

**SISTEMAS DE POCAS PARTÍCULAS EN NANOHILOS Y  
SUPERREDES TIPO II**

**ELBER RODRÍGUEZ MORENO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
MAESTRÍA EN FÍSICA  
BUCARAMANGA**

**2014**

**SISTEMAS DE POCAS PARTÍCULAS EN NANOHILOS Y  
SUPERREDES TIPO II**

**ELBER RODRÍGUEZ MORENO**

Trabajo de Grado como requisito para optar el título Magister en Física.

Director:

**CARLOS LEONARDO BELTRÁN RÍOS**

Físico, PhD



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE FÍSICA**

**MAESTRÍA EN FÍSICA**

**BUCARAMANGA**

**2014**

---

*Dedico este trabajo a mis padres  
quienes me han apoyado sin condiciones  
durante toda mi vida.  
A mis hermanos y toda mi familia.  
A mis amigos y compañeros de estudio.*

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco a mi familia por todo el apoyo dado, a mi director de proyecto y a todos los profesores de la carrera de Física, a los integrantes de los grupos de CIMBIOS, GOTS Y FICOMACO por la gran ayuda que me brindaron, a mis amigos y compañeros de la carrera y en general a todas las personas quienes en gran o menor medida contribuyeron a dar forma a este trabajo .

# ÍNDICE GENERAL

---

---

INTRODUCCIÓN	15
<b>1 CAPÍTULO 1</b>	<b>19</b>
1.1 GENERALIDADES . . . . .	19
1.2 MODELO TEÓRICO . . . . .	22
<b>2 CAPÍTULO 2</b>	<b>27</b>
2.1 MODELO TEÓRICO PARA EL ELECTRÓN. . . . .	27
2.2 MODELO TEÓRICO PARA EL HUECO. . . . .	31
2.3 MODELO TEÓRICO PARA EL ELECTRÓN Y EL HUECO CORRE- LACIONADOS (EXCITÓN). . . . .	34
<b>3 CAPÍTULO 3</b>	<b>37</b>
3.1 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EL ELECTRÓN EN LA NWSL . . . . .	37

---

3.2 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EL HUECO EN LA NWSL . . . . .	41
3.3 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EXCITÓN . . . . .	43
<b>4 CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>48</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1.1 <i>Estructura cristalina Zinc Blenda. Los átomos de color amarillo son del grupo V y los de color azul son del grupo III.</i> . . . . .	20
Figura 1.2 <i>Estructura de bandas para el GaAs</i> . . . . .	21
Figura 1.3 <i>Energía de gap en función de la constante de red [40]</i> . . . . .	21
Figura 1.4 <i>NWSL II en presencia de un campo magnético axial.</i> . . . . .	24
Figura 1.5 <i>Perfil de potencial en la dirección z.</i> . . . . .	25
Figura 2.1 <i>Potencial efectivo que confina al electrón en el eje <math>z_e</math> de la NWSL</i> . . . . .	31
Figura 2.2 <i>Potencial efectivo que confina al hueco en el eje <math>z_h</math> de la NWSL.</i> . . . . .	34
Figura 3.1 <i>Función de onda para el electrón libre en dirección z.</i> . . . . .	38
Figura 3.2 <i>Energía del electrón libre para la parte radial en función del campo magnético bajo.</i> . . . . .	39
Figura 3.3 <i>Energía del electrón libre para la parte radial en función del campo magnético</i> . . . . .	40

---

Figura 3.4	<i>Función de onda para el hueco en dirección z.</i>	41
Figura 3.5	<i>Energía del hueco para la parte radial en función del campo magnético bajo.</i>	42
Figura 3.6	<i>Energía del hueco para la parte radial en función del campo magnético.</i>	43
Figura 3.7	<i>Energía del excitón para varios valores bajos de campo magnético.</i>	44
Figura 3.8	<i>Energía del excitón para varios valores de campo magnético.</i>	45
Figura 3.9	<i>Energía del excitón para varios campos magnéticos en función del radio del hilo.</i>	46

# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1.1 <i>Valores numéricos de los parámetros de masa en términos de la masa del electrón libre [39], [41]. . . . .</i>	23
Tabla 1.2 <i>Alturas de las barreras del potencial de confinamiento [39], [41] . . . .</i>	23

# ÍNDICE DE ANEXOS

---

A. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE ONDA PARA UN EXCITÓN EN UNA NWSL	53
B. BARRIDO TRIGONOMÉTRICO	59

---

# RESUMEN

**TITULO:** Sistemas de pocas partículas en nanohilos y superredes tipo II\*.

**AUTOR:** Rodríguez Moreno Elber\*\*.

**PALABRAS CLAVES:** Excitón, campo magnético, nanohilos, superredes tipo II, energía.

**DESCRIPCIÓN:** En el marco de la aproximación de masa efectiva y siguiendo un procedimiento variacional, se realizó el estudio de la energía del estado base de un electrón, un hueco y un excitón de hueco ligero  $X$  confinados en una superred en un nanohilo tipo II de geometría cilíndrica. La superred está formada por capas alternadas de  $GaAs/AlAs$ , que a diferencia de las tipo I, donde el electrón y el hueco están generalmente confinados en la misma capa semiconductor ( $GaAs$ ), la tipo II el electrón y el hueco se encuentran en diferentes capas semiconductoras, debido a que la energía de confinamiento para el valle  $\Gamma$  en el  $GaAs$  es mayor que para el valle  $\chi$  en el  $AlAs$ . En la dirección axial los portadores de carga se encuentran bajo el confinamiento generado por las barreras de potencial que se forman debido a las diferencias de brechas entre los materiales semiconductores que conforman la heteroestructura, en la dirección radial, se considera un potencial de confinamiento infinito. La heteroestructura se encuentra en presencia de un campo magnético externo en la dirección axial. Se analizó el comportamiento de la energía del sistema de partículas en función de los tamaños laterales de cada uno de los materiales que forman la estructura y de un campo magnético aplicado en la dirección axial.

---

\*Tesis.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Carlos Leonardo Beltrán Ríos (Director).

---

# ABSTRACT

**TITLE :** Few particles system in nanowires superlattice type II. \*.

**AUTHORS :** Rodríguez Moreno Elber ; \*\*.

**KEY WORDS :** Exciton, magnetic field, nanowires, superlattice type II, energy.

**DESCRIPTION:** Within the framework of the effective approximation and using a variational method, was performed study of ground state energy of an electron, a hole and light hole exciton  $X$  confined in a nanowire superlattice type-II with cylindrical geometry. The superlattice is made of alternating layers of  $GaAs/AlAs$ , unlike type-I, where the electron and hole are generally confined in the same semiconductor layer ( $GaAs$ ), in the type-II, the electron and hole are found in different semiconductor layers, because the confinement energy for the  $\Gamma$  valley in  $GaAs$  is greater than for the  $\chi$  valley in  $AlAs$ , then in the type-II structure, the lowest energy transition is indirect in real space. In the axial direction of the charge carriers (electrons and holes) are low confinement generated by the potential barriers are formed due to the difference in gaps between the semiconductor materials forming the heterostructure, in the radial direction, it is considered a potential infinite confinement. The heterostructure is in the presence of an external magnetic field in the axial direction. The behavior of the energy of the particle system according to the lateral sizes of each of the materials forming the structure of a magnetic field applied in the axial direction was analyzed.

---

\*Thesis.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Carlos Leonardo Beltrán Ríos (Director)

# INTRODUCCIÓN

---

Actualmente las técnicas de crecimiento de semiconductores en multicapas permiten la construcción de materiales de gran interés, debido a sus grandes capacidades optoelectrónicas y su progresiva miniaturización. Este hecho ha abierto un nuevo campo de investigación conocido como nanotecnología. Hay diversas técnicas para el crecimiento de dichas estructuras como *Molecular beam epitaxy* (MBE), *metalorganic chemical vapour deposition* (MOCVD) [1], epitaxia por fase líquida [2] entre otras [3].

Al utilizar materiales semiconductores con estructura cristalina y parámetros de red similares da como resultado una heterojuntura con interfase perfecta, para este fin se pueden formar compuestos binarios entre los elementos de los grupos III y V de la tabla periódica. Las técnicas actuales de fabricación de heterojunturas hacen posible la fabricación de materiales semiconductores estructurados a escala nanométrica que se conocen como nanoestructuras semiconductoras o heteroestructuras.

En los materiales se encuentran dos clases de bandas, la banda más baja llamada *banda de valencia* (*BV*) que se encuentra casi llena de electrones (electrones de valencia) encargados de los enlaces covalentes que unen los átomos en la heteroestructura. La segunda banda, llamada *banda de conducción*, contiene pocos electrones, pero puede contener electrones excitados que provienen de la banda de valencia y contribuir a un flujo de corriente en presencia de un campo eléctrico. Ahora bien, cuando se tiene una interfaz entre dos materiales semiconductores, en dicha interfaz se tiene un salto de

---

potencial debido a que las brechas prohibidas de energía de dichos materiales son en general diferentes. Esta diferencia es de gran importancia en las heteroestructuras, ya que es la razón por la cual dichas nanoestructuras se comportan como verdaderos pozos de potencial para las partículas portadoras de carga, ya sean libres o ligadas.

Los sistemas de partículas que se pueden confinar en heteroestructuras semiconductoras se pueden clasificar en sistemas móviles e inmóviles. Los sistemas móviles se componen de electrones ( $e$ ) en la banda de conducción y huecos ( $h$ ) en la banda de valencia, debido a que la magnitud de la masa reducida de estas cuasipartículas es menor a la masa del electrón libre, esto les garantiza una gran movilidad por todo el material. El sistema móvil más simple se compone de un par electrón-hueco ( $e-h$ ) conocido como excitón ( $X$ ), otros modelos más complejos son el trión, el cual surge cuando el excitón captura un electrón extra  $X^-$  ( $eeh$ ) o un hueco  $X^+$  ( $ehh$ ). Otro caso es cuando la densidad de excitones es grande, entonces la interacción dipolar entre ellos se hace considerable, dando lugar a la formación de una molécula excitónica o bi-excitón ( $XX$ ). Los sistemas inmóviles en la red están dadas por impurezas tanto donadoras ( $D$ ), las cuales ceden electrones, como aceptadoras ( $A$ ), las que atrapan electrones de la  $BV$  como consecuencia de la interacción Coulombiana.

El análisis de sistemas de partículas confinadas en heteroestructuras fue tratado por primera vez por Bastard [4], quien considero una  $D^0$  en un pozo cuántico ( **QW** ) bajo la aproximación de masa efectiva (aproximación que desde entonces se ha seguido usando para el cálculo de impurezas en diferentes tipos de heteroestructuras como pozos cuánticos múltiples ( **MQW** ), puntos cuánticos ( **QD** ) [5, 6] y superredes en nanohilos ( $NWSL's$ ) [8]). Las  $NWSL's$  consisten básicamente en crear una superred dentro de un nanohilo a partir de dos semiconductores base con diferentes anchos de bandas prohibidas crecidos en forma alterna.

Las  $NWSL$  se dividen en dos tipos [7]: Tipo I ( $NWSL I$ ), el pozo para los electrones y los huecos se encuentran en la misma capa, en las tipo II ( $NWSL's II$ ), los pozos

---

para el electrón y el hueco están ubicados en diferentes capas, esta característica le da un gran tiempo de vida al par  $e - h$  por estar espacialmente separados. Debido a esta característica, este tipo de heteroestructuras han tomado gran interés en la actualidad para la fabricación de foto-detectores y resonadores en el orden de Tera Hertz [8]–[27]. Entre varios estudios sobre materiales tipo II están por ejemplo el de Gerald Weber [41], quien calculó las energías de enlace de una donadora en un pozo cuántico tipo II de  $GaAs/AlAs$  utilizando un método variacional anisotrópico, donde muestra dos resultados para la energía muy diferentes con dos conjuntos de masas efectivas, obtenidas mediante estudios FR (Faraday rotation) y CR (Cyclotron resonance), obteniendo que con las masas CR un resultado más aproximado de las energías de enlace. L. L. Li, W. Xu, Z. Zeng, A.R. Wright, C. Zhang, J. Zhang, Y.L. Shi [18], que presentan un estudio teórico de las propiedades ópticas de una superred de  $InAs/GaSb$  tipo II y encuentran que sirve para la detección del infrarrojo medio, coincidiendo sus resultados con los datos experimentales.

En el grupo de investigación de física computacional de materia condensada (FICOMACO), de la Escuela de Física en la Universidad Industrial de Santander, se ha trabajado los sistemas de baja dimensión en materiales semiconductores de GaAs, InAs. Recientemente se ha estudiado puntos cuánticos de diferentes geometrías dopados [28]–[30] con impurezas  $D^0$  [31]–[33], súperredes en nano-hilos (tipo I), donde se estudiaron: el efecto de un campo eléctrico externo en la energía del estado base para una donadora neutra en una superred en un nano-hilo [34], propiedades de excitones de hueco liviano y pesado en presencia de un campo magnético aplicado en la dirección de crecimiento del cristal [35]. Recientemente, en materiales tipo II [37] se estudió la energía de estado base de un excitón en QDs de InP (tipo II) embebidos en una matriz de GaInP, en función del tamaño cuántico y de la intensidad de un campo magnético externo aplicado. En la literatura actual se encuentran pocos trabajos teóricos (la mayoría desarrollados en QD's) que estudien materiales de tipo II, por esta razón se propone un trabajo cuyo fin es ampliar la gama de materiales de estudio al NWSLs II y hacer un aporte al en-

---

tendimiento de las propiedades de estas estructuras que facilite posibles aplicaciones a la tecnología. Además, para lograr lo anterior se requiere introducir nuevos elementos en los cálculos ya que las características propias de este tipo de redes difieren de los anteriores materiales trabajados.

---

# 1

## CAPÍTULO 1

---

### 1.1 GENERALIDADES

Una superred en un nanohilo (NWSL) es una heteroestructura conformada en un hilo (cilíndrico) por una sucesión de capas de semiconductores con distintos gaps de energía, pero con constantes de red similares. Tal es el caso del *GaAs* y el *AlAs*. Tanto el *GaAs* como *AlAs* tienen una estructura cristalina tipo Zinc Blenda, consiste de dos celdas cristalinas cúbicas centradas en la cara (FCC) entrelazadas, los elementos del grupo III (*Ga* y *Al*) se ubican en la parte interna del cubo, mientras los elementos del grupo V (*As*) en la parte externa, es decir en las esquinas y las caras del cubo.

En la figura 1.1 los elementos *Ga* y *Al* corresponden a los átomos azules y el *As* a los átomos amarillos. Otros semiconductores donde se presenta este tipo de estructura son *CdS*, *GaP*, *GaSb*, *ZnO*, *ZnTe*, *ZnSe*, el *ZnSe* tienen una constante de red similar a la del *GaAs* y *AlAs*.

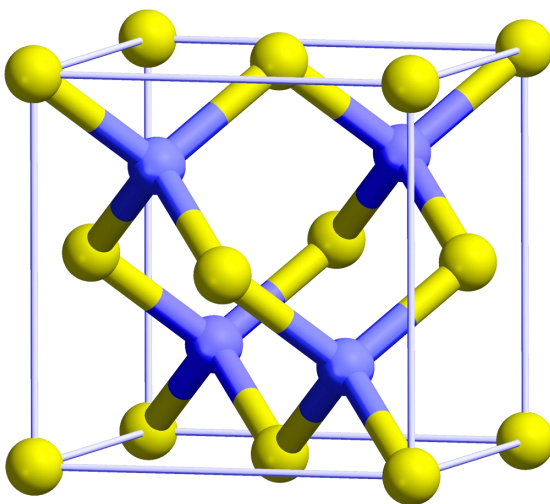


figura 1.1: *Estructura cristalina Zinc Blenda. Los átomos de color amarillo son del grupo V y los de color azul son del grupo III.*

En la figura 1.2 se muestra la estructura de bandas para el *GaAs*, en ella se observa un conjunto de bandas separadas por un gap de energía, las bandas por debajo de ese gap se denominan bandas de valencia y las bandas por encima bandas de conducción. El gap de energía se determina por la diferencia que hay entre el nivel más bajo de la banda de conducción y el punto más alto de la banda de valencia. Para el *GaAs* el gap se encuentra en el punto  $\Gamma$ , los materiales con esta característica se les denomina de gap directa o de brecha directa, el *ZnSe* también es de gap directa. Para el caso de *AlAs* el máximo de la banda de valencia está en el punto  $\Gamma$  y el mínimo de la banda de conducción en el punto  $X$ , a este tipo de materiales se les denomina de gap indirecta.

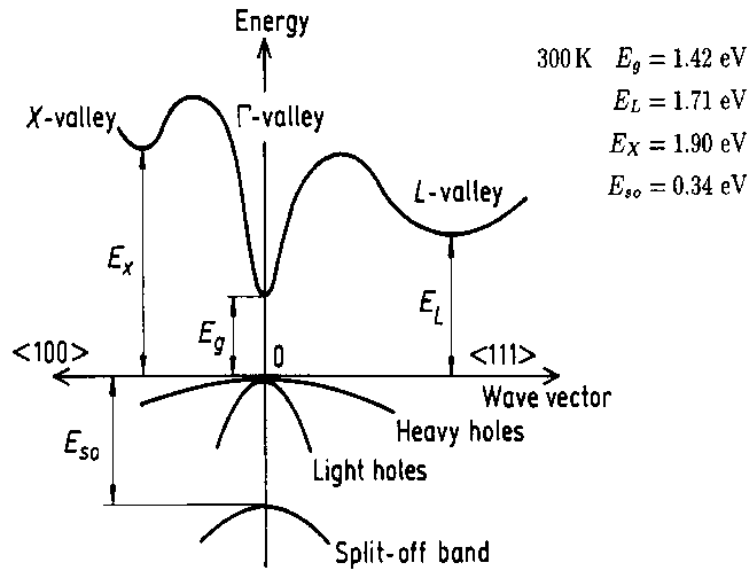


figura 1.2: Estructura de bandas para el GaAs.

El GaAs, AlAs y ZnSe tienen una considerable diferencia entre las energías del gap y comparten constantes de red muy similares como se ve en la figura 1.3

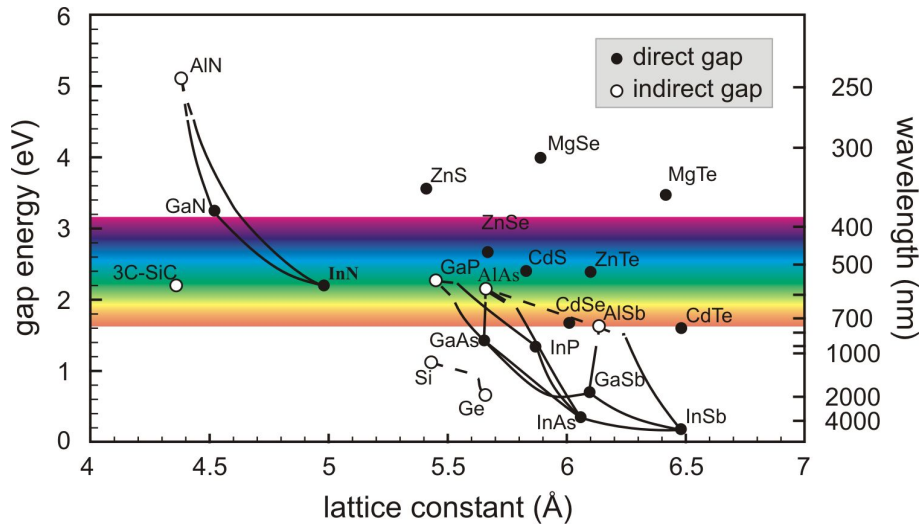


figura 1.3: Energía de gap en función de la constante de red [40].

---

Las cargas que se desplazan dentro del nanohilo se encuentran bajo el confinamiento generado por las barreras de potencial que se forman debido a las diferencias de brecha entre los materiales que conforman la estructura, describir el comportamiento de estas partículas (electrones o huecos) dentro de la NWSL es importante ya que permite, en principio, conocer sus estados energéticos y ubicaciones probables dentro de la estructura, datos importantes para describir posibles aplicaciones de la heteroestructura.

Cuando un electrón en la banda de valencia absorbe un fotón y este tiene una energía comparable a la de la brecha de energía prohibida del material, éste abandona la banda de valencia dejando un hueco en ella, que se comporta como una partícula de carga positiva, el cual interactúa con el electrón mediante el potencial de Coulomb. Esta cuasi-partícula se conoce como el excitón y es la responsable de generar efectos ópticos en las heteroestructuras semiconductoras como las NWSL.

Generalmente la masa del hueco es mayor que la del electrón, asemejándose así a un átomo de hidrógeno. El excitón es muy estable con tiempo de vida relativamente grandes del orden de picosegundo o nanosegundos, su energía depende de la forma del confinamiento estructural, la energía del potencial Coulombiano depende de la heteroestructura, por ejemplo en una NWSL tipo I el electrón y el hueco están generalmente en la misma capa, mientras que en una NWSL tipo II el electrón y el hueco están en diferentes capas.

## 1.2 MODELO TEÓRICO.

En este trabajo se calcula y se analiza la energía para el estado base de un excitón confinado en NWSL tipo II, con geometría cilíndrica, y en presencia de un campo magnético aplicado en la dirección axial (figura 1.4). La superred está formada por capas alternadas de *GaAs*/*AlAs*; y en este sistema el electrón se encuentra en la capa de *AlAs* y el hueco en el *GaAs* [8].

Los valores de masa efectiva usadas en el presente trabajo, se encuentran consignadas en la siguiente tabla:

	$m_{\rho_h}$	$m_{z_h}$	$m_{\rho_e}$	$m_{z_e}$
<i>GaAs</i>	0,0904	0,0904	0,23	1,3
<i>AlAs</i>	0,2079	0,2079	0,44	2,61

Tabla 1.1: Valores numéricos de los parámetros de masa en términos de la masa del electrón libre [39], [41].

Los valores de potencial para la banda de conducción (*B.C.*) y banda de valencia (*B.V.*) usados en el presente trabajo son:

<i>B.C.</i>	$V_{e_0} = 632meV$	$V_e = 316meV$
<i>B.V.</i>	$V_{h_0} = 340,3meV$	$V_h = 170,15meV$

Tabla 1.2: Alturas de las barreras del potencial de confinamiento [39], [41].

Además se usaron los valores promedios de radio de Bohr  $a_{av}^* = 2,02\text{\AA}$ , el Rydberg efectivo  $R_{y_{av}}^* = 356,47meV$  y masa reducida  $m_{av}^* = 0,61m_0$  [39], [41].

Se considera un potencial de confinamiento infinito en la dirección radial y un confinamiento finito a lo largo de la dirección axial, este último es dado por la diferencia en las brechas de energía de los materiales que conforman la heteroestructura (figura 1.5).

Se estudia el efecto del radio del hilo y el campo magnético aplicado sobre la energía del estado base del sistema.

En general el Hamiltoniano de un excitón en presencia de un campo magnético externo en la dirección axial, es de la forma:

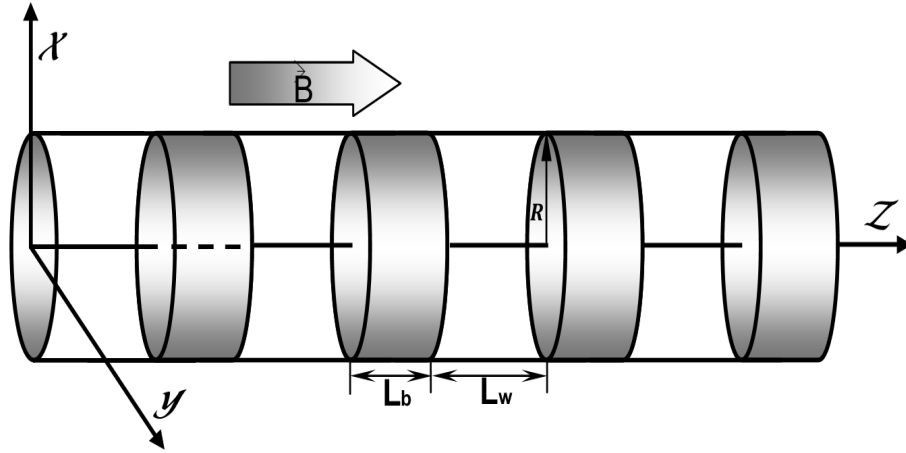


figura 1.4: NWSL II en presencia de un campo magnético axial.

$$H = H_e + H_h - \frac{2}{r_{eh}}. \quad (1.1)$$

Donde  $H_e$  y  $H_h$  son los Hamiltonianos para el electrón y el hueco respectivamente, tienen la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{z_i}} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} - \frac{\hbar^2}{2m_{\rho_i}} \Delta_{\tilde{\rho}_i, \tilde{\varphi}_i} - \frac{iq_i \hbar B}{2m_{\rho_i}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}_i} + \frac{q_i^2 B^2 \tilde{\rho}_i^2}{8m_{\rho_i}} + V(\tilde{\rho}_i, \tilde{z}_i) \quad (1.2)$$

para  $i = \{e, h\}$ .

Definiendo el Rydberg efectivo promedio como:

$$R_{y_{av}}^* = \frac{\hbar^2}{2m_{av}^* (a_{av}^*)^2}. \quad (1.3)$$

Y haciendo los cambios de variables:

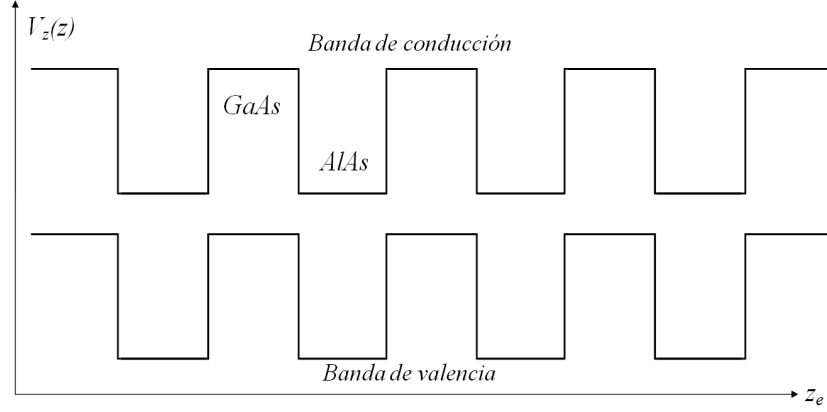


figura 1.5: Perfil de potencial en la dirección  $z$ .

$$\gamma_{av} = \frac{q_i \hbar B}{2m_{av}^* R_{y_{av}}^*}, \quad V_{i_{eff}} = \frac{2m_{av}^*}{\hbar^2} V(\tilde{\rho}_i, \tilde{z}_i) + \frac{\gamma_{av}^2 \rho_i}{4} \quad (1.4)$$

$$\rho_i = a_{av}^* \tilde{\rho}_i, \quad z_i = a_{av}^* \tilde{z}_i \quad (1.5)$$

Se obtiene los Hamiltonianos para el electrón y el hueco adimensionales:

$$H_e = -\eta_{\rho_e} (\Delta_{\rho_e} + \Delta_{\varphi_e}) - \eta_{z_e} (i) \Delta_{z_e} + V_{e_{eff}}(\rho_e, z_e) \quad (1.6)$$

$$H_h = -\eta_{\rho_h} (\Delta_{\rho_h} + \Delta_{\varphi_h}) - \eta_{z_h} (j) \Delta_{z_h} + V_{h_{eff}}(\rho_h, z_h) \quad (1.7)$$

donde  $\eta$  es el cociente de las masas efectivas del electrón y el hueco en la dirección radial y axial.

$$\eta_{\rho_e} = \frac{m_{av}^*}{m_{\rho_e}}, \quad \eta_{\rho_h} = \frac{m_{av}^*}{m_{\rho_h}},$$

El coeficiente de las masas efectivas en dirección axial varía según el material, debido a que se considero diferente valor de masa  $m_z$ .

---


$$\eta_{z_e}(i) = \frac{m_{av}^*}{m_{z_i}}; i = \begin{cases} m_{z_e} \rightarrow GaAs \\ m_{z_e} \rightarrow AlAs \end{cases}$$

$$\eta_{z_h}(j) = \frac{m_{av}^*}{m_{z_j}}; j = \begin{cases} m_{z_h} \rightarrow GaAs \\ m_{z_h} \rightarrow AlAs \end{cases}$$

Estos Hamiltonianos,  $H_e$  y  $H_h$ , cumplen las ecuaciones de Schrödinger:

$$H_e f_e = E_e f_e \quad (1.8)$$

$$H_h f_h = E_h f_h. \quad (1.9)$$

Entonces la ecuación de Schrödinger total del sistema es

$$H\Psi = H_e\Psi + H_h\Psi - \frac{2}{r_{eh}}\Psi = E_X\Psi. \quad (1.10)$$

Para solucionar el problema, los cálculos se realizan en el marco de la aproximación de la masa efectiva, siguiendo un procedimiento variacional para determinar la energía del estado base y la respectiva función de onda.

---

# 2

## CAPÍTULO 2

---

### 2.1 MODELO TEÓRICO PARA EL ELECTRÓN

Se considera un electrón moviéndose en la NWSL tipo II en presencia de un potencial de confinamiento  $V_e(\rho_e, z_e)$  y un campo magnético en la dirección  $z$ , como el diámetro del nanohilo es muy pequeño en comparación al largo de ésta, el confinamiento en la dirección  $\rho$  es mayor que en la dirección  $z$ .

El Hamiltoniano para el electrón está descrito como:

$$H_e = -\eta_{\rho_e} (\Delta_{\rho_e} + \Delta_{\varphi_e}) - \eta_{z_e} (i)\Delta_{z_e} + V_{e_{eff}}(\rho_e, z_e).$$

Haciendo uso de la aproximación adiabática se pueden hallar las energías y las funciones correspondientes al electrón, entonces se tiene

$$H_e f_e(\rho_e, z_e) = E_e f_e(\rho_e, z_e),$$

donde  $f_e(\rho_e, z_e)$  es:

---


$$f_e(\rho_e, z_e) = Z_e(z_e)R_e(\rho_e), \quad (2.1)$$

entonces se tiene que la función  $R_e(\rho_e)$  describe el movimiento rápido en la dirección radial y  $Z_e(z_e)$  el movimiento lento en la dirección del eje principal de la NWSL. La función  $Z_e(z_e)$  es solución para la ecuación diferencial:

$$\eta_{z_e}(i) \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} [Z_e(z_e)] + V_{z_e}(z_e)Z_e(z_e) = E_{z_e}Z_e(z_e), \quad (2.2)$$

y  $R_e(\rho_e)$  es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{\rho_e}}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial \rho_e} [R(\rho_e)] + \eta_{\rho_e} \frac{\partial^2}{\partial \rho_e^2} [R(\rho_e)] \\ & - \left[ \eta_{\rho_e} \frac{|m|^2}{\rho_e^2} + \eta_{\rho_e} |m| \gamma_{av} + \eta_{\rho_e} \frac{\gamma_{av} \rho_e^2}{4} + V_{\rho_e}(\rho_e) \right] R(\rho_e) = E_{\rho_e} R(\rho_e) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para la ecuación (2.3) se plantea la solución:

$$R(\rho_e) = \rho_e^{|m|} e^{-\alpha \rho_e^2} M(\rho_e), \quad (2.4)$$

reemplazando la ecuación (2.4) en (2.3) se obtiene la ecuación diferencial que satisface la función de prueba  $M(\rho_e)$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{E_{\rho_e}}{\eta_{\rho_e}} + 4\alpha^2 \rho_e^2 - \frac{\gamma_{av}^2 \rho_e^2}{4} - |m| \gamma_{av} - 4\alpha (|m| + 1) \right] M(\rho_e) \\ & + 2 \left( \frac{|m|}{\rho_e} + \frac{1}{2\rho_e} - 2\alpha \rho_e \right) \frac{\partial}{\partial \rho_e} [M(\rho_e)] + \frac{\partial^2}{\partial \rho_e^2} [M(\rho_e)] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

---

Definiendo  $\alpha = \frac{\gamma_{av}}{4}$  y haciendo el cambio de variable  $\rho_e = \frac{\gamma_{av}}{2}y$ , la ecuación (2.5) toma la forma:

$$y \frac{\partial^2}{\partial y^2} [M(y)] + (|m| + 1 - y) \frac{\partial}{\partial y} [M(y)] - \left[ \left( |m| + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_{\rho_e}}{2\gamma_{av}\eta_{\rho_e}} \right] = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación diferencial (2.6) tiene la forma:

$$yM'' + (c - y)M' - aM = 0 \quad (2.7)$$

y esta ecuación (2.7) se conoce como la ecuación diferencial hipergeométrica confluyente y su solución recibe el nombre de función hipergeométrica confluyente o función de Kummer y suele notarse como:

$$M = {}_1F_1(a, c, y). \quad (2.8)$$

Haciendo las comparaciones entre las ecuaciones (2.6) y (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned} a &= |m| + \frac{1}{2} - \frac{E_{\rho_e}}{2\gamma_{av}\eta_{\rho_e}} \\ c &= |m| + 1 \\ y &= \frac{\gamma_{av}}{2}\rho_e^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

entonces

$$R(\rho_e) = \rho_e^{|m|} e^{-\frac{\gamma_{av}\rho_e^2}{4}} {}_1F_1 \left( |m| + \frac{1}{2} - \frac{E_{\rho_e}}{2\gamma_{av}\eta_{\rho_e}}, |m| + 1, \frac{\gamma_{av}}{2}\rho_e^2 \right). \quad (2.10)$$

---

La ecuación (2.10) es la solución de la ecuación diferencial (2.3) y es conocida como la función de onda del electrón confinado en un pozo cuántico circular de barrera infinita en presencia de un campo magnético,  $E_{\rho_e}$  corresponde al valor de la energía.

Para la ecuación (2.2) se plantea la solución de la forma:

$$Z_e(z_e) = \begin{cases} Ae^{ik_w(z_e-nd)} + Be^{-ik_w(z_e-nd)}; & |z_e - nd| \leq \frac{l_w}{2} \\ Ce^{k_b(z_e-nd-\frac{d}{2})} + De^{-k_b(z_e-nd-\frac{d}{2})}; & |z_e - nd - \frac{d}{2}| \leq \frac{l_b}{2} \\ Ee^{ik_w(z_e-nd-d)} + Fe^{-ik_w(z_e-nd-d)}; & |z_e - nd - d| \leq \frac{l_w}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

$d = l_w + l_b$  es el periodo, donde  $l_w$  y  $l_b$  son el ancho del pozo y la barrera respectivamente,  $n$  es el número de pozos y  $k_w$  y  $k_b$  son los números de onda cuyas formas están dadas por:

$$k_w = \sqrt{\frac{E_{z_e}}{\eta_{z_e}}} \quad (2.12)$$

$$k_b = \sqrt{\frac{V_{z_e} - E_{z_e}}{\eta_{z_e}}}. \quad (2.13)$$

El potencial efectivo  $V_{z_e}$  que confina al electrón a lo largo del eje  $z_e$  está compuesto por la diferencia de los valores de potencial de los materiales que conforman la estructura, se analiza un total de cuatro pozos de potencial ( $n = 4$ ) como se muestra en la figura 2.1.

El movimiento lento del electrón bajo el potencial adimensional  $V_{z_e}$  representado en la figura 2.1 está descrito por la función (2.11). Los coeficientes de la función  $Z_e(z_e)$  y la energía  $E_{z_e}$  son calculadas mediante el método de matriz de transferencia [7].

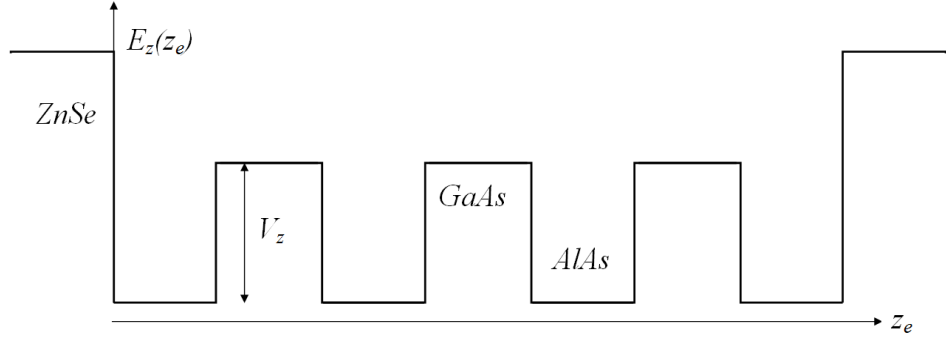


figura 2.1: *Potencial efectivo que confina al electrón en el eje  $z_e$  de la NWSL.*

## 2.2 MODELO TEÓRICO PARA EL HUECO.

Ahora se considera un hueco libre moviéndose en la NWSL tipo II bajo la acción de un potencial de confinamiento  $V_h(\rho_h, z_h)$  y al igual que lo que sucede con el electrón, se tiene un confinamiento mayor en la dirección  $\rho$  que en la dirección  $z$ .

El Hamiltoniano para el hueco es de la forma:

$$H_h = -\eta_{\rho_h} (\Delta_{\rho_h} + \Delta_{\varphi_h}) - \eta_{z_h} (j) \Delta_{z_h} + V_{h_{eff}}(\rho_h, z_h)$$

y la ecuación de Schrödinger

$$H_h f_h(\rho_h, z_h) = E_h f_h(\rho_h, z_h). \quad (2.14)$$

donde

$$f_h(\rho_h, z_h) = Z_h(z_h) R_h(\rho_h). \quad (2.15)$$

---

Al igual que con el electrón se tiene dos funciones,  $R_h(\rho_h)$  que describe el movimiento rápido en dirección  $\rho$  y  $Z_h(z_h)$  el movimiento lento en la dirección  $z$ .

La función  $R_h(\rho_h)$  es la solución a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{\rho_h}}{\rho_h} \frac{\partial}{\partial \rho_h} [R(\rho_h)] + \eta_{\rho_h} \frac{\partial^2}{\partial \rho_h^2} [R(\rho_h)] \\ & - \left[ \eta_{\rho_h} \frac{m^2}{\rho_h^2} + \eta_{\rho_h} m \gamma_{av} + \eta_{\rho_h} \frac{\gamma_{av} \rho_h^2}{4} + V_{\rho_h}(\rho_h) \right] R(\rho_h) = E_{\rho_h} R(\rho_h). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entonces se propone  $R_h(\rho_h)$  de la forma

$$R(\rho_h) = \rho_h^{|m|} e^{-\alpha \rho_h^2} M(\rho_h), \quad (2.17)$$

reemplazando en la ecuación (2.17) en (2.16) y haciendo los cambios:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma_{av}}{4} \\ \rho_h &= \frac{\gamma_{av}}{2} y, \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación diferencial hipergeométrica confluyente

$$y \frac{\partial^2}{\partial y^2} [M(y)] + (|m| + 1 - y) \frac{\partial}{\partial y} [M(y)] - \left[ \left( |m| + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_{\rho_h}}{2\gamma_{av}\eta_{\rho_h}} \right] M(y) = 0. \quad (2.18)$$

Entonces la solución queda de la forma:

$$R(\rho_h) = \rho_h^{|m|} e^{-\frac{\gamma_{av}\rho_h^2}{4}} {}_1F_1 \left( \left| m \right| + \frac{1}{2} - \frac{E_{\rho_h}}{2\gamma_{av}\eta_{\rho_h}}, \left| m \right| + 1, \frac{\gamma_{av}}{2} \rho_h^2 \right). \quad (2.19)$$

---

La ecuación (2.19) es la función de onda para el hueco confinado en un pozo cuántico circular de barrera infinita y  $E_{\rho_h}$  es el valor de energía para el hueco.

La función  $Z_h(z_h)$  es la solución de la ecuación diferencial (2.20)

$$\eta_{z_h}(j) \frac{\partial^2}{\partial z_h^2} [Z_h(z_h)] + V_{z_h}(z_h) Z_h(z_h) = E_{z_h} Z_h(z_h), \quad (2.20)$$

De igual manera que se planteó para el electrón libre, la función  $Z_h(z_h)$  es:

$$Z_h(z_h) = \begin{cases} Ae^{ik_w(z_h-nd)} + Be^{-ik_w(z_h-nd)}; & |z_h - nd| \leq \frac{l_w}{2} \\ Ce^{k_b(z_h-nd-\frac{d}{2})} + De^{-k_b(z_h-nd-\frac{d}{2})}; & |z_h - nd - \frac{d}{2}| \leq \frac{l_b}{2} \\ Ee^{ik_w(z_h-nd-d)} + Fe^{-ik_w(z_h-nd-d)}; & |z_h - nd - d| \leq \frac{l_w}{2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Donde los números de onda son de la forma:

$$\begin{aligned} k_w &= \sqrt{\frac{E_{z_h}}{\eta_{z_h}}} \\ k_b &= \sqrt{\frac{V_{z_h} - E_{z_h}}{\eta_{z_h}}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

El potencial efectivo  $V_{z_h}$  el cual confina al hueco a lo largo de la dirección  $z_h$  tiene la forma como se muestra en la figura 2.2

Los coeficientes de la función de onda para el hueco en dirección  $z$  y el correspondiente valor de la energía  $E_{z_h}$  son calculados mediante el método de matriz de transferencia [7].

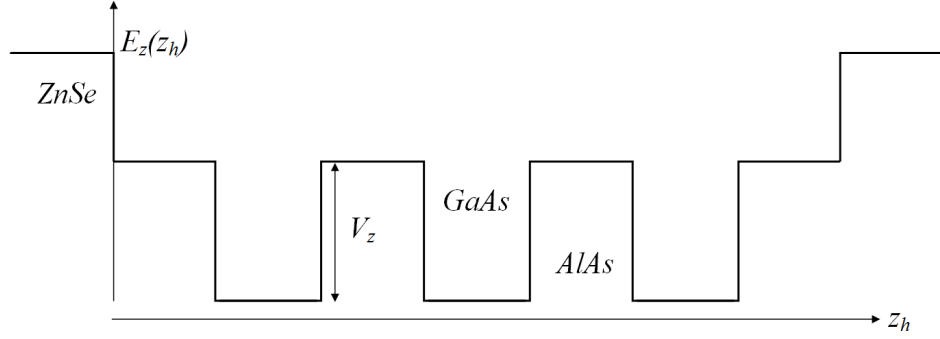


figura 2.2: Potencial efectivo que confina al hueco en el eje  $z_h$  de la NWSL.

## 2.3 MODELO TEÓRICO PARA EL ELECTRÓN Y EL HUECO CORRELACIONADOS (EXCITÓN)

Para describir el excitón en una NWSL en presencia de un campo magnético en la dirección axial se parte del Hamiltoniano:

$$H\Psi = H_e\Psi + H_h\Psi - \frac{2}{r_{eh}}\Psi = E_X\Psi. \quad (2.23)$$

Para encontrar la solución, se hace uso del método variacional dimensión fractal [38], entonces se plantea la función de onda de la forma

$$\Psi = f_e(\rho_e, z_e) f_h(\rho_h, z_h) \Phi(|\vec{r}_e - \vec{r}_h|), \quad (2.24)$$

Se plantea la funcional de la siguiente forma

$$F[\Phi] = \left\langle f_e f_h \Phi \left| H_e + H_h - \frac{2}{r_{eh}} - E_x \right| f_e f_h \Phi \right\rangle \rightarrow \text{mín} \quad (2.25)$$

---

Al desarrollar los corchetes, aplicar la propiedad de Leibniz y utilizando el teorema de Gauss se obtiene la expresión (mayor detalle en el anexo A)

$$F[\Phi] = \langle f_e^2 f_h^2 ((\nabla_e \Phi)^2 + (\nabla_h \Phi)^2) \rangle + \left\langle f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \left( E_e + E_h - \frac{2}{r_{eh}} - E_x \right) \right\rangle, \quad (2.26)$$

Expresando  $(\nabla_e)^2$  y  $(\nabla_h)^2$  en función de  $r_{eh}$

$$r_{eh}^2 = r^2 = \rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e\rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2,$$

entonces la funcional queda de la forma

$$F[\Phi] = \left\langle f_e^2 f_h^2 \left\{ \begin{aligned} & [(\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2}] \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \\ & + (E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x) \Phi^2 \end{aligned} \right\} \right\rangle,$$

expresándola de forma integral:

$$\begin{aligned} F[\Phi] = & \{(\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) J_0(r) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] J_1(r)\} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \\ & + (E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x) J_0(r) \Phi^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde los Jacobianos  $J_0(r)$  y  $J_1(r)$  son de la forma

$$\begin{aligned}
J_0(r) &= \int f_e^2 f_h^2 d\vec{r} \\
J_0(r) &= \int_0^L dz_e \int_0^L dz_h \int_0^R \rho_e d\rho_e \int_0^R \rho_h d\rho_h \int_0^{2\pi} d\varphi_e \int_0^{2\pi} d\varphi_h f_e^2(\rho_e, z_e) f_h^2(\rho_h, z_h) \times \\
&\quad \times \delta \left( r - \sqrt{\rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e \rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2} \right) \\
J_1(r) &= \int f_e^2 f_h^2 \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} d\vec{r} \\
J_1(r) &= \int_0^L dz_e \int_0^L dz_h \int_0^R \rho_e d\rho_e \int_0^R \rho_h d\rho_h \int_0^{2\pi} d\varphi_e \int_0^{2\pi} d\varphi_h f_e^2(\rho_e, z_e) f_h^2(\rho_h, z_h) \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \times \\
&\quad \times \delta \left( r - \sqrt{\rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e \rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2} \right),
\end{aligned}$$

simplificando la expresión de la funcional:

$$F[\Phi] = J(r) \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + E J_0(r) \Phi^2 \quad (2.28)$$

donde

$$J(r) = (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) J_0(r) + \{[\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)] - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})\} J_1(r) \text{ y } E = E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x.$$

Para minimizar de la funcional  $F[\Phi]$  se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange, entonces

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + W(r) \frac{d\Phi}{dr} - U(r)\Phi = 0 \quad (2.29)$$

Siendo  $W(r) = \frac{d}{dr} \{\ln [J(r)]\}$  y  $U(r) = \frac{J_0(r)}{J(r)} E$ .

Para encontrar solución al problema del excitón se hace necesario resolver la ecuación diferencial (2.29) y se utiliza el método de barrido trigonométrico (anexo B).

---

# 3

## CAPÍTULO 3

---

En este capítulo se muestran y analizan los resultados obtenidos de un electrón y un hueco en una NWSL tipo II en presencia de un campo magnético externo aplicado en la dirección axial, además también se analiza el electrón y el hueco correlacionados (excitón).

### 3.1 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EL ELECTRÓN EN LA NWSL.

En el marco de la aproximación adiabática, para el electrón en la NWSL tipo II se considera dos tipos de movimientos, un movimiento lento en la dirección del eje principal ( $z$ ) de la heteroestructura y un movimiento rápido en la dirección radial ( $\rho$ ) de ésta.  $Z_e(z_e)$  (2.11) es la función de onda que describe el movimiento del electrón en  $z$  y es la solución de la ecuación diferencial (2.2). Para solucionar la ecuación (2.2) se usa el método de matriz de transferencia y se halla la función de transferencia, con ésta se encuentra la energía para el estado base del electrón libre ( $m = 0$ ) usando el método numérico de bisección.

---

El correspondiente valor de energía para el electrón libre encontrado en el estado base es:  $E_{z_e} = 0,071R_y^*$ .

La función de onda para el electrón libre en  $z$  (2.11) está representada en la figura 3.1:

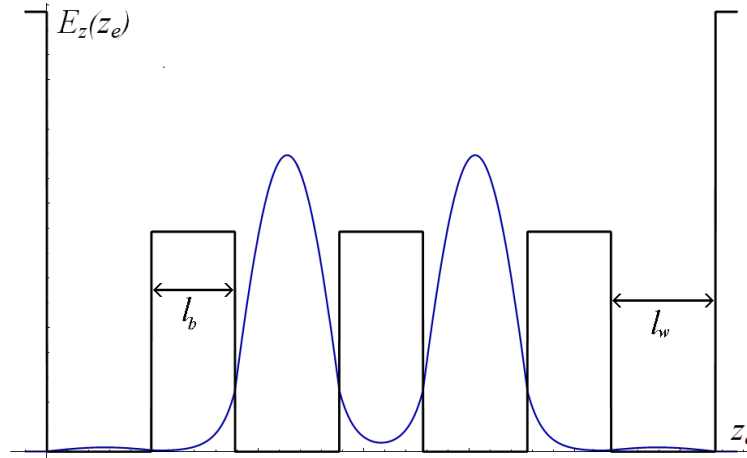


figura 3.1: *Función de onda para el electrón libre en dirección  $z$ .*

Para la parte radial, se recurre al uso del método numérico de bisección para encontrar el valor correspondiente de la energía para el estado base. Los resultados se muestran en las gráficas 3.2 y 3.3

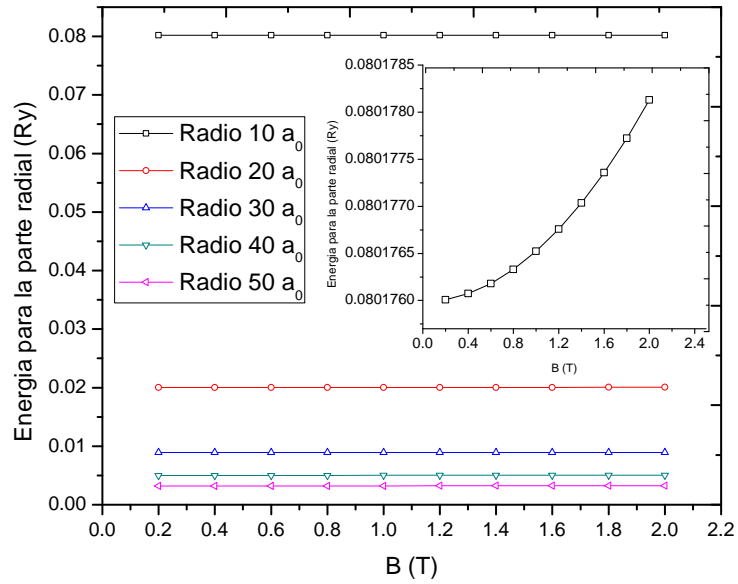


figura 3.2: *Energía del electrón libre para la parte radial en función del campo magnético bajo.*

En la gráfica 3.2 se muestra la variación de la energía del electrón en función de valores bajos de campo magnético para varios radios ( $\rho$ ) de la heteroestructura, en la gráfica se observa que a medida que aumenta el campo magnético el valor de la energía aumenta levemente con el campo magnético (sub-gráfica para radio 10  $a_0$ ), además, la energía disminuye con el aumento del radio.

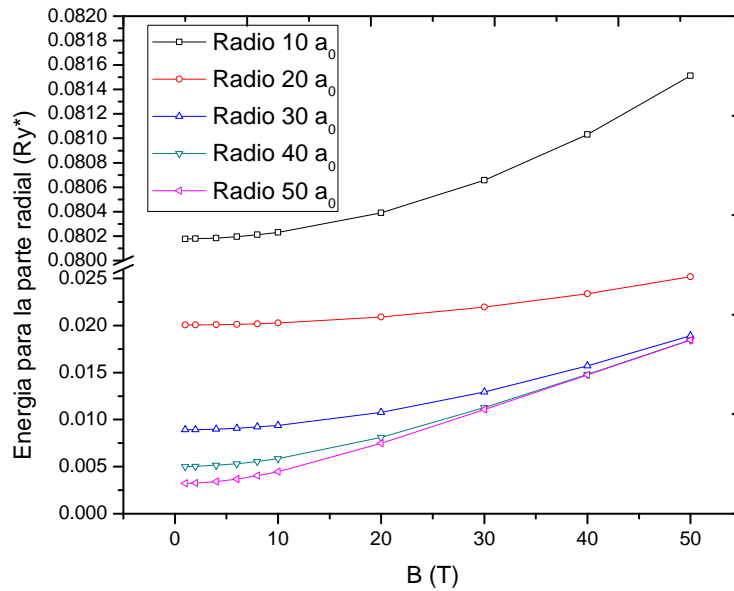


figura 3.3: Energía del electrón libre para la parte radial en función del campo magnético.

En la figura 3.3 se observa la energía del electrón dependiente de valores grandes del campo magnético para diferentes radios. En esta figura se observa un aumento de la energía del electrón a medida que aumenta el campo magnético aplicado, también se ve que para valores de radio grande, el aumento de la energía es más marcado con el campo magnético.

El aumento de la energía del electrón a medida que el radio del hilo disminuye se debe al hecho de que la función de onda del electrón se comprime, haciendo que se produzca un aumento en la energía. La energía del electrón a medida que el campo magnético aumenta es debido a que éste produce un efecto de confinamiento adicional, entonces el aumento de la energía depende los términos que contienen  $\gamma$ , el término paramagnético  $m\gamma$  y el término diamagnético  $\frac{\gamma^2}{4}\rho^2$  de la ecuación (2.3). El término paramagnético no afecta debido a que se considera el estado base ( $m = 0$ ) y el término diamagnético es

---

el encargado del incremento de los niveles de energía.

### 3.2 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EL HUECO EN LA NWSL.

Para el caso del análisis del comportamiento del hueco dentro de la NWSL tipo II en presencia de un campo magnético en dirección axial, se considera un planteamiento igual al electrón, es decir, uno lento en  $z$  y uno rápido en dirección  $\rho$ . Para describir el movimiento en dirección  $z$ , se soluciona la ecuación diferencial (2.20). Usando el método de matriz de transferencia y el método numérico de bisección se encuentra la energía para el estado base ( $m = 0$ ) para el movimiento  $z$  del hueco. El valor encontrado es:  $E_{Z_h} = 0,265R_y^*$ .

La figura 3.4 muestra la función de onda para el hueco en dirección  $z$ .

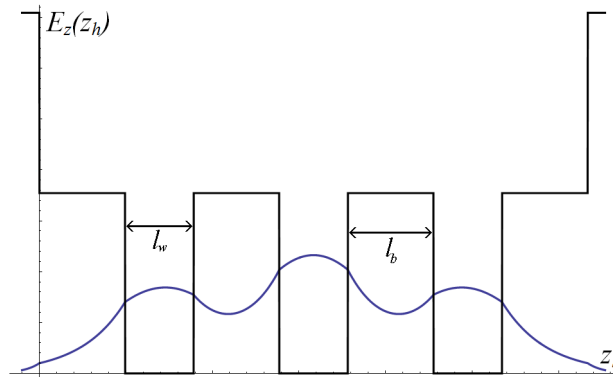


figura 3.4: *Función de onda para el hueco en dirección  $z$ .*

En la dirección radial ( $\rho$ ), también se recurre al método numérico de bisección para encontrar el valor de la energía base para el hueco y los resultados se encuentran consignados en las gráficas 3.5 y 3.6.

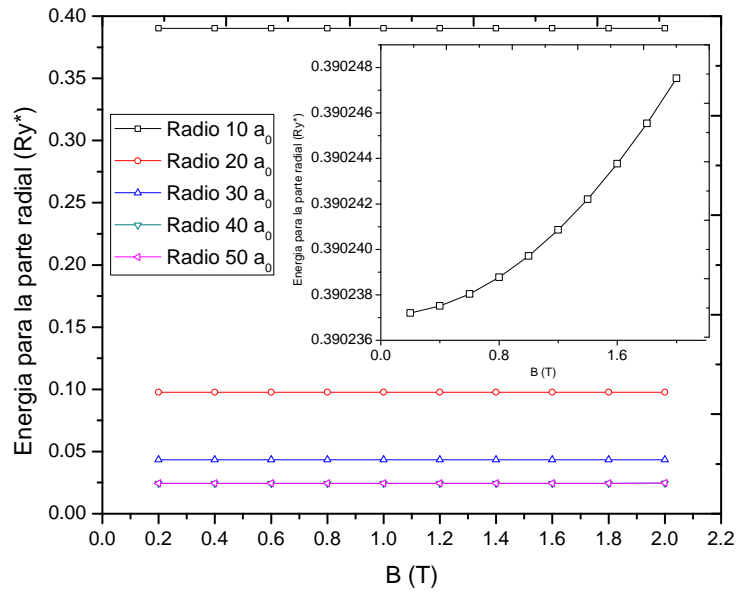


figura 3.5: *Energía del hueco para la parte radial en función del campo magnético bajo.*

En la gráfica 3.5 se puede observar como varía la energía base en función de campos magnéticos bajos, para varios valores de radio. En la gráfica se observa que a medida que aumenta el valor del campo magnético hay un aumento del valor de la energía (sub-gráfica para radio 10  $a_0$ ) y se ve un gran aumento de la energía a medida que disminuye el radio de la heteroestructura.

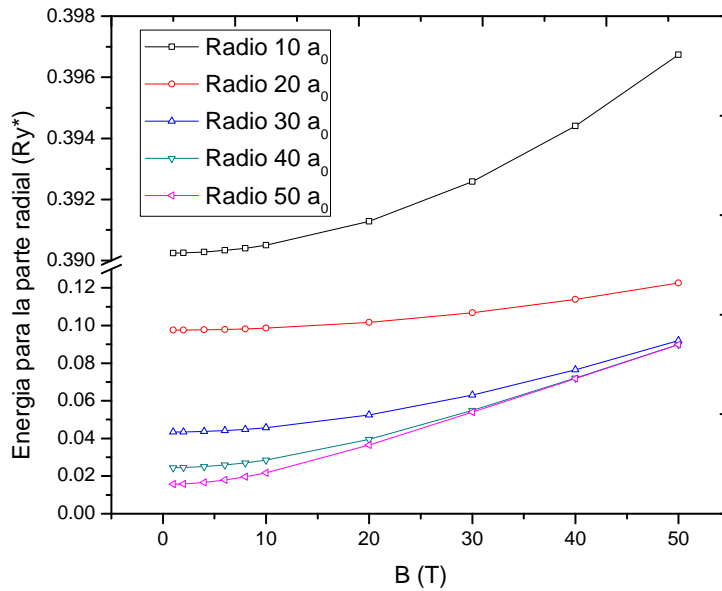


figura 3.6: *Energía del hueco para la parte radial en función del campo magnético.*

En la figura 3.6 se observa un aumento pronunciado de la energía del estado base del hueco a medida que aumenta el campo magnético, para los diferentes valores de radio se ve que a medida que el radio aumenta el valor de energía disminuye drásticamente.

De manera similar que el electrón, el campo magnético produce un confinamiento extra, lo que provoca el aumento de la energía del hueco, quedando dependiente del término paramagnético  $\frac{\gamma^2}{4}\rho^2$  de la ecuación (2.16).

### 3.3 ANÁLISIS Y RESULTADOS PARA EXCITÓN.

Cuando un electrón y un hueco interactúan, lo hacen mediante un potencial de Coulomb, para encontrar solución para esta cuasi-partícula llamada excitón hay que solucionar la

---

ecuación diferencial (2.29), para eso se usa el método de barrido trigonométrico.

Los resultados para el excitón con hueco liviano se muestran en las gráficas 3.7 y 3.8.

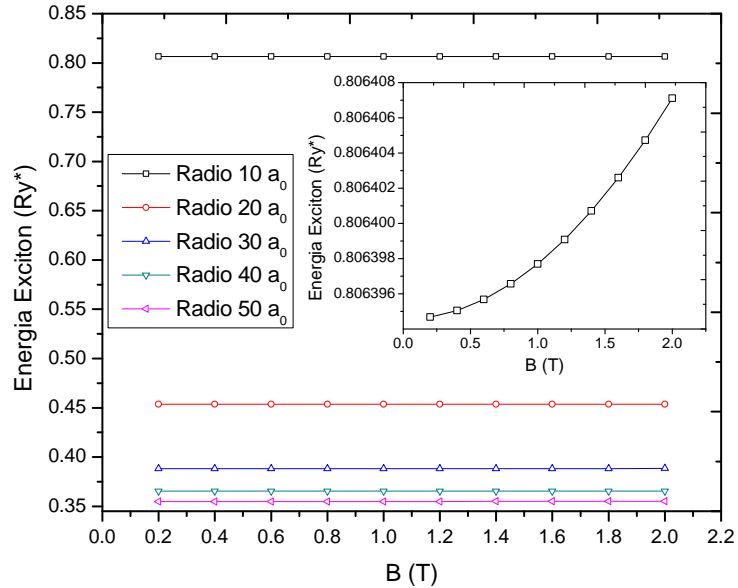


figura 3.7: *Energía del excitón para varios valores bajos de campo magnético.*

En la gráfica 3.7 se ve la variación de la energía base del excitón en función del campo magnético bajo, para varios radios del hilo. En ella se puede observar que a medida que el campo magnético aumenta el valor de la energía del excitón aumenta también (sub-gráfica para radio 10 a<sub>0</sub>) y disminuye de forma considerable a medida que el radio aumenta de tamaño.

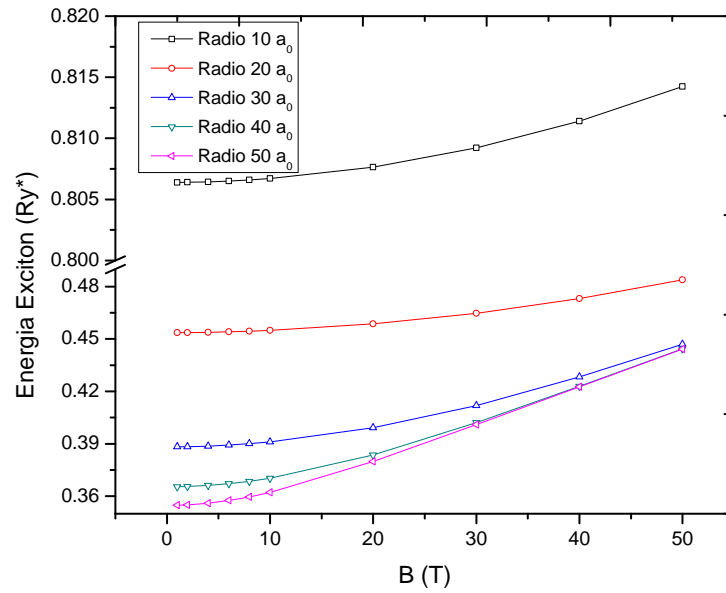


figura 3.8: *Energía del excitón para varios valores de campo magnético.*

En la gráfica 3.8 se tiene la variación de la energía del excitón para valores de campo magnético grande y para varios radios del hilo. En esta gráfica se tiene el mismo comportamiento que para la gráfica 3.7 con un aumento de la energía bastante considerable para campos magnéticos grandes.

En la figura 3.9 se ve la variación de la energía del excitón en función del radio del hilo para 3 valores de campo magnético.

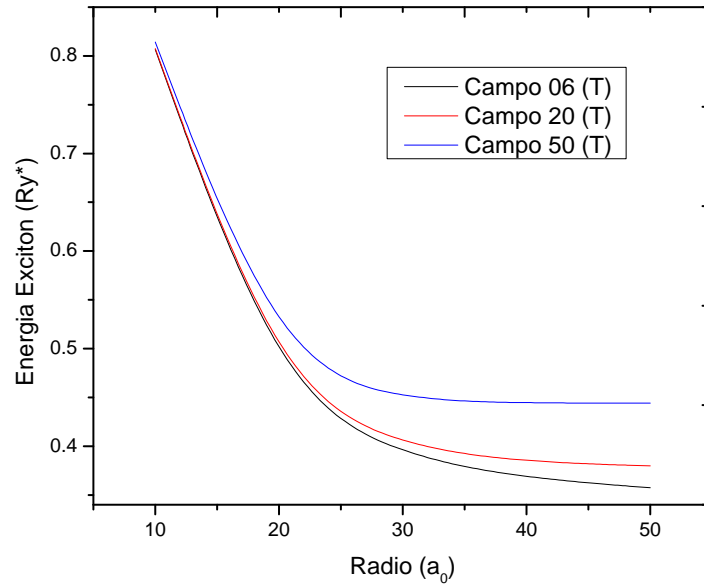


figura 3.9: *Energía del excitón para varios campos magnéticos en función del radio del hilo.*

Al disminuir el radio del hilo, hace que la función de onda del electrón se comprima, produciendo un aumento sobre una energía, el campo magnético produce un aumento de la energía del excitón de forma cuadrática y el aumento es apenas apreciable para campos magnéticos grandes en comparación en el aumento que se produce la disminución del radio del hilo [42], [43], ahora al aumentar el radio del hilo el campo magnético predomina en el aumento de la energía del excitón como se ve en la figura 3.9, éste aumento debido al termino diamagnético.

---

## CONCLUSIONES

---

- En este trabajo se presentó una manera simple para el cálculo de la energía del estado base de un excitón de hueco ligero confinado en una superred en un nanohilo tipo II en presencia de un campo magnético aplicado en la dirección axial, se utilizó la aproximación adiabática, método de matriz de transferencia y dimensión fractal, los cuales sirvieron para encontrar la relación entre las diferentes partículas y la heteroestructura
- Se encontró que la energía del estado base reduce a medida que el radio del hilo aumenta. Esta relación de dependencia entre el radio del hilo con la energía se da para el electrón y el hueco no interactuantes y el excitón de hueco ligero.
- El efecto que produce el campo magnético aplicado de forma axial sobre la NWSL tipo II es un aumento del confinamiento en la dirección  $\rho$ , provocando un aumento de forma cuadrática en la energía para el estado base.

## REFERENCIAS

---

- [1] J. H. Davis, “The physics of low dimensional semiconductors an introduction”, Cambridge University Press. 1998, p. 80.
- [2] W. Hornischer, P. Grambow, T. Demel, E. Bauser, C. Heitmann, K. Von Klitzing and K. Ploog, Appl. Phys. Lett. **60**, 2998 (1992).
- [3] N. N. Ledentsov, V. A. Shchukin, M. Grundmann, N. Kirstaedter, J. Böhrer, O. Schmidt, D. Bimberg, Phys. Rev. B **54**, 8743-8750.
- [4] G. Bastard, Phys. Rev. B **24**, 4714 (1981).
- [5] J. L. Zhu, J. H. Zhao and J. J. Xiong, Phys. Rev. B **50**, 1832 (1994).
- [6] B. S. Kandemir, Phys. Rev. B **72**, 165350 (2005).
- [7] P. Harrison, “Quantum wells, wires and dots”, Wiley-interscience. 2005, p. 10-11 & 44-46.
- [8] M. M. Dignam and J. E. Sipe, Phys. Rev. B **41**, 2865-2878 (1990).
- [9] N. G. Romanov and P. G. Baranov, IOP Nanotechnology **12**, 585-590 (2001).
- [10] V. G. Litovchenko, D. V. Korbutyak, S. G. Krylyuk, Yu. V. Kryuchenko, Materials Science and Engineering C, **19**, 439-443 (2002).

- 
- [11] K. S. Zhuravlev, A. K. Sulaimanov, A. M. Gilinskiĭ, L. S. Braginskiĭ, A. I. Toropov, and A. K. Bakarov, *Semiconductors*, Vol. **36**, No. 4, pp. 461-465 (2002).
- [12] M. Xiaodong, Y. J. Ding, Z. Wang and G. J. Salamo, *Laser Physics*, Vol. **15**, No. 2, pp. 225-232 (2005).
- [13] K. Sato, T. Takamasu and G. Kido, *Journal of Superconductivity: Incorporating Novel Magnetism*, Vol. **18**, No. 1 (2005).
- [14] A. J. Kent, R. N. Kini, N. M. Stanton, M. Henini, B. A. Glavin, V.A. Kochelap, and T. L. Linnik, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 215504 (2006).
- [15] Z. M. Zhu, P. Bhattacharya, E. Plis, XHSu and S. Krishna, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **39**, 4997-5001 (2006).
- [16] M. Trigo, T. A. Eckhause, M. Reason, R. S. Goldman and R. Merlin, *Phys. Rev. Lett* **97**, 124301 (2006).
- [17] C. J. Hill, J. V. Li, J. M. Mumolo and S. D. Gunapala, *Infrared Physics & Technology* **50**, 187-190 (2007).
- [18] L. L. Li, W. Xu, J. Zhang, and Y. L. Shi, *J. Appl. Phys.* **105**, 013115 (2009).
- [19] E. Machowska-Podsiadlo and M. Bugajski, *Acta Physica Polonica A*, Vol. **116** (2009).
- [20] L. L. Li, W. Xu, Z. Zeng, A. R. Wright, C. Zhang, J. Zhang and Y. L. Shi, *Microelectronics Journal* **40**, 815-817 (2009).
- [21] M. Razeghi, D. Hoffman, B. Nguyen, P. Delaunay, E. K. Huang, M. Z. Tidrow and V. Nathan, *IEEE*, Vol. **97**, No.6, 1056-1066 (2009).
- [22] P. Villamil, *Physica E* **42**, 2436-2440 (2010).
- [23] X. Lin, J. Li and J. Kang, *Semicond. Sci. Technol.* **25**, 045012 (2010).

- 
- [24] W. Guo-Wei, X. Ying-Qiang, G. Jie, T. Bao, R. Zheng-Wei, H. Zhen-Hong and N. Zhi-Chuan, *Chin. Phys. Lett.* Vol. **27**, No. 7, 077305 (2010).
- [25] G. F. Karavaev and S. N. Grinyaev, *Russian Physics Journal*, Vol. **53**, No. 1 (2010).
- [26] K. Termentzidis, P. Chantrenne, J. Duquesne and A. Saci, *J. Phys.: Condens. Matter* **22**, 475001 (6pp) (2010).
- [27] R. P. Beardsley, R. P. Champion, B. A. Glavin, and A. J. Kent, *New J. Phys.* **13**, 073007 (2011).
- [28] I. D. Mikhailov, J. H. Marín, and F. García, *Phys. Stat. Sol. (b)* **242**, 1636 (2005).
- [29] I. D. Mikhailov, F. García, and J. H. Marín, *Microelectronics Journal* **39**, issue 3-4 (2007).
- [30] J. H. Marín, W. Gutiérrez and I. D. Mikhailov, *Journal of Physics: Conference Series* **210**, 012045 (2010).
- [31] J. Betancur, W. Gutiérrez and H. Paredes, *Revista Colombiana De Física*, VOL.**38**, No.1 (2006).
- [32] C. Gomez-Olejua, C. L. Beltrán Ríos. E. Galván-Moya and H. Paredes, *Revista Colombiana De Física*, VOL. **39**, No.1 (2007).
- [33] J. Fernandez, L. Jaimes and C. L. Beltran, *Microelectronics Journal* **39**, 1259-1260 (2008).
- [34] W. Gutiérrez, J. E. Galván-Moya, L. F. García and I.D. Mikhailov, *Physica B* **404**, 180-183 (2009).
- [35] W Gutiérrez, J. E. Galván-Moya and I. D. Mikhailov, *Journal of Physics: Conference Series* **210**, 012053 (2010).
- [36] J. E. Galván-Moya, W. Gutiérrez, I.D. Mikhailov, J. Silva-Valencia and R. Franco, *Superlattices and Microstructures* **49**, 390-399 (2011).

- 
- [37] J. Sierra-Ortega, R. A. Escorcía and I. D. Mikhailov, *Journal of Physics: Conference Series* **167**, 012034 (2009).
- [38] I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. A. Escorcía and J. Sierra, *Phys. Rev. B.* **67**, 115317 (2003).
- [39] B. Chastaingt, M. Gurioli, P. Borri, M. Colocci, G. Neu, C. Deparis, J. Massies, and J. Martínez-Pastor, *Phys. Rev. B*, **55**, 4 (1997).
- [40] H. Ibach and H. Lüth. *Solid-State Physics, “An Introduction to Principles of Materials Science”*, Springer Verlag, (2003).
- [41] G. Weber, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 1447 (1995).
- [42] J. E. Galván-Moya, F. A. Rodríguez-Prada, H. Paredes and C. L. Beltrán Ríos, *Revista Colombiana DE Física*, VOL. **39**, No. 1, (2007).
- [43] J. E. Galván-Moya, W. Gutiérrez and C. Moscoso, *Journal of Physics: Conference Series*, **210**, 012039 (2010)

# ANEXOS

---

## ANEXO



# CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE ONDA PARA UN EXCITÓN EN UNA NWSL

---

---

Consideramos un sistema como el de la figura (1.4), con campo Magnético aplicado en dirección axial.

El Hamiltoniano del sistema tiene la forma general:

$$H\Psi = H_e\Psi + H_h\Psi - \frac{2}{r_{eh}}\Psi = E_X\Psi,$$

donde  $H_e$  y  $H_h$  son el Hamiltoniano para el electrón y el hueco respectivamente

$$H_e = -\eta_{\rho_e} (\Delta_{\rho_e} + \Delta_{\varphi_e}) - \eta_{z_e} (i)\Delta_{z_e} + \underbrace{V_e(\rho_e, z_e)}_{V_{eff}(\rho_e, z_e)} + \frac{\gamma^2 \rho_e^2}{4}$$
$$H_h = -\eta_{\rho_h} (\Delta_{\rho_h} + \Delta_{\varphi_h}) - \eta_{z_h} (j)\Delta_{z_h} + \underbrace{V_h(\rho_h, z_h)}_{V_{eff}(\rho_h, z_h)} + \frac{\gamma^2 \rho_h^2}{4}$$

con:

$$\eta_{\rho_e} = \frac{m_{av}^*}{m_{\rho_e}}, \eta_{\rho_h} = \frac{m_{av}^*}{m_{\rho_h}},$$

$$\eta_{z_e}(i) = \frac{m_{av}^*}{m_{z_i}}; i = \begin{cases} m_{z_e} \rightarrow GaAs \\ m_{z_e} \rightarrow AlAs \end{cases}$$

$$\eta_{z_h}(j) = \frac{m_{av}^*}{m_{z_j}}; j = \begin{cases} m_{z_h} \rightarrow GaAs \\ m_{z_h} \rightarrow AlAs \end{cases}$$

Proponiendo una solución de la forma

$$\Psi = f_e(\rho_e, z_e) f_h(\rho_h, z_h) \Phi(|\vec{r}_e - \vec{r}_h|)$$

se cumple que

$$H_e f_e = E_e f_e$$

$$H_h f_h = E_h f_h.$$

Se minimiza la siguiente funcional para encontrar la función envolvente

$$F[\Phi] = \left\langle f_e f_h \Phi \left| H_e + H_h - \frac{2}{r_{eh}} - E_x \right| f_e f_h \Phi \right\rangle \rightarrow \text{mín} \quad (\text{A.1})$$

$$F[\Phi] = \left\langle f_e f_h \Phi \left| f_h H_e (f_e \Phi) + f_e H_h (f_h \Phi) - \left( \frac{2}{r_{eh}} + E_x \right) f_e f_h \Phi \right\rangle = I_e + I_h + A$$

$$I_e = \langle f_e f_h \Phi | f_h H_e (f_e \Phi) \rangle, I_h = \langle f_e f_h \Phi | f_e H_h (f_h \Phi) \rangle, A = - \left\langle f_e f_h \Phi \left| \left( \frac{2}{r_{eh}} + E_x \right) f_e f_h \Phi \right\rangle.$$

Tomando la integral  $I_e$  y reemplazando  $H_e$  en ella se tiene

$$I_e = \left\langle f_e f_h \Phi \left| f_h \left[ -\eta_{\rho_e} (\Delta_{\rho_e} + \Delta_{\varphi_e}) - \eta_{z_e}(i) \Delta_{z_e} + V_{e_{eff}}(\rho_e, z_e) \right] (f_e \Phi) \right\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Aplicando la propiedad de Leibniz

$$\Delta_{x_e} (f(x_e) g(x_e)) = g \Delta_{x_e} f + f \Delta_{x_e} g + 2 \nabla_{x_e} f \cdot \nabla_{x_e} g$$

en la ecuación (A.2), se obtiene la expresión

$$I_e = \left\langle f_e f_h \Phi \left| f_h \left\{ \begin{array}{l} -\eta_{\rho_e} (f_e \Delta_{\rho_e} \Phi + 2 \nabla_{\rho_e} f_e \cdot \nabla_{\rho_e} \Phi) - \eta_{\rho_e} (f_e \Delta_{\varphi_e} \Phi + 2 \nabla_{\varphi_e} f_e \cdot \nabla_{\varphi_e} \Phi) \\ -\eta_{z_e}(i) (f_e \Delta_{z_e} \Phi + 2 \nabla_{z_e} f_e \cdot \nabla_{z_e} \Phi) \\ + \Phi \underbrace{\left[ -\eta_{\rho_e} (\Delta_{\rho_e} f_e + \Delta_{\varphi_e} f_e) + \eta_{z_e}(i) \Delta_{z_e} f_e + V_{e_{eff}}(\rho_e, z_e) f_e \right]}_{H_e f_e = E_e f_e} \end{array} \right\} \right\rangle.$$

como:

$$\frac{1}{f} \nabla \cdot (f^2 \nabla \Phi) = f \Delta \Phi + 2 \nabla f \cdot \nabla \Phi$$

Entonces  $I_e$  queda de la forma:

$$I_e = \left\langle f_e f_h \Phi \left[ f_h \left[ -\frac{\eta_{\rho_e}}{f_e} \nabla_{\rho_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\rho_e} \Phi) - \frac{\eta_{\rho_e}}{f_e} \nabla_{\varphi_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\varphi_e} \Phi) - \frac{\eta_{z_e(i)}}{f_e} \nabla_{z_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{z_e} \Phi) + E_e f_e \Phi \right] \right] \right\rangle,$$

$$I_e = \left\langle -f_h^2 \Phi \left[ \eta_{\rho_e} \nabla_{\rho_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\rho_e} \Phi) + \eta_{\rho_e} \nabla_{\varphi_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\varphi_e} \Phi) + \eta_{z_e(i)} \nabla_{z_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{z_e} \Phi) \right] + E_e f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \right\rangle,$$

sumándolos términos:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho_e} f_h^2 \Phi \nabla_{\rho_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\rho_e} \Phi) &= \eta_{\rho_e} \left[ \nabla_{\rho_e} \cdot (f_e^2 f_h^2 \Phi \nabla_{\rho_e} \Phi) - f_e^2 f_h^2 (\nabla_{\rho_e} \Phi)^2 \right] \\ \eta_{\rho_e} f_h^2 \Phi \nabla_{\varphi_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{\varphi_e} \Phi) &= \eta_{\rho_e} \left[ \nabla_{\varphi_e} \cdot (f_e^2 f_h^2 \Phi \nabla_{\varphi_e} \Phi) - f_e^2 f_h^2 (\nabla_{\varphi_e} \Phi)^2 \right] \\ \eta_{z_e(i)} f_h^2 \Phi \nabla_{z_e} \cdot (f_e^2 \nabla_{z_e} \Phi) &= \eta_{z_e(i)} \left[ \nabla_{z_e} \cdot (f_e^2 f_h^2 \Phi \nabla_{z_e} \Phi) - f_e^2 f_h^2 (\nabla_{z_e} \Phi)^2 \right] \\ \hline f_h^2 \Phi \nabla_e \cdot (f_e^2 \nabla_e \Phi) &= \nabla_e \cdot (f_e^2 f_h^2 \Phi \nabla_e \Phi) - f_e^2 f_h^2 (\nabla_e \Phi)^2 \end{aligned}$$

y aplicando el teorema de Gauss, tenemos que  $\langle \nabla_e \cdot (f_e^2 f_h^2 \Phi \nabla_e \Phi) \rangle = 0$ , porque  $f_e (|\vec{r}_e| \rightarrow \infty) = 0$ . Entonces

$$\langle f_h^2 \Phi \nabla_e \cdot (f_e^2 \nabla_e \Phi) \rangle = - \langle f_e^2 f_h^2 (\nabla_e \Phi)^2 \rangle$$

y  $I_e$  queda de la forma

$$I_e = \langle f_e^2 f_h^2 (\nabla_e \Phi)^2 \rangle + \langle E_e f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \rangle,$$

donde

$$(\nabla_e \Phi)^2 = \eta_{\rho_e} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_e} \right)^2 + \frac{\eta_{\rho_e}}{\rho_e^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_e} \right)^2 + \eta_{z_e(i)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_e} \right)^2.$$

De la misma forma se puede encontrar  $I_h$ ,

$$I_h = \langle f_e^2 f_h^2 (\nabla_h \Phi)^2 \rangle + \langle E_h f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \rangle,$$

donde

$$(\nabla_h \Phi)^2 = \eta_{\rho_h} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_h} \right)^2 + \frac{\eta_{\rho_h}}{\rho_h^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_h} \right)^2 + \eta_{z_h(j)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_h} \right)^2.$$

La funcional (A.1), queda de la forma

$$F[\Phi] = \left\langle f_e^2 f_h^2 \left( (\nabla_e \Phi)^2 + (\nabla_h \Phi)^2 \right) \right\rangle + \left\langle f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \left( E_e + E_h - \frac{2}{r_{eh}} - E_x \right) \right\rangle,$$

expresando la funcional  $F[\Phi]$  en función de  $r_{eh}$ :

$$\begin{aligned} r_{eh}^2 = r^2 &= \rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e\rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2 \\ \left( \frac{\partial r}{\partial \rho_e} \right)^2 &= \frac{\rho_e^2 - 2\rho_e\rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + \rho_h^2 \cos^2(\varphi_e - \varphi_h)}{r^2} \\ \left( \frac{\partial r}{\partial \rho_h} \right)^2 &= \frac{\rho_h^2 - 2\rho_e\rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + \rho_e^2 \cos^2(\varphi_e - \varphi_h)}{r^2} \\ \left( \frac{\partial r}{\partial z_e} \right)^2 &= \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2}, \quad \left( \frac{\partial r}{\partial z_h} \right)^2 = \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \\ \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi_e} \right)^2 &= \frac{\rho_e^2 \rho_h^2 \sin^2(\varphi_e - \varphi_h)}{r^2}, \quad \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi_h} \right)^2 = \frac{\rho_e^2 \rho_h^2 \sin^2(\varphi_e - \varphi_h)}{r^2} \end{aligned}$$

Expresando  $(\nabla_e \Phi)^2$  y  $(\nabla_h \Phi)^2$  en función de lo anterior:

$$\begin{aligned} (\nabla_e \Phi)^2 &= \eta_{\rho_e} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_e} \right)^2 + \frac{\eta_{\rho_e}}{\rho_e^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_e} \right)^2 + \eta_{z_e}(i) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_e} \right)^2 \\ (\nabla_e \Phi)^2 &= \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \left[ \eta_{\rho_e} \left( \frac{\partial r}{\partial \rho_e} \right)^2 + \frac{\eta_{\rho_e}}{\rho_e^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi_e} \right)^2 + \eta_{z_e}(i) \left( \frac{\partial r}{\partial z_e} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow (\nabla_e \Phi)^2 &= \eta_{\rho_e} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + (\eta_{z_e}(i) - \eta_{\rho_e}) \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2, \end{aligned}$$

de igual forma

$$(\nabla_h \Phi)^2 = \eta_{\rho_h} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + (\eta_{z_h}(j) - \eta_{\rho_h}) \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2.$$

Entonces:

$$(\nabla_e \Phi)^2 + (\nabla_h \Phi)^2 = (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2$$

Reescribiendo la funcional se tiene

$$\begin{aligned} F[\Phi] &= \left\langle f_e^2 f_h^2 \left\{ (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \right\} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right\rangle \\ &\quad + \left\langle f_e^2 f_h^2 \Phi^2 \left( E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x \right) \right\rangle \end{aligned}$$

---


$$F[\Phi] = \left\langle f_e^2 f_h^2 \left\{ \begin{aligned} & [(\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2}] \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 \\ & + (E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x) \Phi^2 \end{aligned} \right\} \right\rangle,$$

en forma de integral

$$\begin{aligned} F[\Phi] &= \left\{ (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) \int f_e^2 f_h^2 d\vec{r} + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] \int f_e^2 f_h^2 \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} d\vec{r} \right\} \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 \\ &\quad + \left[ (E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x) \int f_e^2 f_h^2 d\vec{r} \right] \Phi^2 \\ F[\Phi] &= \{ (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) J_0(r) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] J_1(r) \} \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 \\ &\quad + (E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x) J_0(r) \Phi^2. \end{aligned}$$

Donde  $J_0(r)$  y  $J_1(r)$  son Jacobianos de la forma:

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \int f_e^2 f_h^2 d\vec{r} \\ J_1(r) &= \int f_e^2 f_h^2 \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \int_0^L dz_e \int_0^L dz_h \int_0^R \rho_e d\rho_e \int_0^R \rho_h d\rho_h \int_0^{2\pi} d\varphi_e \int_0^{2\pi} d\varphi_h f_e^2(\rho_e, z_e) f_h^2(\rho_h, z_h) \times \\ &\quad \times \delta \left( r - \sqrt{\rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e \rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2} \right) \quad (\text{A.3}) \\ J_1(r) &= \int_0^L dz_e \int_0^L dz_h \int_0^R \rho_e d\rho_e \int_0^R \rho_h d\rho_h \int_0^{2\pi} d\varphi_e \int_0^{2\pi} d\varphi_h f_e^2(\rho_e, z_e) f_h^2(\rho_h, z_h) \frac{(z_e - z_h)^2}{r^2} \times \\ &\quad \times \delta \left( r - \sqrt{\rho_e^2 + \rho_h^2 - 2\rho_e \rho_h \cos(\varphi_e - \varphi_h) + (z_e - z_h)^2} \right), \end{aligned}$$

simplificando la expresi3n de la funcional tenemos

$$F[\Phi] = J(r) \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 + E J_0(r) \Phi^2 \quad (\text{A.4})$$

---

donde

$$J(r) = (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h}) J_0(r) + [(\eta_{z_e}(i) + \eta_{z_h}(j)) - (\eta_{\rho_e} + \eta_{\rho_h})] J_1(r), \quad (\text{A.5})$$

$$E = E_e + E_h - \frac{2}{r} - E_x.$$

Para minimizar la expresión (A.4), se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) &= 2E J_0(r) \Phi - 2 \frac{d}{dr} \left[ J(r) \frac{d\Phi}{dr} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{J_0(r)} \frac{d}{dr} \left[ J \frac{d\Phi}{dr} \right] - E \Phi^2 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{J(r)} \left( \frac{dJ}{dr} \right) \left( \frac{d\Phi}{dr} \right) - \frac{J_0(r)}{J(r)} E \Phi = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{d}{dr} \{ \ln [J(r)] \} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{J_0(r)}{J(r)} E \Phi = 0, \end{aligned}$$

si renombramos como  $W(r) = \frac{d}{dr} \{ \ln [J(r)] \}$  y  $U(r) = \frac{J_0(r)}{J(r)} E$ , tenemos

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + W(r) \frac{d\Phi}{dr} - U(r) \Phi = 0 \quad (\text{A.6})$$

Entonces para encontrar la función envolvente que da solución al problema, es necesario solucionar la anterior ecuación diferencial, utilizando el método de barrido trigonométrico.

---

## ANEXO

### **B**

---

# BARRIDO TRIGONOMÉTRICO

---

Para resolver la ecuación diferencial (A.6) se hace necesario el uso de métodos numéricos, entonces reescribiendola de la forma:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + W(r)\frac{d\Phi}{dr} + U(r)\Phi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Ahora se aplica el método de barrido trigonométrico para encontrar la solución a esta ecuación.

El método de barrido trigonométrico consiste en que la ecuación diferencial de segundo orden es reducida a una ecuación de primer orden a través de cambio de coordenadas dado por (coordenadas polares de Poincaré):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r) &= A(r) \cos [\theta(r)] \\ \Phi'(r) &= A(r) \operatorname{sen} [\theta(r)] \\ \tan [\theta(r)] &= \frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

De estas se obtiene las expresiones para la ecuación diferencial para  $\theta(r)$  y la ecuación

---

$A(r)$

$$\Phi'(r) = - \{ \text{sen}^2 [\theta(r)] + U(r) \cos^2 [\theta(r)] + W(r) \text{sen} [\theta(r)] \cos [\theta(r)] \} \quad (\text{B.3})$$

$$A(r) = A \exp \left\{ \int [1 - U(r)] \text{sen} [\theta(r)] \cos [\theta(r)] + W(r) \text{sen}^2 [\theta(r)] \right\}; A(0) = 1 \quad (\text{B.4})$$

Donde  $U(r)$  y  $W(r)$  son de la forma

$$W(r) = \frac{d}{dr} \{ [J(r)] \}$$

$$U(r) = \frac{J_0(r)}{J(r)} E$$

$$E = E_x + \frac{2}{r} - E_e - E_h$$

$J_0(r)$  y  $J(r)$  tiene la forma (A.3) y (A.5) respectivamente.

Analizando las condiciones de contorno para la ecuación (B.1), cuando  $r$  tiende a cero y cuando tiende a infinito, se hallan las condiciones:

- Cuando  $r \rightarrow 0$  se presenta singularidad en la función  $W(r)$ ; lo cual exige  $U'(r)$  sea nula para  $r = 0$ , entonces de (B.2) se tiene que cuando  $r = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ .
- Cuando  $r \rightarrow \infty$  la función  $U(r)$  tiene que anularse y solo se cumple cuando  $\theta(\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2} - n_r \pi$  con  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ , que es el número cuántico de nivel energético.

En un cálculo numérico no existe un punto en el infinito, entonces para efectos de programación, el límite para cuando  $r$  se reemplaza por un valor por un valor  $Rmax$ .

Finalmente el problema planteado en la ecuación (B.1) queda expresado de la siguiente manera:

---

$$\begin{aligned}\Phi'(r) &= -\{ \text{sen}^2 [\theta(r)] + U(r)\cos^2 [\theta(r)] + W(r)\text{sen} [\theta(r)] \cos [\theta(r)] \} \\ \Phi(R_{\text{máx}}) &= -\frac{\pi}{2} - n_r\pi \\ \theta(0) &= 0 \\ n_r &= 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Este es el soporte matemático utilizado en los programas computacionales, realizados para hallar la energía base del excitón de hueco ligero en función de los parámetros considerados.