

**ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LA
CURVA DE KOCH**

TANNIA LORETTA MATAJIRA SANABRIA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006**

ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LA CURVA DE KOCH

TANNIA LORETTA MATAJIRA SANABRIA

Monografía presentada como requisito parcial para optar al
título de Licenciada en Matemáticas

Directora

SONIA M. SABOGAL

Doctora en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

Dedicatoria.

A mi madre Belén quien ha sembrado todo en sus hijos.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por haberme llenado de confianza para poder llevar a cabo todas las cosas que me proponga.

Gracias a mi mamá, porque cuando sentí no poder ni querer sacar adelante la carrera sus palabras y su apoyo siempre fueron mi aliciente.

Al profesor Rafael Isaacs porque bajo sus enseñanzas y sus palabras encontré la salida.

Al profesor Edilberto Reyes, gracias por sus palabras y conocimientos transmitidos.

Gracias a la Profesora Sonia porque me ayudó a cristalizar el sueño que por tantos años guardé en mi corazón: Mi monografía.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	7
1. PRELIMINARES	9
1.1. Espacios métricos	9
1.2. Sistemas iterados de funciones (SIF)	15
1.3. Topología	15
1.4. Conjuntos de Julia	17
1.4.1. Representación gráfica	18
2. LA CURVA DE KOCH	21
2.1. Breve reseña histórica	21
2.2. Construcción geométrica de la curva de Koch	22
2.3. La curva de Koch como espacio métrico	25
2.3.1. Longitud de la curva de Koch	25
2.3.2. Área bajo la curva de Koch	25
2.3.3. Dimensión de la curva de Koch	29
2.4. La curva de Koch como espacio topológico	31
2.5. La curva de Koch como atractor de un sistema iterado de funciones	31
2.6. La curva de Koch como conjunto de Julia	35

3. LA ISLA DE KOCH	37
3.1. Definición de la isla de Koch o copo de nieve	37
3.2. Área del copo de nieve	38
CONCLUSIONES	44
BIBLIOGRAFIA.	45

SUMMARY

TITLE: Systematic Análisis of Koch curve. ¹

AUTHOR: Tannia Loretta Matajira Sanabria²

KEYWORDS: Iterated functions system, dynamic system, attractor, connexity, Julia set.

DESCRIPTION

The purpose of this assignment is to show Koch curve, introduced by the swith mathematician Helge Von Koch in 1904. Also, to show its development throughout modern Mathematics such as Fractals (Geometry), its geometric construction, the attractor of an iterated function system, and a Julia set.

The current Monography consists of four main chapters: The fist chapter, called (*Preliminaries*), introduces the basic theory of the analysis and the topology to develop the proceeding chapters. The second chapter (*Koch curve*) is the main chapter of this assignment. It introduces a short biography of the creator of the curve. It tells about its geometric construction, the study of the curve as a metric space (length, area underneath the curve, and curve's dimensions), the topologic space as attractor of an iterated functions system, and Koch curve as a Julia Set (dynamical system). In this part of the presentation a dynamic system which Jules set is precisely Koch curve is shown. The third chapter (*The island of Koch*) is about general features of the so called Island of Koch or snowflake, as

¹Monografía

²Facultad de Ciencias ,Escuela de matemáticas. Directora: Sonia M. Sabogal.

its definition and area are.

Finally, some conclusions are drawn with the idea of opening a room for the reader to work on them in depth.

RESUMEN

TITULO: ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LA CURVA DE KOCH ¹

AUTOR: Tannia Loretta Matajira Sanabria²

PALABRAS CLAVES: sistema iterado de funciones, sistema dinámico, atractor, conexidad, conjunto de Julia.

DESCRIPCIÓN

El objetivo de este trabajo es mostrar la curva de Koch, presentada por el matemático sueco Helge Von Koch en 1904. Su desarrollo a través de la matemática moderna como la geometría fractal, su construcción geométrica, el atractor de un sistema iterado de funciones, un conjunto de Julia.

La presente monografía consta de cuatro capítulos. El primero (*Preliminares*), aporta la teoría básica del análisis y la topología, para desarrollar los siguientes capítulos. El segundo (*La curva de Koch*) es el capítulo central de nuestro trabajo, muestra una pequeña biografía del creador de la curva, su construcción geométrica; estudio de la curva como espacio métrico (longitud, área bajo la curva, dimensión de la curva), espacio topológico, como atractor de un sistema iterado de funciones y la curva de Koch como conjunto de Julia (sistemas dinámicos); en esta parte del trabajo se hace un pequeño aporte mostrando

¹Monografía

²Facultad de Ciencias ,Escuela de matemáticas. Director: Sonia M. Sabogal.

explícitamente un sistema dinámico cuyo conjunto de Julia es precisamente la curva de Koch. El tercer capítulo (*La isla de Koch*) aborda aspectos generales de la llamada isla de Koch o copo de nieve, como son su definición y su área.

Al finalizar se presentan conclusiones que pretenden abrir un espacio e invitar al lector a trabajar en ellas con más profundidad.

INTRODUCCIÓN

El universo es tan ininteligible y el hombre en su intento por entenderlo y descubrir su belleza ha llegado a estudiar cada objeto por medio de la geometría, investigando por ejemplo medidas en un plano o en un espacio y analizando los detalles de los elementos. Imaginémonos visualizar la tierra desde un satélite espacial y llegar hasta las costas de nuestro Mar Caribe en Cartagena de Indias, ver la hermosura de las orillas que el mar golpea con sus olas; este cuadro describe una curva fantástica que a simple vista no parece curva, estudiando su forma, longitud, etc. ¿se podría llegar a una especie de “monstruo”? ¿Cuál “monstruo”?; sustantivo que asusta, pero el matemático sueco Helge Von Koch en 1904 presentó la hermosa curva que lleva su nombre, “la curva de Koch”; y que en cierta forma se asemeja a nuestra costa caribe.

El objetivo de este trabajo es realizar una revisión bibliográfica de la curva de Koch y su desarrollo a través de la matemática moderna como la geometría fractal y los sistemas dinámicos, teniendo en cuenta que la curva, por ser localmente autosemejante, es considerada como un conjunto fractal.

En el estudio de los fractales, se puede afirmar que existen tres caminos para acercarse a ellos:

- Sistemas iterados de funciones (SIF): un conjunto fractal se obtiene como el atractor del SIF. Aquí la auto-similitud o autosemejanza juega un papel fundamental.

- Sistemas dinámicos: Por este camino un conjunto fractal se obtiene como lo que se denomina un conjunto de Julia. Para este método se requiere de herramientas computacionales.
- Teoría de la medida: la dimensión. Estudia el grado de rugosidad y fragmentación de una estructura fractal.

La presente monografía consta de cuatro capítulos. El primero (*Preliminares*), aporta la teoría básica del análisis y la topología, para desarrollar los siguientes capítulos. El segundo (*La curva de Koch*) es el capítulo central de nuestro trabajo, muestra una pequeña biografía del creador de la curva, su construcción geométrica; estudio de la curva como espacio métrico y topológico (longitud, área bajo la curva, dimensión de la curva), como atractor de un sistema iterado de funciones y la curva de Koch como conjunto de Julia (sistemas dinámicos); en esta parte del trabajo se hace un pequeño aporte mostrando explícitamente un sistema dinámico cuyo conjunto de Julia es precisamente la curva de Koch. El tercer capítulo (*La isla de Koch*) aborda algunos aspectos generales de la llamada isla de Koch, como por ejemplo su definición y su área.

Al final de este trabajo se presentan unas conclusiones que pretenden abrir un espacio e invitar al lector a trabajar en ellas con más profundidad.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se recopilan los principales conceptos y resultados que se usarán en los siguientes capítulos. Estos conceptos teóricos se han clasificado en cuatro secciones: la correspondiente a la teoría de espacios métricos, una segunda sección donde se presenta lo que es un sistema iterado de funciones y la manera de obtener conjuntos fractales con estos sistemas, en la tercera sección aparecen algunas nociones básicas de la topología y finalmente se expone el concepto de conjunto de Julia. Las definiciones, conceptos y resultados que aparecen en este capítulo, han sido tomados de [1].

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisfice para cualesquiera $x, y, z \in X$*

i) $d(x, y) \geq 0$;

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Entonces d es llamada **métrica** sobre X , y la pareja (X, d) **espacio métrico**.

Ejemplo 1.1. Tomando $X = \mathbb{R}$, es fácil verificar que (\mathbb{R}, d_u) , donde $d_u(x, y) = |x - y|$, es espacio métrico; para este caso d_u es llamada **métrica usual o euclidiana de la recta**.

Ejemplo 1.2. (\mathbb{R}^2, d_e) es espacio métrico, donde $d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$; para este caso d_e es llamada **métrica usual o euclidiana del plano**.

Ejemplo 1.3. Siempre que $X \neq \emptyset$, (X, d_{disc}) es espacio métrico, donde d_{disc} se define por

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y; \end{cases}$$

d_{disc} es conocida como **métrica discreta**.

Observando los ejemplos anteriores podemos notar que sobre un conjunto se pueden definir varias métricas.

Proposición 1.1. (X, d) es espacio métrico si y sólo si, para cualesquiera $x, y, z \in X$,

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Demostración. La parte *si* es inmediata; veamos el *sólo si*. Verifiquemos *iii*) : haciendo $z = x$, obtenemos $d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x)$, luego $d(x, y) \leq d(y, x)$ y $d(y, x) \leq d(y, z) + d(x, z)$; haciendo $z = y$, $d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y)$, luego $d(y, x) \leq d(x, y)$, por tanto $d(x, y) = d(y, x)$, quedando demostrado inmediatamente *iii*) y *iv*). Utilizando $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ y haciendo $z = x$, tenemos $d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y)$, $0 \leq 2d(x, y)$, por ende $d(x, y) \geq 0$. ■

Proposición 1.2. (X, d) espacio métrico y $S \subset X$, al restringir la métrica d a $S \times S$ se obtiene que $(S, d|_S)$ es un espacio métrico; se llama **subespacio métrico** de (X, d) .

Definición 1.2. Sean (X, d) espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Se define la **bola** con centro en x y radio ε como el conjunto $B_d(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición 1.3. Dado (X, d) espacio métrico y $A \subset X$, se dirá que A es **abierto** si y sólo si $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$, tal que $B_d(a; \varepsilon) \subset A$.

Definición 1.4. Dado (X, d) espacio métrico y $A \subset X$, se dirá que A es **cerrado** si y sólo si $X - A$ es abierto.

Definición 1.5. Dado (X, d) espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, se dirá que a es **punto frontera de A** si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $B_d(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B_d(a; \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$. Se define **frontera de A** como $\partial A = \{x \in X \mid x \text{ es punto frontera de } A\}$.

Definición 1.6. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos, $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función y $c \in X_1$; f se llamará **función continua en c** si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d_1(x, c) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$.

Definición 1.7. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos, $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función y $K \subset X_1$. Se dirá que f es continua en K o simplemente **continua** si y sólo si f es continua en c para todo $c \in K$.

Definición 1.8. Sea $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función biyectiva. Se dirá que f es **bicontinua** si y sólo si f y f^{-1} son continuas.

Definición 1.9. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Se dirá que (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son **homeomorfos** si y sólo si existe una función $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ bicontinua y se denotará $(X_1, d_1) \cong (X_2, d_2)$.

Definición 1.10. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos, $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función. Se dirá que f es una **contracción** si y sólo si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq k < 1$ y $\forall x, y \in X_1$ se tiene que $d_2(f(x), f(y)) < kd_1(x, y)$. En tal caso k se llama **factor de contracción** de f .

Teorema 1.1. Toda contracción es continua.

Definición 1.11. Sea X un conjunto no vacío y $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ una función; en este caso notamos $f(n) = x_n$, y la función f se llama **sucesión** en X . Abusando un poco del lenguaje y la notación, se identifica comúnmente la función f con su “recorrido ordenado”:

$$f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Definición 1.12. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) . $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada **sucesión de Cauchy** si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Ejemplo 1.4. En (\mathbb{Q}, d_u) podemos tomar la sucesión $\left(\frac{[x10^n]}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ donde x es fijo, $x \in \mathbb{R}$. y $[a]$ denota la parte entera de a . Es sencillo demostrar que esta **sucesión** es de Cauchy teniendo en cuenta las propiedades de parte entera.

Definición 1.13. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es llamada **sucesión convergente** si y sólo si $\exists x \in X$ para el cual: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$. En este caso el elemento $x \in X$ es llamado **límite** de la sucesión, y se denotará $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Nota: No es difícil probar que si una sucesión es convergente en un espacio métrico, entonces tiene un único punto límite.

Teorema 1.2. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Definición 1.14. Un espacio métrico (X, d) , es llamado **espacio métrico completo** si y solo si toda sucesión de Cauchy converge.

Ejemplo 1.5. (\mathbb{R}, d_u) es un espacio métrico completo.

Ejemplo 1.6. (\mathbb{R}^2, d_e) es un espacio métrico completo.

Teorema 1.3. Sean $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ dos espacios métricos, $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función continua en X_1 , y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en X_1 entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$.

Definición 1.15. Sea $f : X \rightarrow X$ una función sobre un conjunto no vacío; un elemento $x_f \in X$ tal que $f(x_f) = x_f$ es llamado **punto fijo** de f .

Teorema 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ una contracción; entonces existe un único $x_f \in X$ tal que x_f es **punto fijo** de f .

Teorema 1.5. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ una contracción; entonces $\forall x \in X$ se tiene que $\lim f^{on}(x) = x_f$, donde $f^{on}(x) = (f \circ \dots \circ f)(x)$, es decir, f se compone n veces.

Definición 1.16. Sea $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales donde $k_1 > k_2$ implica $n_{k_1} > n_{k_2}$, y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X ; entonces la sucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es llamada **subsucesión** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.17. Sean (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Se dice que K es **compacto** si, y sólo si, toda sucesión en K posee una subsucesión que converge en K .

Definición 1.18. Sea (X, d) un espacio métrico completo; se define:

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subseteq X \mid K \neq \emptyset \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Definición 1.19. Sea $a \in X$ (fijo) y $K \in \mathcal{H}(X)$. Se define $\hat{d}(a, K) = \min\{d(a, x) \mid x \in K\}$.

Proposición 1.3. Si $a \in X$ y $K \in \mathcal{H}(X)$, entonces $\hat{d}(a, K)$ siempre existe.

Nota: Podemos observar que $\hat{d} : X \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, por lo cual no se puede considerar como métrica.

Definición 1.20. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\}$

Proposición 1.4. Si $A, B \in \mathcal{H}(X)$, entonces $\tilde{d}(A, B)$ siempre existe.

Nota: \tilde{d} no es métrica: consideremos (\mathbb{R}, d_u) como espacio métrico, y los compactos $A = \{0\}$ y $B = [0, 1]$. Dado que $0 \in B$, $\tilde{d}(0, B) = \min\{d_u(0, x) \mid x \in B\} = d_u(0, 0) = 0$, luego $\hat{d}(A, B) = \max\{0\} = 0$; claramente $A \neq B$, y no se cumple la condición *ii*) de las métricas. La siguiente proposición generaliza este ejemplo.

Proposición 1.5. $A \subset B$ si y sólo si $\tilde{d}(A, B) = 0$.

Demostración. Si $A \subset B$ tenemos que $\tilde{d}(a, B) - d(a, a) = 0$, luego $\tilde{d}(A, B) = \max\{0\} = 0$. Si $\tilde{d}(A, B) = 0$, tendríamos que $\max\{\tilde{d}(a, B) \mid a \in A\} = 0$, es decir $\forall a \in A, \tilde{d}(a, B) = 0$, luego $\exists b \in B$ tal que $d(a, b) = 0$; pero dado que d es métrica, tenemos que $a = b$, luego $\forall a \in A$ se tiene que $a \in B$. ■

Definición 1.21 (Métrica de Hausdorff). Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$, entonces se define $\mathfrak{h}(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$.

Proposición 1.6. $\mathfrak{h} : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es métrica sobre $\mathcal{H}(X)$; es decir $(\mathcal{H}(X), \mathfrak{h})$ es espacio métrico.

Demostración. i) $\mathfrak{h}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

$$\mathfrak{h}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = 0 \Leftrightarrow \max\{\tilde{d}(A, B)\} = 0 \text{ y } \tilde{d}(B, A) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

ii) $\mathfrak{h}(A, B) \leq \mathfrak{h}(A, C) + \mathfrak{h}(B, C)$.

Para la demostración de esta segunda parte se usan los siguientes lemas, que no son difíciles de demostrar. ■

Lema 1.1. Si $S, T \subset \mathbb{R}$, y $\forall s \in S, \forall t \in T$ se tiene $s \leq t$, entonces $\min(S) \leq \min(T)$.

Lema 1.2. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\min\{a + s \mid s \in S\} = a + \min(S)$.

Lema 1.3. Si $a \leq b + c$ y $a' < b' + c'$, entonces $\max\{a, a'\} \leq \max\{b, b'\} + \max\{c, c'\}$

Demostremos, pues, la parte ii) de la Proposición 1.6.

Sea $a \in A$; entonces $\hat{d}(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\}$; usando el Lema 1.1, $\hat{d}(a, B) \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}$.

Usando el Lema 1.1, $\min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\} = d(a, c) + \min\{d(c, b) \mid b \in B\} \leq d(a, c) + \max\{\min\{d(c, b) \mid b \in B\} \mid c \in C\} = d(a, c) + \tilde{d}(C, B)$. Resumiendo, $\forall a \in A, \forall c \in C, \hat{d}(a, B) \leq d(a, c) + \tilde{d}(C, B)$.

Sea $a_0 \in A$ tal que $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$, y $c_0 \in C$ tal que $d(a_0, c_0) = \hat{d}(a_0, C)$. Entonces $\tilde{d}(A, B) \leq \hat{d}(a_0, C) + \tilde{d}(C, B)$; pero $\hat{d}(a_0, C) \leq \tilde{d}(A, C)$, de lo cual tenemos que $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$. Análogamente, $\tilde{d}(B, A) \leq \tilde{d}(C, A) + \tilde{d}(B, C)$, y usando el Lema 1.3, $\max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} \leq \max\{\tilde{d}(A, C), \tilde{d}(C, A)\} + \max\{\tilde{d}(B, C), \tilde{d}(C, B)\}$ lo que equivale a $\mathfrak{h}(A, B) \leq \mathfrak{h}(A, C) + \mathfrak{h}(B, C)$; y usando la Proposición 1.1, queda demostrado que $(\mathcal{H}(X), \mathfrak{h})$ es espacio métrico. ■

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [3].

Teorema 1.6. Si (X, d) es espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{H}(X), \mathfrak{h})$ es espacio métrico completo.

1.2. Sistemas iterados de funciones (SIF)

Los SIF constituyen una forma muy usada para construir conjuntos al estilo de la curva de Koch.

Definición 1.22. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sean f_1, \dots, f_N contracciones sobre X ; se define $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ como un **sistema iterado de funciones** (SIF).

Teorema 1.7. Sean (X, d) un espacio métrico completo y una contracción $f : X \rightarrow X$; entonces la función $\hat{f} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por $\hat{f}(B) = \{f(x) \mid x \in B\}, \forall B \in \mathcal{H}(X)$, es una contracción.

El siguiente teorema cuya demostración puede verse en [3], garantiza la existencia y unicidad de lo que se llamará atractor de un SIF; además muestra cómo obtener dicho atractor, mediante el límite de una sucesión de $\mathcal{H}(X)$.

Teorema 1.8. Sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un sistema iterado de funciones; entonces

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

definida por

$$F(B) = \bigcup_{i=1}^N \hat{f}_i(B), \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

es contracción y por lo tanto posee un (único) punto fijo A .

Además, para cualquier $B \in \mathcal{H}(X)$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(B) = A.$$

Definición 1.23. Sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un sistema iterado de funciones. Se define **atractor del SIF** como el punto fijo de la contracción F definida en el teorema anterior.

1.3. Topología

Definición 1.24. Sea X un conjunto no vacío. Una **topología** sobre el conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X , llamados **conjuntos abiertos**, que satisface:

i) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;

ii) $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$;

iii) Si $\{A_\zeta\}_{\zeta \in \Gamma}$ es una familia de elementos de $\tau \Rightarrow \bigcup_{\zeta \in \Gamma} A_\zeta \in \tau$.

En este caso la pareja (X, τ) es llamada **espacio topológico**.

Ejemplo 1.7. Sea $X \neq \emptyset$; definimos $\tau_g = \{\emptyset, X\}$; la pareja (X, τ_g) es espacio topológico y τ_g es llamada **topología grosera**.

Ejemplo 1.8. Sea $X \neq \emptyset$, definimos $\tau_{disc} = \{A \mid A \subseteq X\}$; la pareja (X, τ_{disc}) es espacio topológico, τ_{disc} llamada **topología discreta**.

Ejemplo 1.9. Sean $X \neq \emptyset$ y $a \in X$; definimos $\tau_a = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$; la pareja (X, τ_a) es llamada **topología del punto incluido**.

Ejemplo 1.10. Sea $X \neq \emptyset$ y $a \in X$; definimos $\tau = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$; la pareja (X, τ) es espacio topológico y τ es llamada **topología de los complementos finitos**.

Definición 1.25. Sea (X, τ) espacio topológico y $A \in \tau$ un abierto; entonces $X - A$ es llamado **cerrado**.

Definición 1.26. Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos y $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (X_2, \tau_2)$ una función; f es **continua** si y sólo si $\forall A \in \tau_2$, se tiene que $f^{-1}(A) \in \tau_1$.

Definición 1.27. Sean (X, τ) espacio topológico y $\mathfrak{B} \subseteq \tau$. Se dice \mathfrak{B} es una **base para la topología** τ , si y sólo si, todo abierto es unión de elementos de \mathfrak{B} . En este caso los elementos de \mathfrak{B} son llamados **abiertos básicos**.

Ejemplo 1.11. Tomando el espacio topológico (X, d_{disc}) , tenemos que $\mathfrak{B}_{disc} = \{\{a\} \mid a \in X\}$ es una base para esta topología.

Teorema 1.9. Sean (X, d) espacio métrico. Se define

$$\mathfrak{B}_d = \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in X \text{ y } \varepsilon > 0\} \quad \text{y} \quad \tau_d = \left\{ \bigcup_{\zeta \in \Gamma} A_\zeta \mid \{A_\zeta\}_{\zeta \in \Gamma} \subseteq \mathfrak{B}_d \right\}.$$

Entonces (X, τ_d) es espacio topológico y \mathfrak{B}_d es una base para tal topología.

Nota: Este último teorema nos relaciona los espacios métricos con los espacios topológicos, ya que de cada espacio métrico podemos obtener un espacio topológico usando como base la familia de las bolas.

Definición 1.28. Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable**, si existe métrica d sobre X tal que $\tau = \tau_d$.

Definición 1.29. Un espacio topológico (X, τ) es llamado de **Hausdorff** si $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists A, B \subseteq X$ abiertos tales que $x \in A, y \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 1.10. Todo espacio metrizable es de Hausdorff.

Demostración. Sea (X, τ_d) espacio topológico metrizable y sean $x, y \in X, x \neq y$. Sea $r = \frac{d(x, y)}{2} > 0$, entonces se tiene: $x \in B_d(x; r), y \in B_d(y; r)$ y $B_d(x; r) \cap B_d(y; r) = \emptyset$. ■

Definición 1.30. Un espacio topológico (X, d) es **conexo** si y solo si no existe una separación para X .

Teorema 1.11. La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo ver [5].

Ejemplo 1.12. Los intervalos de \mathbb{R} son conexos.

1.4. Conjuntos de Julia

Definición 1.31. Llamaremos **sistema dinámico** al par (X, f) formado por un conjunto no vacío X y una aplicación $f : X \rightarrow X$. Dado un punto $x \in X$, llamaremos **órbita** de x a la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), \dots\} \subset X$; donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

Definición 1.32. En un sistema dinámico (X, f) , un punto $x_0 \in X$ se llama **punto fijo** si $f(x_0) = x_0$, y se llama **punto periódico** de periodo $n > 1$ si $f^n(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0$ para cualquier $i \in [0, n)$, entendiéndose que $f^0(x) = x$.

Definición 1.33. Las órbitas de los puntos periódicos se llaman **órbitas periódicas** del mismo periodo que el punto.

Intuitivamente, un punto periódico x_0 se llama **atractivo** si la órbita de los puntos próximos a él converge a la órbita de x_0 , y se llama **repulsivo** si existen puntos infinitamente próximos a él cuya órbita se aleja de la órbita de x_0 .

Los **sistemas dinámicos complejos** son los sistemas dinámicos de la forma (\mathbb{C}, f) es decir, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde \mathbb{C} es el plano complejo.

Consideremos el sistema dinámico complejo cuadrático (\mathbb{C}, f_c) tal que $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ (c es un parámetro).

Julia y Fatou se plantearon el problema de estudiar la órbita de los puntos $z \in \mathbb{C}$ en el sistema dinámico (\mathbb{C}, f_c) . Observaron que para ciertos valores de c la órbita convergía a un punto fijo de la aplicación f_c , mientras que en otros, la órbita divergía. Cada uno de estos dos tipos de puntos constituye una región del plano complejo, y “en medio” queda una frontera infinitamente delgada que se conoce con el nombre de **conjunto de Julia**; en muchos casos ellos observaron que, fijado $c \in \mathbb{C}$, para algunos valores de z , la órbita converge a un punto fijo de la aplicación f_c , mientras que para otros, la órbita diverge. La frontera entre los conjuntos de puntos descritos, con frecuencia tiene estructura fractal.

1.4.1. Representación gráfica

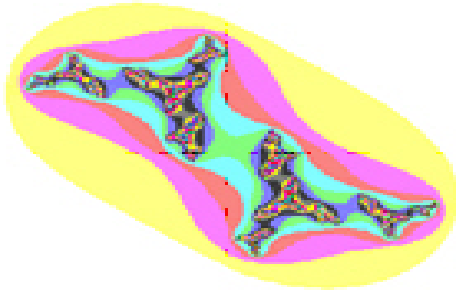
Para representar gráficamente mediante un programa computacional, el conjunto de Julia para un cierto $c \in \mathbb{C}$ dado, hay que plantear el sistema dinámico (\mathbb{C}, f_c) , y estudiar si la órbita de cada $z \in \mathbb{C}$ diverge o no.

Para saber si dicha órbita diverge, buscamos si algún punto de la órbita tiene módulo mayor o igual que dos, ya que si esto ocurre, hay un teorema de cálculo complejo que nos dice que la órbita diverge. Hay que acotar el número de puntos de la órbita que estudiamos. Una buena cota práctica puede ser considerar 100 puntos. Si se toma un número mayor de puntos, la representación del conjunto de Julia será más exacta, aunque a costa de un mayor tiempo de cálculo.

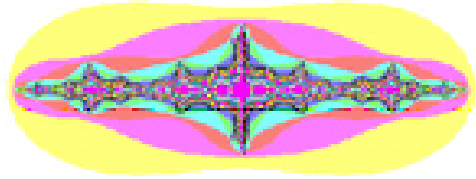
Para los conjuntos de Julia, **fijamos un valor de c** y luego consideramos el destino de todas las posibles semillas (es decir la órbita de cada punto) para ese valor fijo de c . Aquellas semillas cuyas órbitas no escapan, forman un conjunto llamado **conjunto lleno de Julia**, cuya frontera se llama **conjunto de Julia** y es con frecuencia un conjunto de tipo fractal. A medida que varía el valor del parámetro c se obtienen diferentes fractales del tipo Julia. Las siguientes imágenes han sido capturadas del programa Visual Basic y se les ha aplicado un efecto de inversión del color.

$$F(z) = z^2 + c$$

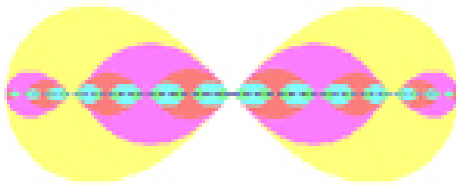
$$\{\mathbb{C}; z^2 + (-0,25 + i)\}$$



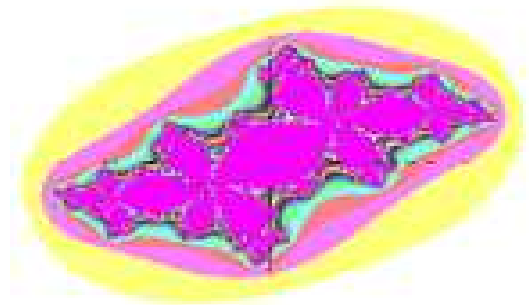
$$\{\mathbb{C}; z^2 + (-1,38)\}$$



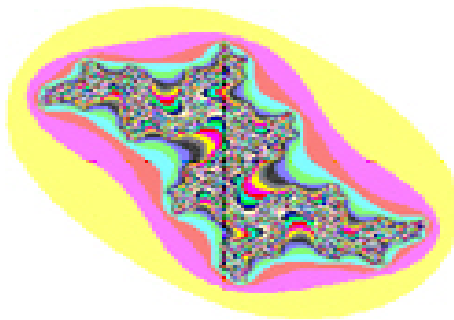
$$\{\mathbb{C}; z^2 + (-2)\}$$



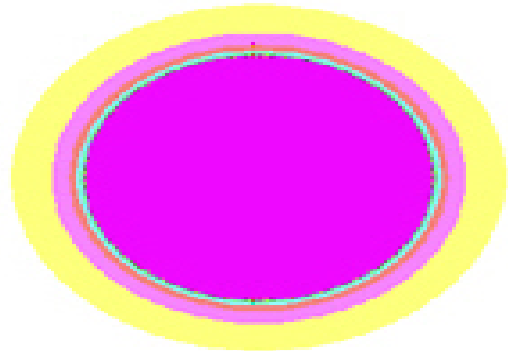
$$\{\mathbb{C}; z^2 + (-0,5 - 55i)\}$$



$$\{\mathbb{C}; z^2 + (-0,75i)\}$$



$$\{\mathbb{C}; z^2 + (0)\}$$



CAPÍTULO 2

LA CURVA DE KOCH

2.1. Breve reseña histórica

Biografía Niels Fabian Helge Von Koch

Matemático sueco, creador en 1904 de este “monstruo” que lleva su nombre, *La curva de Koch*. Nació el 25 de enero de 1870 en Estocolmo. Su padre Richert Vogt Von Koch, tenía una carrera militar, teniente coronel, y su madre era Agathe Henriette Wrede. Von Koch asistió a una buena escuela en Estocolmo, terminando sus estudios allí en 1887, e ingresó a la Universidad de Estocolmo, tercera universidad en Suecia; siendo su primer profesor de matemáticas, Mittag-Leffler.

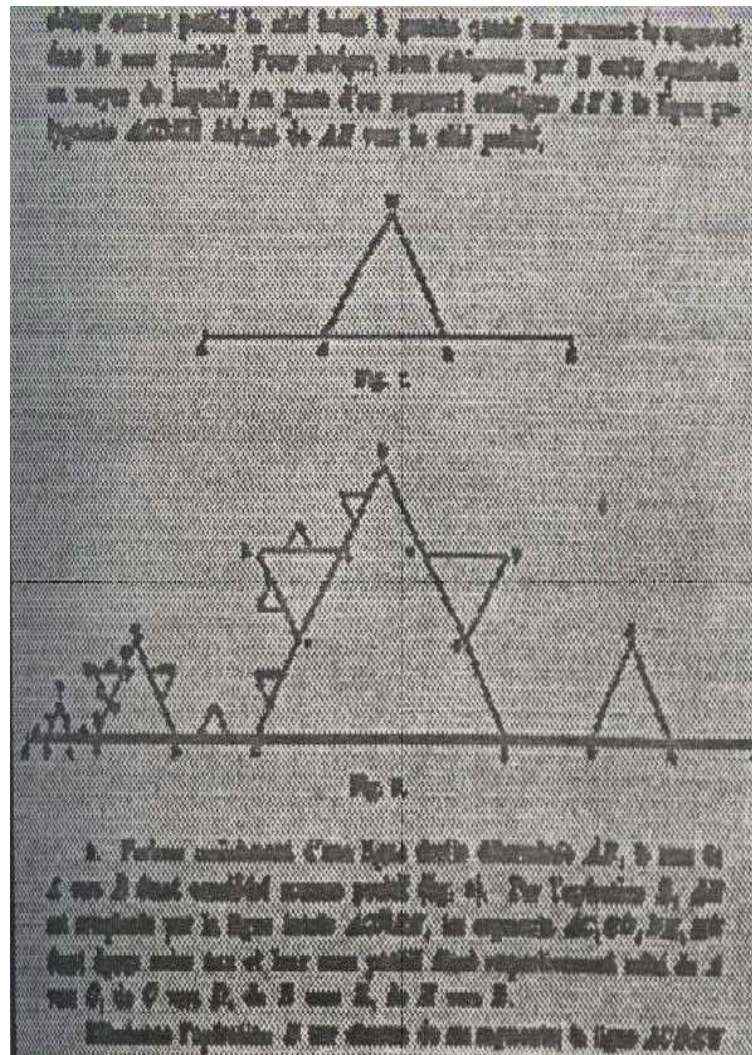


La Universidad de Estocolmo concedió a Von Koch un doctorado en matemáticas.

En 1904 Niels Fabián Helgeron Von Koch presentó lo que hoy se conoce como la curva que lleva su nombre. Aunque en el vasto mundo de la matemática este personaje sueco no es muy recordado, su “monstruo” ayudó a inspirar a Mandelbrot (considerado el “padre de los fractales”) en el descubrimiento de la geometría fractal. La curva es hermosa y se asemeja

a una costa natural.

La siguiente figura presenta la construcción original de Koch, la cual fue publicada en: **Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planas** [2].



Helge Von Koch falleció el 11 de marzo de 1924 en Danderyd, Estocolmo, Suecia.

2.2. Construcción geométrica de la curva de Koch

La primera visualización de la curva de Koch la haremos mediante una construcción geométrica relativamente sencilla. Se forma partiendo de un segmento unidad \mathcal{K}_0 (ver Figura 2.1), el cual es dividido en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos

segmentos del mismo tamaño que el eliminado, que junto con dicha parte anulada, formaría un triángulo equilátero. Se obtiene así la poligonal \mathcal{K}_1 (ver Figura 2.2). A continuación se repite el proceso por cada segmento formado y se obtiene la poligonal \mathcal{K}_2 ; así sucesivamente construimos, en cada etapa una poligonal \mathcal{K}_n y obteniéndose entonces una sucesión $(\mathcal{K}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Intuitivamente queremos encontrar una “figura final”, algún resultado después de realizar el proceso “infinitas veces”. Obsérvese que los conjuntos $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots$ son subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 de modo que la sucesión $(\mathcal{K}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), \mathfrak{h})$ (Proposición 1.6). Aceptemos por el momento que esta sucesión converge en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, notemos \mathcal{K} el límite de esta sucesión y llamémosla **curva de Koch**, es decir estamos definiendo la curva de Koch \mathcal{K} como se sigue

$$\mathcal{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n.$$

Después de realizar la construcción \mathcal{K}_5 obtenemos la siguiente figura, que nos puede dar una idea representativa de lo que sería tal límites, es decir una aproximación visual de \mathcal{K} .



La tecnología computacional existente nos ayuda a realizar varios niveles de la construcción, pero a partir del nivel 5, a la vista parece no haber cambios notables en la figura, por lo cual nuestros sentidos nos dicen que existe una “figura límite”; pero: ¿qué significa “figura límite”? y, ¿qué garantiza que tal límite exista?, responderemos estas preguntas en la sección 2.5.

Figura 2.1 \mathcal{K}_0 (Nivel 0)

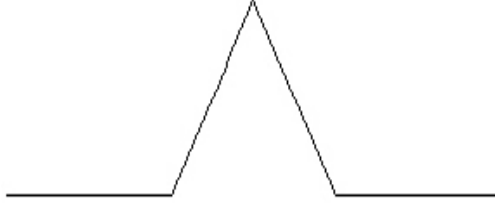


Figura 2.2 \mathcal{K}_1 (Nivel 1)

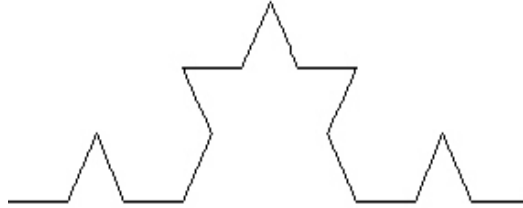


Figura 2.3 \mathcal{K}_2 (Nivel 2)

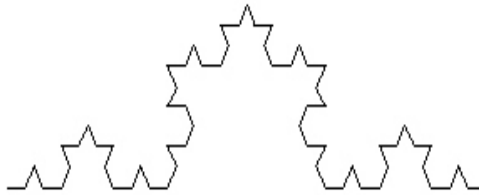


Figura 2.4 \mathcal{K}_3 (Nivel 3)

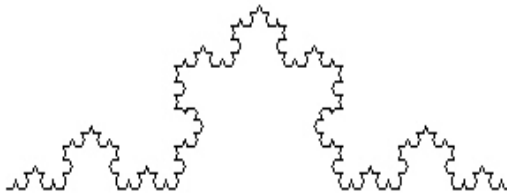


Figura 2.5 \mathcal{K}_4 (Nivel 4)



Figura 2.6 \mathcal{K}_5 (Nivel 5)

2.3. La curva de Koch como espacio métrico

En el ejemplo 1.2. se presentó el espacio métrico (\mathbb{R}^2, d_e) (el plano con la métrica usual o métrica euclidiana), y puesto que $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ entonces podemos aplicar la Proposición 1.2 para obtener el subespacio métrico $(\mathcal{K}, d_{e|_{\mathcal{K}}})$, es decir la curva de Koch es un espacio métrico, con la métrica que hereda del plano \mathbb{R}^2 . Calculemos algunas “medidas” de la curva de Koch. En primer lugar, por tratarse de una curva, su cardinalidad es $x_1 = c$ la cardinalidad de \mathbb{R} . Calculemos ahora su longitud, área que encierra y su dimensión.

2.3.1. Longitud de la curva de Koch

- Para el nivel cero de la construcción de \mathcal{K} , tenemos un segmento dividido en tres partes iguales; para el nivel uno tenemos que la parte central se sustituye por dos segmentos que forman un triángulo sin base, obteniéndose una poligonal de 4 segmentos; para el nivel dos sustituimos las partes centrales de cada segmento y resultan 4^2 segmentos y así sucesivamente. Por lo tanto el número de segmentos aumenta en forma exponencial; así, para el nivel n tenemos una poligonal de 4^n segmentos.
- Si la longitud del segmento inicial es 1, en el siguiente nivel cada segmento tiene longitud $1/3$, luego cada medida se reduce con un factor $1/3$ pero el número de segmentos aumenta exponencialmente; en el nivel n se obtiene 4^n segmentos y la longitud de cada segmento es $(1/3)^n$, de modo que:

$$\text{Longitud}(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4/3)^n = +\infty.$$

La curva de Koch tiene las características de tener longitud infinita y ser continua en todos sus puntos, pero no es diferenciable en ninguno de sus infinitos extremos o vértices, al no tener única tangente en ellos.

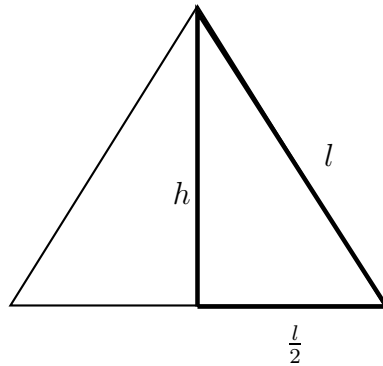
2.3.2. Área bajo la curva de Koch

Recordando que partimos de un segmento unidad (ver Figura 2.7), el cual es dividido en tres partes iguales, y que sustituyendo la parte central por dos segmentos del mismo tamaño se forma un triángulo equilátero este con un área A , en la primera iteración

obtenemos dicho triángulo de área A (ver Figura 2.8); en la segunda iteración obtenemos 4 triángulos de área A_1 cada uno (ver Figura 2.9); en la tercera iteración obtenemos 16 triángulos de área A_2 cada uno (ver Figura 2.10); en la cuarta iteración obtenemos 64 triángulos de área A_3 cada uno (ver Figura 2.11), etc.

El área de un triángulo equilátero en función del lado es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Esto es:



Cálculo de la altura (h) en función del lado (l)

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Cálculo del área del triángulo equilátero de lado l

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Sustituyo en $A(n)$, l (lado) por su valor en la n -ésima iteración, tomando como longitud del segmento inicial $l = 1$ nos quedará:

$$A(n) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{9^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Veamos :

Figura 2.7

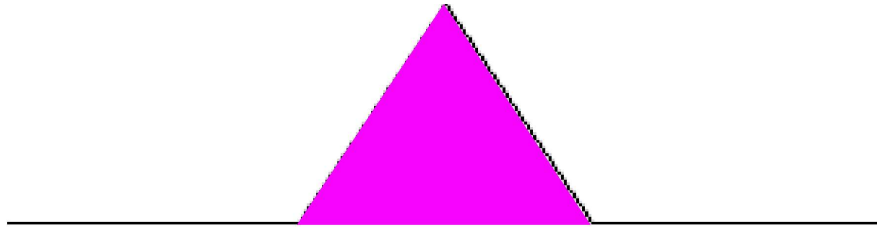


Figura 2.8 $A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c/u$

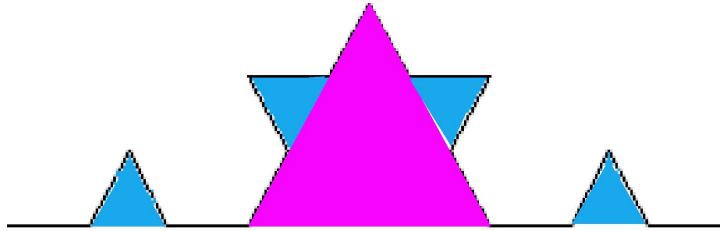


Figura 2.9 $A_1 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} c/u$

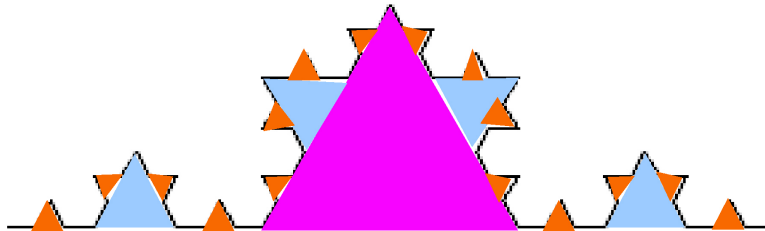


Figura 2.10 $A_2 = \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c/u$

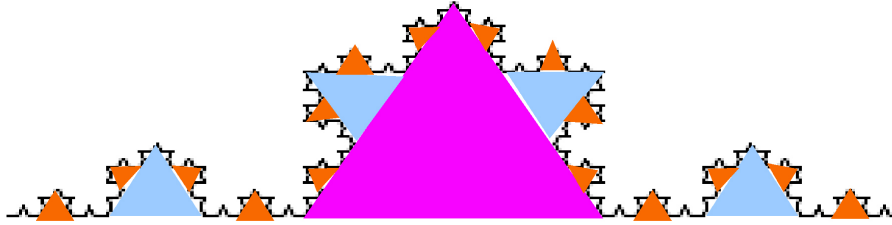


Figura 2.11 $A_3 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c/u$

Así pues si sumamos todas las áreas parciales (número de triángulos por área de cada uno), tendremos:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 S_1 &= 4 \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + S_0 \\
 S_2 &= 4^2 \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + S_1 \\
 S_3 &= 4^3 \left(\frac{1}{3^4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + S_2 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

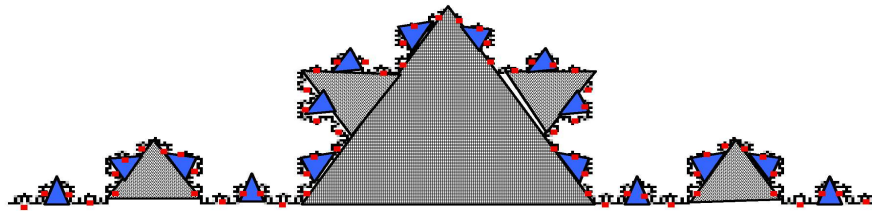


Figura 2.12 $A_n = 4^n \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 4^{n-1} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Calculando el límite de la serie obtendremos el valor del área final.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^n 4^i \cdot \left(\frac{1}{3^{i+1}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{i=0}^n 4^i \cdot \frac{1^2}{3^{2i} \cdot 3^2} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 1^2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^i. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{K}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{i=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^i \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{(1 - 4/9)} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{5/9} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{5} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Entonces el área bajo la curva de \mathcal{K} es $\frac{\sqrt{3}}{20}$.

2.3.3. Dimensión de la curva de Koch

Existen varias clases de dimensión, por ejemplo la dimensión fractal, la dimensión de Hausdorff, la dimensión topológica, etc. La intención de este trabajo no es estudiar rigurosamente estos conceptos pues corresponden a la teoría de la medida, lo que se sale de los alcances de nuestro trabajo; solo se quiere presentar una idea intuitiva que nos permita aproximarnos a la dimensión de \mathcal{K} . Para acercarnos a este concepto es conveniente revisar lo que intuitivamente entendemos por dimensión. Obviamente, una línea tiene dimensión uno, un cuadrado con su interior dimensión dos, y dimensión tres el cubo. Antes de abordar la curva de Koch, analicemos un poco lo que ocurre con un segmento y con un cuadrado. Podemos “romper” un segmento de línea en 4 intervalos iguales y semejantes al segmento inicial, cada uno con la misma longitud, y cada uno de estos se puede ampliar por un factor de 4 para obtener el segmento original. Podemos también romper un segmento de línea en 7 pedazos iguales y semejantes al segmento inicial, cada uno de los pedazos ampliarlo por un factor de 7 y conseguimos el segmento inicial. En general, podemos romper un segmen-

to de línea en n pedazos iguales, y con un factor de ampliación n , obtener el segmento inicial.

Un cuadrado es diferente. Podemos descomponer un cuadrado en 4 cuadrados iguales, y el factor de la ampliación es 2. Alternativamente, podemos romper el cuadrado en 9 pedazos iguales con el factor de ampliación 3, o 25 pedazos con factor 5. Claramente, el cuadrado se puede romper en n^2 copias de sí mismo, cada una de las cuales se debe ampliar por un factor n para alcanzar la figura original. Finalmente, podemos descomponer un cubo en n^3 pedazos iguales, cada uno de los cuales tiene factor n .

En los ejemplos se cumple que $n^D = N$, donde n es el factor de ampliación, N el número de copias y D la dimensión. En consecuencia,

$$D = \frac{\log(\text{número de copias semejantes a la figura original})}{\log(\text{factor de ampliación para obtener la figura original})}$$

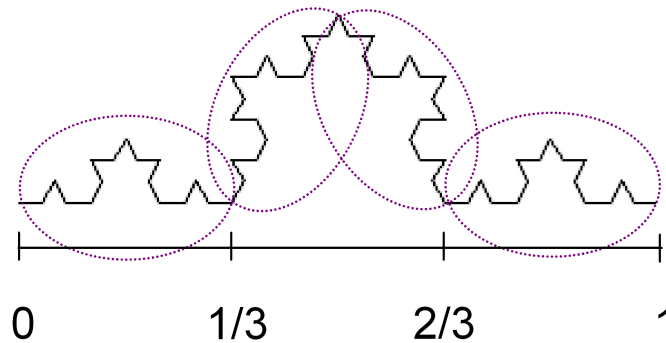


Figura 2.13 $N = 4$, $n = 3$

Para la curva de Koch se tiene que $n = 3$ y $N = 4$, de modo que si denotamos D_k como la dimensión de la curva de Koch

$$D_k = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2618.$$

Entonces $1 < D_{\mathcal{K}} < 2$, lo que puede interpretarse como que la curva de Koch no es exactamente una “curva clásica”, ni una superficie, sino un “intermedio” entre estos dos entes, de tal manera que, expresado de manera informal e intuitiva, \mathcal{K} llena el espacio más que una curva clásica pero menos que una superficie.

2.4. La curva de Koch como espacio topológico

Puesto que, como se observó en la sección anterior, $(\mathcal{K}, d_{e|_k})$ es un espacio métrico, podemos aplicar el Teorema 1.9 y entonces obtener a \mathcal{K} como un espacio topológico. Desde este punto de vista se tiene que \mathcal{K} es metrizable, Hausdorff, compacto y conexo. En efecto:

Teorema 2.1. *La curva de Koch es metrizable.*

Es inmediato ya que se está tomando la topología generada por $d_{e|_k}$.

Teorema 2.2. *La curva de Koch en un espacio topológico de Hausdorff.*

Esto es consecuencia inmediata del hecho de que \mathcal{K} es metrizable (véase el Teorema 1.10).

Teorema 2.3. *La curva de Koch es un espacio compacto.*

En la sección siguiente se demostrará que \mathcal{K} es el atractor de un SIF en el plano \mathbb{R}^2 , lo que implica (Teorema 1.8 y Definición 1.23) que $\mathcal{K} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, es decir que \mathcal{K} es compacto.

Teorema 2.4. *La curva de Koch es un espacio conexo.*

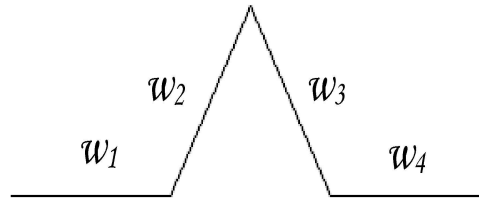
Puesto que \mathcal{K} es una imagen continua de un intervalo, basta aplicar el teorema 1.11.

2.5. La curva de Koch como atractor de un sistema iterado de funciones

En el capítulo anterior se suministró una fundamentación teórica sobre el funcionamiento de un sistema iterado de funciones. En esta sección se mostrará como la curva de Koch

corresponde al atractor de un SIF. Tomando el SIF adecuado podemos verificar que la curva de Koch es más que una simple construcción geométrica. La forma que adopta se llama **atractor** (un atractor es cualquier forma en la que se estabiliza un proceso de este tipo). Es posible obtener las distintas etapas en la sucesión hacia la curva límite mediante el sistema de transformaciones contractivas siguiente:

Consideremos \mathbb{R}^2 como espacio métrico completo, usando la métrica euclidiana (\mathbb{R}^2, d_e) . Definamos las contracciones w_1, w_2, w_3 y w_4 de \mathbb{R}^2 , como sigue:



$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos 60^\circ & -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 60^\circ \\ \frac{1}{3} \operatorname{sen} 60^\circ & \frac{1}{3} \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos(-60^\circ) & -\frac{1}{3} \operatorname{sen}(-60^\circ) \\ \frac{1}{3} \operatorname{sen}(-60^\circ) & \frac{1}{3} \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es un sistema iterado de funciones (SIF). De acuerdo con el Teorema 1.8, la función $W(B) = \bigcup_{i=1}^4 w_i(B)$ para cada $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ es una contracción,

para la cual existe un único $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}^2$ compacto (en virtud del Teorema 1.5), tal que A es el atractor del SIF, es decir para todo $B \subset \mathbb{R}^2$ compacto y no vacío, $\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) = A$ y $W(A) = A$.

El hecho que el atractor A sea límite de una sucesión de compactos no vacíos, sin importar el compacto inicial, nos da una ventaja sobre la elección de dicho conjunto inicial. Tomemos por ejemplo $B = [0, 1]$; la sucesión $(W^{on}(B))_n$ se muestra a continuación:



Figura 2.14 B



Figura 2.15 $W(B)$

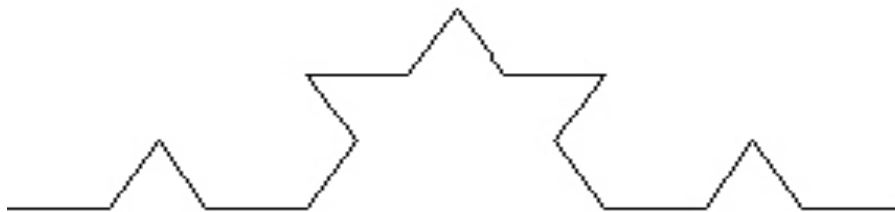


Figura 2.16 $W^{o2}(B)$

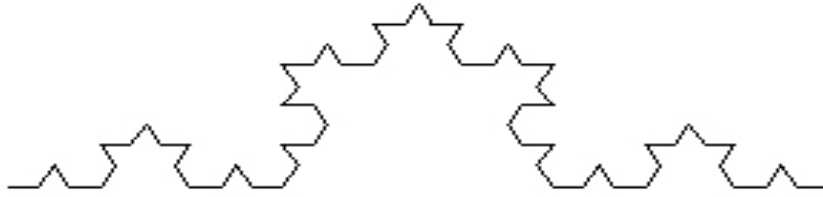


Figura 2.17 $W^{\circ 3}(B)$



Figura 2.18 $W^{\circ 4}(B)$



Figura 2.19 $W^{\circ 5}(B)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) = K$$

Usando el programa Fraclin 1.2, con las transformaciones w_1, w_2, w_3 y w_4 se obtiene las gráficas de la curva de Koch.

2.6. La curva de Koch como conjunto de Julia

Otro método de obtener conjuntos fractales consiste en usar sistemas dinámicos; este método es, en cierta forma, el proceso inverso del método de los sistemas iterados de funciones (SIF). Tomando como base el ejemplo que aparece en [3], Pág. 246, en el cual se muestra un sistema dinámico cuyo conjunto de Julia es el triángulo de Sierpinski, hemos obtenido para este trabajo, un sistema dinámico cuyo conjunto de Julia es nuestra curva de Koch. Para esto tomamos el SIF presentado en la sección anterior, pero, para mayor facilidad en los cálculos usaremos la notación compleja para las contracciones del SIF, es decir:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}ze^{i60^\circ} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}ze^{-i60^\circ} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \right\}$$

De esta manera, las inversas de las contracciones serán:

$$\begin{aligned} w_1^{-1}(z) &= 3z \\ w_2^{-1}(z) &= 3 \left(z - \frac{1}{3} \right) e^{-i60^\circ} = (3z - 1)e^{-i60^\circ} \\ w_3^{-1}(z) &= 3 \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) e^{i60^\circ} = \left(3z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) e^{i60^\circ} \\ w_4^{-1}(z) &= 3 \left(z - \frac{2}{3} \right) = 3z - 2 \end{aligned}$$

Y observando que la curva de Koch particiona el plano en cuatro regiones (ver Figura 2.20) se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \forall z = x + iy = (x, y)$$

$$f(z) = \begin{cases} 3z & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ (3z - 1)e^{-i60^\circ} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (3z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)e^{i60^\circ} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \\ 3z - 2 & \text{si } \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

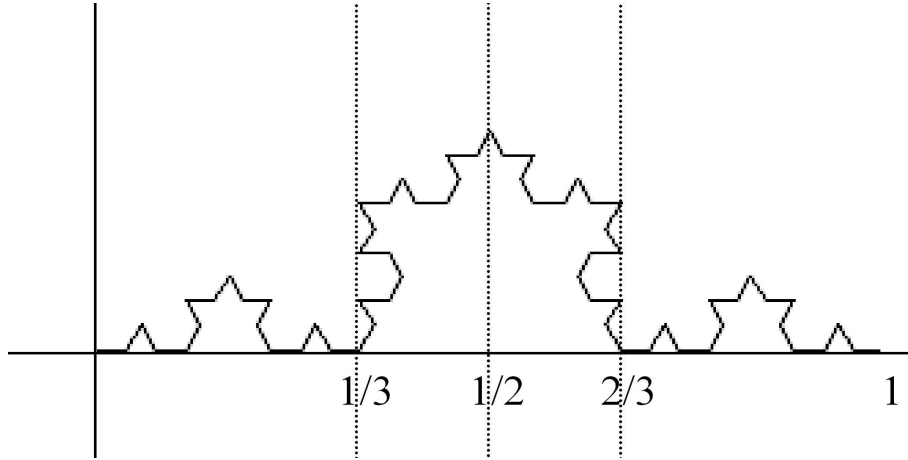


Figura 2.20 Regiones

Ahora, pasando de la notación compleja a notación cartesiana, se obtiene la siguiente definición de la función f :

$$f(z) = \begin{cases} (3x, 3y) & \text{si } x < 1/3 \\ \left(\frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2}y, \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y - \sqrt{3} \right) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \\ (3x - 2, 3y) & \text{si } \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

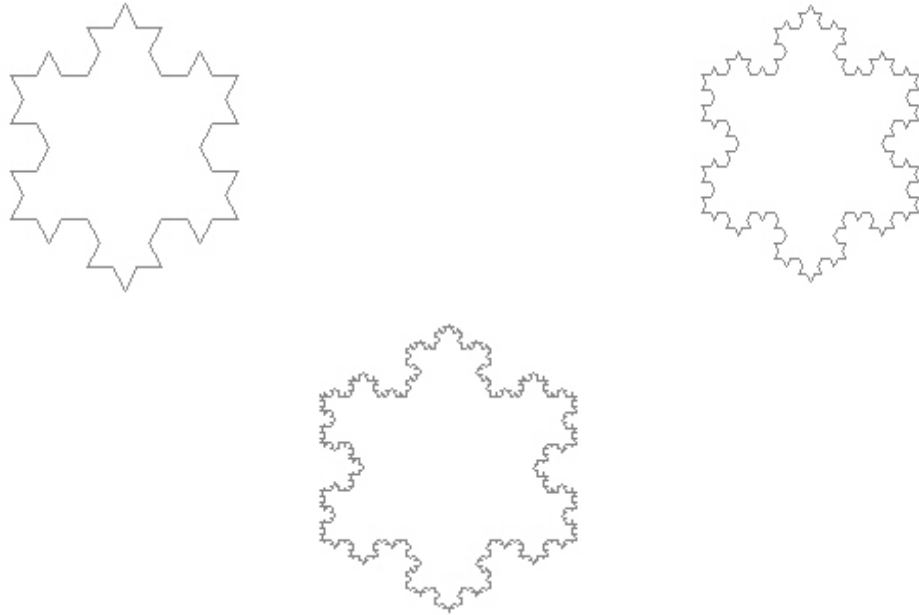
CAPÍTULO 3

LA ISLA DE KOCH

3.1. Definición de la isla de Koch o copo de nieve

En este capítulo abordamos algunos aspectos generales de un conjunto muy relacionado con la curva de Koch ya que se obtiene “pegando” de cierta forma tres copias de dicha curva. Si construimos sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero una curva de Koch, obtendremos lo que se conoce como la isla de Koch o el copo de nieve. Esta es una curva continua y cerrada que no tiene tangente en ningún punto. Además es de longitud infinita, aunque encierra un área finita y más aún, dados dos puntos cualesquiera de la curva, la longitud del arco entre ellos es infinita, (característica que también posee la curva de Koch).





Esto es un fractal (aunque, como veremos más adelante, no es estrictamente autosemejante) y se le conoce como “copo de nieve” generarlo es fácil (lo difícil es dibujarlo).

1. Se inicia con un triángulo equilátero original de lado l .
2. Cada lado se segmenta en tres partes iguales.
3. Tomando como base el segmento medio de cada lado; se traza sobre él un triángulo equilátero. En este caso, la nueva longitud de lado será $1/3$ del lado original. Esta operación se repite para los otros dos lados del triángulo original.
4. Se borran los segmentos de en medio y se tiene una nueva figura con puntas triangulares.
5. A cada una de las puntas triangulares generadas se les aplican los pasos 2, 3 y 4. El fractal se genera repitiendo estos pasos sucesiva e indefinidamente a las puntas generadas.

3.2. Área del copo de nieve

Si partimos de un triángulo equilátero de área A y lado L (ver Figura 3.1), en la primera iteración obtenemos 3 triángulos de área $A/9$ cada uno ya que Cada lado del triángulo lo

dividimos en tres partes iguales, y en la central dibujamos un triángulo equilátero(ver Figura 3.2); en la segunda iteración obtenemos 12 triángulos de área $A/9^2$ cada uno, pues en la nueva Figura se dibuja un nuevo pequeño triángulo que será la novena parte del anterior (ver Figuras 3.3 - 3.5); en la tercera iteración obtenemos 48 triángulos de área $A/9^3$; en la cuarta iteración obtenemos 192 triángulos de área $A/9^4$, etc.

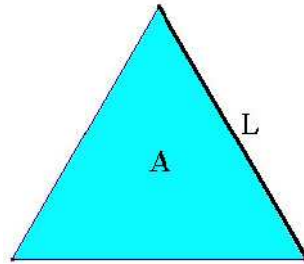


Figura 3.1

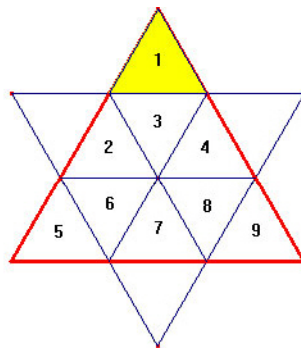


Figura 3.2

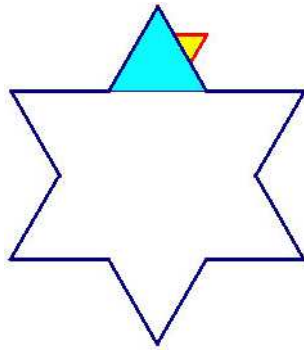


Figura 3.3

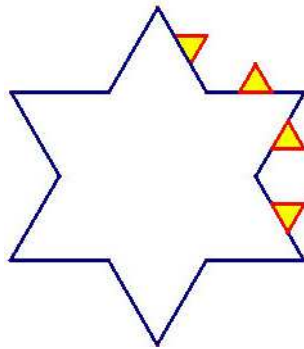


Figura 3.4

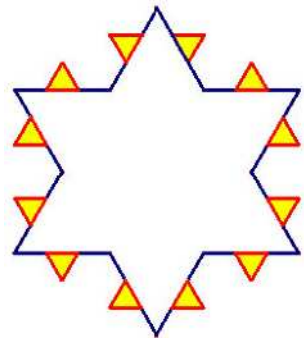


Figura 3.5

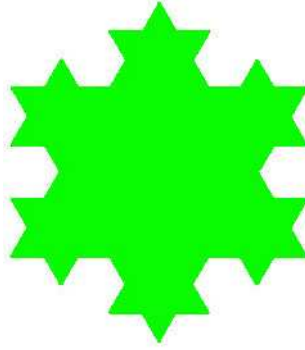


Figura 3.6

Así pues si sumamos todas las áreas parciales (número de triángulos por área de cada uno), tendremos la siguiente suma:

$$3 \cdot \frac{A}{9}, \quad 3 \cdot 4 \cdot \frac{A}{9^2}, \quad 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{A}{9^3}, \dots, \quad 3 \cdot 4^{(N-1)} \cdot \frac{A}{9^N}$$

Cuyo primer término es $a_1 = 3 \cdot \frac{A}{9}$ y cuya razón es $r = \frac{4}{9}$.

La suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada y decreciente es

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Entonces dicha suma es

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{3 \cdot \frac{A}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{A}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}A.$$

Si a esto le añadimos el área del triángulo inicial obtenemos $3\frac{A}{5} + A = 8\frac{A}{5}$ que es el área del “copo de nieve” que perseguíamos, en función del área del triángulo de partida A .


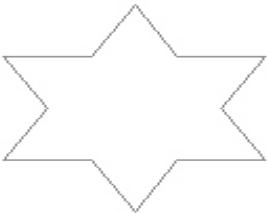
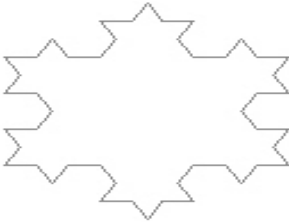
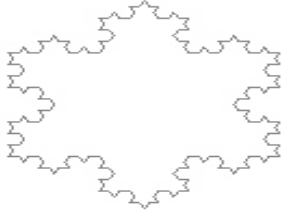
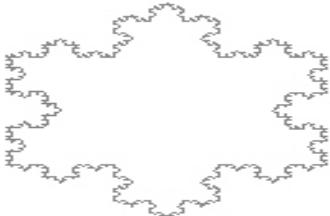
Dado que el área de un triángulo equilátero en función del lado es

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sustituyo en $A(n)$, el lado por su valor en la n -ésima iteración, tomando como lado inicial igual a 1, nos quedará

$$A(n) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{1}{3^2}\right)^n \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{9^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Partiendo de la base de que el lado del triángulo original (iteración 0) vale 1, y multiplico la ecuación del número de triángulos iguales que forman la isla en la n -ésima iteración, por la del área de un triángulo en la iteración n -ésima obteniendo así la ecuación de recurrencia del área de la isla de Koch en la n -ésima iteración, sumándole el área del triángulo original (iteración 0) que no forma parte de de la serie, es decir, área isla de Koch en la n -ésima iteración:

it	a	lados	long. lado	#lados
0		$3 \cdot 4^0$	$(\frac{1}{3})^0$	1
1		$3 \cdot 4^1$	$(\frac{1}{3})^1$	$9 \cdot 1 + 3(4)^0$
2		$3 \cdot 4^2$	$(\frac{1}{3})^2$	$9 \cdot 12 + 3(4)^1$
3		$3 \cdot 4^3$	$(\frac{1}{3})^3$	$9 \cdot 120 + 3(4)^2$
4		$3 \cdot 4^4$	$(\frac{1}{3})^4$	$9 \cdot 1128 + 3(4)^3$
N	a	$3 \cdot 4^n$	$(\frac{1}{3})^n$	$9 \cdot a_{(n-1)} + 3(4)^{n-1}$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A(n) \cdot \# \text{ triángulos iguales}] = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} \cdot \sqrt{3} \cdot [9a_{n-1} + (3 \cdot 4^{n-1})].$$

Calculando el límite de la serie anterior obtendremos el valor del área final, a la que sumaremos el área del triángulo original (del que partimos) y que no existe en la sucesión pues recordemos que es la iteración 0.

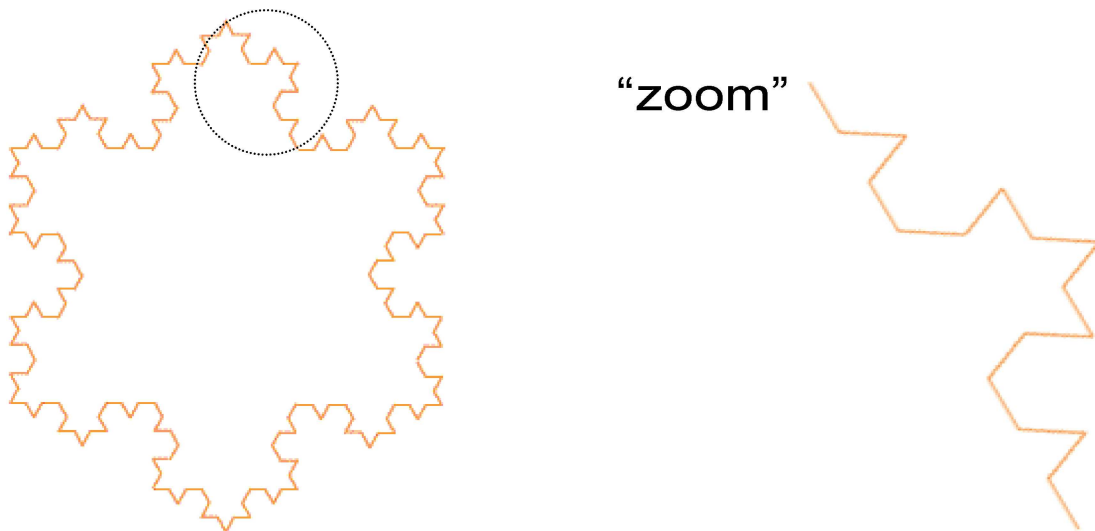
$$S(l) = \frac{8}{5} \cdot A(l) = \frac{8}{5} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{20} \cdot l^2.$$

Es decir, $\frac{8}{5}$ del área del triángulo original, que como era de lado $l = 1$ nos queda:

$$\frac{8}{5} \cdot A(0) = \frac{8}{5} \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{20}.$$

Finalmente se puede observar que la isla de Koch no es estrictamente autosemejante en el sentido de que al hacer un “zoom” de cualquier parte de ella, **no** se observa de nuevo la isla. Sin embargo la parte observada si es **ella misma** autosemejante (es una curva de Koch.)

Podríamos expresar esto diciendo que la curva de Koch **no** es **globalmente** autosemejante, pero si es **localmente** autosemejante, por lo que usualmente se considera un conjunto fractal.



CONCLUSIONES

A través de este trabajo podemos concluir que:

- La curva de Koch, tiene la característica de tener longitud infinita, además la longitud de la curva que une dos cualesquiera de sus puntos también es infinita, sin embargo el área bajo esta curva es finita, otras características importantes son el ser continua en todos sus puntos, pero no ser diferenciable en sus infinitos extremos o vértices, y puesto que su dimensión está entre uno y dos no es exactamente una “curva clásica”, sino un intermedio entre una curva y una superficie.
- La curva de Koch se puede interpretar de varias formas: como espacio metrizable, topológico, atractor de un SIF y como un conjunto de Julia.
- Aunque en sus inicios hacia 1904 fue considerada una especie de “monstruo”, actualmente con la geometría fractal esta curva constituye un ejemplo hermoso, importante y clásico de lo que es un fractal, ya que con ella vemos como se modelan objetos de la naturaleza como: una costa, una línea fronteriza entre dos países, el ruido de las líneas de teléfono, etc.
- La isla de Koch no es estrictamente autosemejante, pues al tomar cualquiera de sus puntos y aplicar un acercamiento no obtenemos nuevamente la isla, pero si podemos afirmar que la parte observada es ella misma autosemejante, por lo que usualmente se considera un conjunto fractal.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] MESA Héber. *El Triángulo de Sierpinski*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 2002.
- [2] FLÓREZ Esperanza. *Una reseña histórica de la geometría fractal*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 1995.
- [3] BARNSELY Michael F. *Fractals Everywhere*. Academic press, Cambridge, MA, 1993.
- [4] ALCOCER Ramiro. *Programación Básica* [en línea] [ref. de 12 de septiembre de 2006]. Disponible en web: <http://www.pgráfica.webideas4all.com/Fractales.html>
- [5] MUNKRES James R. *Topología 2.^a Edición*. Pearson Educacion. S.A., Madrid, 2002.
- [6] SÁNCHEZ. Disponible en web:
[//http://www.uoc.edu/mosaic/practicas/MatematicasII/asanchezfo_PAC1/fractales/web/fractales_koch.htm#inicio](http://www.uoc.edu/mosaic/practicas/MatematicasII/asanchezfo_PAC1/fractales/web/fractales_koch.htm#inicio).
- [7] SYSIFUS. *Área Fractal* [en línea] . 9 de septiembre de 2002 [ref. de 6 de julio de 2006]. Disponible en web: <http://www.arrakis.es/~sysifus/intro.html>
- [8] GACETILLA Matemática [en línea]. 5 de mayo de 2001 [ref. de 6 de julio de 2006]. Disponible en web: <http://www.arrakis.es/~mcj/copo.htm>
- [9] LUQUE Bartola. *Fractales en la Red* [en línea]. Aida Agea. [ref. de 6 de julio de 2006]. Disponible en web: <http://matap.dmae.upm.es/cursofractales/index.htm>

- [10] *La dimensión Fractal* [en línea ref. de 21 de marzo de 2006]. Disponible en web: <http://interactiva.matem.unam.mx/fractales/html/dimension.html>
- [11] RAE Gregory. *Teoría del caos: una breve introducción* [en línea] HERMÁN Manuel. 7 de junio de 2005 [ref. de 6 de julio de 2006]. Disponible en web: <http://www.imho.com/grae/chaos/chaos.html>
- [12] *Objetos Fractales. Autosemejanza* [en línea ref. de 21 de marzo de 2006]. Disponible en web: <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-01.shtm>