Contribuciones de la modelación matemática en el estudio del concepto de función: Una propuesta didáctica mediada por micro:bit

Andrw Julián Durán Lozano

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciado en Matemáticas

Director
Jorge Enrique Fiallo Leal
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A Dios por regalarme la salud y la sabiduría para dedicarme a esta bella profesión.

A mi Madre y a todos los sacrificios que hizo para que yo estuviera aquí escribiendo esto.

A mi Padre y mis abuelos por apoyarme y creer en mí.

A mis amigos por escucharme y motivarme a avanzar.

A cada uno de las personas que alguna vez ocupe para escuchar mis ideas.

A mí por no rendirme y seguir.

Agradecimientos

Primeramente, darle las Gracias a Dios por darme la vida y la salud a lo largo de mi camino universitario.

A los estudiantes de la licenciatura en matemáticas por su dedicación y participación tanto de la prueba piloto como en la implementación.

A mi amigo Morantes por su apoyo en el manejo de los dispositivos electrónicos y a mi hermano Ochoa por ser consorte en momentos de debilidad.

A la Universidad Industrial de Santander por ser mi segunda casa y el lugar donde trabaje para sacar mi profesión adelante.

A mi director Jorge Fiallo por creer en mis ideas, guiarme y consolidar este proyecto.

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Resumen

Título: Contribuciones de la modelación matemática en el estudio del concepto de función: Una propuesta didáctica mediada por micro:bit*

Autor: Andrw Julián Durán Lozano**

Palabras Clave: Prácticas variacionales, modelación matemática, pensamiento funcional y micro:bit.

Descripción: La investigación aquí documentada se centra en el desarrollo del pensamiento funcional y las contribuciones de la modelación matemática a partir del estudio del cambio y la variación, utilizando GeoGebra y micro:bit para la toma y tratamiento de datos. Para esto se diseñó e implementó una secuencia de enseñanza conformada por dos talleres en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo, utilizando la estrategia metodológica "experimento de enseñanza" y, se valoró mediante los datos recopilados a través de diferentes medios como videograbaciones, transcripciones y registro de actividad en GeoGebra. En cuanto a los resultados obtenidos se identifican diversas interpretaciones y enfoques por parte de los estudiantes, se evidencia la construcción y discusión de modelos matemáticos a partir de las prácticas variacionales y la toma de datos con micro:bit. En síntesis, la secuencia de enseñanza logra favorecer el desarrollo del pensamiento funcional a partir de las prácticas variacionales y la toma de datos con micro:bit para el estudio de la función, demostrando su efectividad. Se sugiere considerar el diseño didáctico completo y explorar la aparición de otras prácticas variacionales que permita caracterizar de forma más detallada el pensamiento funcional de los estudiantes en futuras investigaciones.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

Title: Contributions of mathematical modeling to the study of the concept of function: A teaching proposal mediated by micro:bit*

Author: Andrw Julián Durán Lozano**

Key Words: Variational practices, mathematical modeling, functional thinking and micro:bit

Description: The research documented here focuses on the development of functional thinking and the contributions of mathematical modeling through the study of change and variation, using GeoGebra and micro:bit for data collection and analysis. To this end, a teaching sequence consisting of two workshops was designed and implemented at the Industrial University of Santander with students in the Calculus Didactics course, using the "teaching experiment" methodological strategy; it was evaluated using data collected through various means, such as video recordings, transcripts, and activity logs in GeoGebra. Regarding the results obtained, diverse interpretations and approaches by the students were identified, and the construction and discussion of mathematical models based on variational practices and data collection with micro:bit were evident. In summary, the teaching sequence successfully promotes the development of functional thinking through variational practices and data collection with micro:bit for the study of the function, demonstrating its effectiveness. It is suggested that the complete instructional design be considered and that the emergence of other variational practices be explored to allow for a more detailed characterization of students' functional thinking in future research.

* Degree Work

** Science faculty, Math school, director PhD. Jorge Enrique Fiallo.

Introducción

Numerosas investigaciones en el campo de la educación matemática muestran, con convergencia sorprendente, que si bien se puede enseñar de forma más o menos mecánica a hacer algunos cálculos y resolver algunos problemas estándar, persisten dificultades para que los estudiantes alcancen una compresión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento para el estudio del Cálculo (Artigue, 1995). Esto representa un desafío significativo para estudiantes de ingeniería y ciencias en todo el mundo. Según Fiallo y Parada (2018), esta dificultad se debe, en parte, a la falta de comprensión de subconceptos fundamentales como límite, continuidad y función. La problemática del Cálculo ha sido abordada desde diferentes posturas y perspectivas de investigación, pues Según Artigue (1995) se debe a la inclinación de los investigadores en la dimensión didáctica, cognitiva y epistemológica. En este sentido, Caballero (2018) encuentra que una idea central es la de desarrollar una comprensión dinámica del Cálculo desde una perspectiva variacional, por lo que comprender cómo los estudiantes se apropian de la noción de variación es un aspecto fundamental en el aprendizaje del Cálculo.

Lo propuesto anteriormente por Caballero (2018) se refiere al desarrollo de una caracterización de la noción de variación que permita identificar y explicar aspectos clave de su constitución, caracterizar el sistema de referencia variacional, y diseñar e implementar situaciones de predicción con el fin de evidenciar la variación construida por estudiantes de bachillerato.

Particularmente, el concepto de función suele abordarse desde una perspectiva analítica y algorítmica, lo que limita su comprensión integral (Toloza, 2022). Investigaciones como las de Hitt (1998) evidencian que tanto estudiantes como docentes en formación suelen asociar la función exclusivamente con expresiones algebraicas o gráficas, ignorando otras representaciones válidas.

En el trabajo doctoral realizado por Planchart (2002) para identificar y analizar las dificultades que surgen durante el proceso que conduce al aprendizaje de las funciones, se ratifica lo anteriormente dicho, debido a que en muchos casos, los estudiantes después de haber estudiado el concepto y los subconceptos de función tienen una comprensión que se limita al uso de una regla para probar cuándo una relación es función, o en otros casos, a la evaluación de funciones en el contexto algebraico, por lo cual, los estudiantes pueden enfrentar dificultades al tratar de entender y transferir estos conceptos a otros temas y problemas.

Ante esta problemática, la educación matemática sugiere, entre otros, los siguientes dos enfoques: abordar la noción de función desde un enfoque variacional; y priorizar el desarrollo de habilidades asociadas a los procesos matemáticos, como la modelación y la resolución de problemas, utilizando estos procesos para construir nociones matemáticas.

Respecto al primer enfoque Caballero (2018) entiende la variación como una noción construida por el pensamiento, que consiste en una abstracción de las propiedades y características de un fenómeno en situaciones de predicción por medio de una medición del cambio que se realiza con base en el desarrollo de prácticas, así como el reconocimiento de una evolución del cambio en un intervalo. Estos elementos se consolidan en el desarrollo de prácticas específicas para operar con el cambio y la variación con fines predictivos, que se denominan *prácticas variacionales.*

Respecto al segundo enfoque mencionado previamente, La modelación matemática se asocia con la actividad científica de construir modelos a partir de un problema o fragmento de la realidad. Según Villa et al. (2009), se han adelantado investigaciones que posibilitan la adaptación de esta actividad científica en la enseñanza de las matemáticas, de tal manera que se convierta en estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula de clase.

En el trabajo de Blomhøj (2004) reconoce que establecer, analizar y criticar modelos matemáticos es frecuentemente considerado relevante para los últimos años de la escuela secundaria y después de ella. Como se puede evidenciar la modelación matemática es fuertemente estudiada y desde las diferentes líneas de investigación ha establecido elementos teóricos y didácticos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en el caso de Colombia, se encuentra que, si bien puede haber especificaciones en los lineamientos curriculares de matemáticas para el desarrollo de este proceso matemático son diversas las fuentes que documentan la poca apropiación de estos elementos por parte de muchos profesores (Villa-Ochoa et al., 2009).

Este antagonismo entre la formación matemática que ofrece la escuela y los desafíos de la realidad puede obstaculizar el camino para desarrollar habilidades necesarias para enfrentar situaciones desafiantes y tomar decisiones más informadas en contextos más dinámicos y menos predecibles (Muñoz, 2026).

Particularmente, la Universidad Industrial de Santander (UIS) no ha sido ajena a la problemática mencionada anteriormente. Como menciona Muñoz (2026) la carente comprensión de los constructos matemáticos por parte de estudiantes de ciencias e ingenierías de la UIS en el curso de cálculo I ha generado alta reprobación. Ante lo cual se han planteado estrategias como el "Curso de Precálculo" (Curso de Inducción a la Formación Matemática) Fiallo y Parada (2018). El curso ha demostrado tener un impacto positivo en el estudio de núcleos conceptuales del cálculo de forma dinámica y el desarrollo de procesos matemáticos como la resolución de problemas, la comunicación, la representación, la demostración, y elaboración comparación y la ejecución de procedimientos.

Teniendo en cuenta lo problematizado previamente, en este trabajo de investigación se formula de manera puntual la pregunta: ¿Cómo la modelación matemática de problemas auténticos, mediados por el uso de micro:bit, contribuye al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios?

Esta investigación tiene por objetivo: analizar cómo la modelación de problemas auténticos con la mediación de micro:bit contribuye al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios.

De ahí que surja la necesidad de proponer diseños didácticos que den continuidad a la formación inicial en un curso de cálculo y a estudiantes próximos a culminar su formación escolar, con los cuales podrán desarrollar habilidades para reconocer el cambio, visualizar las variantes e invariantes del problema, identificar qué variables y relaciones entre variables son importantes, distinguir atributos, analizar el comportamiento tendencial de gráficas, realizar aproximaciones a los infinitesimales y el infinito. Además, se hace necesario caracterizar el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes al resolver dichas actividades, con el fin de evidenciar el impacto o efectividad de tales propuestas.

En el capítulo uno se presentan el objetivo general y los objetivos específicos que guían la presente investigación.

En el capítulo dos se presentan algunos estudios que han sido relevantes para la investigación y contribuyeron de manera significativa a su contextualización, diseño y desarrollo. Dichos estudios abordan temas involucrados en el objetivo propuesto, como los experimentos de enseñanza, la modelación matemática y el pensamiento funcional.

En el capítulo tres se presentan los elementos teóricos que posibilitan la concepción del problema de investigación, los objetivos y consolidación de los resultados. El primero, refiere a la caracterización del pensamiento funcional a partir de las prácticas variacionales; el segundo, al proceso de modelación matemática; y, finalmente, una aproximación al concepto de función.

En el capítulo cuatro se presenta la metodología adoptada para el desarrollo de la investigación, detallando el enfoque, el tipo de estudio y los procedimientos empleados en el diseño, implementación y análisis de la secuencia. Se describe la población, el contexto educativo, las tareas propuestas y los distintos caminos de solución previstos, junto con los instrumentos utilizados para la recolección de datos y los criterios de análisis que permitieron interpretar los resultados.

En el capítulo cinco se presenta el análisis de la versión final de la secuencia de enseñanza en el Aula Virtual de GeoGebra y aplicada a 22 estudiantes del curso *Didáctica del Cálculo* del segundo semestre académico de 2025 en la Universidad Industrial de Santander. Se exponen las prácticas variacionales movilizadas y las contribuciones de la modelación matemática a lo largo de las diferentes tareas que conforman la secuencia.

Finalmente, en el capítulo seis se presentan las principales conclusiones de la investigación. En primer lugar, se responde a la pregunta de investigación; luego, se señalan otros resultados relevantes que aportan a la disciplina y que son producto de la intervención didáctica; y, se reconocen algunos de los alcances y limitaciones del estudio. En seguida, se muestran las referencias bibliográficas que sustentan el estudio.

1. Objetivos

1.1 Objetivo General

Analizar cómo la modelación de problemas auténticos con la mediación de micro:bit contribuye al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios.

1.2 Objetivos Específicos

-Diseñar e implementar una secuencia de enseñanza con la mediación de micro:bit para la modelación de problemas de variación, con el objetivo de desarrollar pensamiento funcional.

-Analizar los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia de enseñanza con el fin de reconocer las contribuciones de la modelación matemática mediada por el uso de micro:bit en el desarrollo del pensamiento funcional.

2. Antecedentes

En este capítulo se presentan algunos estudios que han sido relevantes para la investigación y contribuyeron de manera significativa a su contextualización, diseño y desarrollo. Dichos estudios abordan temas involucrados en el objetivo propuesto, como los experimentos de enseñanza, la modelación matemática y el pensamiento funcional. Es importante señalar que no se han organizado estos trabajos previos en líneas conceptuales o por temáticas definidas, puesto que estos abordan de manera conjunta las temáticas antes mencionadas. Esto resalta la relación y coherencia entre tales enfoques metodológicos, teóricos y conceptuales.

Huapaya (2012) en su trabajo de maestría planteó un experimento de enseñanza sobre el estudio de las funciones cuadráticas a través de la modelación de situaciones reales y el uso de tecnologías informáticas como EXCEL y FUNCIONSWIN32. El propósito de este experimento consistió en dar cuenta que el recurso tecnológico facilita la articulación de registro en el sentido de Duval y aporta a la estructura conceptual u organización constructiva del estudiante.

La propuesta basada en experimentos de enseñanza soportada por los recursos tecnológicos EXCEL Y FUNCIONSWIN32 que se implementó en estudiantes de quinto secundaria en Perú, facilitó en los estudiantes la formación de representaciones y la articulación de registros en el sentido de Duval. Entre algunas de las perspectivas de investigación el autor considera indagar sobre las prácticas de modelación de los estudiantes haciendo uso de herramientas tecnológicas dinámicas como por ejemplo el GeoGebra o Cabri (Huapaya, 2012).

Muñoz (2026) en su trabajo de maestría realizó un experimento de enseñanza para caracterizar el razonamiento covariacional de estudiantes universitarios mediante la modelación de situaciones dinámicas con tecnologías digitales. El estudio consistió en el diseño de propuestas didácticas para apoyar la formación inicial en un curso de cálculo con el fin de estudiar el impacto o efectividad de tales propuestas didácticas. En los resultados encontrados por este autor se destaca las acciones mentales que evidencian el razonamiento covariacional e identificó que existe una estrecha relación entre las etapas del ciclo de modelación y la activación de estas acciones. Una consideración dentro de este trabajo es la posibilidad de diseñar tareas que simulen situaciones propias de las futuras prácticas profesionales de los estudiantes, lo cual fortalecería la implementación de la modelación matemática a nivel universitario.

Delgado (2025) realizó un estudio con estudiantes en formación de licenciatura en matemáticas que tuvo por objetivo diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de la regla de la derivada de la función potencia y exponencial incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra y enfocándola al desarrollo de las habilidades del proceso de demostración. Para ello, considero un experimento de enseñanza donde analizó los tipos de demostración emergentes y los errores y dificultades que enfrentaron los estudiantes al realizar las tareas propuestas. Dentro de los resultados de este estudio se destaca que predominó el uso de demostraciones de tipo inductivas o empíricas entre los estudiantes, aun cuando estos se encontraban en un semestre avanzado de su formación como docentes de matemáticas.

El trabajo que realizó Amado y Pinto (2023) consistió en reconocer las habilidades asociadas al proceso de representación a partir del estudio de las secciones cónicas como lugares geométricos mediado por GeoGebra y problemas contextualizados. Para ello, diseñaron, implementaron y evaluaron una secuencia de enseñanza que se compuso de tres talleres que implementaron con estudiantes de educación media de una institución pública en Colombia. La estrategia metodológica que se usó para evaluar el impacto o efectividad de la secuencia fue el experimento de enseñanza y se pudo corroborar que las tareas de los talleres permitieron el favorecimiento de las habilidades de reconocimiento, interpretación, transformación y coordinación de representación de las secciones cónicas como lugares geométricos.

Soto (2016) en su trabajo de maestría planteó como objetivo diseñar una propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la función lineal, para fortalecer los procesos de aprendizaje en el pensamiento variacional en los estudiantes del grado undécimo (11) de la Institución Educativa de Jesús, del municipio de Concordia en Colombia. Se reportó en la investigación que el trabajo de intervención a través del proceso de modelación en contextos de la vida cotidiana, de otras ciencias y de las matemáticas mismas, pero en entornos reales (manipulación de lo concreto), contribuyó al desarrollo de nuevas competencias como: identificación de dependencias entre magnitudes que cambian, descripción de tasas de cambio y patrones de variación; logrando que algunos estudiantes modelen con propiedad situaciones de cambio a través de la función lineal.

Entre las perspectivas de investigación el autor considera incorporar y adaptar el proceso de modelación matemática en distintos contextos, a través de una estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje de otros tipos de funciones reales, tales como la función cuadrática, la función exponencial, entre otras, como insumo para la comprensión significativa del concepto de función, los límites, las derivadas y demás temas importantes del Cálculo (Soto, 2016).

La investigación de Toloza (2022) describe la contribución del proceso de modelación matemática de problemas auténticos para el estudio del concepto de integral con mediación tecnológica. La modelación de problemas auténticos como desencadenante en la construcción de modelos de integral y como factor de motivación es un referente de esta investigación respecto al proceso de modelación matemática y su implementación con mediación tecnológica. Como perspectivas de investigación se considera que los problemas auténticos pueden verse como un puente entre lo que tiene sentido en el contexto del estudiante con lo abstracto y las representaciones simbólicas matemáticas.

En el trabajo doctoral realizado por Planchart (2002) se estudian cuatro aspectos clave concernientes al estudio de la función, un primer aspecto trata del proceso didáctico en la adquisición del concepto de función, del papel de la visualización, las representaciones semióticas del objeto matemático y el uso de los recursos tecnológicos para la modelación dinámica del concepto de función. Este autor presenta a la modelación matemática de situaciones problema como alternativa para la adquisición del concepto de función. La simulación de situaciones reales del contexto físico y la modelación de la misma contribuye a la articulación de las diferentes representaciones de la función, por ende, se presenta la modelación matemática y la visualización como alternativa en la adquisición del objeto matemático función (Planchart, 2002).

En el trabajo que realizó Fiallo y Parada (2018) se planteó que la modelación y la simulación de un problema de variación y cambio en un medio digital permite visualizar las variantes e invariantes del problema, posibilita ver qué variables y relaciones entre variables son importantes, ver atributos, ver el comportamiento tendencial de gráficas, realizar aproximaciones a los infinitesimales y el infinito. De igual manera, facilita la conexión entre las distintas representaciones de la función.

El estudio de Caballero (2018) está enfocado en comprender cuál es la noción de variación construida por estudiantes de un bachillerato mexicano, así como entender los mecanismos y elementos que intervienen en su construcción. Este autor señala que para la construcción de la variación es necesario el desarrollo y articulación de dos nociones: la causalidad y la temporización. Por una parte, la variación consiste de la cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno, pero no de cualquier variable sino de aquellas que están relacionadas causalmente. Por otra parte, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas y da cuenta de su evolución en distintos estados del fenómeno, por tanto, se requiere reconocer y construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, a lo que denomina realizar una temporización.

En síntesis, este autor señala que la variación se caracteriza por tres elementos: la medición del cambio, el análisis de la forma en cómo evoluciona esa medida y el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen. Estos elementos se consolidan con base en el desarrollo de prácticas específicas para operar el cambio y la variación con fines predictivos, que se denominan *prácticas variacionales.* Estas prácticas consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de cambio. Las prácticas variacionales se presentan en el marco teórico de esta investigación y sirvió para caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes al enfrentar las tareas propuestas de la secuencia.

En el estudio realizado por Arciniegas (2022) se muestra la construcción de una estrategia metodológica para la inclusión en la clase de matemáticas a través de un estudio de situaciones de variación y cambio. Entre los resultados, se señala que la estrategia la conforman tres elementos clave: la caracterización como punto de partida para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas, las características del aula inclusiva de matemáticas como base para favorecer la inclusión en el aprendizaje y contribuciones a la caracterización del pensamiento variacional a partir de las prácticas variacionales.

Respecto al último elemento clave, se reconoció la caracterización al pensamiento funcional a partir de prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación).

El trabajo realizado por Pineda (2017) consistió en el desarrollo del pensamiento funcional de un grupo de estudiantes entre los 9 y 14 años de edad que se consideran talentosos en matemáticas. Para ello, se conformó un grupo extracurricular cuya dinámica esta normada por un

Marco Institucional, que parte de la posibilidad de potenciar el pensamiento funcional a partir de las relaciones funcionales de recurrencia, correspondencia y covariación. Según Pineda (2017) el pensamiento funcional se entiende:

> como un proceso cognitivo, que centra su potencial en las características necesarias para que un estudiante logre enfrentar una situación funcional, evidenciando acciones específicas como: hallar relaciones entre variables, identificar cómo se construye cada variable, analizar las implicaciones de una variable respecto a la otra, recurrir a diferentes representaciones, describir verbalmente la manera en que la función se va construyendo, predecir el comportamiento de la función en casos posteriores, entre otros. (p. 61)

Estas características no son innatas; por el contrario, se necesita impulsar su adquisición a partir de un contexto adecuado que contribuya a su desarrollo y en la medida de las posibilidades, cada individuo evidencie su evolución. Por lo que, las relaciones funcionales mencionadas previamente permiten identificar la presencia de pensamiento funcional.

Entre los resultados encontrados a partir del análisis de algunas tareas que se implementaron con los estudiantes se destaca la presencia de cuatro categorías emergentes: participar en una situación funcional, centrar la atención en las relaciones definidas entre las variables, registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían y construir una expresión. Como se evidencia estas categorías se relacionan con las prácticas variacionales y la modelación matemática en el estudio de la función.

3. Marco teórico

En el presente apartado se presentan los elementos teóricos que posibilitan la concepción del problema de investigación, los objetivos y consolidación de los resultados. El primero, refiere a la caracterización del pensamiento funcional a partir de las prácticas variacionales; el segundo, al proceso de modelación matemática; y, finalmente, una aproximación al concepto de función.

3.1 Pensamiento funcional

En este apartado se abordan algunos elementos teóricos de los estudios sobre el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) que conforman una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático propios de la matemática del cambio, enfatizando en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico (Caballero, 2018). Estos elementos permiten caracterizar lo que denominamos pensamiento funcional.

En el marco del PyLV, el interés por estudiar el cambio y la variación se deriva de la necesidad de predecir. Dentro de esta corriente la predicción según Caballero (2018):

> consiste en la determinación de un estado desconocido de un fenómeno con base en el estudio sistemático y lógico del cambio y la variación que presentan las variables de esos fenómenos, entendiendo por variable todo aquel elemento que sufre modificaciones al observar un cierto fenómeno, en tanto que un estado consiste en un valor, comportamiento, forma, y, en general, cualidad que tiene el fenómeno en un instante especifico, o bien ante un valor especifico de una variable. (p. 41)

Analíticamente la predicción consiste en determinar el valor futuro de $f(x+h)$ conociendo el valor actual de $f(x)$ y su variación. De modo que x representa el estado actual y

$x + h$ el estado a predecir. Para entender la predicción las investigaciones enmarcadas en el PyLV han centrado la atención en dos aspectos claves de la variación: los órdenes de variación superior y el carácter estable del cambio.

3.1.1 Órdenes de variación superior

Según Caballero (2018) se considera que la variación posee diferentes órdenes, "el primer orden consiste en la medición del incremento en el valor de la variable, el segundo orden en la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación y así sucesivamente para órdenes superiores" (p. 42). Para ejemplificar esto, consideremos las siguientes funciones de variable real $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$ (ver tablas 1, 2 y 3).

Tabla 1

Cálculo de diferencias para la función f(x)=x

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	**Primera diferencia**	**Segunda diferencia**	**Tercera diferencia**
1	1	-	-	-
2	2	1	-	-
3	3	1	0	-
4	4	1	0	-
5	5	1	0	-

Tabla 2

Cálculo de diferencias para la función $g(x) = x^2$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{g(x)}$	**Primera diferencia**	**Segunda diferencia**	**Tercera diferencia**
1	1	-	-	-
2	4	3	-	-
3	9	5	2	-
4	16	7	2	0
5	25	9	2	0

Tabla 3

Cálculo de diferencias para la función $h(x) = x^3$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{h(x)}$	**Primera diferencia**	**Segunda diferencia**	**Tercera diferencia**
1	1	-	-	-
2	8	7	-	-
3	27	19	12	-
4	64	37	18	6
5	125	61	24	6

En las tablas hemos calculado las diferencias de los valores de cada función (primera diferencia), así como las diferencias de las diferencias antes calculadas (segunda diferencia), y así para la tercera diferencia. Los valores de la función f tienen una variación lineal, lo que significa que su primera diferencia es siempre constante. En el caso de la función g, no presenta una variación lineal porque su primera diferencia no es constante, pero la variación de la primera diferencia es lineal porque su segunda diferencia es constante. Análogamente, la función h tiene una variación lineal en su segunda diferencia porque su tercera diferencia es constante. De modo que la función f tiene una variación lineal porque su primera diferencia es constante, la función g tiene una variación cuadrática porque su segunda diferencia es constante y la función h presenta una variación cubica porque su tercera diferencia es constante.

Denominamos el reconocimiento de más de un orden de variación en el mismo fenómeno como órdenes de variación superior, en tanto que la articulación de más de un orden para tratar con la evolución de las variables se le denomina variación sucesiva. Según Caballero (2018) los órdenes de variación se refieren no a la técnica o método para calcularlo (sea esta una resta como en el ejemplo anterior o un cociente), sino al hecho de centrar la atención en los diferentes cambios que tienen los valores de la variable.

3.1.2 Carácter estable del cambio

Una característica de la predicción de fenómenos de variación es que se precisa determinar algún patrón o regularidad en el comportamiento de la variación. Según Caballero (2018) el carácter estable del cambio, de fenómenos de variación continua bajo paradigmas deterministas, “consiste en localizar el orden de variación donde el cambio es constante y no nulo” (p. 47). Cabe señalar que, si bien las regularidades o patrones usualmente se presenta de manera numérica o analítica, también se puede identificar el establecimiento de un carácter estable del cambio de carácter descriptivo. Por ejemplo, cuando se describe una tendencia en el comportamiento de las variables en un intervalo.

3.1.3 Los tres elementos que caracterizan la noción de variación

Con base en lo descrito hasta ahora de la variación en escenarios predictivos (los órdenes de variación, la variación sucesiva y el carácter estable del cambio), Caballero (2018) considera que para entender, comprender y construir la noción de variación no basta con observar el cambio y ser conscientes de él. Se requiere, como se mencionó en los antecedentes, de tres aspectos claves: la medición del cambio, el análisis de la forma en que esa medida evoluciona y el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen.

La medición del cambio consiste en el reconocimiento cuantitativo de aquello que cambia. Se puede dar de dos formas: la primera en una asignación numérica y la segunda consiste en la valoración de la cantidad modificada. Por ejemplo, el último caso consiste en afirmaciones como "aumenta más al principio", "es más grande que", etc.

El análisis de la forma en qué esa medida evoluciona consiste en describir y cuantificar la forma en cómo la medida del cambio se modifica en un intervalo. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ y analizamos los valores de sus imágenes en el intervalo $(0,1)$ es claro que aumenta, incluso ambas aumentan una unidad, pero la forma en que aumentan no es igual. Los incrementos de f son constantes y decimos que su variación es lineal, los de g no y decimos que su variación es cuadrática. Como afirma Caballero (2018) no basta con medir el cambio, es necesario determinar cómo evoluciona: si los incrementos son positivos o negativos, si son constantes, si tienden a estabilizarse cerca de un valor; si no están acotados, si los incrementos progresivos pueden determinarse mediante algún patrón especifico. El análisis anterior junto a los órdenes de variación involucrados, da lugar a la variación sucesiva.

Una precisión necesaria, no siempre es posible determinar cómo evoluciona el cambio, debido a que, en escenarios no deterministas, la naturaleza de los fenómenos no es regida por una única regularidad que explique toda la evolución del cambio, sino que se caracteriza por la localización de tendencias en la variación de las variables para intervalos específicos, pero que pueden evolucionar de manera muy diversa, incluso radical, en función de la naturaleza del fenómeno (Caballero, 2018).

El reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen, se trata de establecer una racionalidad a la evolución del cambio en un intervalo. En fenómenos no deterministas responde a un ajuste del entendimiento de la variación en función de la naturaleza del fenómeno, en tanto que en fenómenos deterministas consiste en el reconocimiento y asociación de comportamientos.

Estos tres elementos atienden aspectos particulares de la variación sucesiva y el carácter estable del cambio. Se considera que estos elementos propuestos son características de la variación, y dentro del PyLV pueden ser desarrolladas por prácticas específicas para atender la variación.

3.1.4 Prácticas variacionales como medio para atender la variación

Los resultados de investigaciones enmarcadas dentro del PyLV indican que los elementos propuestos previamente pueden ser desarrollados a partir de las *prácticas variacionales.* Caballero (2018) afirma que estas consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de cambio. A continuación, se caracterizan las prácticas que sirvieron de categorías de análisis para evidenciar el pensamiento funcional de los participantes de este estudio, se reconoció *la predicción, la comparación, la seriación y la estimación.*

La comparación según Caballero (2018) es:

> la acción de establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio. Consideramos dos formas generales que engloban el uso de esta

práctica; una es por medio de una diferencia y la otra por un cociente, cada una permite obtener información específica según se utiliza. (p. 52)

La seriación según Caballero (2018) consiste en:

analizar estados consecutivos de un fenómeno y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional en el conjunto total o parcial de esos estados. Se trata entonces de organizar y establecer una lógica a un conjunto finito de comparaciones que posibilite determinar el carácter estable del cambio. (p. 56)

La comparación y la seriación permiten un estudio variacional del fenómeno que eventualmente lleva a determinar el carácter estable del cambio. Las siguientes dos prácticas variacionales tienen la característica de ser acciones concretas para determinar el estado futuro del fenómeno estudiado, esto con base en el análisis de la variación que proveen las prácticas previas, de manera que se sintetiza y abstrae la información en modelos predictivos. Ambas estrategias son predicciones del fenómeno, pero se usó la palabra predicción únicamente para la predicción local, mientras para predicciones de naturaleza global, se usó la palabra estimación (Caballero, 2018).

La predicción según Caballero (2018) consiste en, "la acción de anticipar un estado o valor especifico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen. Esta estrategia tiene la característica de proveer, generalmente, el estado o valor futuro de manera numérica" (p. 58).

La estimación según Caballero (2018), "consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo" (p. 59). A diferencia de la predicción que determina valores específicos, la estimación anticipa comportamientos en intervalos concretos.

3.1.5 Articulación entre el PyLV y el Pensamiento Funcional

Los órdenes de variación superior, el carácter estable del cambio y los elementos que caracterizan el estudio de la variación junto a las PV (Prácticas Variacionales) se encarga de la percepción, análisis y representación del cambio a partir de su medida, el comprender cuánto cambia esa medida y cómo cambia, para poder anticipar su comportamiento. La articulación del PyLV con el Pensamiento Funcional reside en la formalización de ese cambio a través de relaciones de dependencia que pueden expresarse mediante un modelo de función.

Se eligen las PV de comparación, seriación, predicción y estimación como el eje teórico principal para exhibir el Pensamiento Funcional de los estudiantes al enfrentar las actividades propuestas en la secuencia de enseñanza porque permiten analizar cómo la interacción con los datos recolectados con la micro:bit junto al enfoque de la modelación matemática facilitan que el estudiante transite de una comprensión intuitiva del cambio a una representación funcional sofisticada; contrario, a una descripción del objeto (función) y a la enseñanza de definiciones.

3.2 Modelación matemática

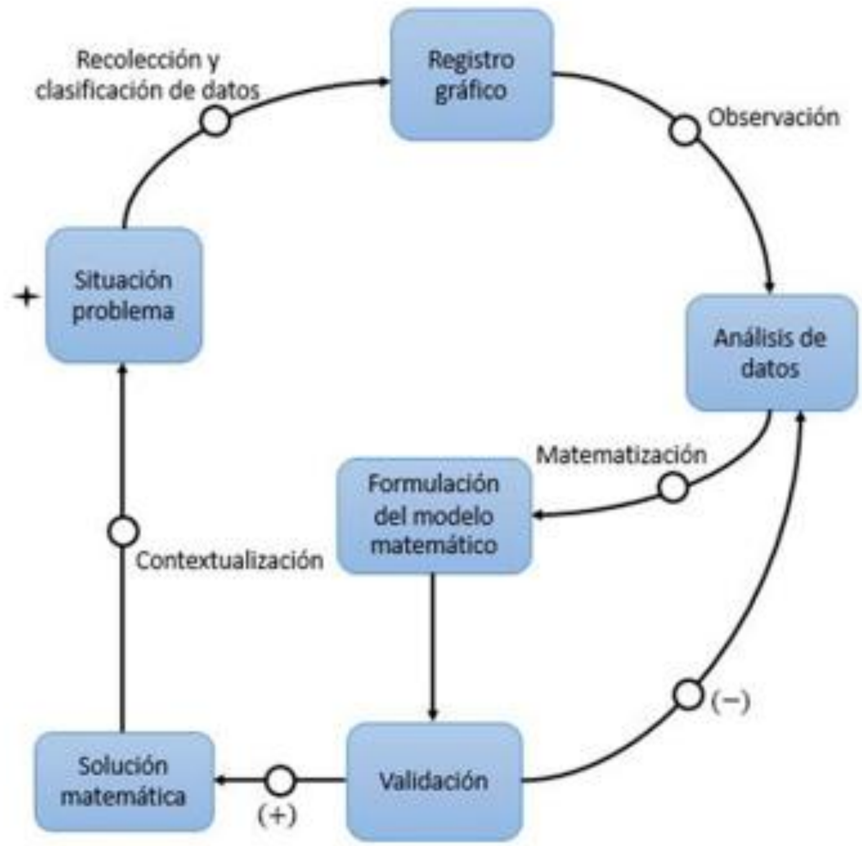
En este apartado se presentan y aclaran algunos términos relacionados al proceso de modelación matemática. El primero corresponde al concepto de *modelo matemático*, el cual es según Villa et al. (2009), "un conjunto de símbolos, representaciones y relaciones matemáticas que intenta explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación" (p. 161).

El proceso de obtención de un modelo matemático a partir de una situación o fenómeno es lo que se conoce como *modelación matemática.* Esta visión se fundamenta en investigaciones en educación matemática que reconocen el proceso de modelación una actividad propia de los matemáticos aplicados y de otros profesionales como una oportunidad para resolver problemas reales en el aula y desarrollar conocimiento matemático en los estudiantes (Villa-Ochoa et al., 2022).

En este sentido, se ha asumido la modelación como un conjunto de fases de un fenómeno, y a partir de ello, se han construido diagramas que presentan ciclos de modelación y que buscan describir la actividad del matemático aplicado con el fin de promover su integración en el aula (Villa-Ochoa et al., 2022). Entre los diagramas más recurrentes en la literatura acerca del proceso de modelación matemática, encontramos el modelo del ciclo de modelación (figura 1) propuesto por Berrio et al., (2021). En seguida, se describe en qué consiste cada una de estas fases según los autores de este esquema.

Figura 1

Esquema del ciclo de modelación matemática



Nota. Tomado de "Desarrollo del proceso de modelación matemática en licenciados en formación" (Berrio et al., 2021, p.86).

La primera fase, denominada situación problema, emerge del contexto o entorno concreto de la realidad, que puede representarse y simularse de diferentes maneras. En esta etapa se desarrollan procesos como la interpretación del contexto o situación, lo que involucra el reconocimiento de las variables implicadas en la situación problema, así como la comprensión de sus relaciones, condiciones y posibles restricciones que afectan su comportamiento dentro del fenómeno observado.

Esta fase conduce al proceso de experimentación, recolección y clasificación de los datos. La recolección de datos consiste en registrar mediciones y observaciones que ayudan a determinar qué aspectos son relevantes y cómo pueden ser representados matemáticamente. En esta investigación se usó la tarjeta programable *micro:bit* junto con dos sensores para medir magnitudes como temperatura, tiempo, presión y altura. Este dispositivo permitió la recolección de los datos, al tiempo que los representa de manera gráfica y/o tabular para ver en tiempo real el comportamiento del fenómeno.

La segunda fase consiste en representar los datos gráficamente para facilitar su análisis. Utilizando herramientas como diagramas de dispersión, se busca visualizar las relaciones entre las variables involucradas y obtener una interpretación geométrica del problema. Esta interpretación se apoya en un proceso de observación, en el que se vinculan los datos con posibles funciones matemáticas, con el propósito de formular hipótesis sobre cuál de ellas representa mejor dichos datos y el comportamiento de la situación experimentada.

La tercera fase consiste en el análisis de datos, en la que se procede a identificar una relación matemática entre las variables del problema, y así traducir tal situación del lenguaje común al lenguaje matemático, es decir, realizar la matematización del problema. Por ello, se espera que el estudiante asocie las variables y las representaciones gráficas con constantes o parámetros.

La cuarta fase consiste en la formulación del modelo matemático, donde se determina una expresión algebraica para la relación de interdependencia entre las variables. Una precisión, la expresión matemática o el modelo matemático no se considera únicamente el modelo, también el modelo de la situación y los registros tabular y gráfico formulados previamente hacen parte del modelo. Por tanto, el estudiante debe establecer relaciones entre estas representaciones y como modelo de una misma situación.

En la quinta fase, denominada fase de validación, se compara el modelo matemático con los datos reales y el comportamiento de las variables analizadas previamente. Si el modelo no refleja adecuadamente la realidad (validación negativa), es necesario revisar los datos experimentales o construir un nuevo modelo. En cambio, si el modelo logra aproximarse al comportamiento real (validación positiva), se considera útil para predecir el fenómeno en otros casos similares. Esta fase permite generar discusión sobre la efectividad del modelo que conduce a un refinamiento del mismo.

Finalmente, en la sexta fase, luego de validar positivamente el modelo, se interpreta desde un enfoque matemático. Posteriormente, el modelo se contextualiza dentro de la situación problema inicial y se le da uso para establecer predicciones futuras y dar solución a otros interrogantes dentro de la situación.

Cabe señalar, que el principal lente teórico para analizar los datos y alcanzar el objetivo propuesto en la investigación fueron las prácticas variacionales de Caballero (2018). Sin embargo, el sistema de referencia variacional para el diseño de situaciones de predicción propuesto por este autor que se vinculan con las PV no se usó para el diseño de la secuencia debido a la inclinación en el enfoque de modelación matemática propuesto por Berrio et al., (2021). El análisis de los datos permitió encontrar una estrecha relación entre las prácticas variacionales y el ciclo de modelación matemática de Berrio et al. (2021); por lo que también se presentan resultados al respecto.

3.3 Concepto de función

En el trabajo realizado por Fiallo y Parada (2018) se plantean algunas concepciones sobre el concepto de función y sus elementos que se asumen en la presente investigación. En primer lugar, el concepto de variable, este concepto se simboliza con la imagen abstracta de una magnitud que varía dada su interdependencia con otra. Lo que implica que los estudiantes entiendan que la variable no es simplemente una letra que representa un número o valor desconocido de una ecuación, sino entender la variable como una magnitud mensurable que cambia cuando las condiciones en que ocurren también lo hacen. De allí, surge el concepto de función como la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra, es decir, la función es la generalización de la interdependencia entre magnitudes.

4. Método.

Se presenta la metodología adoptada para el desarrollo de la investigación, detallando el enfoque, el tipo de estudio y los procedimientos empleados en el diseño, implementación y análisis de la secuencia. Se describe la población, el contexto educativo, las tareas propuestas y los distintos caminos de solución previstos, junto con los instrumentos utilizados para la recolección de datos y los criterios de análisis que permitieron interpretar los resultados.

La presente investigación se enmarca en el paradigma de investigación de diseño, y se desarrolla específicamente bajo la metodología de experimentos de enseñanza (Camargo, 2021). Esta metodología implica el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza estructurada con el propósito de poner a prueba una conjetura sobre un aprendizaje específico. En coherencia con ello, el objetivo de este trabajo es diseñar, implementar y analizar una secuencia de enseñanza con la mediación de micro:bit para la modelación de problemas de variación, con el objetivo de desarrollar pensamiento funcional, dirigida a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

La selección del recurso micro:bit y los contextos de estudio se fundamentó en la necesidad de integrar la toma de datos reales en el aula, superando el uso tradicional de fenómenos deterministas y datos preestablecidos. Muchos diseños consideran relevante la toma de datos, pero pocas veces se evidencia el registro de datos real dentro del aula. Esta elección tomó como insumo principal el estudio dinámico del cambio y la variación, buscando potenciar la simulación y representación de objetos matemáticos mediante la experimentación.

En cuanto al diseño de los instrumentos, se identificó que los sensores predeterminados de la tarjeta micro:bit presentaban limitaciones de precisión al registrar únicamente números enteros.

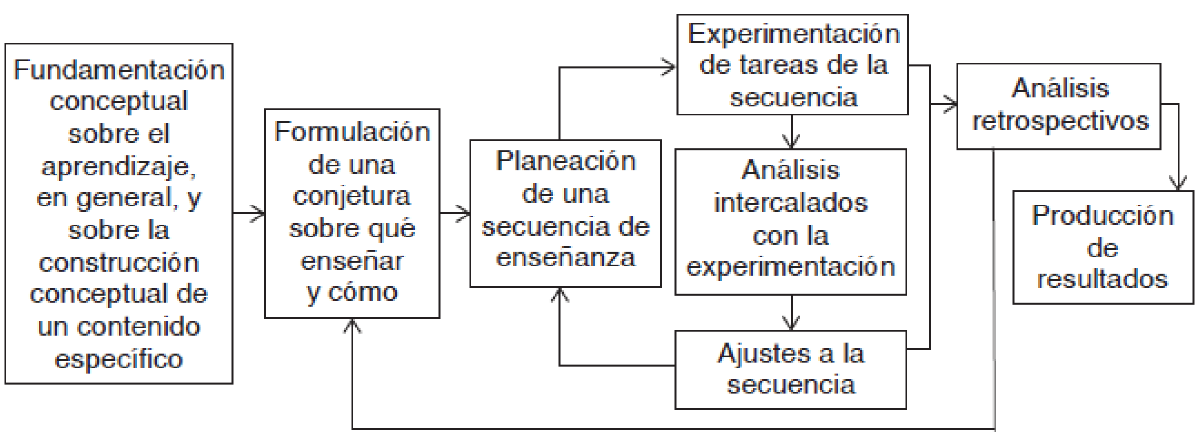
Para optimizar la recolección de datos y asegurar que la muestra fuera representativa para procesos de tratamiento de datos (como la regresión de dos variables), se integraron sensores externos de mayor sensibilidad, capaces de registrar al menos una cifra decimal. Esta configuración técnica fue determinante para la selección de los fenómenos de estudio, permitiendo la medición precisa de magnitudes como la temperatura de líquidos, la presión atmosférica y la altitud, lo cual definió la estructura final de las actividades propuestas.

Una vez se avanzó en el diseño de la secuencia, se aprovechó el curso de Didáctica del Cálculo (2025-2), del cual mi director era titular para la implementación. Esta consideración respondió principalmente a cuestiones de tiempo y a qué tramitar un espacio con estudiantes ajenos a la Universidad Industrial de Santander fue conflictivo en otros trabajos que mi director estaba asesorando.

A continuación, se presenta un esquema (figura 2) que resume el plan de ejecución para la estrategia de experimento de enseñanza.

Figura 2

Esquema experimento de enseñanza



Nota. Tomado de "Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.89).

Según Molina et al. (2011), los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular la hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los estudiantes, en relación con un contenido específico, se entiende este aprendizaje como el resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador/docente. Por ende, la conjetura o hipótesis del experimento es la guía de la investigación. El resultado de esta etapa guía las demás. En el presente capítulo se formulan las conjeturas del experimento, las cuales son susceptibles de ajuste a lo largo de la planeación y la experimentación de la secuencia, pues el objetivo no es simplemente validarlas, sino reelaborarlas a la luz de los resultados obtenidos.

Se realizaron modificaciones a la secuencia mediante sucesivas iteraciones entre la fase experimental, el análisis y los ajustes, consolidando así un proceso de refinamiento progresivo (Camargo, 2021).

Una vez completada la fase iterativa, se dio inicio al análisis retrospectivo para estudiar en profundidad los datos obtenidos durante todo el proceso, y finalmente se procedió a la producción de resultados, donde se exponen los hallazgos y conclusiones de la investigación.

A continuación, se presenta la planeación del experimento de enseñanza correspondiente al desarrollo de este trabajo.

4.1 Fundamentación conceptual

En el capítulo dos se hizo una revisión de la literatura sobre la enseñanza y aprendizaje de núcleos conceptuales del Cálculo. Se analizó el tratamiento que se da al estudio de la función, los experimentos de enseñanza relacionados con este objeto de estudio, la implementación de la modelación matemática y una aproximación al pensamiento funcional a partir de las prácticas variacionales. Este análisis permitió delimitar la problemática planteada y diseñar una secuencia orientada a la modelación de problemas de variación mediada por micro:bit para evidenciar el pensamiento funcional de los estudiantes.

4.2 Formulación de una conjetura sobre el qué enseñar y cómo

Sobre el *qué enseñar* se plantea como conjetura inicial que la modelación de un problema de variación y cambio en un medio digital permite visualizar las variantes e invariantes del problema, posibilita ver qué variables y relaciones entre variables son importantes, ver atributos, ver el comportamiento tendencial de gráficas, realizar aproximaciones a los infinitesimales y el infinito. De igual manera, facilita la conexión entre las distintas representaciones de la función. Esto lleva a que los estudiantes entiendan que la variable es una magnitud mensurable que cambia cuando las condiciones en que ocurren cambian. De allí, surge el concepto de función como la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra, es decir, la función es la generalización de la interdependencia entre magnitudes (Fiallo y Parada, 2018).

Respecto al *cómo enseñar*, planteamos como conjetura inicial que:

i) "El estudio de las funciones debe empezar por la toma y el análisis de datos reales para la construcción de modelos matemáticos, que coadyuven a la comprensión de los diferentes significados de la función y sus relaciones funcionales"

ii) "La toma de datos reales y la visualización gráfica de fenómenos físicos con micro:bit y GeoGebra, coadyuva de manera significativa a la construcción de modelos matemáticos y al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios".

4.3 Planeación de la secuencia de enseñanza

El diseño experimental de la secuencia de enseñanza se estructuró por talleres individuales que se relacionan con el estudio de fenómenos de cambio para la construcción de modelos de función mediante la modelación de problemas auténticos. En este trabajo, la autenticidad de los problemas es atribuida a los contextos elegidos (fenómenos de cambio) que resultan significativos y cercanos a la realidad de los estudiantes, así como en el uso de la micro:bit como recurso y mediador en la toma de datos. La secuencia se realizó modificando reiterativamente el diseño inicial de acuerdo a las necesidades observadas en el aula. En esta investigación se realizó una prueba piloto con profesores de matemáticas en formación de la Universidad Industrial de Santander para realizar los respectivos cambios al diseño de actividades. Es necesario mencionar que estas modificaciones se discutieron en conjunto, el profesor/investigador y el director de la investigación, durante las reuniones programadas para hacer seguimiento a este trabajo de investigación.

4.3.1 Taller uno: enfriamiento de una bebida

Se busca que los estudiantes mediante la observación y registro de mediciones de algunas de las magnitudes involucradas en el fenómeno de cambio construyan un modelo matemático, en este caso, modelos de función en sus distintos registros (verbal, grafico, tabular, analítico, etc.) como representación de la variación. El registro de las mediciones con la micro:bit permite identificar las variantes e invariantes del fenómeno que junto a el tratamiento de los datos en GeoGebra y la orientación de las actividades busca refinar los modelos que mejor describen y predicen la situación.

El núcleo del taller es el problema inicial y la observación de la medición de la temperatura de una bebida caliente cada dos segundos, este punto de partida marca el camino para que paulatinamente el estudiante con orientaciones verbales y escritas movilice las prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación) propuestas por Caballero (2018) como muestra del pensamiento funcional de los estudiantes cuando se enfrentan ante una situación o fenómeno de cambio.

A continuación, se presenta la estructura del taller a manera de tabla en la que se consideran las fases propuestas por Fiallo y Parada (2018), las actividades y el objetivo de las mismas. (Ver en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/gqtgpmpx)

Tabla 4

Taller 1: Enfriamiento de una bebida caliente

Fase	Actividad	Propósito
Información y exploración libre	Se presenta a los estudiantes el problema inicial: *Carolina y sus amigos reciben una taza de café recién hecho a una temperatura de 65°C ¿Cuál es la temperatura óptima para beber el café sin riesgo de quemarse?* ***Explica tu respuesta.*** *¿Cuántos minutos (t) deben esperar para tomarse el café a la temperatura óptima?* ***Justifica tu respuesta.***	El pensamiento funcional se evidencia cuando el estudiante enfrenta situaciones que requieren hallar relaciones entre variables, identificar cómo se construye cada variable, recurrir a diferentes representaciones, predecir comportamientos, entre otros. El problema inicial moviliza estas acciones y la práctica variacional de predicción al preguntar por el tiempo exacto que debe tardar para que el café alcance la temperatura óptima. Así mismo, el problema fomenta la construcción de un modelo matemático.
	Observe cómo varía la temperatura del vaso de café a medida que el tiempo	El propósito de esta pregunta es que el estudiante describa cualitativamente el

	transcurre y describa lo sucedido. Los estudiantes observan el fenómeno de enfriamiento de un vaso de café conforme transcurre el tiempo haciendo uso de la micro:bit. 1. *En la función visualizada, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?* ***¿Por qué?*** 2. *¿Entre cuáles valores se encuentra la variable independiente? ¿Entre cuáles valores se encuentra la variable dependiente?* ***¿Por qué?*** 3. *¿Cuál es el dominio y recorrido de la función?* ***Justifica tu respuesta.*** 4. *¿Qué temperatura tiene el café al cabo de 2 minutos, 5 minutos, 8 minutos y 10 minutos?* ***Justifica tu respuesta.*** 5. *¿Qué ocurre con la variación de la temperatura del café conforme pasa el tiempo?* ***Justifica tu respuesta.***	comportamiento de la función de enfriamiento, identificando la tendencia general de la temperatura (decrecimiento exponencial) y su relación con el tiempo. Los ítems 1, 2 y 3 permite el estudio de elementos clave de la función tales cómo identificar las variables involucradas en el fenómeno, los valores que pueden tomar y relacionarlo con el dominio y recorrido de la función visualizada. El ítem 4 permite evidenciar la comparación y seriación de diferentes momentos del fenómeno, es decir, encontrar un patrón en la temperatura en una secuencia de valores (2, 5, 8 y 10 minutos). Para el ítem 4 es necesario que el profesor centre la atención en la transformación que sufren los datos de la variable tiempo cada vez que cambian de formato para poder identificar la temperatura en cada instante de tiempo solicitado. Los ítems 5 y 6 indagan por la relación entre las variables y por la comprensión de cómo varían los valores de la variable dependiente en función de cómo varían los valores de la variable independiente.

	6. *¿A qué valor tiende la temperatura conforme pasa el tiempo?* ***¿Por qué?***	En estos últimos ítems, se promueve la práctica variacional de estimación porque consiste en anticipar tendencias del fenómeno en un intervalo de tiempo.
Tiempo: 60 minutos.		
Socialización	Puesta en común de los resultados obtenidos.	
Tiempo: 30 minutos.		
Explicación	*¿Cómo encontrarías una expresión algebraica que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida?* ***Explica tu respuesta.*** *Realiza el Análisis de Regresión de dos variables. (Video)* Se presenta un video en Youtube: https://youtu.be/q33MeqOvhXs que muestra cómo realizar el análisis de regresión de dos variables en GeoGebra con los datos de las mediciones de temperatura.	Esta pregunta permite enfrentar a los estudiantes con la idea de que todas las funciones están sujetas a una representación algebraica, es decir, la función existe sin importar si hay una expresión algebraica que describa y prediga el fenómeno. Estas actividades también orientan a los estudiantes en la construcción de un modelo matemático del fenómeno.
	¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? ***Justifica tu elección.*** *¿Cuál función permite hacer una mejor estimación del tiempo en qué tarda el café en alcanzar su temperatura óptima?* ***¿Por qué?***	El primer ítem indaga por una expresión matemática que modele cómo varía la temperatura de la bebida en función de cómo varía el tiempo. En el último ítem se evidencia la práctica variacional de comparación y estimación al preguntar por los valores de los datos teóricos y los datos experimentales. Asimismo,

Tiempo: 50 minutos.		las preguntas van orientadas a validar el modelo que describe y predice el enfriamiento de una bebida.

Nota. Planeación de uno de los talleres de la secuencia de enseñanza.

4.3.2 Taller dos: presión y altura

De manera similar al taller anterior, las actividades diseñadas buscan favorecer el desarrollo del pensamiento funcional mediante el uso de la micro: bit para el registro y visualización de mediciones de la presión atmosférica y la altura respecto al nivel del mar. De manera general, mediante la observación del registro de la presión atmosférica y la altura en un edificio de cinco plantas se construye un modelo matemático del fenómeno. Las orientaciones verbales y escritas permiten que, paulatinamente, se movilicen las prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación) propuestas por Caballero (2018).

A continuación, se presenta la estructura del taller a manera de tabla en la que se consideran las fases propuestas por Fiallo y Parada (2018), las actividades y el objetivo de las mismas. (Ver en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/vpq3r6gz)

Tabla 5

Taller 2: Presión y altura

Fase	Actividad	Propósito
Información y exploración libre	Se presenta a los estudiantes el problema inicial que consiste en observar el fenómeno del cambio en la presión debido a la altura mediante la micro: bit. *Observe cómo varía la presión a medida que se desplaza por el edificio y describa lo sucedido.*	Esta actividad moviliza el pensamiento funcional de los estudiantes en el sentido que se les presenta una situación funcional; es decir, observan el fenómeno de cómo cambia la presión atmosférica conforme cambia la altura para describir con sus palabras lo que sucede. Los ítems 1 y 2 permiten

	1. *En la función visualizada, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?* ***¿Por qué?*** 2. *¿Entre cuáles valores se encuentra la variable independiente? ¿Entre cuáles valores se encuentra la variable dependiente?* ***¿Por qué?*** 3. *¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan?* ***Explica tu respuesta.*** 4. *¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente disminuyen?* ***Explica tu respuesta.*** 5. *¿Existen valores de la variable independiente a los cuales les corresponde más de un valor?* ***Explica tu respuesta.*** 6. *¿Cuál es el dominio y recorrido de la función?* ***Justifica tu respuesta***	estudiar elementos de la función tales como la identificación de las magnitudes variables del fenómeno y el rango de valores en los que varían éstas. Los ítems 3 y 4 activan la práctica variacional de comparación y seriación al centrar la atención en los valores de la variable dependiente en diferente momentos o estados del fenómeno. Asimismo, estas tareas centran la atención en la variación dentro de una secuencia de valores y en la comprensión de cómo varían los valores de la variable dependiente en función de cómo varía los valores de la variable independiente. Los ítems 5 y 6 centran la atención entre los pares correspondientes de la variable. Asimismo, se busca comprender elementos claves de la función como es el dominio y el recorrido. Con esta actividad se espera que los estudiantes identifiquen la presión atmosférica con la variable dependiente y la altura con la variable independiente. A partir de lo observado en el fenómeno, que reconozcan cómo la presión disminuye conforme la altura aumenta, de forma equivalente, la presión aumenta conforme la altura disminuye.

Tiempo: 40 minutos.		
Socialización **Tiempo:** 20 minutos.	Puesta en común de los resultados obtenidos.	
Explicación y orientación dirigida.	1. *¿Cuál es la presión atmosférica en el primer nivel del edificio, en el segundo nivel, en el tercer nivel, en el cuarto nivel y en el quinto nivel?* ***Justifica tu respuesta.*** 2. *¿A qué valor tiende la presión atmosférica conforme aumenta la altura?* ***¿Por qué?*** 3. *¿A qué valor tiende la presión atmosférica conforme disminuye la altura?* ***¿Por qué?*** 4. *¿Cuál se esperaría sea la altura que corresponde a una presión de 89875 Pa, a 84556 Pa, a 79495 Pa y a 70108 Pa?* ***Justifica tu respuesta.*** 5. *En una hoja de trabajo, esboce el tipo de gráfica que describe la relación de la presión atmosférica y la altura.* Se les muestra el sitio web: https://es.imgbb.com/ donde suben la imagen de la gráfica y se genera un link que usan como respuesta para tomar evidencia de esta tarea.	El ítem 1 moviliza las prácticas de comparación y seriación de distintos momentos o estados del fenómeno al centrar la atención en cómo cambian los valores de la presión conforme se desplaza por un edificio de cinco plantas. Los ítems 2 y 3 centran la atención en comprender cómo cambian los valores de la presión en función de cómo cambian los valores de la altura. Asimismo, estas tareas ponen en evidencia la práctica variacional de estimación al preguntar por el comportamiento o tendencia del fenómeno en un intervalo de altura. El ítem 4 indaga por los valores de la altura dada la presión. Esto a partir de la acción de comparación y seriación de los valores de la presión. Asimismo, el indagar por presiones de alturas que no están al alcance del sensor de la micro:bit promueve la construcción de un modelo matemático que describa el fenómeno. El último ítem permite coordinar otros tipos de representación de la función

		al mismo tiempo que la práctica de estimación de los valores del fenómeno en un intervalo de altura, cero metros (nivel del mar) hasta los 8000 metros aproximadamente.
Tiempo: 30 minutos.		
	¿Cuál sería una manera de conocer la presión atmosférica dada cualquier altura? ***Explica tu respuesta.*** Se presenta un video en Youtube: https://youtu.be/q33MeqOvhXs que muestra cómo realizar el Análisis de Regresión de dos variables con GeoGebra. 1. *Compare la gráfica de los datos y algunos modelos de regresión con la gráfica que esbozo. ¿En qué se diferencian?* ***Justifica tu respuesta.***	Esta tarea busca centrar la atención en la construcción de un modelo matemático de la situación. En el ítem 1 los estudiantes comparan la gráfica de los datos en GeoGebra y algunos modelos de regresión con el gráfico que esbozaron en una tarea anterior. Esto permite la validación del modelo (gráfico) que esbozó el estudiante en la hoja de trabajo con el modelo generado en GeoGebra con los datos de la micro: bit. Con los diferentes tipos de registro de la función que se muestra, se espera que permita captar mejor la variación del fenómeno planteado.
	1. *¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno?* ***Justifica tu elección.*** 2. *¿A qué valor tiende la función de ajuste que escogiste cuando la altura tiende al punto más alto?* ***Justifica tu respuesta***. 3. *¿Cuál es el dominio y*	Esta actividad busca la construcción de un modelo matemático de la situación a partir de los datos experimentales y validar los diferentes modelos que se construyeron de la situación. En el ítem 1 los estudiantes seleccionan y justifican el modelo que mejor se ajusta a los datos. Esta actividad

	recorrido de la función? ***Justifica tu respuesta.***	promueve la comparación de los diferentes modelos que se ajustan a la situación y determinar cuál se ajusta mejor a los datos recolectados. El docente debe aprovechar este espacio de la clase para discutir y validar los distintos modelos del fenómeno. En el ítem 2 se moviliza la estimación de comportamientos tendenciales de la situación en un intervalo, en este caso de altura. Los estudiantes deben comprender la variación de la presión en función del aumento de la altura. El ítem 3 centra la atención en elementos de la función tales como el dominio y el recorrido.
Tiempo: 30 minutos.		
Socialización	Discusión de las hipótesis planteadas y los resultados obtenidos.	
Tiempo: 20 minutos.		

Nota. Planeación de uno de los talleres de la secuencia de enseñanza

4.4 Implementación de la secuencia de enseñanza

Para lograr la versión final de la secuencia, se realizó un pilotaje, la primera versión se experimentó el 08 de septiembre de 2025 con 20 estudiantes del curso de Tecnologías y Educación 2025-2 de la UIS y la versión final, en septiembre y octubre de 2025, con 22 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas 2025-2 de la UIS.

En la ***primera versión*** el taller que se implementó con los estudiantes de la prueba piloto estaba previsto para dos horas y veinte minutos y la sesión de clase era de tres horas aproximadamente; sin embargo, hubo estudiantes que no lograron resolver todas las actividades debido a contratiempos en el registro de los datos; esto ocurrió toda vez que se requería hacer una conexión vía bluetooth entre la micro:bit y el ordenador del salón de clase que no pudo establecerse por la falta de permisos de administrador. Se sugirió para próximas intervenciones usar un ordenador personal y la plataforma zoom para transmitir la toma de datos y evitar contratiempos.

Figura 3

Implementación primera versión de la secuencia de enseñanza

El taller enfriamiento de una bebida sufrió algunos cambios producto del pilotaje. A continuación, se describen a manera de comparación las modificaciones realizadas.

Tabla 6

Ajustes al taller enfriamiento de una bebida

Secuencia inicial	Secuencia modificada

Con el ánimo de usar el enfoque de la modelación matemática se plantean unas preguntas que presentan la situación problema al estudiante. Estas son: • Imagina que visitas una cafetería y pides una taza de café, pero te lo sirven recién hecho a una temperatura de 85°C. ¿Cuál consideras que debe ser una temperatura óptima para beberlo sin riesgo de quemarte? **Explica tu respuesta.** • ¿Cuántos minutos (t) debes esperar antes de poder tomar el café a la temperatura óptima? **Justifica tu respuesta.**	Al implementar la secuencia inicial a los estudiantes que participaron del pilotaje y consultar con el director del proyecto se decide modificar el valor de la temperatura a la cual se encuentra la taza de café porque no era un valor cercano al que realmente se encontraba el café cuando se midió su temperatura y confundía a los estudiantes que usaban esta cantidad para explicar sus respuestas. También se modifica parte de la situación, las cuestiones planteadas quedan de la siguiente manera: • Carolina y sus amigos reciben una taza de café recién hecho a una temperatura de 65°C ¿Cuál es la temperatura óptima para beber el café sin riesgo de quemarse? **Explica tu respuesta.** • ¿Cuántos minutos (t) deben esperar para tomarse el café a la temperatura óptima? **Justifica tu respuesta.**
En la actividad dos se abordó la parte experimental (registro de datos) y se presentaron algunas preguntas orientadoras	En la planeación de la secuencia el propósito de esta actividad es movilizar la comparación y seriación de diferentes momentos del

para valorar los resultados conseguidos en la fase de exploración. Entre las cuales esta: • ¿Qué temperatura tiene el café al cabo de 2 minutos, 5 minutos, 8 minutos y 10 minutos? **Justifica tu respuesta.**	fenómeno, es decir, encontrar un patrón en la temperatura en una secuencia de valores (2, 5, 8 y 10 minutos). Sin embargo, en la implementación muchos estudiantes se notaron confundidos ya que no sabían cómo identificar los valores del tiempo en los datos recolectados porque cuando se descargaban sufrían modificaciones en el formato. Por tanto, una modificación que se hizo fue a manera de orientación por parte del docente: Para esta tarea es necesario que el profesor centre la atención en la transformación que sufren los datos de la variable tiempo cada vez que cambian de formato para poder identificar la temperatura en cada instante de tiempo solicitado.
En la actividad tres la cual hace parte de la fase de explicación se les presenta a los estudiantes unas preguntas orientadoras y se sugiere realizar un procedimiento. Estas son: • ¿Cómo encontrarías una expresión algebraica que modele el fenómeno de	En discusión con los participantes del pilotaje y el director del proyecto se optó por modificar el procedimiento de la regresión. En la secuencia inicial el docente explica cómo hacer la regresión de dos variables en GeoGebra con los datos recolectados, pero los estudiantes iban a ritmos muy diferentes por lo que muchos

enfriamiento de la bebida? **Explica tu respuesta.** • Oprimir el botón 'Data Download' Para descargar los datos de la tabla, realiza el Análisis de Regresión de dos Variables.	se quedaron en algunos pasos lo que demando mayor tiempo del previsto. Por lo tanto, se modifica la secuencia y se ubica un video explicativo donde se muestra cómo hacer este procedimiento, de la siguiente manera: • Realiza el Análisis de Regresión de dos variables. (Video) Se presenta un video en Youtube: https://youtu.be/q33MeqOvhXs que muestra cómo realizar el análisis de regresión de dos variables en GeoGebra con los datos de las mediciones de temperatura.

Nota. Ajustes a la secuencia de enseñanza producto de la implementación del pilotaje.

En la ***versión final*** los objetivos de las actividades en la secuencia inicial se mantuvieron, sin embargo, al analizar este producto se realizaron modificaciones en aras de mejorar y potenciar el pensamiento funcional. Ahora bien, se detallará los ajustes realizados a la secuencia final según el avance gradual de los estudiantes. Se realizaron ajustes sobre la fase de exploración libre, orientaciones en la toma de datos.

Como se mencionó en el apartado 4.3.1 en esta fase una de las tareas corresponde a observar cómo varía la temperatura del vaso de café a medida que el tiempo transcurre y describir lo sucedido. Para ello, el profesor/investigador preparó los instrumentos de medición (ordenador, micro: bit, sonda digital, taza de café), pero descuidó el registro de datos que corresponde al momento donde se sumerge la sonda digital en la taza de café y se muestra en pantalla el registro grafico de temperatura contra tiempo y el registro tabular de la variable tiempo y temperatura. El descuido consistió en que la sonda empieza a registrar las medidas sin estar sumergida en la taza de café lo que provocó que hiciera varias lecturas de la temperatura del entorno.

Esto generó ruido entre los estudiantes, se pensó en que era un valor predeterminado de la sonda, pero en realidad era una lectura aproximada de la temperatura del aula de clase y utilizaron este valor como temperatura ambiente. Cabe señalar, que estaba previsto que la sonda necesitaría pocas lecturas para reconocer la temperatura máxima de la bebida, pero tardó cerca de un minuto y las mediciones eran cada dos segundos. Esta cantidad de mediciones junto a los demás datos dificultó la tarea de aquellos estudiantes que buscaban una única expresión algebraica como la función de ajuste que mejor representa el fenómeno; otros, en cambio, consideraron dos expresiones al elegir la función de ajuste como una función por partes.

Por tanto, se sugiere para la secuencia final una orientación hacia el docente respecto a la toma de datos: ser muy cuidadoso en el registro de los datos. Sumergir la sonda en la taza de café antes de iniciar las mediciones. Aprovechar los datos iniciales para discutir sobre la precisión de los instrumentos de medición y derivado de ello la exactitud de los diferentes modelos para describir y predecir la temperatura de una taza de café en las condiciones dadas.

Respecto a ambos talleres, una de las tareas incluía hacer la regresión de dos variables en GeoGebra usando los datos recolectados con la micro: bit, en un principio se sugirió que el profesor/investigador realizara la regresión y los estudiantes le seguían, pero como se confirmó en la prueba piloto esto genera contratiempos, entonces, se optó por agregar un video explicativo de la regresión con los datos del taller uno. En la lección de GeoGebra donde se indicaban las tareas correspondientes al taller dos, en la actividad final se ubicó mal una tarea: primero "¿A qué valor tiende la función de ajuste que escogiste cuando la altura tiende al punto más alto? **Justifica tu**

respuesta." En lugar de "¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? **Justifica tu elección**". Esto generó confusión entre los estudiantes porque no reconocían cuál era la función de ajuste.

A pesar de que ambas tareas se presentan en la misma actividad es necesario hacer el intercambio para no confundir a los estudiantes. En la sección 4.3.2 donde se muestra la secuencia con los talleres a manera de tabla si está en el orden correcto, el error se presentó en el diseño del libro de GeoGebra.

Figura 4

Implementación de la versión final de la secuencia

La ***versión final*** de la secuencia se implementó con 22 estudiantes del curso Didáctica del Cálculo durante el segundo semestre de 2025, hacia finales del mes de septiembre e inicios del mes de octubre. Esta implementación, a lo largo de tres sesiones, en un total de 7 horas.

4.5 Recolección de datos

Se tuvieron en cuenta diferentes recursos que permiten la recolección de datos, como: los registros de videograbaciones con sus respectivas transcripciones, los registros de la actividad matemática de los estudiantes en GeoGebra, las hojas de trabajo y el registro de las planeaciones de clase. En este sentido, para cada uno de los instrumentos, se detalla información acerca de la definición y la importancia de tenerlos en cuenta en la presente investigación.

4.5.1 Videograbaciones de clase.

Son grabaciones que se realizaron con cámaras de teléfonos celulares durante las sesiones de clase con los estudiantes. Estas videograbaciones junto a sus transcripciones, facilitaron la identificación de acciones vinculadas al desarrollo del pensamiento funcional. Asimismo, permitieron analizar la construcción, comprensión y discusión de modelos matemáticos para encontrar una solución al problema planteado, así como la argumentación oral, las participaciones en los momentos de discusión entre estudiantes y docentes, entre otros. Todo ello, tiene como enfoque principal el objetivo de la investigación.

4.5.2 Registro de actividades en GeoGebra y material escrito

Este recurso hace referencia a los resultados obtenidos de las actividades propuestas a los estudiantes tanto en el libro de GeoGebra como en lo registrado en sus hojas de trabajo. Esto permitió dar cuenta de las acciones que movilizan los estudiantes cuando enfrentan una situación funcional bajo el enfoque de la modelación matemática.

4.5.3 Registro de las planeaciones de clase

Hace referencia a las secuencias de actividades previstas para la ejecución de la propuesta de investigación. Al estar en la fase de análisis de los resultados, este registro permitió dar cuenta hasta qué punto se lograron las actividades y que modificaciones se realizaron con respecto a lo planteado lo que se considera un aspecto fundamental en la investigación.

4.6 Producción de resultados

Finalmente, para responder a los objetivos, se describieron, analizaron y categorizaron los registros de video, notas de observación y respuestas de los estudiantes para reportar información sobre: Las prácticas variacionales emergentes en la implementación; errores y dificultades; las contribuciones de la modelación matemática al estudio de la función.

5. Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de la versión final de la secuencia de enseñanza en el Aula Virtual de GeoGebra y aplicada a 22 estudiantes del curso *Didáctica del Cálculo* del segundo semestre académico de 2025 en la Universidad Industrial de Santander. Se exponen las prácticas variacionales movilizadas y las contribuciones de la modelación matemática a lo largo de las diferentes tareas que conforman la secuencia. En la sección 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran las prácticas variacionales que movilizaron los estudiantes al realizar las tareas correspondientes a los talleres de la secuencia de enseñanza. Finalmente, en la sección 5.5 se presentan las contribuciones de la modelación matemática al desarrollo del pensamiento funcional.

5.1 Práctica variacional de comparación

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a la tarea 3 del taller de enfriamiento y las tareas 1, 3 y 4 del taller de presión y altura, la cual constituyen el núcleo inicial del trabajo con los datos. El análisis integra una dimensión: la práctica de comparación.

- **Práctica variacional de comparación movilizada en la tarea 3 (enfriamiento)**

  En esta tarea los estudiantes describieron lo que sucedió cuando se recolectaron los datos. En general, el grupo determinó de manera cualitativa el comportamiento de la temperatura de la bebida conforme transcurrió el tiempo. Por ejemplo: "Primero el micro:bit empieza a detectar la temperatura del café y luego baja de forma rápida luego disminuye lento", "en el primer momento la temperatura aumenta durante 1m: 12s. hasta alcanzar su máximo 77.2 °C, el cual será nuestro tiempo cero, dado que a partir de este punto se inicia la etapa de enfriamiento del café y a medida que pasa el tiempo la temperatura disminuirá". En los ejemplos previos podemos apreciar que la micro:bit fue el argumento principal para solucionar esta tarea.

En el último ejemplo podemos ver un error que fue frecuente: decir que inicialmente la temperatura del café esta aumentado porque lo que realmente sucedió fue que el sensor (sonda digital) tarda en identificar la temperatura máxima, pero desde que el café se sirve está perdiendo temperatura.

La medida del cambio de temperatura y el análisis de cómo cambia la medida de la temperatura de la bebida a lo largo del tiempo son características de la variación que buscan determinar el carácter estable del cambio. En la siguiente producción (Tabla 7) de un estudiante podemos evidenciar cómo se desarrollan estos elementos a partir de la comparación del comportamiento del fenómeno en intervalos de tiempo.

Tabla 7

Respuesta del estudiante E7 en la tarea 3

Tarea 3

Observe cómo varia la temperatura del vaso de café a medida que el tiempo transcurre y describa lo sucedido.

Respuesta

La temperatura del vaso va disminuyendo a medida que el tiempo transcurre, sin embargo, al principio se observa que esta temperatura baja de forma "rapida", sin embargo despues de los 4 minutos esta empieza a disminuir ya un poco más lento.

El estudiante E7 hace una descripción cualitativa del comportamiento de la temperatura de la bebida antes de los primeros 4 minutos y después. Esta respuesta se constituye como una práctica variacional de comparación porque distinguió el comportamiento del fenómeno para dos intervalos de tiempo.

Se puede valorar que el uso de la micro: bit para la toma y visualización de los datos permitió que el estudiante E7 reconociera el comportamiento de la temperatura de la bebida.

- **Práctica variacional de comparación movilizada en la tarea 1 (presión y altura)**

En esta tarea se escogieron dos grupos de estudiantes. Un grupo se desplazó de forma ascendente por un edificio de cinco plantas mientras la micro:bit y un sensor de presión barométrica registraban la temperatura, la altitud, la presión y el tiempo. El otro grupo se desplazó por un edificio de diez niveles de forma ascendente y también usó una micro:bit y un sensor de presión barométrica para registrar las cantidades de las mismas magnitudes que el otro grupo.

En general, el grupo reconoció que la presión depende de la altitud y en la medida que la altitud aumenta la presión disminuye o de manera equivalente a medida que la altitud disminuye la presión aumenta. Los datos recolectados se compartieron vía WhatsApp en formato Excel. Cabe señalar, que el registro de las cantidades de las magnitudes involucradas se hizo cada dos segundos.

Las producciones de los estudiantes E9 y E21 (Tabla 8) muestran que movilizaron la práctica variacional de comparación pues lograron determinar el comportamiento de la presión conforme la altura aumenta a partir de comparar el cambio de los datos de presión y altitud recolectados con la micro:bit; sin embargo, la comparación es de corte descriptivo.

Tabla 8

Respuesta del estudiante E9 y E21 a la tarea 1

Respuesta de E9

Tarea 1

Observe cómo varía la presión a medida que se desplaza por el edificio y describa lo sucedido.

Respuesta

La presion a medida que pasa el tiempo tiene un comportamiento decreciente aunque no es tan predecible (pero relacionar el tiempo con la presion no tiene sentido), sin embargo la variacion respecto a la altitud es que a medida de que el la altitud aumenta la presion va a descender

En la recolección de los datos se registraron las cantidades de cuatro magnitudes diferentes: temperatura, presión, altitud y tiempo. Esto generó que varios estudiantes no reconocieran las variables relacionadas en el fenómeno que se planteó. Se sugirió hacer énfasis en el enunciado el cual implícitamente relaciona la presión con el desplazamiento en un edificio (altura).

El estudiante E9 sugirió inicialmente una relación de presión y tiempo, pero logró percatarse que esto no tiene sentido y que la relación de dependencia se da entre la presión y la altitud. Además, determinó el comportamiento de la presión según el cambio en la altura.

Respuesta de E21

Tarea 1

Observe cómo varía la presión a medida que se desplaza por el edificio y describa lo sucedido.

Respuesta

Observando los datos del edifico camilo torres y con detenimiento puedo darme cuenta que a medida que se iban subiendo los pisos del edificio, la presión parece disminuir paulatinamente, aun cuando en algunos pequeños instantes no siga este comportamiento(quizás por las condiciones para la toma de datos) la gran mayoría del tiempo se comportó como lo mencioné al principio.

El estudiante E21 logró determinar el comportamiento de la presión conforme la altura aumenta. Además, mencionó que hubo datos de presión que no disminuyen conforme iban aumentando la altura y consideró que esto puede deberse a las condiciones para la toma de datos.

- **Resultados en la tarea 3 (presión y altura)**

En esta tarea los estudiantes indicaron entre cuales valores se encontraba la variable dependiente y la variable independiente. En general, el grupo reconoció el rango de valores al tomar los valores mínimos y máximos de los datos de presión y altitud recolectados con la micro:bit. En la siguiente producción (Tabla 9) del estudiante E2 se puede observar la movilización de la PV de comparación.

Tabla 9

Respuesta del estudiante E2 a la tarea 3

Respuesta de E2

Tarea 3

¿Entre cuáles valores se encuentra la variable independiente? ¿Entre cuáles valores se encuentra la variable dependiente? **¿Por qué?**

Respuesta

En este caso para la Altitud (variable independiente) se toma su doto inicial en la base del edificio CT, en 928.5664 y llega hasta una "altura máxima" de 940.1502. Por otra parte la presión (variable dependiente) se encuentre entre 90657.53 hasta 90530.46, ya que a mayor altura menor presión, según los datos arrojados por la Micro BIT.

El estudiante E2 determinó los valores mínimos y máximos de altitud y presión para ubicar el rango entre el cual se encuentran estas magnitudes. Además, al comparar estas cantidades reconoció que a mayor altura menor presión. Esto evidencia que E2 movilizó la práctica variacional de comparación pues logró percatarse de la diferencia de presión en dos altitudes diferentes y reconoció que esa diferencia o incremento es negativo.

En esta tarea el grupo se valió de los datos recolectados con la micro:bit para determinar el intervalo entre el cual se encontraba las cantidades de las magnitudes de presión y altura; sin embargo, los datos recolectados representaban valores particulares que se debían usar para ubicar un intervalo mayor.

- **Resultados en la tarea 4 (presión y altura)**

En esta tarea los estudiantes indicaron la variación de la variable dependiente conforme la variable independiente aumentaba. En general, el grupo hizo una descripción de la variación de la presión pues mencionaban que disminuye progresivamente o que su variación es inversa, pero no lograron indicar que era de tipo decaimiento exponencial a partir ver el comportamiento de los incrementos de presión.

En las producciones de los estudiantes E12, E21, E7 (Tabla 10) y la mayoría del grupo lograron determinar que la presión disminuye conforme la altitud aumenta o de forma equivalente la presión aumenta conforme la altitud disminuye. Además, trajeron a colación conocimientos extra matemáticos que explican esa disminución; sin embargo, no determinaron el tipo de variación.

Tabla 10

Respuesta del estudiante E12, E21 y E7 a la tarea 4

Respuesta de E12

Tarea 4

¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

si aumenta la altitud, la presión disminuye progresivamente. La presión no baja de golpe.

Esto ocurre porque al subir a una mayor altitud, la cantidad de aire que hay encima de nosotros es menor y al haber menos aire sobre un lugar, la fuerza que se ejerce sobre la superficie es menor.

El estudiante E12 determinó que la variación de la presión es a disminuir progresivamente, pero no de golpe. Además, mencionó conocimientos sobre el fenómeno que explican la forma en que cambia la presión conforme aumenta la altitud. Esto no solo muestra que E12 movilizó la práctica variacional de comparación, sino que también analizó el por qué la presión cambia de esa forma en base a sus conocimientos del fenómeno.

Respuesta de E21

Tarea 4

¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

En este caso presenta una disminución y tiene sentido ya que si nos basamos en la cotidianidad, Bogotá es una ciudad que está más alta sobre el nivel del mar a comparación de Bucaramanga sin embargo la presión de Bogotá es menor que la de Bucaramanga.

El estudiante E21 identificó que los incrementos son negativos y lo reafirmó al hacer una comparación entre las altitudes y las presiones de dos ciudades, Bucaramanga y Bogotá. Esto muestra que movilizó la práctica variacional de comparación a pesar de no determinar el tipo de variación.

Respuesta de E7

Tarea 4

¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

A medida que la altitud aumenta, la temperatura y la presión disminuyen, esto porque cuando apenas se inicia a subir el edificio la presión y la temperatura están en 90523.92 Pa y 26.04 °C respectivamente, y ya cuando se encuentra a la mitad del edificio, aproximadamente, la presión es de 90337.01 y la temperatura es 25.72.

El estudiante E7 mencionó que la presión disminuye a medida que la altitud aumenta y lo constató al hacer una comparación de la presión cuando el grupo que registró los datos inicio a subir el edificio y cuando estuvieron a mitad del edificio. También consideró que la temperatura disminuye conforme la altitud aumenta. Esto muestra que E7 movilizó la práctica variacional de comparación a pesar de relacionar la presión y la temperatura.

5.2 Práctica variacional de seriación

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a las tareas 7 y 8 del taller de enfriamiento, las cuales indagan por la temperatura de la bebida en diferentes instantes de tiempo. Para el caso del taller de presión y altura se presenta un análisis de las producciones correspondientes a las tareas 8 y 11, las cuales constituyen el estudio de la forma en que la medida del cambio se comporta para determinar el carácter estable o una regularidad en los incrementos de presión conforme el cambio de altitud. El análisis integra una dimensión: la práctica de seriación.

- **Práctica variacional de seriación movilizada en la tarea 7 (enfriamiento)**

En esta tarea se esperaba que los estudiantes determinaran la temperatura de la bebida en diferentes instantes de tiempo y determinaran alguna regularidad en los incrementos de la temperatura para dos instantes de tiempo consecutivos. En general, el grupo determinó la temperatura de la bebida para cada instante de tiempo usando los datos que tomó la micro:bit; sin embargo, solo el estudiante E11 (Tabla 11) encontró una regularidad en las diferencias de temperatura de la bebida, pero de corte descriptivo.

Tabla 11

Respuesta del estudiante E11 a la tarea 7

Tarea 7

¿Qué temperatura tiene el café al cabo de 2 minutos, 5 minutos, 8 minutos y 10 minutos? **Justifica tu respuesta.**

Respuesta

al cabo de dos minutos el cafe se encuentra a una temperatura de 71.8°c para encontrarla tome el tiempo en el que se registro la temperatura maxima que es 72 segundos y le sume 120 segundos dandome 192 segundos y vi que la temperatura que correspondia a ese tiempo era de 71.8°c, asi mismo hare con los demas minutos, al cabo de 5 minutos que corresponde a 372 segundos se encuentra a una temperatura de 63.8 °c,, a los 8 minutos que corresponden a 552 segundos la temperatura se encuentra a 58.4 ° C, a los 10 minutos que corresponde a 672 segundos, la temperatura del cafe se encuentra a 55.6 °c. Aca podemos notar que conforme pasa el tiempo la temperatura disminuye por tanto entre mayor sea el tiempo, menor sera la temperatura, la temperatura a pesar de que pase muchooo tiempo nunca llegara a ser 0°c o bajo 0°c si se encuentra en un clima calido, por otro lado si estamos en invierno es muy probable que incluso el cafe se congele.

En esta respuesta se movilizó la práctica variacional de seriación por parte del estudiante E11 al intentar establecer una regularidad en los incrementos de temperatura; sin embargo, la regularidad que encontró es de corte descriptivo.

- **Resultados en la tarea 8 (enfriamiento)**

Esta tarea consistió en determinar qué ocurre con la variación de la temperatura de la bebida conforme pasa el tiempo. En general, el grupo hace una descripción cualitativa de la tendencia que siguió el experimento, la temperatura se estabilizó a la temperatura del ambiente. Incluso, algunos estudiantes propusieron que va a tender a 24° Celsius, valor que se tomó al principio por descuido en la toma de datos. Se destaca las producciones de dos estudiantes E13 y E15 (Tabla 12).

Tabla 12

Respuesta del estudiante E13 y E15 a la tarea 8

Respuesta de E15
Tarea 8 ¿Qué ocurre con la variación de la temperatura del café conforme pasa el tiempo? **Justifica tu respuesta.** **Respuesta** A medida que pasa el tiempo la variación de la temperatura disminuye, es decir, la temperatura varia menos y empieza a demorarse más es disminuir. esto se puede observa comparando la diferencia de tiempo cada que la temperatura disminuye 5 grados. 77 a los 70 grados se demora 154 segundos 70 a los 65 grados demora 116 segundos. 65 a los 60 grados demora 148 segundos. 60 a los 55 grados demora 204 segundos. 55 a los 50 grados demora 128 segundos. 50 a los 44.9 grados demora 326 segundos Se puede observar que en general tarda más en disminuir la temperatura.
El estudiante E15 comparó los incrementos de tiempo al disminuir cinco grados Celsius la temperatura de la bebida desde los setenta a los cuarenta y cinco grados Celsius. Esto le permitió encontrar una regularidad: los incrementos son positivos y aumentan. Esto muestra que el estudiante movilizó la práctica variacional de seriación lo que le permitió describir el comportamiento de la variación. Sin embargo, no asoció este procedimiento con la variación de tipo decaimiento exponencial.
Respuesta de E13

Tarea 8

¿Qué ocurre con la variación de la temperatura del café conforme pasa el tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Respuesta

segun lo que se puede apreciar en los datos conforme mas avanza el tiempo menos se reduce la temperatura ya que en el punto anterior podemos ver que las diferencias de 120 a 300 son mayores a las de 480 a 600

De manera similar, el estudiante E13 determinó que la diferencia de temperatura de la bebida es mayor de los 120 segundos a 300 segundos que de los 480 segundos a 600 segundos. Incluso, mencionó que esto se puede constatar al ver las diferencias de temperatura en la tarea 7. Esto muestra que el estudiante E13 movilizó la práctica variacional de seriación pues reconoció que las diferencias se reducen conforme más avanza el tiempo; sin embargo, no determinó el tipo de variación.

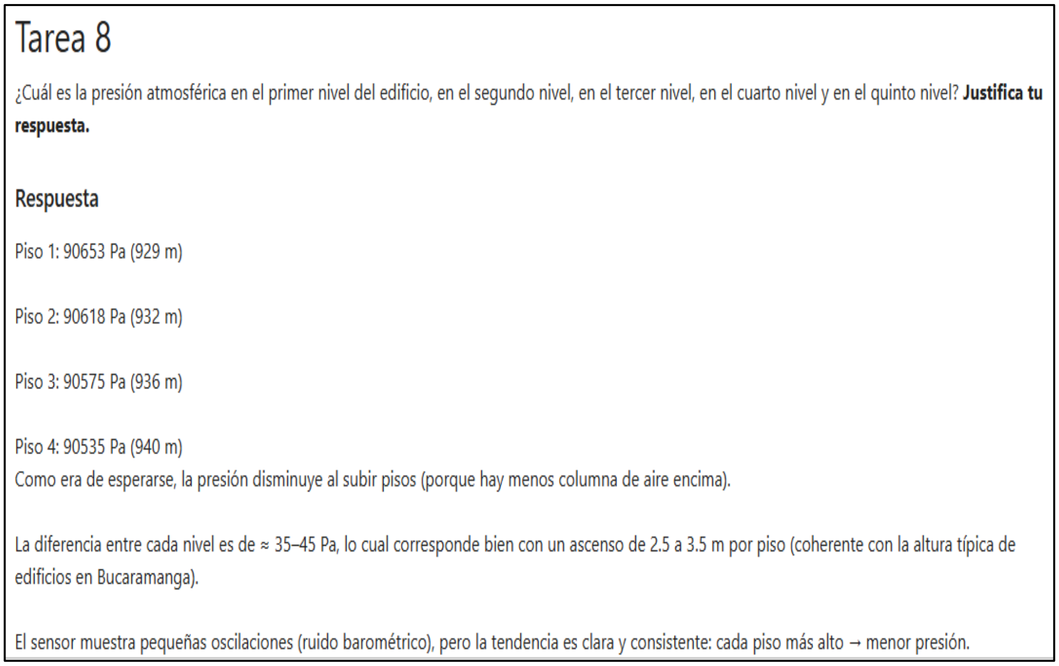
- **Práctica variacional de seriación movilizada en la tarea 8 (presión y altura)**

En esta tarea los estudiantes determinaron la presión de cada uno de los cinco niveles del edificio donde un grupo recolectó los datos con la micro:bit. En general, el grupo encontró la presión de cada nivel usando diferentes estrategias como agrupar los datos en cinco paquetes y promediar la presión o calcular la altitud correspondiente a cada nivel al promediar la altura del edificio entre la cantidad de pisos y luego consultar en los datos la presión correspondiente a esa altitud; sin embargo, un solo estudiante (Tabla 13) analizó el cambio de la presión en cada piso para hablar sobre la variación del fenómeno.

Tabla 13

Respuesta del estudiante E14 a la tarea 8

Respuesta de E14



Tarea 8

¿Cuál es la presión atmosférica en el primer nivel del edificio, en el segundo nivel, en el tercer nivel, en el cuarto nivel y en el quinto nivel? **Justifica tu respuesta.**

Respuesta

Piso 1: 90653 Pa (929 m)

Piso 2: 90618 Pa (932 m)

Piso 3: 90575 Pa (936 m)

Piso 4: 90535 Pa (940 m)
Como era de esperarse, la presión disminuye al subir pisos (porque hay menos columna de aire encima).

La diferencia entre cada nivel es de ≈ 35–45 Pa, lo cual corresponde bien con un ascenso de 2.5 a 3.5 m por piso (coherente con la altura típica de edificios en Bucaramanga).

El sensor muestra pequeñas oscilaciones (ruido barométrico), pero la tendencia es clara y consistente: cada piso más alto → menor presión.

El estudiante E14 determinó la presión de cada uno de los cinco niveles del edificio y encontró que la presión disminuye conforme aumentan los pisos del edificio. Además, identificó la diferencia de presión entre un piso y el inmediatamente siguiente. Esto evidenció que E14 movilizó la práctica variacional de seriación pues encontró una regularidad en los incrementos de presión al comparar la presión de un piso con otro; sin embargo, no especificó el tipo de variación.

- **Resultados en la tarea 11**

En esta tarea los estudiantes determinaron la altitud correspondiente a valores de presión dados. Se presentaron cuatro valores de presión que correspondían a altitudes que no eran accesibles para la micro:bit junto al sensor de presión barométrica. Esto motivó a los estudiantes a desarrollar diversas estrategias para poder hallar las altitudes que corresponden a cada valor de presión teniendo en cuenta los datos recolectados y las tareas anteriores. En la producción del estudiante E11 (Tabla 14) se puede observar que movilizó la práctica variacional de seriación.

Tabla 14

Resultados del estudiante E11 a la tarea 11

Respuesta de E11

Tarea 11

¿Cuál se esperaría sea la altura que corresponde a una presión de 89875 Pa, 84556 Pa, 79495 Pa, y 70108 Pa? **Justifica tu respuesta.**

Respuesta

si un edificio de 11 metros la presion en el ultimo piso es de 90530.46 disminuyo 122,18 luego para que sea 89875 debe disminuir 777.64 con regla de tres vemos que se espera que la altura sea de 70 metros seria 929.01 + 70 = 999.01 seria la altitud correspondiente a la presion atmosferica de 89875, veamos con las demas entonces 90652. 64 (pa en el primer piso) - 84556 = 6096.64 es lo que debe disminuir luego tengamos en cuenta que con 70 metros disminuye 777. 64 ahora si debe disminuir 6096,64 seria necesario subir 548.79 metros es decir una altitud de 929.01 (altitud primer piso)+ 548,79 = 1477,8 seria la altitud aca podemos ver un patron y es que por cada metro la PA disminuye aproximadamente 11,109 por tanto para hallar la altitud que corresponde a 79495 vamos a dividir su disminucion entre 11,109 para hallar la cantidad de metros veamos cuando disminuye, 90652. 64 (pa en el primer piso) - 79495 = 11157,64 luego 11157,64 / 11,109 = 1004,37 metros luego la altitud seria de 929.01 (altitud primer piso)+ 1004,37 =1933,38, con 70108 entonces 90652. 64 (pa en el primer piso) - 70108= 20544,64 por tanto 20544,64/11,109 =1849,36 metros así la altitud seria de 929.01 (altitud primer piso)+ 1849,36 = 2778,37 esta ultima presion sera para un piso 168 avo aproximadamente

El estudiante E11 logró aproximarse a las altitudes requeridas según las presiones dadas. Determinó la diferencia de presión en el primer y último piso del edificio (122,18 Pa), además por tareas anteriores conocía la altura del edificio (11 metros), entonces, realizó un cociente entre esa diferencia de presión y la altura del edificio para conocer lo que disminuye la presión por cada metro que aumenta. Así, estableció que en promedio la presión disminuye 11,109 Pa por metro que aumente la altitud. Esto le permitió aproximarse a las altitudes correspondientes a las presiones dadas al hacer la diferencia entre la presión en el primer piso del edificio que registró la micro:bit junto al sensor y la presión dada, entonces, dividió esa cantidad entre 11,109 Pa y así determinó la cantidad de altura que aumentó; luego le sumó esa cantidad a la altitud en el primer piso del edificio donde se recolectaron los datos para conocer la altitud correspondiente a esa presión. Esto evidencia que el estudiante E11 movilizó la práctica variacional de seriación pues logró determinar las altitudes correspondientes a las presiones dadas a partir de hacer comparaciones en los datos recolectados con la micro:bit y estableció una regularidad en los incrementos de presión.

En general, el grupo se aproximó a las altitudes correspondientes a las presiones dadas. Varios estudiantes usaron la regresión de dos variables y escogieron un modelo lineal para luego despejar la altitud al reemplazar la presión dada en la expresión lineal. Otros estudiantes también hicieron la regresión de dos variables sobre los datos, escogieron una función de ajuste y calcularon su inversa usando un comando de GeoGebra para luego reemplazar la presión y conocer la altitud. Esto evidenció que el grupo logró, no solo establecer el carácter estable del cambio a partir de las prácticas variacionales anfitrionas de comparación y seriación, sino que propusieron modelos de función usando los datos recolectados con la micro:bit y la regresión de dos variables en GeoGebra.

5.3 Práctica variacional de predicción

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a la tarea 9 del taller de enfriamiento, la cual indaga por el valor al que tiende la temperatura conforme avanza el tiempo y de las producciones correspondientes a la tarea 10 del taller de presión y altura, la cual constituye el estudio de la forma en que la presión cambia y del por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen para proponer modelos que permitan anticipar valores de presión futuros o anteriores a los datos recolectados

- **Práctica variacional de predicción movilizada en la tarea 9 (enfriamiento)**

En esta tarea los estudiantes debían indicar el valor al que tiende la temperatura de la bebida conforme transcurre el tiempo. En general, el grupo encontró que tiende a la temperatura ambiente. Algunos estudiantes mencionaron unos valores e intervalos de temperatura. Por ejemplo en las producciones de los estudiantes E10, E1 y E22 (Tabla 15) se puede observar que movilizaron la PV de predicción.

Tabla 15

Respuesta del estudiante E10, E1 y E22 a la tarea 9

Respuesta de E10
Tarea 9 ¿A qué valor tiende la temperatura conforme pasa el tiempo? **¿Por qué?** **Respuesta** La temperatura tiende a la temperatura ambiente que está entre 19°C a 23°C aproximadamente . Aunque en el experimento la temperatura en este instante la temperatura se está quedando en 29.6 pero esto es porque la temperatura disminuye mucho mas lento con el transcurso del tiempo pero este valor tiende a ser el de la temperatura ambiente porque
El estudiante E10 consideró un intervalo (19°C a 23°C) para indicar los valores que toma la temperatura de la bebida conforme transcurrió el tiempo. Se evidencia que utilizó los datos del experimento porque también propuso otro valor (29.6°C) que tomó del registro gráfico y tabular de los datos. Cabe señalar, que mientras transcurrió la primera sesión de clase, la micro:bit estuvo registrando datos de temperatura de la bebida contra tiempo y los

transmitió en el televisor del aula de clase vía zoom. Esto evidencia que movilizó la práctica variacional de predicción pues usó el modelo gráfico y tabular para anticipar el valor de la temperatura de la bebida.

Respuesta de E1

Tarea 9

¿A qué valor tiende la temperatura conforme pasa el tiempo? **¿Por qué?**

Respuesta

podemos observar en el grafico que la temperatura del agua esta descendiendo a su temperatura ambiente que oscila entre 20 a 25 grados

De manera similar, el estudiante E22 determinó un intervalo para indicar los valores de la temperatura ambiente. El estudiante anticipó el valor al que tiende la temperatura de la bebida usando el gráfico de los datos. Esto muestra que también movilizó la práctica variacional de predicción.

Lo anterior evidenció cómo el uso de la micro:bit para la toma y visualización de los datos en el transcurso de la clase permitió a los estudiantes construir sus respuestas y movilizar la práctica variacional de predicción para anticipar el valor al que tiende la temperatura de la bebida.

- **Práctica variacional de predicción movilizada en la tarea 10 (presión y altura)**

En esta tarea los estudiantes tuvieron que anticipar el valor al que tiende la presión conforme disminuye la altitud. En general, el grupo consideró el conjunto total de datos para determinar que la presión que se registró con la micro:bit en el primer piso del edificio corresponde a la tendencia de la presión cuando la altitud disminuye. Otros estudiantes consultaron en internet la mayor presión registrada en la tierra porque de tareas previas identificaron la tendencia a aumentar de esta magnitud cuando la altitud es cercana a cero pues no consideraron alturas negativas o por debajo del nivel del mar.

Tabla 16

Respuesta del estudiante E7 a la tarea 10

Respuesta de E7
Tarea 10 ¿A qué valor tiende la presión atmosférica conforme disminuye la altura? **¿Por qué?** **Respuesta** La presión atmosférica tiende a 100824,14 Pa, esto se evidencia al hacer la regresión líneal entre los datos de la presión y la altitud de nuestro experimento; se observa que la menor altura será cero entonces al mira la funcipon que mejor se ajuste a los datos aparece una líneal y al verificar el valor de altura=0 m la presión= 100824,14 Pa
El estudiante E7 determinó el valor al que tiende la presión cuando la altitud es cero metros. Realizó una regresión de dos variables en GeoGebra con los datos recolectados con la micro:bit y escogió el modelo lineal como el que mejor se ajusta, entonces, reemplazó en la expresión lineal el valor cero. Esto muestra que E7 movilizó la práctica variacional de predicción pues logró anticipar el valor al que tiende la presión conforme la altitud disminuye a partir de un modelo de función lineal.

En esta producción del estudiante E7 (Tabla 16) y el resto del grupo se puede ver cómo se va comprendiendo las condiciones en las cuales se construyen los modelos teóricos que la mayoría consultaron en internet o que conocían con antelación. Entre lo que mencionaban aludían a que estaba relacionado con la presión atmosférica por lo que no tiene sentido hablar de altitud por fuera de la atmósfera o que la altitud cero estaba asociada al nivel del mar, entonces no se podía hablar de altitudes negativas o por debajo del nivel del mar, porque las condiciones eran diferentes y por tanto el fenómeno es otro. Esto mostró cómo la toma de datos mediante la micro:bit y el uso de GeoGebra para el tratamiento de los mismos contribuyó a la aproximación de modelos de función que representaba el fenómeno y ayudaban a comprender cómo se construyen los modelos teóricos y bajo qué condiciones son válidos.

5.4 Práctica variacional de estimación

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a las tareas 10 y 11 del taller de enfriamiento, las cuales indagan por una expresión que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida en un intervalo de tiempo y de las producciones correspondientes a las tareas 12, 13, 14 y 16 del taller de presión y altura, las cuales constituyen al estudio de la forma en que la presión cambia y del por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen, para proponer modelos que permitan anticipar la presión dada cualquier altitud. El análisis integra una dimensión: la práctica de estimación.

- **Práctica variacional de estimación movilizada en la tarea 10 (enfriamiento)**

En esta tarea los estudiantes mostraron la manera de encontrar una expresión que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida caliente. En general, el grupo sugirió usar procedimientos matemáticos sobre los datos registrados por la micro:bit como la regresión de dos variables en GeoGebra, la regresión lineal, diagramas de dispersión y técnicas de regresión en Excel, y algunos estudiantes sugirieron usar la ley de enfriamiento de Newton. Además, hubo estudiantes que formularon una expresión matemática.

Tabla 17

Respuesta del estudiante E21, E1 y E15 a la tarea 10

Respuesta de E21

Tarea 10

¿Cómo encontrarías una expresión algebraica que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

al tener tantos datos o puntos experimentales podríamos hacer uso de un análisis de regresión de dos variables.

El estudiante E21 destacó el hecho de tener muchos datos registrados del fenómeno de enfriamiento de la bebida y sugirió hacer un análisis de regresión de dos variables. Esto se puede considerar como una acción previa a la movilización de la práctica variacional de estimación porque sugiere un procedimiento para anticipar el comportamiento del fenómeno.

Respuesta de E1

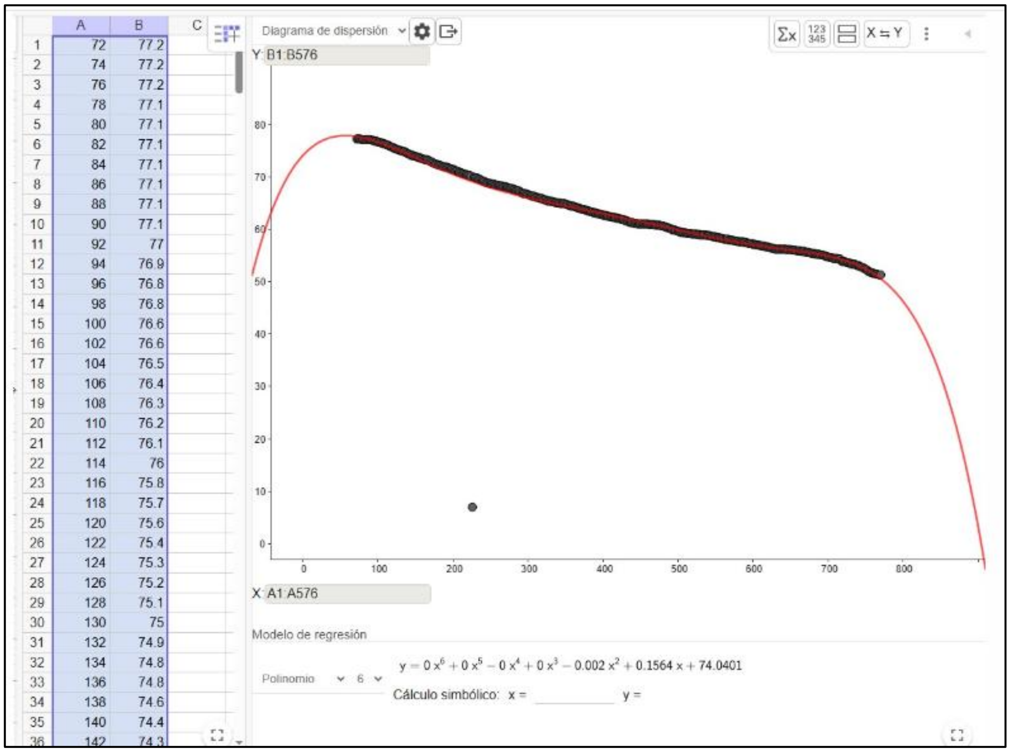
Tarea 10

¿Cómo encontrarías una expresión algebraica que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

Mediante geogebra con los datos, con una regresion y me aproxime a este modelo https://ibb.co/9H1p0jHH

Complemento de E1



El estudiante E1 usó la regresión de dos variables en GeoGebra sobre los datos y encontró un expresión polinomica de grado seis que modela el fenómeno de enfriamiento de la bebida. Una de las ventajas de los modelos que generó GeoGebra es que estan acompañados de procedimientos estadisticos que muestran información sobre como se relacionan los datos de ambas magnitudes respecto al modelo de regresión, pero puede convertirse en una desventaja sino se mira un poco más alla, es decir, cuál es la tendencia a futuro del fenómeno en cuestión. Esto muestra que el estudiante E1 movilizó la practica variacional de estimación pues con esta expresión pudó anticipar el valor de la temperatura de la bebida, pero de acuerdo al rango de los datos registrados con la micro:bit.

Respuesta de E15

Tarea 10

¿Cómo encontrarías una expresión algebraica que modele el fenómeno de enfriamiento de la bebida? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

Para encontrar una expresión algebraica utilizando el modelo de regresión de GeoGebra tenemos que la expresión seria una de polinomio 4 con una R^2 de 0.9053, pero esta se tomaria unicamente con los datos dados, si miramos una que tenga mas sentido, pues la polinomial aumenta o disminuye de manera radical lo cual no tiene sentido tomariamos una exponencial que hace parte de la funcion de enfriamiento y calentameinto de nwton

El estudiante E15 usó la regresión de dos variables y eligió una expresión polinomica de grado cuatro. E15 a diferencia de E1 cuestiona el modelo polinomial porque la tendencia de un polinomio conforme aumenta el tiempo es a incrementar ó a disminuir radicalmente. E15 consideró el modelo polinomial solo para el rango de los datos recolectados con la mico:bit y sugirió que el modelo exponencial si tiene sentido con el comportamiento futuro del fenómeno. En esta respuesta tambien se puede ver cómo el estudiante E15 comprendió el modelo exponencial basado en la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton y cuestionó el modelo polinomial porque según el coeficiente de correlación era el que mejor relaciona las cantidades de las magnitudes registradas con la micro;bit, pero no tiene sentido con la tendencia a futuro de la temperatura de la bebida. Esto es evidencia que el estudiante E15 movilizó la práctica variacional de estimación porque pudo anticipar los valores de temperatura de la bebida para cualquier instante de tiempo del experimento; sin embargo, no explicitó la expresión.

Las producciones de los estudiantes E21, E1 y E15 (Tabla 17) mostraron cómo la toma y el tratamiento de los datos recolectados con la micro:bit condicionó la construcción de la expresión matemática que modela el enfriamiento de la bebida y también les permitió comprender modelos diferentes del exponencial que 'representaban' mejor los datos, pero que no describían el fenómeno de una manera global lo cual presentaba al modelo exponencial como el más optimo. Esto evidenció que movilizaron la práctica variacional de estimación.

- **Resultados en la tarea 11 (presión y altura)**

En general, el grupo se inclinó por la función exponencial, logarítmica, potencia y polinomial. Además, hubo estudiantes que consideraron más de una función. Varios estudiantes omitieron los datos iniciales, es decir, escogieron los datos a partir de la temperatura máxima registrada mientras otros escogieron una función por partes para modelar el conjunto total de los datos. Los modelos que generó GeoGebra a partir de los datos recolectados con la micro:bit ayudaron a comprender el comportamiento del fenómeno y escoger el modelo de función que mejor representa el fenómeno, pero al ser un proceso experimental todos los datos que se usaron en la regresión influyeron en estos modelos. Esto permitió que algunos estudiantes validaran los modelos diferentes del exponencial solo para el conjunto de los datos y el modelo exponencial para el fenómeno en general. Además, ayudó a comprender el modelo teórico de la ley de calentamiento y enfriamiento de Newton.

Tabla 18

Respuesta del estudiante E2, E10 y E13 a la tarea 11

Respuesta de E2

Tarea 11

¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? **Justifica tu elección.**

Respuesta

Una función exponencial de decrecimiento , pues al tomar los valores desde la temperatura máxima y hacer un análisis de regresión podemos notar que la función exponencial se ajusta mejor al modelo pues a pesar de que una polinomica se ajuste mejor a los valores tomados la exponencial nos permite saber lo que pasará a futuro y en un caso ideal esta se ajustaría en tanto como valores como en lo esperado

El estudiante E2 escogió la función exponencial de decrecimiento como la función de ajuste que mejor representa el fenómeno en cuestión. Además, cuestionó el modelo polinomial pues consideró que para anticipar valores a futuro no sería útil. Esto muestra que E2 movilizó la práctica variacional de estimación pues logró determinar un modelo que describe y anticipa valores de temperatura a futuro.

Respuesta de E10

Tarea 11

¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? **Justifica tu elección.**

Respuesta

Basándonos en el análisis hecho por el software, observando el comportamiento de las gráficas pudimos notar que en los primeros datos tomados la función logarítmica es la que mejor nos representa este comportamiento pero a medida que pasa el tiempo esta función tiende a valores negativos y por lo ya discutido anteriormente sabemos que la temperatura va a tender un valor fijo, no va a disminuir tanto. Por otro lado, la función potencia que se ajusta también de manera cercana a nuestros datos y considerando un tiempo mayor la función decrece también pero de manera más lenta, entonces para predecir datos futuros la función se ajusta mejor la función potencia.

El estudiante E10 escogió dos funciones: la logarítmica y la potencia. Consideró que estas funciones son las que modelan con mayor exactitud los datos recolectados con la micro:bit. Sin embargo, determinó que para un intervalo mayor de tiempo la función potencia se ajusta mejor al fenómeno porque a pesar de que ambas se acercan a valores negativos la potencia lo hace de forma más lenta. Esto evidencia que movilizó la práctica variacional de estimación porque eligió una función que le permitió anticipar la mayor cantidad de valores futuros.

Respuesta de E13

Tarea 11

¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? **Justifica tu elección.**

Respuesta

por como se comportan los datos y basados en geogebra, podemos decir que seria una funcion por partes, donde es trigonometrica si el tiempo esta en el intervalo de $0 \leq x \leq 72$ y es una funcion exponencial en el intervalo de $x>72$ con x igual al tiempo

El estudiante E13 consideró una función por partes. Para los primeros 72 segundos del enfriamiento de la bebida escogió una función trigonometríca y para 72 segundos en adelante una función exponencial. Esto muestra que el estudiante también consideró relevante modelar los primeros datos que corresponde a cuando el sensor intentó reconocer la temperatura máxima de la bebida. E13 movilizó la práctica variacional de estimación porque logró describir el conjunto total de datos recolectados y anticipó los valores de la temperatura de la bebida de manera global.

A pesar de que hubo pocos estudiantes que explicitaron una expresión matemática en esta tarea se sobrentiende que conocían las funciones que comentaban ya que las vieron en GeoGebra; incluso, usaron la vista gráfica para copiar varias funciones de ajuste y compararlas.

No solo las respuestas de E2, E10 y E13 (Tabla18) muestran evidencias de que se movilizó la práctica variacional de estimación. Muchos estudiantes lograron determinar una expresión que anticipó los valores de la temperatura de la bebida de manera global. Esto muestra que las tareas previas y los datos recolectados con la micro:bit propiciaron la movilización de esta práctica variacional.

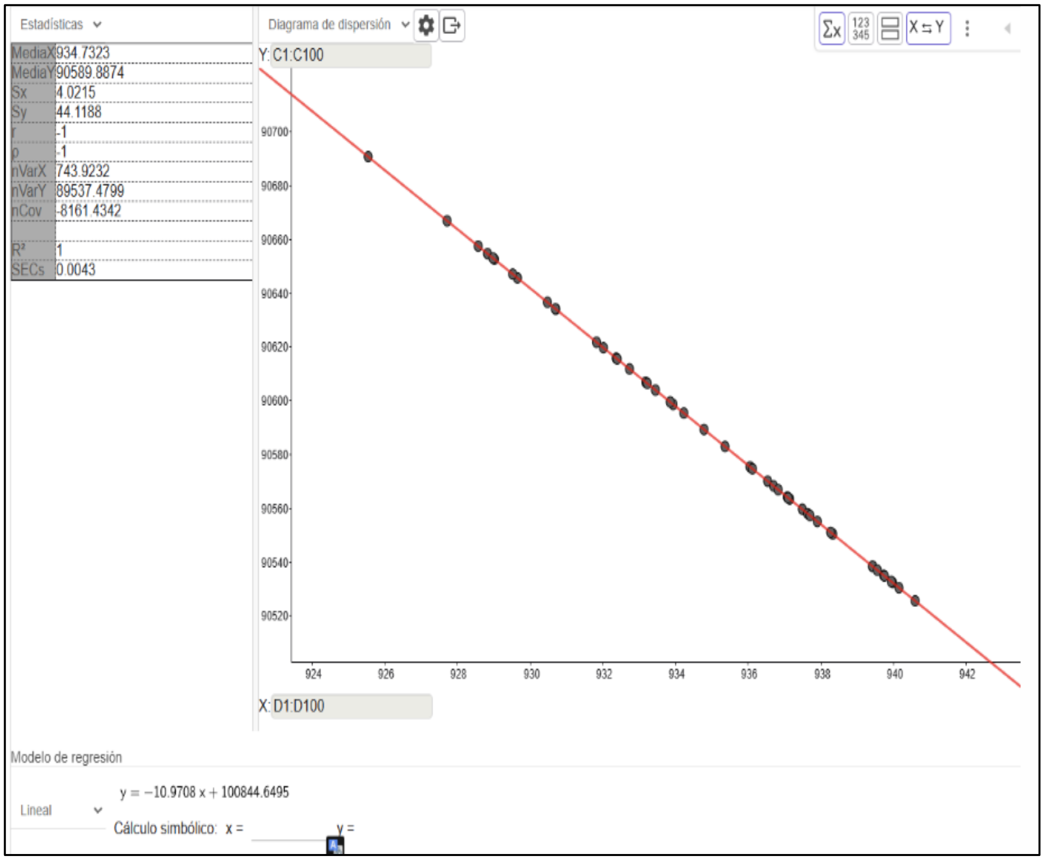
- **Práctica variacional de estimación movilizada en la tarea 12 (presión y altura)**

En esta tarea los estudiantes esbozaron el tipo de gráfica que describe la relación entre la presión y la altitud. En general, el grupo usó los datos recolectados con la micro:bit y el análisis de regresión de dos variables en GeoGebra para elegir la gráfica de la función de ajuste como respuesta a esta tarea. En la producción del estudiante E8 (Tabla 19) se puede observar que movilizó la PV de estimación.

Tabla 19

Respuesta del estudiante E8 a la tarea 12

Respuesta de E8
Tarea 12 En una hoja de trabajo, esbozar el tipo de gráfica que describe la relación de la presión atmosférica y la altura. Use el sitio web: Enlace para alojar la imagen de la gráfica y generar un link que debe pegar como respuesta a esta tarea. **Respuesta** https://ibb.co/QFzydV7k se opta por la función lineal, dado que se cumple que r^2 es igual a uno (el modelo tiene una buena explicación de la varianza) y es la más conocida y trabajada en diferentes cursos. Otras funciones que cumplen con esto son las exponencial, de crecimiento y logarítmica también cumplen con este criterio. Logarítmica: https://ibb.co/9H9XZtxy Exponencial: https://ibb.co/NdBNcMgr Crecimiento: https://ibb.co/7dbnZX45 Lineal: https://ibb.co/YFtVWzKd
Complemento de E8



El estudainte E8 realizó una regresión de dos varaibles en GeoGebra sobre los datos recolectados y eligió el modelo lineal como el más adecuado en base a las estadisticas del modelo de regresión. Esto evidencia que E8 movilizó la práctica variacional de estimación porque determinó un modelo de función que le permite conocer la presión dada cualquier altitud. Además, comparó tres modelos de función adicionales: la función exponencial, la función logaritmica y la función de crecimiento. Esto muestra como el trabajo con datos y el uso de GeoGebra permitió construir modelos que aproximan la presión dada la altitud.

- **Resultados en la tarea 13**

En esta tarea los estudiantes mencionaron la manera de conocer la presión dada cualquier altitud. Hubo estudiantes que mencionaron el procedimiento que les permitía conocer la presión dada cualquier altitud y otros que explicitaron una expresión analítica a partir del análisis de regresión de dos variables en GeoGebra sobre los datos recolectados con la micro:bit.

Tabla 20

Respuesta del estudiante E14 y E11 a la tarea 13

Respuesta de E14
Tarea 13 ¿Cuál sería una manera de conocer la presión atmosférica dada cualquier altura? **Explica tu respuesta.** **Respuesta** y=101446.6251ₑ^(-0.0001x) utilice la formula de la regresion y tomo la funcion exponencial y con ello podria scar la presion atmosferica dada cualquier altura
El estudiante E14 utilizó la regresión sobre los datos recolectados y escogió el modelo de función exponencial. Esto evidencia que movilizó la práctica variacional de estimación porque logró anticipar el valor de la presión para cualquier altitud.
Respuesta de E11

Tarea 13

¿Cuál sería una manera de conocer la presión atmosférica dada cualquier altura? **Explica tu respuesta.**

Respuesta

Para poder hallar la presión atmosférica dada con cualquier altura requerimos una función que nos permita remplazar la altura para hallar la presión atmosférica teniendo en cuenta lo realizado en la actividad 2 observamos un patrón y es que por metro la presión atmosférica tiende a disminuir en 11.107 y= presión atmosférica x= altitud la función que propongo es la siguiente y= 90652.64 - 11.107x pero no sirve

El estudiante E11 construyó una expresión lineal a partir del trabajo en las tareas previas. E11 determinó en base a los datos en promedio cuanto disminuye la presión por metro que aumenta la altitud y consideró ese valor como la pendiente negativa, luego, usó la presión en el primer piso como el intercepto con el eje y y explicitó una expresión; sin embargo, mencionó que no sirve. Esto no es del todo cierto porque ese modelo se construyó a partir de la presión registrada en el primer y ultimo piso del edificio donde se tomaron los datos, luego, la expresión le permitía conocer la presión de altitudes iguales o mayores a la altitud registrada en el primer piso del edificio.

Las producciones de los estudiantes E14 y E11 (Tabla 20) muestra que movilizaron la práctica variacional de estimación porque lograron construir modelos de función que permitían anticipar la presión dada cualquier altitud. A pesar de que el modelo de E11 sirve para un intervalo de altitud en particular se destaca el hecho de aproximar modelos de función a partir de las prácticas variacionales anfitrionas de comparación y seriación.

- **Resultados en la tarea 14**

En esta tarea los estudiantes compararon la gráfica de los datos con los modelos que generó GeoGebra a partir de la regresión. Hubo estudiantes que reformularon el modelo pues al comparar la gráfica de los datos con los modelos de función de ajuste y al consultar en internet acerca del modelo teórico de presión y altitud consideraron el modelo exponencial como el más adecuado.

Tabla 21

Respuesta de estudiante E10 a la tarea 14

Respuesta de E10
Tarea 14 Compare la gráfica de los datos y algunos modelos de regresión con la gráfica que esbozo. ¿En qué se diferencian? **Justifica tu respuesta.** **Respuesta** Al principio escogimos la función lineal porque los puntos par4e4cian alineados y la grafica se vea que se ajustaba con bastante precisión a los datos, revisamos la función exponencial también pero como aparentemente tenia exponente cero la descartamos de una vez, per o ya luego analizando y sabiendo que la función que modela este problema es un exponencial recordamos que el profesor en una ocasión que teníamos un coeficiente cero, nos dijo que el applet lo aproximaba a cero pero que en realidad eso no era cero y que miráramos con más cifras decimales y efectivamente, le pusimos 7 cifras decimales y pudimos notar que efectivamente este número no era cero y que podíamos modelar el problema con una función exponencial. Aunque utilizando este modelo lineal al comparar anteriormente los datos nos los compañeros en la socialización nos daba valores muy similares y en la grafica de ambas funciones pudimos observar bastante relación también. g(x)= 101452. 2741001e^(-0.0001211x) Algo más a tener en cuenta es que los datos que tomamos que son de aproximadamente 25 m no son casi nada comparados con los más de 9000 metros
El estudiante E7 en un inicio se inclinó por el modelo lineal y consideró el modelo exponencial de la regresión, pero como tenía un coeficiente de cero a causa de no ampliar la cantidad de cifras decimales que reconoce GeoGebra se decidió por el modelo lineal. Luego, consultó que el modelo teórico es un modelo exponencial, entonces, consideró ampliar la cantidad de cifras decimales y encontró que el modelo exponencial si servía para

modelar el fenómeno. Además, mencionó que la inclinación por el modelo lineal pudo deberse a que la cantidad de datos no era significativa pues localmente la gráfica de los datos parece aproximarse a una función lineal, pero desde una perspectiva global un modelo exponencial representaba mejor el fenómeno.

La producción del estudiante E10 (Tabla 21) y el resto del grupo mostró como esta tarea permitió discutir los modelos que se construyeron hasta ese momento y en algunos casos decidieron reformular el modelo a partir de conocimiento sobre el modelo teórico. Esto evidencia que E10 movilizó la práctica variacional de estimación pues logró construir un modelo de función que le permitió anticipar la presión para cualquier altitud. Asimismo, se pudo ver cómo la discusión y comparación de los modelos construidos por los estudiantes y los generados por GeoGebra ayudó a refinar los modelos y comprender los modelos teóricos.

- **Resultados en la tarea 16**

En esta tarea los estudiantes eligieron entre los modelos de ajuste que generó GeoGebra a partir de la regresión sobre los datos recolectados con la micro:bit el que mejor representa el fenómeno de presión y altitud. En general, el grupo escogió el modelo lineal y el modelo exponencial. Consideraron que el modelo lineal era el más adecuado para el conjunto de datos; sin embargo, desde una perspectiva global el modelo exponencial era el que mejor se ajustaba.

Tabla 22

Respuesta del estudiante E4 a la tarea 16

Respuesta de E4

Tarea 16

¿Cuál es la función de ajuste que mejor representa el fenómeno? **Justifica tu elección.**

Respuesta

Según lo observado en GeoGebra, la función exponencial evidencia que la presión atmosférica disminuye de manera rápida en las primeras alturas. Sin embargo, a medida que se asciende, la disminución se vuelve más lenta y menos perceptible, lo que refleja el comportamiento real del aire en la atmósfera: al estar más denso en las capas bajas, la presión cambia con mayor intensidad, mientras que en las capas altas, donde el aire es más tenue, la variación de la presión ocurre de forma más gradual.

El estudiante E4 escogió el modelo exponencial como el que mejor representa el fenómeno en cuestión. Además, explicó el comportamiento de la presión respecto a la altitud en base a sus conocimientos sobre el fenómeno. Esto evidencia que E4 movilizó la práctica variacional de estimación pues logró determinar un modelo que anticipa la presión dada la altitud y también explicó por qué el modelo exponencial representa la variación de presión respecto a la altitud.

La producción de E4 (Tabla 22) y el resto del grupo mostraron cómo el trabajo con datos reales en el aula y el uso de GeoGebra ayudó a la construcción, discusión y validación de los modelos construidos por los estudiantes y permitió una aproximación y comprensión acerca de los modelos teóricos del fenómeno en cuestión.

5.5 Contribuciones de la modelación matemática al desarrollo del pensamiento funcional

La puesta en escena de la secuencia de enseñanza diseñada en este trabajo permitió plantear algunas reflexiones sobre las contribuciones de la modelación matemática al desarrollo del pensamiento funcional. A partir de ello, se reportan algunos resultados como sigue.

Se identificó que las prácticas variacionales se manifiestan a lo largo de varias fases del proceso de modelación. Por ejemplo, durante las primeras fases, cuando los estudiantes se enfrentaron a la situación problema y posteriormente realizaron la experimentación y la recolección, clasificación y registro gráfico de los datos de la temperatura de la bebida, predominaron las prácticas variacionales anfitrionas de comparación y seriación; pues los estudiantes se centraron en reconocer las variables involucradas en el fenómeno, las relaciones de interdependencia que se pueden establecer entre ellas, el comportamiento constante, creciente o decreciente de dichas variables, las unidades y valores que toman y alguna regularidad en los incrementos de éstas. Esto permitió que los estudiantes midieran el cambio de la temperatura de la bebida y analizaran cómo cambia esa medida en el transcurso del tiempo con el fin de determinar el carácter estable del cambio.

En estas fases la micro:bit fue relevante tanto en el proceso de modelación como en la movilización de las prácticas variacionales. En el sentido que no solo permitió la recolección de los datos, sino que los representó de manera gráfica (temperatura contra tiempo) y tabular de modo que los estudiantes veían en el televisor del aula lo que sucedió con la medición de la temperatura de la bebida durante toda la sesión de clase. Esto les permitió en la mayoría de las tareas construir y justificar sus respuestas.

Ahora, en las fases de análisis de los datos y formulación y validación del modelo matemático, aparecen las prácticas variacionales de predicción y estimación al anticipar valores de temperatura de la bebida de manera local y global. Inicialmente, para la mayoría de los estudiantes resultó sencillo pensar en un modelo debido a su experiencia en cursos de matemáticas avanzados. En un principio sugirieron el modelo exponencial por su conocimiento de la ley de calentamiento y enfriamiento de Newton que modela el fenómeno en cuestión, pero les resultaba poco útil ya que desconocían una constante que era parte de la expresión analítica. Por ello, al formular el modelo eligieron usar los generados por GeoGebra haciendo regresión de dos variables sobre los datos recolectados.

La mayoría del grupo se enfocaban en modelar el conjunto total o parcial (desde la temperatura máxima) de los datos. Esto permitió que se construyeran diferentes modelos para intentar anticipar la temperatura de la bebida en el transcurso del tiempo. Entre los modelos se encuentran la función trigonométrica, la exponencial, la logarítmica, la potencia, la polinomial y la función por partes o a tramos. Para validar dichos modelos utilizaron herramientas como el coeficiente de correlación, diagramas residuales y si el comportamiento de la función en el transcurso del tiempo se estabiliza cerca de la temperatura ambiente. Esto evidenció cómo estas tres últimas fases del ciclo de modelación permitieron movilizar las prácticas variacionales de predicción y estimación para lograr determinar el comportamiento global del fenómeno y construir modelos de función.

Respecto al taller de presión y altura, no hubo la presentación de una situación problema en términos de la modelación matemática, sino que se inició con la toma de datos de presión, altitud, temperatura y tiempo. En las primeras fases del ciclo de modelación predominaron las prácticas variacionales anfitrionas de comparación y seriación; sin embargo, varios estudiantes recurrieron a los modelos de regresión de GeoGebra que se generó con los datos recolectados para explicar y justificar sus respuestas en las tareas iniciales. En las fases de experimentación y la recolección, clasificación y registro gráfico de los datos de presión y altitud los estudiantes se centraron en reconocer el tipo de variación, en la identificación de las variables involucradas en el fenómeno, el rango en el cual las cantidades de las magnitudes tienen sentido y el comportamiento constante, creciente o decreciente de las variables. Esto permitió que midieran el cambio de presión respecto a la altitud y analizaran cómo cambia esa medida conforme aumenta o disminuye la altitud para determinar el carácter estable del cambio. Se destaca el conocimiento y consultas en internet acerca del fenómeno por parte de varios estudiantes que les permitió comprender el comportamiento del fenómeno y dar sentido a sus respuestas.

Ahora, en las fases de análisis de los datos y formulación y validación del modelo matemático, aparecen las prácticas variacionales de predicción y estimación al anticipar valores de presión dada cualquier altitud y a la identificación de tendencias en la presión en intervalos de altitud. En general, para el grupo no representó una dificultad formular modelos matemáticos porque dominaban la técnica de regresión de dos variables, entonces, propusieron los modelos de regresión generados por GeoGebra a partir de los datos recolectados con la micro:bit. Se destaca los conocimientos extra matemáticos acerca del fenómeno y el uso de GeoGebra en la fase de validación que permitió refinar o reformular los modelos al comparar los modelos de regresión y los modelos teóricos.

En síntesis, el uso de la micro:bit para la toma de datos en el aula de clase, el uso de GeoGebra y el enfoque de la modelación permitió que los estudiantes construyeran, discutieran y validaran modelos de función que representaban los fenómenos de enfriamiento de una bebida caliente y el cambio de presión respecto al cambio de altitud y al mismo tiempo comprender los diferentes modelos teóricos sobre estos fenómenos.

6. Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales conclusiones de la investigación reportada en este documento. En primer lugar, se responde a la pregunta de investigación; luego, se señalan otros resultados relevantes que aportan a la disciplina y que son producto de la intervención didáctica; finalmente, se reconocen algunos de los alcances y limitaciones del estudio.

Así, respecto a la pregunta de investigación planteada, a saber: ¿cómo la modelación matemática de problemas auténticos, mediados por el uso de micro:bit, contribuye al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios? los resultados muestran que los fenómenos estudiados y el uso de la micro:bit para la toma y visualización de datos en el aula evidenciaron la autenticidad del problema planteado a los estudiantes. En ambos talleres de la secuencia, la micro:bit exhibió la representación gráfica y/o tabular de las cantidades de las magnitudes involucradas en los fenómenos abordados por lo que influyó en la descripción de la variación de las variables involucradas en cada situación o problema.

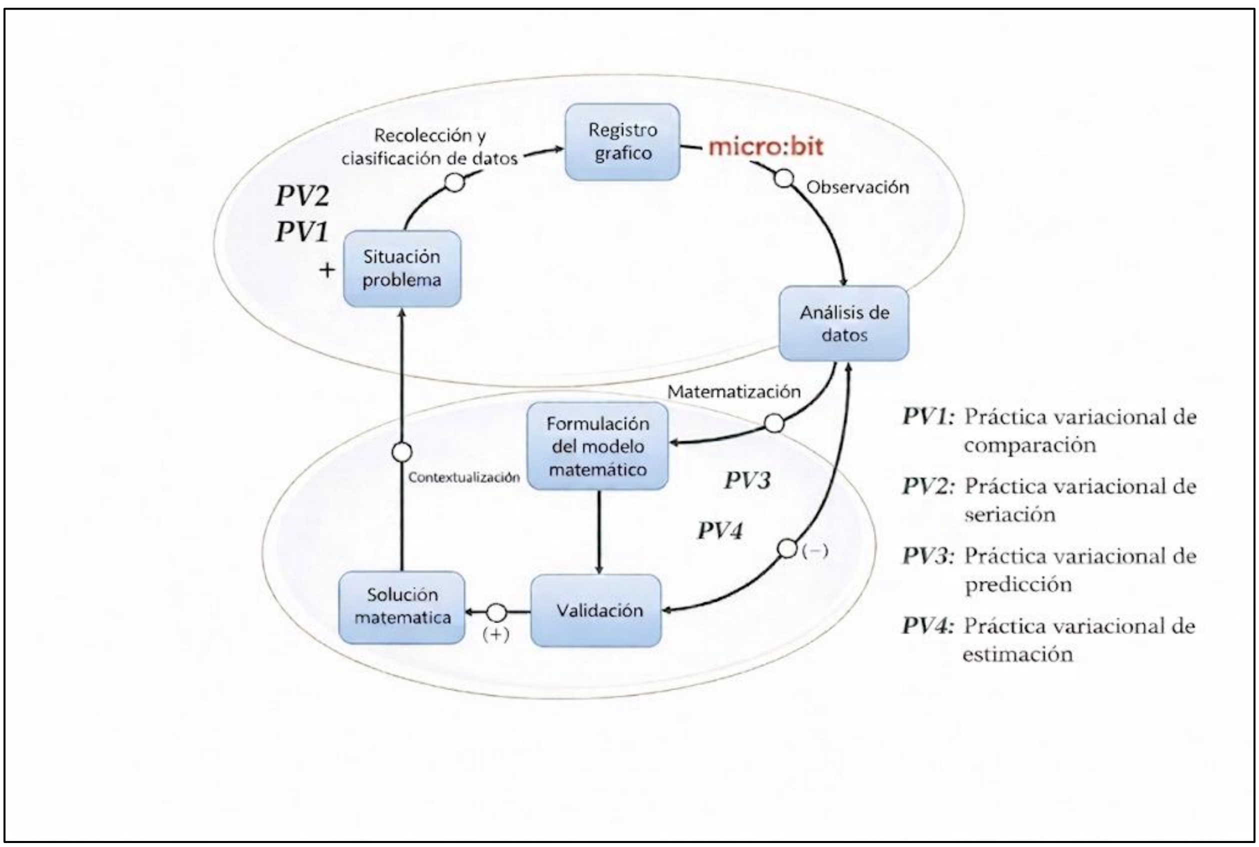
Así mismo, se presentan algunos casos de estudiantes que movilizan la práctica variacional de comparación y la seriación en las fases de la situación problema, toma de datos y registro gráfico del ciclo de modelación propuesto por Berrio et al. (2021) por lo que se evidencia cómo la micro:bit y el esquema del ciclo de modelación matemática orientó el estudio del fenómeno con el fin de medir el cambio en las cantidades de las magnitudes relacionadas y analizar la forma en que esa medida cambia.

En el caso de las fases de análisis de datos, formulación y validación del modelo matemático se observó cómo el uso del software GeoGebra para el tratamiento de los datos recolectados con la micro;bit ayudó a la construcción, discusión y reformulación de modelos de función generados a partir de la técnica de regresión. Asimismo, en estas últimas fases del ciclo de modelación varios estudiantes movilizaron la práctica variacional de predicción y la estimación con el fin de comprender por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen, y poder anticipar valores y comportamientos tendenciales.

Lo anterior ratifica lo propuesto por Berrio et al. (2021) sobre las fases del esquema de modelación matemática que permiten rastrear el proceso de modelación que exhiben los estudiantes al abordar una situación o problema y son puente para el estudio de núcleos conceptuales del Cálculo como la función y de conocimiento extra matemático sobre los fenómenos abordados. Además, se pudo evidenciar una estrecha articulación entre el ciclo de modelación y la movilización de las prácticas variacionales propuestas por Caballero (2018).

Figura 5

Articulación entre el ciclo de modelación, micro:bit y las prácticas variacionales



Estos resultados, esquematizados en la figura anterior, permiten concluir que las prácticas variacionales anfitrionas se movilizan a partir de las primeras fases del ciclo de modelación, pero de manera progresiva porque a pesar de que muchos estudiantes lograban describir y reconocer el tipo de variación presente en cada fenómeno no siempre recurrían a las prácticas variacionales de comparación y seriación. En el caso de las tres fases finales si se presenta con mayor intensidad la movilización de las prácticas variacionales de predicción y estimación.

Es preciso resaltar que la población de estudio fueron estudiantes de licenciatura en matemáticas que han transitado por cursos de matemáticas avanzados y que dominan el uso de GeoGebra y algunos también la técnica de regresión de dos variables. Además, los estudiantes contaban con un ordenador personal y acceso a internet para hacer consultas.

Respecto a la conjetura del experimento se planteaba que la integración de actividades de modelación matemática, diseñadas desde la experimentación y mediadas por tecnologías digitales, permitiría a los estudiantes desarrollar pensamiento funcional, promoviendo la construcción de modelos matemáticos cada vez más refinados sobre fenómenos físicos.

Tras la experimentación de la unidad de enseñanza se puede explicar con mayor amplitud algunos aspectos relacionados con sus dimensiones: el qué enseñar y el cómo enseñarlo. Respecto al qué enseñar, se explicó antes que la conjetura alude a aquellas nociones teóricas y conceptuales que involucra el pensamiento funcional; tales como, la modelación de un problema de variación y cambio en un medio digital permite visualizar las variantes e invariantes del problema, posibilita ver qué variables y relaciones entre variables son importantes, ver atributos, ver el comportamiento tendencial de gráficas, realizar aproximaciones a los infinitesimales y el infinito. Durante la implementación, emergieron otros objetos de estudio, como los modelos de regresión generados por GeoGebra.

El propósito de este reconocimiento es hacer explícito estos objetos matemáticos para que los profesores e investigadores que decidan implementar esta secuencia en el aula puedan anticipar y abordar adecuadamente inquietudes de los estudiantes que podrían surgir durante el proceso. En el caso de los modelos de regresión es necesario comprender las estadísticas que acompañan a cada modelo y la ampliación de cifras decimales del software pues las constantes de las expresiones analíticas son cantidades muy pequeñas.

Ahora, respecto al cómo enseñar los contenidos matemáticos, la conjetura del experimento planteó inicialmente que el estudio de las funciones debe empezar por la toma y el análisis de datos reales para la construcción de modelos matemáticos, que coadyuven a la comprensión de los diferentes significados de la función y sus relaciones funcionales, y la toma de datos reales y la visualización gráfica de fenómenos físicos con micro:bit y GeoGebra, coadyuva de manera significativa a la construcción de modelos matemáticos y al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes universitarios. Sin embargo, tras la experimentación de la secuencia, es posible ampliar esta dimensión de la conjetura.

A lo largo del experimento, la conjetura se reafirmó en cuanto al potencial de la experimentación y el uso de micro:bit y GeoGebra para promover el desarrollo del pensamiento funcional. Sin embargo, una observación clave durante el experimento es que la secuencia de enseñanza por sí sola no asegura con éxito el desarrollo del pensamiento funcional, ni el desarrollo del proceso de modelación. Es fundamental el acompañamiento y las orientaciones del profesor, quien juega un papel crucial en promover otros procesos dentro del aula, tales como la socialización e institucionalización de ideas, y el control sobre las experimentaciones realizadas. En este sentido, el proceso de modelación debe ser guiado cuidadosamente y los escenarios deben estar bien estructurados y controlados.

Aunque las actividades fueron diseñadas de forma controlada, algunos aspectos del experimento presentaron dificultades. Por ejemplo, las imprecisiones en la toma de datos, variables no consideradas o el rango de los datos, generó imprecisiones en las producciones de los estudiantes. Hubo estudiantes que consideraban un modelo lineal para explicar la relación entre la presión y la altitud porque los datos se aproximaban mejor a una recta; debido, a que solo se registró la presión en un intervalo de 25 metros en comparación a los 8000 metros de altura sobre el nivel del mar.

Es importante señalar que los datos son importantes para la construcción del modelo, pero también es relevante identificar el contexto de donde provienen para ver si son significativos, porque la tecnología, aunque facilita la visualización y agiliza el tránsito de ideas, debe ser instrumentada por el profesor para cuestionar la fiabilidad de los resultados y para ayudar a los estudiantes a comprender cómo se obtienen esos resultados. La intervención del profesor es clave para garantizar que los estudiantes no solo se limiten a ver los resultados en la pantalla, sino que desarrollen una comprensión profunda de lo observado allí, además de explicar y justificar sus observaciones con fundamentos matemáticos.

No obstante, las consideraciones iniciales en sus dos dimensiones fueron enriquecidas tras la implementación del siguiente modo: En la dimensión del qué enseñar, se amplió el conjunto de objetos de estudio necesarios para acompañar el desarrollo del pensamiento funcional, incorporando las estadísticas del modelo de regresión que, si bien no fueron previstos inicialmente, emergieron como indispensables durante la implementación. En la dimensión del cómo enseñar, se hizo evidente que el diseño de actividades debe ir acompañado de una mediación del profesor activa e intencionada. Es indispensable un andamiaje didáctico que oriente, encauce y profundice las acciones de los estudiantes, articulando lo empírico con lo teórico, y favoreciendo la construcción progresiva de modelos matemáticos significativos.

Así, la conjetura se reformula reconociendo que el desarrollo del pensamiento funcional no depende únicamente de los recursos o metodologías utilizados, sino de la forma en que estos son integrados y mediados dentro de un entorno didáctico cuidadosamente estructurado.

Finalmente, para futuras implementaciones es necesario contar con un aula computarizada con conexión estable de internet y la disposición de tres sesiones de clase de dos horas por sesión para cada taller. En el caso del segundo taller, disponer de un ascenso significativo para que el conjunto de datos de presión sea representativo. Además, se requiere el conocimiento del investigador o docente en el manejo e instalación de sensores y algunos periféricos para la toma de datos con micro:bit. Se propone algunas líneas de investigación que podrían contribuir a la profundización de los hallazgos obtenidos en el estudio. Es fundamental considerar el surgimiento de otras prácticas variacionales que permita evidenciar de manera detallada el pensamiento funcional de los estudiantes cuando enfrentan un fenómeno o situación de cambio.

Referencias bibliográficas

Acosta, M., & Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Editorial Universidad Distrital José Francisco Caldas. https://doi.org/10.14483/9789585434462

Amado, M. J., & Pinto, Y. V. (2023). *Estudio dinámico de las secciones cónicas como lugares geométricos: Una propuesta para favorecer las habilidades del proceso de representación* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/14855

Arciniegas Rueda, H. L. (2023). *Aula inclusiva de matemáticas: Un estudio de situaciones de variación y cambio* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/12622

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos* [Conferencia]. Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Bogotá, Colombia. https://www.researchgate.net/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacion_matematica

Berrio, J., Peña, Z., & Torrenegra, M. (2021). Desarrollo del proceso de modelación matemática en licenciados en formación. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía, 14*(1), 79-101. https://doi.org/10.15332/s1657-107X

Blomhøj, M. (2004). *Modelación matemática: Una teoría para la práctica* (M. Mina, Trad.). National Center for Mathematics Education. (Obra original publicada en 2004).

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato: La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/331563013

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Editorial Universidad de Antioquia.

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática: Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Delgado, I. (2025). *Secuencia de enseñanza para potenciar el proceso de demostración: Incorporación de las ideas de Fermat sobre derivadas* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander].

Fiallo, J., & Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimento de enseñanza con estudiantes de 5to secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio PUCP. http://hdl.handle.net/20.500.12404/1571

Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? — A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 307-330. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10215-2

Koyunkaya, M., & Dede, A. (2024). Using different digital tools in designing and solving mathematical modelling problem. *Education and Information Technologies, 29*, 19035-19065. https://doi.org/10.1007/s10639-024-12577-3

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Colombia Aprende.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Muñoz, L. (2026). *Caracterización del razonamiento covariacional de estudiantes universitarios mediante la modelación de situaciones dinámicas con tecnologías digitales* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander].

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Trad.). SAEM Thales.

Pineda, M. (2017). *Desarrollo de pensamiento funcional: Una experiencia en un programa de enriquecimiento extracurricular* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/37510

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma del Estado de Morelos].

Soto, S. (2016). *Diseño de una propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la función lineal para fortalecer los procesos de aprendizaje en el pensamiento variacional* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNAL. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/57152

Suárez Salinas, W. (2016). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de calor y temperatura para estudiantes de educación media* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNAL. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59489

Toloza, S. (2022). *Contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/9858

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: El caso de Alberto. Alexandria: *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J., & Parra-Zapata, M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. En M. Rodríguez, M. Pochulu, & F. Espinoza (Eds.), *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Vol. 2, pp. 67-90). Universidad Nacional de Villa María.