operation of composition is a semigroup.

***Dr. JAVIER CAMARGO GARCÍA Advisor, Director del Trabajo de Grado.

****Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.

INTRODUCCIÓN

La matemática nos ofrece muchos campos de investigación en todas sus ramas, gracias a su riqueza cognitiva y a sus múltiples aplicaciones. Todas estas investigaciones surgen del estudio de su misma estructura, donde se muestra el interés de un matemático ansioso por el conocimiento.

En la topología, existen muchos campos de investigacíon, uno de ellos se deriva de una rama de la topología conocida como la teoría de continuos. Un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. En esta rama se estudian diversas caracterśticas de los espacios y propiedades que cumplen los mismos, donde se utilizan diversos métodos para su estudio.

Para el estudio de los continuos la continuidad es necesaria pero a veces no es suficiente para preservar algunas propiedades que interesan en la teoría de continuos, entonces se hace necesario agregar condiciones adicionales. Luego, se necesitaría hacer una clasificación de estas funciones continuas, dando origen a una investigación.

En [10, Capitulo 3, pág. 12] hay un trabajo muy completo del profesor T. Maćkowiak sobre las funciones continuas entre continuos, donde se definen varias clases de funciones y cada una de ellas tiene ciertas condiciones que permiten ver cómo son las imágenes de los subconjuntos de un continuo, mostrándonos que existen varias clases de funciones y cómo generar nuevas clases.

Si hacemos un comentario referente a las clases de funciones, se puede ver que hay un gran número de funciones entre continuos, en algunos casos definidas por el interés de encontrar condiciones para que la función preserve alguna propiedad topológica o en otros casos, sólo por estudiar clases de funciones que cumplen alguna condición.

En [10, Capitulo 5, pág. 29] aparece un estudio de las siguientes propiedades: composición, composición factor, producto, producto factor y límite, donde se hace un análisis de las clases de funciones que cumplen estas propiedades. Entonces, si deseamos investigar una clase de funciones, lo ideal es ver si cumplen o no estas propiedades.

En este trabajo, la idea es mostrar dos tipos de funciones que se derivan de las funciones abiertas y a las que llamamos semiabiertas y cuasiabiertas dadas en [12]. La idea es presentar relaciones entre clases de funciones y verificar las propiedades antes mencionadas. Para desarrollar esta idea dividimos el presente escrito en tres capítulos, distribuidos de la siguiente forma:

El Capítulo 1 contiene conceptos básicos de topología, muy necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo y entendimiento del mismo.

En el Capítulo 2, mostramos las relaciones existentes entre las funciones definidas en [10, Capitulo 3, pág. 12] y las funciones semiabiertas y cuasiabiertas. Al final agregamos una relación entre los conjuntos y las funciónes semiabiertas.

Finalmente, en el Capítulo 3, describimos cada propiedad dada para funciones entre continuos, donde comentamos qué clases de funciones de [10, Capitulo 3, pág. 12] las cumplen o no, para así, finalmente verificar qué propiedades satisfacen las funciones semiabiertas y cuasiabiertas.

En los capítulos 2 y 3, mostramos resultados propios. Como el Ejemplo **??** y las proposiciones de Capítulo 3 referentes a funciones semiabiertas y cuasiabiertas.

Consideramos importante resaltar que siempre que tenemos una clase de funciones entre continuos se estudia qué tipo de continuos o propiedades de los continuos son preservadas. En nuestro caso particular, si tenemos una función entre continuos $f : X \longrightarrow Y$ tal que f es semiabierta o cuasiabierta y X es por ejemplo una dendrita, un dendroide, un $\lambda-$dendroide, un indescomponible, un unicoherente, por mencionar algunas propiedades, entonces ¿Y también satisface esta propiedad?.

Este trabajo, nos muestra que existe un universo infinito por investigar en las matemáticas y que sólo depende del interés que nace de una persona ansiosa por el conocimiento.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones básicas en topología general como conexidad, compacidad y continuidad de una función. Además, también veremos ejemplos de continuos y algunas características de los mismos.

1.1. Conceptos generales

Para comenzar, miremos conceptos muy conocidos en topología que nos servirán a lo largo de este escrito.

Definición 1.1. *Un espacio topológico es un conjunto X y una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *El conjunto vacío y X están en $\mathcal{T}$.*
2. *Para cualquier número finito de elementos en $\mathcal{T}$ tenemos que su intersecccción está en $\mathcal{T}$.*
3. *Para toda colección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$, tenemos que su unión está en $\mathcal{T}$.*

En este caso la pareja $(X, \mathcal{T})$ se dice espacio topológico y los elementos de $\mathcal{T}$ son los abiertos de X.

Ejemplo 1.2. *Es fácil verificar que los siguientes espacios son espacios topológicos.*

1. $X = \{0, 1\}$ *y* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. *Esta topología es conocida como la topología de Sierpiński.*

2. X *cualquier conjunto y* $\mathcal{T}$ *el conjunto de partes de* X. *Este espacio se conoce como el discreto y* $\mathcal{T}$ *es conocida como la topología discreta.*

3. $X = \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{T} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. *Esta topología es conocida como la topología de colas a la derecha.*

Definición 1.3. *Para $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Llamaremos la topología relativa a A, al conjunto:*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

Notemos que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio topológico.

1.1.1. Espacios Métricos

Definición 1.4. *Un espacio métrico es un conjunto no vacío X, de objetos que llamaremos puntos, dotado de una función.*

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

llamada métrica, que satisface los siguientes axiomas para x, y, z en X.

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$; *y*

2. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$. *Desigualdad triangular*

En este caso la pareja (X,d), *se dice espacio métrico.*

Definición 1.5. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Una bola* $B(x;\epsilon)$ *con centro* x *y radio* $\epsilon > 0$, *se define como el siguiente conjunto:*

$$B(x;\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$$

A continuación, daremos conceptos importantes que nos definen ciertas características de un espacio métrico. Además, mostraremos resultados propios de estas definiciones.

Definición 1.6. *Sean* X *un espacio métrico y* $U \subset X$. *Diremos que* U *es un abierto, si para todo* x *en* U *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(x;\epsilon) \subset U$. *Además, si* U *es un abierto y* $x \in U$, *diremos que* U *es una vecindad de* x *en* X.

Teorema 1.7. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $\mathcal{T} = \{U : U \text{ es abierto}\}$. *Entonces* $(X,\mathcal{T})$ *es una topología para* X.

Demostración. Veamos cada una de la condiciones para que $(X,\mathcal{T})$ sea un espacio topológico. Primero, claramente $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$, por la defininción de $\mathcal{T}$. Ahora, si U_1 y U_2 están en $\mathcal{T}$ y $x \in U_1 \cap U_2$ tenemos que existen ϵ_1 y ϵ_2 mayores que 0 tales que $B(x;\epsilon_1) \subset U_1$ y $B(x;\epsilon_2) \subset U_2$, entonces si tomamos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ tenemos que $B(x;\epsilon) \subset U_1 \cap U_2$. Luego, $U_1 \cap U_2$ está en $\mathcal{T}$. Por último, si tomamos $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$, $V = \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U$ y $x \in V$, tenemos que existen $U \in \mathcal{I}$ y $\epsilon > 0$ tales que $B(x;\epsilon) \subset U$. Luego, $B(x;\epsilon) \subset V$. Por lo tanto, V está en $\mathcal{T}$. $\square$

Observación 1.8. *Del Teorema 1.7, tenemos que todo espacio métrico es un espacio topológico. Además, es fácil ver que para el primer espacio topológico*

dado en el Ejemplo 1.2 no existe una métrica sobre X, tal que ésta genere la topología de Sierpiński, ya que si hay una distancia entre estos dos puntos tenemos que $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos.
Si un espacio topológico es generado por una métrica diremos que el espacio es metrizable. A continuación, todos los espacios que consideramos en este escrito son metrizables y todos los abiertos son dados como en la Definición 1.6.

Definición 1.9. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Llamaremos a la clausura de A en X al conjunto:*

$$Cl_X(A) = \{x \in X : \textit{para cada } U \textit{ vecindad de } x \textit{ en } X,\ U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.10. *Sean X un espacio métrico y $B \subset X$. Diremos que B es cerrado en X si $X \setminus B$ es abierto en X.*

Observación 1.11. *Notemos que si X es un espacio métrico y $x \in X$ entonces $\{x\}$ es un cerrado en X, ya que para todo $y \in X \setminus \{x\}$ existe $\epsilon = d(x, y) > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset X \setminus \{x\}$. Siempre que un espacio cumple esta propiedad, se dice que es T_1. Así todo espacio métrico es T_1.*

Proposición 1.12. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es cerrado si y sólo si $A = Cl_X(A)$.*

Demostración. Supongamos que x está en $X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es un abierto de X, tenemos que existe U vecindad de x tal que $U \subset X \setminus A$. Así, $U \cap A = \emptyset$ y $x \notin Cl_X(A)$. Con lo que concluimos que $Cl_X(A) \subset A$.
La otra implicación es inmediata, ya que todo punto de A es punto de la clausura. $\square$

Definición 1.13. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Llamaremos la frontera de A en X al conjunto:*

$$Fr(A) = Cl_X(A) \cap Cl_X(X \setminus A).$$

Definición 1.14. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Llamaremos el interior de A en X al conjunto:*

$$Int_X(A) = \{x \in A : \textit{existe } U \textit{ vecindad de } x, \textit{ tal que } U \subset A\}.$$

Proposición 1.15. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es abierto en X si y sólo $Int_X(A) = A$.*

Demostración. Supongamos primero que A es abierto en X. Notemos que por la Definición 1.14, $\mathrm{Int}_X(A) \subset A$. Ahora, sea $x \in A$. Como A es abierto, A es vecindad de x y, claramente, $A \subset A$. Así, $x \in \mathrm{Int}_X(A)$ y $\mathrm{Int}_X(A) = A$. Ahora, si $x \in A = \mathrm{Int}_X(A)$, entonces existe U vecindad de x tal que $U \subset A$. Por lo tanto, A es abierto.

□

1.1.2. Conexidad

La noción de conexidad de un espacio métrico es muy importante para llegar a la definición de continuo. A continuación mostraremos la definición y algunas propiedades de la conexidad.

Definición 1.16. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X es conexo si no puede ser escrito como la unión disyunta de dos conjuntos abiertos no vacíos de X.*

Observación 1.17. *Si $C \subset X$, donde X es un espacio métrico. Entonces diremos que C es conexo, si satisface la Definición 1.16 con la topología relativa a C.*

Definición 1.18. *Un espacio X es completamente normal, si X es T_1 y para cualesquiera A y B subconjuntos separados de X; es decir, $(Cl_X(A) \cap B) \cup (A \cap Cl_X(B)) = \emptyset$, tenemos que existen U y V abiertos disyuntos en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Teorema 1.19. *Todo espacio métrico es completamente normal*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y definamos la distancia $d(x, K)$, donde $x \in X$ y $K \subset X$, como:

$$d(x, K) = \text{ínf}\{d(x, k) : k \in K\}.$$

Se puede probar fácilmente que la distancia $d(x, K)$ está bien definida y es continua. Ahora, sean A y B conjuntos separados de X y tomemos $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ y $V = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$ subconjuntos de X. Dado que para todo $a \in A$, $d(a, B) > 0$, porque $(Cl_X(A) \cap B) = \emptyset$ y $d(a, A) = 0$, tenemos que $A \subset U$, igualmente que $B \subset V$. Luego, U y V son no vacíos. Ahora, sea z en X, como $d(z, A) < d(z, B)$ ó $d(z, A) > d(z, B)$, pero no ambas, tenemos que U y V son disyuntos.
Para terminar, veamos que U y V son abiertos de X. Sean $x \in U$, $\delta = d(x, B) - d(x, A)$ y y un punto arbitrario de $B(x; \frac{\delta}{2})$. Ahora, por la desigualdad triangular tenemos que $d(y, A) < d(x, A) + \frac{\delta}{2}$. Observemos que $d(y, B) > d(x, A) + \frac{\delta}{2}$ y $d(y, B) + \frac{\delta}{2} > d(x, B)$, debido a que $d(y, B) + \frac{\delta}{2} > d(x, A) + \delta$. Por lo tanto, $y \in U$ y dado que y fue arbitrario existe $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ tal que $B(x; \frac{\delta}{2}) \subset U$. Así, U es abierto en X. Para probar que V es abierto, basta tomar $2\epsilon = d(x, A) - d(x, B)$ y la demostración es identica. Por lo tanto, existen U y V abiertos disyuntos de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por último X es T_1 por la Observacón 1.11.

$\square$

Teorema 1.20. *Sean X un espacio métrico y $C \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *C no es conexo;*

2. *$C = A \cup B$, donde A y B son diferentes del vacío y $(Cl_X(A) \cap B) \cup (A \cap Cl_X(B)) = \emptyset$;*

3. *Existen U y V abiertos disyuntos de X tales que $C \cap U \neq \emptyset$, $C \cap V \neq \emptyset$ y $C \subset U \cup V$.*

Demostración. Probemos que (1) implica (2). Por hipótesis, tenemos que C no es conexo entonces existen U_1 y V_1 abierto en C tales que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ y $C = U_1 \cup V_1$. Como U_1 y V_1 son abiertos de C, existen U y V abiertos de X tal que $U \cap C = U_1$ y $V \cap C = V_1$. Tomemos $A = U_1$ y $B = V_1$. Debemos probar que $(Cl_X(A) \cap B) \cup (A \cap Cl_X(B)) = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in (Cl_X(A) \cap B)$. Notemos que $x \in V$, luego $V \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $V \cap U_1 \neq \emptyset$. Así, $U \cap V \cap C \neq \emptyset$, lo cual es falso, pues $U \cap V \cap C = (U \cap C) \cup (V \cap C) = U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Entonces $(Cl_X(A) \cap B) \cup (A \cap Cl_X(B)) = \emptyset$. Ahora, notemos que (2) implica (3) se sigue del Teorema 1.19.
Por último, notemos que (3) implica (1) es inmediata, ya que $U \cap C$ y $V \cap C$ son abiertos disyuntos no vacíos de la topología relativa a C tal que $C = (U \cap C) \cup (V \cap C)$.

$\square$

Observación 1.21. *Si tenemos X un espacio métrico y $A \subsetneq X$ no vacío tal que A es abierto y cerrado en X entonces X no es conexo, ya que $X \setminus A$ y A son abiertos disyuntos no vacíos en X tales que $X = (X \setminus A) \cup A$.*

Ahora, veamos la conexidad de modo local para todo espacio.

Definición 1.22. *Un espacio X es localmente conexo en el punto x, si para cualquier vecindad V de x existe una vecindad conexa U de x tal que $x \in U$ y $U \subset V$. Si X es localmente conexo en cada punto decimos que X es localmente conexo.*

Teorema 1.23. *Sea X un espacio métrico, $A \subset X$ conexo no vacío y $p \notin A$. Entonces $p \notin Cl_X(A)$ si y sólo si $A \cup \{p\}$ no es conexo.*

Demostración. Para la primera implicación, Como $\{p\}$ y A son subconjuntos separados de X, tenemos que existen U y V abiertos de X tal que $\{p\} \subset U$ y $A \subset V$. Luego, $A \cup \{p\}$ no es conexo, por Teorema 1.20. Ahora, supongamos que $Y = A \cup \{p\}$ no es conexo. Entonces existen U y V abiertos disyuntos no vacíos en X tales que $Y \subset U \cup V$, donde $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$, por Teorema 1.20. Luego, como A es conexo tenemos que $A \subset U$ o $A \subset V$. Supongamos que $A \subset U$, entonces $\{p\} \subset V$. Así, existe V vecindad de p en X tal que $A \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $p \notin Cl_X(A)$. □

Definición 1.24. *Sean X un espacio métrico y $C \subset X$. Entonces C es una componente de X si C es un conexo maximal de X; es decir, C es conexo y no existe un subconjunto conexo $B \subset X$ tal que $C \subsetneq B$.*

1.1.3. Compacidad

Definición 1.25. *Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ y I un conjunto no vacío. La colección $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$, donde U_α es abierto en X, se llama un cubrimiento de A en X si $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Además, la colección $\{U_\beta : \beta \in J\}$ con $J \subset I$, donde $A \subset \bigcup_{\beta \in J} U_\beta$ se llama subcubrimiento de A en X.*

A continuación, daremos la definición de compacidad y después algunos teoremas y proposiciones referentes a espacios métricos compactos.

Definición 1.26. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es compacto si para todo cubrimiento de A en X existe un subcubrimiento finito en A en X.*

Proposición 1.27. *Sea X un espacio métrico compacto y $A \subset X$. Entonces A es compacto si y sólo si A es cerrado.*

Demostración. Veamos que $X \setminus A$ es abierto. Sea x en $X \setminus A$. Definamos $\mathcal{U} = \{B(y;\epsilon_y) : y \in A\}$ donde $\epsilon_y = \frac{d(x,y)}{2}$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A y A es compacto se tiene que existen $y_1, y_2, ..., y_n$ en A tal que $\mathcal{U}' = \{B(y_i;\epsilon_{y_i}) : i \in \{1, ...n\}\}$ es un subcubrimiento finito de A. Entonces, tomemos $W = \bigcap_{i=1}^{n} B(x;\epsilon_{y_i})$. Claramente, W es una vecindad de x tal que $W \subset X \setminus A$. Así, $X \setminus A$ es abierto.
Ahora, veamos la otra implicación. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de A. Como A es cerrado tenemos que $X \setminus A$ es abierto en X. Entonces si definimos $\mathcal{V} = \{(X \setminus A) \cup U : U \in \mathcal{U}\}$ tenemos que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X. Luego, como X es compacto tenemos que existen $U_1, U_2, ..., U_n$ en $\mathcal{U}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n}((X \setminus A) \cup U_i)$. De esta manera, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, donde $U_1, U_2, ..., U_n$ están en $\mathcal{U}$. Luego, $\{U_1, ..., U_n\}$ es un subcubrimiento finito de A. Por lo tanto, A es compacto. $\square$

Observemos que todo espacio métrico satisface la siguiente proposición, por Teorema 1.20.

Proposición 1.28. *Sean X un espacio métrico, A y B subconjuntos cerrados y no vacíos en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces existen U y V abiertos disyuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Proposición 1.29. *Sea X un compacto. Si C es una componente de X entonces C es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que C no es cerrado, entonces existe x en $Cl_X(C) \setminus C$. Sea $D = C \cup \{x\}$. Notemos que D es conexo y $C \subsetneq D$, por Proposición 1.23. Así, llegamos a una contradicción, ya que C es un conexo maximal. □

A continuación veremos dos teoremas muy importantes en la teoría de continuos. Estos teoremas los utilizaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 1.30. *(Cable cortado). Sea X un espacio métrico compacto, A y B cerrados no vacíos de X. Si no existe conexo en X que interseca a A y B simultáneamente, entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados disyuntos tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Una prueba del Teorema del cable cortado puede consultarse en [8, Teorema 5.2, pág. 72]. La demostración no se hace en este escrito, ya que para su construcción se necesitan conceptos que extenderían mucho el desarrollo de esta monografía.

Teorema 1.31. *(Golpes en la frontera). Sean X un espacio métrico compacto, conexo y U un subconjunto abierto propio de X. Si A es una componente de $Cl_X(U)$ entonces $A \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $A \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$. Como A y $\mathrm{Fr}(U)$ son cerrados en $Cl(U)$ y no existe una componente en $Cl(U)$ que interseca a A y $\mathrm{Fr}(U)$ simultáneamente, ya que A es una componente, entonces existen C_1 y C_2 cerrados disyuntos en $Cl(U)$ tales que $A \subset C_1$, $\mathrm{Fr}(U) \subset C_2$ y $Cl(U) = C_1 \cup C_2$, todo esto por el Teorema 1.30. Ahora, definamos $C_3 = C_2 \cup X \setminus U$, cerrado en X. Notemos que C_1 y C_3 son cerrados no vacíos de X. Ahora, como $C_1 \cap C_3 = C_1 \cap (C_2 \cup (X \setminus U)) = (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap (X \setminus U))$ y, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C_1 \cap X \setminus U = \emptyset$, tenemos que $C_1 \cap C_3 = \emptyset$. Además, como $X = C_1 \cup C_3$, tenemos que X no es conexo, por Proposición 1.28. Entonces $A \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$. □

1.2. Funciones continuas

Las funciones que queremos describir en este trabajo supondremos que siempre son continuas y sobreyectivas.

Definición 1.32. *Sean (X, d) y (Y, m) espacios métricos. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en a, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$, entonces $m(f(x), f(a)) < \epsilon$.*

Diremos que f es *continua* en X, si f es continua en todo punto a de X.

Proposición 1.33. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios métricos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es continua.

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$, para cada a en X.

(3) $f^{-1}(V)$ es abierto, para todo abierto V en Y.

(4) $f^{-1}(B)$ es cerrado, para todo cerrado B en Y.

Demostración. Probemos que (1) implica (2). Sean $a \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la Definición 1.32 existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$ entonces $m(f(x), f(a)) < \epsilon$. Luego, si $x \in B(a; \delta)$, entonces tenemos que $f(x) \in B(f(a); \epsilon)$. Por lo tanto, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$.

Ahora, probemos que (2) implica (3). Sean V abierto en Y y x en $f^{-1}(V)$. Como V es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subset V$. Entonces por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x;\delta)) \subset B(f(x);\epsilon) \subset V$. Luego, $B(x;\delta) \subset f^{-1}(V)$. Así, $f^{-1}(V)$ es un abierto.

Miremos ahora que (3) implica (4). Sea B un cerrado en Y, entonces $Y \setminus B$ es abierto en Y. Luego, $f^{-1}(Y \setminus B)$ es abierto en X. Así, $X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)$ es cerrado en X. Por lo tanto, como $f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)$, tenemos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

Por último veamos que (4) implica (1). Sean $\epsilon > 0$ y $a \in X$. Por hipótesis tenemos que $Y \setminus B(f(a);\epsilon)$ es cerrado en Y. Luego $f^{-1}(Y \setminus B(f(a);\epsilon))$ es cerrado en X. Entonces $X \setminus f^{-1}(Y \setminus B(f(a);\epsilon)) = f^{-1}(B(f(a);\epsilon))$ es abierto en X. Así, existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(B(f(a);\epsilon))$. De esta manera, si $d(x, a) < \delta$ entonces x está en $B(a;\delta)$. Luego, x está en $f^{-1}(B(f(a);\epsilon))$. Por lo tanto, $f(x)$ está en $(B(f(a);\epsilon))$. Así, $m(f(x), f(a)) < \epsilon$. □

A continuación, veremos que las funciones continuas conservan ciertas propiedades de los espacios.

Proposición 1.34. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua sobre espacios métricos y $A \subset X$. Si A es compacto entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de $f(A)$. Notemos que entonces $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento de A. Como A es compacto existen $U_1, U_2, ..., U_n$ en $\mathcal{U}$ tales que $A \subset f^{-1}(U_1) \cup ... \cup f^{-1}(U_n)$. Por lo tanto, $f(A) \subset U_1 \cup ... \cup ...U_n$. Así, $f(A)$ es compacto. □

Los siguientes corolarios se siguen de manera directa de las Proposiciones 1.34 y 1.27.

Corolario 1.35. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios métricos compactos y $A \subset X$. Si A es cerrado entonces $f(A)$ es cerrado.*

Corolario 1.36. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre espacios métricos compactos y $B \subset Y$. Entonces B es compacto si y sólo si $f^{-1}(B)$ es compacto.*

Con el siguiente resultado mostramos que al igual que la compacidad, la conexidad se preserva por funciones continuas.

Proposición 1.37. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y $A \subset X$. Si A es conexo entonces $f(A)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(A)$ no es conexo, entonces existen U_1 y U_2 abiertos disyuntos de Y, tales que $f(A) \subset U_1 \cup U_2$, donde $f(A) \cap U_1 \neq \emptyset$ y $f(A) \cap U_2 \neq \emptyset$. Luego, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Como f es continua, $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son abiertos disyuntos en X. Claramente, tenemos que $A \cap f^{-1}(U_1) \neq \emptyset$ y $A \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$. De esta manera, tenemos que A no es conexo, por Teorema 1.20. $\square$

1.3. Continuos

En esta sección, definiremos continuo, daremos ejemplos de continuos y mostraremos algunas caraterísticas particulares de ellos.

Definición 1.38. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Observación 1.39. *Si X es un continuo y $A \subset X$ no vacío, diremos que A es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.*

Observación 1.40. *Diremos que A es un continuo degenerado, si A es un conjunto con un único punto.*

A continuación, veremos algunos ejemplos de continuos, para estos continuos no especificaremos la métrica, ya que es la métrica usual en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.41. *Cuando leemos la definición de continuo es natural imaginar los siguientes ejemplos: El intervalo* $[0,1]$*, la circunferencia de radio unitario* S^1*, una dos celda* $[0,1]^2$ *y el toro* $S^1 \times S^1$*.*
Gráficamente:

$[0,1]$ S^1 $[0,1]^2$ $S^1 \times S^1$

Figura 1.1

En cambio, hay continuos que no se ven tan fácilmente y tienen ciertas propiedades que otros no. Por ejemplo, los continuos dados anteriormente son localmente conexos. A continuación, veremos un continuo que no es localmente conexo.

Ejemplo 1.42. *Sea* $S_T = Cl_{\mathbb{R}^2}\{(x,y) : 0 < x \leq 1,\ y = \operatorname{sen}(1/x)\}$*. El espacio* S_T *es conocido como el "seno del topólogo". Este es un continuo que no es localmente conexo.*
Gráficamente:

V

*(1,*sen 1*)*

x x

(-1,0)

Figura 1.2

Veamos que S_T *no es localmente conexo. Si tomamos un punto* x *en la* *barra límite* $\{0\}\times[-1,1]$ *tenemos que para alguna vecindad* V *de* x*, no existe una vecindad abierta conexa* U *de* x *tal que* $x \in U \subset V$ *(Ver figura 1.2).*

Proposición 1.43. *Sea* X *un continuo,* Q *un subcontinuo de* X *y* $A \subset X$*. Si Fr*$(A) \cap Q = \emptyset$ *entonces* $A \cap Q$ *es cerrado en* Q*.*

Demostración. Si $A \cap Q = \emptyset$, es inmediato. Ahora, si $A \cap Q \neq \emptyset$, como $Q \setminus (A \cap Q) = (Q \setminus A) \cup (Q \setminus Q) = Q \setminus A$ mostraremos que $Q \setminus A$ es un abierto en Q. Sea $x \in Q \setminus A$ entonces $x \in (X \setminus A) \cap Q$. Como $x \in Q$ y $x \notin \mathrm{Fr}(A)$ tenemos que $x \in X \setminus Cl_X(A)$, el cual es un abierto en X. Entonces existe U vecindad de x tal que $U \subset X \setminus Cl_X(A) \subset X \setminus A$. Así, $U \cap Q \subset Q \setminus A$. Por lo tanto, existe $U \cap Q$ abierto en Q tales que $U \cap Q \subset Q \setminus A$. De esta manera, $A \cap Q$ es un cerrado en Q. □

Los siguientes resultados son inmediata consecuencia de las propiedades enunciadas en este capítulo.

Corolario 1.44. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua sobre continuos y* $A \subset X$*. Si* A *es un subcontinuo de* X *entonces* $f(A)$ *es un subcontinuo de* Y*.*

Corolario 1.45. *Toda componente* C *de un espacio métrico compacto* X *es un continuo en* X

Corolario 1.46. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua entre continuos y* Q *un subcontinuo de* Y*. Si* C *es una componente de* $f^{-1}(Q)$*, entonces* C *es un subcontinuo de* X*.*

Capítulo 2

Funciones Continuas entre Continuos

En este capítulo mostramos las relaciones que existen entre las funciones semiabiertas y cuasiabiertas con otras clases de funciones continuas definidas entre continuos.

Primero, definiremos ciertas clases de funciones continuas entre continuos. Después, relacionaremos todas estas funciones sin incluir las funciones semiabiertas y cuasiabiertas, para establecer una estructura que nos facilite mostrar una similitud con las funciones semiabiertas y cuasiabiertas.

2.1. Clases de funciones

Las funciones continuas entre continuos son una parte importante en el estudio de la teoría de continuos, ya que, gracias a ellas, se conservan algunas propiedades de los espacios.

Existen varias clases de funciones continuas entre continuos, entre ellas se encuentran los homeomorfismos que son funciones bicontinuas y biyectivas. Esta clase de funciones preserva muchas propiedades. Sin embargo, la definición de homeomorfismo involucra muchas condiciones sobre la función y en general las funciones no son tan ideales.

A continuación definiremos clases más amplias de funciones entre continuos las cuales estudiaremos en el desarrollo de este escrito.

Definición 2.1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva definida entre continuos. Decimos que f es:*

1. *Un homeomorfismo, si f es inyectiva.*

2. *Abierta, si $f(U)$ es abierto en Y, para cualquier abierto U de X.*

3. *Atómica, si para cualquier subcontinuo K de X tal que $f(K)$ no es degenerado tenemos que $K = f^{-1}(f(K))$.*

4. *Monótona, si para cualquier subcontinuo Q de Y, $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X.*

5. *Confluente, si para todo subcontinuo Q de Y y cualquier componente C de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C) = Q$.*

6. *Semiconfluente, si para cualquier subcontinuo Q de Y y cualesquiera C_1 y C_2 componentes de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$.*

7. *Débilmente confluente, si para cualquier subcontinuo Q de Y, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.*

8. *Empalmante, si para todo subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$.*

9. *Atriódica, si para todo subcontinuo Q de Y se cumplen las siguientes condiciones:*

   - *Para $f^{-1}(Q)$, existen C_1 y C_2 componentes tales que $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$, y*
   - *Para toda componente C de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C) = Q$, $f(C) \subset f(C_1)$ o $f(C) \subset f(C_2)$.*

2.2. Relaciones entre funciones

Cuando tenemos varias clases de funciones, lo ideal es relacionarlas para establecer un orden entre ellas y evitar escribir definiciones equivalentes. En esta sección haremos lo propio y mostraremos qué relaciones se cumplen entre estas clases de funciones.

Observemos que todas las funciones dadas en la Definición 2.1 son cerradas; es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva entre continuos tenemos que $f(A)$ es cerrado siempre que A sea cerrado en X, por la Proposición 1.35. Esto nos permite ver fácilmente la demostración de la siguiente proposición, ya que se sigue de la Definición 2.1.

Proposición 2.2. *Todo homeomorfismo es una función abierta y atómica.*

La implicación inversa no se tiene, ya que si hacemos una función constante de un continuo no degenerado a un continuo degenerado esta función es abierta, atómica, y claramente no es un homeomorfismo.
Ahora, una pregunta que surge con la Proposición 2.2 es saber si existe una relación entre las funciones abiertas y atómicas. Para solucionar esta pregunta veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3. *Existe una función atómica que no es abierta.*

Sea $S_T = Cl_{\mathbb{R}^2}\{(x,y) : 0 < x \leq 1,\ y = \operatorname{sen}(1/x)\}$*, como lo definimos en 1.42. Definamos* $f : S_T \to [0,1]$ *como* $f(x,y) = x$*, es decir; la proyección de* S_T *con respecto a la primera coordenada. Ver Figura 2.1.*

S_T $[0,1]$

$(1, \operatorname{sen} 1)$ f

0 1

$(-1,0)$

Figura 2.1

Mostremos primero que esta función es atómica. Para probarlo, definamos R *como* $S_T \setminus (\{0\} \times [-1,1])$ *y observemos que si* (x,y) *está en* R *entonces* $f^{-1}(f(x,y)) = (x,y)$*. Ahora, notemos que si* K *es un subcontinuo de* S_T *tal que* $f(K)$ *no es degenerado, entonces* K *es un arco en* R *o un continuo homeomorfo a* S_T*; es decir,* $K = \{(x,y) \in S_T : 0 < a \leq x \leq b \leq 1\}$ *o* $K = Cl_{\mathbb{R}^2}\{(x,y) \in S_T : 0 < x \leq b \leq 1\}$*, con* a *y* b *constantes. Luego, si* K *es un arco en* R *claramente* $K = f^{-1}(f(K))$ *y si* K *es de la otra forma* $f(K) = [0,b]$ *entonces* $f^{-1}([0,b]) = K$*, por la definición de* f*. Por lo tanto,* $K = f^{-1}(f(K))$*. Mostrando que* f *es atómica.*

Ahora, miremos que f *no es abierta. Sea* U *un abierto en* S_T *definido como:* $U = S_T \setminus Cl_{\mathbb{R}^2}\{(k, \operatorname{sen}(1/k)) : k \in \{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}_{n\in\mathbb{N}}\}$*. Notemos que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* n *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $\frac{2}{(4n+1)\pi}$ *está en* $[0,\epsilon)$ *y* $\frac{2}{(4n+1)\pi}$ *no está en* $f(U)$*. Por lo tanto,* 0 *no es un punto interior de* $f(U)$*. Así,* $f(U)$ *no es abierto en* $[0,1]$*.*

Ejemplo 2.4. *Existe una función abierta que no es atómica.*

Sea $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ *definida como la proyección en uno de sus factores. Tomemos por ejemplo* $f(x,y) = x$*.*

Esta función es abierta, ya que la proyección de un espacio producto está definida como una función abierta (Ver [2, pág. 29]). Pero, si tomamos $K = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$*, se tiene que* $f^{-1}(f(K)) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ *y* $f^{-1}(f(K)) \neq K$*. Por lo tanto,* f *no es atómica.*

Con el siguiente resultado mostraremos una caracterización de las funciones monótonas que nos será de gran utilidad.

Proposición 2.5. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua y sobreyectiva entre continuos. Entonces* $f^{-1}(y)$ *es conexo para todo* y *en* Y *si y sólo si* f *es monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es monótona. Entonces existe un subcontinuo Q en Y tal que $f^{-1}(Q)$ no es conexo, ya que $f^{-1}(Q)$ es compacto. Luego, existen C y D componentes en $f^{-1}(Q)$ tal que $C \cap D = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que $f^{-1}(Q) = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados disyuntos tales que $C \subset X_1$ y $D \subset X_2$, por el Teorema 1.30.
De esta manera, si y está en Q tenemos que $f^{-1}(y)$ está en X_1 ó X_2, pero no en ambos, ya que por hipótesis $f^{-1}(y)$ es conexo. Luego, podemos decir que $f(X_1)$ y $f(X_2)$ son cerrados disyuntos en Y y $f(X_1) \cup f(X_2) = Q$. Pero, esto contradice la conexidad de Q, por Proposición 1.28. Por lo tanto, concluimos que si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo y en Y entonces f es monótona.
La otra implicación se sigue de la definición de función monótona. □

Continuando con las relaciones entre las clases de funciones tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.6. *Toda función atómica es monótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos, tal que f no es monótona. Entonces existe y en Y tal que $f^{-1}(y)$

no es conexo, por la Proposición 2.5. Luego, $f^{-1}(y) = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados, no vacíos y disyuntos en $f^{-1}(y)$. De está manera, como X_1 y X_2 son también cerrados disyuntos en X, tenemos que existen U y V abiertos disyuntos en X tal que $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset V$, por Proposición 1.28.
Ahora, sea D una componente de $Cl_X(U)$ tal que $f^{-1}(y) \cap D \neq \emptyset$. Observemos que por el Teorema 1.31 tenemos que $D \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$. Entonces $f(D)$ no es degenerado. Además, $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$, ya que existen elementos de $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(D))$ que están en V y no están en D, pues, $D \subset Cl_X(U)$ y $Cl_X(U) \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, f no es atómica. $\square$

Ahora, si miramos las funciones definidas en los Ejemplos 2.3 y 2.4, estas funciones son monótonas, ya que para cualquier y en $[0,1]$, la conexidad de $f^{-1}(y)$ en S_T o en $[0,1]^2$ no se pierde. Esto implica que existen funciones monótonas que no son atómicas ni abiertas.
De esta manera, sólo falta ver si toda función abierta es monótona. Para esto miremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. *Existe una función abierta que no es mónotona.*
Definamos $f : [0,1] \to [0,1]$ *por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -2x+2 & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Gráficamente:

1 $y = f(x)$

$\frac{1}{2}$ 1

Figura 2.2

Veamos que f es abierta. Sean U un abierto en $[0, 1]$, $y \in f(U)$ y $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Como U es abierto en $[0, 1]$ existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset U$. Luego $f(B(x; r)) = ((y - 2r, y + 2r) \cap [0, 1]) \subset f(U)$. Por lo tanto, si tomamos $\epsilon = 2r$ tenemos que $B(y, \epsilon) \subset f(U)$.
Si tomamos el subcontinuo $Q = [0, \frac{1}{2}]$, tenemos que $f^{-1}(Q) = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ no es conexo, entonces f no es monótona.

A continuación veremos una propiedad de las funciones abiertas.

Proposición 2.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función sobre continuos. Si f es abierta y U es un abierto en X, entonces $Fr(f(U)) \subset f(Fr(U))$.*

Demostración. Sea $y \in Y \setminus f(\mathrm{Fr}(U))$. Entonces $f^{-1}(y) \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$. Luego, para todo $x \in f^{-1}(y)$ se tiene que $x \in X \setminus (Cl_X(U)) \cup U$.
Si $x \in X \setminus Cl_X(U)$, entonces $x \notin Cl_X(U)$ y así, $y \notin f(Cl_X(U))$. De esta manera, $y \in Y \setminus f(Cl_X(U))$ el cual es un abierto en Y. Por lo tanto, $y \notin \mathrm{Fr}(f(U))$, ya que existe U vecindad y tal que $V \cap f(U) = \emptyset$.
Si $x \in U$ entonces $y \in f(U)$. Luego, $y \notin \mathrm{Fr}(f(U))$, ya que $\mathrm{Fr}(f(U)) \cap f(U) = \emptyset$, pues, $f(U)$ es un abierto en Y. En conclusión tenemos que $y \notin \mathrm{Fr}(f(U))$. $\square$

Existe un punto de unión entre las funciones antes vistas y las funciones confluentes, el cual nos muestra que las funciones abiertas, atómicas y monótonas son todas confluentes. Para esto, veamos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.9. *Toda función abierta es confluente.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos, tal que f no es confluente. Entonces existen Q un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) \subsetneq Q$.
Sea $y \in Q \setminus f(C)$, como $f^{-1}(y)$ y C son cerrados disyuntos en $f^{-1}(Q)$ tales que no existe conexo en $f^{-1}(Q)$ que interseca a los dos simultáneamente, entonces existen X_1 y X_2 cerrados disyuntos en $f^{-1}(Q)$ tales que $f^{-1}(Q) = X_1 \cup X_2$, donde $C \subset X_1$ y $f^{-1}(y) \subset X_2$, por el Teorema 1.30. Entonces existen U y V abiertos disyuntos en X, tales que $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset V$.
Ahora veamos que $f(U) \cap Q$ es un subconjunto abierto y cerrado de Q.

- Como f es una función abierta tenemos que $f(U)$ es abierto en Y. Entonces $f(U) \cap Q$ es un abierto propio no vacío de Q, propio, ya que $y \in Q \setminus f(U)$.

- Probemos ahora que $\mathrm{Fr}(f(U)) \cap Q = \emptyset$ y así por Proposición 1.43 tenemos que $f(U) \cap Q$ es cerrado en Q.
  Supongamos que existe $z \in \mathrm{Fr}(f(U)) \cap Q$ y tomemos $x \in f^{-1}(z)$, donde $x \in f^{-1}(Q) = X_1 \cup X_2$. Entonces, si x está en X_1 tenemos que x está en U y z está en $f(U)$. Lo cual es falso, ya que $\mathrm{Fr}(f(U)) \cap f(U) = \emptyset$. Ahora, si $x \in X_2$ entonces $x \in X \setminus Cl_X(U)$. Luego, x no está en $\mathrm{Fr}(U)$ y $z \notin f(\mathrm{Fr}(U))$. Entonces por Proposición 2.8, $z \notin \mathrm{Fr}(f(U))$, lo cual contradice nuestra suposición inicial. De esta manera, concluimos que $f(U) \cap Q$ es un cerrado en Q.

Finalmente, como $f(U) \cap Q$ es un subconjunto propio, abierto y cerrado en Q, tenemos que Q no es conexo, por la Observación 1.21. Así, para cualquier componente C de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(C) = Q$. Por lo tanto, f es confluente. □

La función del Ejemplo 2.3 es atómica y por lo tanto confluente. Pero, como vimos, ésta no es abierta. Esto nos muestra que la implicación inversa de la Proposición 2.9, no se tiene.

Ahora, para completar el punto de unión con las funciones confluentes veamos la siguiente proposición que nos relaciona las funciones confluentes con las monótonas.

Proposición 2.10. *Toda función monótona es confluente.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona. Entonces para todo subcontinuo Q de Y tenemos que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X. Luego, $f^{-1}(Q)$ es la única componente y $f(f^{-1}(Q)) = Q$. De esta forma, f es confluente. □

Como existen funciones confluentes que no son abiertas, también hay funciones confluentes que no son monótonas. Si tomamos la función definida en el Ejemplo 2.7, es una función abierta, por lo tanto confluente, pero no es monótona.

La siguiente proposición es inmediata de la Definición 2.1.

Proposición 2.11. *Toda función confluente es semiconfluente.*

La implicación inversa no es cierta, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12. *Existe una función semiconfluente que no es confluente.*
Definamos $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & , \textit{si } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}; \\ -x + \frac{5}{3} & , \textit{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Gráficamente:

1 $y = f(x)$

$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ 1

Figura 2.3

Veamos que f es semiconfluente. Sea $Q = [a, b]$ subcontinuo de $f([0, 1])$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Si tomamos $C_1 = [\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}b]$, entonces C_1 es una componente de $f^{-1}(Q)$ y $f(C_1) = Q$. Luego, si existe otra componente C_2 de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(C_2) \subset f(C_1)$. Por lo tanto, f es semiconfluente.
Ahora, si tomamos $Q = [0, \frac{2}{3}]$ subcontinuo de $f([0, 1])$, observemos que $f^{-1}(Q) = [0, \frac{4}{9}] \cup \{1\}$. De esta manera, $f(\{1\}) = \{\frac{2}{3}\} \subsetneq Q$. Luego, f no es confluente.

A continuación mostraremos un lema conocido que nos ayuda a probar nuestra siguiente proposición.

Lema 2.13. *(Lema de Zorn). Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío $\mathcal{H}$, en el que toda cadena tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Proposición 2.14. *Toda función semiconfluente es débilmente confluente*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función semiconfluente, Q un subcontinuo de Y y $\mathcal{H}$ una familia de subcontinuos de Y definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = \{H : \text{existe una componente } C \text{ en } f^{-1}(Q) \text{ tal que } H \subset f(C)\}.$$

Observemos que $\mathcal{H}$ no es vacío, ya que si y está en Q entonces $\{y\}$ está en $\mathcal{H}$. Ahora, mostremos que si $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $H_i \subset H_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $Cl_Y(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i) = H_0$, entonces H_0 está en $\mathcal{H}$. Como H_i está en $\mathcal{H}$, tenemos que existe C_i componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $H_i \subset f(C_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego, como $f^{-1}(Q)$ es compacto, para toda $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $f^{-1}(Q)$ tenemos que existe $\{C_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$[5, Teorema 1, pág. 45]. Definamos $K = \lim_{n\to\infty} C_{i_n}$, como K es un subcontinuo en X [5, Teorema 4, pág. 170] y $f(K) \subset Q$, por ser Q cerrado, tenemos que existe una componente C_0 de $f^{-1}(Q)$ tal que $K \subset C_0$. Luego, como f es continua tenemos que $H_0 \subset f(K)$. De esta manera, $H_0 \subset f(C_0)$. Esto implica que $H_0 \in \mathcal{H}$.
Luego, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal en $\mathcal{H}$, que denotaremos por R. Entonces, por la definición de $\mathcal{H}$, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $R \subset f(C)$. Supongamos que $f(C) \neq Q$ y tomemos $y \in Q \setminus f(C)$. Entonces existe una componente C' de $f^{-1}(Q)$ tal que $y \in f(C')$. Ahora, como f es semiconfluente y $f(C') \not\subseteq f(C)$ se tiene que $f(C) \subset (f(C') \setminus \{y\})$. Contradiciendo que R es maximal, pues $f(C') \in \mathcal{H}$ y $R \subsetneq f(C')$. Así, tenemos que $f(C) = Q$ y f es débilmente confluente. $\square$

A continuación veremos una función débilmente confluente que no es semiconfluente.

Ejemplo 2.15. *Existe una función débilmente confluente que no es semiconfluente.*
Definamos $f : [0,1] \to [0,1]$ *por:*

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & , \textit{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ -3x + 2 & , \textit{ si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}; \\ x - \frac{2}{3} & , \textit{ si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Gráficamente:

1 $y = f(x)$

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1

Figura 2.4

Veamos que f *es débilmente confluente. Sea* $Q = [a, b]$ *subcontinuo en* $f([0,1])$*, donde* $0 \leq a \leq b \leq 1$*. Entonces es fácil comprobar que en* $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *existe* $C = [\frac{-b}{3} + \frac{2}{3}, \frac{-a}{3} + \frac{2}{3}]$ *componente de* $f^{-1}(Q)$ *tal que* $f(C) = Q$*. Por lo tanto,* f *es débilmente confluente.*
Veamos que f *no es semiconfluente. Si tomamos* $Q = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *en* $f([0,1])$*, entonces* $f^{-1}(Q) = \{0\} \cup [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}] \cup \{1\}$*, y claramente* $f(\{0\}) \nsubseteq f(\{1\})$ *y* $f(\{1\}) \nsubseteq f(\{0\})$*.*

La siguiente proposición es inmediata de la Definición 2.1.

Proposición 2.16. *Toda función semiconfluente es empalmante*

Más adelante, mostraremos que existen funciones empalmantes que no son semiconfluentes. Consideremos primero la siguiente proposición.

Proposición 2.17. *Toda función débilmente confluente es atriódica*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función débilmente confluente y Q un subcontinuo de Y. Como f es débilmente confluente, existe C_1 componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C_1) = Q$. Luego, si fijamos C_2 otra componente de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$.
Ahora, sea C cualquier componente de $f^{-1}(Q)$. Como $f(C) \subset Q$ tenemos que $f(C) \subset f(C_1)$. Por lo tanto, f es atriódica. $\square$

Antes de dar los ejemplos que muestran que las implicaciones inversas dadas en las proposiciones anteriores no son ciertas, veamos una condición necesaria para que una función sea atriódica y empalmante.

Proposición 2.18. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si para todo subcontinuo Q de Y, tenemos que $f^{-1}(Q)$ tiene a lo más dos componentes entonces f es atriódica y empalmante.*

Demostración. Observemos que f es atriódica, ya que de manera natural se cumplen ambas condiciones. Ahora, supongamos que f no es empalmante. Entonces existe un subcontinuo Q de Y tal que si C_1 y C_2 son componentes de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(C_1) \cap f(C_2) = \emptyset$. Luego, como $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$, tenemos que Q no es conexo, por el Teorema 1.20. $\square$

Observación 2.19. *Podemos ver de una manera puntual la Proposición 2.18; es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre continuos y Q es un subcontinuo de Y tal que $f^{-1}(Q)$ tiene a lo más dos componentes, entonces para Q se cumplen las condiciones de las funciones atriódicas y empalmantes.*

Para terminar, veamos que las Proposiciones 2.16 y 2.17 no tienen una doble implicación y que no existe ninguna relación entre las funciones atriódicas y empalmantes.

Ejemplo 2.20. *Existe una función f atriódica que no es débilmente confluente ni empalmante.*
Sea $T = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. Llamado también triódo simple. Definamos $f : T \to S^1$ como:

$$f((x,y)) = \begin{cases} (\cos \pi x, \operatorname{sen} \pi x) & , \text{ si } (x,y) \in [-1,1] \times \{0\}; \text{ y} \\ (\cos \frac{\pi y}{2}, \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}) & , \text{ si } (x,y) \in \{0\} \times [0,1]; \end{cases}$$

Gráficamente:

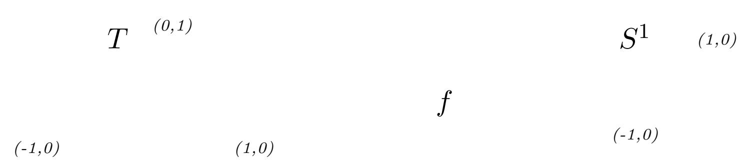

Figura 2.5

Veamos que f es atriódica. Como vimos en la Observación 1.18, debemos tomar Q un subcontinuo de Y tal que $f^{-1}(Q)$ tenga más de dos componentes. Entonces la única forma es que $(-1,0)$ y $(0,1)$ estén en Q, y existan $a,b \geq 0$ tal que (b,a) esté en $S^1 \setminus Q$. Luego, sin perdida de generalidad podemos decir que $f^{-1}(Q) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1, C_2 y C_3 son componentes distintas tales que cada uno de los puntos $(-1,0), (1,0)$ y $(0,1)$ sólo pertenece a cada una de las componentes. Entonces, si $(-1,0) \in C_1$ y $(1,0) \in C_2$ tenemos que $Q = f(C_1) \cup f(C_2)$ y si $(0,1) \in C_3$, entonces $f(C_3) \subset f(C_1)$. Luego, f es atriódica. Veamos que f no es débilmente confluente, ni empalmante. Sea $Q = \{(a,y) \in S^1 : a \leq 0\}$ un subcontinuo de S^1, donde $f^{-1}(Q) = \{(0,1)\} \cup ([-1,-\frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup ([\frac{1}{2},1] \times \{0\})$. Como la imagen de las componentes $f(\{(0,1)\})$, $f([-1,-\frac{1}{2}] \times \{0\})$, y $f([\frac{1}{2},1] \times \{0\})$ son subconjuntos propios de Q, tenemos que f no es débilmente confluente. Además, como $f(\{(0,1)\}) \cap f([-1,-\frac{1}{2}] \times \{0\}) = \emptyset$ tenemos que f no es empalmante.

Ejemplo 2.21. *Existe una función empalmante que no es atriódica.*

Sea $X = A \cup B \cup C$, donde: $A = [-4,-2] \times \{0\}$, $B = ([-2,-1] \cup [1,2]) \times \{0\}$, *y,* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\ x + 1 \text{ y } |x| < 1\}$. *Definamos* $f : X \to T$ *como:*

$$f((x,y)) = \begin{cases} (|x| - 3, 0) & , \text{ si } (x,y) \in A; \\ (x - \frac{|x|}{x}, y) & , \text{ si } (x,y) \in B; \\ (0, y) & , \text{ si } (x,y) \in C. \end{cases}$$

Gráficamente:

X T (0,1)

f

(-4,0) (2,0) (-1,0) (1,0)

Figura 2.6

Veamos que f *es empalmante. Como vimos en la Observación 1.18, debemos tomar* Q *subcontinuo de* Y *tal que* $f^{-1}(Q)$ *tenga más de dos componentes. Entonces la única forma es que* $(-1, 0)$ *y* $(0, 1)$ *no estén en* Q*, y* $(0, 0)$ *esté en* Q*. Luego* $f^{-1}(Q) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$*, donde* C_1, C_2 *y* C_3 *son componentes diferentes, y* $(0, 0) \in f(C_i)$*, para todo* $i \in \{1, 2, 3\}$*. Por lo tanto, la intersecccción de las imágenes de cualesquiera dos componentes es no vacía.*

Veamos que f *no es atriódica, tomemos el subcontinuo* $Q = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}])$ *de* Y *(Ver figura 2.7). Para* $f^{-1}(Q)$ *no se cumple la segunda condición de la definición de función atriódica, ya que la imagen de una tercera componente no da todo* Q*, ni está contenida en las otras dos imágenes (Ver figura 2.8).*

Q $f^{-1}(Q)$

f^{-1}

C_1 C_2 C_3

Figura 2.7

$f(C_1)$ $f(C_2)$ $f(C_3)$

Figura 2.8

A continuación, mostraremos un diagrama que da las relaciones que existen entre las clases de funciones dadas en la Definición 2.1.

Homeomorfismo

Abierta Atómica

Confluente Monótona

Semiconfluente Empalmante

Débilmente Confluente

Atriódica

Diagrama I

2.3. Funciones semiabiertas y cuasiabiertas

En esta sección utilizaremos el Diagrama I para evitar teoremas o contraejemplos innecesarios. Para comenzar, veamos las definiciones de función semiabierta y cuasiabierta.

Definición 2.22. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Diremos que f es semiabierta. Si $\mathrm{Int}_Y(f(U)) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X.*

Definición 2.23. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Diremos que f es cuasiabierta. Si para todo y en Y existe x en $f^{-1}(y)$ tal que y está en $\mathrm{Int}_Y(f(U))$, donde U es cualquier vecindad de x en X.*

Veamos una proposición que relaciona las funciones abiertas con las semiabiertas y cuasiabiertas. Este resultado nos muestra que todas las funciones abiertas son cuasiabiertas y semiabiertas.

Proposición 2.24. *Toda función abierta es semiabierta y cuasiabierta.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta. Veamos primero que f es semiabierta. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Como $f(U)$ es un abierto no vacío en Y y $\mathrm{Int}_Y(f(U)) = f(U)$, por Proposición1.15, tenemos que $\mathrm{Int}_Y f(U) \neq \emptyset$. Luego, f es semiabierta.
Ahora, miremos que f es cuasiabierta. Sean $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y)$ y V una vecindad de x en X. Como f es abierta entonces $f(V)$ es un abierto en Y. Además, como $f(V) = \mathrm{Int}_Y(f(V))$, por Proposición 1.15, tenemos que $y \in \mathrm{Int}_Y(f(V))$. Entonces, f es cuasiabierta. □

Ahora, veamos que la implicación inversa de la Proposición 2.24 no es válida.

Ejemplo 2.25. *Existe una función semiabierta y cuasiabierta que no es atriódica ni empalmante, y por lo tanto no es abierta*
Sean $X = A \cup B \cup C$ *y* $Y = A \cup ([0,2] \cup [5,7] \times \{0\})$*. donde:*

$$A = ([2,5] \times \{0\}) \cup (\{0, \tfrac{7}{2}, 7\} \times [-1,0]) \cup ([0,7] \times \{-1\}),$$

$$B = \{0\} \times [0,3] \ \text{y} \ C = \{7\} \times [0,3].$$

Definamos $f : X \to Y$ *como:*

$$f((x,y)) = \begin{cases} (x,y) & , \text{si } (x,y) \in A; \\ (y,x) & , \text{si } (x,y) \in B; \\ (x-y,0) & , \text{si } (x,y) \in C. \end{cases}$$

Gráficamente:

X Y

(0,0) (7,0)

f

(0,0) (7,0)

Figura 2.9

Notemos que para todo U *abierto en* X *y* (x_1, x_2) *en* $U \setminus L$*, donde* $L = \{(0,3), (0,2), (5,0)(7,3)\}$*. Existe* $r > 0$ *tales que* $f(B((x_1,x_2);r)) \subset Int_Y f(U)$*. Esto es claro, ya que si* U *es un abierto en* X *existe* $\epsilon > o$ *tal que* $B((x_1,x_2);\epsilon) \subset U$ *. Además, si* (x_1,x_2) *está en* $U \setminus L$ *podemos tomar* $r = $*mín* $\{\epsilon,$ *mín* $\{d((x_1,x_2),z) : z \in L\}\}$ *tal que* $f(B((x,y);r)) \subset U \setminus L$*. Luego,* $f(B((x,y);r))$ *es un abierto en* Y*. Por lo tanto,* $f(B((x_1,x_2);r)) \subset Int_Y f(U)$*. Ahora, ya teniendo esto es fácil ver que* f *es semiabierta y cuasiabierta.*

Veamos que f semiabierta. Sea U es un abierto no vacío de X. Entonces para (x_1, x_2)en $U\backslash L$ tenemos que $f(B((x_1, x_2); r)) \subset Int_Y f(U)$. Por lo tanto $Int_Y f(U) \neq \emptyset$

Veamos que f es cuasiabierta. Sea y en Y, como f es sobre y $f(L) = f(\{(0,2),(3,0),(5,0),(7,0)\}) \subset f(X \setminus L)$. Entonces existe (x_1, x_2) en $f^{-1}(y)$ tal que (x_1, x_2) está en $X \setminus L$. Ahora, si U es una vecindad de (x_1, x_2) en X tenemos que $f(B((x_1, x_2); r)) \subset Int_Y f(U)$. Por lo tanto y está en $Int_Y f(U)$.

Veamos ahora que f no es atriódica ni empalmante. Sea $Q = [1,6] \times \{0\}$ un subcontinuo de Y. Como $f^{-1}(Q) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde $C_1 = \{0\} \times [1,3]$; $C_2 = [2,5] \times \{0\}$ y $C_3 = \{7\} \times [1,3]$, (Ver figura 2.10). De esta manera, $f(C_1) = [1,3] \times \{0\}$, $f(C_2) = [2,5] \times \{0\}$ y $f(C_3) = [4,6] \times \{0\}$. Luego, $f(C_i) \cup f(C_j) \subsetneq Q$ para todo $i, j \in \{1,2,3\}$, con lo que concluimos que f no es atriódica. Ahora, como $f(C_1) \cap f(C_2) = ([1,3] \times \{0\}) \cap ([4,6] \times \{0\}) = \emptyset$, tenemos que f no es empalmante.

D $f^{-1}(D)$

C_1 C_3

f^{-1}

C_2

Figura 2.10

Como en el Ejemplo 2.25 f no es atriódica, tenemos que f tampoco es abierta. A continuación veremos un par de ejemplos donde mostramos que entre las funciones semiabiertas y cuasiabiertas no hay ninguna relación.

Ejemplo 2.26. *Existe una función cuasiabierta que no es semiabierta.*

Sea $f : T \to [-1,1]$, donde $T = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. Definamos f como $f(x,y) = x$.

Gráficamente:

(0,1)
T $[-1,1]$
f
(-1,0) (1,0) -1 1

Figura 2.11

Veamos que f es cuasiabierta. Sea y en $[-1,1]$ y tomemos $x = (y,0)$. Si U es una vecindad de x en T tenemos que existe $\epsilon > 0$, tal que $B(x;\epsilon) = \{(z,0) : y-\epsilon < z < y+\epsilon\} \subset U$. Entonces $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ es un abierto en $[-1,1]$, donde $f(B(x;\epsilon)) = (y-\epsilon, y+\epsilon) \subset f(U)$. Por lo tanto $Int_{[-1,1]}f(U) \neq \emptyset$. Ahora, tomemos $U = B((0,1);\frac{1}{2})$ abierto en T. Notemos que $f(U) = \{0\}$. Luego, $Int_{[-1,1]}f(U) = \emptyset$, así, f no es semiabierta.

Ejemplo 2.27. *Existe una función semiabierta que no es cuasiabierta. Definamos $f : [0,1] \to S^1$ como: $f(x) = e^{2\pi i x}$.*
Gráficamente:

$[0,1]$ S^1
f
(1,0)
0 1

Figura 2.12

Veamos que esta función es semiabierta. Si hacemos el mismo análisis que en el Ejemplo 2.25, tenemos que para todo U abierto no vacío en $[0,1]$, existen x en $U \setminus \{0,1\}$ y $r > 0$ tales que $B(x;r) \subset U \setminus \{0,1\}$ y así, $f(B(x;r)) \subset Int_{S^1}f(U)$. Entonces $Int_{S^1}f(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es semiabierta.

Veamos que f no es cuasiabierta. Sean $(1,0)$ en S^1 y $x \in f^{-1}((1,0))$. Si $x = 0$ y $[0, \frac{1}{2})$ es una vecindad de x en $[0,1]$, tenemos que $(1,0) \notin Int_{S^1} f(U) = \{e^{2\pi ix} : 0 < x < \frac{1}{2}\}$. Ahora, si $x = 1$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ es una vecindad abierta de x en $[0,1]$, tenemos que $(1,0) \notin Int_{S^1} f(U) = \{e^{2\pi ix} : \frac{1}{2} < x \leq 1\}$. Entonces, f no es cuasiabierta.

Con el Ejemplo 2.25 hemos mostrado que las funciones cuasiabiertas y semiabiertas no pertenecen a las otras nueve clases de funciones dadas en la Definición 2.1. Además, con la Proposición 2.24 vemos que la clase de funciones abiertas pertenece a la clase de las funciones semiabiertas y cuasiabiertas. Pero, no hemos visto a qué otras clases de funciones pertenecen a las funciones semiabiertas y cuasiabiertas. Si miramos la función del Ejemplo 2.3, tenemos que f es atómica, pero no es cuasiabierta, ya que si tomamos a 0 en $[0,1]$, para todo x en $f^{-1}(\{0\})$, 0 no está en $\mathrm{Int}_{[0,1]} f(B(x;1))$, pues para todo $\epsilon > 0$, existe n en $\mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{(4n+1)\pi}$ ó $\frac{2}{(4n+3)\pi}$ está en $B(0,\epsilon)$. Pero no en $f(B(x;1))$.

Ahora, veamos que clases de funciones no pertenecen a las funciones semiabiertas. Si miramos la función del Ejemplo 2.26 tenemos que f es monótona y no es cuasiabierta. Veamos que es monótona. Sea $Q = [a,b]$ un subcontinuo de $[-1,1]$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$. Si $\frac{1}{2}$ está en $[a,b]$ tenemos que $f^{-1}([a,b]) = ([a,b] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{2}\}) \times [0,1]$ y si $\frac{1}{2}$ no está tenemos que $f^{-1}([a,b]) = ([a,b] \times \{0\})$. Entonces $f^{-1}([a,b])$ es un subcontinuo de T. Por lo tanto, f es monótona.

De esta manera, sólo falta ver si las funciones atómicas se encuentran dentro de las funciones semiabiertas.

Pregunta 2.28. *¿Toda función atómica es semiabierta?*

Los anteriores resultados los podemos resumir en el Diagrama II, en este se encuentran todas las relaciones existentes con las funciones semiabiertas y cuasiabiertas exceptuando la Pregunta 2.28, para la cual aún no tenemos respuesta.

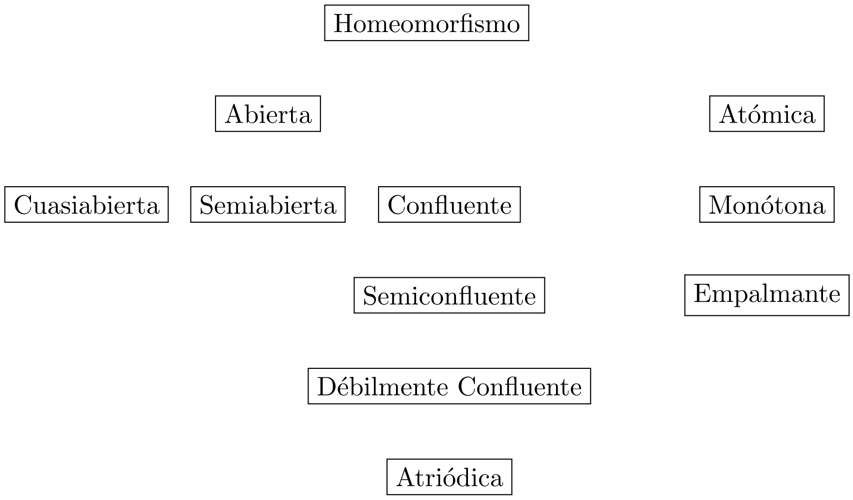

Diagrama II

2.4. Conjuntos semiabiertos

En la sección anterior mencionamos la definición de función semiabierta, para continuos. Ahora, daremos la defininción de conjunto semiabierto, donde claramente se nota que un abierto es un semiabierto. La siguiente definición fue tomada de [6].

Definición 2.29. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es un semiabierto si existe $O \in \mathcal{T}$ tal que $O \subset A \subset Cl_X(O)$.*

Un interrogante que surge es el siguiente: ¿la imagen de un semiabierto es un semiabierto bajo funciones semiabiertas y viceversa?. A continuación mostraremos una caracterización de las funciones semiabiertas usando los conjuntos semiabiertos definidos en 2.29.

Proposición 2.30. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre continuos. Entonces f es semiabierta si y sólo si $f(S)$ es semiabierto, para todo $S \subset X$ semiabierto.*

Demostración. Para la primera implicación, sea S un semiabierto en X. Si $S = \emptyset$, es inmediato. Ahora, si $S \neq \emptyset$ entonces existe O abierto no vacío en X tal que $O \subset S \subset Cl_X(O)$. Como f es semiabierta tenemos que $\text{Int}_Y f(O) \neq \emptyset$. Luego, $\text{Int}_Y f(S) \neq \emptyset$, ya que $\text{Int}_Y f(O) \subset \text{Int}_Y(f(S)$. Mostremos que $f(S) \subset Cl_Y(\text{Int}_Y f(S))$. Sea $y \notin Cl_Y(\text{Int}_Y f(S))$, entonces por Definición 1.9, existe U abierto en X tal que $U \cap \text{Int}_Y f(S) = \emptyset$.

Probemos que $f^{-1}(U) \cap O = \emptyset$. Supongamos que $f^{-1}(U) \cap O \neq \emptyset$, entonces $V = f^{-1}(U) \cap O$ es un abierto no vacío en X. Así, $\text{Int}_Y f(V) \neq \emptyset$. Pero, como $V \subset S$ y $V \subset f^{-1}(U)$, tenemos que $\text{Int}_Y f(V) \subset \text{Int}_Y f(S) \cap U$, lo cual es falso, ya que $U \cap \text{Int}_Y f(S) = \emptyset$.

Entonces $f^{-1}(U) \cap O = \emptyset$. Así, para todo $x \in f^{-1}(y)$ tenemos que $x \notin Cl_X(O)$. Por lo tanto, $x \notin S$ y $y \notin f(S)$. De está manera, existe un abierto no vacío $O' = \text{Int}_Y f(S)$ en Y tal que $O' \subset f(S) \subset Cl_Y(O')$. Luego, $f(S)$ es un semiabierto en Y.

Para la otra implicación, sea U un abierto no vacío en X, como U también es un semiabierto en X tenemos que $f(U)$ es un semiabierto no vacío de X. Luego, existe O abierto no vacío de Y tal que $O \subset f(U) \subset Cl_X(O)$. Entonces $\text{Int}_X f(U) = O \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es semiabierta.

$\square$

Capítulo 3

Propiedades generales

Es este capítulo mencionaremos algunas propiedades que son estudiadas en topología cuando se tiene una clase de funciones continuas. Particularmente, investigaremos cuáles de estas propiedades son satisfechas por las clases de funciones semiabiertas y cuasiabiertas. También en esta sección daremos ejemplos de aquellas propiedades que no se cumplan.

Para esto, en cada sección estudiaremos una propiedad, describiremos qué clase de funciones de la Definición 2.1 la cumplen y después miraremos si las funciones semiabiertas o cuasiabiertas las cumplen.

3.1. Propiedad de Composición

Definición 3.1. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de funciones continuas entre continuos, diremos que $\mathcal{A}$ cumple la propiedad de la composición, si para cualesquiera dos funciones f y g en $\mathcal{A}$, su composición $g \circ f$ está en $\mathcal{A}$.*

En [10, Proposición 5.1, pág. 29] y [10, Proposición 5.4, pág. 29] se menciona que las clases de funciones atómicas, monótonas, abiertas, confluentes, débilmente confluentes y los homeomorfismos cumplen la propiedad de composición. Además, en [10, Ejemplo 5.10, pág. 31] y [10, Ejemplo 5.12, pág. 32] se muestra que las otras clases de funciones de la Definición 2.1 no cumplen la propiedad de la composición.

Proposición 3.2. *Las funciones semiabiertas tienen la propiedad de composición.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones semiabiertas y U un abierto no vacío en X. Como f es semiabierta, $\mathrm{Int}_Y f(U) \neq \emptyset$. Luego, por ser g semiabierta $\mathrm{Int}_Z g(\mathrm{Int}_Y f(U)) \neq \emptyset$. Claramente, $\mathrm{Int}_Z g(\mathrm{Int}_Y f(U)) \subset \mathrm{Int}_Z g(f(U))$. De esta manera, $\mathrm{Int}_Z g \circ f(U) \neq \emptyset$. Así, $g \circ f$ es semiabierta. □

Proposición 3.3. *Las funciones cuasiabiertas cumplen la propiedad de composición.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones cuasiabiertas y $z \in Z$. Como g es cuasiabierta tenemos que existe $y \in g^{-1}(z)$ tal que para toda V vecindad de y en Y, $z \in \mathrm{Int}_Z f(V)$. Ahora, como f es cuasiabierta existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que para toda vecindad U de x tenemos que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Luego, si tomamos este x y cualquier vecindad U de x tenemos que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U) \subset f(U)$. Así, $z \in \mathrm{Int}_Z g(\mathrm{Int}_Y f(U)) \subset \mathrm{Int}_Z g(f(U))$. Por lo tanto, $z \in \mathrm{Int}_Z(g \circ f)(U)$. □

3.2. Propiedad de Composición Factor

Definición 3.4. *Sea $\mathcal{A}$ una clase arbitraria de funciones, diremos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de composición factor. Si para cualquier función f en $\mathcal{A}$,* *la igualdad $f = g \circ h$, con g y h funciones continuas entre continuos implica que la función g está en $\mathcal{A}$.*

En [10, Ejemplo 5.27, pág. 34] y [1, Ejemplo 1, pág. 140] se muestra que las funciones atómicas y atriódicas no cumplen la propiedad de composición factor. Además en [10, Proposición 5.14, pág. 32], [10, Proposición 5.15, pág. 32] y [10, Proposición 5.16, pág. 32] se muestra que las otras clases de funciones en la Defínción 2.1 la cumplen.

Proposición 3.5. *Las funciones semiabiertas cumplen la propiedad de composición factor.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos y Z un continuo; tomemos $h : X \longrightarrow Z$ y $g : Z \longrightarrow Y$ funciones entre continuos tales que $f = g \circ h$. Supongamos g no es semiabierta. Entonces existe U abierto no vacío en Z tal que $\mathrm{Int}_Y(g(U)) = \emptyset$. Ahora, como $h^{-1}(U)$ es un abierto no vacío en X y $\mathrm{Int}_Y(f(h^{-1}(U))) = \mathrm{Int}_Y(g \circ h)(h^{-1}(U)) = \mathrm{Int}_Y(g(U))$ tenemos que $\mathrm{Int}_Y(f(h^{-1}(U))) = \emptyset$. Por lo tanto, f no es semiabierta.

□

Proposición 3.6. *Las funciones cuasiabiertas cumplen la propiedad de composición factor.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función sobre continuos y Z un continuo; tomemos $g : Z \longrightarrow Y$ y $h : X \longrightarrow Z$ funciones sobre continuos tales que $f = g \circ h$. Supongamos que g no es cuasiabierta. Entonces existe $y \in Y$ tal que para todo $z \in g^{-1}(y)$ tenemos que $y \notin \mathrm{Int}_Y(g(U))$ para alguna vecindad U de X. Ahora, sea $z \in g^{-1}(y)$ arbitrario, como h es continua tenemos que $h^{-1}(U)$ es un abierto. Así, para todo $x \in h^{-1}(z)$ tenemos que

$h^{-1}(U)$ es una vecindad de x en X. Luego, existe y tal que para todo x en $f^{-1}(y)$, $y \notin f(h^{-1}(U))$, donde $h^{-1}(U)$ es una vecindad de x en X. Por lo tanto, f no es cuasiabierta. $\square$

3.3. Propiedad del Producto

Antes de ver la propiedad del producto, veamos una definición y unas observaciones que son de utilidad para definir la propiedad del producto.

Definición 3.7. *Un producto $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ de dos funciones $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, donde $i \in \{1, 2\}$ esta definida por:*

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)), \text{ para } x_1 \in X_1 \text{ y } x_2 \in X_2.$$

Observación 3.8. *Si A y B son continuos tenemos que:*

$$\mathcal{B} = \{B(a, r_a) \times B(b, r_b) : a \in A, b \in B \text{ y } r_{a,b} > 0\}.$$

es una base para la topología de $A \times B$. Además, si U_a y U_b son abiertos de A y B respectivamente entonces $U_a \times U_b$ es un abierto básico en $A \times B$.

Observación 3.9. *Note que si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ tenemos:*

1. $(f_1 \times f_2)(A_1 \times A_2) = f_1(A_1) \times f_2(A_2)$.
2. $(f_1 \times f_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(B_2)$.

para $A_i \subset X_i$ y $B_i \subset Y_i$, donde $i \in \{1, 2\}$.

Proposición 3.10. *Sean A_1 y A_2 conjuntos. Si $B_1 \subset A_1$ y $B_2 \subset A_2$ entonces*

$$Int_{A_1 \times A_2}(B_1 \times B_2) = Int_{A_1}(B_1) \times Int_{A_2}(B_2)$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{Int}_{A_1\times A_2}(B_1 \times B_2) \subset \mathrm{Int}_{A_1}(B_1) \times \mathrm{Int}_{A_2}(B_2)$. Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Int}_{A_1\times A_2}(B_1 \times B_2)$, entonces existe U vecindad de x tales que $U \subset B_1 \times B_2$. Luego, existe $U_1 \times U_2$ vecindad de x en $A_1 \times A_2$ tales que $x \in U_1 \times U_2 \subset U \subset B_1 \times B_2$. De esta manera, $U_i \subset B_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Así $(x_1, x_2) \in \mathrm{Int}_{A_1}(B_1) \times \mathrm{Int}_{A_2}(B_2)$.
Ahora, probemos que $\mathrm{Int}_{A_1}(B_1) \times \mathrm{Int}_{A_2}(B_2) \subset \mathrm{Int}_{A_1\times A_2}(B_1 \times B_2)$. Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Int}_{A_1}(B_1)\times\mathrm{Int}_{A_2}(B_2)$, entonces existen U_1 y U_2 vecindades de x_1 y x_2 respectivamente tales que $U_1 \subset B_1$ y $U_2 \subset B_2$. Ahora, como $U_1 \times U_2$ es un abierto básico de $A_1 \times A_2$ tenemos que $U_1 \times U_2$ es vecindad de (x_1, x_2) en $A_1 \times A_2$ tal que $U_1 \times U_2 \subset B_1 \times B_2$. Luego, $x_1 \times x_2 \in \mathrm{Int}_{A_1\times A_2}(B_1 \times B_2)$.
$\square$

Definición 3.11. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de funciones continuas entre continuos, diremos que $\mathcal{A}$ cumple la propiedad del producto, si para cualesquiera dos funciones f_1 y f_2 en $\mathcal{A}$ tenemos que $f_1 \times f_2$ está en $\mathcal{A}$.*

En [10, Proposición 5.32, pág. 36] se demuestra que la clase de funciones monótonas, abiertas y los homeomorfismos cumplen la propiedad del producto. Además, en [10, Ejemplo 5.36, pág. 37] y [10, Proposición 5.37, pág. 37] se muestra que las otras clases de funciones de la Definición 2.1 no la cumplen.

Proposición 3.12. *Las funciones semiabiertas cumplen la propiedad del producto.*

Demostración. Sean $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ funciones semiabiertas y U un abierto no vacío de $X_1 \times X_2$. Como U es un abierto en $X_1 \times X_2$ existen U_1 y U_2 abiertos básicos de X_1 y X_2, respectivamente, tales que $U_1 \times U_2 \subset U$. Como $f_1(U_1) \times f_2(U_2) \subset (f_1 \times f_2)(U)$, $\mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1(U_1) \times f_2(U_2)) \subset \mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2)(U)$.
Observemos que $\mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1) \times \mathrm{Int}_{Y_2} f_2(U_2) \subset \mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2)(U)$, por Proposición 3.10. Entonces $\mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2(U)) \neq \emptyset$, ya que $\mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f_1 \times f_2$ es semiabierta. □

Proposición 3.13. *Las funciones cuasiabiertas cumplen la propiedad del producto.*

Demostración. Sean $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ funciones cuasiabiertas y $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$, como f_1 y f_2 son cuasiabiertas tomemos (x_1, x_2) en $X_1 \times X_2$ tal que para cualesquiera U_1 y U_2 vecindades de x_1 y x_2 respectivamente, tenemos que $y_1 \in \mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1)$ y $y_2 \in \mathrm{Int}_{Y_2} f_2(U_2)$.
Si tomamos U una vecindad de (x_1, x_2) en $X_1 \times X_2$ tenemos que existen V_1 y V_2 tales que $V_1 \times V_2 \subset U$. Entonces por Proposición 3.10, tenemos que $(y_1, y_2) \in \mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2(U))$. Por lo tanto, $f_1 \times f_2$ es cuasiabierta.

□

3.4. Propiedad del Producto Factor

Definición 3.14. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de funciones continuas entre continuos, diremos que $\mathcal{A}$ cumple la propiedad del producto factor, si para $f_1 \times f_2$ en $\mathcal{A}$ se tiene que f_1 y f_2 están en $\mathcal{A}$.*

En [10, Proposición 5.39, pág. 39], [10, Proposición 5.40, pág. 40] y [10, Proposición 5.43, pág. 40] se muestra que todas las clases de funciones de la Definción 2.1 cumplen la propiedad del producto factor. A continuación, veremos que las funciones semiabiertas y cuasiabiertas no son la excepción.

Proposición 3.15. *Las funciones semiabiertas cumplen la propiedad del producto factor.*

Demostración. Sean $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ funciones sobre continuos, tal que f_1 no es semiabierta. Entonces existe U_1 abierto no vacío en X_1 tales que $\mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1) = \emptyset$. Sea U_2 un abierto no vacío en X_2 donde $U_1 \times U_2$ es un abierto básico no vacío en $X_1 \times X_2$. Como $\mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2)(U_1 \times U_2) = \mathrm{Int}_{Y_1} f_1(U_1) \times \mathrm{Int}_{Y_2} f_2(U_2)$, tenemos que $\mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2)(U_1 \times U_2) = \emptyset$. Por lo tanto, $f_1 \times f_2$ no es semiabierta. □

Proposición 3.16. *Las funciones causiabiertas cumplen la propiedad de producto factor.*

Demostración. Sean $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ funciones entre continuos, tal que f_1 no es cuasiabierta. Es decir, existen $y_1 \in Y_1$ y $x_1 \in f_1^{-1}(y_1)$ tales que hay una vecindad W_1 de x_1, donde $y_1 \notin \mathrm{Int}_{Y_1} f_1(W_1)$. Entonces para $y_2 \in Y_2$, $x_2 \in f_2^{-1}(y_2)$ y W_2 vecindad de x_2, tenemos que la pareja $(y_1, y_2) \notin \mathrm{Int}_{Y_1} f_1(W_1) \times \mathrm{Int}_{Y_2} f_2(W_2)$. Luego, $(y_1, y_2) \notin \mathrm{Int}_{Y_1 \times Y_2}(f_1 \times f_2)(W_1 \times W_2)$ para una vecindad $W_1 \times W_2$ de (x_1, x_2). Por lo tanto, $f_1 \times f_2$ no es cuasiabierta.

□

3.5. Propiedad del Límite

Antes de dar la propiedad del límite, veamos algunas definiciones que nos son de utilidad para entender esta propiedad.

Definición 3.17. *Sean X y Y espacios topológicos. Dado K subespacio compacto de X y U un subconjunto abierto de Y definimos:*

$$S(K,U) = \{f \in Y^X : f(K) \subset U\},$$

donde Y^X son las funciones continuas de X a Y. La colección $\{S(K,U)\}_{K,U}$ forma una subbase para una topología de Y^X. Esta topología es conocida como la topología compacto abierto en Y^X.

Definición 3.18. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de funciones continuas entre continuos. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad del límite, si para cualesquiera dos espacios X y Y el conjunto de todas las funciones $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{A}$ es cerrado en el espacio Y^X con la topología compacto abierto. Además, diremos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad del límite débil si $\mathcal{A}$ satisface la propiedad del límite cuando Y es localmente conexo.*

Con respecto a la propiedad del límite, en [10, Teorema 5.54, pág. 44] se prueba que las funciones semiconfluentes cumplen la propiedad del límite y en [10, Ejemplo 5.58, pág. 46], [10, Ejemplo 5.57, pág. 39] y [10, Ejemplo 5.62, pág. 39] se muestra que ninguna de las otras funciones de la Definiicíon 2.1 cumplen la propiedad del límite.

Con respecto a la propiedad del límite débil, en [10, Ejemplo 5.58, pág. 46] se muestra que las clases de funciones abiertas, atómicas y los homeomorfismos no cumplen la propiedad del límite débil y en [10, Proposición

5.47, pág. 41], [10, Proposición 5.48, pág. 41], [10, Teorema 5.53, pág. 42], [10, Teorema 5.54, pág. 44] y [1, Teorema 4, pág. 139] se prueba que el resto de las funciones de la Definción 2.1 cumplen la propiedad del límite débil.

A continuación, veremos una definición equivalente a la topología compacto abierto y déspues mostraremos que las funciones semiabiertas y cuasiabiertas no cumplen la propiedad del límite ni la propiedad del límite débil.

Definición 3.19. *Dada $f_n : X \longrightarrow Y$ una sucesión de funciones en Y^X. Decimos que f_n converge uniformemente a f si dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.*

Observación 3.20. *Si vemos [9, Teorema 43.7, pág. 284] la topología compacto abierto es equivalente a la convergencia uniforme en Y^X si Y es un espacio métrico y X es un compacto de Hausdorf. La equivalencia consiste en que si $A \subset Y^X$ es cerrado en Y^X tenemos que toda sucesión uniformemente convergente de A converge en A.*

Ejemplo 3.21. *Existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, que son homeomorfismos, tal que su límite no es una función semiabierta, ni cuasiabierta. Definamos $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ con $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones definidas como:*

$$f_n(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{x}{n} + \frac{n-1}{2n} & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ \frac{(2n-1)x}{n} + \frac{1-n}{n} & , \text{ si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Graficamente:

1

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1

Figura 3.1

Todas estas funciones son inyectivas y son funciones entre continuos, por lo tanto, son homeomorfismos. Veamos que la sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f*, donde:*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \textit{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} & , \textit{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}. \\ 2x - 1 & , \textit{ si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sea $\epsilon > 0$ *entonces podemos tomar* $N = ||\frac{1}{2\epsilon}|| + 1$ *tal que* $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ *para todo* $n > N$ *y todo* $x \in X$*, donde* f *gráficamente es:*

1 $y = f(x)$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1

Figura 3.2

Luego, si el conjunto de todas las funciones $f : X \longrightarrow Y$ semiabiertas es cerrado en el espacio Y^X tenemos que f es semiabierta. Pero, f_0 no es semiabierta, ya que si tomamos $U = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ abierto en $[0,1]$ tenemos que $Int_{[0,1]} f(U) = \emptyset$.
Veamos que f tampoco es cuasiabierta, si tomamos $y = \frac{1}{2}$ tenemos que $y \notin Int_{[0,1]} f_0(B(x; r))$ para todo $x \in f^{-1}(y)$ y $r = \frac{1}{8}$.
Por lo tanto, las funciones semiabiertas y cuasiabiertas no cumplen la propiedad del límite ni la propiedad del límite débil, ya que $[0,1]$ es un localmente conexo.

En resumen podemos ver que las funciones semiabiertas y cuasiabiertas cumplen todas las propiedades excepto la del límite y la del límite débil. Esto nos permite ver que estas funciones cumplen muchas propiedades algebraicas con respecto a estas operaciones.

Bibliografía

[1] E. E. Grace y E. J. Vought, Four mapping problems of Maćkowiak, Coloquium Math. 69 (1995), pp 133-141.

[2] J. G. Hocking y G. S. Young, Topology, Dover Publications, New York, 1988.

[3] J. R. Munkres, Topología, Pearson Prentice Hall, 2da Edición.

[4] K. Kuratowski, Topology, Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[5] K. Kuratowski, Topology, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[6] N Levine, Semiopen set and semi continuity in toplogical spaces, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), pp. 36-41.

[7] S. Macías, Una Introducción a la Teoría de los Continuos. Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios, Sociedad Matemática Mexicana (2006) 1-35.

[8] S. Nadler, Jr., Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[9] S. Willard, General Topology, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.

[10] T. Maćkowiak, Continuous Mappings on Continua, Dissertations Math., Warzawa 158 (1979), pp. 1-91.

[11] V. Runde. A Taste of Topology, Springer, New York, 2005.

[12] X. Huang, F. Zeng, and G. Zhang, Semi-openness and almost-openness of induced mappings, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 20 (2005), Number 1, pp. 21-26.